



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Problema de Basileia: uma abordagem geométrica

JOÃONITO DE JESUS SANTOS

Orientador: PROF. DR. DARLAN FERREIRA DE OLIVEIRA

Feira de Santana-Bahia

Dezembro/2021

JOÃONITO DE JESUS SANTOS

O Problema de Basileia: uma abordagem geométrica

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira.

Feira de Santana-Bahia

Dezembro/2021

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Santos, Joãonito de Jesus
S235p O problema de Basileia: uma abordagem geométrica. / Joãonito de Jesus Santos. –
2021.
56 f.: il.

Orientador: Darlan Ferreira de Oliveira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Feira de Santana,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, Feira de Santana, 2021.

1.Geometria plana. 2.Teorema Inverso de Pitágoras. 3.Problema de Basileia. I.
Oliveira, Darlan Ferreira de, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III.
Título.

CDU: 514

Maria de Fátima de Jesus Moreira - Bibliotecária - CRB-5/1120



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE JOÃONITO DE JESUS SANTOS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos quinze dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e um, às 14:00 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: meet.google.com/iwf-bovs-taj, da dissertação apresentada sob o título “**O PROBLEMA DE BASILEIA: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA**”, do discente **Joãonito de Jesus Santos**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Darlan Ferreira de Oliveira (Orientador, UEFS), Sara Ruth Bispo de Menezes Oliveira (UFRB) e Adriano Régis Melo Rodrigues da Silva (UFRPE). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.

Feira de Santana, 15 de dezembro de 2021.

Prof. Dr. Darlan Ferreira de Oliveira (Orientador, UEFS)
Orientador

Prof.^a Dra. Sara Ruth Bispo de Menezes Oliveira (UFRB)

Prof. Dr. Adriano Régis Melo Rodrigues da Silva (UFRPE)

Visto do Coordenador:

Dedico este trabalho a todos que contribuíram, direto ou indiretamente, para que sua realização se concretizasse, em especial a minha família e a Deus, o Todo-Poderoso, por ter me permitido realizá-lo.

Agradecimentos

Com este trabalho concluo mais uma etapa em minha formação profissional, acadêmica e pessoal. Muitos foram os momentos de realizações, de desafios, de frustrações, de tristezas, de alegrias, mas, também, de reflexões acerca do processo de ensino e aprendizagem da matemática, sobretudo, no Ensino Básico.

Agradeço a Deus pelo dom da vida, mas também por ter me proporcionado esses instantes, tão desafiadores, porém fundamentais na construção de um profissional mais capacitado, mas, também, por contribuir para me transformar em um ser humano melhor.

Muitas pessoas contribuíram direto ou indiretamente para essa realização, sobretudo, quando mais precisei de um apoio, de uma palavra de conforto, de um gesto amigo, de alguém que ouvisse minhas lamentações e angústias. Assim, não poderia deixar de direcionar os agradecimentos.

Agradeço a minha família por acreditar em mim e reconhecer o meu esforço. A minha mãe Maria Rosa de Jesus, obrigado pelo cuidado, dedicação e pela preocupação demonstrada a cada dia que saía de casa com destino a universidade. Ao meu Pai João Bispo dos Santos (in memoriam), por ter me ajudado a me tornar quem sou. Sua presença significou segurança, conforto, mas, principalmente, o desejo de lutar para ser alguém na vida, apesar das dificuldades.

Aos meus irmãos Marivaldo Santos, Katia Cristina e Agnaldo Santos obrigado pelo carinho, pela paciência e pela preocupação.

A minha esposa Vanderly P. Couto pela paciência, companheirismo e apoio quando mais precisei. Obrigado por você existir em minha vida e tornar meu mundo mais alegre.

Agradeço aos colegas e companheiros de curso. Sou grato a todos por partilharem momentos de disseminação e construção de conhecimento.

Agradeço aos professores da UEFS, em especial, do PROFMAT por proporcionarem a construção de conhecimentos e saberes necessários para que eu me tornasse uma pessoa menos ignorante e mais reflexiva diante da realidade, sobretudo, em relação ao ensino e

aprendizagem da Matemática.

Agradeço à Capes (Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Agradecimento especial ao professor Darlan Ferreira de Oliveira, meu orientador Neste trabalho, por ter dedicado seu precioso tempo e contribuído para a minha formação enquanto profissional de educação. MUITO OBRIGADO!

“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida”.

(Jacques Bernoulli)

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo apresentar, por meio de conceitos básicos da geometria plana, uma forma para calcular a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais. A soma, em questão, ficou conhecida como Problema de Basileia e foi proposta pelo matemático italiano Pietro Mengoli, em 1644. Este trabalho, também, apresenta duas provas desse problema de cunho algébrico: uma realizada por Euler, em 1735 (tida como a primeira prova do problema) e a outra, realizada por Cauchy. Esta última se destaca por utilizar apenas conhecimentos da matemática elementar em sua resolução. Por fim, será apresentada uma proposta pedagógica composta de três atividades, as quais podem ser desenvolvidas em turmas de Ensino Médio e tem como propósito, além de proporcionar aos estudantes perceberem que a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais é igual a $\frac{\pi^2}{6}$, enfatizar a importância de tópicos geométricos para o aprendizado da matemática.

Palavras-chave: Problema de Basileia. Geometria Plana. Teorema Inverso de Pitágoras.

Abstract

This dissertation aims to present, through basic concepts of plane geometry, a way to calculate the sum of the inverse squares of natural numbers. The sum in question became known as the Basel Problem and was proposed by the Italian mathematician Pietro Mengoli, in 1644. This work also presents two proofs of this problem of an algebraic nature: one performed by Euler, in 1735 (considered the first proof of the problem) and the other, performed by Cauchy. The latter stands out for use only knowledge of elementary mathematics in its solution. Finally, a pedagogical proposal composed of three activities will be presented, which can be developed in high school classes and has the purpose, in addition to providing students to realize that the sum of the inverse squares of the natural numbers is equal to $\frac{\pi^2}{6}$, to emphasize the importance of geometric topics for learning mathematics.

Keywords: Basel Problem. Plane Geometry. Inverse Theorem of Pythagoras.

Lista de Figuras

1.1	Triângulo retângulo e seus elementos	4
1.2	Triângulo Retângulo	5
1.3	Quadrado	6
1.4	Métricas do triângulo ABC	6
1.5	Ângulo central	9
1.6	Ângulo Inscrito	9
1.7	Ângulo inscrito com o centro pertencente ao mesmo	10
1.8	Ângulo inscrito com o centro fora dele	10
1.9	Ângulo inscrito com o centro O sobre um dos lados	11
2.1	Circunferência Γ_1	21
2.2	Circunferências tangentes Γ_1 e Γ_2	21
2.3	Circunferências tangentes Γ_1, Γ_2 e Γ_3	22
2.4	Circunferências encaixadas tangentes em O	22
2.5	Ponto singular O_{11} sobre Γ_1	23
2.6	Pontos singulares O_{21} e O_{22} sobre Γ_2	23
2.7	Pontos singulares O_{31}, O_{32}, O_{33} e O_{34} sobre Γ_3	24
2.8	O_{n+1} pertence ao maior arco de Γ_n	25
2.9	O_{n+1} pertence ao menor arco de Γ_n	25
2.10	Γ_1 encaixada em Γ_2	26

2.11	Triângulo $OO_{21}O_{22}$	26
2.12	Triângulo $OO_{31}O_{33}$	27
2.13	Triângulo $OO_{32}O_{34}$	27
2.14	Triângulo $OO_{41}O_{45}$	27
2.15	Triângulo $OO_{44}O_{48}$	27
2.16	Triângulo $OO_{42}O_{46}$	28
2.17	Triângulo $OO_{43}O_{47}$	28
2.18	Triângulo singular Δ_{ik} inscrito em Γ_i	29
2.19	Cordas em Γ_n	31
2.20	Cordas $OO_{n1}, \dots, OO_{n2^{n-2}}$	32
2.21	Corda c em função do arco s	32
3.1	Construindo circunferência Γ_1	36
3.2	Construindo circunferências tangentes	37
3.3	Construindo cordas em Γ_2	37
3.4	Triângulos Inscritos	38
3.5	Construindo quatro triângulos inscrito	39

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Preliminares	4
1.1 O Teorema de Pitágoras	4
1.2 Teorema Inverso de Pitágoras	6
1.3 O Teorema do Ângulo Inscrito	8
2 O Problema de Basileia	12
2.1 A Prova de Euler	14
2.2 A prova de Cauchy	17
2.3 Prova geométrica do Problema de Basileia	20
2.3.1 Sequência de circunferências encaixadas	20
2.3.2 Pontos singulares	23
2.3.3 Propriedades envolvendo pontos singulares	24
2.3.4 Triângulos singulares inscritos	26
2.3.5 Inverso do quadrado do diâmetro de Γ_1	29
2.3.6 Estimando o comprimento das cordas OO_{ni} da circunferência Γ_n	31
3 Proposta de intervenção pedagógica	34
3.1 Atividade 01	34
3.2 Atividade 02	35

3.3	Atividade 03	36
4	Considerações Finais	40
	Referências Bibliográficas	42

Introdução

Neste trabalho, será abordado um famoso problema conhecido como o Problema de Basileia.

A Basileia é uma cidade localizada na zona noroeste da Suíça, próxima as fronteiras do país com França e Alemanha, onde, em 15 de abril de 1707, nasceu um de seus filhos mais ilustres, Leonhard Paul Euler. Com apenas um ano de idade mudou-se com a família para a cidade de Riehen, próxima a Basileia e, inicialmente, foi educado por seus pais, Paul Euler e Margaret Brucker, seguindo a tradição familiar da época. Com sete anos iniciou seus estudos com um professor particular e aos treze anos retornou a Basileia para se preparar para o curso de Teologia na Universidade da Basileia. Aos dezesseis anos recebeu seu grau de Mestre em Artes defendendo uma dissertação que comparava os sistemas da Filosofia Natural de Newton e Descartes. Por desejo da família, Euler entrou para a Faculdade de Teologia e mesmo sendo muito religioso não se entusiasmava com os estudos teológicos dedicando boa parte de seu tempo à Matemática.

O talento de Euler para a Matemática logo foi descoberto pelo matemático Johann Bernoulli que o incentivou a matricular-se no curso de Matemática da Universidade de Basileia, onde concluiu em 1726 seu doutorado com uma tese sobre a propagação do som.

Nessa época, Euler já era muito bem relacionado no meio acadêmico e no ano seguinte foi convidado pela Imperatriz Catarina I para assumir uma cadeira de membro da Academia de Ciências de São Petersburgo. Em 1730, Euler assumiu o cargo de professor de Física da Academia e em 1733 substituiu o lugar de Daniel Bernoulli como professor de Matemática tornando-se o principal matemático da Academia de São Petersburgo ainda com 26 anos. Com a melhora da sua vida financeira, possibilitou uma maior dedicação a pesquisa matemática.

Em 1734, se casou com a suíça Katharina Gsell e juntos tiveram 13 filhos dos quais apenas cinco sobreviveram a infância. Foi uma época muito produtiva para Euler onde publicou e produziu muitos artigos e textos, entre eles, o livro “Mecânica” (1736-37), com o qual apresentou a dinâmica Newtoniana sobre a forma de análise matemática.

A obra de Euler consta de pelo menos 530 trabalhos publicados em vida e uma série de manuscritos deixados após sua morte que contribuíram para publicações na Academia de São Petersburgo por pelo menos quarenta e sete anos.

Foi em 1735 que Euler ganhou fama internacional após resolver um famoso problema em teoria dos números, proposto pela primeira vez por Pietro Mengoli, de achar o valor exato da soma

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

mostrando que a série converge para o valor $\frac{\pi^2}{6}$, fato que surpreendeu a todos, pois a resposta trazia relação com uma das constantes mais importantes da história da matemática. Muitos matemáticos da época se debruçaram sobre este problema, dentre eles Jacques Bernoulli, mas não obtiveram sucesso. Por fim, o problema ficou conhecido como o Problema de Basileia em homenagem a cidade natal de Euler.

Quando Euler morreu, ainda em plena atividade, sua fama já se espalhara por toda a Europa. Euler foi considerado o mestre dos matemáticos do século XVIII.

Leonhard Euler faleceu em São Petersburgo, Rússia, no dia 18 de setembro de 1783.

Após as motivações oriundas dos estudos acerca do problema, evidenciando a aplicação de várias técnicas tais como as da análise matemática, propõe-se, por meio deste trabalho, o estudo fazendo uso de conceitos da geometria plana.

É importante destacar que a ideia inicial deste estudo teve como ponto de partida o conteúdo exibido em um vídeo[10] em que faz associação do Problema de Basileia a um princípio físico - brilho aparente emitido por faróis.

No primeiro capítulo serão apresentados alguns conceitos da matemática elementar, cuja finalidade é facilitar a compreensão da abordagem geométrica do Problema de Basileia, que será discutida nos capítulos seguintes.

No segundo capítulo, serão apresentadas duas provas do Problema de Basileia, uma realizada por Euler (primeira prova do problema) e a segunda, por Cauchy. Em seguida, será realizada uma prova deste problema, baseada em conceitos básicos da geometria plana, principal objeto deste trabalho.

No terceiro capítulo será apresentada uma proposta pedagógica, com o intuito de ser aplicada com estudantes do Ensino Médio. Ela é composta de três atividades. A primeira, possibilita aos estudantes deste nível de ensino perceber que a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais é convergente. A segunda, permite estimar o valor da soma citada. Por fim, a terceira proporciona aos estudantes perceber que a soma, em

questão, é igual a $\frac{\pi^2}{6}$.

A ideia inicial era realizar a aplicação das atividades propostas com estudantes do último nível de ensino da educação básica e, por meio desta, possivelmente perceber seu efeito para a aprendizagem da matemática. Devido às consequências da pandemia do Covid-19 na educação, não foi possível. Contudo, ainda que não haja resultados concretos que permitam mensurar o potencial da sequência de atividades, acredita-se que podem contribuir para a aprendizagem da matemática.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

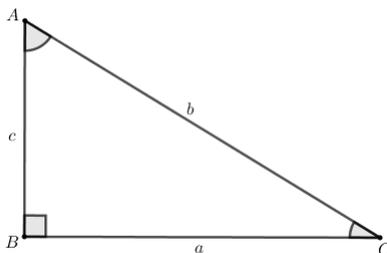
Neste capítulo, serão abordados conceitos importantes da geometria básica, os quais servirão de suporte na prova geométrica do Problema de Basileia.

Inicialmente, aborda-se conceitos relacionados ao triângulo retângulo, evidenciando seus elementos. Em seguida, a ênfase é dada ao Teorema Inverso de Pitágoras e ao Teorema do Ângulo Inscrito.

1.1 O Teorema de Pitágoras

Um triângulo é dito retângulo quando um de seus ângulos internos é reto, isto é, tem medida igual a 90° .

Para os elementos de um triângulo retângulo ABC , como na Figura 1.1, os lados serão denotados por AB , BC e AC e suas medidas, respectivamente, por $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$ e seus ângulos internos por \hat{BAC} , \hat{ABC} e \hat{ACB} . O lado AC , oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa enquanto os lados AB e BC são chamados de catetos.



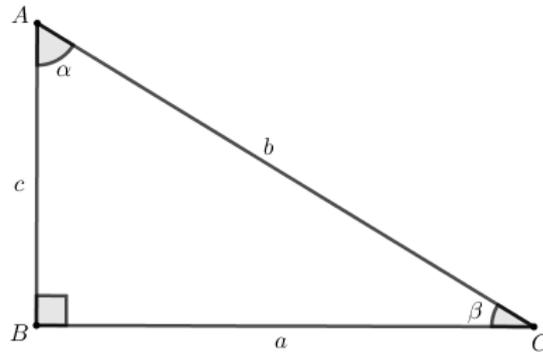
Fonte: O autor

Figura 1.1: Triângulo retângulo e seus elementos

Em todo triângulo retângulo vale a seguinte propriedade, conhecida como Teorema de Pitágoras.

Teorema 1.1.1 (Pitágoras) *O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

Demonstração. Considere um triângulo retângulo, como na Figura 1.2, onde $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e os ângulos internos, não retos, são dados por $\widehat{BAC} = \alpha$ e $\widehat{ACB} = \beta$.



Fonte: O autor

Figura 1.2: Triângulo Retângulo

Desde que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , tem-se que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Considere, como pode ser visualizado na Figura 1.3, quatro triângulos congruentes ao triângulo ABC dispostos de tal forma que suas hipotenusas formam um quadrado de lado medindo b . Note que os pontos F , H e E estão alinhados, pois

$$\alpha + \widehat{AHG} + \beta = 180^\circ$$

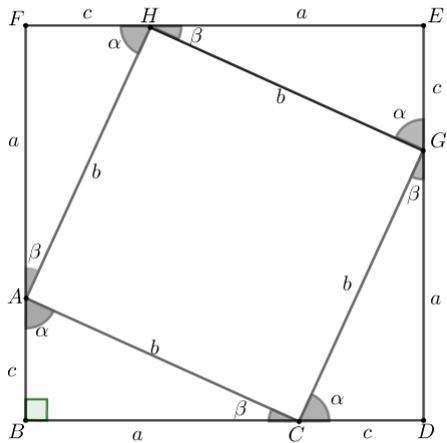
e o mesmo ocorre com as triplas de pontos (E, G, D) , (B, C, D) e (B, A, F) , donde conclui-se que o quadrilátero $FEDB$ é um quadrado de lado $a + c$.

Dessa forma, por um lado, pode-se expressar a área, \mathcal{A} , do quadrado $FEDB$, por um lado, por

$$\mathcal{A} = (a + c)^2$$

e, por outro lado, por

$$\mathcal{A} = \frac{ac}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ac}{2} + b^2.$$



Fonte: O autor

Figura 1.3: Quadrado

Obtém-se daí, igualando as duas expressões, que

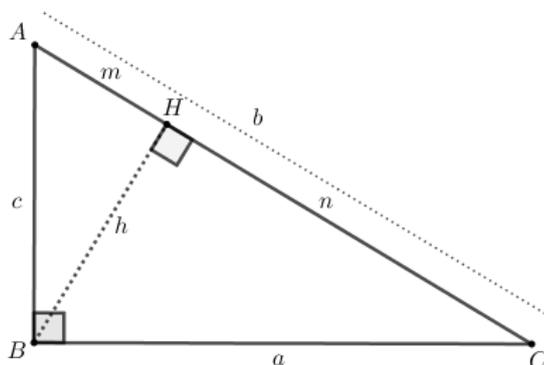
$$(a + c)^2 = \frac{ac}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ac}{2} + b^2,$$

donde, após uma simplificação, encontra-se

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

1.2 Teorema Inverso de Pitágoras

Considere um triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B . A altura, BH , relativa à hipotenusa do triângulo ABC o divide em dois triângulos retângulos ABH e BCH , como ilustra a Figura 1.4.



O autor

Figura 1.4: Métricas do triângulo ABC

Além da altura $\overline{BH} = h$, denote por $\overline{AH} = m$ e $\overline{CH} = n$, respectivamente, as projeções dos catetos AB e BC sobre a hipotenusa. Segue do Teorema de Pitágoras, aplicado aos

triângulos retângulos ABH e BCH , que

$$c^2 = h^2 + m^2 \quad (1.1)$$

$$a^2 = h^2 + n^2 \quad (1.2)$$

Das identidades 1.1 e 1.2 decorrem as seguintes relações:

Proposição 1.2.1 *O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual ao produto entre as medidas das projeções de seus catetos.*

Demonstração. Somando-se 1.1 e 1.2, obtém

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 2h^2 + m^2 + n^2 \\ b^2 &= 2h^2 + (m + n)^2 - 2mn \\ b^2 &= 2h^2 + b^2 - 2mn \end{aligned}$$

donde conclui-se que

$$h^2 = mn. \quad (1.3)$$

Proposição 1.2.2 *O quadrado da medida de um cateto de um triângulo retângulo é igual ao produto entre a medida da hipotenusa e a medida da projeção do cateto.*

Demonstração. Segue de 1.3 que

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + m^2 \\ &= mn + m^2 \\ &= m(n + m) \end{aligned}$$

donde conclui-se que

$$c^2 = mb. \quad (1.4)$$

e

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + n^2 \\ &= mn + n^2 \\ &= n(m + n) \end{aligned}$$

donde conclui-se que

$$a^2 = nb. \quad (1.5)$$

Num triângulo retângulo também vale um resultado conhecido como Teorema Inverso de Pitágoras e que será de grande importância na prova geométrica do Problema de Basileia. Este é o conteúdo da proposição a seguir.

Teorema 1.2.1 (Inverso de Pitágoras) *Num triângulo retângulo ABC , a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo retângulo em B e \overline{BH} sua altura relativa a hipotenusa, como ilustra a Figura 1.4. Segue do Teorema de Pitágoras e das igualdades 1.1, 1.2 e 1.3 que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} &= \frac{a^2 + c^2}{a^2c^2} \\ &= \frac{b^2}{a^2c^2} \\ &= \frac{b^2}{b^2mn} \\ &= \frac{b^2}{b^2h^2} \end{aligned}$$

donde obtém-se

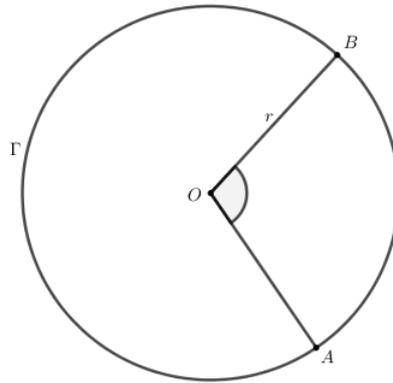
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}. \quad (1.6)$$

1.3 O Teorema do Ângulo Inscrito

Dada uma circunferência Γ de centro em O e dois pontos $A, B \in \Gamma$ denomina-se o ângulo $A\hat{O}B$ de ângulo central de Γ . A menos que os pontos A e B sejam extremidades de um diâmetro de Γ , caso onde são determinados dois ângulos centrais de mesma medida, deve-se deixar claro qual dos dois arcos está sendo considerado. Ver Figura 1.5.

Por definição, a medida do ângulo central $A\hat{O}B$ (em radianos) é igual à medida do comprimento do arco correspondente, a qual denota-se por \widehat{AB} , quando a circunferência tem raio unitário. Para uma circunferência de raio r , tem-se a seguinte relação:

$$A\hat{O}B = \frac{1}{r} \widehat{AB}. \quad (1.7)$$

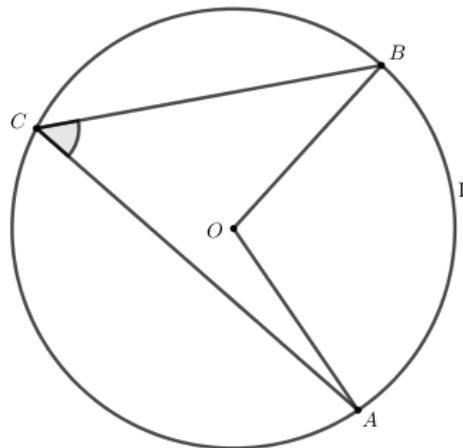


Fonte: O autor

Figura 1.5: Ângulo central

Outra importante definição é a de **ângulo inscrito**. Um ângulo é dito inscrito numa circunferência Γ quando seu vértice é um ponto desta e seus lados são duas cordas da mesma.

Na Figura 1.6, o ângulo \widehat{ACB} é inscrito em Γ .



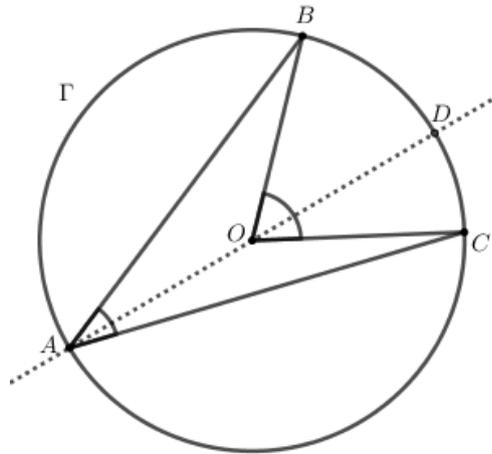
Fonte: O autor

Figura 1.6: Ângulo Inscrito

Teorema 1.3.1 (Teorema do Ângulo Inscrito) *Numa circunferência, a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito que subtende o mesmo arco.*

Demonstração. Para fazer a demonstração dessa propriedade, considere três casos separadamente:

1° **CASO:** O centro O do círculo está dentro da região determinada pelo ângulo inscrito.



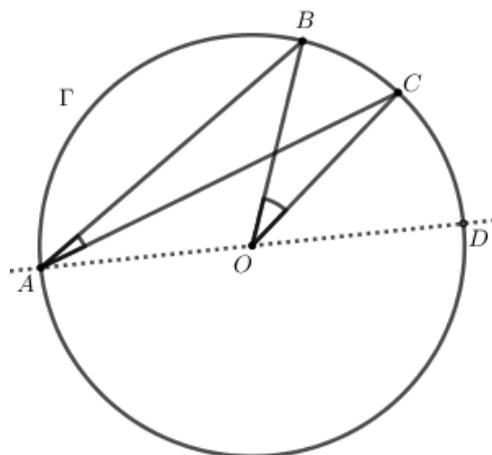
Fonte: O autor

Figura 1.7: Ângulo inscrito com o centro pertencente ao mesmo

Observe que os triângulos BAO e CAO são isósceles de bases AB e AC , respectivamente. Assim, tem-se que $B\hat{A}O = A\hat{B}O$ e $C\hat{A}O = A\hat{C}O$. Daí, $B\hat{A}C = B\hat{A}D + C\hat{A}D$ e $B\hat{O}C = B\hat{O}D + C\hat{O}D$. Por outro lado, pelo Teorema do Ângulo Externo, $B\hat{O}D = B\hat{A}O + A\hat{B}O = 2B\hat{A}O$ e $C\hat{O}D = C\hat{A}O + A\hat{C}O = 2C\hat{A}O$.

Note, ainda, que $B\hat{A}D = B\hat{A}O = A\hat{B}O$ e $C\hat{A}D = C\hat{A}O = A\hat{C}O$. Logo, $B\hat{O}C = B\hat{O}D + C\hat{O}D = 2B\hat{A}D + 2C\hat{A}D = 2(B\hat{A}D + C\hat{A}D) = 2B\hat{A}C$.

2° **CASO:** O centro O do círculo está fora do ângulo inscrito.



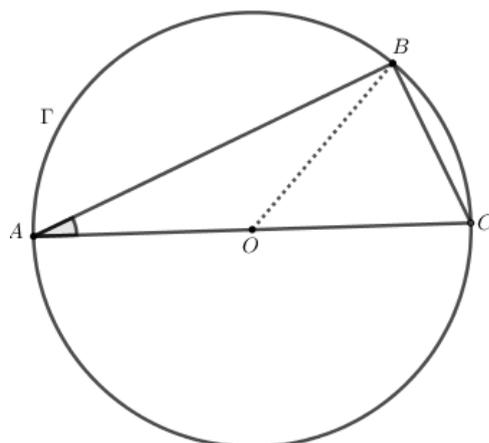
Fonte: O autor

Figura 1.8: Ângulo inscrito com o centro fora dele

Note que, mais uma vez, os triângulos ABO e ACO são isósceles de bases AB e AC , respectivamente. Assim, $B\hat{A}O = A\hat{B}O$ e $C\hat{A}O = A\hat{C}O$. Observe, ainda, que

$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD}$ e $\widehat{BOC} = \widehat{BOD} - \widehat{COD}$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, $\widehat{BOD} = \widehat{BOC} + \widehat{COD} = 2\widehat{BAD}$ e $\widehat{COD} = \widehat{BOC} + \widehat{COD} = 2\widehat{CAD}$. Logo, $\widehat{BOC} = \widehat{BOD} - \widehat{COD} = 2\widehat{BAD} - 2\widehat{CAD} = 2(\widehat{BAD} - \widehat{CAD}) = \widehat{BAC}$.

3° **CASO:** O centro O do círculo está sobre um dos lados do ângulo inscrito.



Fonte: O autor

Figura 1.9: Ângulo inscrito com o centro O sobre um dos lados

Sejam ABC um triângulo inscrito em Γ (Ver Figura 1.9) e OB , o segmento que liga o centro O de Γ ao ponto B , situado sobre este. Dessa forma, o triângulo AOB é isósceles de bases AB . Logo, $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$.

Pelo Teorema do Ângulo Externo, $\widehat{BOC} = \widehat{ABO} + \widehat{BAO} = 2\widehat{BAO}$. Como $\widehat{BAO} = \widehat{BAC}$, então $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

Capítulo 2

O Problema de Basileia

Neste capítulo, serão apresentados um breve histórico do problema que ficara conhecido pela comunidade matemática como Problema de Basileia, seu enunciado, a primeira resolução realizada pelo matemático Leonhard Euler, bem como, a resolução atribuída a Cauchy e que faz uso apenas de conceitos da matemática elementar.

Esse problema é atribuído ao matemático italiano Pietro Mengoli que viveu em meados do século *XVII* e o propôs em 1644. Vários matemáticos tentaram solucioná-lo, mas não obtiveram sucesso. A saber, Jakob Bernoulli (1654-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), John Wallis (1616-1703), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), entre outros.

Segundo Gayo e Wilhem (2015)[5], Jakob Bernoulli debruçou-se sobre o problema por algum tempo, porém sem sucesso. Com sua morte, seu irmão Johann Bernoulli assumiu o seu cargo de professor na Universidade da Basileia, onde teve o privilégio de ter Euler como aluno. Certamente, em uma dessas aulas ele apresentou o problema a este.

Algum tempo depois, Leonhard Euler chegou a solução, o que o tornou conhecido e respeitado pela comunidade matemática.

O problema consiste em encontrar a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \quad (2.1)$$

A primeira pergunta que deve ser feita quando se estuda o Problema de Basileia é se, de fato, a soma envolvida no problema converge para algum número real. Por exemplo,

a soma dos inversos dos números naturais tem o seguinte comportamento

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots \\
 &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots
 \end{aligned}$$

Não é difícil concluir que a soma de infinitas parcelas iguais a $\frac{1}{2}$ é infinita e como a soma dos inversos dos quadrados é ainda maior que esta também é infinita.

Uma maneira de ver que a soma no Problema de Basileia é finita consiste no argumento de que o quadrado de um número natural é maior do que seu produto com seu antecessor e menor do que seu produto com seu sucessor, ou seja, sendo n um número natural tem-se que

$$(n-1)n < n^2 < n(n+1).$$

Segue desta desigualdade que

$$\frac{1}{(n+1)n} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Como esta última desigualdade vale para todo natural n maior do que 1, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} - \frac{1}{3} &< \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2}, \\
 \frac{1}{3} - \frac{1}{4} &< \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \\
 \frac{1}{4} - \frac{1}{5} &< \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \\
 &\vdots \\
 \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

Somando, membro a membro, estas desigualdades obtém-se

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}.$$

Acrescentando 1 a todos os membros obtém-se

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

Neste momento o leitor familiarizado com argumentos do cálculo diferencial e integral deve concluir que quanto maior o valor de n mais próximos de zero os termos $\frac{1}{n+1}$ e $\frac{1}{n}$ se tornam de modo a concluirmos que o valor da soma no Problema de Basileia fica compreendido entre 1,5 e 2. Com o auxílio de uma calculadora podemos chegar ao valor aproximado de 1,645.

Na seção a seguir será mostrado a ideia de Euler para obter exatamente a soma no Problema de Basileia.

2.1 A Prova de Euler

Para entender a ideia usada por Euler para encontrar o valor da soma no Problema de Basileia precisa-se antes compreender alguns argumentos e conceitos matemáticos, tais como expansão de funções em séries de Taylor e/ou Maclaurin, Limite Trigonométrico Fundamental, entre outros. Esse trabalho não aborda minuciosamente tais tópicos, pois não é o objetivo do curso, mas são encontrados facilmente em [3] e [8].

O primeiro conceito matemático, abordado nessa prova, é que pode-se escrever uma função f como sendo um polinômio infinito, ou seja,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

quando a função f for infinitamente diferenciável numa vizinhança do ponto x_0 com os coeficientes a_k dependendo das derivadas de f em x_0 . Para mais detalhes sugere-se uma leitura sobre a expansão em Série de Taylor que pode ser encontrada em livros de Cálculo Diferencial e Integral. Como caso particular da expansão em Série de Taylor, tem-se a expansão em Série de Maclaurin, onde considera-se a expansão em torno de $x_0 = 0$ e, neste caso, escreve-se

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots .$$

Como exemplo, observe a expansão em Série de Maclaurin para a função $f(x) = \text{sen } x$ usada por Euler em sua prova. Desde que f é infinitamente diferenciável obtém-se, derivando várias vezes,

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen } x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \\ f'(x) &= \cos x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots, \\ f''(x) &= -\text{sen } x = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots, \\ f'''(x) &= -\cos x = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \cdots + n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

e, avaliando cada igualdade em $x = 0$ encontra-se os coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= \text{sen } 0 = 0 \\ a_1 &= \cos 0 = 1 \\ 2a_2 &= -\text{sen } 0 = 0 \\ 3 \cdot 2a_3 &= -\cos 0 = -1 \\ 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 &= -\cos 0 = 0 \\ 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2a_5 &= -\cos 0 = 1 \\ 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2a_6 &= -\cos 0 = 0 \\ 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2a_7 &= -\cos 0 = -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, obtém-se

$$a_{2k} = 0 \text{ e } a_{2k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!}$$

como coeficientes da expansão da função seno em torno de $x = 0$ e escreve-se

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Substituindo x por \sqrt{x} nesta última igualdade e dividindo ambos os membros por \sqrt{x} obtém-se

$$\frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \cdots$$

Note que a função

$$g(x) = \frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

se anula em $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots, n^2\pi^2, \dots$, ou seja, $g(x)$ possui uma infinidade de raízes.

Por outro lado, sobre um polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

de grau $n \geq 1$ já se conhecia que estes poderiam ser fatorados como

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_{n-1})(x - r_n)$$

onde $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ são todas as raízes de $p(x)$. Note que

$$a_0 = p(0) = (-1)^n r_1 r_2 \dots r_{n-1} r_n$$

e

$$\begin{aligned} a_1 = p'(0) &= (-1)^{n-1} r_2 r_3 \dots r_{n-1} r_n + \\ &+ (-1)^{n-1} r_1 r_3 \dots r_{n-1} r_n + \\ &+ (-1)^{n-1} r_1 r_2 r_4 \dots r_{n-1} r_n + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} r_1 r_2 \dots r_{n-2} r_n \\ &+ (-1)^{n-1} r_1 r_2 \dots r_{n-2} r_{n-1} \end{aligned}$$

donde obtém-se a seguinte propriedade relacionando coeficientes e raízes de um polinômio de grau n ,

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{r_n}. \quad (2.2)$$

Voltando a análise da função

$$g(x) = \frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

cuja expansão é o polinômio infinito, mesmo não havendo uma compreensão satisfatória por parte da comunidade matemática sobre a possibilidade do uso da propriedade 2.2 para as infinitas raízes de um polinômio infinito Euler a aplicou obtendo

$$-\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots + \frac{1}{n^2\pi^2} + \dots$$

donde multiplicando, ambos os membros, por π^2 chega-se a

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

que foi a solução apresentada por Euler para o Problema de Basileia. Esta solução é de 1735 e a passagem onde o mesmo utilizou a propriedade 2.2 permaneceu sem justificativa para infinitas raízes por cerca de 150 anos. Neste período, muitos matemáticos celebravam a brilhante ideia desenvolvida por Euler em sua prova mas, ao mesmo tempo, chamavam a atenção para a falta de rigor nesta passagem. Outros matemáticos obtiveram outras soluções para o Problema de Basileia uma vez que já se conhecia o valor para o qual a soma convergia. Em 1855, com a prova do Teorema da Fatoração de Weierstrass, a passagem pode ser justificada celebrando a validade da prova de Euler. A saber, o Teorema da Fatoração de Weierstrass afirma que toda função inteira pode ser representada como um produto (possivelmente infinito) envolvendo seu zeros. Este teorema pode ser visto como uma extensão do Teorema de Fatoração para polinômios de grau finito.

2.2 A prova de Cauchy

A prova realizada pelo matemático Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) chama a atenção por abordar em sua resolução conceitos básicos da matemática elementar, como por exemplo, conhecimento de trigonometria, polinômios e números complexos, conteúdos estudados por alunos do Ensino Médio. Para sua compreensão é necessário ter conhecimento prévio acerca do Teorema de D'Moivre e desenvolvimento do Binômio de Newton.

Inicialmente, a prova do Problema de Basileia realizada por Cauchy tem como ponto de partida o Teorema de D'Moivre ¹.

Teorema 2.2.1 (Teorema de D'Moivre) *Dado um número complexo, não nulo, na forma polar $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, então*

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Com o intuito de atingir o propósito, para $r = 1$, considere a identidade

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \tag{2.3}$$

¹Uma demonstração do Teorema de D'Moivre é encontrada em Freire (2015, p.14)

para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e n um número natural ímpar. Partindo da igualdade 2.3 e dividindo ambos os membros por $(\cos \theta)^n$, tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n}{(\cos \theta)^n} &= \frac{(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}{(\cos \theta)^n} \\ \left(\frac{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}\right)^n &= \frac{(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}{(\cos \theta)^n} \\ (1 + i \tan \theta)^n &= \frac{(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)}{(\cos \theta)^n}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Por outro lado, desenvolvendo o binômio $(1 + i \tan \theta)^n$, obtém-se que

$$\begin{aligned}(1 + i \tan \theta)^n &= \binom{n}{0} i^n \tan^n \theta + \binom{n}{1} i^{n-1} \tan^{n-1} \theta + \binom{n}{2} i^{n-2} \tan^{n-2} \theta + \dots + \\ &+ \binom{n}{n-2} i^{n-(n-2)} \tan^{n-(n-2)} \theta + \binom{n}{n-1} i^{n-(n-1)} \tan^{n-(n-1)} \theta + \binom{n}{n} \tan^{n-n} \theta \\ &= i \binom{n}{0} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tan^n \theta + \binom{n}{1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tan^{n-1} \theta - i \binom{n}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tan^{n-2} \theta + \dots + \\ &- \binom{n}{n-2} \tan^2 \theta + i \binom{n}{n-1} \tan \theta + \binom{n}{n}.\end{aligned}$$

Como, por hipótese, n é ímpar, então $n - 1$ é par. Assim,

$$\begin{aligned}(1 + i \tan \theta)^n &= i \binom{n}{0} \tan^n \theta + \binom{n}{1} \tan^{n-1} \theta - i \binom{n}{2} \tan^{n-2} \theta + \dots + \\ &- \binom{n}{n-2} \tan^2 \theta + i \binom{n}{n-1} \tan \theta + \binom{n}{n} \\ &= \left[\binom{n}{1} \tan^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \tan^{n-3} \theta + \dots - \binom{n}{n-2} \tan^2 \theta + \binom{n}{n} \right] \quad (2.5) \\ &+ i \left[\binom{n}{0} \tan^n \theta - \binom{n}{2} \tan^{n-2} \theta + \dots - \binom{n}{n-3} \tan^3 \theta + \binom{n}{n-1} \tan \theta \right]\end{aligned}$$

Comparando as partes imaginárias nas igualdades 2.4 e 2.5, tem-se que

$$\frac{\operatorname{sen} n\theta}{(\cos \theta)^n} = \tan^n \theta - \binom{n}{2} \tan^{n-2} \theta + \dots - \binom{n}{n-3} \tan^3 \theta + \binom{n}{n-1} \tan \theta \quad (2.6)$$

Agora, observe que sendo n um número ímpar, pode-se escrever $n = 2p + 1$, para algum natural p . Fazendo $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$ tem-se, para $1 \leq k \leq p$, que $0 < \theta_k < \frac{\pi}{2}$. Pensando na

igualdade 2.6 como uma equação na variável θ tem-se para $\theta = \theta_k$ que

$$0 = \tan^n \theta_k - \binom{n}{2} \tan^{n-2} \theta_k + \cdots - \binom{n}{n-3} \tan^3 \theta_k + \binom{n}{n-1} \tan \theta_k \quad (2.7)$$

desde que

$$\frac{\sen n\theta_k}{(\cos \theta_k)^n} = \frac{\sen k\pi}{(\cos \frac{k\pi}{n})^n} = 0.$$

Como $\tan \theta_k \neq 0$ para todo $1 \leq k \leq p$, pode-se simplificar 2.7 para obter

$$0 = \tan^{n-1} \theta_k - \binom{n}{2} \tan^{n-3} \theta_k + \cdots - \binom{n}{n-3} \tan^2 \theta_k + \binom{n}{n-1} \quad (2.8)$$

Substituindo $n = 2p + 1$ nos expoentes da igualdade em 2.8 obtém-se

$$0 = \tan^{2p} \theta_k - \binom{n}{2} \tan^{2p-2} \theta_k + \cdots - \binom{n}{n-3} \tan^2 \theta_k + \binom{n}{n-1}. \quad (2.9)$$

Por fim, segue-se de 2.9 que $\tan^2 \theta_k$ é raiz do polinômio

$$p(x) = x^p - \binom{n}{2} x^{p-1} + \cdots - \binom{n}{n-3} x + \binom{n}{n-1}$$

para todo natural k tal que $1 \leq k \leq p$. Pela relação entre as raízes de $p(x)$, dada em 2.2, obtém-se

$$-\frac{\binom{n}{n-3}}{\binom{n}{n-1}} = \frac{1}{\tan^2 \theta_1} + \frac{1}{\tan^2 \theta_2} + \cdots + \frac{1}{\tan^2 \theta_p}. \quad (2.10)$$

Segue da igualdade 2.10 que

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)(n-2)}{6} &= \frac{\cos^2 \theta_1}{\sen^2 \theta_1} + \frac{\cos^2 \theta_2}{\sen^2 \theta_2} + \cdots + \frac{\cos^2 \theta_k}{\sen^2 \theta_k} + \cdots + \frac{\cos^2 \theta_p}{\sen^2 \theta_p} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{\sen^2 \frac{\pi}{n}} + \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\sen^2 \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \frac{\cos^2 \frac{k\pi}{n}}{\sen^2 \frac{k\pi}{n}} + \cdots + \frac{\cos^2 \frac{p\pi}{n}}{\sen^2 \frac{p\pi}{n}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade 2.11 por $\frac{\pi^2}{n^2}$ obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 (n-1)(n-2)}{n^2 \cdot 6} &= \frac{\pi^2}{n^2} \left(\frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} + \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{n}}{\sin^2 \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \frac{\cos^2 \frac{k\pi}{n}}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} + \cdots + \frac{\cos^2 \frac{p\pi}{n}}{\sin^2 \frac{p\pi}{n}} \right) \\ \frac{\pi^2 (n^2 - 3n + 2)}{6 \cdot n^2} &= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}\right)^2} + \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{n}}{4 \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{\cos^2 \frac{k\pi}{n}}{k^2 \left(\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{\cos^2 \frac{p\pi}{n}}{p^2 \left(\frac{\sin \frac{p\pi}{n}}{n}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

A igualdade 2.12 pode ser reescrita como

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^p \left(\frac{n^2}{n^2 - 3n + 2} \right) \frac{\cos^2 \frac{k\pi}{n}}{k^2 \left(\frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{n}\right)^2} \quad (2.13)$$

Agora, note que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 \frac{k\pi}{n} = 1$$

e, usando o limite trigonométrico fundamental, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\frac{k\pi}{n}} = 1$$

que valem para todo k fixado com $1 \leq k < p$. Além disso, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 3n + 2} = 1$ obtém-se, ao fazer n tender para infinito em 2.13, que

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

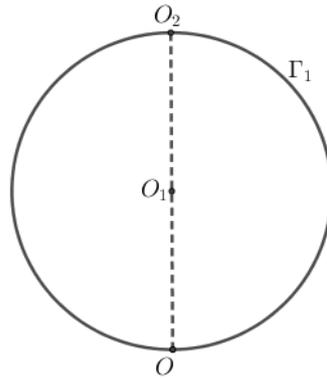
o que queríamos demonstrar.

2.3 Prova geométrica do Problema de Basileia

O objetivo desta seção é mostrar uma prova do Problema de Basileia à luz de conceitos da geometria plana.

2.3.1 Sequência de circunferências encaixadas

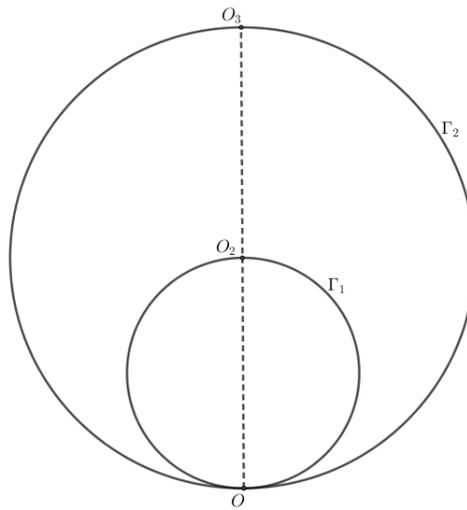
Considere, inicialmente, uma circunferência Γ_1 , centrada em O_1 e diâmetro d_1 . Sobre esta circunferência são marcados os pontos O e O_2 de modo que $\overline{OO_2} = d_1$. Ver figura 2.1.



Fonte: O autor

Figura 2.1: Circunferência Γ_1

Considere, agora, a circunferência Γ_2 , centrada em O_2 , com diâmetro $2d_1$. Note que Γ_1 é tangente interior à Γ_2 no ponto O e denote por O_3 o ponto sobre Γ_2 tal que $\overline{OO_3} = 2d_1$. Ver figura 2.2.



O autor

Figura 2.2: Circunferências tangentes Γ_1 e Γ_2

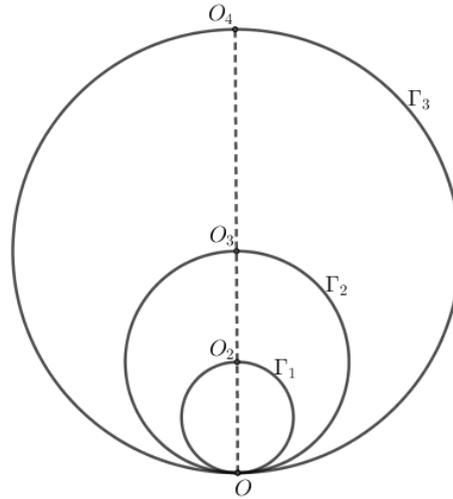
Seguindo este procedimento é considerada a circunferência Γ_3 , centrada em O_3 , com diâmetro $4d_1$. Note que Γ_2 é tangente interior à Γ_3 no ponto O e denote por O_4 o ponto sobre Γ_3 tal que $\overline{OO_4} = 4d_1$. Ver figura 2.3.

Repetindo este processo indefinidamente, será obtida uma sequência de circunferências encaixadas

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$$

as quais são tangentes em O e centradas, respectivamente, em $O_1, O_2, \dots, O_n, \dots$. Além disso, satisfaz as seguintes propriedades:

P1. Γ_n é tangente interior à Γ_{n+1} no ponto O ;

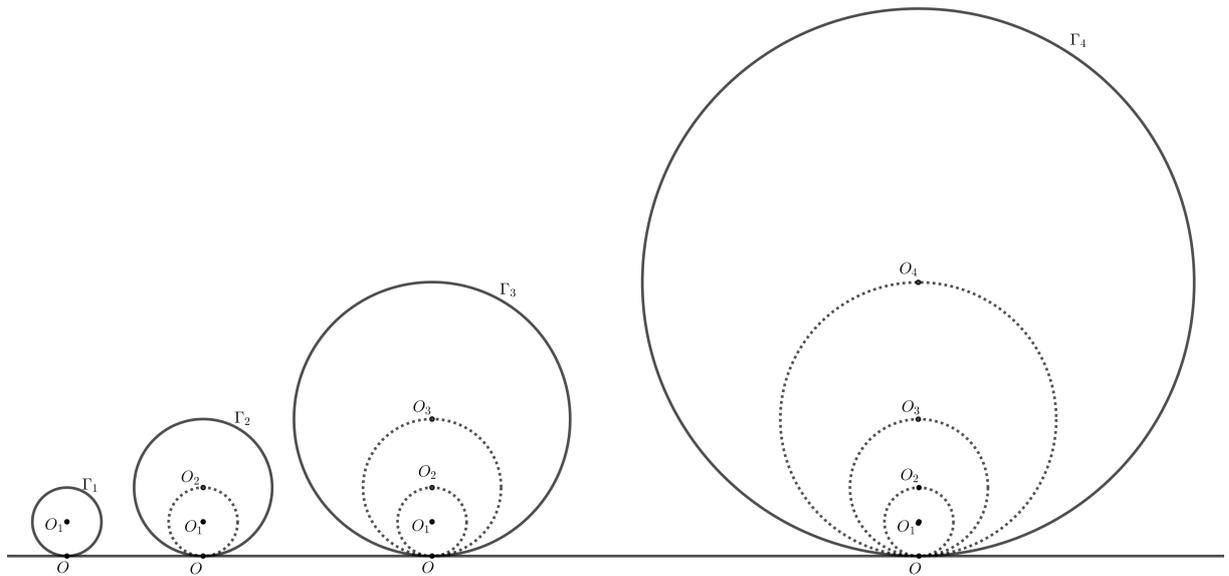


O autor

Figura 2.3: Circunferências tangentes Γ_1, Γ_2 e Γ_3

P2. O diâmetro de Γ_{n+1} é o dobro do diâmetro de Γ_n .

A Figura 2.4 ilustra as quatro primeiras circunferências encaixadas tangentes em O .



O autor

Figura 2.4: Circunferências encaixadas tangentes em O

Seja d_n o diâmetro da circunferência Γ_n segue das propriedades P1 e P2 que os centros $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n, \dots$ estão alinhados e $d_n = \overline{OO_{n+1}} = 2^{n-1}d_1$.

O objetivo acerca da construção desta cadeia de circunferências encaixadas vai ser justificado quando usado para auxiliar no cálculo do inverso do quadrado da medida do diâmetro da circunferência Γ_1 .

2.3.2 Pontos singulares

Nesta subseção, será descrita a construção de 2^{i-1} pontos $O_{i1}, O_{i2}, \dots, O_{i(2^{i-1})}$ sobre a circunferência encaixada Γ_i os quais serão denominados **pontos singulares de Γ_i** .

Considere uma seqüência de circunferências encaixadas $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n, \dots$ tangentes num ponto O .

Inicialmente, considere a circunferência Γ_1 tangente interior no ponto O à circunferência Γ_2 , conforme ilustra a Figura 2.5.

Definição 2.3.1 *O ponto singular sobre Γ_1 é dado por $O_{11} = O$.*

Definição 2.3.2 *Os dois pontos singulares sobre Γ_2 são obtidos pela interseção da reta tangente à Γ_1 no ponto O_2 com a circunferência Γ_2 e são denotados por O_{21} e O_{22} . Ver figura 2.6.*

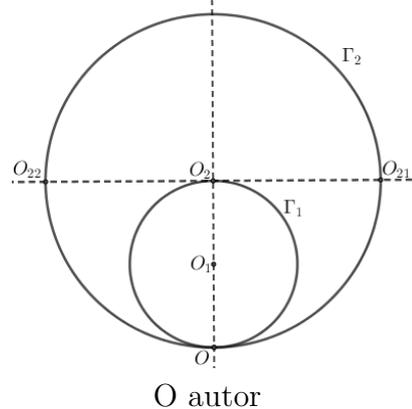
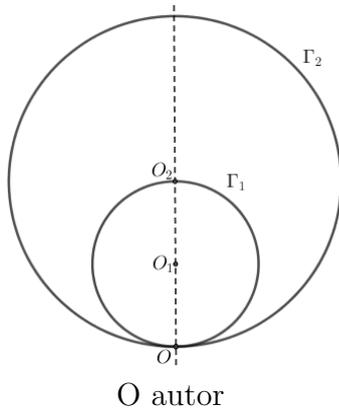
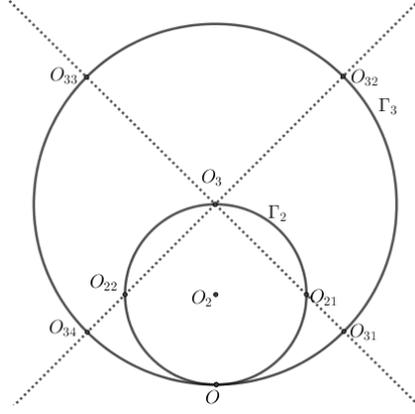


Figura 2.5: Ponto singular O_{11} sobre Γ_1 Figura 2.6: Pontos singulares O_{21} e O_{22} sobre Γ_2

Seguindo, considere, agora, a circunferência Γ_2 tangente interior no ponto O à circunferência Γ_3 .

Definição 2.3.3 *Os quatro pontos singulares sobre Γ_3 são obtidos pelas interseções das retas secantes à Γ_2 que passam pelos pares de pontos (O_3, O_{21}) e (O_3, O_{22}) com a circunferência Γ_3 e são denotados, respectivamente, por O_{31}, O_{33} e O_{32}, O_{34} . Ver Figura 2.7.*



O autor

Figura 2.7: Pontos singulares O_{31}, O_{32}, O_{33} e O_{34} sobre Γ_3

Mais geralmente, tem-se a seguinte definição:

Definição 2.3.4 *Os 2^{i-1} pontos singulares sobre Γ_i são obtidos pelas interseções das retas secantes à Γ_{i-1} que passam pelos pares de pontos $(O_i, O_{(i-1)k})$ com a circunferência Γ_i e são denotados, respectivamente, para cada $1 \leq k \leq 2^{i-2}$, por O_{ik} e $O_{i(k+2^{i-2})}$.*

Definição 2.3.5 *Os pontos singulares sobre Γ_n determinados pela interseção da reta secante que passa pelo centro de Γ_n e um ponto singular de Γ_{n-1} são chamados **pontos singulares conjugados** de Γ_n .*

2.3.3 Propriedades envolvendo pontos singulares

Para os pontos singulares de uma circunferência encaixada Γ_n valem as seguintes propriedades:

Propriedade 1 *O ângulo central $P\widehat{O}_nQ$, onde P e Q são pontos singulares consecutivos da circunferência encaixada Γ_n , mede $\frac{\pi}{2^{n-2}}$ para todo $n \geq 2$.*

Demonstração. Para $n = 2$ tem-se apenas dois pontos singulares O_{21} e O_{22} onde o segmento $O_{21}O_{22}$ é o diâmetro de Γ_2 . Assim o ângulo central $O_{21}\widehat{O}_2O_{22}$ mede π e a afirmação é verdadeira para $n = 2$. Suponha que o ângulo central $P\widehat{O}_nQ$ da circunferência encaixada Γ_n mede, para um certo natural n , $\frac{\pi}{2^{n-2}}$ para quaisquer P e Q consecutivos sobre Γ_n . Para mostrar que esta relação vale para o natural $n + 1$ são tomados dois pontos consecutivos P' e Q' sobre Γ_{n+1} . Sendo P o ponto de interseção da reta que passa por O_{n+1} e P' com Γ_n e Q o ponto de interseção da reta que passa por O_{n+1} e Q' com Γ_n são considerados dois casos:

Caso 1. O_{n+1} não pertence ao menor arco sobre Γ_n determinado por P e Q . Ver Figura 2.8.

Segue da propriedade 1.3.1 que

$$\begin{aligned} P'\widehat{O}_{n+1}Q' &= P\widehat{O}_{n+1}Q \\ &= \frac{1}{2}P\widehat{O}_nQ \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2^{n-2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Caso 2. O_{n+1} pertence ao menor arco sobre Γ_n determinado por P e Q . Ver Figura 2.9.

Segue, ainda, da propriedade 1.3.1 que

$$\begin{aligned} P'\widehat{O}_{n+1}Q' &= \pi - P\widehat{O}_{n+1}Q \\ &= \pi - \frac{1}{2}\left(\text{arco determinado por } P \text{ e } Q \text{ que não contém } O_{n+1}\right) \\ &= \pi - \frac{1}{2}\left(2\pi - P\widehat{O}_nQ\right) \\ &= \frac{\pi}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Segue do Princípio de indução finita que a propriedade é válida para todo número natural n .

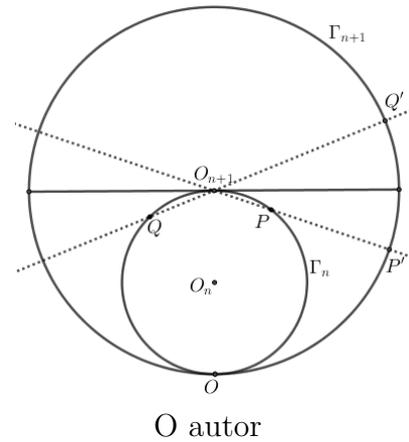
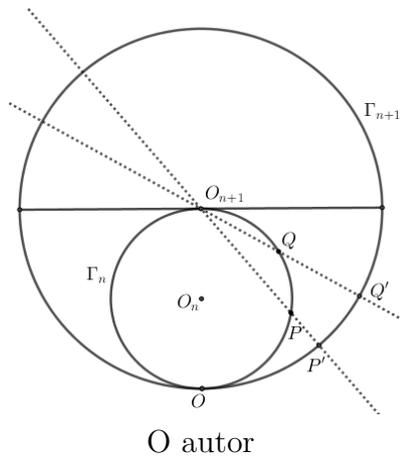


Figura 2.8: O_{n+1} pertence ao maior arco de Γ_n determinado por P e Q .
 Figura 2.9: O_{n+1} pertence ao menor arco de Γ_n determinado por P e Q .

Propriedade 2 Os arcos determinados por pontos singulares consecutivos de uma circunferência encaixada Γ_n tem comprimentos medindo πd_1 para todo $n \geq 2$.

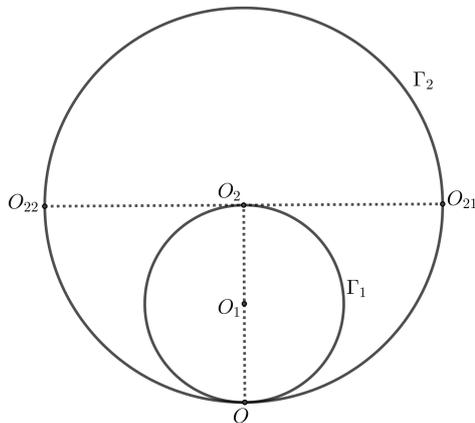
Demonstração. Sejam P e Q dois pontos singulares consecutivos sobre a circunferência Γ_n e α o arco determinado por P e Q . O comprimento \mathcal{C} do arco α é dado por αr_n , onde r_n é o raio da circunferência Γ_n . Segue da Propriedade 1 que

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \alpha \frac{d_n}{2} \\ &= P\widehat{O}_nQ \frac{2^{n-1}d_1}{2} \\ &= \frac{\pi}{2^{n-2}} 2^{n-2}d_1 \\ &= \pi d_1.\end{aligned}$$

2.3.4 Triângulos singulares inscritos

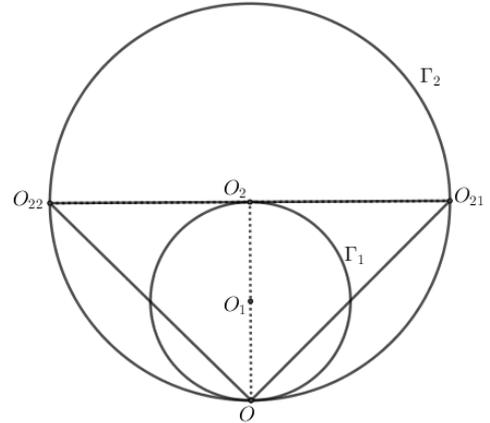
Nesta subseção, são mostradas as construções de triângulos retângulos inscritos nas circunferências encaixadas $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \dots, \Gamma_n$ com ângulo reto no ponto de tangência O e como estes serão usados para estimar o valor do inverso do quadrado da medida do diâmetro da circunferência Γ_1 .

Considere, inicialmente, a construção do triângulo $OO_{21}O_{22}$, inscrito na circunferência Γ_2 e retângulo em O , como ilustrado nas figuras 2.10 e 2.11.



O autor

Figura 2.10: Γ_1 encaixada em Γ_2



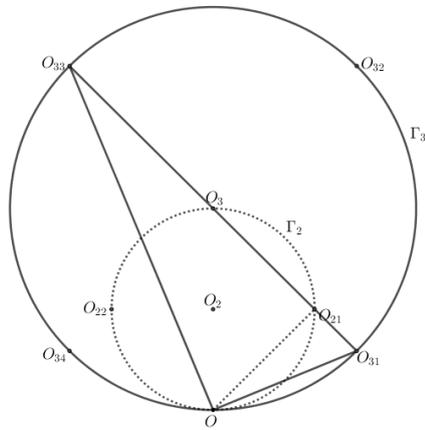
O autor

Figura 2.11: Triângulo $OO_{21}O_{22}$

Propriedade 3 *O triângulo $OO_{21}O_{22}$ é reto em O e tem como altura o segmento OO_2*

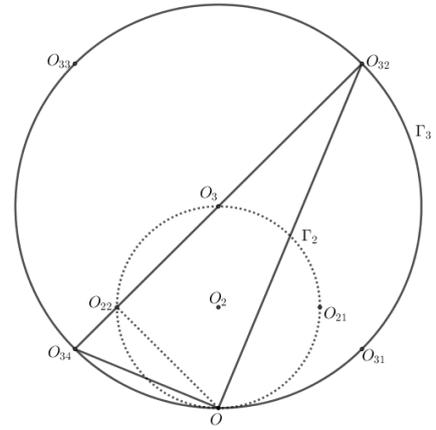
Demonstração. O triângulo $OO_{21}O_{22}$ é inscrito em Γ_2 e tem o lado $O_{21}O_{22}$ sendo o diâmetro de Γ_2 . Consequentemente, segue da propriedade 1.3.1 que $O_{21}OO_{22}$ é um ângulo reto. Desse modo, conclui-se que $OO_{21}O_{22}$ é um triângulo retângulo em O , donde OO_2 é sua altura.

Considere agora, como ilustrado nas figuras 2.12 e 2.13,



O autor

Figura 2.12: Triângulo $OO_{31}O_{33}$



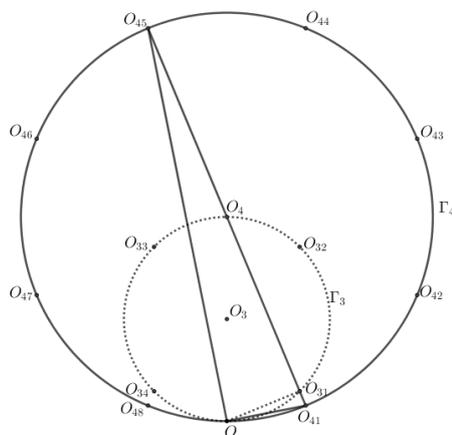
O autor

Figura 2.13: Triângulo $OO_{32}O_{34}$

Propriedade 4 *Os triângulos $OO_{31}O_{33}$ e $OO_{32}O_{34}$ são retos em O e tem como alturas, respectivamente, os segmentos OO_{21} e OO_{22} .*

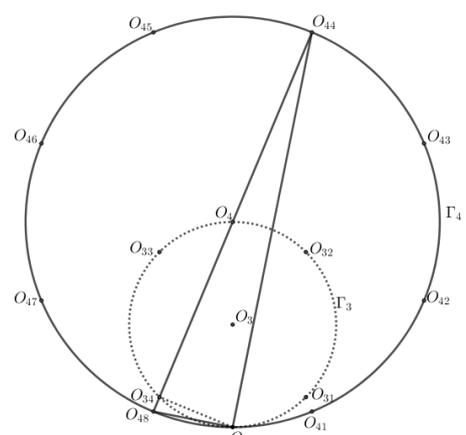
Demonstração. O triângulo $OO_{31}O_{33}$ é inscrito e tem o lado $O_{31}O_{33}$ sendo o diâmetro de Γ_3 . Segue da propriedade 1.3.1 que $O_{31}OO_{33}$ é um ângulo reto. Da mesma forma o triângulo $OO_{21}O_3$ é inscrito e tem o lado OO_3 sendo o diâmetro de Γ_2 . Concluimos que $OO_{21}O_3$ é um ângulo reto donde OO_{21} é a altura do triângulo $OO_{31}O_{33}$. A justificativa é análoga para o triângulo $OO_{32}O_{34}$.

Considere, ainda, como ilustrado nas figuras 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17.



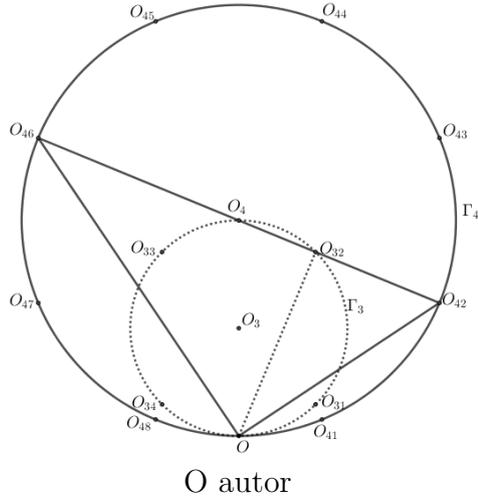
O autor

Figura 2.14: Triângulo $OO_{41}O_{45}$

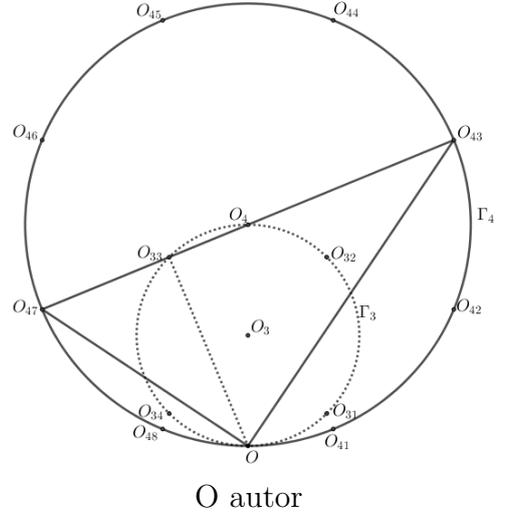


O autor

Figura 2.15: Triângulo $OO_{44}O_{48}$



O autor
 Figura 2.16: Triângulo $OO_{42}O_{46}$



O autor
 Figura 2.17: Triângulo $OO_{43}O_{47}$

Propriedade 5 *O triângulo $OO_{41}O_{45}$ é reto em O e tem como altura o segmento OO_{31} .*

Demonstração. Como o ângulo $O_{41}\widehat{O}O_{45}$ é oposto ao lado $O_{41}O_{45}$ que é também diâmetro de Γ_4 . Segue da propriedade 1.3.1 que este ângulo é reto. Considerando agora o triângulo $OO_{31}O_4$ observe que o ângulo $O\widehat{O}_{31}O_4$ é oposto ao lado OO_4 que é também diâmetro de Γ_3 donde concluímos que este ângulo é reto e OO_{31} é a altura do triângulo $OO_{41}O_{45}$.

Seguindo a mesma ideia, os triângulos $OO_{44}O_{48}$, $OO_{42}O_{46}$ e $OO_{43}O_{47}$ são retos em O e tem como alturas os segmentos OO_{34} , OO_{32} e OO_{33} , respectivamente.

Em geral, dados dois pontos singulares conjugados O_{ik} e $O_{i(k+2^{i-2})}$ em Γ_i a eles associa-se o **triângulo singular** $OO_{ik}O_{i(k+2^{i-2})}$ inscrito em Γ_i o qual denota-se por Δ_{ik} para cada natural k , com $1 \leq k \leq 2^{i-2}$ e satisfaz a seguinte propriedade.

Propriedade 6 *O triângulo singular Δ_{ik} é retângulo em O e o segmento $OO_{(i-1)k}$ é a altura em relação ao lado oposto ao vértice O . Ver Figura 2.18.*

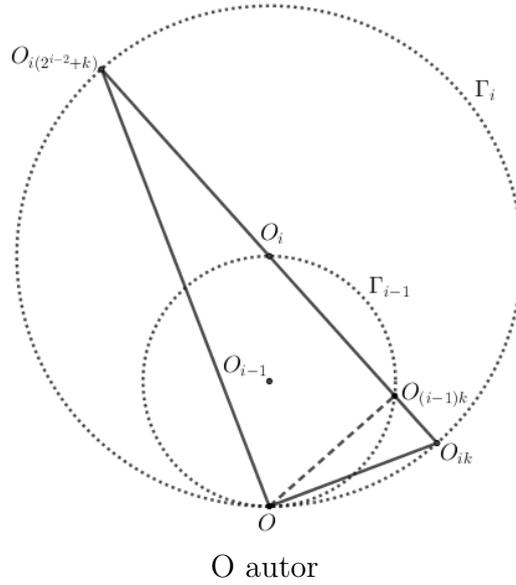


Figura 2.18: Triângulo singular Δ_{ik} inscrito em Γ_i

Demonstração. Basta notar que os vértices O , no triângulo $OO_{ik}O_{i(2^{i-2}+k)}$, e $O_{(i-1)k}$, no triângulo $OO_{(i-1)k}O_i$, são opostos, respectivamente, aos lados que são diâmetros das circunferências Γ_i e Γ_{i-1} nos quais estão inscritos. Então, pela propriedade 1.3.1, segue que os ângulos $O_{i(2^{i-2}+k)}\widehat{O}O_{ik}$ e $OO_{(i-1)k}\widehat{O}O_i$ são retos.

2.3.5 Inverso do quadrado do diâmetro de Γ_1

Nesta subseção, será mostrado como escrever o inverso do quadrado do diâmetro de Γ_1 em função dos comprimentos das cordas OO_{nk} de uma circunferência Γ_n para $1 \leq k \leq 2^{n-1}$.

Observe, inicialmente, que

$$\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{OO_2^2} = \frac{1}{OO_{11}^2}. \quad (2.14)$$

Como o segmento OO_{11} é altura do triângulo singular $OO_{21}O_{22}$, como ilustra a Figura 2.11, segue do Teorema Inverso de Pitágoras que

$$\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{OO_{11}^2} = \frac{1}{OO_{21}^2} + \frac{1}{OO_{22}^2}. \quad (2.15)$$

Segue da propriedade 4 que os segmentos OO_{21} e OO_{22} são alturas, respectivamente, dos triângulos singulares $OO_{31}O_{33}$ e $OO_{32}O_{34}$ donde, novamente, pelo Teorema Inverso

de Pitágoras obtém-se de 2.15 que

$$\frac{1}{d_1^2} = \frac{1}{OO_{31}^2} + \frac{1}{OO_{33}^2} + \frac{1}{OO_{32}^2} + \frac{1}{OO_{34}^2}. \quad (2.16)$$

De forma mais geral, as identidades obtidas em 2.14, 2.15 e 2.16 sugerem a seguinte igualdade envolvendo os comprimentos das cordas OO_{ni} de uma circunferência Γ_n para $1 \leq i \leq 2^{n-1}$

$$\frac{1}{d_1^2} = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{OO_{ni}^2}. \quad (2.17)$$

Na verdade, essa igualdade se mantém verdadeira para todo número natural n e é o conteúdo da proposição a seguir:

Proposição 2.3.1

$$\frac{1}{d_1^2} = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{OO_{ni}^2} \quad \text{para todo natural } n. \quad (2.18)$$

Demonstração. Segue das igualdades 2.14, 2.15 e 2.16 a validade da afirmação para os três primeiros naturais. Suponha a validade de 2.18 para um natural n qualquer. Para a soma envolvendo as cordas $OO_{(n+1)i}$, com $1 \leq i \leq 2^n$, da circunferência Γ_{n+1} tem-se

$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{OO_{(n+1)i}^2} = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{OO_{(n+1)i}^2} + \frac{1}{OO_{(n+1)(i+2^{n-1})}^2} \right) \quad (2.19)$$

Como os pontos $O_{(n+1)i}$ e $O_{(n+1)(i+2^{n-1})}$ são singulares conjugados segue da Propriedade 3 que o segmento OO_{ni} é altura do triângulo retângulo $OO_{(n+1)i}O_{(n+1)(i+2^{n-1})}$. Do Teorema Inverso de Pitágoras obtém-se

$$\frac{1}{OO_{(n+1)i}^2} + \frac{1}{OO_{(n+1)(i+2^{n-1})}^2} = \frac{1}{OO_{ni}^2}. \quad (2.20)$$

Combinando 2.18, 2.19 e 2.20 obtém-se

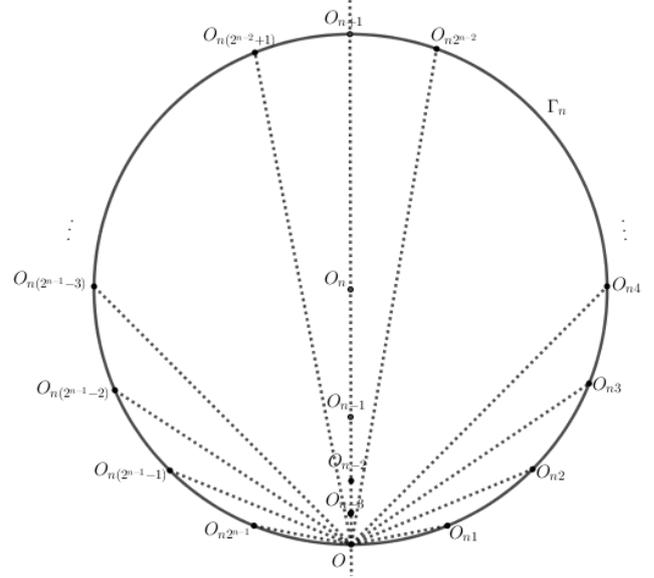
$$\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{OO_{(n+1)i}^2} = \frac{1}{d_1^2}$$

onde 2.18 é válida para o natural $n + 1$. Segue do Princípio de Indução Finita que 2.18 é válida para todo número natural n .

Observação 2.3.1 *Finaliza-se esta seção, destacando que a partir da simetria existente*

entre os pontos singulares de uma circunferência Γ_n em relação a reta que contém os centros das circunferências vale as seguintes igualdades para os comprimentos das cordas $OO_{n1}, OO_{n2}, \dots, OO_{n2^{n-1}}$ da circunferência Γ_n :

$$\begin{aligned} \overline{OO_{n1}} &= \overline{OO_{n(2^{n-1})}} \\ \overline{OO_{n2}} &= \overline{OO_{n(2^{n-1}-1)}} \\ \overline{OO_{n3}} &= \overline{OO_{n(2^{n-1}-2)}} \\ &\vdots \\ \overline{OO_{n2^{n-2}}} &= \overline{OO_{n(2^{n-2}+1)}} \end{aligned}$$



O autor

Figura 2.19: Cordas em Γ_n

Segue desta observação que a igualdade 2.18 pode ser reescrita como

$$\frac{1}{d_1^2} = 2 \sum_{i=1}^{2^{n-2}} \frac{1}{\overline{OO_{ni}}^2}. \quad (2.21)$$

2.3.6 Estimando o comprimento das cordas OO_{ni} da circunferência Γ_n .

Segue da Propriedade 1 que o ângulo central $O_{n2^{n-1}}\widehat{O}_n O_{n1}$ vale $\frac{\pi}{2^{n-2}}$. Como $\overline{OO_{n1}} = \overline{OO_{n(2^{n-1})}}$, o ângulo central $O\widehat{O}_n O_{n1} = O\widehat{O}_n O_{n(2^{n-1})} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$. Conseqüentemente, os ângulos centrais

$$O\widehat{O}_n O_{n1}, O\widehat{O}_n O_{n2}, \dots, O\widehat{O}_n O_{nk}, \dots, O\widehat{O}_n O_{n2^{n-2}}$$

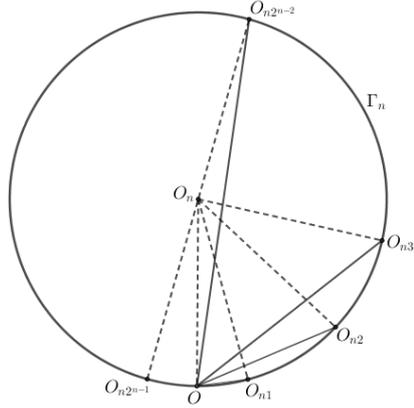
medem, respectivamente,

$$\frac{\pi}{2^{n-1}}, \frac{3\pi}{2^{n-1}}, \dots, \frac{\pi}{2^{n-1}} + \frac{(k-1)\pi}{2^{n-2}}, \dots, \pi - \frac{\pi}{2^{n-1}}$$

ver Figura 2.20. Além disso, lembre-se o argumento para calcular o comprimento de uma corda em função de seu ângulo central. Na ilustração da Figura 2.21, tem-se uma

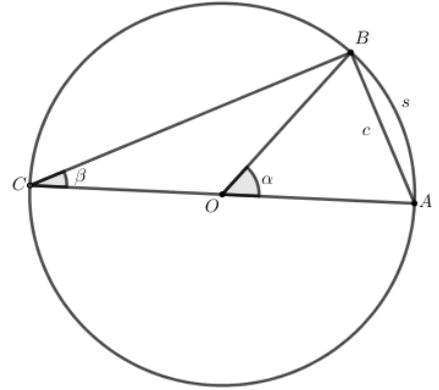
circunferência de raio r centrada em O e os pontos A e B sobre ela definem uma corda AB de comprimento c com ângulo central α e um arco de comprimento s . Assim, tem-se

$$\sin \beta = \frac{c}{2r} \quad \text{e} \quad s = \alpha r$$



O autor

Figura 2.20: Cordas $OO_{n1}, \dots, OO_{n2^{n-2}}$



O autor

Figura 2.21: Corda c em função do arco s

e daí segue que

$$\begin{aligned} c &= 2r \sin \beta \\ &= \frac{2s}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= s \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Para a corda OO_{nk} , que tem ângulo central $\widehat{OO_nO_{nk}} = \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}}$, a igualdade anterior nos fornece

$$\begin{aligned} \overline{OO_{nk}} &= s \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}} r_n \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}} \\ &= \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}} \frac{d_n}{2} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}} \\ &= \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}} 2^{n-2} d_1 \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}} \\ &= \frac{(2k-1)\pi}{2} d_1 \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}} \end{aligned}$$

Substituindo essa última igualdade em 2.21 obtém-se

$$\frac{1}{d_1^2} = 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}} \frac{1}{OO_{nk}^2} = 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}} \left(\frac{1}{\frac{(2k-1)\pi}{2} d_1 \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}}{\frac{(2k-1)\pi}{2^{n-2}}}} \right)^2. \quad (2.22)$$

Como a igualdade 2.22 vale para todo natural n e usando o fato que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

obtém-se, ao fazer n tender para o infinito,

$$\frac{1}{d_1^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{(2k-1)\pi}{2} d_1} \right)^2$$

que escrito de outro modo significa

$$\frac{1}{2d_1^2} = \frac{4}{\pi^2 d_1^2} + \frac{4}{9\pi^2 d_1^2} + \frac{4}{25\pi^2 d_1^2} + \frac{4}{49\pi^2 d_1^2} + \dots$$

Simplificando esta última igualdade, obtém-se a validade da seguinte proposição:

Proposição 2.3.2

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Finalmente, para ver que a soma em 2.1 converge para $\frac{\pi^2}{6}$ faz-se uso da Proposição 2.3.2 combinada com o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \right) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8}$$

e, por fim, obtém-se

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Capítulo 3

Proposta de intervenção pedagógica

Neste capítulo, será apresentada uma proposta de aplicação no Ensino Médio, cujo objetivo é proporcionar aos estudantes desse nível de ensino a aprendizagem da matemática, sobretudo, utilizando ferramentas básicas como a calculadora e a construção com régua e compasso, por exemplo. Para isso, será proposta uma sequência de atividades.

A sequência didática proposta está dividida em três blocos de atividades. No primeiro bloco, os estudantes terão a possibilidade de conjecturar que a soma dos inversos dos quadrados dos naturais é convergente. No segundo bloco, os estudantes serão conduzidos a estimar o valor da soma dos inversos dos quadrados dos naturais. E no terceiro, proporciona compreender, por meio de construções geométricas, que a soma dos inversos dos quadrados perfeitos é $\frac{\pi^2}{6}$.

3.1 Atividade 01

A sequência de questões a seguir, tem o propósito de proporcionar ao estudante conjecturar que a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais é convergente. De modo geral, o termo “convergente” é entendido como aquilo que se dirige para um ponto comum. Tratando-se da soma em questão, significa que existe um número real tal que a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais não o supera, por mais que adiciona-se termos.

Pergunta: A soma $\mathcal{S} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ é convergente, isto é, existe um número real L tal que $\mathcal{S} < L$?

Para responder a questão acima, propõe-se as seguintes atividades:

01. Identificar a maior fração em cada situação.

i. $\frac{1}{2 \cdot 2}$ ou $\frac{1}{2}$

ii. $\frac{1}{3 \cdot 3}$ ou $\frac{1}{2 \cdot 3}$

iii. $\frac{1}{4 \cdot 4}$ ou $\frac{1}{3 \cdot 4}$

iv. $\frac{1}{5 \cdot 5}$ ou $\frac{1}{4 \cdot 5}$

v. $\frac{1}{6 \cdot 6}$ ou $\frac{1}{5 \cdot 6}$

02. Comparar as duas frações $\frac{1}{k \cdot k}$ e $\frac{1}{(k-1) \cdot k}$, $k \in \mathbb{N}$ e, com base na questão anterior, determinar qual a maior.

03. Comparar as duas somas a seguir e determinar qual a maior $\frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{k \cdot k}$ e $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(k-1) \cdot k}$

04. Rearrumando a expressão $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(k-1) \cdot k}$, tem-se $\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$. Dessa forma,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(k-1) \cdot k} = 1 - \frac{1}{k} \quad (3.1)$$

Analisar a equação 3.1 quando k assume valor tão grande quanto se queira.

(O professor, neste momento, poderá direcionar outros questionamentos aos estudantes, com o intuito de orientá-los à resposta desejada)

05. Com base nas respostas das duas questões anteriores, o que podemos conjecturar?
(O papel do professor, neste instante, é semelhante ao da questão anterior)

3.2 Atividade 02

Essa sequência de questões tem o objetivo de proporcionar ao estudante estimar o valor da soma $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$.

Pergunta: Qual o valor aproximado da soma $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$?

01. Com o uso de uma calculadora, completar a tabela a seguir.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	\dots
	1	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{1}{5^2}$	$\frac{1}{6^2}$	$\frac{1}{7^2}$	$\frac{1}{8^2}$	$\frac{1}{9^2}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{11^2}$	\dots
Representação decimal												

02. Encontrar o valor da soma $A_1 + A_2$.
03. Encontrar o valor da soma $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$.
04. Consideramos a soma $A_1 + A_2 + \dots + A_{11}$.
05. Encontrar o valor da soma do item anterior, acrescida de A_{14}, A_{15}, A_{16} e A_{17} .
06. Com base nos itens anteriores, responder a questão inicial.
07. Ainda, fazendo uso da calculador e sabendo que o valor de π é, aproximadamente, 3,141592654, complete a tabela a seguir.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	\dots
	$\frac{\pi^2}{1}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{\pi^2}{3}$	$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi^2}{5}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{7}$	$\frac{\pi^2}{8}$	\dots
Valor									

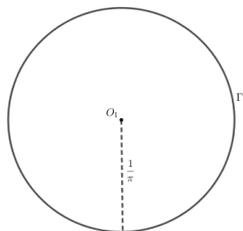
08. Comparando o item 06. com os valores representados na terceira linha da segunda tabela, relacionar a soma da questão inicial com algum valor (aproximado) exposto na segunda linha da tabela.

3.3 Atividade 03

A sequência de questões apresentadas nesta seção, tem como objetivo proporcionar aos estudantes compreender que a soma dos inversos dos quadrados perfeitos é $\frac{\pi^2}{6}$. Essa atividade deve ser desenvolvida com o auxílio de régua e compasso, bem como, da calculadora. Para isso, é necessário que o professor ajude-os a desenvolver cada item, passo a passo, orientando-os.

Pergunta: Qual é a soma dos inversos dos quadrados do números naturais?

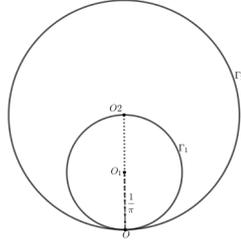
01. Inicialmente, construir uma circunferência Γ_1 de raio igual a $\frac{1}{\pi}$ e centro O_1 e calcular o inverso do seu diâmetro, como apresentado abaixo.



O autor

Figura 3.1: Construindo circunferência Γ_1

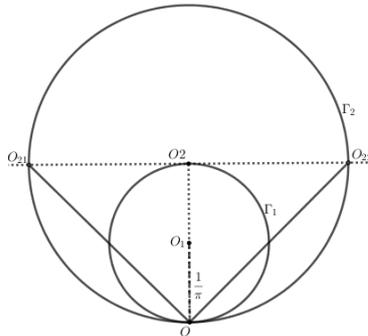
- 02.** Construir a circunferência Γ_2 , com o dobro do tamanho de Γ_1 , tangente interna a esta e denominar por O o ponto de tangência. O outro extremo do diâmetro de Γ_1 que parte de O , é denominado O_2 .



O autor

Figura 3.2: Construindo circunferências tangentes

- 03.** Construir a reta tangente a Γ_1 no ponto O_2 e denominar os pontos de intersecção desta com Γ_2 por O_{21} e O_{22} .



O autor

Figura 3.3: Construindo cordas em Γ_2

i. Calcular a medida do segmento $\overline{OO_{21}}$ em função do ângulo central que o determina. Calcular, também, a medida do segmento $\overline{OO_{22}}$.

ii. Calcular a soma dos inversos dos quadrados desses segmentos. Encontrar possíveis relações entre esta soma e o inverso do diâmetro de Γ_1 .

(Após ouvir as possíveis respostas, o professor fará apresentação do Inverso do Teorema de Pitágoras. É esperado que os estudantes percebam que a soma dos inversos dos quadrados dos comprimentos dos segmentos $\overline{OO_{21}}$ e $\overline{OO_{22}}$ é igual ao inverso do quadrado da medida do diâmetro de Γ_1 .)

- 04.** Traçar a reta que passa por $\overline{OO_1}$ e denominar o ponto de intersecção desta com Γ_2 por O_3 (Ver Figura 3.4).
- 05.** Construir a circunferência Γ_3 , centrada em O_3 e diâmetro com o dobro do tamanho do diâmetro de Γ_2 (Ver Figura 3.4).

06. Traçar a reta que passa por O_3 e O_{21} e denominar os pontos de intersecção com Γ_3 por O_{31} e O_{33} (Ver Figura 3.4).
07. Traçar a reta que passa por O_3 e O_{22} e denominar os pontos de intersecção com Γ_3 por O_{32} e O_{34} (Ver Figura 3.4).
08. Construir os triângulos $OO_{31}O_{33}$, $OO_{32}O_{34}$. Afirmativa: eles são triângulos retângulos. (Neste instante, o professor pode, juntamente, com os estudantes verificar esta afirmativa).

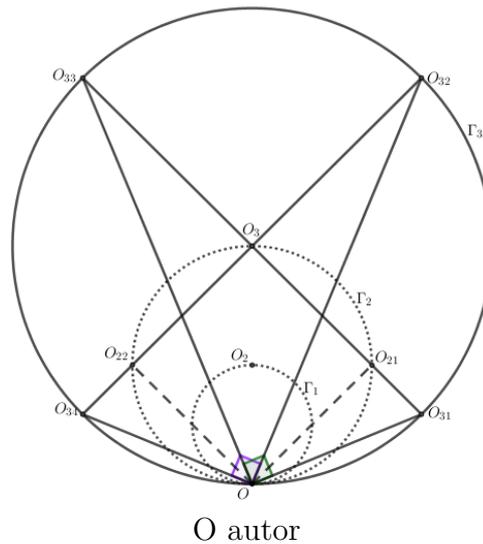
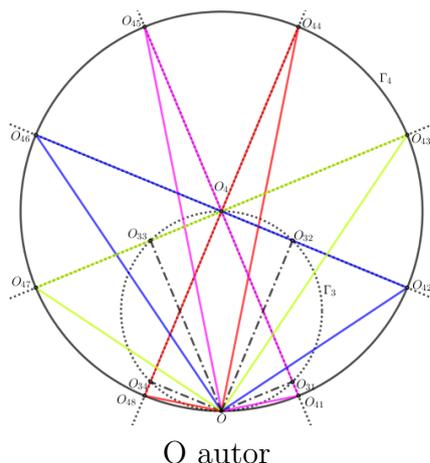


Figura 3.4: Triângulos Inscritos

09. Observar que os segmentos OO_{21} e OO_{22} são alturas dos triângulos $OO_{31}O_{33}$, $OO_{32}O_{34}$, respectivamente.
10. Aplicar o Teorema Inverso de Pitágoras nestes triângulos e fazer a substituição dos resultados no item ii. da questão 03.
11. Traçar a reta que passa por $\overline{OO_1}$ e denomine o ponto de intersecção desta com Γ_3 por O_4 .
12. Construir a circunferência Γ_4 , centrada em O_4 e diâmetro com o dobro do tamanho do diâmetro de Γ_3 (Ver Figura 3.5).
13. Traçar as quatro retas que passam por O_4 e O_{31} , por O_4 e O_{32} , por O_4 e O_{33} e por O_4 e O_{34} e denominar os pontos de intersecção destas com Γ_4 por O_{41} e O_{45} , O_{42} e O_{46} , O_{43} e O_{47} e O_{44} e O_{48} , respectivamente.
(Para evitar que a imagem fique sobrecarregada, pode solicitar que os estudantes omitam (apague) algumas informações.)



O autor
 Figura 3.5: Construindo quatro triângulos inscrito

14. Construir os triângulos $OO_{41}O_{45}$, $OO_{42}O_{46}$, $OO_{43}O_{47}$, $OO_{44}O_{48}$. Afirmativa: eles são triângulos retângulos (Ver Figura 3.5).
15. Observe que os segmentos OO_{31} , OO_{32} , OO_{33} e OO_{34} , são alturas dos triângulos $OO_{41}O_{45}$, $OO_{42}O_{46}$, $OO_{43}O_{47}$ e $OO_{44}O_{48}$.
15. Aplicar o Teorema Inverso de Pitágoras nestes triângulos e substituir os resultados na equação da questão 10.
16. Observar que há pares de segmentos (cordas) com mesma medida e que à medida que a circunferência é cada vez maior, as cordas se aproximam do tamanho dos arcos determinados por elas. E mais: os pontos sobre as circunferências estão dispostos obedecendo a sequência $1, 2, 2, 2, 2, \dots$ independente de qual seja a circunferência.
17. E se continuarmos esse processo a igualdade se manterá? Justificar.
 (*Neste momento, o professor poderá, por meio de instigações, levar os estudantes a perceberem que os catetos dos triângulos inscritos em Γ_n serão as alturas dos triângulos inscritos em Γ_{n+1} . Isso é fundamental para responder a última questão.*)
18. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4} &= 2 \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right] = 2 \left[\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) \right] \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{6}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Capítulo 4

Considerações Finais

“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida”.
(Jacques Bernoulli)

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração do Problema de Basileia, como ficara conhecido a soma dos inversos dos quadrados dos números naturais, utilizando elementos da Geometria Plana, mas, também, mostrar a importância dos conceitos geométricos na construção do conhecimento matemático, sobretudo no ensino básico.

Esse problema caracterizou-se com grande complexidade, sobretudo, nos séculos XVII e XVIII, quando estudiosos como Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716), John Wallis (1616-1703) e os matemáticos da família Bernoulli debruçaram-se, sobre este, com o intuito de encontrar a solução e não obtiveram sucesso.

Revisando a literatura, percebe-se que as resoluções são datadas a partir de 1735, quando Euler realizou a primeira resolução e, quase sempre, fazem uso de conceitos puramente algébricos nas demonstrações.

Sabendo do papel fundamental exercido pela geometria na aprendizagem da matemática, sobretudo, na escolas de educação básica e, também, por não encontrar estudos desse problema que enfatizem abordagens geométricas, decide-se realizar esse trabalho utilizando, na demonstração, conhecimentos básicos da geometria.

O conhecimento dessa área da Matemática, desde as suas origens na antiguidade, caracterizou-se como importante e interessante para estudiosos e pensadores. A Geometria, estudada, aplicada e/ou desenvolvida em diversos lugares, tornou-se uma ferramenta

capaz de desenvolver a capacidade de compreensão, o pensamento acerca da realidade, a relação intrínseca com o espaço em que vivemos e o raciocínio.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl B. *Leonhard Euler*. Encyclopedia Britannica, 11 abr. 2020, <https://www.britannica.com/biography/Leonhard-Euler>. Acessado em 17 jul. 2020.
- [2] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*, São Paulo - SP: Editora Ática, 2007.
- [3] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração*. 6^a ed. São Paulo: Pearson, 2006.
- [4] FREIRE, Ícaro Vidal. *O Teorema Fundamental da Álgebra: abordagens no Ensino Médio com o Geogebra*, 2015. 64 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus- BA, 2015.
- [5] GAYO, Jairo; WILHELM, Roy. *O problema que tornou Euler Famoso*. Ciência e Natureza, Santa Maria. Vol. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 342-355.
- [6] HRANKOWSKY, Adam. *Euler's Solution to the Basel Problem*. MathAdam. 2020. Disponível em: < <https://medium.com/mathadam/eulers-solution-to-the-basel-problem-77698f08996f> > . Acesso em: 17 mai. 2021.
- [7] MOURA, Wilbertt José de Oliveira. *O Problema de Basileia*. 2013. 51 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.
- [8] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. p. 350 - 379.
- [9] _____. *Geometria*. 1^a ed. Rio de Janeiro - Rio de Janeiro: SBM, 2013. p. 85 - 88.
- [10] SANDERSON, Grant. *Why is pi here? And why is it squared? A geometric answer to the Basel problem*. 3Blue1Brown. 2018. Disponível em: < <https://youtu.be/d-o3eB9sfls> > . Acesso em 03 mar. 2021.

- [11] SANDIFER, Ed. *How Euler Did It: Estimating the Basel Problem*. MAA Online. 2003. Disponível em: < <http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2003-12.pdf> >. Acesso em: 10 mai. 2021.
- [12] SANTOS, Rivaldo Pantoja dos. *Teorema de Pitágoras, demonstrações e aplicações no cotidiano*. 2019. 40 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Universidade Federal do Pará, Abaetetuba, 2019.