UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO -UFES

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FELIPE CALIARI FABRES

VITÓRIA- ESPÍRITO SANTO

DEZEMBRO DE 2021

Técnicas de Resolução de Problemas

Felipe Caliari Fabres

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Florêncio Guimarães Filho.

Vitoria - Espírito Santo

Dezembro de 2021

Agradecimentos:

Em primeiro lugar os agradeço a Deus, por está vivo e pode concluir este trabalho.

Depois agradeço a minha mãe que me deu todo o suporte para ser alguém na vida.

Agradeço também a minha irmã Raysa por me ajuda na correção deste trabalho.

Ao meu orientador Florêncio, vai os meus humildes agradecimentos, por ele ser um bom professor.

Ao meu amigo Fidellis por ele ter me ajudado na introdução deste trabalho.

A todos os meus amigos de mestrado que sempre me apoiaram e torceram por mim.

Resumo

Nesta dissertação de mestrado, serão apresentadas e aplicadas algumas técnicas voltadas para resolução de problemas de Geometria no contexto de competições olímpicas de Matemática, a saber: técnica do elemento mais nobre, técnica do problema resolvido, generalização, especialização e analogia. Tais técnicas, discutidas por G. Polya em seu livro "A Arte de resolver problemas", podem auxiliar professores e estudantes do Ensino Básico na eleboração de roteiros de estudo voltados para a resolução de problemas de Geometria de considerados complexos. Esta dissertação caracteriza-se, portanto, como um conjunto de unidades didáticas, as quais podem ser utilizadas por professores das redes pública e privada atuantes em países lusófonos para treinamento de estudantes via estudo dirigido individual ou coletivo. Cada capítulo desta dissertação, à sua maneira, lança luz sobre uma ou mais dessas técnicas, ilustrando-as por meio da resolução detalhada de problemas extraídos de competições nacionais e internacionais.

ABSTRACT

In this dissertation, we present and apply some techniques aimed at solving Geometry problems in the context of Olympic Mathematics competitions, namely: the technique of the noblest element, the technique of the solved problem, generalization, specialization, and analogy. Such techniques, exposed by G. Polya in his book “The Art of Solving Problems”, can help teachers and students of Basic Education in the elaboration of study guides aimed at solving difficult Geometry problems. Specifically, this dissertation is characterized as a set of didactic units, which can be used by public and private teachers of Portuguese-speaking countries to train students via individual or collective approaches to Olympic competitions. Each chapter of this dissertation sheds light on one or more of these techniques, illustrating them through the detailed resolution of problems extracted from national and international competitions.

Sumário

Introdução

A habilidade de resolver problemas é considerada uma das mais importantes na formação escolar dos alunos, uma vez que ela ajuda a desenvolver o raciocínio lógico dedutivo e capacidade de abstração, generalização, criatividade, persistência e resiliência, conforme diz PEREIRA (2018) [25]. A importância desta habilidade extrapola os limites da sala de aula no sentido de contribuir para a formação de cidadãos mais críticos e mais bem preparados para o mundo do trabalho, seja pela via tradicional ou empreendedora, conforme se encontra no portal do MEC (Ministério da Educação), em [26].

Dado que alunos e professores, em geral, apresentam dificuldades de raciocínio lógico e dedutivo no contexto da resolução de problemas olímpicos, conforme diz Silva(2017), no artigo (mencionado em [27]), é que foi concebida a proposta desta dissertação. Com ela, estudantes e professores do Ensino Básico poderão elaborar planos de estudos voltados para a resolução de problemas matemáticos olímpicos.

Atualmente, no Brasil, existem diversas competições olímpicas de Matemática. Dentre elas, destacamos Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Do ponto de vista histórico, a primeira olimpíada de Matemática, nos moldes atuais, ocorreu em 1894 na Hungria, como destacado pelo site da OBM [1]. Com o passar do tempo, competições similares foram sendo criadas e difundidas pelo leste europeu, culminando na primeira Olimpíada Internacional de Matemática (**IMO**) em 1959.

Ainda de acordo com a OBM, em seu site [2],Segundo a OBM, a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática se deu no ano de 1979 e foi organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Com o passar dos anos, houve várias mudanças no seu formato, porém foi mantido os seus objetivos centrais, que são:

-

[1]Vide [22]
[2]Vide [22]

- Interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino da matemática no Brasil, estimulando alunos e professores a um aprimoramento propiciado pela participação em olímpiadas;

- Descobrir jovens com talento matemático excepcional e coloca-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível.

Em sua primeira configuração, a OBM era disputada apenas por alunos do Ensino Médio, porém hoje a OBM é aplicada para quatro níveis distintos, a saber:

- Nível 1: composto por alunos do sexto e sétimo ano do ensino fundamental;

- Nível 2: formado por alunos do oitavo e nono ano do ensino fundamental;

- Nível 3: formado por alunos do ensino médio;

- Nivel 4: composto por alunos universitários.

A OBMEP, por sua vez, é uma competição promovida pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), a qual ocorre anualmente desde 2005. A princípio, tal competição foi voltada exclusivamente para alunos das escolas públicas, porém, desde o ano de 2017 foi aberta também para estudantes de escolas privadas. Essa olímpiada é aplicada para três níveis:

- Nível 1: composto por alunos do sexto e sétimo ano do ensino fundamental;

- Nível 2: formado por alunos do oitavo e nono ano do ensino fundamental;

- Nível 3: formado por alunos do ensino médio.

As áreas da matemática que mais são cobradas em olimpíadas são basicamente quatro, a saber: Aritmética, Álgebra, Geometria e Combinatória. Em todas essas áreas, principalmente na área de Combinatória, as olimpíadas apresentam uma série de problemas diversificados, que necessitam de um raciocínio lógico amplo, exigindo que o aluno pense de forma diferenciada. Isso estimula o aluno a almejar desenvolver mais o raciocínio lógico e querer aprender mais os conceitos matemáticos.

Como ainda existem poucos materiais disponíveis para o uso de professores e alunos em treinamento para olimpíadas, desenvolvemos este conjunto de unidades didáticas com temática “Geometria”, o qual apresenta algumas estratégias de resolução de problemas estabelecidas por POLYA (1995), em [1]. Essas estratégias envolvem resolução de problemas de construções geométricas, bem como demonstrações de lemas e teoremas que são fundamentais na Geometria.

A maioria das técnicas e estratégias que serão apresentadas no decorrer deste texto, devem ser utilizadas para resolver problemas geométricos. FOMIM (2017), em [23], p. 167, afirma que “a Geometria escolar é uma oportunidade maravilhosa para o desenvolvimento do pensamento lógico e consistente”. Pare ele, essa disciplina pode ser considerada um jogo com regras axiomáticas criadas na Grécia antiga. Além disso, pelo fato da Geometria ser uma parte inalienável da Matemática e ter fortes elos com outras áreas do conhecimento matemático, um bom professor encontrará nesta área do conhecimento ótimas oportunidades para demonstrar a integridade da Matemática. Sem contar o fato de que as figuras, planas e espaciais, dão aos alunos uma melhor compreensão melhor dos objetos que estão presentes em várias situações “corriqueiras”.

Segundo LOBATO (2019), em [24], a Geometria é uma disciplina indispensável ao desenvolvimento humano. Muitos estudantes não conseguem perceber a importância desta disciplina na formação dos cidadãos e não conseguem enxergar que ela está se manifest a de diferentes formas na realidade em que eles vivem.

LOBATO (2019), em [24], lança luz sobre um obstáculo muito agravante no Ensino e na Aprendizagem da Geometria nas escolas: o fato de muitos professores se limitarem ao uso do livro didático. Na maioria dos livros, a Geometria se resume a um conjunto de definições, propriedades e fórmulas, esquecendo-se dos seus conceitos e aplicações de natureza histórica e lógica, isto é, axiomática, conforme diz LOPES (2013), mencionada em [28].

No processo de Ensino e Aprendizagem, é necessário exercitar alguns conteúdos e conceitos que já foram previamente trabalhados e assimilados pelos estudantes. Nesse sentido, a resolução de problemas é algo de suma importância. As técnicas de resolução de problemas que serão apresentadas, podem se tornam um facilitador na compreensão de alguns conceitos geométricos por parte dos estudantes, uma vez que elas auxiliam a resolver os problemas de forma mais simples e prática.

POLYA(1995), em [1], defende que são necessários quatro passos para a resolução de um problema matemático. O primeiro passo é **compreender** bem o enunciado do problema. Para isso é necessário compreender quais são os dados fornecidos pelo enunciado e qual é a incógnita que se deseja calcular. O segundo passo é **elaborar um plano** para a resolução do problema. O terceiro passo é **executar este plano**, e por último é necessário **fazer uma retrospectiva**, isto é, verificar se a incógnita encontrada satisfaz as condições do enunciado.

POLYA afirma ainda que na Matemática existem basicamente dois tipos de problemas, a saber, os **de determinação** e os **de demonstração**. Para que o enunciado de um problema de determinação seja bem compreendido, quase sempre é necessário serem feitas algumas indagações, como, por exemplo: "Quais são os dados do problemas?", "Qual é a incógnita?", "Qual é a condicionante?", "Essa condicionante é suficiente para determinar a incógnita?". Estas e outras indagações ajudam a compreender o problema melhor e na maioria das vezes, as mesmas são feitas naturalmente. O autor enfaqtiza que nos problemas de demonstração é necessário saber os dados do problema, que são as hipóteses, e a conclusão na qual se deseja chegar, que é a tese.

> "Ao procurar ajudar o aluno, com discrição e naturalidade, o professor é repetidamente levado a fazer as mesmas perguntas e indagar os mesmos passos. assim em inúmeros problemas temos que indagar: **Qual é a incógnita?** Podemos variar as palavras e indagar a mesma coisa de muitas maneiras diferentes: **Do que é que se precisa?**, o que é que se quer? O que é que você deve procurar? A finalidade destas é focalizar a atenção do aluno na incógnita."(POLYA,1995, em [1],p.2)

POLYA também destaca que antes de ser elaborado um plano ou uma estratégia para resolver o problema, é necessário que o enunciado seja claramente compreendido. Dessa forma, as inter-relações entre os dados e a incógnita poderão serão percebidas claramente. Isto auxiliará a elaboração de um plano de resolução. Para estabelecer este plano ou estratégia, as vezes é necessário se lembrar de algum problema parecido, que possua a mesma incógnita, e até mesmo de alguns fatos e resultados matemáticos que foram anteriormente demonstrados. Esses resultados constituem, muitas vezes, uma ferramenta para para solução do problema. Depois de o problema ser resolvido, é interessante que seja feito um retrospecto e discussão de cada etapa da resolução, pois a partir daí pode-se gerar novas soluções ainda melhores.

POLYA afirma que assim como uma boa casa não poderá ser construída sem ótimos alicerces, uma boa estratégia de resolução também não poderá ser concebida sem uma ótima bagagem de conceitos e fatos matemáticos. Isto implica que uma revisão de conceitos e resultados demonstrados se faz necessária.

Por fim, o autor conclui que a presença de ótimas ferramentas na construção não significa que a casa ficará boa, assim como o fato de se ter um ótimo conhecimento de fatos matemáticos prévios, não significa possuir uma ótima estratégia para solucionar um problema. É necessário conhecer quais fatos ou resultados irão ajudar na resolução, e como usá-los.

> "Sabemos, naturalmente, que é dificil ter uma boa idéia se pouco conhecermos do assunto, que é impossível tê-la se dele nada soubemos. As boas idéias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamentes adquiridos. Para uma boa idéia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma idéia boa sem lembrar de alguns fatos pertinentes. Não bastam os materiais para a construção de uma casa, mas não podemos construí-la sem lançar mão dos matériais necessários. Os matériais indispensáveis a resolução de um problema matemático são certos ítens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormentes resolvidos e teoremas anteriormentes demosntrados."(POLYA,1995, em [1],p 6)

O nível de dificuldade dos problemas olímpicos às vezes acaba desmotivando muitos alunos, por serem problemas que exigem conhecimento matemático e raciocínio lógico apurados. Nesse sentido, esta dissertação apresenta algumas técnicas que podem auxiliar a elaborar estratégias de resolução para estes problemas. Serão apresentadas basicamente seis técnicas, a saber: a técnica do elemento mais nobre, a técnica do problema resolvido, generalização, especialização, analogia e o elemento auxiliar.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira. No primeiro capítulo, que trata da técnica do elemento mais nobre e do elemento auxiliar, serão apresentados e resolvidos vinte e quatro problemas. No segundo capítulo, serão abordadas as técnicas de generalização, especialização e analogia, onde serão discutidos o total de oito problemas. O último capítulo tratará a técnica do problema resolvido, com foco em problemas de construções geométricas utilizando régua e compasso. Serão apresentados onze exemplos de aplicação desta técnica. A dissertação finaliza com algumas considerações e possibilidades de trabalhos futuros.

1 Resolução de problemas de geometria

1.1 A técnica do elemento mais nobre

A idéia dessa técnica é eleger um elemento do problema, que a príncipio possuí uma propriedade mais nobre, do que o elemento proposto no enunciado. E depois deve ser mostrado que o elemento que foi eleito é exatamente o elemento do enunciado. Isto é, a técnica se resume em substituir a proposição do elemento do enunciado, por uma mais nobre. E a partir disto, deve ser resolvido o problema com a proposição mais nobre e, após isso, deve-se mostrar que este problema coincide com o problema proposto no enunciado.

Necessita-se o nomear de propriedade mais nobre, aquela propriedade na qual se estar mais familiarizado. O elemento que possuí essa propriedade deve ser chamado de elemento mais nobre.

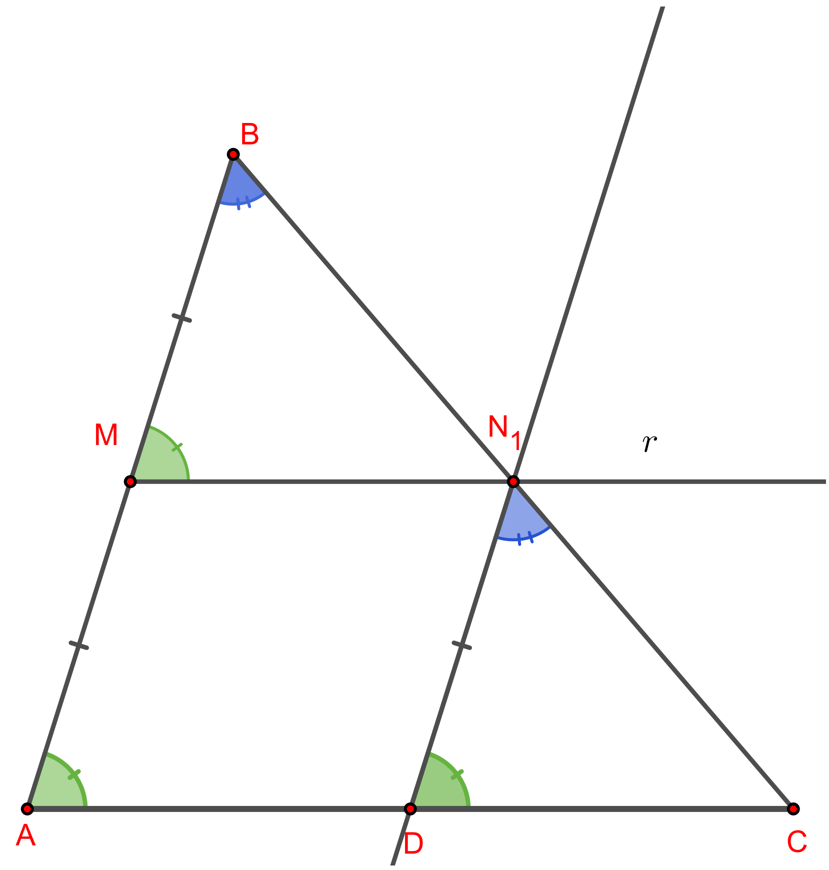
Para compreender melhor esta técnica, considere os exemplos abaixo.

Definição: O segmento DE é a base média de um triângulo ABC se as suas extremidades, que são os pontos D e E, são pontos médios de dois dos lados do triângulo ABC.

Exemplo 1: O Teorema da base média. Em um triângulo ABC e seja M e N os pontos médios dos lados AB e AC respectivamente. Então a base média MN é paralela ao lado BC e além disso $MN = \frac{1}{2}BC$.

Demonstração: Observe que neste exemplo foi dada a reta MN, em que M e N são os pontos médios dos lados AB e AC, porém não se conhece muitas propriedades de retas que ligam dois pontos médios, mas é bem conhecido as propriedades de retas paralelas. Portanto ao invés de ser considerada a reta MN, que liga dois pontos médios, deve-se ter em conta uma reta r paralela à BC passando pelo ponto M, e será mostrado que essa reta r passa pelo médio N, demonstrando assim que a reta r é coincidente com a reta MN. Nesse caso a reta r é o elemento mais nobre do que a reta MN, uma vez que são bem conhecidas as propriedades de paralelismo entre retas.

Sendo assim considere a figura:



Nessa figura, seja N_1 o ponto de intercessão entre AC e a reta r. Agora será traçada uma reta s paralela a AB passando por N_1, que irá intersectar o lado BC em D, obtendo assim o paralelogramo BMN_1D. Logo $N_1D = MB = MA$ e como N_1D é paralela a AB então $D\hat{N}_1C = B\hat{A}C$ e $C\hat{D}N_1 = C\hat{B}A$. Mas como MN_1 é paralela a BC por construção então $C\hat{D}N_1 = C\hat{B}A = N_1\hat{M}A$. Assim os triângulos AMN_1 e N_1DC são congruentes pelo caso (ALA), e portanto $AN_1 = N_1C$ e $BD = MN_1 = DC$. Consequentemente, N_1 é o ponto médio de AC e $N_1 = N$. Logo a reta MN é coincidente com r, que por sua vez é paralela à reta BC.

Além disso:

$$BC = BD + DC = MN_1 + MN_1 = 2MN_1$$

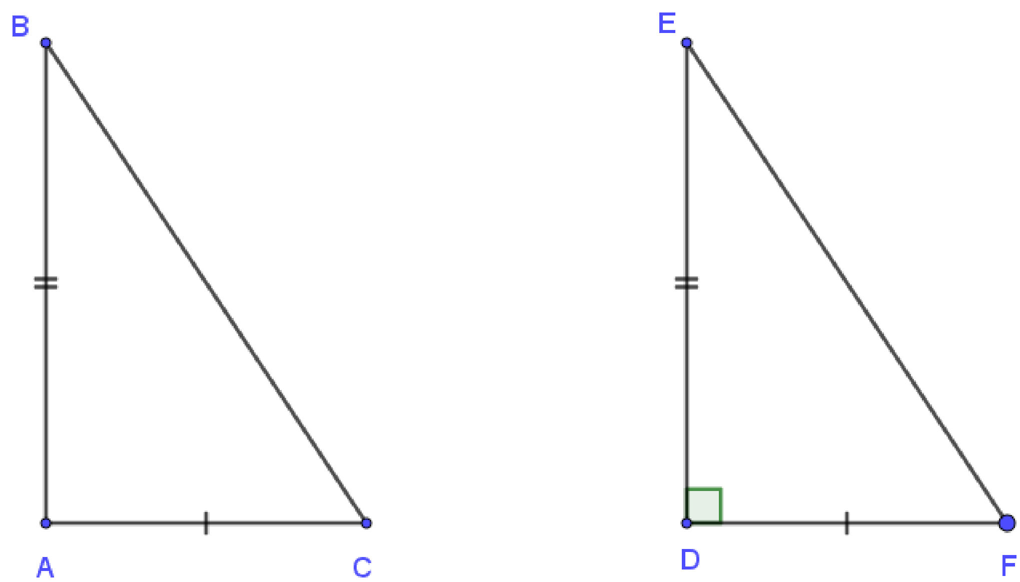
$$MN = MN_1 = \frac{1}{2}BC$$

Com isso a demonstração foi concluída

Observe que neste exemplo o uso da paralela ao lado BC se faz mais eficiente do que a base média, pois graças ao paralelismo existente entre as retas BC e r, podemos usar a igualdade entre os segmentos MB e MD.

Exemplo 2: A recíproca do Teorema de Pitágoras: Dado um triângulo ABC, onde $BC^2 = AB^2 + AC^2$ então mostre que $B\hat{A}C = 90^o$.

Solução: Neste exemplo é dado um triângulo ABC em que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Mas esta propriedade não boa de se trabalhar, uma vez que não são bem conhecidas as suas consequências. Por outro lado, ao considerar um triângulo retângulo DEF de forma que os catetos DE e DF tenham as mesmas medidas que os lados AC e AB, respectivamente, e com ângulo reto em D, é válida uma propriedade bem conhecida que é o famoso teorema de Pitágoras, que por sua vez é um teorema com o qual todos estão muito bem familiarizados. Logo neste exemplo o triângulo retângulo DEF é mais nobre do que o triângulo ABC. Por fim necessita-se mostrar que o triângulo retângulo DEF é congruente ao triângulo ABC. Para mostra essa congruência deve-se ter em mente que $E\hat{D}F = 90^o$, $DE = AB$ e $DF = AC$, como mostra a figura abaixo:



Pelo teorema de Pitágoras pode-se concluir que:

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow$$

$$EF = BC$$

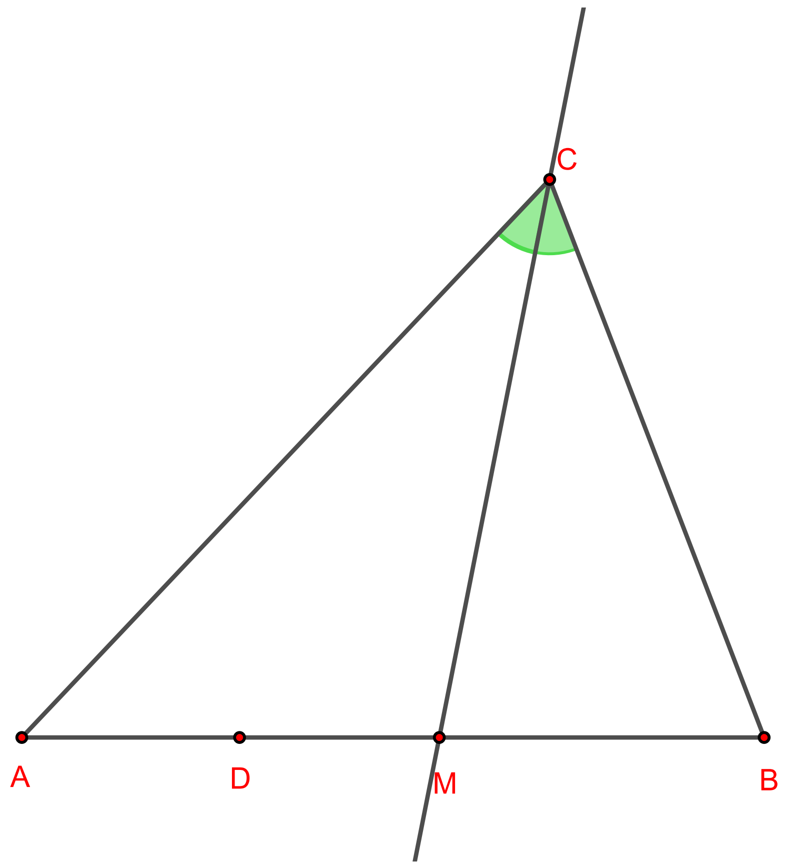
Logo pelo caso de congruência (LLL), pode ser entendido que os triângulos DEF e ABC são congruentes, visto que $DE = AB$, $DF = AC$ e $EF = BC$. Portanto $\hat{A} = \hat{D} = 90^o$. Assim a demonstração está finalizada

Observe novamente que o ângulo reto em no vértice D é mais nobre que a condição dada no enunciado, uma vez que $E\hat{D}F$ sendo reto pode-se usar o teorema de Pitágoras.

No próximo exemplo será usado um resultado que está demonstrado na página 34, referente à bissetriz interna de um triângulo.

Exemplo 3: A Recíproca do Teorema da bissetriz interna: Em um triângulo ABC seja T um ponto sobre o lado AB tal que $\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BC}$. Então mostre que CT é a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$.

Demonstração: Neste exemplo foi dado um ponto T sobre o lado AB com a propriedade de que $\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BC}$. É um pouco dificil de se trabalhar com esta propriedade, uma vez que nossos alunos não estão bem familiarizados com proporções. Ao invés disso, pode-se considerar um ponto M sobre o lado AB de forma que CM seja bissetriz $A\hat{C}B$. Observe que ao ter em mente a bissetriz CM, é válido um resultado muito conhecido no qual os alunos já estão mais familiarizados. Este resultado é chamado de teorema da bissetriz interna. Logo o ponto M é mais nobre que o T, uma vez que CM é uma bissetriz do triângulo ABC e sabemos que o teorema da bissetriz interna é valido. Agora necessita-se mostrar que o ponto M e o ponto T são coincidentes, e isso faz com que CT seja uma bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. Para isso observe a figura abaixo:



Como CM é a bissetriz do ângulo $\hat{C}$, então pelo teorema da bissetriz interna pode-se concluir que:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AT}{TB}$$

Aplicando a propriedade das proporções deve-se entender que:

$$\frac{AM + MB}{MB} = \frac{AT + TB}{TB}$$

Mas como:

$$AM + MB = AT + TB = AB$$

Logo:

$$\frac{AB}{MB} = \frac{AB}{TB} \Leftrightarrow MB = TB$$

Como os pontos M e T pertencem ao lado AB e ambos estão a mesma distância do ponto B segue então que B e M são pontos coincidentes. Assim a demonstração está finalizada.

O próximo exemplo foi proposto por COXETER, 1967, mencionado em [3]

Exemplo 4: Considere um quadrado $ABCD$ e E um ponto dentro do quadrado tal que: $AE = BE$ e $E\hat{A}B = 15^o$. Demonstre que o triangulo CEB é equilátero

Solução: Segundo o POLYA(1995), em [1],p 4, antes de se elaborar qualquer plano de resolução, necessita-se identificar os dados do problema e a tese.

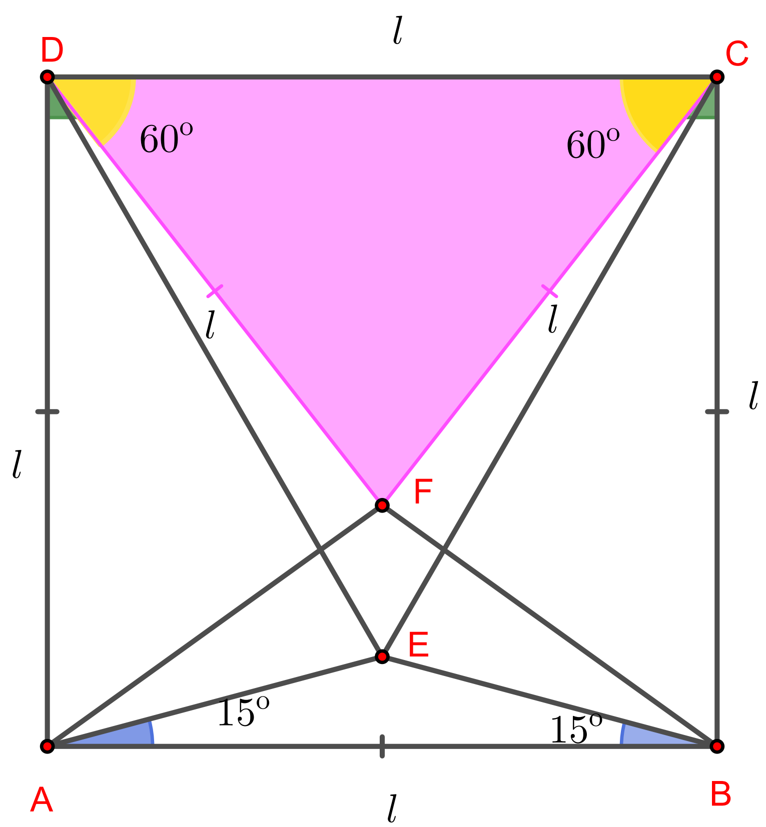
Hipóteses:

- $ABCD$ é um quadrado;
- E é um ponto no seu interior do quadrado tal que $AE = BE$ e $E\hat{A}B = 15^o$

Tese:

- . Mostrar que o triângulo EDC é equilátero.

O próximo passo para resolver este problema é desenhar uma boa figura com o intuito de compreender melhor o problema. Para isso considere a figura abaixo:



Agora para ser elaborado um plano de resolução, será tomado um ponto F na figura, de modo que o triângulo DCF seja equilátero. Deve ser feito isso uma vez que o triângulo equilátero DCF possui mais propriedades elementares do que o triângulo isóceles ABE, isto se deve ao fato dos seus três lados serem iguais. O triângulo DCF torna, a princípio, o ponto F mais nobre do que o ponto E . Todavia, no final, será mostrado que os pontos E e F são coincidentes.

Observe que se DCF é equilátero então $F\hat{D}C = F\hat{C}D = 60^o$, logo:

$$A\hat{D}F = A\hat{D}C - F\hat{D}C = 90^o - 60^o = 30^o$$

Agora como $AD = DC = DF$ então o triângulo ADF é isósceles e portanto:

$$D\hat{A}F = A\hat{F}D = \frac{(180^o - 30^o)}{2} = 75^o$$

Neste caso pode ser concluído:

$$F\hat{A}B = 90^o - D\hat{A}F = 90^o - 75^o = 15^o$$

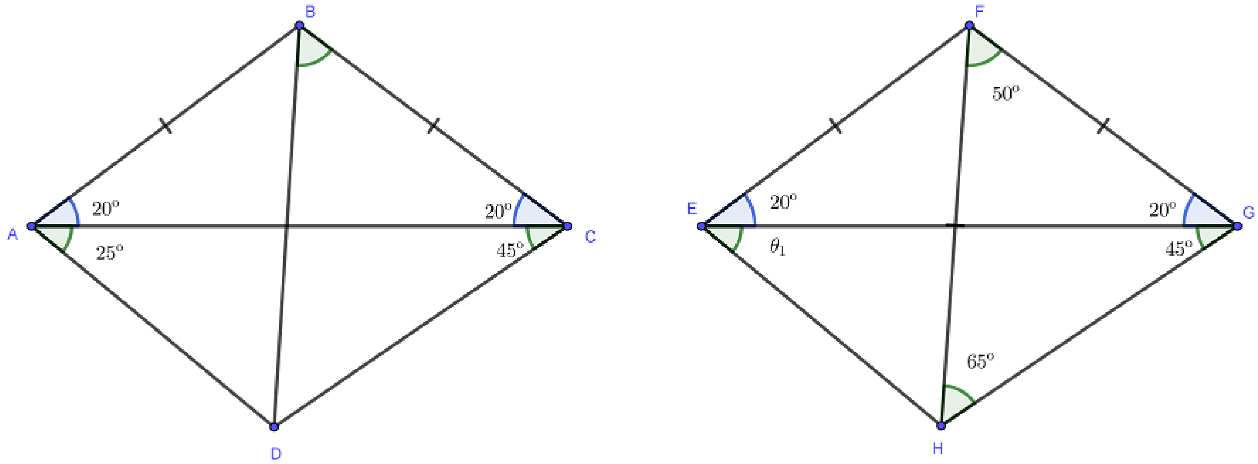
Logo $F\hat{A}B = E\hat{A}B = 15^o$.

Agora por um raciocínio análogo a este, deve-se concluir também que $F\hat{B}A = 15^o = E\hat{B}A$. Por fim, pelo caso de congruência (ALA) será entendido que os triângulos ABE e ABF são congruentes, visto que o lado AB é comum aos dois triângulos e além disso $F\hat{A}B = E\hat{A}B$ e $F\hat{B}A = E\hat{B}A$. Assim o ponto F coincide com o ponto E , visto que ambos estão no mesmo semiplano definido pela reta AB. E neste caso o triângulo DEC é equilátero e a demonstração está finalizada.

Novamente observe que neste exemplo o uso do triângulo equilátero DCF foi muito mais eficiente do que o uso do triângulo isósceles ABE. Então o triângulo equilátero DEC foi mais nobre que o triângulo isósceles AEB.

Exemplo 5: OBM 2008 Nível 3: em [11] Considere um quadrilátero $ABCD$, onde $AB = BC$, $B\hat{A}C = 20^o$,$C\hat{A}D = 25^o$ e $A\hat{C}D = 45^o$. Mostre que $D\hat{B}C = 50^o$.

Demosntração: Neste exemplo será usada a seguinte notação: $B\hat{A}C = \alpha$, $C\hat{A}D = \theta$ e $A\hat{C}D = \gamma$ como mostra a figura:



Nesta questão será construído um quadrilátero $EFGH$ de forma que o triângulo ABC e EFG seja congruentes com $EF = FG = BC = AB$, $EG = AC$ e $F\hat{E}G = B\hat{A}C$. O ponto H deve ser definido de forma $H\hat{F}G = 50^o$ e $H\hat{G}F = B\hat{C}D = 20^o + 45^o = 65^o$

A partir de agora será mostrado que esses dois quadriláteros devem ser congruentes. Observe que ao somar os ângulos internos do triângulo FHG deduz-se que:

$$F\hat{H}G = 180^o - 50^o - 65^o = 65^o = H\hat{G}F$$

Logo o triângulo FHG é isósceles com $FH = FG = EF$ e assim entende-se que o triângulo EFH também é isósceles. Portanto $F\hat{H}E = F\hat{E}H = 20 + \theta_1$ onde $\theta_1 = G\hat{E}H$.

Agora vale a pena observar que neste exemplo o quadrilátero $EFGH$ é mais nobre do que o quadrilátero $ABCD$, uma vez que a diagonal FH divide o quadrilátero $EFGH$ em dois triângulos isósceles, a saber os triângulos EFH e FGH. Esses triângulos por sua vez possuem propriedades mais nobres que os triângulos ABD e BCD, pelo fato destes dois últimos triângulos não possuirem, a princípio, dois lados com a mesma medida.

Por outro lado ao somar os ângulos internos do triângulo EFG pode-se chegar a conclusão de que $E\hat{F}G = 140^o$. Logo:

$$E\hat{F}H = E\hat{F}G - H\hat{F}G = 140^o - 50^o = 90^o$$

Assim o triângulo EFH é um triângulo retângulo isósceles e portanto:

$$F\hat{E}H = F\hat{H}E = 20^o + \theta_1 = 45^o$$

$$G\hat{E}H = \theta_1 = 25^{\circ} = C\hat{A}D$$

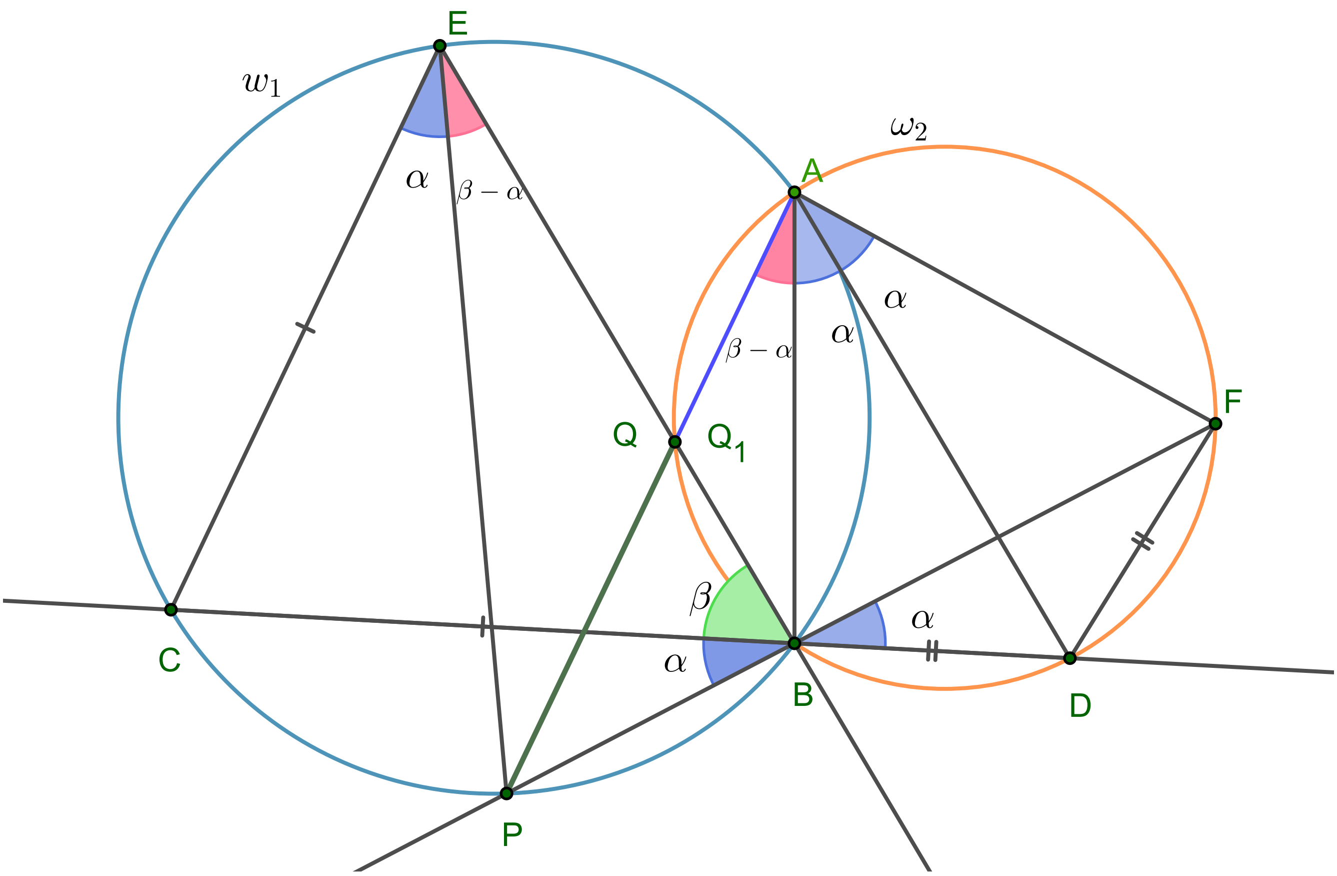
Logo os triângulos ADC e EHG são congruentes pelo caso de congruência (ALA) , visto que $AC = EG$, $C\hat{A}D = G\hat{E}H$ e $A\hat{C}D = H\hat{G}E = 45^{\circ}$. Todavia, é garantido também que ABC e EFG são congruentes por construção. Logo os quadriláteros $ABCD$ e $EFGH$ são congruentes e portanto:

$$C\hat{B}D = G\hat{F}H = 50^{\circ}$$

Assim a demonstração está acabada.

Exemplo 6: Olimpíadas Iraniana de Geometria - 2017, em [13]:. Duas circunferências w_1 e w_2 se intersectam nos pontos A e B. Uma reta qualquer passando por B corta w_1 e w_2 em C e D, respectivamente. Os pontos E e F são escolhidos sobre w_1 e w_2 , respectivamente, de modo que $CE = CB$ e $BD = DF$. Suponha que BF intersecta w_1 em P e que BE intersecta w_2 em Q. Prove que A, P e Q são colineares.

Solução: Considere a figura abaixo:



Nesta questão pode-se trocar o ponto Q pelo ponto Q_2, que será a intercessão da reta EB com a reta AP. Isto, por que a intercessão de duas retas possuí propriedades bem conhecidas e mais simples de serem utilizadas, já as propriedades da intercessão de uma reta com círculo são um pouco mais complexas para este exemplo. Isto faz com que o ponto Q_2 seja mais nobre do que o ponto Q. No final será mostrado que o ponto Q_2 coincide com o ponto Q.

A princípio observe que $Q_2 \neq B$, pois se B e Q_2 fosse coincidentes então a reta BP seria coincidente com a reta AP, e isto garantiria que o ponto A iria coincidir com o ponto F. Mas o ponto F é diferente do ponto B e do ponto P. Por outro lado como $F = A$, então $F \in \omega_1$. Assim os três pontos colineares, F, B e P, estariam sobre o mesmo círculo o que seria um absurdo. Portanto $Q_2 \neq B$.

Como o triângulo ECB é isósceles com $BC = CE$, então $C\hat{E}B = C\hat{B}E = \beta$. Todavia os pontos A, B, P, C e E são pontos sobre o círculo w_1. Consequentemente $P\hat{B}C = P\hat{E}C = \alpha$ e:

$$P\hat{A}B = P\hat{E}B = C\hat{E}B - P\hat{E}C = \beta - \alpha$$

Observe ainda que $P\hat{B}C = F\hat{B}D = \alpha$, pois esses ângulos são opostos pelo vértice B. E como o triângulo BDF é isósceles com $BD = DF$, então $B\hat{F}D = F\hat{B}D = \alpha$. Mas o quadrilátero $ABDF$ está inscrito no círculo w_2, e com isso:

$$D\hat{A}F = F\hat{B}D = B\hat{F}D = B\hat{A}D = \alpha$$

Assim:

$$P\hat{A}F = P\hat{A}B + B\hat{A}D + D\hat{A}F = \alpha + \beta = P\hat{B}C + C\hat{B}E = P\hat{B}E = P\hat{B}Q_2$$

Aqui deve ser observado que a última igualdade só foi possível uma vez que Q_2 está sobre o segmento BE.

Agora observe que os triângulos PBQ_2 e PAF são semelhantes pelo caso (AA), visto que $P\hat{A}F = P\hat{B}Q_2$ e $A\hat{P}F = B\hat{P}Q_2$.

Novamente esta última igualdade só pôde ser verificada, uma vez que o ponto B está no segmento PF e Q_2 está no segmento AP. Observe o quão fundamental foi o fato de Q_2 ser a intercessão de AP com BE .

Então pode ser concluído que $P\hat{F}A = P\hat{Q_2}B$. Com isso:

$$B\hat{F}A + B\hat{Q_2}A = P\hat{F}A + B\hat{Q_2}A = P\hat{Q_2}B + B\hat{Q_2}A = 180^o$$

Isto implica que o quadrilátero $AFBQ_2$ é inscritível, logo $Q_2 \in w_2$. Mas como $Q_2 \in BE$, então Q_2 pertence a intercessão de BE com w_2. Logo ou $Q_2 = B$ ou $Q_2 = Q$. Mas como estamos partindo do princípio de que $Q_2 \neq B$ então $Q_2 = Q$. E assim $Q \in AP$, logo os pontos A, Q e P estão alinhados.

Exemplo 7: Considere um triângulo equilátero ABC e seja os pontos K e M sobre BC de modo que K e M dividem o segmento BC em três segmentos iguais. Construímos então, exteriormente ao triângulo, um semicírculo de diâmetro BC. Mostre que as retas AK e AM dividem este semicírculo em três arcos iguais.

Solução: Primeiro devem ser destacadas quais são as hipóteses do problema, que é aquilo que nos foi dado e a tese, que é aquilo que queremos demonstrar:

Hipóteses:

- A, B e C são os vértices de um triângulo equilátero;
- K e M são pontos pertencente ao segmento BC ,tais que:

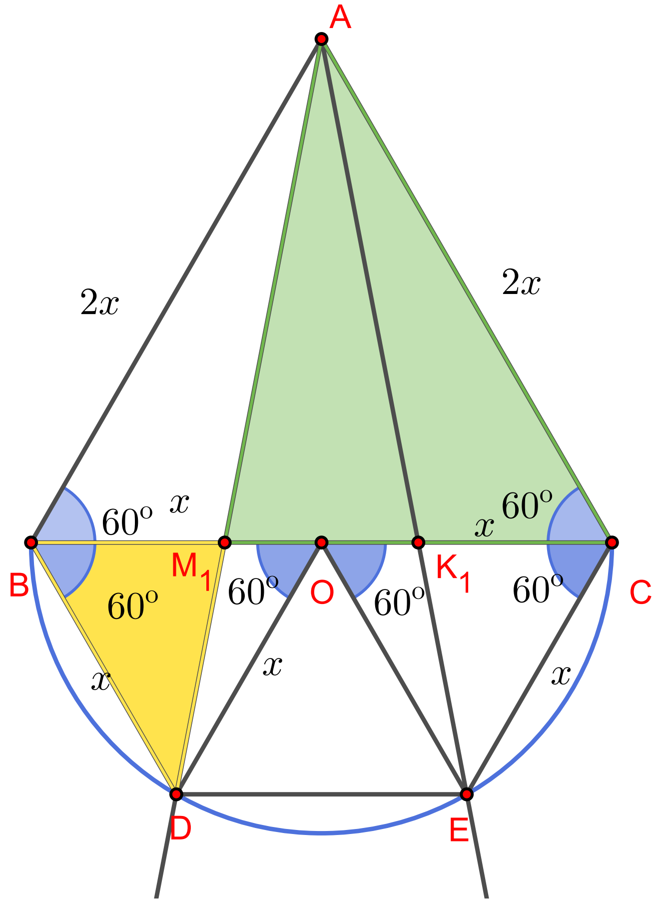
$$BK = KM = MC = x;$$

- BC é o diâmetro de um semicirculo Γ

Tese:

- As retas AK e AM vão cortar o semicirculo nos pontos D e E tais que os arcos BD, DE e EC possui a mesma medida

Agora pode ser desenhada a seguinte figura:



Na resolução deste problema deve-se tomar dois pontos M_1 e K_1 sobre o lado BC de forma que AM_1 e AK_1 dividem o semicirculo BC em três arcos iguais.

Seja D e E os pontos onde as retas AM_1 e AK_1 e O é ponto médio de BC, que também é o centro do semicírculo. Como os arcos BD, DE e CE são iguais, então os triângulos BOD, DOE e COE são equiláteros sendo $BD = BO = OC = x$. Esses triângulos equiláteros fazem com que os pontos M_1 e K_1 sejam mais nobres do que os pontos M e K. Assim pode-se entendido que:

$$AB = AC = BC = BO + OC = 2x.$$

Por outro lado os triângulos BM_1D e AM_1C são semelhantes pelo caso (AA), visto que $M_1\hat{B}D = M_1CA = 60^o$ e $B\hat{M}_1D = C\hat{M}_1A$ (opostos pelo vértice) e portanto:

$$\frac{CM_1}{BM_1} = \frac{AC}{BD} = \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow$$

$$CM_1 = 2BM_1$$

$$BC = BM_1 + CM_1 = 3BM_1$$

$$BM_1 = \frac{1}{3}BC = BM$$

Por um raciocínio interamente análogo deve-se constatar que $CK_1 = \frac{1}{3}BC = CK$. Como M, M_1, K e K_1 são pontos do segmento BC com $BM_1 = BM$ e $CK_1 = CK$ então os pontos $M = M_1$ e $K = K_1$. Portanto AM coincide com AM_1, que por sua vez divide o semicirculo em três arcos iguais. E AK coincide com AK_1 que também divide o semicirculo em três arcos iguais.

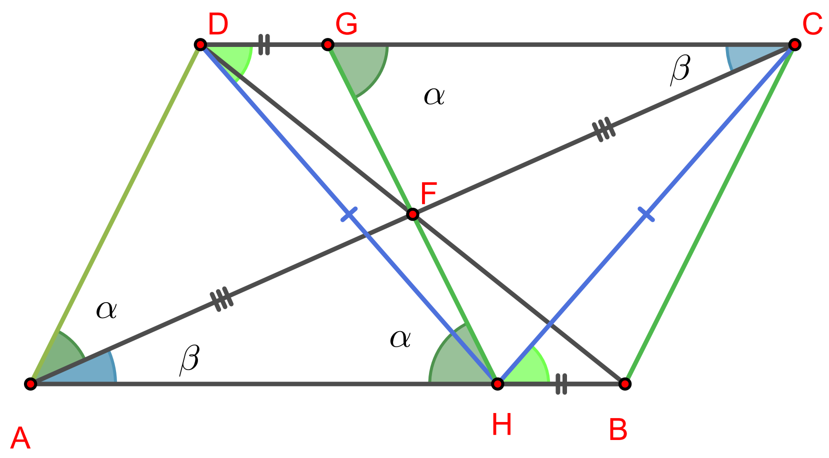
Observe que neste problema o fato de que as retas AM_1 e AK_1 dividerem o semicirculo em três arcos iguais é mais nobre do que o fato de que os pontos M e K dividirem o lado BC em três parte iguais.

Exemplo 8: Tournament of the towns, em [17]: Em um paralelogramo $ABCD$, F é o ponto de intercessão das diagonais. Sendo E um ponto sobre a semirreta AB com origem em A, tal que $D\hat{A}B = F\hat{E}A = \alpha$, então mostre que $DE = CE$.

Solução: Neste problema deve-se deixar de considerar o ponto E inicialmente, e será considerado apenas um ponto H sobre AB tal que H é equisdistante de C e D. Isto por que o ponto H seria mais nobre que o ponto E. No final será demonstrado que estes pontos devem ser iguais. Para isso basta mostrar que $AH = AE$.

Observe que existem dois casos, onde no primeiro caso o ponto H está dentro do segmento AB e no segundo caso H está no prolongamento do segmento AB, no sentido de A para B.

Caso 1: Observe a seguinte figura abaixo.



Observe que na figura, G é o ponto de intercessão entre HF e DC. Sendo assim $G\hat{F}C = A\hat{F}H$ (são ângulos opostos pelo vértice), $G\hat{C}F = F\hat{A}H$ (são ângulos alternos internos) e $AF = FC$, pois F é o ponto médio das diagonais. Assim pelo caso de congruência (ALA), observa-se que os triângulos GFC e HFA são congruentes e consequentemente, $AH = GC$. Além disso, como $AB = CD$ conclui-se que:

$$DG = CD - GC = AB - AH = HB$$

Como $DH = HC$ (por hipótese do elemento mais nobre) entende-se que $C\hat{D}H = D\hat{C}H = \theta$ e $D\hat{C}H = B\hat{H}C = \theta$, pois são ângulos alternos internos. Por transitividade da igualdade conclui-se que:

$$G\hat{D}H = C\hat{D}H = B\hat{H}C = \theta$$

Todavia, $DH = HC$, $DG = HB$ e $G\hat{D}H = B\hat{H}C = \theta$. Com isso consegue-se observar, pelo caso de congruência (LAL), que os triângulos DHG e HCB são congruentes. Assim será válido o seguinte resultado:

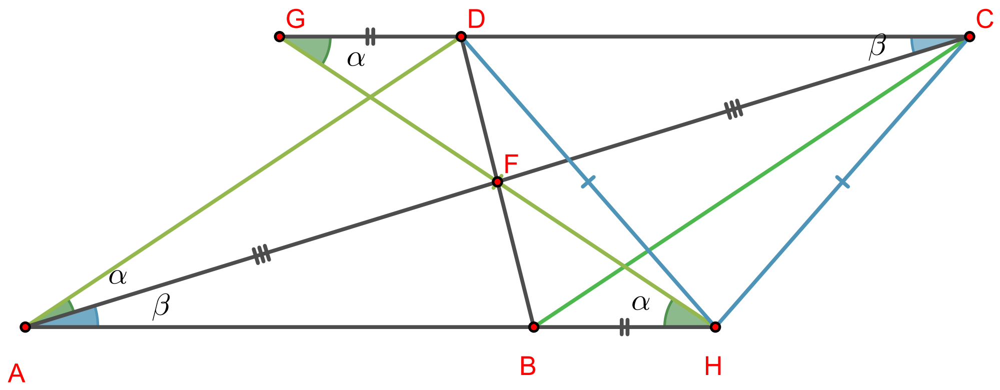
$$D\hat{G}H = H\hat{B}C = 180^{o} - D\hat{A}B$$

Contudo $DG \parallel AH$ e portanto:

$$G\hat{H}A = C\hat{G}H = 180^{o} - D\hat{G}H = 180^{o} - (180^{o} - D\hat{A}B) = D\hat{A}B$$

Logo $F\hat{H}A = G\hat{H}A = D\hat{A}B$, isto implica que $H = E$.

Caso 2: Observe a figura abaixo:



Como $AH \parallel CG$, então $F\hat{A}H = F\hat{C}G$ e $F\hat{H}A = F\hat{G}C$, pois são ângulos alternos internos e além disso $AF = FC$, pois F é a intercessão das diagonais do paralelogramo, isto é, F é o ponto médio de AC. Assim pelo caso de congruência (LAA_o), os triângulos AFH e CFD são congruentes e e disto depreende-se que $AH = CG$. Contudo como $AB = CD$, então:

$$GD = CG - CD = AH - AB = BH$$

Além disso, sendo P um ponto sobre o prolongamento do segmento AH, deve-se concuir que $H\hat{C}D = C\hat{H}P$ (pois são ângulos alternos internos). Contudo, o triângulo DHC é isósceles, com $DH = CH$, então:

$$H\hat{D}C = H\hat{C}D = C\hat{H}P$$

Sendo assim, infere-se que:

$$B\hat{H}C = 180^{\text{o}} - C\hat{H}P = 180^{\text{o}} - H\hat{D}C = H\hat{D}G$$

Logo pelo caso de congruência (LAL) os triângulos DHG e HCB são congruentes, visto que $DH = HC$,$GD = BH$ e $B\hat{H}C = H\hat{D}G$. Assim $D\hat{G}H = H\hat{B}C$. Contudo como $ABCD$ é um paralelogramo então $D\hat{G}H = G\hat{H}A$ e $P\hat{B}C = D\hat{A}B$, pois são ângulos alternos internos. Logo:

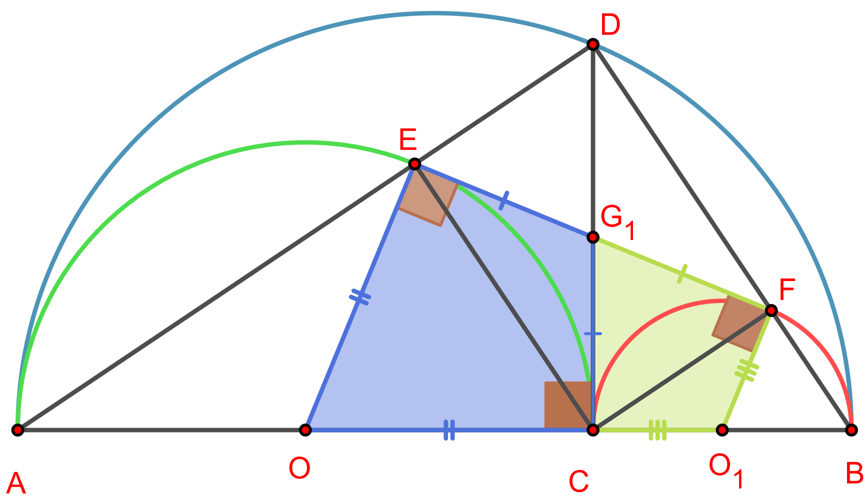
$$F\hat{H}A = G\hat{H}A = D\hat{G}H = H\hat{B}C = P\hat{B}C = D\hat{A}B$$

Consequentemente, H e E são pontos coincidentes e a demonstração está finalizada.

Exemplo 9: Em um segmento AB é marcado o ponto C e traçam-se os semicírculos de diâmetros AB, AC e BC, todos contidos em um mesmo semiplano determinado por AB. Seja D o ponto do semicírculo AB tal que CD é perpendicular a AB em C. Sejam E e Fos pontos sobre os semicírculos AC e BC, respectivamente, tais que EF é uma tangente comum a estes dois semicírculos. Mostre que $ECFD$ é um retângulo.

Solução: Neste exemplo serão considerados os pontos E_1 como sendo a interseção entre AD e o semicírculo AC e F_1 como sendo interseção entre BD e o semicírculo BC. Será mostrado que $E_1 = E$ e $F_1 = F$. Aqui os pontos E_1 e F_1 são mais nobres do que os pontos E e F, respectivamente, uma vez que o fato dos pontos A, E_1 e D serem colineares faz com que os ângulos $A\hat{E}_1C$ e $C\hat{E}_1D$ sejam suplementares. O mesmo vale para os pontos colineares B, F_1 e D que também garante que os ângulos $C\hat{F}_1B$ e $D\hat{F}_1C$ sejam suplementares.

Considere também os pontos O e O_1 como sendo o centro do semicírculo AC e o centro do semicírculo BC, respectivamente, como mostra a figura abaixo:



Observe que E_1 e F_1 estão em semiplanos opostos em relação à reta CD. Portanto existe uma interseção entre os segmentos E_1F_1 e CD. Tome G_1 como sendo essa interseção.

É conhecido que os pontos D, E_1 e F_1 pertencem aos semicírculos AB, AC e BC respectivamente. Portanto:

$$A\hat{E}_1C = C\hat{F}_1B = A\hat{D}B = 90^o$$

Logo os ângulos do quadrilátero E_1DF_1C satisfazem:

$$C\hat{E}_1D = E_1\hat{D}F_1 = D\hat{F}_1C = 90^o$$

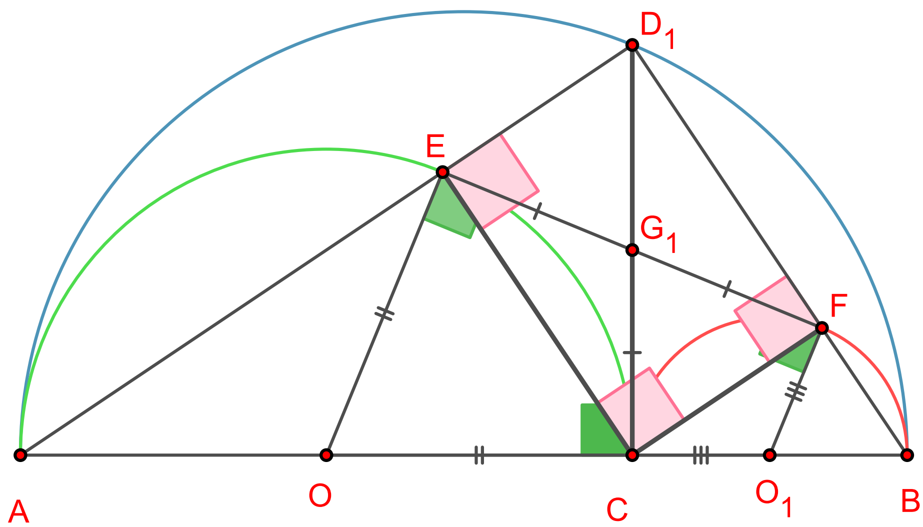
O quadrilátero E_1DF_1C possui três ângulos retos e, portanto, ele é um retângulo. Como consequência disso G_1 é o ponto médio do segmento E_1F_1 e também do segmento CD. Além disso, o triângulo E_1CF_1 é retângulo em C, portanto $E_1G_1 = CG_1 = G_1F_1$. Por outro lado percebe-se que $OE_1 = OC$, pois os dois segmentos são raios do semicírculo AC. Também constata-se que o segmento OG_1 é comum aos triângulos OCG_1 e OE_1G_1, então esses dois triângulos são congruentes pelo caso (LLL). Assim chega-se a conclusão que $O\hat{E}_1G_1 = O\hat{C}G_1 = 90^o$.

De maneira análoga se pode concluir que os triângulos O_1CG_1 e $O_1F_1G_1$ são congruentes pelo caso (LLL), visto que $CG_1 = G_1F_1$, $O_1C = O_1F_1$ e O_1G_1 é um segmento comum aos dois triângulos. Portanto $O_1\hat{F}_1G_1 = O_1\hat{C}G_1 = 90^o$.

Consequentemente, a reta E_1F_1 é uma tangente comum aos semicírculos AC e BC, pois $O\hat{E}_1G_1$ e $O_1E_1G_1$ são retos. Como o segmento tangente exterior comum a dois semicírculos é único, então segmento EF deve coincidir com o segmento E_1F_1. Portanto devemos ter $E_1 = E$ e $F_1 = F$. Assim, o quadrilátero E_1CF_1D é coincidente com o quadrilátero $ECFD$. Portanto $ECFD$ é um retângulo.

Solução 2: Observe que neste exemplo foram dadas as poligonais AED e BFD, onde o segmento EF é a tangente comum aos semicírculos $\widehat{AC}$ e $\widehat{BC}$. Ao invés destas poligonais, serão consideradas, incialmente, as retas AE e BF, que se encontram no ponto D_1. Essas duas retas, por sua vez são mais nobres do que as poligonais AED e BFD, uma vez que os ângulos $A\hat{E}C$ e $C\hat{E}D_1$ são ângulos suplementares, assim como os ângulos $C\hat{F}B$ e $C\hat{F}D_1$. O próximo passo é mostrar que as retas AE e BF coincidem com as poligonais AED e BFD, para isto deverá ser mostrado que $D_1 = D$.

Para isso considere G como sendo o ponto do segmento EF, tal que GC é perpendicular à AB no ponto C, como mostra a figura abaixo:



Como GC é perpendicular aos diâmetros AC e BC, segue que GC é um segmento tangente aos semicírculos AC e BC.

Além disso, EF é uma tangente comum aos dois semicírculos, logo $GE = GC = GF$. Portanto o círculo de diâmetro EF passa em C. Assim, o angulo $E\hat{C}F$ é 90^o.

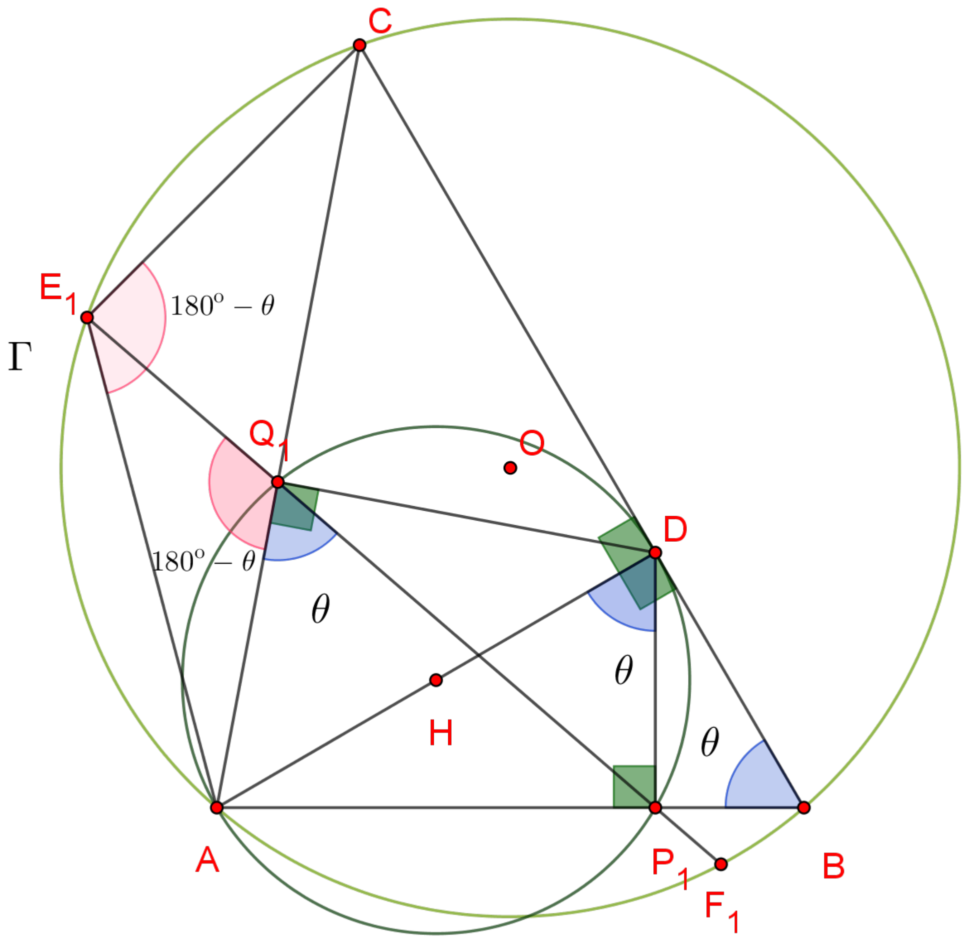
Os ângulos $A\hat{E}C$ e $C\hat{F}B$ estão inscritos nos semicírculos de diâmetros respectivamente iguais a AC e CB, portanto estes ângulos são retos. Consequentemente, os suplementares dos ângulos $A\hat{E}C$ e $C\hat{F}B$, que são os ângulos $C\hat{E}D_1$ e $C\hat{F}D_1$, respectivamente, também são ângulos retos. Como consequência disto, o quadrilátero $ECFD_1$ tem 3 ângulos retos, logo ele é um retângulo. Assim o ângulo $A\hat{D_1}B = 90^o$ está inscrito no semicírculo $\widehat{AB}$. Disso concluímos que o ponto D_1 pertence ao semicírculo $\widehat{AB}$.

Além disso, pode-se perceber que a diagonal CD_1 do retângulo CED_1F, deve passar no ponto médio G da outra diagonal EF.

Logo D_1 pertence à reta CG. Desta forma, D_1 pertence a interseção da reta CG com o semicírculo $\widehat{AB}$. Todavia, a interseção de CG e o semicírculo $\widehat{AB}$ é D. Logo $D_1 = D$.

Exemplo 10: OBM 2019- Fase Única-Nível 2-Questão 3, em [15]) Seja ABC um triângulo acutângulo inscrito em um círculo Γ de centro O. Seja D o pé da altura relativa ao vértice A. Sejam E e F pontos sobre Γ tais que $AE = AD = AF$, sendo que E pertence ao arco AC que não contém o ponto B e F pertence ao arco AB que não contém o ponto C. Seja P e Q os pontos de interseção entre a reta EF com a reta AB e AC, respectivamente. Mostre que o circuncírculo do triângulo APQ tem diâmetro AD

Solução: Neste exemplo será considerado que o círculo de diâmetro AD toca as semirretas AB e AC, ambas com origens em A, nos pontos P_1 e Q_1, como mostra a figura:



A técnica neste exemplo consiste em mostrar que $P_1 = P$ e $Q_1 = Q$, pois assim o circuncírculo de APQ será o mesmo que o circuncírculo de AP_1Q_1 que terá diâmetro AD. Neste caso, os pontos P_1 e Q_1 são mais nobre do que os pontos P e Q, uma vez que os ângulos $A\hat{P}_1D = A\hat{Q}_1D = 90^o$, pois estes ângulos estão inscritos no círculo de diâmetro AD. O fato destes ângulos serem retos, geram triângulos retângulos com propriedades bem conhecidas.

Considere E_1 e F_1 como sendo os pontos de interseção da reta P_1Q_1 com o círculo Γ. De modo que E_1 pertence ao arco menor $\widehat{AC}$ e F_1 pertence ao arco menor $\widehat{AB}$.

Como foi dito antes, $A\hat{Q}_1D = A\hat{P}_1D = 90^o$, pois ambos os ângulos estão opostos ao diâmetro AD do cincurcírculo de AP_1F_1. Agora pelas relações métricas no triângulo retângulo ADC entende-se que:

$$AD^2 = AQ_1.AC$$

Por outro lado, os triângulos ADP_1 e ABD são semelhantes, uma vez que $A\hat{P}_1D = A\hat{D}B = 90^o$ e o ângulo $D\hat{A}B$ é comum aos dois triângulos. Portanto $A\hat{D}P_1 = A\hat{B}D = \theta$.

Como o quadrilátero AP_1DQ_1 é inscritível então $A\hat{Q}_1P_1 = A\hat{D}P_1 = \theta$. Assim:

$$A\hat{Q}_1E_1 = 180^o - A\hat{Q}_1P_1 = 180^o - \theta$$

Por outro lado o quadrilátero $ABCE_1$ também é inscritível. Consequentemente:

$$A\hat{E}_1C = 180^o - A\hat{B}D = 180^o - \theta = A\hat{Q}_1E_1$$

Além disso, é sabido que $E_1\hat{A}C = Q_1\hat{A}E_1$. Com isto, os triângulos ACE_1 e AE_1Q_1 são semelhantes pelo caso (AA). Assim $A\hat{E}_1Q_1 = A\hat{C}E_1$, e vale a proporção:

$$\frac{AE_1}{AC} = \frac{AQ_1}{AE_1}$$

$$AE_1^2 = AQ_1.AC = AD^2$$

$$AE_1 = AD$$

Assim E_1 pertence ao círculo de centro em A e raio AD. Logo E_1 pertence a interseção deste círculo com o arco menor $\overset{\frown}{AC}$. Contudo, E é um ponto do arco $\overset{\frown}{AC}$ tal que $AE = AD$, então E também pertence a interseção do arco $\overset{\frown}{AC}$ com o círculo de centro em A. E como essa interseção é única teremos que $E_1 = E$.

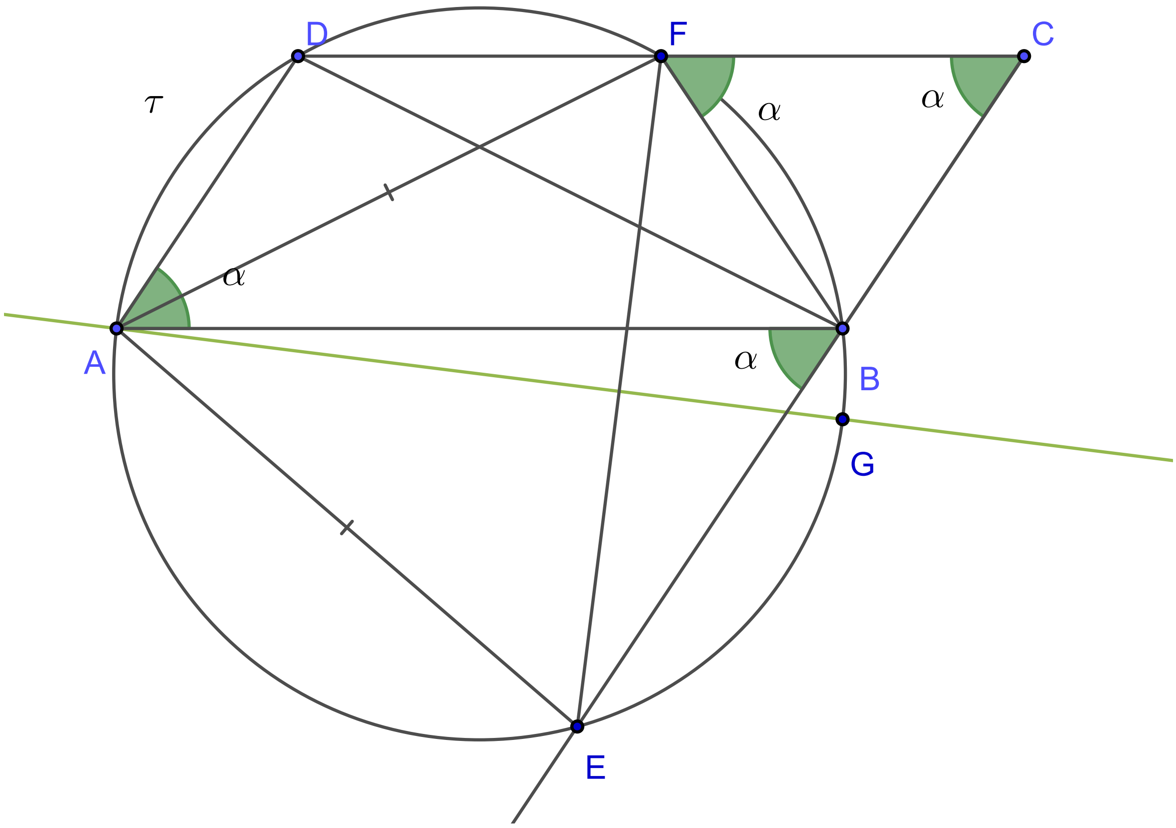
De modo interamente análogo também se pode concluir que $F_1 = F$. Portanto as retas EF e E_1F_1 são coincidentes e assim teremos que $P_1 = P$ e $Q_1 = Q$. Como se quer demonstrar.

Exemplo 11: OBM 2010- Adptada, em [16] Seja $ABCD$ um paralelogramo e τ a circunferência circunscrita ao triângulo ABD. Se E e F são as interseções de τ com as retas BC e CD respectivamente, então faça o que se pede.

a) Mostre que A pertence à reta mediatriz do segmento EF.

b) Prove que o circuncentro do triângulo CEF está sobre τ.

Solução: a) A princípio será colocado alguns elementos que são importantes nesta figura, como por exemplo o ângulo $D\hat{A}B$ que será denotado por α, como mostra a figura abaixo:



Repare que para mostrar que o ponto A pertence à mediatriz de EF, basta mostrar que A é equidistante de E e de F, isto é, $AE = AF$.

Para isto observe que o quadrilátero $AEBF$ é inscritível, então $A\hat{F}E = A\hat{B}E$. Todavia, $ABCD$ é um paralelogramo, logo:

$$A\hat{B}E = D\hat{C}B = D\hat{A}B = \alpha$$

Portanto:

$$A\hat{F}E = A\hat{B}E = \alpha$$

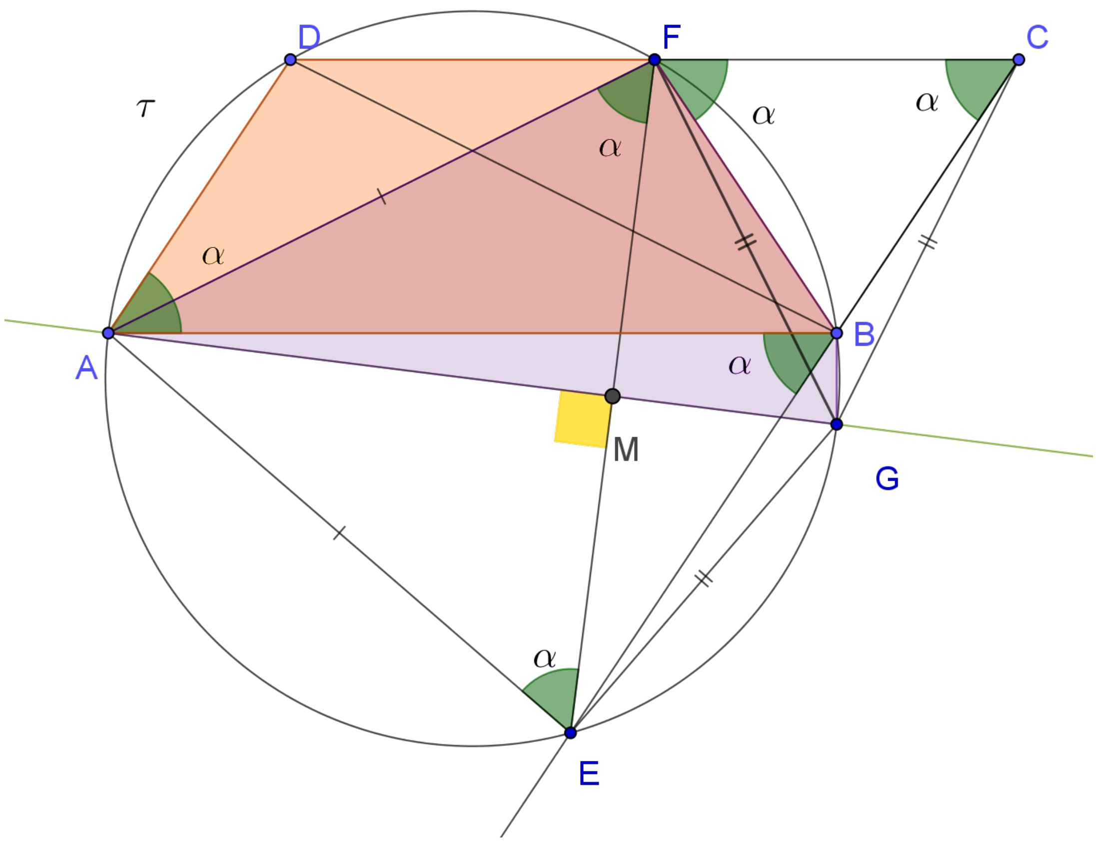
Repare também que o quadrilátero $ABFD$ é também inscritivel e assim $D\hat{F}B = 180^o - \alpha$. Consequentemente:

$$B\hat{F}C = 180^o - D\hat{F}B = 180^o - (180^o - \alpha) = \alpha$$

Mas como FC é paralela à AB, então $B\hat{F}C = F\hat{B}A = \alpha$, pois são ângulos alternos internos. Finalmente, como o quadrilátero $AEBF$ é inscritível então $F\hat{B}A = F\hat{E}A = \alpha$ e assim $A\hat{F}E = \alpha = F\hat{E}A$. Logo o triângulo AFE é isósceles com $AF = AE$. Portanto A pertence a mediatriz de FE.

b) Neste exemplo ao invés de ser considerado o circuncentro do triângulo EFC, será tomado um ponto específico do círculo τ e será mostrado que ele deve ser o circuncentro do triângulo EFC. Repare que para um ponto ser o circuncentro do triângulo EFC é necessario que este ponto pertença as três mediatrizes de EFC, assim o ponto do círculo que é o melhor candidato a ser o circuncentro é o segundo ponto de intercessão da mediatriz do segmento EF com o círculo τ, que será denotado por G. Agora será provado que este ponto G é o circuncentro e para isso será mostrado que $FG = CG = GE$. Neste caso o ponto G será mais nobre do que o circuncentro do triângulo EFC, uma vez que o quadrilátero $AFBG$ é cíclico, e possui propriedades que preservam alguns ângulos que são de suma importância para a resolução do problema.

Traçando os segmentos CG e FG pode ser esboçada a seguinte figura:



Sendo M o ponto de intercessão da mediatriz AG com a reta EF temos que $A\hat{M}F = 90^o$. Assim:

$$F\hat{A}G = 180^o - A\hat{M}F - A\hat{F}E = 90^o - \alpha$$

Mas como o quadrilátero $AFBG$ é inscritível, pode-se constatar que:

$$F\hat{B}G = 180^{o} - F\hat{A}G = 90^{o} + \alpha$$

Além disso como $B\hat{F}C = D\hat{C}B = \alpha$, então $F\hat{B}C = 180^{o} - 2\alpha$. Assim observa-se que:

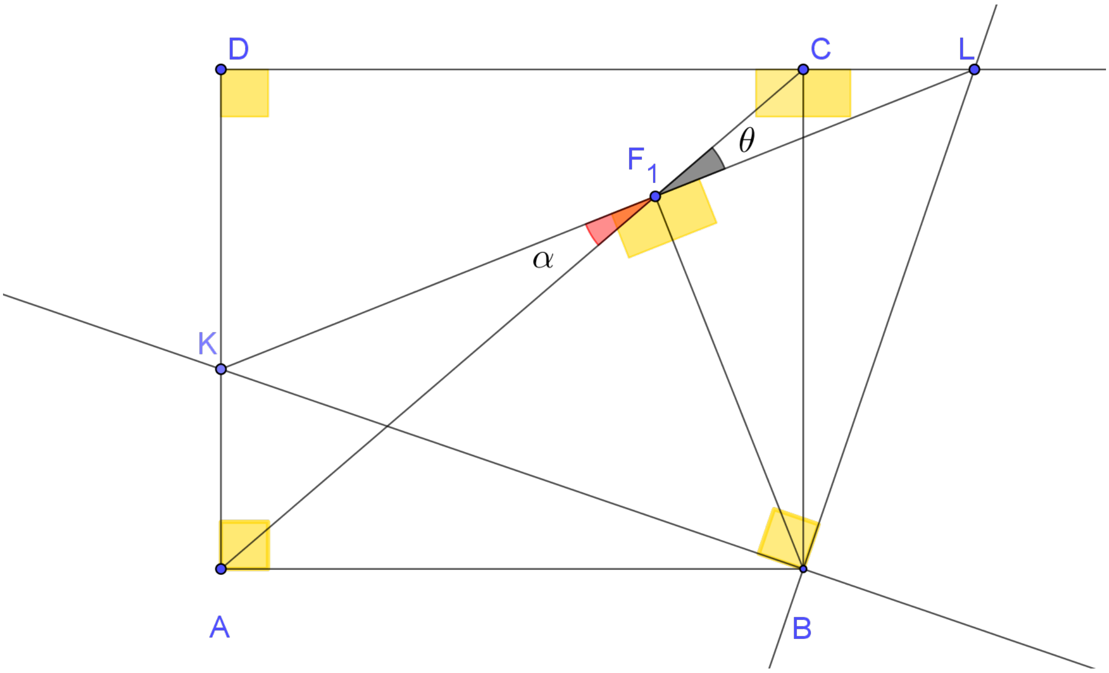
$$G\hat{B}C = 360^{o} - F\hat{B}C - F\hat{B}G = 360^{o} - (180^{o} - 2\alpha) - (90^{o} + \alpha) = 90^{o} + \alpha = F\hat{B}G$$

Finalmente, deve -se concluir que os triângulos FBG e CBG são congruentes pelo caso (LAL), pois $FB = BC$, BG é um lado comum aos dois triângulos e $G\hat{B}C = F\hat{B}G$. Assim $FG = CG$ mas como G pertence a mediatriz de EF então $EG = FG = CG$. Logo G é o circuncentro como deseja-se demonstrar.

Exemplo 12: Considere um retângulo $ABCD$ e duas retas r e s perpendiculares entre -si que passam pelo ponto B. Sabemos que s intercepta o lado AD em K, enquanto r intercepta a semirreta DC, com origem D, no ponto L. Sendo F a intercessão do segmentos AC e KL, mostre que $B\hat{F}L = 90^{o}$.

Solução: Neste exemplo será considerado o ponto F_1 como sendo o pé da perpendicular baixada de B para KL e será mostrado que $F_1 = F$. Para isso será concluído que os pontos A, F_1 e C estão alinhados, e isto é equivalente a mostrar que $K\hat{F_1}A = C\hat{F_1}L$. Neste caso o ponto F_1 será mais nobre do que o ponto F, uma vez que os quadriláteros BF_1CL e ABF_1K são cíclicos, e isto faz com que alguns ângulos de suma importância para a nossa resolução, tenham a mesma medida.

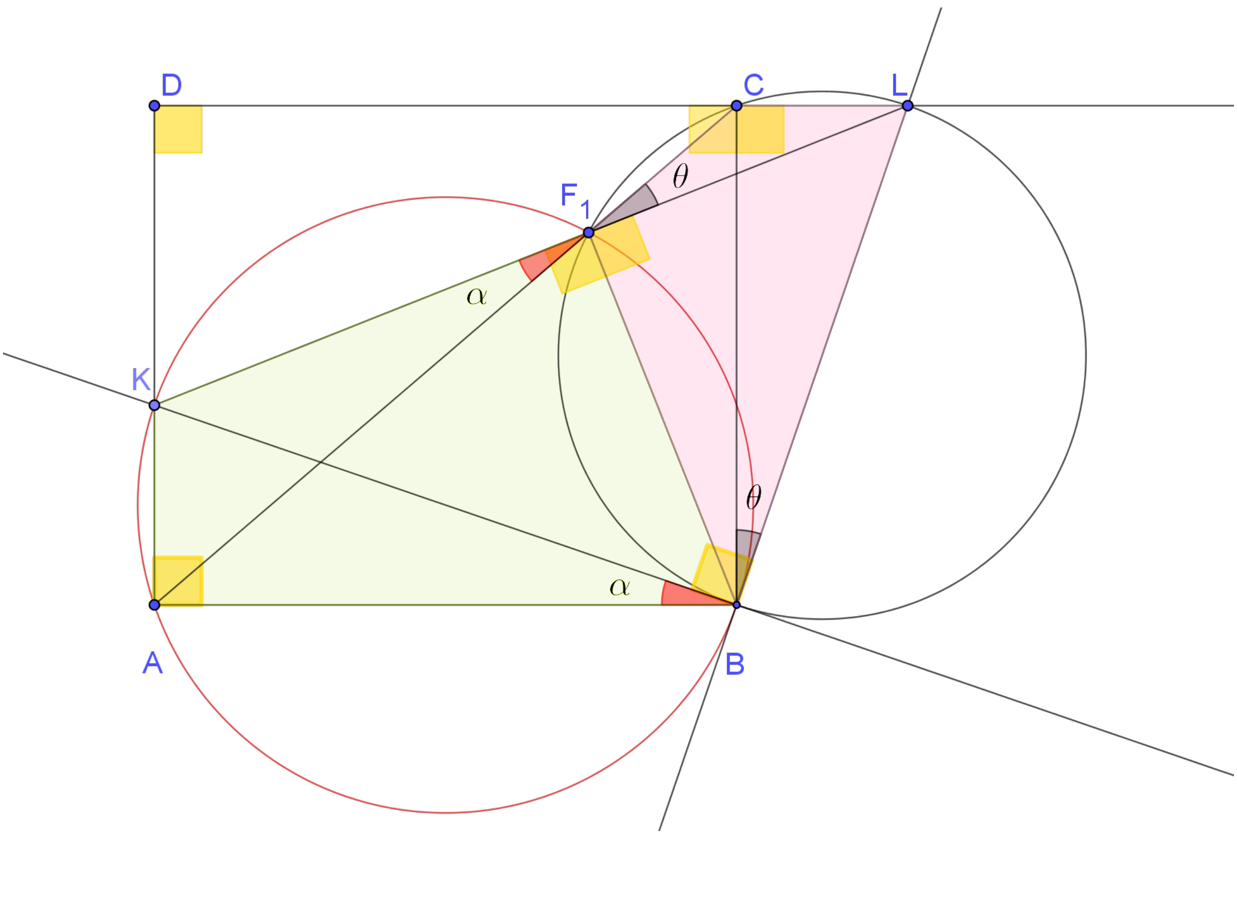
Com o intuito de mostrar que $F_1 = F$, considere a figura abaixo:



Nesta figura deve ser reparado que o quadrilátero AKF_1B é inscritível, pois:

$$K\hat{F}_1B + K\hat{A}B = 90^o + 90^o = 180^o$$

Logo vai ter um círculo passando pelos vértices A, K, F_1 e B. Como mostra a figura abaixo:



Percebe-se que $K\hat{F_1}A = A\hat{B}K$, pois ambos os ângulos estão inscritos no arco AK. Deve ser notado também que:

$$B\hat{F_1}L = B\hat{C}L = 90^{\text{o}}$$

Isso garante, pelo segundo critério de inscrição, que o quadrilátero $B\hat{F_1}CL$ é inscritível, uma vez que os ângulos $B\hat{F_1}L$ e $B\hat{C}L$ são iguais e ambos estão opostos ao segmento BL. Assim existe um círculo passando pelos vértices B, F_1, C e L, e com isso pode se garantir que $C\hat{F_1}L = C\hat{B}L$, pois ambos os ângulos estão inscritos no arco CL .

Finalmente, observa-se que $A\hat{B}C = K\hat{B}L = 90^{\text{o}}$. Além disso, também é conhecido que:

$$A\hat{B}C = A\hat{B}K + K\hat{B}C$$

e

$$K\hat{B}L = K\hat{B}C + C\hat{B}L$$

Portanto:

$$A\hat{B}K + K\hat{B}C = K\hat{B}C + C\hat{B}L$$

$$A\hat{B}K = C\hat{B}L$$

Assim pode se concluido que:

$$K\hat{F_1}A = A\hat{B}K = C\hat{B}L = C\hat{F_1}L$$

Logo os pontos A, F_1 e C são colineares, uma vez que os ângulos $K\hat{F_1}A$ e $C\hat{F_1}L$ são opostos pelo vértice F_1 e são iguais. Em outras palavras, o ponto F_1 pertence a diagonal AC e como ele também pertence a reta KL, então o ponto F_1 pertence a intercessão de AC com KL. Logo $F_1 = F$.

1.2 O elemento auxiliar

Às vezes na resolução de um determinado problema é necessário acrescentar um elemento novo que auxilie na conclusão de um resultado desejado. O elemento auxiliar não é uma técnica de resolver problemas, mas segundo POLYA (1995), em [1], a maioria das vezes pode não ser o suficiente o conhecimento de quais são as hipóteses e quais são as incógnitas do problema. É necessário a elaboração de um plano de resolução que contém elementos que a princípio não estão entre as hipóteses e condicionantes do problema que se deseja solucionar. O que torna necessário o esboço novos elementos na figura. Estes elementos poderão ser uma reta, um poligono ou até um circulo como poderá ser visto nos exemplos a seguir.

Exemplo 1: Tournament Of The Towns, em [18]: Considere um triângulo BOD, um ponto A sobre o lado OB e um ponto C sobre o lado OD. Uma reta ligando os pontos médios dos segmentos AD e BC toca os lados OB e OD nos pontos M e N. Mostre que: $\frac{OM}{ON} = \frac{AB}{CD}$.

Solução: Primeiro devem ser vistas quais são as hipóteses e a tese do problema.

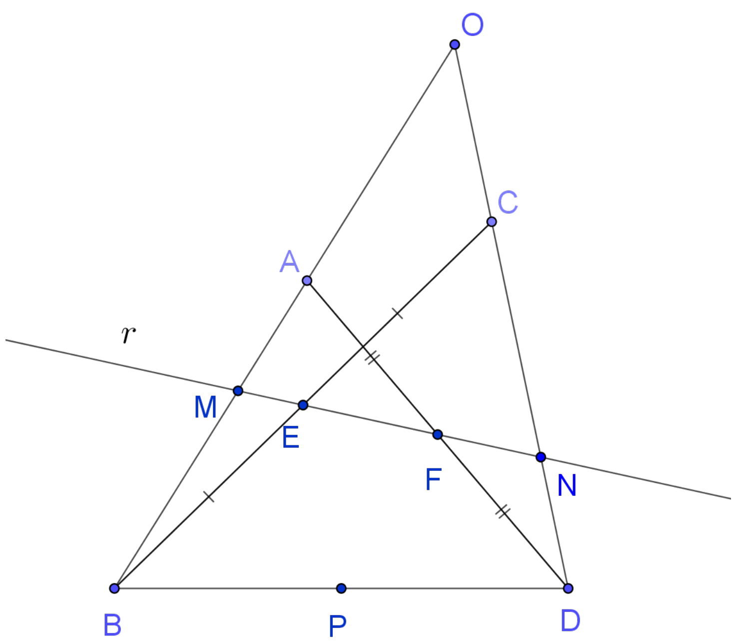
Hipóteses:

- OBD é um triângulo;
- $A \in OB$, e $C \in OD$;
- r é uma reta que passa pelos pontos F e E, que são os pontos médios de AD e BC respectivamente;
- M e N são os pontos de intercessão entre OB e OD com r respectivamente.

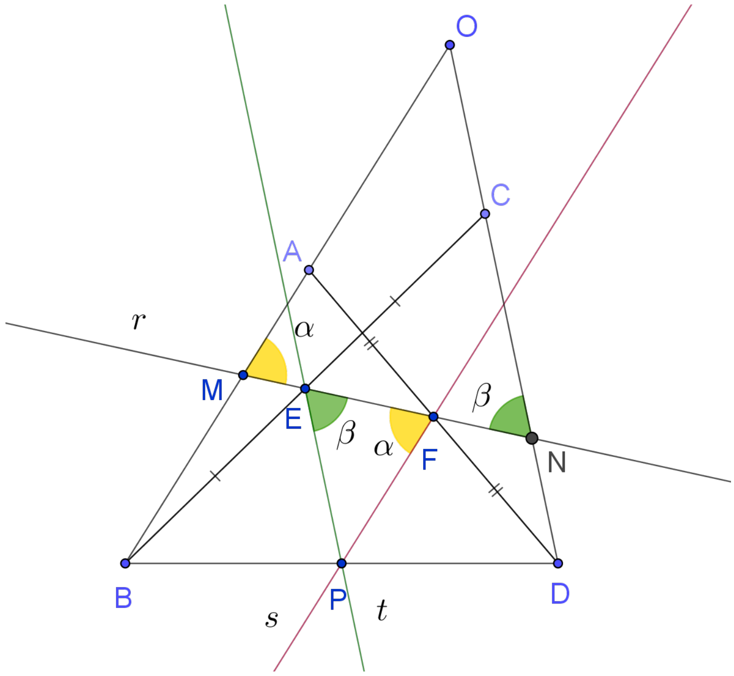
Tese:

- $\frac{OM}{ON} = \frac{AB}{CD}$

Com base nestes dados, será construida a seguinte figura:



Para esse problema ser resolvido primeiro será destacado o ponto médio de BD, que chamaremos de P, e depois serão acrescentadas, a figura, as retas que suportam os segmentos EP e FP que iremos denotar por t e s respectivamente. Assim a nova figura será:



Observe que P e F são pontos médios dos lados BD e AD do triângulo ADB, logo que FP é a base média de ABD e pelo teorema da base média entende-se que a reta s é paralela à AB e $FP = \frac{1}{2}AB$.

De modo análogo, nota-se que EP é base média do triângulo BCD. Assim a reta t é paralela à reta DC e $EP = \frac{1}{2}DC$. Porém como s é paralela à AB e MN é uma reta transversal às duas, segue que $\alpha = O\hat{M}N = P\hat{F}E$, pois são ângulos alternos internos. De modo semelhante, a reta t é paralela ao segmento CD, por isso $\beta = O\hat{N}M = P\hat{E}F$, pois estes ângulos também são alternos internos. Como consequência disso, os triângulos EFP e OMN são semelhantes pelo caso de semelhança (AA) e vale a seguinte proporção:

$$\frac{ON}{EP} = \frac{OM}{FP}$$

$$\frac{ON}{0,5DC} = \frac{OM}{0,5AB}$$

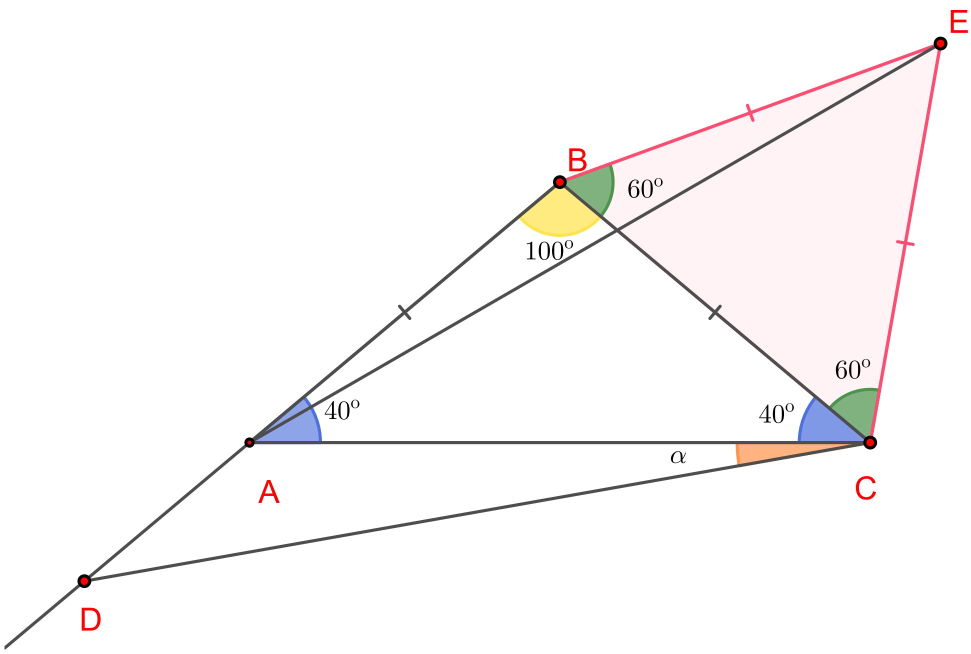
$$\frac{OM}{ON} = \frac{AB}{DC}$$

Como deseja-se demonstrar.

O próximo exemplo foi retirado de um site que se encontra em [6]

Exemplo 2: Considere um triangulo ABC tais que $AB = BC$ e o ângulo $A\hat{B}C = 100^o$. Seja D um ponto sobre o prolongamento de AB no sentido de B para A tal que $BD = AC$. Calcule o ângulo $D\hat{C}A$.

Solução: Neste problema deve ser acrescentado um triângulo equilátero sobre o lado BC do triângulo ABC, como mostra a figura:



Como o triângulo ABC é isósceles cujo ângulo do vértice mede $A\hat{B}C = 100^o$, então $A\hat{C}B = B\hat{A}C = \frac{180-100}{2} = 40^o$.

Por outro lado, é notório que $AB = BC = BE$. Logo o triângulo AEB é isósceles com:

$$A\hat{B}E = 100^o + 60^o = 160^o$$

Logo:

$$A\hat{E}B = B\hat{A}E = \frac{180^o - 160^o}{2} = 10^o$$

Disto pode-se chegar a conclusão de que:

$$A\hat{E}C = B\hat{E}C - A\hat{E}B = 60^o - 10^o = 50^o$$

Observe também que os triângulos BDC e CAE são congruentes pelo caso (LAL), pois $BD = CA$, por hipótese, $CE = BC$ e

$$E\hat{C}A = E\hat{C}B + A\hat{C}B = 60^{o} + 40^{o} = 100^{o} = D\hat{B}C$$

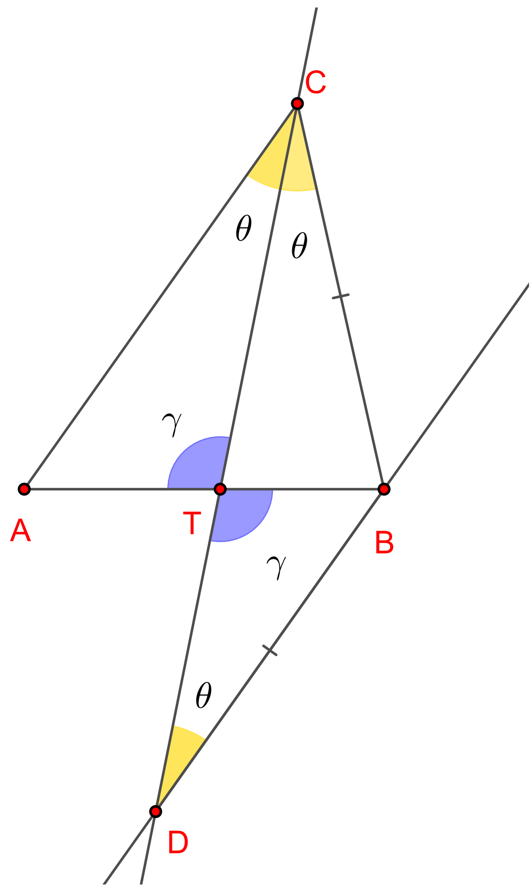
e disto pode-se deduzir que $B\hat{C}D = A\hat{E}C = 50^{o}$. Portanto:

$$A\hat{C}D = B\hat{C}D - B\hat{C}A = 50^{o} - 40^{o} = 10^{o}$$

Exemplo 3: O teorema da bissetriz interna: : Seja ABC um triângulo e T um ponto sobre o lado AB, tal que CT é a bissetriz interna do ângulo $A\hat{C}B$. Então mostre que:

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BC}$$

Solução: Partindo do príncipio de CT é uma bissetriz de $A\hat{C}B$, traçe uma reta r paralela ao lado AC passando por B. Essa reta r irá interceptar a reta CT no ponto D, como mostra a figura abaixo:



Observe que $A\hat{T}C = B\hat{T}D$, pois são ângulos opostos pelo vértice. Além disso, $A\hat{C}T = B\hat{D}T$, pois são ângulos alternos internos. Logo pelo caso de semelhança (AA) entende-se que os triângulos ATC e BDT são semelhantes e vale a seguinte proporção:

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BD}$$

Mas como CT é bissetriz de $A\hat{C}B$ e, além do mais, $A\hat{C}T$ e $B\hat{D}T$ são ângulos alternos internos, então:

$$B\hat{C}T = A\hat{C}T = B\hat{D}T$$

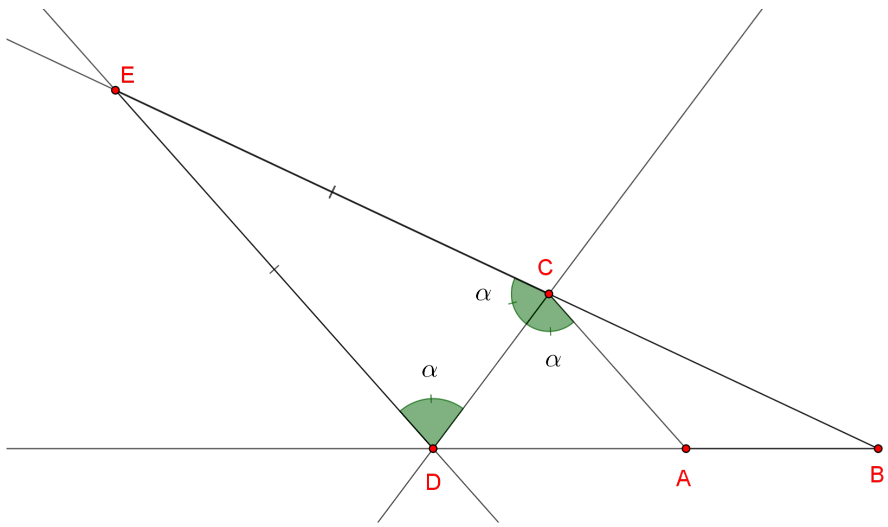
Assim o triângulo BCD é isósceles com $BC = BD$, e por isso:

$$\frac{AT}{TB} = \frac{AC}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

Exemplo 4: O Teorema da bissetriz externa: Dado um triângulo ABC e um ponto D pertencente ao prologamento do segmento BA de B para A. Se CD é uma bissetriz do ângulo externo correspondente ao ângulo $A\hat{C}B$, então:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

Solução: Trace uma reta paralela ao segmento AC passando por D. Essa reta irá interceptar a a reta BC no ponto E, como mostra a figura abaixo:



Observe que os ângulos $E\hat{D}C$ e $D\hat{C}A$ são alternos internos e assim $E\hat{D}C = D\hat{C}A = D\hat{C}E$, pois CD é bissetriz de $E\hat{C}A$. Logo o triângulo EDC é isósceles com $EC = ED$.

Além disso, é pode ser notado que os triângulos EDB e CAB são semelhantes, uma vez que $AC \parallel DE$. Isto faz com que $E\hat{D}B = C\hat{A}B$ e $D\hat{E}B = D\hat{C}B$. Assim pode-se concluir que:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{ED} = \frac{AC}{EC} \Leftrightarrow$$

$$\frac{BD - AB}{BD} = \frac{BE - BC}{BE} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BE}$$

Por outro lado, é válido que $\frac{BC}{BE} = \frac{AC}{EC}$ e assim deve-se chegar a seguinte conclusão:

$$\frac{EC}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

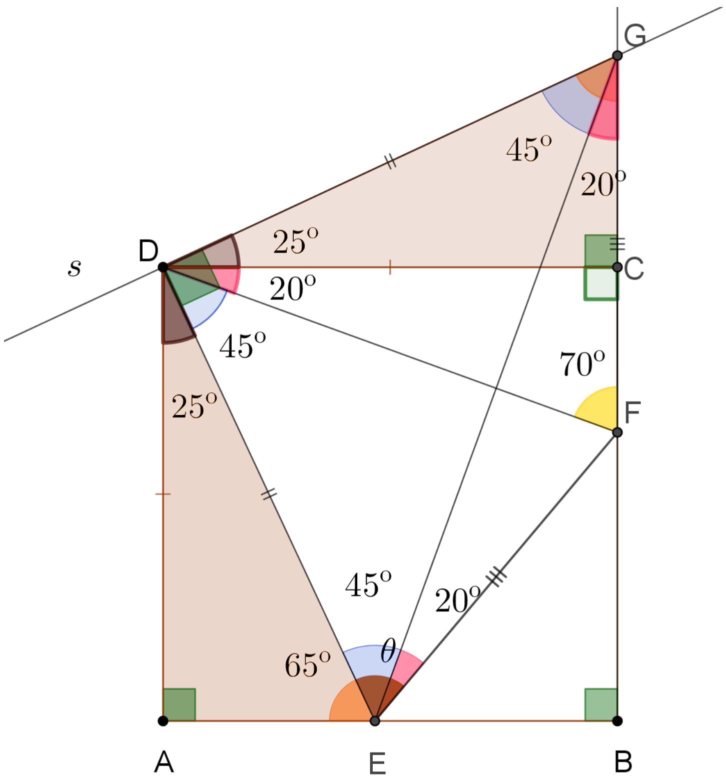
Logo:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

E a demonstração está finalizada.

Exemplo 5: Considere um quadrado $ABCD$, um ponto F sobre o lado BC de forma que $C\hat{F}D = 70^o$ e um ponto E sobre o lado AB de forma que $E\hat{D}F = 45^o$. Calcule o ângulo $D\hat{E}F$.

Solução: Neste exemplo será traçada uma reta auxiliar s, perpendicular ao segmento ED passando por D. Essa reta irá interceptar a reta BC no ponto G, como mostra a figura:



Somando os ângulos no triângulos DCF será concluído que:

$$C\hat{F}D + D\hat{C}F + C\hat{D}F = 180^{o}$$

$$70^{o} + 90^{o} + C\hat{D}F = 180^{o}$$

$$C\hat{D}F = 180^{o} - 90^{o} - 70^{o} = 20^{o}$$

É sabido ainda que:

$$A\hat{D}E + E\hat{D}F + C\hat{D}F = A\hat{D}C = 90^{o}$$

$$A\hat{D}E = 90^{o} - 45^{o} - 20^{o} = 25^{o}$$

Mas como $A\hat{E}D$ e $A\hat{D}E$ são complementares então $A\hat{E}D = 65^{o}$. Por outro lado, também é conhecido que:

$$E\hat{D}G = E\hat{D}F + C\hat{D}F + C\hat{D}G$$

$$90^{o} = 45^{o} + 20^{o} + C\hat{D}G$$

$$C\hat{D}G = 90^{o} - 45^{o} - 20^{o} = 25^{o} = A\hat{D}E$$

Agora deve ser observado que os triângulos ADE e CDG são congruentes pelo caso (ALA), uma vez que $AD = CD$ (pois $ABCD$ é um quadrado), $A\hat{D}E = C\hat{D}G$ e $D\hat{C}G = 90^{o} = D\hat{A}E$. Através disso dar para ser concluído que $DE = DG$, e portanto o triângulo DEG é um triângulo retângulo isósceles com $D\hat{E}G = D\hat{G}E = 45^{o}$. Além de tudo, como $AD = CD$, então:

$$A\hat{E}D = C\hat{G}D = 65^{o}$$

Em contrapartida o segmento DF é uma bissetriz interna do triângulo DEG relativa a base EG, uma vez que:

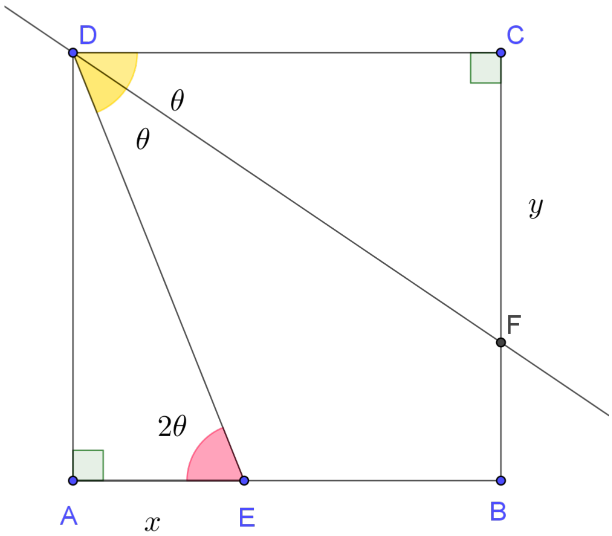
$$E\hat{D}F = 45^{o} = \frac{90^{o}}{2} = \frac{E\hat{D}G}{2}$$

Como no triângulo isósceles a bissetriz do ângulo vértice, coincide com a mediatriz da base, então DF é a mediatriz do segmento EG. Portanto $FG = EF$, levando a conclusão de que o triângulo EFG também é isósceles com $F\hat{E}G = E\hat{G}F$. Logo:

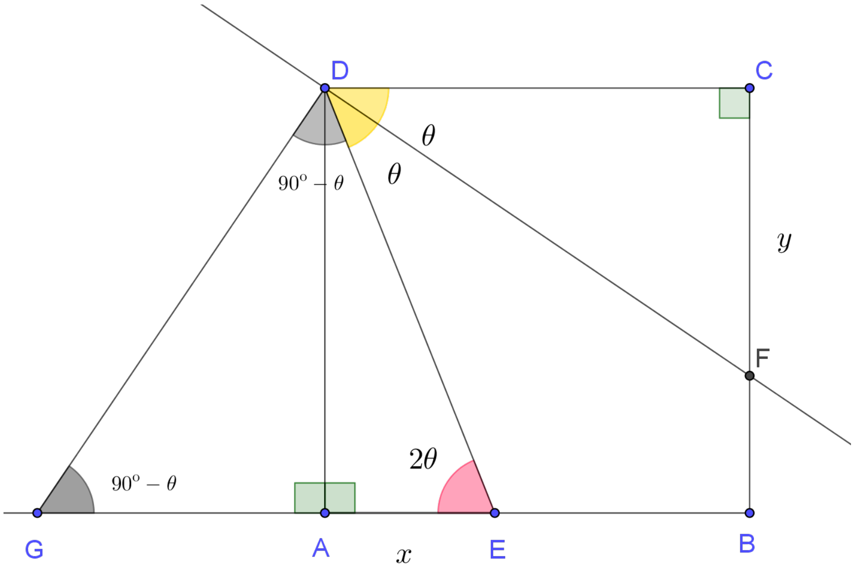
$$D\hat{E}F = D\hat{E}G + F\hat{E}G = D\hat{G}E + E\hat{G}F = D\hat{G}F = C\hat{G}D = 65^{\text{o}}$$

Exemplo 6: Tournament of the towns 1997 , mencionado em [19]: Seja E um ponto sobre o lado AB de um quadrado $ABCD$. Sabendo que a bissetriz interna do angulo $E\hat{D}C$ intersecta o lado BC em F, mostre que $DE = AE + CF$.

Solução: Do enunciado pode ser construída a seguinte figura:



O elemento auxiliar que deve ser considerado aqui é um ponto G que pertence ao prolongamento da semirreta BA, com origem em B, tal que $AG = CF$. Como está ilustrado na figura abaixo:



Deste modo os triângulos DAG e DCF são congruentes pelo caso (LAL) visto que: $D\hat{A}G = D\hat{C}F = 90^o$, $AD = CD$ e $AG = CF$. Assim:

$$A\hat{D}G = C\hat{D}F = \frac{E\hat{D}C}{2} = \frac{D\hat{E}A}{2} = \theta$$

e

$$D\hat{G}A = D\hat{F}C = 90^o - C\hat{D}F = 90^o - \frac{D\hat{E}A}{2} = 90^o - \theta$$

Além disso:

$$E\hat{D}A = 90^o - D\hat{E}A = 90^o - 2\theta$$

Consequentemente:

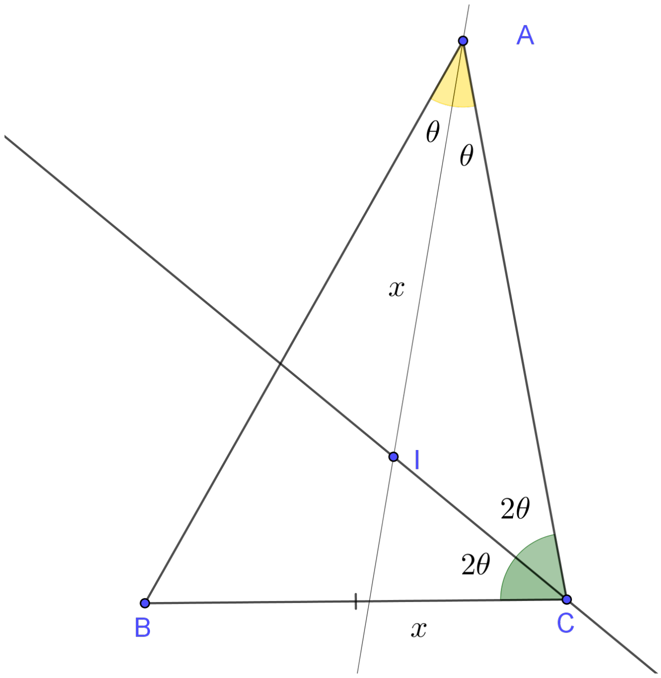
$$E\hat{D}G = E\hat{D}A + A\hat{D}G = 90^o - 2\theta + \theta = 90^o - \theta = D\hat{G}A$$

Logo o triângulo DGE é isosceles com $EG = DE$. Disto pode-se concluir que:

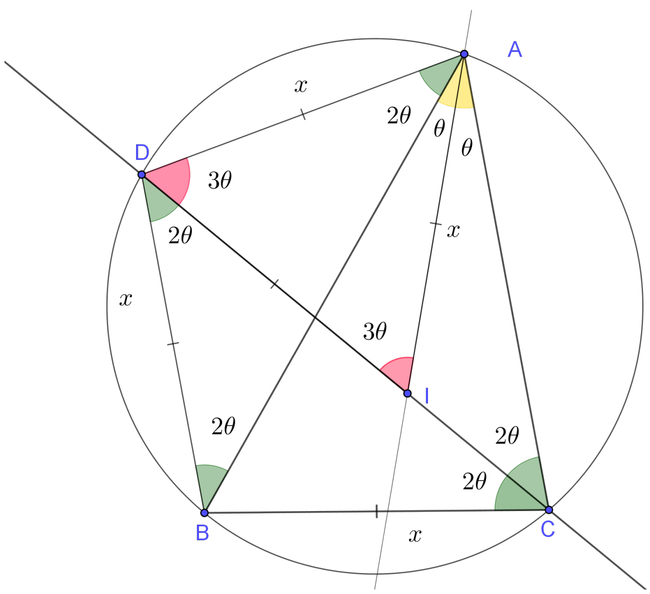
$$DE = EG = AE + AG = AE + CF$$

Exemplo 7: OBM, 2010, em [20]: As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC cortam-se no ponto I. Sabe-se que $AI = BC$ e que $I\hat{C}A = 2I\hat{A}C$. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

Solução: Do encunciado deve-se construir a seguinte figura:



Neste exemplo, o elemento auxiliar seria o círcuncírculo do triângulo ABC. Considere o ponto D como sendo a interseção entre este circuncírculo e a reta CI, como está ilustrado na seguinte figura:



Nesta figura, foi usada a seguinte notação: $I\hat{A}C = \theta$ e $AI = BC = x$. Logo pelo enunciado:

$$I\hat{C}A = 2I\hat{A}C = 2\theta$$

E como AI e CI são bissetrizes segue que $B\hat{A}I = \theta$ e $I\hat{C}B = 2\theta$. Além disso, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível então:

$$D\hat{B}A = D\hat{C}A = D\hat{C}B = D\hat{A}B = 2\theta$$

Assim o triângulo ADB é isósceles com $AD = DB$. Além de tudo, é conhecido também que:

$$B\hat{D}C = B\hat{A}C = B\hat{A}I + I\hat{A}C = \theta + \theta = 2\theta = I\hat{C}B = D\hat{C}B$$

Assim o triângulo BDC é isósceles com $DB = BC = x$. Disto resulta que:

$$AD = DB = BC = AI = x$$

Assim o triângulo ADI tem no minimo dois lados iguais e $A\hat{D}I = A\hat{I}D$. Por outro lado, nota-se que $A\hat{I}D$ é um ângulo externo do triângulo IAC logo:

$$A\hat{D}I = A\hat{I}D = I\hat{A}C + I\hat{C}A = \theta + 2\theta = 3\theta = D\hat{A}I$$

Assim o triângulo DAI é equilátero com:

$$D\hat{I}A = 3\theta = 60^o$$

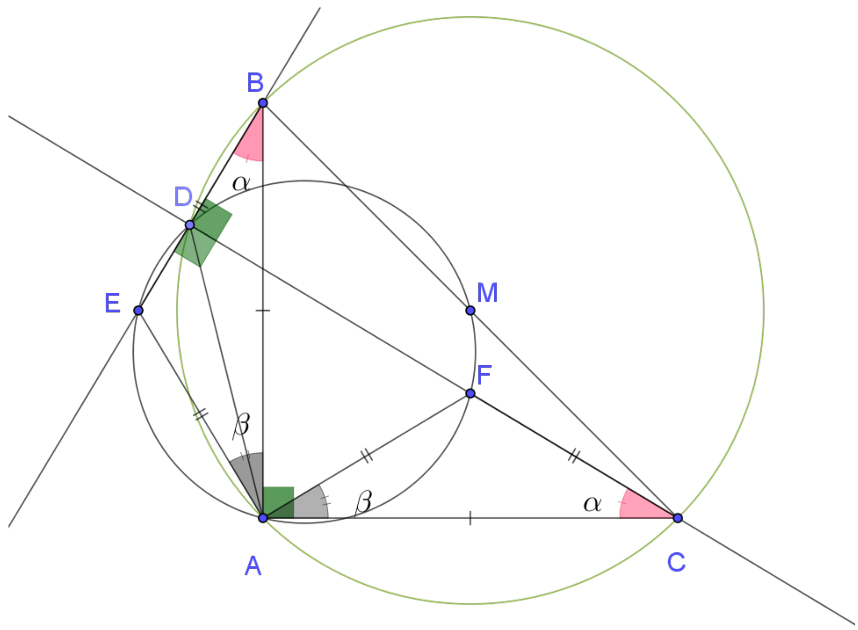
$$\theta = 20^o$$

Assim

$$A\hat{B}C = 180^o - A\hat{C}B - B\hat{A}C = 180^o - 4\theta - 2\theta = 180^o - 6\theta = 180^o - 120^o = 60^o$$

Exemplo 8) Olimpíada Ibero Americana de Matemática 2018, em [21]: Seja ABC um triângulo tal que $B\hat{A}C = 90^{\text{o}}$ e $BA = CA$. Seja M o ponto médio de BC. Escolhe-se um ponto $D \neq A$ na semicircunferência de diâmetro BC que contém A. A circunferência circunscrita ao triângulo DAM interseta as retas DB e DC nos pontos E e F, respetivamente, onde E pertence ao prolongamento do segmento BD, no sentido de B para D. Demonstre que $BE = CF = AF = EA$

Solução: Do enunciado pode ser construída a seguinte figura:



Observe que o quadrilátero $ACBD$ está inscristo na semicircunferência de diâmetroBC. Logo deve ser concluído que:

$$F\hat{C}A = D\hat{C}A = D\hat{B}A = E\hat{B}A = \alpha$$

e

$$B\hat{A}C = B\hat{D}C = 90^{o}$$

Consequentemente:

$$F\hat{D}E = 180^{o} - 90^{o} = 90^{o}$$

Agora como $DEAF$ é um quadrilátero também inscritível em um circulo, segue que :

$$E\hat{A}F + F\hat{D}E = 180^{o}$$

$$E\hat{A}F = 180^{o} - 90^{o} = 90^{o} = B\hat{A}C$$

Porém, como $E\hat{A}F = E\hat{A}B + B\hat{A}F$ e $B\hat{A}C = B\hat{A}F + F\hat{A}C$, então pode ser concluído que:

$$E\hat{A}B + B\hat{A}F = B\hat{A}F + F\hat{A}C$$

$$E\hat{A}B = F\hat{A}C = \beta$$

E como $F\hat{C}A = E\hat{B}A$ e $AC = AB$ então, pelo caso de congruência (ALA), segue que os triângulos AFC e AEB são congruentes e disto deve-se concluído que $BE = CF$ e $AF = EA$.

Além disso, $E\hat{B}A = D\hat{B}A$ que é um angulo inscristo no arco $\widehat{AD}$, da circunferência de diâmetro BC , cujo o ângulo central é $D\hat{M}A$. Como consequência disto:

$$D\hat{M}A = 2E\hat{B}A = 2F\hat{C}A$$

Mas como o quadrilátero $DMFA$ é inscritível, conclui-se que:

$$D\hat{M}A = D\hat{F}A = 2F\hat{C}A$$

Além de tudo, $D\hat{F}A$ é um ângulo externo ao triângulo AFC então:

$$D\hat{F}A = F\hat{C}A + F\hat{A}C$$

$$2F\hat{C}A = F\hat{C}A + F\hat{A}C$$

$$F\hat{A}C = F\hat{C}A$$

Logo o triângulo FAC é isósceles com $AF = CF$ e disto entende-se que $BE = CF = AF = AE$ como se deseja demosntrar.

2 Generalização, Especialização e Analogia

2.1 Generalização

Segundo POLYA (1954), em [2],p 12, esta técnica ocorre quando é conhecido que uma determinada propriedade é válida um conjunto de objetos P e deseja-se mostrar que essa propriedade também é válida para um conjunto maior que contenha P. Por exemplo, quando é sabido que uma determinada propriedade vale para todos os números primos e anseia-se mostrar que ela é válida para todos os naturais então deve ser aplicada esta técnica de generalização.

Segundo POLYA (1954), em [2],p 12, a técnica de generalização também é ultilizada quando, por exemplo, deixa-se de olhar para um triangulo equilátero e passa-se a olhar para um triângulo qualquer, ou quando deixa-se de olhar para um triângulo e passa-se a olhar para um polígono arbitrário. Esta técnica também é ultilizada quando se para de considerar as funções trigonométricas apenas para ângulos agudos e passa-se a estudar as propriedades destas funções para um ângulo qualquer.

> "Generalization is passing from the consideration of a given set of objects to that of a larger set, containing the given one. For example, we generalize when we pass from the consideration of triangles to that of polygons with an arbitrary number of sides. We generalize also when we pass from the study of the trigonometric functions of an acute angle to the trigonometric functions of an unrestricted angle"(POLYA (1954), em [2],p 12)

2.2 Particularização

Segundo POLYA (1954), em [2],p 13, esta técnica consiste em deixar de considerar um conjunto P para atentar apenas para um subconjunto especial de P, por isso a técnica também pode ser chamada de especialização. Esta técnica é muito usada para demonstrar que um conjunto genérico satisfaz determinada propriedade Q. Às vezes, por ser difícil de verificar esta propriedade num conjunto genérico T. Talvez seja mais fácil pegarmos um subconjunto A de T, no qual seja mais fácil de verificar esta propriedade e, após isto, usaremos este subconjunto para generalizar esta propriedade para qualquer outro subconjunto de T e assim a propriedade estará provada para todo o conjunto T.

Segundo POLYA (1954), em [2], p 13, a técnica de especialização estará sendo ultilizada quando, por exemplo, para-se de considerar polígono regular qualquer e muda-se o foco para um triângulo regular, isto é, um triângulo equilátero.

> "Specialization is passing from the consideration of a given set of objects to that of a smaller set, contained in the given one. For example, we specialize when we pass from the consideration of polygons to that of regular polygons, and we specialize still further when we pass from regular polygons with n sides to the regular, that is, equilateral, triangle"(POLYA, 1954, em [2], p 13)

Esta técnica também é poderosa para mostrar que uma propriedade não é válida para todos os elementos de P. Por exemplo, para mostrar que nem todo natural maior que 2 por ser escrito como a diferença entre dois quadrados perfeitos, basta considerar o subconjunto dos números naturais constituídos de números que dão resto 2 na divisão por 4, isto é, são os números da forma $4k+2$. Se por acaso estes números pudessem ser escrito como uma diferença de dois quadrados então, certamente, existiria dois números naturais r e s tais que: $r^2 - s^2 = 4k+2$ e assim da para ser deduzido que $r^2 - s^2 \equiv 2 \mod 4$.

Contudo, é conhecido que todo números natural ao quadrado é congruente a 0 ou a 1 módulo 4, assim: $r^2 - s^2 \equiv 0 \mod 4$, $r^2 - s^2 \equiv 1 \mod 4$ ou $r^2 - s^2 \equiv -1 \mod 4$. Logo não existem r e s tais que $r^2 - s^2 \equiv 2 \mod 4$.

Assim pode ser concluído que os números da forma $4k+2$ não podem ser escrito como diferença de quadrado. Portanto esta propriedade não é válida para os todos naturais. Assim deve ser lembrar que um contraexemplo é um subconjunto particular onde a propriedade P não é válida.

Agora se uma determinada propriedade for válida para um subconjunto de P e deseja-se mostrar que ela é válida para todo o conjunto P, deve-se fazer algumas deduções lógicas a fim de generaliza-la para qualquer subconjunto de P. Feito isso, esta propriedade ficará provada para todo o conjunto P.

Considere os seguintes exemplos de generalização e especialização:

Exemplo 1: Mostre que o quadrado de todo número natural maior que 2, pode ser escrito como a diferença de dois quadrados de números inteiros positivos.

Deve ser mostrado que, para todo $z > 2$ com $z \in N$, existem $r, s \in N$ tais que $r^2 - s^2 = z^2$.

Observe que:

$$r^2 - s^2 = z^2 \Leftrightarrow$$

$$(r+s).(r-s) = z^2 \Rightarrow$$

$$(r+s)|z^2$$

E além disso:

$$(r-s)|z^2$$

Observe que se z for um natural qualquer ele poderá ter muitos divisores ou poucos. Neste caso ficaria difícil de se exibir, com clareza, os valores de r e s que fazem com que $r+s$ e $r-s$ sejam divisores de z^2. Além disso, deve-se lembrar que $r+s$ e $r-s$ tem que ter a mesma paridade.

Mas, ao considerar o caso particular de z ser um número primo maior que 2 esta tarefa poderá ser mais fácil, tendo em vista que existem apenas três divisores positivos possíveis para z^2 que são: $1, z$ e z^2. Além de tudo, como $s > 0$ então $r+s > r-s$. Assim pode-se concluir que:

$$r + s = z^2$$

e

$$r - s = 1$$

Somando estas duas equações, chega-se a seguinte conclusão:

$$2r = z^2 + 1$$

$$r = \frac{z^2+1}{2}$$

$$s = r - 1 = \frac{z^2+1}{2} - 1 = \frac{z^2-1}{2}$$

Assim:

$$z^2 = [\frac{z^2+1}{2}]^2 - [\frac{z^2-1}{2}]^2$$

E como z é um primo maior que 2 então z é impar e assim z^2+1 e z^2-1 são pares. Logo suas metades correspondem a números naturais. Assim o teorema fica demonstrado para o caso z primo maior que 2.

Por outro lado, se z é um número impar qualquer então:

$$(\frac{z^2+1}{2})^2 - (\frac{z^2-1}{2})^2 = \frac{z^4+2z^2+1}{4} - \frac{z^4-2z^2+1}{4} = \frac{4z^2}{4} = z^2$$

E como z^2+1 e z^2-1 são pares, então $\frac{z^2+1}{2}$ e $\frac{z^2-1}{2}$ são números naturais. Assim fica demonstrado que o quadrado de todo número ímpar maior do que 1 pode ser escrito como diferença dos quadrados de dois números naturais.

Antes de demonstrar esta propriedade para os números pares deve ser levada em conta duas coisas importantes. A primeira é que é conhecido que todo quadrado de número primo, com exceção do 2, pode ser escrito de forma única como diferença de dois quadrados de números inteiros como está escrito acima. Em segundo lugar sabe-se que, no caso $z = 2$ isto não é possível uma vez que z^2+1 e z^2-1 são impares. Estas observações devem ser levadas em consideração na hora de generalizar esta propriedade.

Para mostrar esta propriedade para os números pares, deve ser observado que todo número par maior que 2 é uma potência de 2 mutliplicada por algum número natural ímpar, isto é, $z = 2^t r$ com $t > 1$ e com r ímpar.

Agora se $r = 1$, segue que $z = 2^n$ com $z > 2$ e assim:

$$t \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$t - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 2^{2t} = 4^t = 4^{(t-2)}.4^2 \Leftrightarrow$$

$$z^2 = 4^{(t-2)}.(5^2 - 3^2) = (5.2^{t-2})^2 - (3.2^{t-2})^2$$

Assim z^2 pode ser escrito como uma diferença de quadrados quando z for uma potencia de 2.

Agora se $r > 1$ com r ímpar, já é conhecido que existem m e n naturais tais que $r^2 = m^2 - n^2$ e assim pode ser concluído que:

$$z^2 = (2^t)^2.r^2 = (2^t)^2.(m^2 - n^2) = (2^t.m)^2 - (2^t n)^2$$

Assim a demosntração está finalizada.

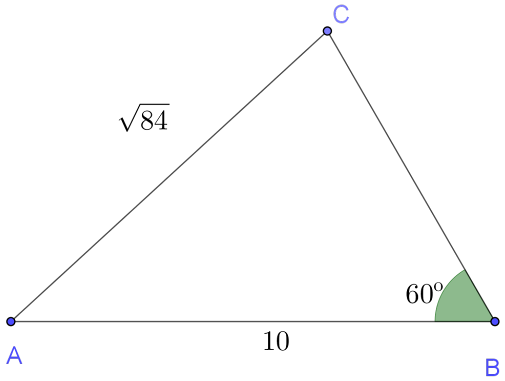
Antes de ver mais algum caso de especialização, deve ser observado que algumas propriedades não valem para casos gerais e sim para casos particulares

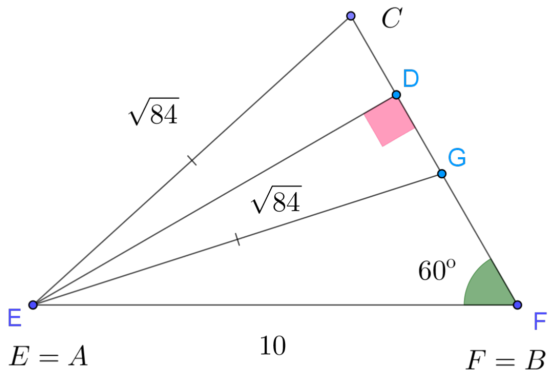
Segundo POLYA(1954), em [2],um caso particular é representativo se este possuir uma propriedade P que pode ser generalizada para um caso mais geral. Este foi o caso do exemplo acima onde se tinha um número primo ímpar com a propriedade de que o seu quadrado pode ser escrito como uma diferença de quadrados de números naturais. A partir deste caso particular, esta propriedade pôde ser estendida para todos os naturais maiores que 2.

O exemplo a seguir é um caso particular não representativo.

Exemplo 2: Considere a propriedade:"Dois triângulos ABC e EFG são tais que $AB = EF$ e $AC = EG$ e $A\hat{B}C = E\hat{F}G$. Então estes triângulos são congruentes".

Pode ser verificado que esta propriedade é falsa quando se trata de um triângulo acutângulo, pois pode ser dado, como exemplo, dois triângulos em que: $AB = EF = 10$ e $AC = EG = \sqrt{84}$ e $A\hat{B}C = E\hat{F}G = 60^o$ cuja a figura está representada abaixo:





Fazendo com que o segmento AB, coincida com o segemento EF, pode ser observado que o ponto C está sobre o círculo, com centro em A e raio $AC = \sqrt{84}$, e também está sobre uma reta r que passa por B formando um ângulo de 60^o. Porém a dependendo do tamanho de AB, pode haver dois pontos de intercessão entre a reta r e o círculo. Estes pontos serão denotados por C e G. Determinando assim dois triângulos diferentes.

Uma outra forma de verificar que esta propriedade é falsa, seria calcular os valores de BC e de FG aplicando a lei dos cossenos em cada triângulo. Assim:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos(60^o)$$

$$(\sqrt{84})^2 = 10^2 + BC^2 - 2.10.BC.\frac{1}{2}$$

$$84 = 100 + BC^2 - 10BC$$

$$BC^2 - 10BC + 16 = 0$$

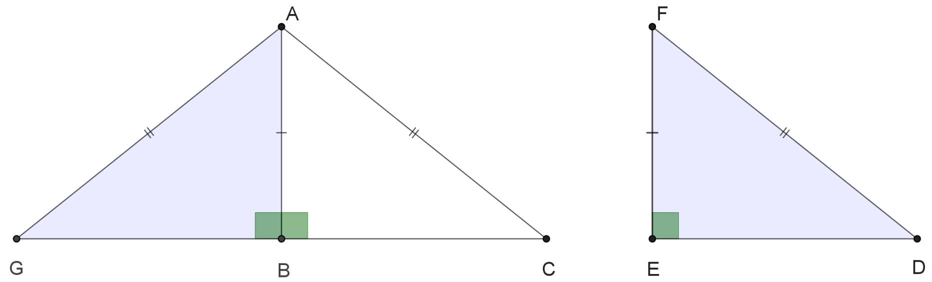
Podemos observar que BC e FG são as raízes dessa equação. No entanto resolvendo essa equação, serão encontrados os 2 e 8 como raízes. Logo pode se ter que $BC = 8$ e $FG = 2$. Determinando assim dois triângulos não congruentes.

Logo a propriedade é falsa em geral. Mas, ao ser considerado o caso especial em que $A\hat{B}C = E\hat{F}G \geq 90^o$ esta propriedade será verdadeira e será demonstrada a partir de agora.

Primeiro será considerado o caso em que $A\hat{B}C = E\hat{F}G = 90^o$. Sendo assim, considere a seguinte proposição:

Caso de congruência cateto Hipotenusa: Dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ retângulos em B e B_1 com$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ e $A\hat{B}C = A_1\hat{B}_1C_1 = 90^o$ então os triângulos são congruentes.

De fato: Observe a seguinte figura :



Sobre o prolongamento do segmento BC de C para B, tome um ponto D tal que $DB = B_1C_1$. Como $AB = A_1B_1$ e $A\hat{B}D = A\hat{B}C = A_1\hat{B}_1C_1 = 90^o$ por hipótese, então pelo caso LAL, os triângulos ABD e $A_1B_1C_1$são congruentes. Assim conclui-se que $A_1C_1 = AD = AC$ e $A_1\hat{C}_1B_1 = A\hat{D}B$. Logo o triângulo ADC é isósceles e os ângulos da base são iguais. Portanto:

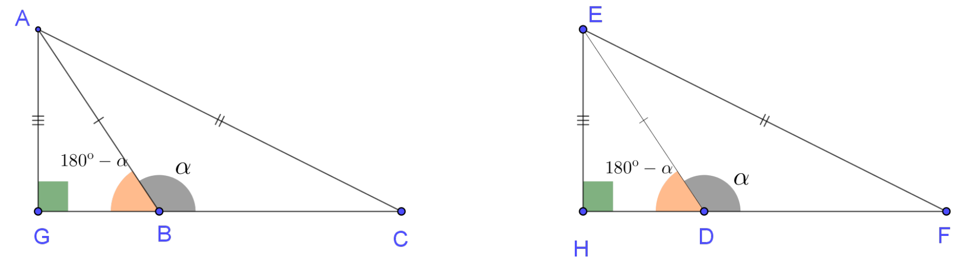
$$A_1\hat{C}_1B_1 = A\hat{D}B = A\hat{C}B$$

Além disso, como $A\hat{B}C = A_1\hat{B}_1C_1 = 90^o$, pode ser concluído que $B_1A_1C_1 = B\hat{A}C$. Agora pelo caso de congruência (ALA), observa-se que os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são congruentes. Assim a demonstração chegou ao seu fim.

Agora com base nisto, será mostrado que este resultado também é valido se $A\hat{B}C = A_1\hat{B}_1C_1 > 90^o$.

Exemplo 3: Segundo caso especial de congruência: Seja ABC e EDF dois triângulos, tais que $AB = DE$, $AC = EF$ e $A\hat{B}C = E\hat{D}F > 90^o$. Então ABC e DEF são triângulos congruentes.

Demonstração: Do enunciado pode ser construída a seguinte figura:



Observe que na figura os pontos G e H são as projeções ortogonais de A sobre a reta BC e de E sobre a reta FD, respectivamente. Além disso, observe também que:

$$E\hat{D}H = 180^o - E\hat{D}F = 180^o - A\hat{B}C = A\hat{B}G$$

Além do mais:

$$A\hat{G}B = E\hat{H}D = 90^o$$

e

$$ED = AB$$

Logo pelo caso de congruência (LAA_o), os triângulos AGB e EHD são congruentes. Portanto $EH = AG$ e $BG = HD$.

Porém, como $A\hat{G}C = E\hat{H}F = 90^o$e $AC = EF$ segue então do resultado anterior que os triângulos AGC e EHF são congruentes. Assim pode ser concluído que:

$$CG = HF \Leftrightarrow$$

$$BG + BC = HD + DF$$

com:

$$BG = HD$$

e

$$BC = DF$$

Assim, pelo caso (LLL) ou (LAL), os triângulos ABC e EDF são congruentes.

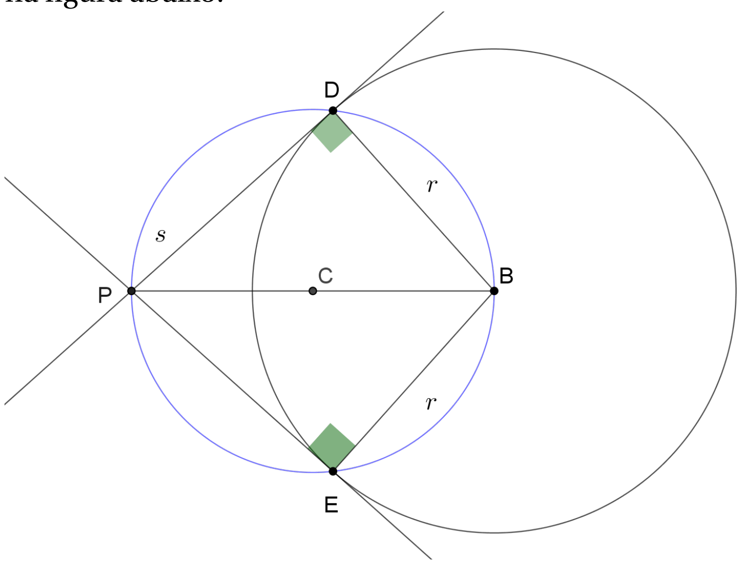
Observe que este caso especial, onde o triângulo é retângulo ou obtusângulo, o caso de congruência (LAL_o) é válido. Para os triângulos em geral ele é falso. Logo o fato deste caso de congruência valer somente para triângulos retângulos e obtusângulos constituí um caso especial não representativo.

O próximo exemplo foi proposto pelo POLYA (1954), em [2], p 24

Exemplo 4) Construa uma reta tangente exterior a dois círculos dados de raios r_1 e r_2, e nos pontos A e B, respectivamente. Pode ser considerarado que um círculo não seja interno ao outro. Existe um caso especial para estes dois círculos?

Solução: Antes de ser apresentada uma solução este problema, é importante refletir sobre um problema auxiliar que é o seguinte:

Problema 1: Considere um círculo de raio r e um ponto P fora do círculo. Construa uma reta s que passe por P e seja tangente ao círculo. Para isso considere o problema resolvido na figura abaixo:



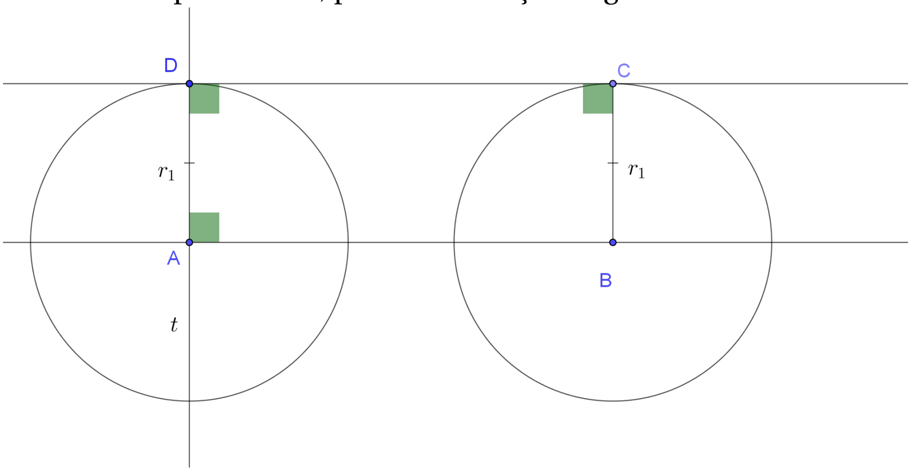
Repare que se D é o ponto onde a reta s tangencia o círculo, então o ângulo formado por s e o raio BD é reto, isto é, $P\hat{D}B = 90^o$. Então D pertence ao círculo de diâmetro BP. Logo D deve ser a intercessão do círculo de raio r e do semicírculo de diâmetro BP. Assim essa reta pode ser construída da seguinte forma:

Primeiro construa, com régua e compasso, o ponto médio do segmento BP que pode ser chamado de C.

Após isso, colocando a ponta seca do compasso em C e abrindo o raio até P, construa um círculo de raio CP de centro em C.

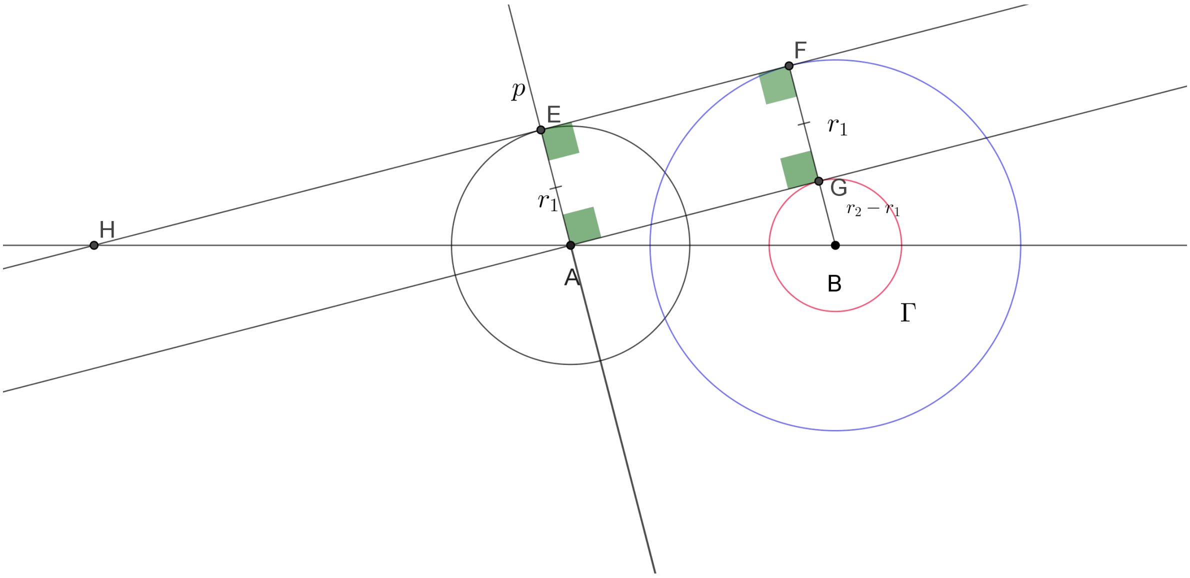
Por fim, considere as intercessões deste último círculo com o círculo de raio r, que serão dois pontos que podem ser chamados de D e E. As retas PD e PE são duas retas que passam por P e são tangentes ao círculo dado no enunciado.

Agora será resolvido o problema considerando o caso particular em que $r_1 = r_2$. Neste caso basta tomar a reta determinada pelos centros desses dois círculos, que serão denotados pelos pontos A e B, e construir uma reta paralela à reta AB que esteja a uma distância r_1 desta reta. A partir disto, pode ser esboçada figura abaixo:



Para fazer a construção desta reta paralela, basta traçar uma reta t prependicular à reta AB passando por A. Após isto, considere um ponto D em t que esteja a uma distância r_1 de A. Finalmente, traçe uma reta prependicular à reta t passando por D. Esta reta será a paralela a AB que é tangente aos dois círculos dados no enunciado. Pois sendo C o ponto desta reta que está a uma distância igual a medida de AB do ponto D e no mesmo semiplano, definido pela reta t, em que se encontra o ponto B, segue que o quadrilátero $ABCD$ é um retângulo, visto que $B\hat{A}D = A\hat{D}C = 90^o$. Além disso $CD = AB$. Logo C pertence ao círculo centrado em B, e a reta DC é prependicular aos raios AD e BC, portanto essa reta é tengente aos dois círculos.

Agora o caso geral, em que $r_1 \neq r_2$, poderá ser resolvido. Sem perda de generalidade, pode ser feita a suposição de que $r_2 > r_1$. Primeiro construa um círculo Γ de raio $r_2 - r_1$ e com o centro em B, como está ilustrado no esboço abaixo:



Para traçar a reta EF tangente aos dois círculos, primeiro deve ser construída a reta AG que é tangente ao círculo Γ passando por A, onde G é o ponto tangencia entre a reta e o círculo. Isso recai no problema 1 presente na página 52.

Após isso, deve ser traçada uma reta p prependicular à reta AG passando por A. Marcar-se então um ponto E como sendo a intercessão da reta p com o círculo de raio r_1 centrado em A. Por fim, deve ser construída uma reta paralela à reta AG passando por E . Essa reta tangencia o círculo de raio r_1 em E , e o círculo de raio r_2 em F.

Agora, para justificar este fato, basta lembrar que a reta AG é tangente ao círculo de raio $r_2 - r_1$ em G. Então $A\hat{G}B = 90^o$. Além disso, como EF é paralela à reta AG então $E\hat{F}G = A\hat{G}B = 90^o$. Logo pode ser dito que EF tangencia o círculo de raio r_2 em F. Além disso, como $A\hat{E}F = E\hat{A}G = 90^o$, então EF tangencia o círculo de raio r_1 em E .

O próximo exmplo foi proposto por POLYA (1954), em [2], p 24

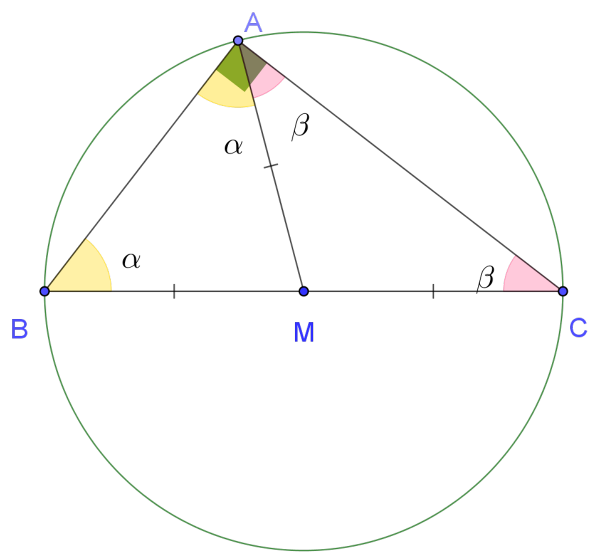
O Ângulo Central e o Ângulo Inscrito

Exemplo 5: Mostre que o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito em um circulo. Observe que uma vez que o ângulo central é determinado, existe varias posições para o ângulo inscrito no circulo. Mas na prova de Euclides, qual é a posição especial do ângulo inscrito no circulo ?

Solução: Considere um ângulo $B\hat{A}C$ e M o centro do círculo. É bem conhecido o fato de que o ângulo $B\hat{A}C$ é inscrito no círculo se e somente-se BC é uma corda deste círculo e A

pertence ao círculo. Agora para se chegar até a solução deste problema, se deve dividi-lo em três casos.

Caso 1: Se M pertece a um dos lados do triângulo ABC, então, sem perda de generalidade, pode-se supor que ele pertence ao lado BC. Neste caso M é o ponto médio de BC, visto que MB e MC são raios como mostra a figura:



Como $MA = MB$, então o triângulo ABM é isósceles e $C\hat{B}A = M\hat{A}B$. Além do mais, como $MC = MA$ então o triângulo ACM é isósceles com $B\hat{C}A = M\hat{A}C$. Assim pode ser concluído que:

$$B\hat{A}C = M\hat{A}B + M\hat{A}C = C\hat{B}A + B\hat{C}A$$

Por outro lado, também é verdade que:

$$B\hat{A}C + C\hat{B}A + B\hat{C}A = 180^{o}$$

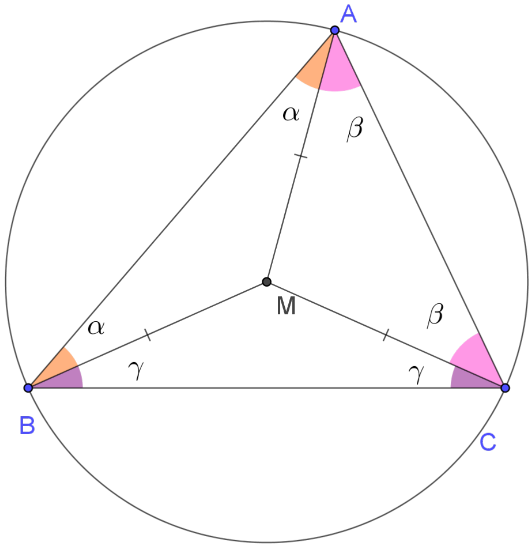
Logo:

$$2B\hat{A}C = 180^{o}$$

$$B\hat{A}C = 90^{o}$$

Neste caso o triângulo é retângulo em A. E como BC é diâmetro então $B\hat{M}C = 180^{o}$ que é exatamente o dobro de $B\hat{A}C$.

Caso 2: Neste caso, M está dentro do triângulo ABC, como mostra a figura:



Como que $MA = MB$, conclui-se que o triângulo AMB é isósceles com $M\hat{A}B = A\hat{B}M = \alpha$. E dado que $AM = MC$, então o triângulo AMC também é isósceles e $A\hat{C}M = M\hat{A}C = \beta$. Finalmente, também deve ser observado também que o triângulo BMC é isósceles com $MB = MC$, logo:

$$M\hat{B}C = M\hat{C}B = \gamma$$

Assim $B\hat{A}C = \alpha + \beta$ e olhando para o triângulo BMC conclui-se que:

$$B\hat{M}C = 180^o - 2\gamma$$

Por fim, somando os ângulos no triângulo ABC, entende-se que:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^o \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^o \Leftrightarrow$$

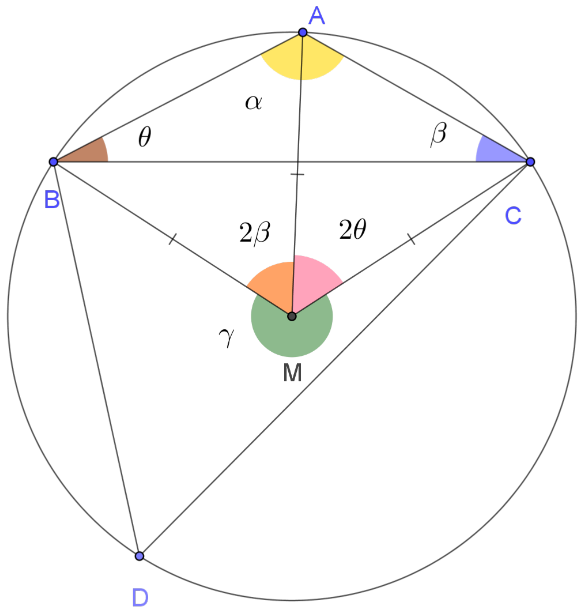
$$\alpha + \beta = 90^o - \gamma$$

Assim conclui-se que:

$$B\hat{M}C = 180^o - 2\gamma = 2.(90^o - \gamma) = 2.(\alpha + \beta) = 2B\hat{A}C$$

Logo o ângulo central $B\hat{M}C$ é o dobro do ângulo inscrito $B\hat{A}C$. E como $B\hat{M}C < 180^o$ então $B\hat{A}C < 90^o$. Aplicando o mesmo raciocínio para os demais ângulos teremos um triângulo acutângulo.

Caso 3: Neste caso, o ponto M se encontra fora do triângulo ABC. Sem perda de generalidade, pode-se supor que M se encontra no semiplano, definido pela reta BC, oposto ao que se encontra o ponto A. Sendo assim, toma-se um ponto D, no arco não convexo $\widehat{BC}$, de modo que M esteja no interior do triângulo BCD. Conforme mostra figura:



Pode-se perceber que $A\hat{M}B$ é o ângulo central do arco $\widehat{AB}$, enquanto o ângulo $A\hat{C}B$ é o ângulo inscrito. Pelo caso caso 2, temos que $A\hat{M}B = 2A\hat{C}B$. De forma análoga também se concluir que $A\hat{M}C = 2A\hat{B}C$, uma vez que $A\hat{M}C$ é o ângulo central do arco $\widehat{AC}$ e $A\hat{B}C$ é o ângulo inscrito. Agora somando os ângulos no triângulo ABC se conclui que:

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180^o$$

$$B\hat{A}C = 180^o - A\hat{B}C - A\hat{C}B$$

Denotando o ângulo não convexo $B\hat{M}C$ por γ, pode se chegar a seguinte expressão:

$$\gamma = 360^o - B\hat{M}C = 360^o - (A\hat{M}C + A\hat{M}B)$$

$$\gamma = 360^o - 2A\hat{B}C - 2A\hat{C}B = 2(180^o - A\hat{B}C - A\hat{C}B) = 2B\hat{A}C$$

Logo em qualquer um desses três casos o ângulo central é o dobro do ângulo inscrito.

2.3 Analogia

A palavra analogia deriva do análogo, que significa "parecido ou semelhante". Segundo POLYA(1954), em [2], p 13, analogia é uma técnica de resolução de problemas que lida com objetos matemáticos que possuem propriedades parecidas, por exemplo, um objeto análogo à esfera é o círculo, já o análogo do cubo é o quadrado e assim sucessivamente.

De acordo com POLYA(1954), [2] analogia é uma semelhança em um nível mais intelectual, e ela se distingui das demais semelhanças por conta dos conceitos claros que dois objetos análogos possuem em comum.

> "Analogy is a sort of similarity. It is, we could say, similarity on a more definite and more conceptual level. Yet we can express ourselves a little more accurately. The essential difference between analogy and other kinds of similarity lies, it seems to me, in the intentions of the thinker. Similar objects agree with each other in some aspect. If you intend to reduce the aspect in which they agree to definite concepts, you regard those similar objects as analogotts. Ifyou succeed in getting down to clear concepts, you have clarified the analogy"(George POLYA (1954), em [2], p 13.)

Vejamos alguns exemplos de problemas que podem ser resolvidos por analogia.

Exemplo 1 : Considere a seguinte teorema: Em um paralelogramo as diagonais se cortam ao meio. Encontre um resultado análogo para a geometria sólida.

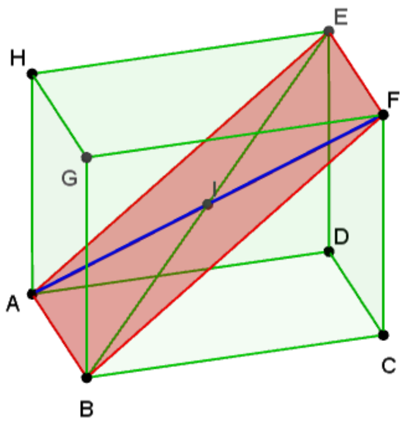
É conhecido que o objeto análogo da reta no R_3 é o plano, assim pode-se argumentar que se o paralelogramo é formado por pares de retas paralelas, então o análogo deste no R_3 é um sólido formado por 3 pares de planos paralelos, onde um par de planos é concorrente ao outro par dois a dois. Este poliedro é chamado de paralelepípedo.

As faces do paralelepípedo são paralelogramos. Pois fixando o plano π_1 como sendo um dos seis planos, conclui-se que existem entre os demais planos, dois pares de planos paralelos que irão interceptar π_1, formado com este quatro retas paralelas duas a duas, obtendo assim um paralelogramo.

Agora pode-se definir a diagonal de um paralelepípedo como sendo um segmento cujas a extremidades são vértices do paralelepípedo, nos quais não existe nenhuma face deste poliedro que os contém.

Assim com essas definições em mente pode-se dizer que o análogo de um resultado referente às diagonais de um paralelogramo será um resultado referente às diagonais do paralelepípedo. Logo pode-se intuir que o resultado análogo ao descrito acima seria: As quatro diagonais de um paralelepípedo se cortam ao meio.

Observe que aqui foi feita uma conjectura, a partir uma analogia existente entre paralelogramo e paralelepípedo. Mas a partir de agora, será demonstrado este resultado usando a lógica. Para isto considere o paralelepípedo $ABCDEFGH$ e as diagonais, AF e BE, deste paralelepípedo como mostra a figura abaixo:



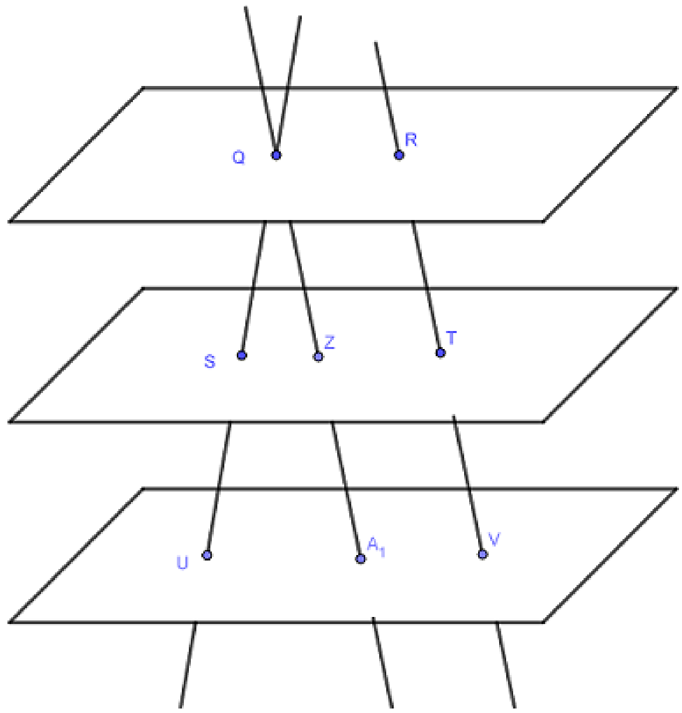
Observe que cada face do paralelepípedo é um paralelogramo então $AB \parallel HG$ e $HG \parallel EF$ e pela transitividade se conclui que $EF \parallel AB$.

Logo existe um plano que contém as retas AB e EF e a intercessão deste plano com o paralelepípedo determina o quadrilátero $AEFB$. Como a reta AB é paralela à reta EF e $AB = HG = EF$ se conclui que $ABEF$ é um paralelogramo. Agora como AF e BE são as diagonais deste paralelogramo então elas se cortam ao meio. Assim pode-se concluir que este resultado é valido para quaisquer duas diagonais do paralelepípedo.

Exemplo 2: "Considere a seguinte propriedade na geometria plana: Duas retas cortam três retas paralelas determinando quatro segmentos proporcionais. Enuncie e prove um teorema análogo a este na geometria sólida"(POLYA (1954),em [2],p 25).

Solução: Observe que o análogo da reta no R_3, pode ser reta ou plano. Sendo assim um teorema que é verdadeiro que análogo ao teorema anterior é: Duas retas cortam 3 planos paralelos determinando quatro segmentos proporcionais.

Demonstração: Sejam Π_1, Π_2 e Π_3 planos paralelos e r e s são retas que interceptam os planos Π_1, Π_2 e Π_3 nos pontos Q, S, U e R, T e V, respectivemente . Agora considere Z e A_1 pontos escolhidos no planos Π_2 e Π_3 respectivemente de forma que $A_1V = TZ = QR$ e além disso, a reta A_1V é paralela à reta ZT, que por sua vez é paralela à reta QR. Conforme mostra a figura:



Observe que o quadrilátero $QRTZ$ é um paralelogramo, visto que o segmento TZ é paralelo ao segmento QR e $QR = TZ$, e assim $QZ = RT$. Da mesma forma o quadrilátero $ZTVA_1$ também é um paralelogramo, assim $A_1Z = TV$. Mas olhando para o plano que contém os pontos Q, U e A_1 entende-se que os pontos Q, S, U, A_1 e Z são todos coplanares sendo que as retas QS e QZ são tranversais às retas paralelas UA_1 e SZ. Logo por Talles temos que:

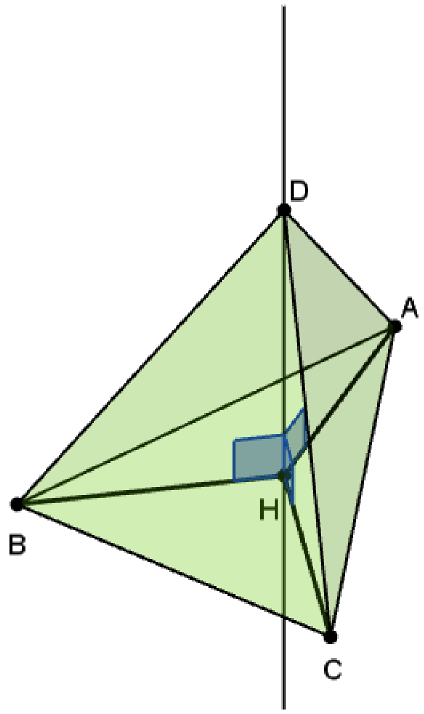
$$\frac{QS}{SU} = \frac{QZ}{ZA_1} = \frac{RT}{TV}$$

Assim a demonstração chegou ao seu fim.

Exemplo 3: "Considere a seguinte propriedade na geometria plana: Em um triângulo isósceles a altura relativa ao vértice corta a base no seu ponto médio. Enuncie e demonstre uma propriedade análoga para a geometria sólida"(POLYA (1954), em [2],p 26).

Solução: O análogo ao triângulo isósceles no R_3 é uma tetraedro cuja a distância do vértice a cada um dos vértices da base é a mesma. Assim pode ser feita a seguinte conjectura: "Em um tetraedro em que todas as arestas laterais tem o mesmo comprimento, a sua altura passa pelo centro da base."

Demonstração: Seja $ABCD$ um tetraedro de vértice D e base ABC e seja H a projeção ortorgonal de D no plano ABC, como mostra a figura abaixo:



Como DH é perpendicular ao plano ABC, então DH é perpendicular a qualquer reta contida neste plano. Logo:

$$D\hat{H}A = D\hat{H}B = D\hat{H}C = 90^o$$

Agora observe que as hipotenusas AD,BD e CD dos triângulos ADH, BDH e CDH são iguais e o cateto DH é comum aos três triângulos, logo pelo caso especial de congruência, cateto hipotenusa, entende-se que estes três triângulos são congruentes. Logo $HA = HB = HC$. Assim$H$ é o circuncentro.

Exemplo 4: Considere a seguinte propriedade na geometria plana:"Um círculo possui uma área igual a área de um triângulo cuja a base tem a mesma medida do perímetro do circulo e cuja a altura igual ao raio deste círculo. Enuncie e verifique uma propriedade análoga para a geometria sólida."(POLYA (1954), em [2], p 25 e 26)

Solução: É conhecido o fato de que o objeto análogo do circulo no R_3 é a esfera e o objeto análogo do triângulo é a pirâmide. Assim pode ser dito que o comprimento da base de um triângulo é o análogo à área da base da pirâmide no R_3. Assim pode ser enunciado o guinte teorema:

Teorema: Uma esfera possui um volume igual ao volume de uma pirâmide cuja a altura é igual ao raio da esfera e a área da base da pirâmide tem a mesma medida da área total da esfera.

Demonstração: É sabido que a área da esfera é dada por:

$$A_{esfera} = 4\pi R^2$$

E o volume da pirâmide é:

$$V_{piramide} = \frac{A_{base}.h}{3} = \frac{4\pi.R^2.R}{3}$$

$$V_{piramide} = \frac{4\pi.R^3}{3} = V_{esfera}$$

Assim a demonstração está finalizada.

3 Técnicas de construções geométricas

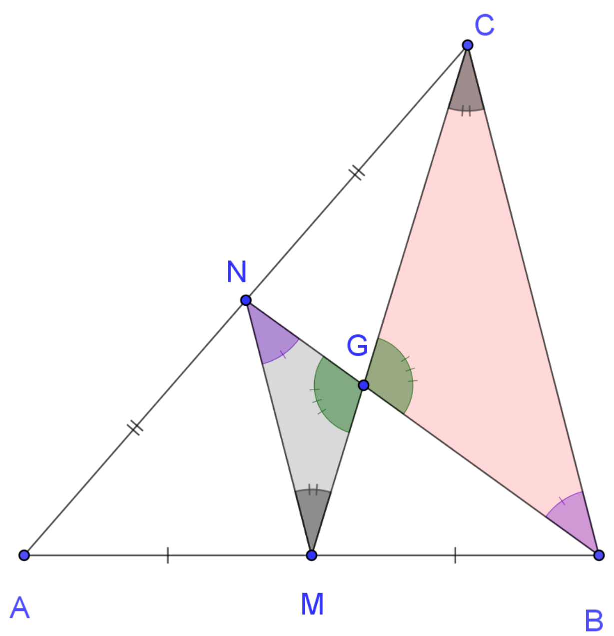
Neste capítulo será abordada uma técnica importante para a resolução de problemas geométricos que envolve construção com régua e compasso. Antes de se fazer uma abordagem desta técnica famosa, será falado um pouco sobre um lema fundamental, que será usado para resolver os exemplos deste capítulo.

Lema 01: Dado um triângulo ABC e sendo M e N os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente. E G é o ponto de intercessão dos segmentos BN e CM, logo:

$$\frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GM} = 2$$

Em outras palavras, este lema afirma que uma das medianas de um triângulo divide cada uma das outras medianas em dois segmentos na proporção 2 por 1.

Demonstração: Observe a figura abaixo:



Nesta figura pode-se peceber que como M e N os pontos médios dos lados AB e AC , então MN é uma base média do triângulo ABC. Pelo teorema da base média entende-se que o segmento MN é paralelo ao segmento BC e $\frac{BC}{MN} = 2$. Assim $B\hat{N}M = C\hat{B}N$, pois são ângulos alternos internos, e $B\hat{G}C = N\hat{G}M$ pois são opostos pelo vértice G. Assim os triângulos BGC e NGM são semelhantes, pelo caso de semelhança (AA). E vale a seguinte proporção:

$$\frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GM} = \frac{BC}{MN} = 2$$

3.1 A Técnica do problema resolvido

Segundo POLYA(1995), em [1], p 104, o grande precursor desta técnica foi Papus, um grande matemático grego que viveu nos 300 de nossa era. A técnica do problema resolvido consiste em dois processos que nomeados de análise e de síntese. Na análise deve ser admitido que aquilo que se precisa demonstrar ou construir, é algo verdadeiro ou que já tenha sido feito e, a partir disso, deve ser extraidas as consequências e as consequências das consequências até se chegar em um ponto que pode ser usado como ponto de partida. Papus também chama essa técnica de análise ou raciocínio regressivo.

> "Na análise, começamos por aquilo de que se precisa e que admitimos como certo e extrairmos consequências disso e consequência das consequências até chegarmos a um ponto que podemos usar como partida da síntese. Por que na análise admitimos que o que precisa ser feito já o foi (o que se procura já foi encontrado, o que se têm a demostrar é verdadeiro). Indagamos de qual antecedente poderá ser deduzido o resultado desejado: em seguida, indagamos de novo qual poderá ser o antecedente desse antecedente e assim por diante, até chegarmos finalmente a algo que já conhecemos ou que já admitimos como verdadeiro. A este procedimento chamamos análise, ou regressão ou raciocínio regressivo"(POLYA,1995, em [1],p 104)

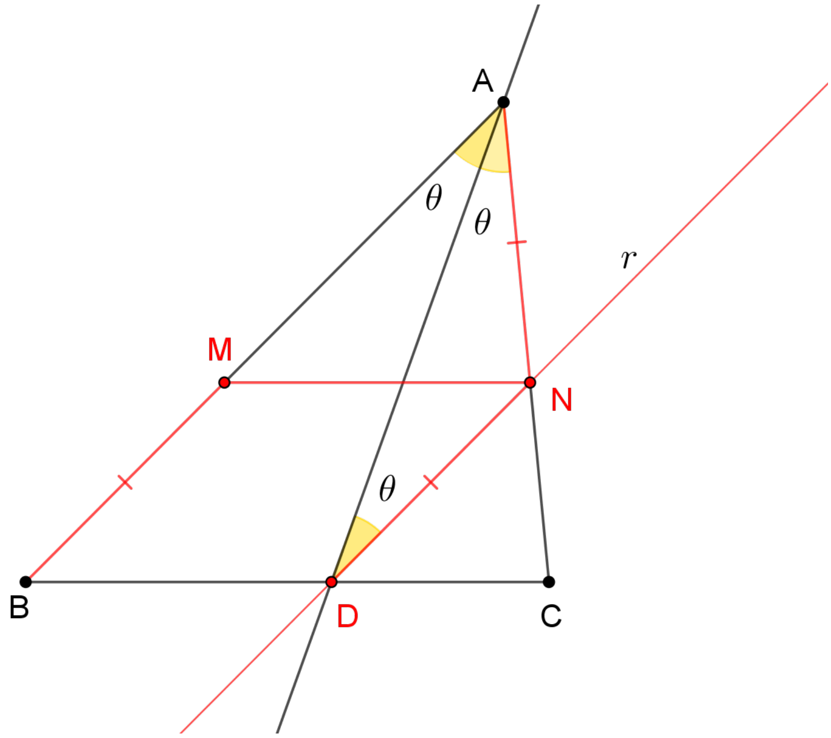
Segundo POLYA(1995), em [1], p 104, após esse procedimento deve-se inverter o processo. A partir do último ponto a que foi chegado na análise, deve deduzir o que o precedeu, e continuando a fazer deduções até que, percorrendo o mesmo caminho no outro sentido, consegue-se chegar aonde se quer. A este último procedimento, dar-se o nome de síntese.

> "Mas na síntese, invertemos o processo, partimos do último ponto a que chegamos na análise, daquilo que já sabemos ou admitimos como verdadeiro. Disso deduzimos o que o precedeu na análise e continuamos a fazer deduções até que, percorrendo o mesmo caminho no outro sentido, conseguimos finalmente chegar no aonde queríamos. A este procedimento damos chamamos síntese, ou resolução construtiva ou raciocínio regressivo. "(POLYA,1995, em [1],p 104)

O exemplo a seguir foi proposto por Wagner (2007), em [4], p 21.

Exemplo 1: Dado um triângulo ABC, determine um ponto M sobre o lado AB e um ponto N sobre o lado AC tais que MN é paralela a BC e $BM = AN$.

Solução: Suponha o problema resolvido, que neste caso é o processo de análise, como mostra a figura.



Pode ser traçada uma reta r paralela ao segmento AB passando por N, de forma que esta reta intercepte o lado BC em D. Como o segmento MN é paralelo ao segmento BC, por hipótese do problema resolvido, depreende-se que o quadrilátero $MNDB$ é um paralelogramo. Portanto $DN = BM = AN$. Assim o triângulo AND é isósceles com $N\hat{A}D = N\hat{D}A$. Mas como a reta ND é paralela ao segmento AB, entende-se que os ângulos $N\hat{D}A$ e $B\hat{A}D$ são alternos internos e por isso:

$$B\hat{A}D = N\hat{D}A = N\hat{A}D$$

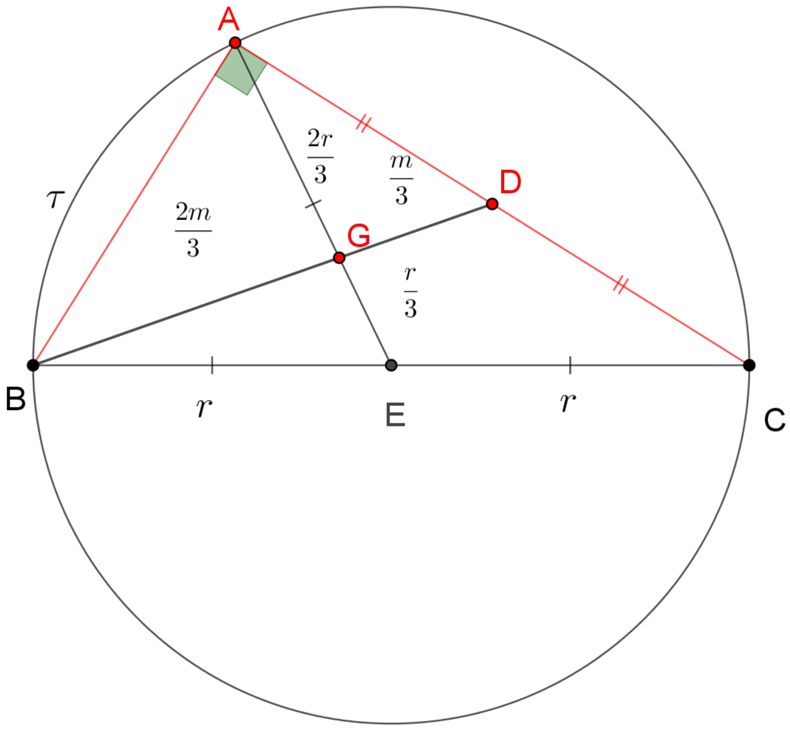
Assim AD é a bissetriz de $B\hat{A}C$, que por sua vez tem uma construção elementar. Assim para determinar as posições dos pontos N e M, deve-se construir primeiro a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$. Em outras palavras, essa bissetriz serve como o ponto de partida para a construção dos pontos M e N.

Agora deve-se descrever a construção passo a passo, e este processo é chamado de síntese. Primeiro se construi a bissetriz do $B\hat{A}C$ de forma que a sua intercessão com o lado BC determina o ponto D. Após isso, deve ser traçada uma reta r paralela ao lado AB passando por D, de forma que r intercepta o lado AC em N. Por fim, desenha-se uma paralela ao lado BC passando por N, que irá interceptar o lado AB em M. Esses pontos M e N satisfazem as condições do enunciado, pois como AD é bissetriz de $B\hat{A}C$ então $B\hat{A}D = N\hat{A}D$. Todavia, o segmento ND é paralelo ao AB, então $N\hat{D}A = B\hat{A}D = N\hat{A}D$ e portanto o triângulo AND é isóceles com $AN = DN$. Agora como o quadrilátero $BDMN$ é um paralelogramo então $BM = DN = AN$ e MN é paralelo a BD. Isto termina a construção.

Observe que neste exemplo o ponto de chegada do problema é a posição dos pontos M e N. Para obtê-los foi necessário partir do princípio que estes pontos já tenham sido encontrados, e construir, a partir disso, o paralelogramo $BDMN$. Este paralelogramo funciona como uma espécie de antecedente para a construção. A partir do paralelogramo $BDMN$ pode-se concluir que AD é a bissetriz de $B\hat{A}C$. Essa bissetriz foi tomada como ponto de partida para a construção, uma vez que a construção da bissetriz é elementar.

Exemplo 2: Construa um triângulo ABC, retângulo em A, conhecendo o tamanho da hipotenusa BC e o tamanho m da mediana relativa a AC .

Solução: Seja D o ponto médio do lado AC, neste caso é conhecido o tamanho da mediana $BD = m$, a hipotenusa BC e o ângulo $B\hat{A}C = 90^o$. Usando a técnica do problema resolvido pode ser construída a seguinte figura:



Como o ângulo $B\hat{A}C$ é reto, então o vértice A está sobre o circulo de diâmetro BC. Logo se E é o ponto médio de BC então $AE = BE = CE$. Por outro lado, BD e AE são duas medianas do triângulo ABC, e como cada mediana do triângulo divide qualquer outra mediana em dois segmentos na proporção de 2 está para 1 e sendo G o ponto de encontro dessas duas medianas então:

$$AG = 2GE$$

$$GE = \frac{AE}{3} = \frac{BE}{3} = \frac{BC}{6}$$

Além disso:

$$BG = 2GD \Leftrightarrow BG = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}m$$

Como é conhecido os tamanho de BC e de BD, então também são conhecidos os tamanhos de BE, GE e BG. Com isso pode ser determinada a posição do ponto G, pois os lados do triângulo BGE são todos conhecidos. A partir disso, pode ser realizada a construção do triângulo ABC, que é na verdade o processo de síntese, da seguinte maneira:

Primeiro deve-se construir o triângulo BEG, de modo que $BE = \frac{1}{2}BC$, $GE = \frac{BC}{6}$ e $BG = \frac{2}{3}m$. O ponto C é definido como o simétrico de B com relação a E. Assim E é o ponto médio do segmento BC. Após isso, deve ser construído um circulo τ de diâmetro BC. Finalmente, pode ser traçada a semirreta EG com origem E . A intercessão desta semirreta com o circulo τ será o ponto A. Assim está construído o triângulo ABC que o enunciado pede.

Agora será provado que este triângulo ABC de fato satisfaz as condições do enunciado. Para isto o primeiro fato que deve ser notado é que $B\hat{A}C = 90^{o}$, uma vez que A pertence ao círculo τ de diâmetro BC. Logo AE é mediana e tem a mesma medida do raio BE do círculo τ, isto é, $AE = BE = \frac{BC}{2}$. Portanto:

$$AG + GE = AE = \frac{BC}{2}$$

$$AG + \frac{BC}{6} = \frac{BC}{2}$$

$$AG = \frac{BC}{2} - \frac{BC}{6} = \frac{3BC}{6} - \frac{BC}{6}$$

$$AG = \frac{2BC}{6} = \frac{BC}{3}$$

Portanto:

$$\frac{AG}{GE} = \frac{\frac{BC}{3}}{\frac{BC}{6}} = 2$$

Agora como AE é uma mediana e G divide este segmento na proporção de 2 para 1, segue que G é o baricentro do triângulo. Isso significa que a reta BG corta AC no ponto médio D, e G divide o segmento BD também na proporção de 2 para 1. Logo:

$$\frac{BG}{GD} = 2$$

$$GD = \frac{BG}{2} = \frac{BD}{3} = \frac{m}{3}$$

Portanto:

$$BD = BG + GD = \frac{2}{3}m + \frac{m}{3} = m$$

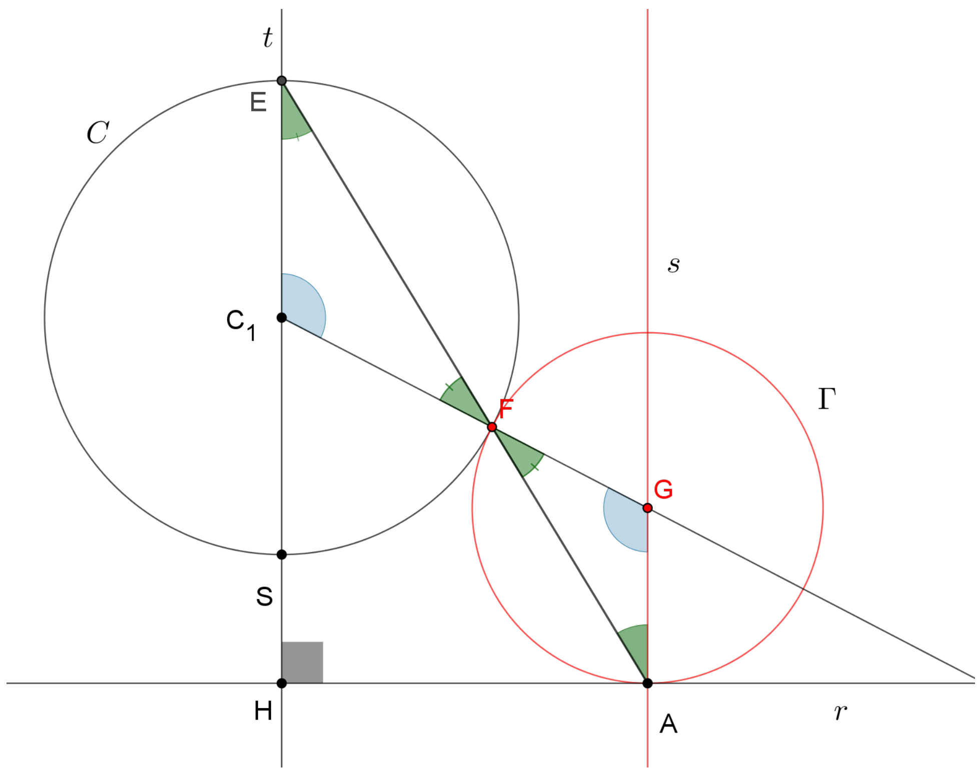
Assim foi concluido que a mediana BD, tem a mesma medida que foi proposta no enunciado. Logo o triângulo ABC, assim construído, realmente satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo o ponto G, que é o baricentro do triângulo ABC, e o triângulo BEG são dois antecendentes cruciais para a nossa construção, uma vez que o ponto G dividi as medianas BD e AE na proporção de 1 esta para 2, fazendo com que os lados do triângulo BEG tenham comprimentos conhecidos, de modo que BEG seja um triângulo fácil de construir. Assim este triângulo foi tomado como ponto de partida para a construção.

O exemplo a seguir foi dado Wagner(2007), em [4], p 19.

Exemplo 3: Dado um círculo C, uma reta r exterior a C e um ponto A sobre r. Construa um círculo tangente a C exteriormente e tangente a reta r em A. [3]

Solução: Novamente supondo o problema resolvido, que é o processo de análise, pode ser feita a seguinte figura:



Sendo C_1 o centro do círculo C, G o centro do círculo a ser construído que será chamado de τ e F é o ponto de tangência entre os dois círculos. Como o círculo τ é tangente a r

em A então GA é perpendicular à reta r. A partír disso, pode-se traçar uma reta auxiliar t paralela à reta GA passando por C_1, de forma que esta reta intercepta o círculo C no ponto E pertencente ao semiplano definido pela reta C_1G que não contém o ponto A. Esta reta t irá intercepta a reta r no ponto H.

Observe que $A\hat{H}E = 90^o$, visto que a reta EH é paralela à reta GA e $H\hat{A}G = 90^o$. É conhecido também que quando dois círculos são tangentes os seus centros e o ponto de tangência estão alinhados. Logo pode ser percebido que os ângulos $E\hat{C_1}F$ e $F\hat{G}A$ são iguais, pois são alternos internos definido pelas retas paralelas GA e HE e pela tranversal C_1G. Logo como os triângulos C_1EF e GFA são isósceles com $C_1E = C_1F$ e $GF = GA$. Portanto:

$$C_1\hat{F}E = \frac{1}{2}(180^o - E\hat{C_1}F) = \frac{1}{2}(180^o - F\hat{G}A) = G\hat{F}A$$

Isto mostra que os ângulos opostos pelo vértice F são iguais e logo os pontos E, F e A estão alinhados. A partir disso pode ser feita a construção, que é o processo de síntese.

Primeiro deve ser traçada uma reta perpendicular à r passando por C_1. Esta perpendicular irá interceptar o círculo C no ponto E, que é o ponto do círculo que está mais distante da reta r. Após isso, será determinado o ponto F que será a intercessão do círculo C com o segmento EA. Finalmente pode-se desenhar uma reta s perpendicular a reta r passando por A. Com isso será determinado o ponto G que é a intercessão desta reta s com a reta C_1F. E assim pode ser obtido o círculo de centro em G que passa por F, que se chama Γ, e o problema está resolvido.

Agora será provado que Γ realmente satisfaz as condições do enunciado. Primeiro deve ser observado que o ponto F faz parte da intercessão dos círculos C e Γ, e e o centro de Γ, que é o ponto G, está alinhado com o ponto F e o ponto C_1 que é o centro de C. Isto faz com que Γ seja tangente a C em F.

Além disso, deve ser notado que as retas EC_1 e s são paralelas, uma vez que ambas são perpendiculares à reta r. Como elas estão sendo cortadas pela transversal EA, segue que os ângulos $C_1\hat{E}F$ e $F\hat{A}G$ são alternos internos, portanto $F\hat{A}G = C_1\hat{E}F$. Mas o triângulo C_1EF é isósceles com $C_1E = C_1F$, isso faz com que $C_1\hat{E}F = C_1\hat{F}E$. Por fim, os ângulos $C_1\hat{F}E$ e $G\hat{F}A$ são opostos pelo vértice F, logo $C_1\hat{F}E = G\hat{F}A$. Portanto:

$$G\hat{F}A = C_1\hat{F}E = C_1\hat{E}F = F\hat{A}G$$

Com isso, temos que o triângulo AFG é isósceles com $AG = FG$, isto faz com que Γ passe pelo ponto A. Além disso G, que é o centro de Γ, está sobre a reta s que é perpendicular à reta

r em A, isto é, a reta r é perpendicular ao raio GA. Logo Γ é tangente à reta r em A. Portanto este círculo realmente satisfaz as condições do enunciado.

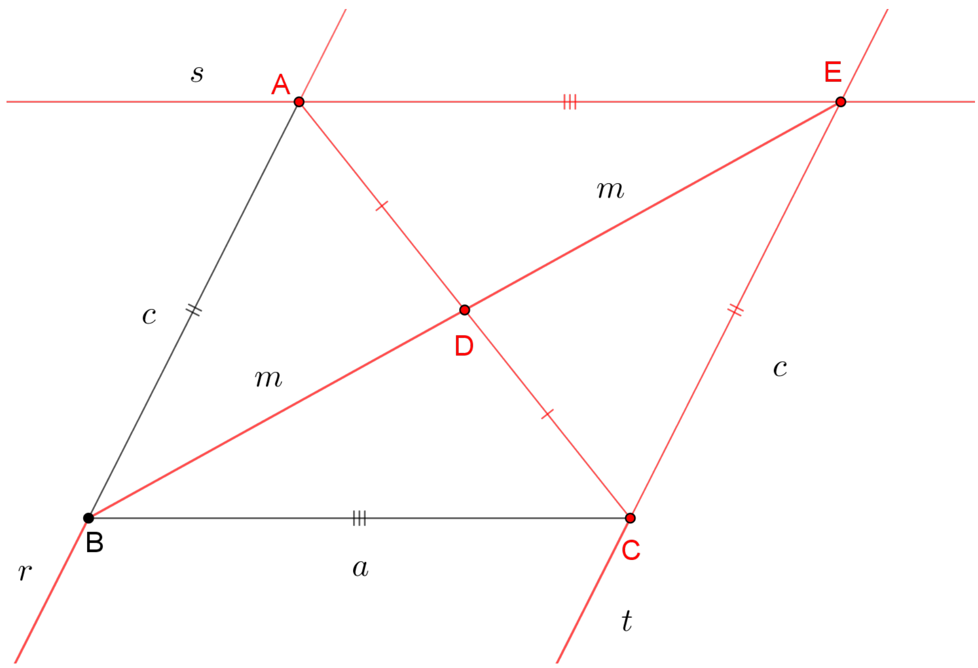
Observe que para o caso em que o ponto A for pé da perpendicular EC_1, isto é , $A = H$ o ponto F será igual ao ponto S, onde S é o ponto diamentralmente oposto E através de C, e o ponto G será o ponto médio do segmento SA.

Neste exemplo, os antecentes cruciais que serviram como ponto de partida para a construção foram os triângulos isósceles C_1FE e GFA, e também o fato de que os pontos A, F e E estão alinhados. Este alinhamento permitiu determinar a posição do ponto F, e consequentemente a posição do ponto G.

O exemplo a seguir foi um exercício proposto por Wagner (2007), em [4], p 23.

Exemplo 4: Construir um triângulo ABC conhecendo os lados $AB = c$ e $BC = a$ e a mediana m relativa ao lado AC.

Solução: Novamente usando a técnica do problema resolvido, que o POLYA(1995), mencionado em[1], chama de processo de análise, pode ser construida a seguinte figura:



Na figura foi traçada uma reta auxiliar t paralela ao segmento AB passando por C. Após isto, foi determinado um ponto E sobre esta reta de forma que $CE = AB$ e os pontos E e A se encontram no mesmo semiplano definido pela reta BC. Observe que o quadrilátero $ABCE$ é um paralelogramo e portanto suas diagonais se encontram no ponto médio. Logo sendo

D o ponto de intercessão de suas diagonais AC e BE, então BD é mediana do triângulo ABC relativa ao lado AC com $BD = m$. Além disso, D é o ponto médio de BE, logo $BE = 2BD = 2m$. Como são conhecidos o tamanho do lado $BC = a$, o tamanho do lado $AB = c$, que é o mesmo tamanho do lado CE, e o tamanho de $BD = m$, então o triângulo ACE tem os seus três lados com medidas conhecidas, uma vez que $BE = 2m$. Diante disso a construção é bem simples.

Sobre o segmento BC dado, pode ser construido o triângulo BCE, com $BC = a$, $CE = c$ e $BE = 2m$. Após isso, é traçada uma reta r paralela ao segmento EC passando por B e uma reta s paralela ao segmento BC passando por E. A intercessão das retas r e s determina o ponto A.

Agora será mostrado que o triângulo ABC, assim construido, realmente satisfaz as condições propostas no enunciado. Para isso basta observar que o quadrilátero $ABCE$ é um paralelogramo, uma vez que s é paralela ao segmento BC e r ao segmento CE. Isto nos garante que $AB = CE = c$ e que as diagonais AC e BE se cortam no ponto médio, que será nomeado de D. Logo BD é mediana relativa ao lado AC e:

$$BD = \frac{BE}{2} = \frac{2m}{2} = m$$

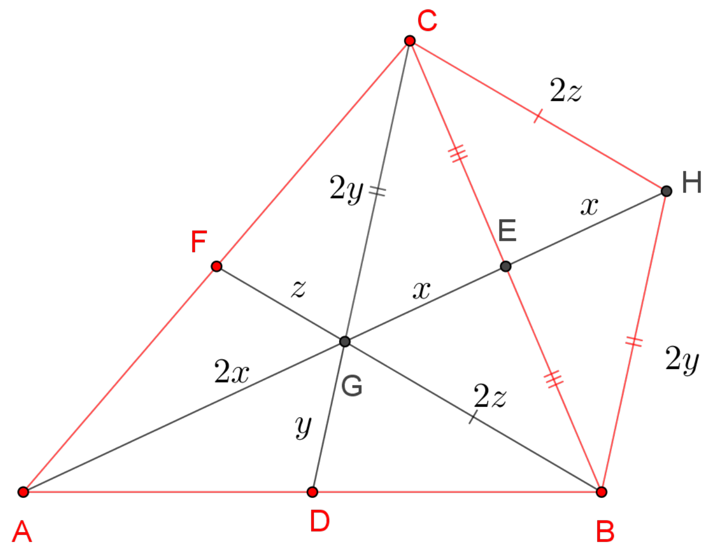
Com isso, o triângulo ABC realmente satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo os antencedentes cruciais que auxiliaram à construção foram o paralelogramo $ABCE$ e o triângulo BCE, que serviu como ponto de partida para a construção uma vez que os seus três lados tinham medidas conhecidas.

O exemplo a seguir foi proposto por Wagner(2007), em [4], p 14.

Exemplo 5: Construa um triângulo ABC conhecendo os tamanhos $3x, 3y$ e $3z$ que são os tamanhos das medianas relativas aos lados BC, AB e AC, respectivamente.

Considerando a técnica do problema resolvido e sendo D, E e F os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente, pode ser esboçada a seguinte figura:



Observe que são conhecidas as medidas dos segmentos $BF = 3z$, $CD = 3y$ e $AE = 3x$, e como cada mediana divide cada uma das demais em dois segmentos em que um é o dobro do outro então $GE = \frac{1}{3}AE = x$, $CG = \frac{2}{3}CD = 2y$ e $BG = \frac{2}{3}BF = 2z$. Tomando um ponto H sobre a reta AE de modo que $GE = EH = x$, com $H \neq G$, entende-se E é o ponto médio GH. Como as diagonais BC e GH, do quadrilátero $BGCH$, se encontram no ponto médio, então este quadrilátero é um paralelogramo.

Logo $GH = 2GE = 2x$, $CH = BG = 2z$ e $BH = CG = 2y$. Assim são conhecidas as medidas dos três lados dos triângulos CGH e BGH. A partir disso, pode ser realizada a construção do triângulo ABC da seguinte maneira:

Primeiro devem ser construídos os triângulos BGH e CGH, de modo que $CH = BG = 2z$, $BH = CG = 2y$ e $GH = 2x$, obtendo assim o paralelogramo $BGCH$. Após isso, sobre a semirreta HG, com origem em H, tome o ponto $A \neq H$ tal que $GA = 2x$. Assim a construção do triângulo ABC foi terminada.

Agora será mostrado que este triângulo ABC satisfaz as condições do enunciado. Sendo E o ponto de intercessão das diagonais BC e GH do paralelogramo $BGCH$, entende-se que E é o ponto médio dos semgentos BC e GH. Sendo assim, AE é a mediana relativa ao lado BC e $GE = \frac{GH}{2} = x$.

Além disso, é concluído também que $GA = 2x$. Portanto G divide a mediana AE em dois segmentos, AG e GE, cuja a proporção é de 2 para 1. Logo G é o baricentro do triângulo

ABC. Consequentemente:

$$\frac{CG}{GD} = 2$$

$$2GD = CG = 2y$$

$$GD = y$$

Portanto:

$$CD = CG + GD = 2y + y = 3y$$

É válido também que:

$$\frac{BG}{GF} = 2$$

$$2GF = BG = 2z$$

$$GF = z$$

Então:

$$BF = BG + GF = 2z + z = 3z$$

Logo o triângulo ABC possui medianas $AE = 3x$, $CD = 3y$ e $BF = 3z$.

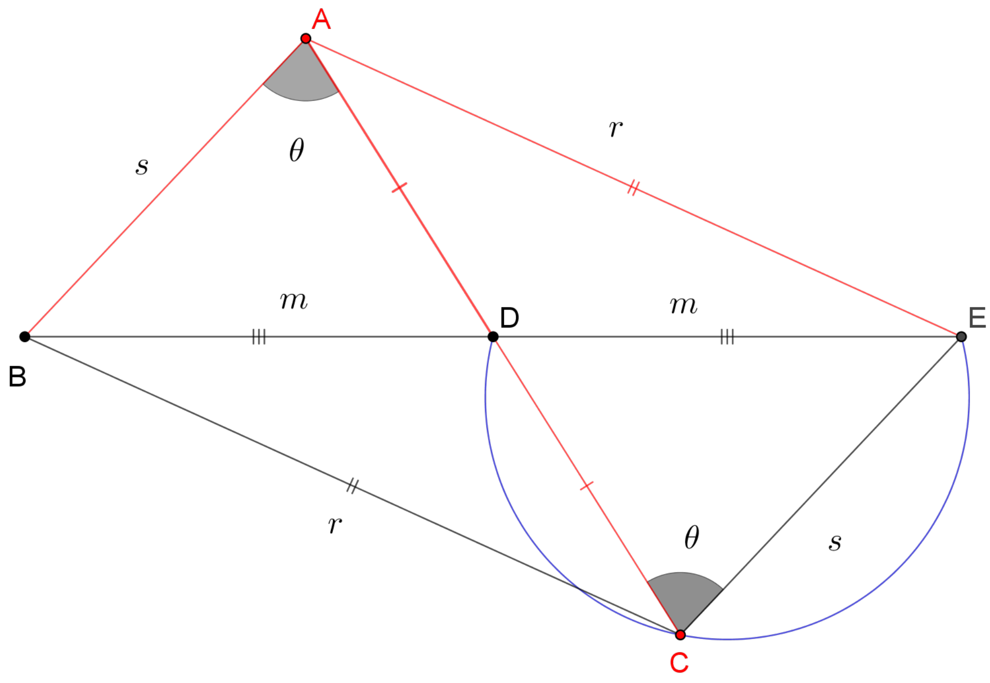
Neste exemplo os antecedentes essências para a construção foram o paralelogramo $BGCH$ e os triângulos BGH e CGH, que foram ultilizados como ponto de partída, uma vez que estes triângulos possuem os seus três lados com medidas conhecidas.

Os três exemplos a seguir são exercícios propostos por Wagner (2007), em [4], p 23 e 24.

Exemplo 6: Construa um triângulo ABC conhecendo o $\hat{A} = \theta$, o lado $BC = r$ e a mediana m relativa à base AC.

Solução:

Considere D o ponto médio de AC. São conhecidas as medidas do lado BC, do ângulo $B\hat{A}C$ e da mediana BD. Usando a técnica do problema resolvido, isto é, supondo conhecido o triângulo ABC, pode ser desenhada a seguinte figura:



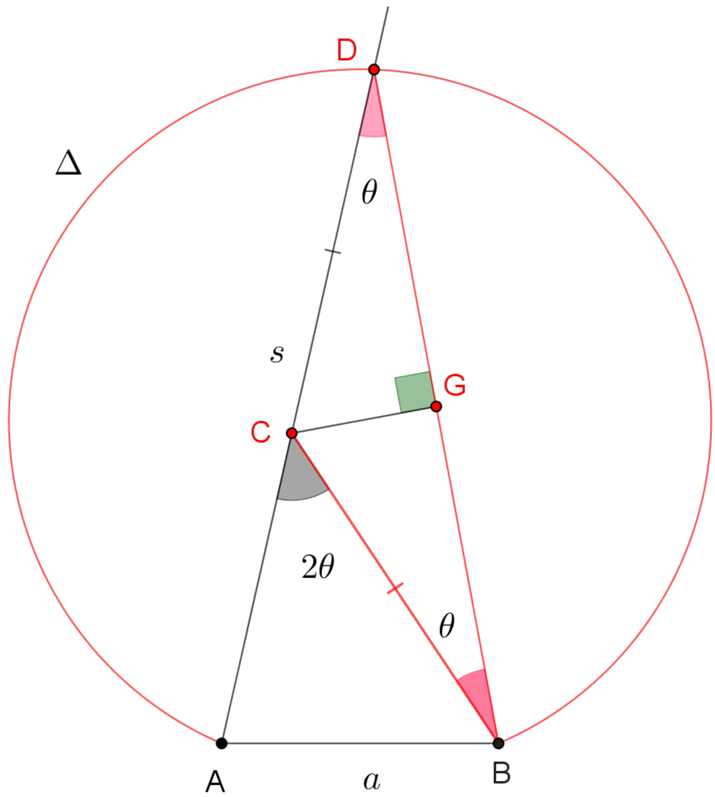
Seja E o ponto da semirreta BD de forma que D é o ponto médio de BE. Observe que o quadrilátero $ABCE$ é um paralelogramo, pois as suas diagonais AC e BE se encontram no ponto médio D. Logo EC é paralelo a AB e $B\hat{A}C = D\hat{C}E = \theta$. Portanto C pertence ao arco capaz Γ do ângulo θ construído sobre o segmento DE. Por outro lado, como a distância de B até C é r, então C também pertence ao círculo de centro em B e raio r. Logo C pertence à interseção de Γ com o círculo de centro em B. Com base nisso podemos construir o triângulo da seguinte maneira.

Dado o segmento BD, usando o compasso com centro em D, pode ser marcado o ponto E sobre a semirreta BD de forma que $DE = DB$. Em seguida, deve ser construído o arco capaz Γ do ângulo θ sobre o segmento DE. A intercessão de Γ com o círculo de centro B e raio r, determina o ponto C. Finalmente, pode ser desenhado um círculo com centro D passando por C. A intercessão deste círculo com a reta CD determina o ponto A. Assim o triângulo ABC está construído. Como os segmentos BE e AC se cortam ao meio temos que quadrilátero $ABCE$ é um paralelogramo, portanto $B\hat{A}C = D\hat{C}E = \theta$. O triângulo ABC assim obtido tem $BD = m$ como mediana e $BC = r$ como base e assim ele satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo os antencedentes crucias na resolução deste problema de construção foram o o simétrico do ponto B com relação ao ponto D, que foi denominado por E, o arco capaz do ângulo θ construido sobre o segmento DE e o paralelogramo $ABCE$. Todavia foi tomado como ponto de partida, o ponto E.

Exemplo 7: Construa um triângulo ABC conhecendo o ângulo $\hat{C} = 2\theta$, o lado AB e a soma $s = AC + BC$.

Solução: Usando a técnica do problema resolvido, isto é, conhecido um triângulo ABC sujeito as condições do enunciado, pode ser esboçada a seguinte figura:



Neste exemplo deve-se transformar a soma de AC com BC em um único segmento. Para isso será considerado um ponto D sobre o prolongamento do segmento AC, no sentido de A para C, de modo que $CD = BC$. Desta forma:

$$AD = AC + CD = AC + BC = s$$

e o triângulo DCB é isósceles. Como é conhecido o ângulo $A\hat{C}B = 2\theta$, que é um ângulo externo ao triângulo DCB, então pelo teorema do ângulo externo temos que:

$$B\hat{D}C = C\hat{B}D = \frac{1}{2}A\hat{C}B = \theta$$

Logo D pertence ao arco capaz Δ do ângulo θ construído sobre o segmento AB. Além disso, sabe-se que $AD = s$. Consequentemente, o ponto D pertence também ao círculo de centro em A e raio s. Sendo assim D pertence a intercessão deste círculo com o arco capaz Δ, e isto torna possivel a construção do triângulo ADB. Observe ainda que C pertence à mediatriz do segmento BD, visto que $CD = BC$. A partir disso, a construção do triângulo ABC, pode ser feita da seguinte forma:

Construa o arco capaz Δ do ângulo θ sobre o segmento AB. Após isso, trace o círculo de centro em A e raio s e considere D como a interseção deste círculo com Δ. Finalmente, trace a mediatriz m do segmento BD e considere o ponto C definido pela interseção de m com o segmento AD. O triângulo ABC ,assim construído, satisfaz as condições do enunciado.

Para verificar isso basta observar que o triângulo BCD é isósceles com $BC = CD$, pois C pertence à mediatriz de BD. Portanto:

$$C\hat{B}D = C\hat{D}B = \theta$$

Agora usando o teorema do ângulo externo pode ser inferido que:

$$A\hat{C}B = C\hat{B}D + C\hat{D}B = 2\theta$$

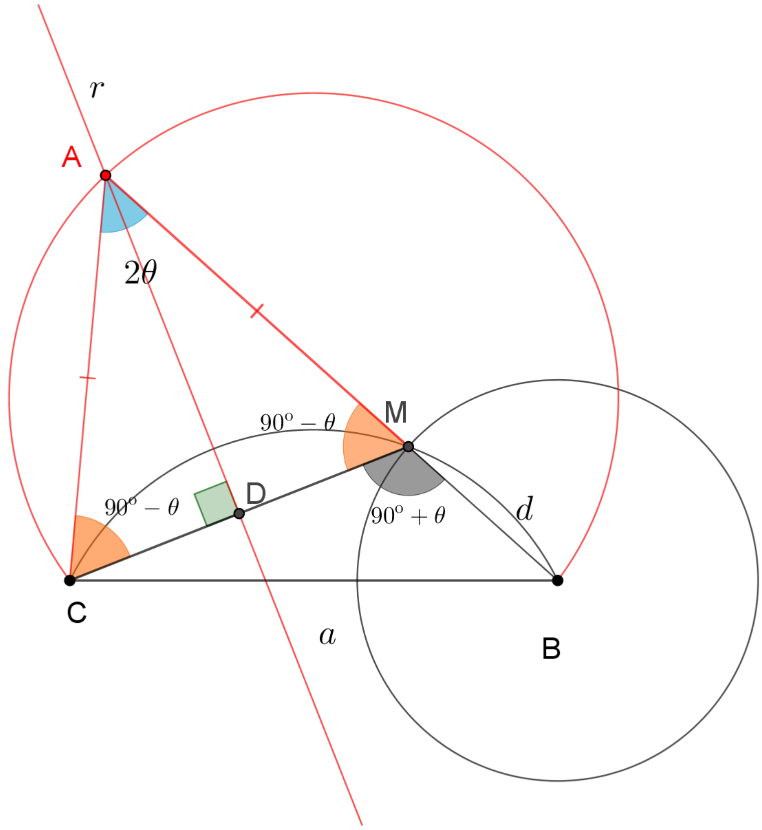
$$AC + CB = AC + CD = AD = s$$

Assim o triângulo ABC realmente satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo, os antencedentes que ajudaram na construção do triângulo ABC foram o arco capaz do ângulo θ construido sobre o lado AB, o ponto D determinado pela intercessão deste arco com a reta AC e o triângulo isósceles BCD. Todavia o ponto de partida para a construção foi o arco capaz do ângulo θ sobre o lado AB.

Exemplo 8: Construa um triângulo ABC, conhecendo o lado $BC = a$, o ângulo $\hat{A} = 2\alpha$ e a diferença $d = AB - AC$ com $AB > AC$.

Solução: Usando a técnica do problema resolvido pode-se construir a figura abaixo:



Nesta figura foi escolhido o ponto M sobre o lado AB de tal modo que $AM = AC$. Observe que:

$$MB = AB - AM = AB - AC = d$$

Além disso, temos que o triângulo ACM é isósceles, logo:

$$A\hat{C}M = A\hat{M}C = 90^o - \alpha$$

Assim $C\hat{M}B = 90^o + \alpha$, pois os ângulos $C\hat{M}B$ e $A\hat{M}C$ são suplementares. Isso faz com que o ponto M esteja sobre o arco capaz do ângulo $90^o + \theta$ construido sobre o segmento BC. Por outro lado, como $BM = d$, segue que M também pertence ao círculo com centro em B e com raio igual a d. Este fato ajudará a construir o triângulo ABC de forma mais detalhada a partir de agora.

Primeiro deve ser obtido o ângulo α a partir da construção da bissetriz do ângulo 2α. Em seguida obtenha o ângulo de $90^o + \alpha$ através do ângulo α, fazendo uma rotação de 90^o. Após isto, pode-se construir o arco capaz do ângulo $90^o + \alpha$ sobre o segmento BC. A interseção deste arco capaz com o círculo de centro em B e raio d determina o ponto M. Portanto $BM = d$.

Agora tome o ponto A como sendo a intercessão da reta BM com a mediatriz da reta MC. Com isto o triângulo ABC está construído.

Agora será provado que este triângulo obtido na construção de fato satisfaz as condições do enunciado. Para isto deve ser notado que A está sobre a mediatriz de AM. Logo $AC = AM$ e:

$$AB = AM + BM = AC + d$$

$$d = AB - AC$$

Além disso, como M está sobre o arco capaz do ângulo $90^o + \theta$ construido sobre o segmento BC então $C\hat{M}B = 90^o + \theta$. Consequentemente $A\hat{M}C = 90^o - \theta$, pois $C\hat{M}B$ e $A\hat{M}C$ são ângulos suplementares. Agora como o triângulo ACM é isósceles com $AC = AM$ então:

$$A\hat{C}M = A\hat{M}C = 90^o - \theta$$

Somando os ângulos no triângulo ACM segue que:

$$A\hat{C}M + B\hat{A}C + A\hat{M}C = 180^o$$

$$90^o - \theta + B\hat{A}C + 90^o - \theta = 180^o$$

$$B\hat{A}C = 2\theta$$

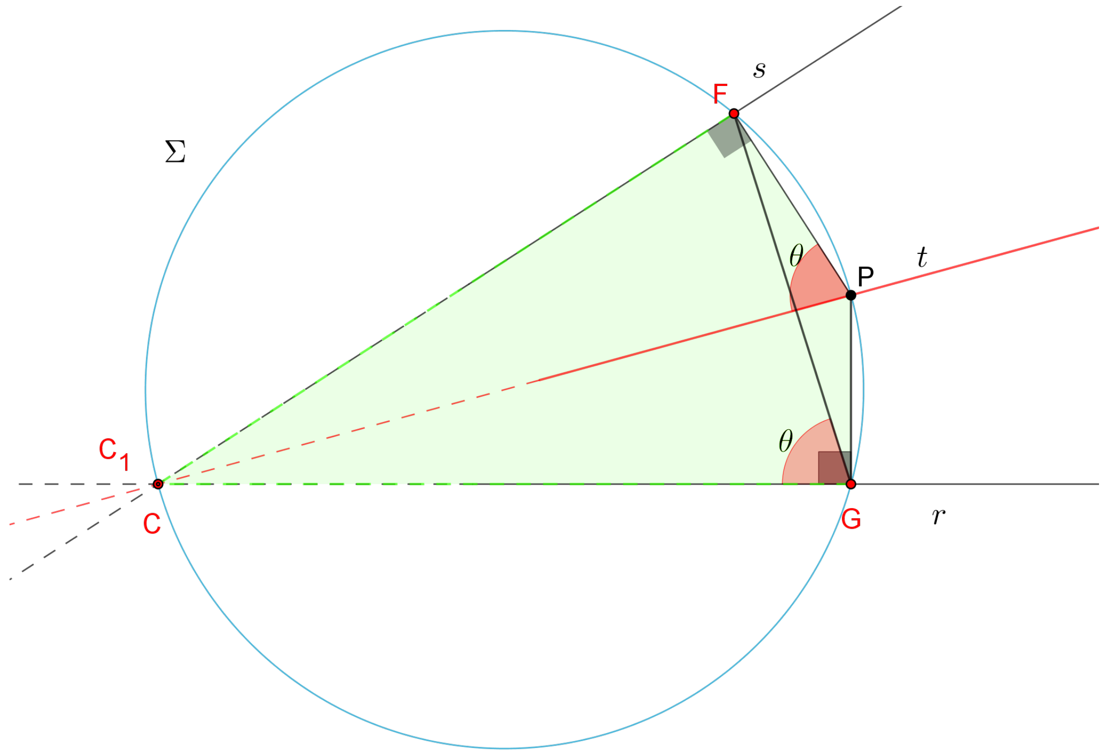
Por fim, deve ser observado que o lado $BC = a$ por construção. Assim o triângulo BAC obtido nesta construção realmente satisfaz as condições do enunciado.

Neste exemplo, os antecedentes foram o arco capaz do ângulo $90^o + \theta$ construído sobre o lado BC, o ponto M e o triângulo isósceles ACM. Contudo, o ponto de partida para construção foi o arco capaz.

Os dois exemplos a seguir são adptações dos exercícios propostos por WAGNER (2007), em [4], p 25

Exemplo 9: Considere duas retas r e s que se encontram em um ponto inacessível C, e um ponto P na região delimitada por essas duas retas. Trace uma reta passando por P e por C.

Solução: Considere o problema o problema resolvido e observe a figura abaixo:



Nesta figura F e G são as projeções ortogonais de P sobre r e s, respectivamente. Logo entende-se que:

$$P\hat{G}C + P\hat{F}C = 90^o + 90^o = 180^o$$

Portanto o quadrilátero $CFPG$ é inscritível num círculo Σ e assim pode-se inferir que $F\hat{P}C = F\hat{G}C = \theta < 90^o$, pois θ é um ângulo do triângulo retângulo FPC. Mas observe que o ângulo $F\hat{G}C$ é o menor ângulo formado pelas retas r e FG. Mas como os pontos F e G são pontos conhecidos então a reta FG está determinada e o ângulo $F\hat{G}C$ também. Com isso, pode ser feita a construção.

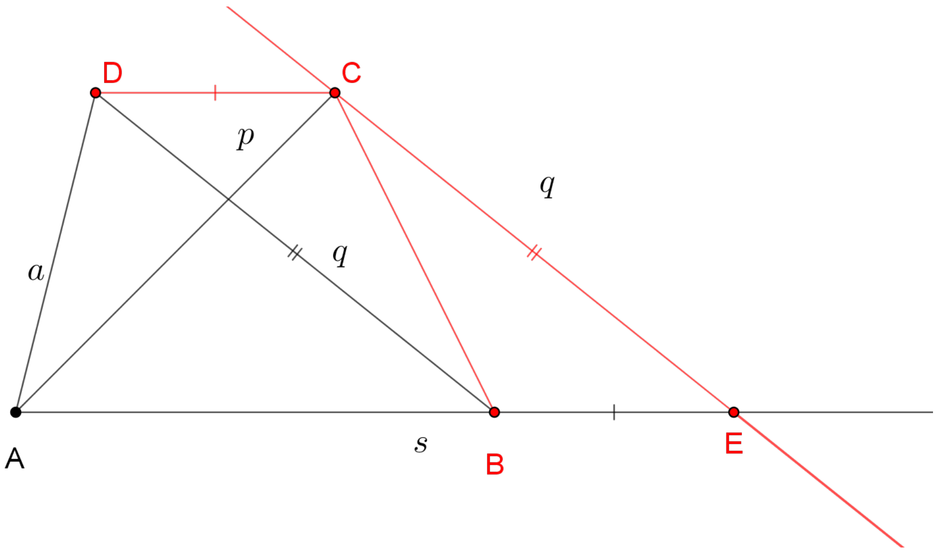
Partindo do ponto P, trace as retas perpendiculares às retas r e s, respectivamente, determinando o ponto F sobre s e o ponto G sobre r. Seja θ o ângulo agudo formado pelas retas r e FG. Passando por P trace uma reta t que forma um ângulo θ com o segmento FP, de modo que o ângulo θ esteja contido no interior do ângulo $F\hat{P}G$.

Será provado agora que esta reta t satisfaz as condições do enunciado, isto é, a reta t vai passar pelo ponto C. Para isso, considere que a reta t intercepte a reta r no ponto $C_1 \neq G$.

Observe que $F\hat{P}C_1 = \theta < 90^o$, e este ângulo está contido dentro do ângulo $F\hat{P}G$, isto significa que o ponto C e o ponto C_1 estão no mesmo semiplano definido pela reta FG, logo $F\hat{G}C_1 = F\hat{G}C = \theta$. Portanto $F\hat{P}C_1 = F\hat{G}C_1$ e com isso G pertence ao circuncírculo Σ do triângulo FPG. Agora como $C\hat{F}P = C\hat{G}P = 90^o$, então $C\hat{F}P + C\hat{G}P = 180^o$, com isso o quadrilátero $FCGP$ é inscritível e C pertence a Σ. Todavia C e C_1 são pontos da reta r, portanto C e C_1 pertencem a intercessão de r com Σ. Mas como C e C_1 são diferentes de G, então $C = C_1$. Logo a reta t passa por C.

Exemplo 10: Construa um trapézio conhecendo a soma das bases $AB + CD = s$, as diagonais $AC = p$ e $BD = q$ e o lado $AD = a$.

Solução: Considere o problema resolvido e observe a figura abaixo.

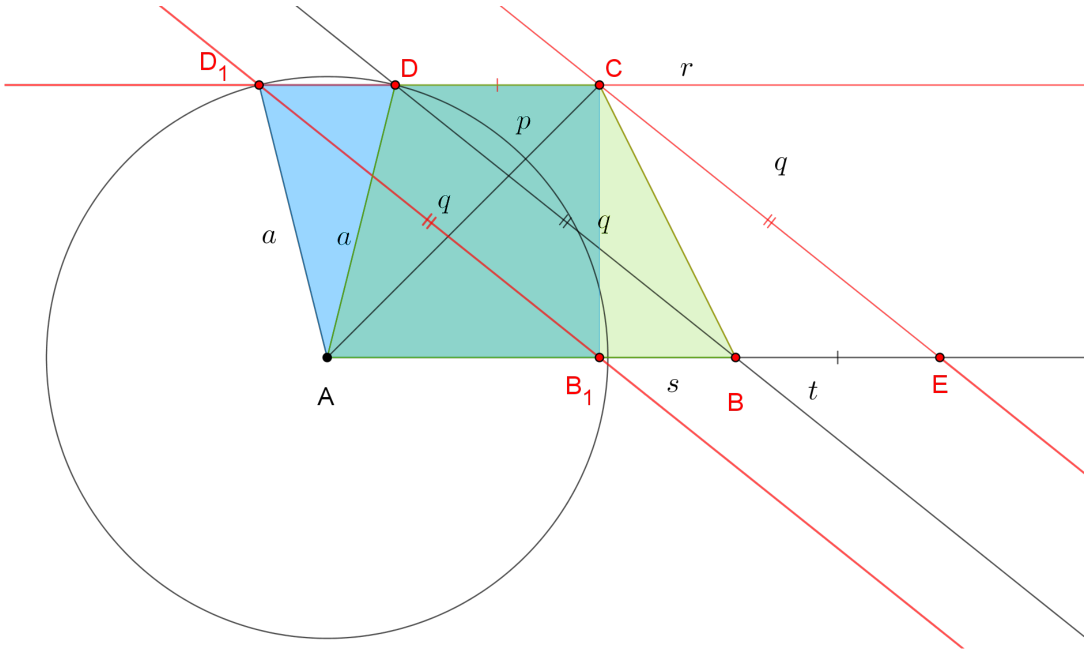


Primeiro deve ser traçada uma reta paralela à diagonal BD passando por C, de modo que esta reta encontre a reta AB no ponto E. Como o segmento DC é paralelo à reta AB e a reta CE é paralela ao segmento BD, então o quadrilátero $BDCE$ é um paralelogramo e assim $BD = CE = q$ e $BE = DC$. Logo:

$$AE = AB + BE = AB + DC = s$$

Observe que o triângulo ACE é fácil de construir, pois conhecemos as medidas dos seus três lados. Este triângulo e o paralelogramo $BDCE$ funcionam como antecendentes para a construção que será feita a partir de agora.

Primeiro construa o triângulo ACE, com $AC = p$, $CE = q$ e $AE = s$. A seguir, trace uma reta r, paralela à reta AE, passando por C. A interseção da reta r com um círculo de centro em A e raio a determina o ponto D em duas posições, que serão denominadas por D e D_1. Conforme mostra a figura abaixo:



Após isto, desenhe duas retas, s e t, ambas paralelas ao segmento CE, que passam pelos pontos D_1 e D, respectivamente. Agora considere os pontos B_1 e B como sendo a intercessão da reta AE com as retas s e t , respectivamente. Os trapézios $ABCD$ e AB_1CD_1 são duas soluções possiveis para o problema.

Agora será provado que estes dois trapézios realmente satisfazem as condições do enunciado. Para isso, observe que os quadriláteros $BECD$ e B_1ECD_1 são paralelogramos uma vez que CD_1 é paralelo EB_1 e B_1D_1 é paralela a CE que é paralela a BD. Logo:

$$D_1B_1 = DB = CE = q$$

$$D_1C = B_1E$$

e

$$CD = BE$$

Com isso, se pode chegar a seguinte conclusão:

$$D_1C + AB_1 = AB_1 + B_1E = AE = AB + BE = AB + CD = s$$

Por fim como $AD = AD_1 = a$ e $AC = p$ é uma diagonal comum dos trapézios $ABCD$ e AB_1CD_1, estes quadriláteros realmente satisfazem as condições do enunciado.

4 Considerações Finais

Tendo em vista a escassez de materiais voltados para resolução de problemas olímpicos de Matemática é que surge esta dissertação de mestrado. Ela foi elaborada, como um conjunto de unidades didáticas, para servir de material de apoio ao professor e ao estudante do Ensino Básico. Apresentamos e aplicamos algumas técnicas voltadas para a resolução de problemas de Geometria, a saber: técnica do elemento mais nobre, a técnica do problema resolvido, generalização, especialização e analogia e o elemento auxiliar. Estas técnicas foram ilustradas ao longo de três capítulos.

No capítulo 1, tratamos da técnica do elemento mais nobre e da do o elemento auxiliar. No capítulo 2, foram abordados os temas: generalização, especialização e analogia. No terceiro capítulo tratamos da técnica do problema resolvido, também chamada *processo de análise e síntese*, trabalho pioneiro de Papus de Alexandria. Todos capítulos exploram os conteúdos por meio da resolução detalhada de problemas.

Esperamos que esta dissertação possa contruibuir para o processo de Ensino e de Aprendizagem voltados para o treinamento olímpico de estudantes, em diferentes níveis, de maneira que possa motivar a realização de diferentes tipos de trabalho nesta linha de trabalho.

Como trabalhos futuros, pretendemos estudar e aplicar essas e outras técnicas de resolução de problemas nas outras áreas comumente exigidas em competições olímpicas: Álgebra, Aritmética e Combinatória. Nesse sentido, esperamos ampliar o rol temático de abragência dessa abordagem com intuito de favorecer e motivar o estudo da Matemática por parte dos estudantes e professores.

Referências Bibliográficas

[1] POLYA, G.P, A Arte de Resolver Problemas: Um Novo Aspecto do Modelo Matemático. Segunda Edição. Interciência Ltda, Rio de Janeiro,1995.

[2] POLYA,G.P, Mathematics And Plausible Reasoning: Induction And Analogy In Mathematics. Princeton University Press London: Geoffrey CumberIege, Oxford University Press L.C. Card 53-6388, 1954. Disponível para donwload em: Induction And Analogy. Acesso em: 12 dez 2021

[3] COXETER,H.G.S. Geometry Revisited. Toronto and New York. The Mathematical Association of América,1967

[4] WAGNER, E.W, Construções Geométricas. 6° edição, SBM, Rio de Janeiro, 2007.

[5] INTERNATIONAL MATHEMATICS TOURNAMENT Of THE TOWNS BOOK 5: Camberra Australia, Editora Australian Mathematics Trust Publishing, 2006.p.13

[6] PAULO FERREIRA DE ARAUJO, M.P.F.A, Geometria-Aula 27,Encontre o ângulo alfa, www.youtube.com.br. Disponível em:www.youtube.com/watch?v=3rxPS5V89jo. Acesso em :15 de julho 2019.

[7] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA,36ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA TERCEIRA FASE–NÍVEL 2, ano 2014, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2014. Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/. Acesso em: 05 jan 2019.

[8] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 35ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA TERCEIRA FASE–NÍVEL 2, ano 2013, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA,2013.Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/.Acesso em: 05 jan 2019

[9] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 27º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA TERCEIRA FASE – NÍVEL 2, ano 2005, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2005. Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/ Acesso em :05 jan 2019

[10] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 39º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA TERCEIRA FASE -NÍVEL 3, ano 2017, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2017. Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/ Acesso em :05 jan 2019.

[11] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 30º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, PRIMEIRA FASE NIVEL 3, ano 2008,questão 16, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2008. Disponível em:{https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/. Acesso: 11 dez 2021

[12] ART OF PROBLEM SOLVING, Sharygin Geometry Olimpiad, Final Round, Grade 8, question 2, ano 2012, ART OF PROBLEM SOLVING, 2012. Disponível em: Sharygin Geometry 2012 Acesso em: 10 dez 2019

[13] ART OF PROBLEM SOLVING, Iranian Geometry Olimpiad, Intermediate Level, ano 2017, ART OF PROBLEM SOLVING,2017. Disponível em: Arte de resolver problemas, AOPS. Acesso em 11 dez 2021

[14] PAPMEM - Julho de 2018 - Geometria Analítica com Vetores,:EDUARDO WAGNER .Disponível em: www.youtube.com/watch?v=USkxto1ueqI. Acesso em: 05 de jan 2019.

[15] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 41º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA,Fase Única, Nível 2,Questão 3, ano 2019, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2019. Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/. Acesso em: 12 dez 2021.

[16] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 32º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA,Terceira Fase, Nível 2, Questão 2, ano 2010, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2010. Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/. Acesso em: 12 dez 2021

[17] ART OF PROBLEM SOLVING, Tournament Of The Towns, Juniors A Level, Spring (1998), ART OF PROBLEM SOLVING, 1998. Disponível em: A arte de resolver problemas, AOPS. Acesso em: 12 dez 2021

[18] Art Of Problem Solving, Tournament Of The Towns, Juniors O Level, SPRING (1998), question 2. Art Of Problem Solving. Disponível em: A arte de resolver problemas, AOPS. Acesso em: 12 dez 2021.

[19] KEOSEREY. FILES, Tournament Of The Towns, Juniors A Level, Fall, ano 1997, KEOSEREY.FILES,1997. Disponível em: TOURNAMENT 1997 Acesso em: 12 dez 2021

[20] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 32º OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, Segunda Fase, Nível 3, Parte B, Questão 1, ano 2010, OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2010. Disponível em: OBM 2010 nível 3. Acesso em: 12 dez 2021.

[21] ART OF PROBLEM SOLVING, Ibero Abimerican, Problem 2, ano 2018, ART SOLVING PROBLEM, 2018. Disponível em: Olimpíada Ibero americana. Acesso em: 12 dez 2021.

[22] Olimpíada Brasileira De Matemática, Disponível em: OBM: Histórico. Acesso em: 20 dez 2021.

[23] FOMIM, D.F, GENKIN, S.G, ITENBERG, I.I,**CÍRCULOS MATEMÁTICOS**,A Experiência Russa, Primeira Edição, Rio de Janeiro, Dona Castorina, 2017

[24] LOBATO,L.F.L; ANDRADE, G. O. A. DESAFIO DO ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO. Disponível em: Desafios no aprendizado de geometria. Acesso: 21 dez 2021

[25] FILHO,R.L.B.F, PEREIRA, A.R.S.P, MAIA, E.M.M. PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: ENSINO MÉDIO, Portal.mec.gov.br. Disponível em: portal.mec.gov.br. Acesso em: 16 de jan de 2022.

[26] portal.mec.gov.br. NOVO ENSINO MÉDIO.http://portal.mec.gov.br. Disponível em: Novo Ensino Médio. Acesso em: 16 de jan de 2022.

[27] SILVA, R.S.D.S, MARTINEZ, M.L.S.M. DIFICULDADES NA MATEMÁTICA BÁSICA: O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA A VIDA, educere.bruc.com.br, 2017. Disponível em: Dificuldades na Matemática. Acesso em: 16 de jan de 2022.

[28] LOPES, A.S.L. ANÁLISE DE UMA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO MÉDIO, impa.br, 2013. Disponível em: Análise de livros didáticos. Acesso em: 17 de jan de 2022