



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Leonardo de Liz Brockveld

Estudando métodos iterativos no ensino médio: uma proposta didática
exploratória envolvendo o método de Newton e geometria dinâmica

Blumenau
2021

Leonardo de Liz Brockveld

Estudando métodos iterativos no ensino médio: uma proposta didática
exploratória envolvendo o método de Newton e geometria dinâmica

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional da Universidade Fede-
ral de Santa Catarina para a obtenção do título de Mes-
tre em Matemática.

Orientador: Prof. Luiz Rafael dos Santos, Dr.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Brockveld, Leonardo de Liz

Estudando métodos iterativos no ensino médio : uma proposta didática exploratória envolvendo o método de Newton e geometria dinâmica / Leonardo de Liz Brockveld ; orientador, Luiz Rafael dos Santos, 2022.

59 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, , Programa de Pós-Graduação em , Florianópolis, 2022.

Inclui referências.

1. . 2. Métodos Numéricos. 3. Algoritmo de Newton. 4. Algoritmo da Bissecção. 5. Geogebra. I. Santos, Luiz Rafael dos. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em . III. Título.

Leonardo de Liz Brockveld

Estudando métodos iterativos no ensino médio: uma proposta didática
exploratória envolvendo o método de Newton e geometria dinâmica

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca
examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Claudio Loesch, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Roy Wilhelm Probst, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi
julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Luiz Rafael dos Santos, Dr.
Orientador

Blumenau, 2021.

Este trabalho é dedicado aos meus familiares,
principalmente meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Professor Luiz Rafael dos Santos pela colaboração, paciência e empenho durante o percurso deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT pelas aulas e aos colegas de mestrado pela troca de conhecimento.

À minha família que sempre esteve ao meu lado me apoiando.

E à minha namorada Natália, por sempre estar comigo e me acompanhar nessa jornada.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo produzir materiais didáticos que ajudem professores do ensino básico a explorar métodos iterativos durante suas aulas. Para tanto, conceitos relacionados ao erro absoluto e relativo são introduzidos; em seguida, importantes teoremas de Análise são demonstrados e enunciados por sua utilidade na compreensão dos métodos iterativos que serão estudados. Os famosos métodos de bissecção e Newton são apresentados a seguir, incluindo-se os critérios para e a demonstração suas convergências. Por fim, foi criada e produzida uma proposta didática, que tem por base um livro dinâmico na plataforma Geogebra e um conjunto de vídeos no YouTube, que pode ser usada para orientar tais professores a fim de que apresentem o método de Newton para alunos do ensino médio.

ABSTRACT

This dissertation aims to produce teaching materials that help elementary school teachers to explore iterative methods during their classes. For that, concepts related to absolute and relative error are introduced; then, important theorems of Analysis are demonstrated and stated for their utility in understanding the iterative methods studied. The well-known Bisection and Newton's methods are presented in sequel with the criteria for their convergence being well established. Finally, a didactic proposal was created and produced, based on a dynamic book that was constructed on the Geogebra platform as well as on a set of videos on youtube. Both materials can be used to guide such teachers in order to allow them to present Newton's method for secondary school students.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo geometria dinâmica para área de circunferências	12
Figura 2 – Zeros de uma função.	13
Figura 3 – O zero x^* de f no intervalo $[a_0, b_0]$	16
Figura 4 – Ponto inicial	19
Figura 5 – Interpretação geométrica do método de Newton.	20
Figura 6 – $f''(x_0) < 0$ e $f(x_0) > 0$	21
Figura 7 – $f''(x_0) > 0$ e $f(x_0) < 0$	22
Figura 8 – Troca concavidade	22
Figura 9 – Gráfico da função	25
Figura 10 – Planilha disponibilizada	29
Figura 11 – Diferença entre área circunferência e polígono regular de 3 lados.	33
Figura 12 – Diferença entre área circunferência $r = 8$ e polígono regular de 13 lados.	33
Figura 13 – Diferença entre área circunferência de $r = 13$ e polígono regular de 13 lados.	34
Figura 14 – Perguntas finais sobre erro.	34
Figura 15 – Tela inicial do applet.	35
Figura 16 – Apresentação das ferramentas.	36
Figura 17 – Applet após 2 interações	36
Figura 18 – Applet após 4 iterações.	37
Figura 19 – Applet após 5 iterações.	37
Figura 20 – Reta tangente ao ponto $(a, P(a))$	38
Figura 21 – Reta tangente ao ponto $(a, P(a))$	38
Figura 22 – Perguntas finais sobre derivadas de um polinômio.	39
Figura 23 – Atividade final 1º, 2º e 3º passo.	40
Figura 24 – Atividade final 4º, 5º e 6º passo.	41
Figura 25 – Atividade final 7º e 8º passo	41
Figura A.1 – Ilustração do Teorema do Valor Intermediário.	50
Figura A.2 – Ilustração do Teorema de Weierstrass.	51
Figura A.3 – Ilustração do Teorema de Rolle.	52
Figura A.4 – Ilustração do Teorema do Valor Médio de Lagrange.	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Algoritmo da Bissecção para encontrar o zero de $f(x) = x^4 - 30$	18
Tabela 2	–	Algoritmo de Newton para encontrar o zero de (6)	26
Tabela 3	–	Algoritmo da Bissecção para encontrar zero de (6)	26
Tabela 4	–	Algoritmo de Newton para encontrar raiz de (7)	27
Tabela 5	–	Algoritmo de Newton para encontrar zero de (8)	27
Tabela 6	–	Sequência de Stirling.	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	MÉTODOS ITERATIVOS PARA CÁLCULO DO ZERO DE UMA FUNÇÃO	16
2.1	MÉTODO DA BISSECÇÃO	16
2.2	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	19
2.2.1	Fórmula fechada do Método de Newton para polinômios	28
3	PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO BÁSICO	30
3.1	PLANO DE AULA	31
3.2	AULA 01: ERRO DE APROXIMAÇÃO	32
3.3	MÉTODO DE NEWTON - EXPLICAÇÃO	35
3.4	MÉTODO DE NEWTON - PRATICAR	35
3.5	MÉTODO DE NEWTON - DERIVADA	37
3.6	MÉTODO DE NEWTON - ATIVIDADE FINAL	39
4	CONCLUSÃO	43
	Referências	44
	APÊNDICE A – TEOREMAS IMPORTANTES PARA CÁLCULO NUMÉRICO E POLINÔMIO DE TAYLOR	46
A.1	RESULTADOS SOBRE SEQUÊNCIAS	46
A.1.1	Erro de aproximação	47
A.1.2	Velocidade de convergência	48
A.2	RESULTADOS SOBRE FUNÇÕES	49
A.2.1	Polinômio de Taylor	53

1 INTRODUÇÃO

O intervalo do fim da minha graduação em licenciatura em Matemática pela UFSC Blumenau e o começo das aulas do PROFMAT, foram de pouco menos de seis meses. Durante este período e desde então, atuo como professor do ensino básico e pude notar que a rotatividade de livros didáticos foi alta, porém, a semelhança entre os mesmos é perceptível. Destaco dois materiais: primeiro da editora Poliedro ([POLIEDRO, 2015](#)), pois, apresenta demonstrações coerentes, equivalentes às vistas no primeiro ano da graduação. Segundo, editora Eleva ([ELEVA EDUCAÇÃO, 2019](#)) educação, pela apresentação da contextualização do assunto abordado do capítulo. Entretanto, dentre as habilidades elencadas pela BNCC ([BRASIL, 2017](#)) de 2017, fala-se do uso de algoritmo, linguagem de programação. De fato, temos as seguintes habilidades

(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

(EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Logo, uma das motivações para a realização dessa dissertação, é produzir materiais com conteúdos exclusivos do ensino superior, adaptados para ensino básico. Segundo Dallemole e Groenwald, citado por [Jorge Cássio Nóbriga e Siple \(2020, p.89\)](#)

Verifica-se que os livros didáticos priorizam atividades que envolvem tratamentos e, ainda assim, com ênfase no registro numérico e algébrico. Infere-se a necessidade de os livros didáticos apresentarem uma abordagem dos conteúdos de Geometria Analítica (Ponto e Reta e Circunferência) articulada ao uso de diferentes registros semióticos, potencializando as atividades de conversão entre estes e em duplos sentidos para que o aluno analise propriedades que não são perceptíveis na conversão em apenas um sentido.

Passo a seguir a elencar alguns exemplos que ilustram benefícios do uso de tecnologias em tópicos de Matemática Básica, bem como a citar algumas lacunas passíveis de percepção por parte do professor atento à importância de tais usos.

O desenvolvimento das tecnologias, contribuíram para crescimento das atividades envolvendo geometria dinâmica. Esta relaciona a ideia de manusear uma representação e de imediato visualizar ações sobre a mesma. Um exemplo é compreender a área de uma circunferência, dividindo-a em n setores circulares iguais e em seguida “abrir” a circunferência de modo que comprimento da circunferência seja congruente a base de um paralelogramo cuja altura é igual à metade do raio. Portanto, a área do paralelogramo equivale à área da circunferência, podendo-se analisar os três estágios dos movimentos no Applet disponível em <https://www.geogebra.org/m/qRtwKuxT> do qual representamos três estágios da dinâmica na Figura 1.

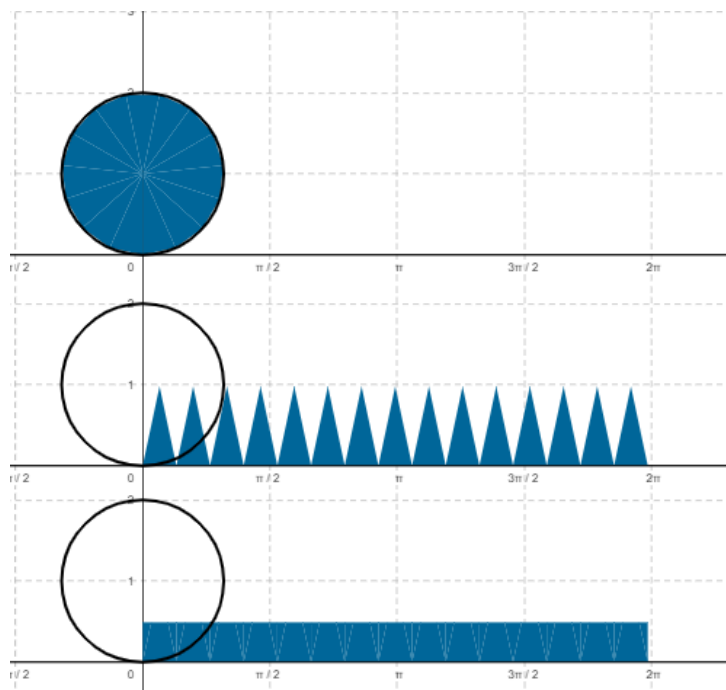


Figura 1 – Exemplo geometria dinâmica para área de circunferências

Do ponto de vista matemático, o exemplo citado acima não é uma demonstração formal da área de uma circunferência poder ser calculada pela fórmula $\text{Area} = \pi r^2$. Porém, para que o aluno compreenda uma ideia de como surgiu a fórmula, o applet citado de geometria dinâmica é de grande valia, principalmente para alunos do ensino médio, pois, já sabem calcular a área de uma circunferência e fariam uma ligação entre o que, já foi visto e as ações presentes no applet. Tendo em vista que alunos estão cada vez mais visuais e anseiam serem protagonista do seu processo de aprendizagem, a geometria dinâmica é bastante útil já que quem realiza as iterações são os próprios alunos. Para mais informações sobre o uso de geometria dinâmica no ensino de matemática veja [Jorge Cássio Nóbriga e Siple \(2020\)](#), [Angelo Márcio Souza \(2018\)](#), [Jorge Cássio Costa Nóbriga \(2019\)](#), [Bellemain e Correia \(2004\)](#), [Bellemain \(2019\)](#) e [Duval \(2011\)](#).

Um outro exemplo refere-se a um importante problema matemático, o qual possui diversas aplicações, e consiste em encontrar o zero de uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, isto é,

$$\text{encontrar } x^* \in D \text{ tal que } f(x^*) = 0. \quad (1)$$

O ponto x^* é denominado *zero de f* ou *raiz de $f(x) = 0$* .

O estudo para calcular os zeros da função de uma equação do segundo grau, já era discutida pelos babilônios em 4000 A.C.. Somente no século XVII o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) provou que não existe fórmula fechada para encontrar os zeros de uma equação polinomial com grau maior que 4 ([SOUZA, R. C., 2017](#), p. 15). O gráfico da função inserida na Figura 2, tem como zeros as abscissas dos pontos A , B e C .

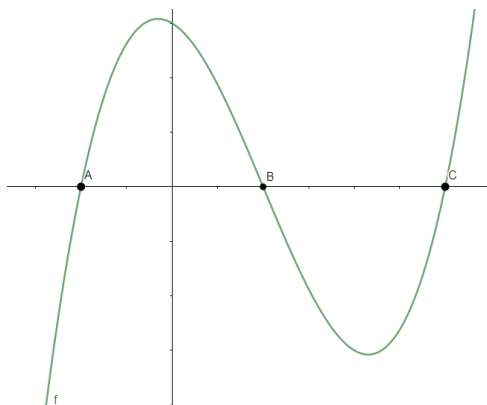


Figura 2 – Zeros de uma função.

Encontrar o zero de uma função também está associado a dois outros problemas. Suponha que busquemos encontrar $\beta \in \mathbb{R}$ que satisfaça a equação $f(x) = a$, em que $a \in \mathbb{R}$. Note que β não é necessariamente um zero da função f , entretanto β é uma raiz daquela equação. Porém, β é um zero de uma função associada à f : basta olhar para uma nova função real $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) := f(x) - a$ e portanto β é zero de h . O outro problema em questão consiste em investigarmos a intersecção entre o gráfico de duas funções, ou seja, um elemento α da intersecção dos domínios que têm a mesma imagem, isto é, $f(\alpha) = g(\alpha)$. Novamente definimos $h(x) := f(x) - g(x)$ e procuramos então um zero de h .

Na minha experiência como professor, as únicas opções ministradas para encontrar o zero de uma função são em geral as clássicas para funções polinomiais. Por exemplo, para polinômios de grau maior ou igual a 3, são utilizadas as relações de Girard, bem como procurar um zero por tentativa e erro e após encontrar, baixar o grau do polinômio utilizando o método da divisão de Briot-Ruffini até o grau ser igual a 2. Por fim, ensina-se para polinômios de grau 2 a fórmula de Bhaskara ou qualquer opção equivalente para encontrar os dois zeros restantes.

Porém, sempre realizo a seguinte pergunta a meus alunos: “como vocês fariam para encontrar os zeros de um polinômio de terceiro grau, caso os mesmos fossem 1.12314, π e $\sqrt{37}$, caso pudessem utilizar um computador”. Algumas respostas que recebo são “Mesmo com auxílio do computador, demoraria muito chutar todos os números até chegar no 1.12314, por exemplo.” ou “Coloco o polinômio no Geogebra e verifico quais são os pontos de intersecção com eixo x ”. Neste momento comento a ideia de que existem métodos iterativos que buscam aproximar-se do zero de uma função como, por exemplo o Método da Bissecção e do Método de Newton.

Tendo em vista essas ideias, o objetivo geral dessa dissertação é produzir materiais didáticos que auxiliem professores do ensino básico a trabalharem com métodos iterativos em sala de aula, mais especificamente com o método de Newton.

Já os objetivos específicos para alcançarmos este tal fim são:

- Introduzir a diferença entre erro absoluto e erro relativo.
- Demonstrar e enunciar teoremas importantes da Análise úteis na compreensão

dos métodos iterativos a serem estudados.

- Apresentar os métodos da bissecção e o de Newton.
- Definir critérios para e demonstrar a convergência quadrática do Método de Newton.
- Produzir um **Conjunto de Vídeos**¹ sobre o método de Newton e o cálculo da derivada de um polinômio.
- Criar uma proposta didática baseada em um **Livro Dinâmico**² na plataforma Geogebra.

Vejo os métodos iterativos um tema pouco explorado nas escolas. Durante meu período, na prática docente e mesmo durante o meu ensino médio, muito se estudou sobre a fórmula de Bháskara para encontrar os zeros de polinômios do segundo grau, porém, métodos iterativos, como o de Newton, que resolvem uma gama de classes de problemas maiores quase nunca foram explorados. Com efeito, uma busca de dissertações do PROFMAT resultou em poucas que tratam do tema, das quais citamos **Assim (2020)**, **Santos (2018)** e **Jordan (2015)**.

Além dos métodos da Bissecção e do método de Newton, existem outros que são utilizados para encontrar o zero de uma função, por exemplo, método da secante, método do ponto fixo e método da posição falsa (veja mais em **BURDEN; FAIRES, 2008**; **CAMPOS FILHO, 2007**; **RUGGIERO; LOPES, 1997**). A justificativa para apresentarmos o da Bissecção é pelo seu fácil entendimento o qual pode ser ensinado no ensino básico sem muitas dificuldades. Já o método de Newton, além da velocidade de convergência quadrática e o grau de complexidade (que serão comentadas mais adiante), sua escolha neste trabalho deve-se ao fato de que é possível compreendê-lo geometricamente através do uso de retas tangentes. Inclusive no conteúdo programático da rede de ensino que trabalho, os tópicos de polinômios e geometria analítica são trabalhados simultaneamente durante o terceiro ano do ensino médio. Dentre os conteúdos estudados em geometria analítica está a equação da reta, ferramenta primordial para entendimento do método de Newton. Mais que isso, outra habilidade da BNCC é trabalhar com equações lineares (retas) como vemos a seguir.

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais (**BRASIL, 2017**).

A estrutura dessa dissertação é a seguinte. No Capítulo 2, apresentamos os métodos da Bissecção e de Newton, bem como explicamos as condições para que convirjam. Além

¹ O vídeo por ser acessado em https://www.youtube.com/watch?v=fv0JqCDP63g&list=PL_Cvm6bI1sBv80Eq08vWNV16bewM1jNPn

² O livro por ser acessado <https://www.geogebra.org/m/rrszhwre>

disso, apresentamos a prova da convergência quadrática do método de Newton. A proposta didática em conjunto com orientações sobre aplicação do livro dinâmico estão inseridas no Capítulo 3. Finalmente, no Capítulo 4 fazemos nossas considerações finais. Com a finalidade de deixar o trabalho mais completo, o Anexo A apresenta definições e teoremas para compreensão do método de Newton, dentre os quais a definição de sequência de números reais, erro de Cauchy, velocidade de convergência, teoremas importantes do cálculo numérico e o polinômio de Taylor. Este último leva um destaque pela sua importância na validade matemática para os resultados matemáticos sobre a convergência do método de Newton e por ser a mais bonita demonstração reproduzida no trabalho.

2 MÉTODOS ITERATIVOS PARA CÁLCULO DO ZERO DE UMA FUNÇÃO

Um método iterativo é uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, com alguns desses passos repetidos em ciclos, e cada execução de um ciclo é chamada de iteração; veja [Ruggiero e Lopes \(1997, Cap. 2.3\)](#). Os métodos iterativos, constroem sequências iterativas de soluções aproximadas, na intenção que estas sequências estejam cada vez mais perto da solução de um dado problema. Caso essa sequência convirja, cada nova iteração é uma solução de maior qualidade do que a anterior, ou seja, quanto mais iterações forem calculadas, melhor será a resposta procurada.

Neste capítulo são apresentados dois métodos iterativos, para encontrar zero de funções não-lineares: o Método da Bissecção e o Método de Newton. O primeiro, é possível compreender com a matemática do ensino básico, pois, utiliza basicamente a ideia de ponto médio de um segmento. O segundo necessita de uma matemática apresentada somente no ensino superior. No entanto, como veremos, é possível compreender o Método de Newton, pelo menos geometricamente, com matemática ensinada nas escolas. Embora necessitando de uma matemática mais sofisticada, a proposta didática deste trabalho envolve apenas o Método de Newton, pois para uma classe grandes de funções, incluindo-se aí funções polinomiais não-negativas como $f(x) = x^{2p}$, $p \in \mathbb{N}$ (ou não-positivas), o método da Bissecção não encontra solução.

2.1 MÉTODO DA BISSECÇÃO

Seja f uma função real contínua (Definição [A.6](#)) no intervalo $[a_0, b_0]$ pertencente ao domínio de f . Necessitamos que $f(a_0)$ e $f(b_0)$ tenham sinais opostos, então $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ e pelo Teorema [A.7](#) (do valor intermediário) garante que existe pelo menos um x^* no intervalo $[a_0, b_0]$ tal que $f(x^*) = 0$, ou seja, x^* é uma raiz de f . A Figura [3](#) ilustra essa situação.

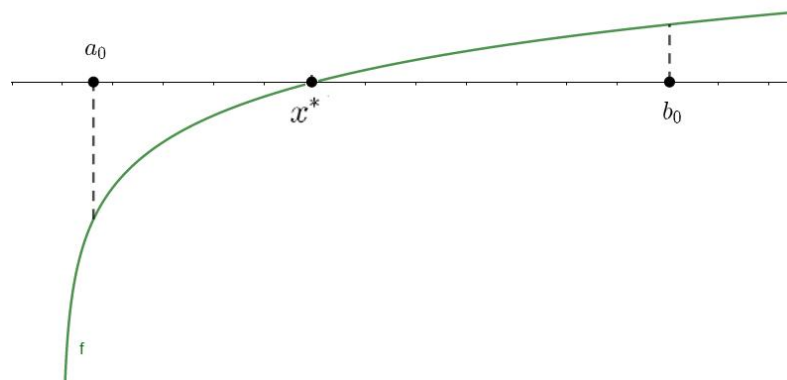


Figura 3 – O zero x^* de f no intervalo $[a_0, b_0]$.

Usando a existência deste x^* , o método da bissecção consiste em gerar uma sequên-

cia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ da seguinte forma. Fazemos $x_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$ e verificamos se o produto $f(a_0) \cdot f(x_0)$ é negativo. Neste caso, novamente pelo Teorema A.7 (TVI), existe um zero de f pertencente ao intervalo $[a_0, x_0]$, e definimos $a_1 := a_0$ e $b_1 := x_0$. Caso o produto seja positivo, temos que x^* estará obrigatoriamente no intervalo $[x_0, b_0]$, e definimos $a_1 := x_0$ e $b_1 := b_0$. É claro que se o produto for igual a zero, temos $f(x_0) = 0$ e portanto x_0 é uma raiz. Finalmente, geramos o próximo termo da sequência $x_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$. Procedendo de maneira indutiva obtemos o termo geral da sequência como

$$x_n := \frac{a_n + b_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que a cada novo intervalo $[a_n, b_n]$ é tal que $b_n - a_n$ é igual $\frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$, já que usamos na definição do novo intervalo o ponto médio x_{n-1} . Segue que

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja a sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z_n := \frac{b_0 - a_0}{2^n}$. Quando $n \rightarrow \infty$, temos que $z_n \rightarrow 0$. Além disso, $|x_n - x^*| < z_n, \forall n \in \mathbb{N}$, então a sequência positiva $(|x_n - x^*|)_{n \in \mathbb{N}}$ convergirá também para 0. Isso significa que $x_n \rightarrow x^*$.

Considerando a Definição A.4, o método da bissecção converge linearmente. De fato Kaufman Jr e Lenker (2018, Teoremas 2 e 3(ii)) temos demonstração de que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{1}{2}|x_n - x^*|.$$

Uma questão que ainda permanece é quando parar o algoritmo? Levando em conta que não temos o valor x^* , mas supondo a convergência da sequência, podemos nos valer do Teorema A.3 e usar o erro absoluto (ou relativo) em relação à sequência ser de Cauchy, isto é pararmos quando a diferença entre dois termos consecutivos for menor que uma tolerância ϵ dada, ou seja, $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ em que n representa a n -ésima iteração. Outro critério de parada interessante neste caso será quando $|f(x_n)|$ for suficientemente pequeno, pois, procuramos x^* que satisfaz $f(x^*) = 0$ e portanto, $|f(x_n)| \approx f(x^*) = 0$. Na descrição do método da bissecção dada no Algoritmo 1, usaremos este último critério.

Algoritmo 1: Método da Bissecção

Entrada: Função f contínua, a_0 e b_0 com $a_0 < b_0$ e $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$, e tolerância $\epsilon > 0$

```

1 para  $n = 0, 1, \dots$  faça
2    $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ ;
3   se  $|f(x_n)| < \epsilon$  então
4     retorna  $x_n$  é solução
5   fim
6   se  $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$  então
7      $a_{n+1} = a_n$  e  $b_{n+1} = x_n$ 
8   senão
9      $a_{n+1} = x_n$  e  $b_{n+1} = b_n$ 
10  fim
11 fim

```

Finalizamos a apresentação do Método da Bissecção, com exemplo para encontrar uma aproximação para o valor de $\sqrt[4]{30}$, sendo esse valor o zero da função real $f(x) = x^4 - 30$.

Exemplo 2.1. Seja f uma função real tal que $f(x) = x^4 - 30$. Encontrar o zero da função de f . Com auxílio do Algoritmo 1 calcularemos uma aproximação para o mesmo com tolerância $\epsilon = 0.001$. Primeiro devemos encontrar dois valores a_0 e b_0 do domínio de f tal que $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ e ainda que o zero pertença ao intervalo $[a_0, b_0]$. Por tentativa e erro escolhemos $a_0 = 2$ e $b_0 = 3$. E na Tabela 1 a coluna x_n é à sequência que convergirá para x^* , que é zero de f . O critério de parada será quando $|f(x_n)| < \epsilon = 0.001$

Tabela 1 – Algoritmo da Bissecção para encontrar o zero de $f(x) = x^4 - 30$

n	a_n	b_n	x_n	$ f(x_n) $
0	2	3	2.5	9.0625
1	2	2.5	2.25	4.37109
2	2.25	2.5	2.375	1.81665
3	2.25	2.375	2.3125	1.40257
4	2.3125	2.375	2.34375	0.17485
5	2.3125	2.34375	2.32813	0.62180
6	2.32813	2.34375	2.33594	0.22547
7	2.33594	2.34375	2.33984	0.02581
8	2.33984	2.34375	2.34180	0.07439
9	2.33984	2.34180	2.34082	0.02426
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
16	2.34023	2.34049	2.34036	0.000781

Portando, para as condições dadas uma aproximação para o zero de f é $x_{16} = 2.34036$ e podemos acompanhar que os pontos da sequência x_n estão se aproximando da

raiz, pela coluna $f(x_n)$ que cada linha está cada vez mais próxima de zero e como já calculado $f(x_{16}) = 0.000781$

2.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

No método da bissecção (Algoritmo 1), é necessário que a função f fosse contínua e que, além disso, existem a_0 e b_0 tais que $a_0 < x^* < b_0$. Assim, não fazemos uso de outras informações como, por exemplo, se a função é derivável ou não em seu domínio e por conta disso em muitas vezes este método consiste em um processo iterativo lento. Além disso, o método da bissecção não dá conta de encontrar, por exemplo, o zero de $f(x) = x^2$, pois, a função toda é positiva para pontos diferentes de zero.

O método de Newton será apresentado nessa secção, é mais robusto (resolve mais tipos de problemas), porém, precisaremos de mais hipóteses sobre f . Um detalhe importante é que em circunstâncias apropriadas este método convergirá mais rápido que o método da bissecção.

O método de Newton consiste em encontrar o zero de f uma função $C^2[a,b]$ com o auxílio de aproximações lineares da mesma. Seja $x^* \in [a,b]$ com $f(x^*) = 0$. Para iniciar o método, devemos escolher x_0 pertencente ao intervalo $[a,b]$ e traçar a reta tangente ao ponto $(x_0, f(x_0))$ e também dentro desse intervalo a derivada da função não pode se anular, caso contrário a reta tangente não irá intersectar o eixo x . A imagem Abaixo serve como ilustração destas condições sobre f .

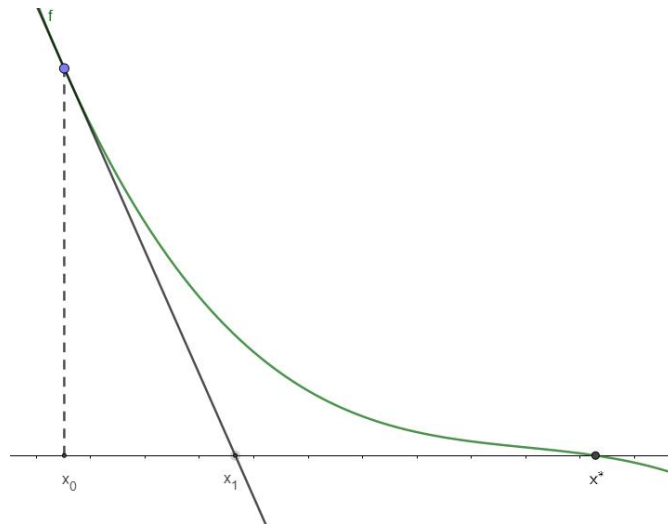


Figura 4 – Ponto inicial

É bem sabido que a equação de qualquer reta que passa por um ponto (x_0, y_0) e que tem inclinação m é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Segue que a equação da reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ é

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (2)$$

Uma vez que $f'(x_0)$ é sua inclinação. O método de Newton consiste em utilizar a reta tangente para determinar uma aproximação de x^* , a partir de x_0 , denominada x_1 como sendo a abcissa do ponto de intersecção entre a reta tangente e o eixo- x . Tal intersecção tem coordenadas $(x_1, 0)$. Logo, substituímos $y = 0$ e $x = x_1$ na equação (2) e obtemos

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

ou ainda,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Agora repetimos o processo, em relação ao ponto $(x_1, f(x_1))$ para encontrar x_2 , como visto na Figura 5.

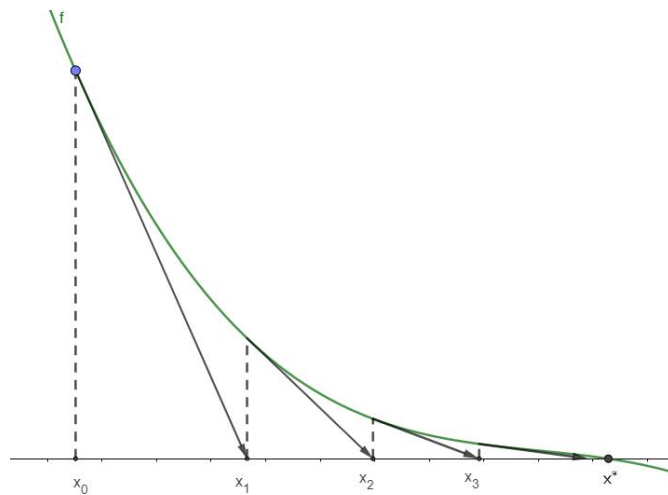


Figura 5 – Interpretação geométrica do método de Newton.

Logo a equação da reta tangente que intersecta o gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$ é

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Repetindo o mesmo argumento anterior, fazemos $y = 0$ e $x = x_2$ para obter

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

e também

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Usando um argumento indutivo em n , podemos dizer, que a próxima abcissa do ponto de intersecção x_n é escrita da forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3)$$

A recorrência acima é o cerne do *Método de Newton* dado na forma algorítmica no Algoritmo 2. Note que estamos usando como critério de parada o erro absoluto em relação à sequência de Cauchy.

Algoritmo 2: Método de Newton

Entrada: Função f , x_0 inicial e tolerância $\epsilon > 0$

```

1 para  $n = 0, 1, \dots$  faça
2    $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ;
3   se  $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$  então
4     retorna  $x_{n+1}$  é solução
5   fim
6 fim
```

Precisamos que $f'(x) \neq 0$ no intervalo $[a, b]$ caso contrário a reta tangente ao gráfico de f não irá interceptar o eixo x . Também caso $f'(x_n) = 0$ não estaria bem definido x_{n+1} . Desta forma, bem definimos uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais. Esperamos que, quando n for suficientemente grande, x_n estará bem próximo de x^* , o qual é zero de f , isto é, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convirja para x^* .

A boa escolha de x_0 (e do intervalo $[a, b]$), além de resultar em possivelmente um menor número interações para a convergência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, também servirá para dar uma garantia de convergência.

De fato, não temos como assegurar que o método de Newton tenderá para um zero de f para qualquer x_0 dado. Vamos analisar as Figuras 6 e 7 em que, para ambas, $f''(x_0) \cdot f(x_0) < 0$. Portanto para que possamos escolher um bom x_0 , devemos ter que $f''(x_0) \cdot f(x_0) \geq 0$.

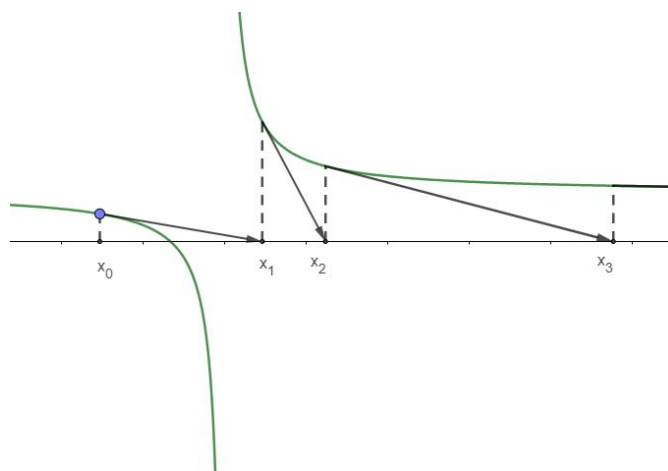
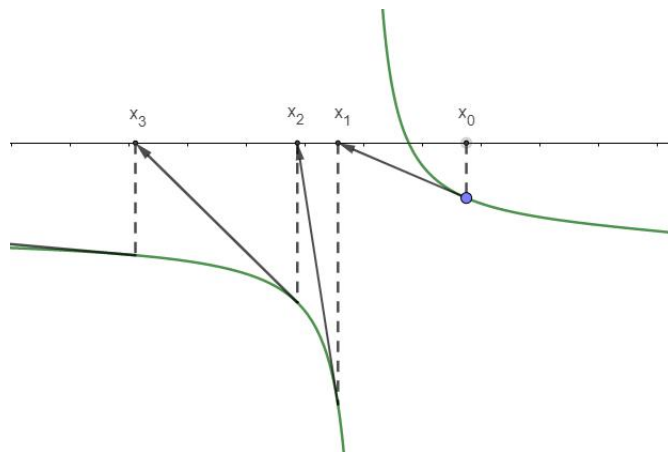


Figura 6 – $f''(x_0) < 0$ e $f(x_0) > 0$

Figura 7 – $f''(x_0) > 0$ e $f(x_0) < 0$

Por outro lado, queremos que a curva não troque de concavidade em torno x_0 , caso contrário podemos ter que $f''(x_1) \cdot f(x_1) > 0$ e a partir de x_1 teremos o mesmo problema anterior e assim o x_2 estará mais longe de x_1 em relação x_0 e para demonstração da convergência, precisamos que para todo n , x_n esteja mais perto de x^* do que x_{n-1} , portanto garantindo que a sequência seja monótona.

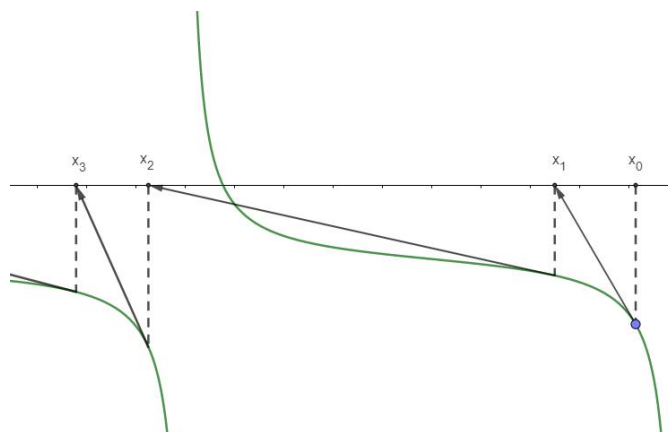


Figura 8 – Troca concavidade

Assim, formalmente temos a seguir um teorema com os critérios para que a escolha de x_0 assegure a convergência da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gerada pelo Algoritmo 2 para x^* , zero de uma função. Um detalhe é que em grande parte dos textos que abordam a convergência Método de Newton, a analisam sob a ótica do Método de Iteração de Pontos fixos (veja, por exemplo BURDEN; FAIRES, 2008; RUGGIERO; LOPES, 1997; CAMPOS FILHO, 2007). Usaremos aqui, no entanto, a expansão de Taylor até segunda ordem. Esta demonstração pode ser encontrada em Alves (2002, p. 59) porém, procedemos aqui com sua demonstração por completude do texto.

Teorema 2.1 (Condição suficiente de convergência para o método de Newton). *Seja f uma função $C^2[a,b]$ que satisfaz:*

$$(i) \ f(a) \cdot f(b) \leq 0;$$

(ii) $f'(x) \neq 0$, para $x \in [a, b]$;

(iii) $f''(x) \leq 0$ ou $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$;

(iv) $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$ para $x \in [a, b]$.

Então a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida pelo Algoritmo 2 com $x_0 \in [a, b]$ converge para x^* , com $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$.

Demonstração. Considere $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) \geq 0$. As demonstrações dos casos restantes são feitas de modo análogo.

Dado $x_0 \in [a, b]$, se tivermos $f(x_0) > 0$ então para este ponto as condições 1., 2., 3., e 4., estão sendo satisfeitas e iremos podermos provar que $x_n \geq x^*$ para todo n natural.

Como $f(x_0) > f(x^*) = 0$ então $x_0 > x^*$ pois f é crescente no intervalo $[a, b]$ por conta de sua derivada ser positiva.

Pela Teorema A.15 (de Taylor com resto de Lagrange) podemos escrever a função f como

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)(x - x_n)^2}{2}$$

em torno de x_n com ξ_n entre x_n e x^* .

Substituindo x por x^*

$$f(x^*) = 0 = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2}{2}$$

Pela condição 3., $f''(x) \geq 0$, segue que

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2}{2} \geq f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n)$$

Dividindo ambos os lados pela condição inicial $f'(x_n) > 0$

$$0 \geq \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n)$$

Isolando x^* e lembrando que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, ou seja $x^* \leq x_{n+1}$.

Por indução iremos mostrar que $x_0 > x_n > x_{n+1}$ para todo n . Pela condição inicial $f(x_0) > 0$ e $f'(x_0) > 0$ temos $x_0 > x_1$ pois

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0.$$

Suponhamos agora que $x_0 > x_n$ e como f é crescente em todo intervalo $[a, b]$ temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < x_n < x_0.$$

Sendo assim a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e monótona decrescente, portanto $x^* \leq x_{n+1} \leq x_n \leq x_0$.

Como a função f é contínua no intervalo e $x_0 > x_1 > \dots > x_n > \dots > x^*$ então $f(x_0) > f(x_1) > \dots > f(x_n) > \dots > f(x^*) = 0$. Portanto a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergirá para x^* . \square

Conforme já comentado anteriormente, o método de Newton converge mais rapidamente em comparação ao método da bissecção que converge linearmente. De fato, o método de Newton tem velocidade de convergência quadrática, assumindo é claro que a convergência exista. A demonstração deste fato se encontra a seguir.

Teorema 2.2 (Convergência quadrática do método de Newton). *Suponha f uma função $C^2[a,b]$ com x^* em $[a,b]$ e $f(x^*) = 0$, com as condições dada pelo Teorema 2.1. Então a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida pelo Algoritmo 2 converge para x^* . Além disso, se existe $M > 0$ tal que*

$$M > \frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|} \quad (4)$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quadraticamente.

Demonstração. A convergência do método de Newton, foi dada no Teorema 2.1. Mostraremos agora a velocidade quadrática de convergência conforme Definição A.4. Novamente pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange (Teorema A.15) temos

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)(x - x_n)^2}{2}.$$

em torno de x_n com ξ_n entre x_n e x . Fazendo $x = x^*$ temos que $f(x^*) = 0$ e portanto

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2}{2}.$$

Uma vez que a derivada é contínua e diferente de zero no intervalo $[a,b]$, temos que $f'(x_n) \neq 0$ desde que x_n seja próximo suficiente de x^* . Podendo dividir os termos por $f'(x_n)$

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)}.$$

Pela definição do método de Newton em (3), obtemos

$$x_{n+1} - x^* = \frac{f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)}.$$

Então,

$$|x_{n+1} - x^*| = \left| \frac{f''(\xi_n)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \right| \leq \frac{|f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|} (x^* - x_n)^2.$$

Pela continuidade, $f'(x_n)$ converge para $f'(x^*)$ e, uma vez que ξ_n está entre x_n e x^* , ξ_n também converge para x^* e portanto $f''(\xi_n)$ converge para $f''(x^*)$. Desta forma e utilizando a Equação (4), para n suficientemente grande,

$$\frac{|f''(\xi_n)|}{2|f'(x_n)|} < M,$$

o que resulta em

$$|x_{n+1} - x^*| < M|x_n - x^*|^2.$$

A desigualdade acima resulta no teorema, considerando a Definição A.4(ii). \square

Finalizamos esta seção por mostrar a resolução de um exemplo que contém a modelagem matemática de um problema real e por comparar o Algoritmo 2 de Newton com o Algoritmo 1 da Bisseção.

Exemplo 2.2. *Este exemplo foi adaptado a partir de Sperling (1996, p. 137), que é usado em cursos de Engenharia Ambiental para calcular a concentração de oxigênio mg/l dissolvido em um rio ao longo do tempo em minutos após a descarga de poluentes. A equação que modela este fenômeno é dada por*

$$C_r(t) = C_s - \left[\frac{K_1 \cdot L_0}{K_2 - K_1} \cdot (e^{-K_1 \cdot t} - e^{-K_2 \cdot t}) + D_0 \cdot e^{-K_2 \cdot t} \right].$$

Com $C_s = 7.5$, $K_1 = 0.48$, $K_2 = 2.49$, $L_0 = 54$, $D_0 = 1.6$ constantes que dependem do resíduo despejado e qualidade do rio em questão. Substituindo os seguintes valores das constantes na equação acima obtemos

$$C_r(t) = 7.5 - 12.8955 \cdot e^{-0.48t} + 11.2955 \cdot e^{-2.49t}. \quad (5)$$

Vamos encontrar o primeiro momento t para que a concentração de oxigênio seja igual 2mg/l. Pela Figura 9 existem dois valores de t para que $C_r(t) = 2$. Por conta disso, escolheremos o ponto inicial $x_0 = 0$. Caso quiséssemos o segundo momento escolheríamos $x_0 = 1.6$ por questões de convergência.

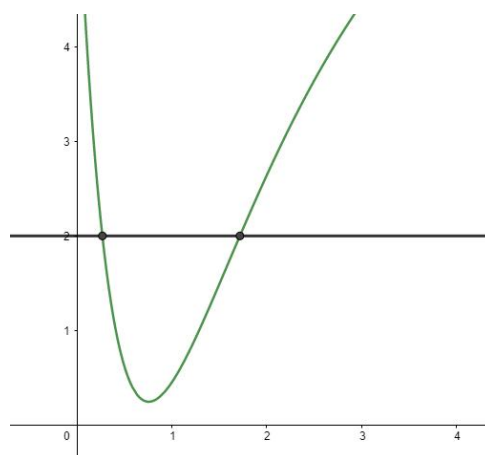


Figura 9 – Gráfico da função

Logo, queremos encontrar o zero da seguinte função real f dada por

$$f(t) := C_r(t) - 2 = 5.5 - 12.8955 \cdot e^{-0.48t} + 11.2955 \cdot e^{-2.49t}. \quad (6)$$

Tabela 2 – Algoritmo de Newton para encontrar o zero de (6)

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$ x_{n+1} - x_n $
0	0.0000000000	3.9000000000	-21.9360000000	–
1	0.1777899344	0.9144557054	-12.3817596188	1.7778×10^{-1}
2	0.2516450029	0.1081402896	-9.5451020766	7.3855×10^{-2}
3	0.2629744040	0.0022108309	-9.1567587955	1.1132×10^{-2}
4	0.2632158465	0.0000009840	-9.1486087227	2.4144×10^{-4}
5	0.2632159540	0.0000000000	-9.1486050933	1.0760×10^{-7}

Com auxílio do Algoritmo 2 de Newton, com $x_0 = 0$ e tolerância $\epsilon = 10^{-5}$ obtemos os resultados descritos na Tabela 2.

Como já comentado o Algoritmo 2 de Newton converge com velocidade quadrática e a com análise da coluna $|x_{n+1} - x_n|$ do erro na Tabela 2, nota-se que a quantidade de zeros após a vírgula aumenta de forma exponencial em relação a quantidade da linha anterior, ilustrando o que significa a velocidade de convergência quadrática. Portanto podemos afirmar que o tempo procurado é de aproximadamente 0.2632159540 min.

Para questões comparativas, usaremos o Algoritmo 1 da Bissecção com $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ e tolerância $\epsilon = 10^{-5}$ na mesma função f , com resultados na Tabela 3.

Tabela 3 – Algoritmo da Bissecção para encontrar zero de (6)

n	a_n	b_n	x_n	$ f(x_n) $
0	0	1	0.5	1.3915342192
1	0	0.5	0.25	0.1238891545
2	0.25	0.5	0.375	0.8312367341
3	0.25	0.375	0.3125	0.4116258797
4	0.25	0.3125	0.28125	0.1595852816
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
20	0.263214112	0.263217926	0.263216019	0.0000005913

Podemos ver uma diferença plausível em relação a convergência dos dois métodos. o Algoritmo 1 da Bissecção, tem convergência linear e por isso necessita de mais iterações em relação Algoritmo 2 de Newton.

Outra aplicação para a derivada comentada no Apêndice A, é identificar pontos críticos de uma função, sendo eles o maior ou menor valor em um intervalo. O Fato A.8 (Teorema de Weierstrass) garante a existência o máximo e mínimo local, mas com a derivada conseguimos saber quais são esses valores.

Exemplo 2.3. Agora iremos encontrar o zero da derivada da seguinte função

$$C_r(t) = 7.5 - \left[\frac{0.48 \cdot 54}{2.49 - 0.48} \cdot \left(e^{-0.48t} - e^{-2.49t} \right) + 1.6 \cdot e^{-2.49t} \right],$$

utilizada no Exemplo 2.2. Este será um valor de minimizador da função já que sua segunda derivada é positiva em um intervalo próximo da raiz da derivada. Calculando a derivada temos

$$f'(t) = \frac{1}{8375} \left(51840e^{-\frac{12}{25}t} - 235554e^{-\frac{49}{100}t} \right). \quad (7)$$

Com auxílio do Algoritmo 2 de Newton, com $x_0 = 0$ e tolerância $\epsilon = 10^{-4}$ obtemos os resultados dados na Tabela 4.

Tabela 4 – Algoritmo de Newton para encontrar raiz de (7)

n	x_n	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	$ x_{n+1} - x_n $
0	0.0000000000	-21.9360000000	67.0622400000	-
1	0.3270991246	-7.1656722860	28.4763294076	3.2709×10^{-1}
2	0.5787352180	-1.9682716867	14.3249320856	2.5163×10^{-1}
3	0.7161370343	-0.3387465690	9.6659316982	1.3740×10^{-1}
4	0.7511824474	-0.0168716403	8.7172948928	3.5045×10^{-2}
5	0.7531178689	-0.0000483729	8.6673493398	1.9354×10^{-3}
6	0.7531234499	-0.0000000004	8.6672056737	5.5810×10^{-6}

Então a menor quantidade de oxigênio foi após 0.7531234499 min.

Para finalizar esta seção, será apresentado um exemplo cuja a velocidade de convergência do Algoritmo 2 de Newton não converge com velocidade quadrática como prevê o Teorema 2.1 pois a hipótese (ii) não sera satisfeita.

Exemplo 2.4. Seja a função real dada por

$$f(x) = (x - 1)^2 e^x. \quad (8)$$

Note que a única raiz de f é a raiz dupla $x^* = 1$ e que $f'(x) = e^x(x-1)(x+1)$. Com auxílio do Algoritmo 2 de Newton, vamos encontrar zero da função com $x_0 = 0.1$ e tolerância $\epsilon > 10^{-7}$. Temos os resultados apontados na Tabela 5.

Tabela 5 – Algoritmo de Newton para encontrar zero de (8)

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$ x_{n+1} - x_n $
0	0.1000000000	0.8951884436	-1.0941192089	-
1	0.9181818182	0.0167672155	-0.3930980518	8.1818×10^{-1}
2	0.9608358466	0.0040092505	-0.2007315725	0.0426×10^{-2}
3	0.9808090399	0.0009820947	-0.1013676236	1.9973×10^{-1}
4	0.9904974852	0.0002431334	-0.0509293084	9.6884×10^{-3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	0.9998529080	0.0000000588	-0.0007994985	1.4713×10^{-4}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	0.9999997128	0,0000000000	-0,0000015616	2.8720×10^{-7}
20	0.9999998564	0.0000000000	-0.0000007808	1.4360×10^{-7}
21	0.9999999282	0.0000000000	-0.0000003904	7.1800×10^{-8}

O algoritmo precisou de 21 iterações para calcular a raiz com a tolerância dada, o que comparado com os exemplos anteriores é bem superior. Isso se dá por conta da derivada se anular junto com a função. Neste caso, não temos garantia de velocidade quadrática de convergência, pois, $f'(x^*) = 0$, isto é, a hipótese (ii) do Teorema 2.1 não é verificada. Com efeito, agora demonstraremos que essa convergência é de fato linear. Pela Definição A.4 (i), precisamos encontrar um $0 < \rho < 1$ que satisfaz a desigualdade

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \rho |x_n - x^*|, \quad (9)$$

para todo n suficientemente grande, em que pelo Método de Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Assim,

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &= \left| x_n - \frac{e^{x_n}(x_n - 1)^2}{e^{x_n}(x_n - 1)(x_n + 1)} - 1 \right| \\ &= \left| x_n - 1 - \frac{x_n - 1}{x_n + 1} \right| \\ &= \left| \frac{(x_n - 1)(x_n + 1) - (x_n - 1)}{x_n + 1} \right| \\ &= \left| \left(1 - \frac{1}{x_n + 1} \right) (x_n - 1) \right| \\ &= \left| 1 - \frac{1}{x_n + 1} \right| |x_n - x^*|. \end{aligned}$$

Para $x_n > 0$ temos que $0 < \frac{1}{x_n + 1} < 1$. Além disso, se $x_n > 0$ então $x_{n+1} > 0$ e por isso, para o cálculo da raiz de f , foi escolhido $x_0 = 0.1 > 0$. Logo, $0 < \rho := \limsup \left| 1 - \frac{1}{x_n + 1} \right| < 1$ e da igualdade acima obtemos (9).

2.2.1 Fórmula fechada do Método de Newton para polinômios

Encerramos este capítulo, já com um olhar para o capítulo 3, no qual apresentamos uma proposta didática para ser utilizada no ensino básico. Portanto, nesta seção é apresentado o algoritmo de Newton para polinômios, uma vez que a derivada de qualquer polinômio é possível calcular a partir de uma fórmula fechada.

Portanto, iremos agora definir polinômio e sua derivada.

Definição 2.3. (Polinômio) Um polinômio de grau n é uma função real da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \quad (10)$$

com $a_n \neq 0$.

Definição 2.4. (Derivada Polinômio) Seja $P(x)$ o polinômio dado em (10), então sua derivada é uma função real da forma

$$P'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1. \quad (11)$$

Já definido o polinômio e sua derivada, reescrevemos o algoritmo de Newton, para polinômios com auxílio das Equações (10) e (11).

Algoritmo 3: Newton para Polinômios

Entrada: Polinômio P de grau p , x_0 inicial e tolerância $\epsilon > 0$

1 **para** $n = 0, 1, \dots$ **faça**

2 $x_{n+1} = x_n - \frac{a_p(x_n)^p + a_{p-1}(x_n)^{p-1} + \dots + a_2(x_n)^2 + a_1(x_n) + a_0}{p \cdot a_p(x_n)^{p-1} + (p-1)a_{p-1}(x_n)^{p-2} + \dots + 2a_2(x_n) + a_1};$

3 **se** $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ **então**

4 \quad **retorna** x_{n+1} *é solução*

5 **fim**

6 **fim**

Está disponibilizado uma planilha para download pelo link [Planilha Polinômio](#)¹ que auxilia a calcular o zero de um polinômio de grau $n \leq 6$ usando Algoritmo 3 de Newton, somente com os valores dos coeficientes. O exemplo abaixo, será resolvido utilizando a planilha disponibilizada para familiarização.

Exemplo 2.5. *Seja $P(x) = x^6 - 5x^5 - 5x^4 + x^3 + 10x^2 - x - 12$ uma função polinomial, tal que $P(x^*) = 0$ com $x^* \in [-3, 0]$. Com auxílio da Planilha 6 e dos coeficientes de $P(x)$ calcularemos o valor de x^* .*

Polinômio P(x)=	1 x^6	-5 x^5	-5 x^4	1 x^3	10 x^2	-1 x	-12
Derivada P'(x)	6 x^5	-25 x^4	-20 x^3	3 x^2	20 x	-1	
Ponto Inicial	x_0=	-2		Tolerância	0,00001		
						Erro	
Interações	x_n	P(x_n)		P'(x_n)		x_n - x_{n-1}	
0	-2	166		-461		*	
1	-1,639913232	54,71367274		-189,4990958		0,360086768	
2	-1,351185349	17,07958096		-83,56157317		0,288727883	
3	-1,146790191	4,333898579		-44,96659456		0,204395158	
4	-1,050409786	0,575118405		-33,62626153		0,096380405	
5	-1,033306535	0,014335143		-31,96606038		0,017103251	
6	-1,032858086	9,47392E-06		-31,92381925		0,000448449	
7	-1,032857789	4,14779E-12		-31,92379131		2,96766E-07	

Figura 10 – Planilha disponibilizada

As informações preenchidas na tabela são os valores em vermelho e o $x_0 = -2$, todo restante é completado automaticamente. Por fim, uma boa aproximação para x^* é -1.032857789 .

¹ A planilha pode ser acessado <https://drive.google.com/file/d/1DSa70rlda-9xEJHR0kX5Ikq1U0sBg2tM/view?usp=sharing>

3 PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO BÁSICO

Este capítulo apresenta orientações e atividades sugeridas ao estudo do método de Newton para alunos do ensino médio. Para melhor experiência dessas atividades é importante que tanto professor quanto aluno já tenham tido algum contato com o *software* GeoGebra, pois, todas as atividades propostas pertencem a um livro dinâmico, possível acessar pelo link [Livro Geogebra](#)¹, produzido na plataforma Geogebra.

O que difere um livro digital de um livro dinâmico? Livro digital pode ser encontrado em muitas vezes, idêntico ao livro físico, em outras palavras, o que está no livro digital permanecerá igual do começo ao fim da leitura. Por outro lado, o livro dinâmico interage com o leitor, visto que na mesma página, por exemplo, de áreas de figuras planas, um triângulo no corpo do texto quando modificado seus lados, se altera automaticamente a área ou o perímetro, ou ainda o valor da altura. Nesses ambientes de interações entre texto e imagens chamamos “applet” durante a proposta de atividades. Para Duval (2018, p.12) segundo [Jorge Cássio Nóbriga e Siple \(2020, p. 90\)](#)

“é preciso construir situações de aprendizagem nas quais os alunos possam comparar as variações de conteúdo das representações em um registro A com variações correlatas de conteúdo das representações em um registro B” e com isso poder ajudar o estudante a perceber qual a relação que existe entre as diferentes representações.

As demonstrações matemáticas, apresentadas nos dois primeiros capítulos dessa trabalho são algo que em um primeiro olhar, podem conter um certo desconforto. Isso porque o formalismo matemático é ríspido, único objetivo é veracidade da sentença e não com sua apresentação dinâmica. Mesmo com sua beleza, a compreensão do que realmente está se desenvolvendo durante uma demonstração pode ser falha e a interação com livro dinâmico ameniza por ser mais visual. Claro, que as demonstrações algébricas são fundamentais e se possível sempre incrementar com algo dinâmico ou visual, tende a acrescentar a demonstração.

Portanto, o livro dinâmico que propomos é dividido em dois capítulos, “Erro de aproximação” e “Método de Newton”. Tendo objetivo, apresentar uma área da matemática pouco explorada no ensino médio, o cálculo numérico. Claro que com suas limitações, pois, os alunos não estudam todos os pré-requisitos para exemplos mais dos aplicáveis em outras áreas do conhecimento. O livro traz imagens, vídeos, demonstrações dinâmicas, tabelas e gráficos. Conforme orientações PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) Parte III - Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias:

Aulas e livros, contudo, em nenhuma hipótese resumem a enorme diversidade de recursos didáticos, meios e estratégias que podem ser utilizados no ensino das Ciências e da Matemática (...) Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de

¹ O livro por ser acessado <https://www.geogebra.org/m/rrszhwre>

tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado (BRASIL, 2000).

Dentre os *softwares* de geometria dinâmica, alguns deles são:

- Cabri-Geometry
- Cinderella
- Euklid
- Geogebra

Como já comentado a escolha do *software* para produção do livro dinâmico foi o Geogebra, por ser gratuito, apresentar uma versão *web* para que os alunos possam, acessam de forma rápida em suas escolas, reúne áreas como geometria, álgebra, gráficos, probabilidade, estatística, e planilha de cálculo, criar ferramentas próprias. Como foco do trabalho não é apresentar todas as ferramentas ou a programação JavaScripGlobal do Geogebra, caso haja interesse, sugiro o trabalho também do PROFMAT que dá mais atenção a essa parte é de Angelo Márcio Souza (2018)

3.1 PLANO DE AULA

Sobre plano de aula, sugestão seja feita com uma turma do terceiro ano do ensino médio, considerando os conteúdos trabalhados. Os dois capítulos do livro dinâmico devem ser propostos em quatro aulas de 45-50 minutos com a seguinte divisão:

- Aula 01 - Cap 01 - Erro de Aproximação 3.2
- Aula 02 - Cap 02 - Método de Newton 3.3 e Cap 02 - Praticar 3.4
- Aula 03 - Cap 02 - Derivada 3.5
- Aula 04 - Cap 02 - Atividade Final 3.6

Os objetivos gerais, após as quatro aulas são que os alunos sejam capazes de

- Compreender diferença entre erro relativo e erro absoluto.
- Reproduzir o algoritmo de Newton.

Além disso, são objetivos específicos

- Identificar reta tangente.
- Resolver cálculo derivada de um polinômio.
- Identificar que algoritmo de Newton é consequência da equação geral da reta.

Conteúdos necessários para compreender e aplicar o Algoritmo 3 de Newton para Polinômio:

- Geometria Analítica

– Plano cartesiano

- Ponto
- Equação da reta:
 - * Coeficiente angular
 - * Pontos de interseção com os eixos coordenados
 - * reta tangente
- Polinômios
 - Valor numérico de um polinômio
 - Raízes de um polinômio

Recursos necessários:

- Sala de aula
- Laboratório de informática com acesso à Internet
- Calculadora

A Tecnologia está cada vez mais comum na rotina dos alunos, segundo [Meirelles \(2021\)](#) existem dois dispositivos digitais (computador, notebook, tablet e smartphone) por habitantes no Brasil, outra dado relevante é o uso diário de aproximadamente 3:30 horas, para faixa etária entre 16 a 24 anos com redes sociais. O uso dessas tecnologias para aprendizagem vai de encontro com os Parâmetros Curriculares Nacional ([BRASIL, 2000](#)).

No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e o computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações.

3.2 AULA 01: ERRO DE APROXIMAÇÃO

O primeiro capítulo apresenta a definição mais formal de erro através de um applet para que o aluno possa compreender a diferença de Erro Absoluto (13) e Erro Relativo (12). Esse applet trata de comparar a área de uma circunferência em relação à área de um polígono regular inscrito de n lados. De forma dinâmica o aluno pode alterar o raio da circunferência e a quantidade de lados n do polígono, para assim notar que quanto mais lados o polígono tiver, menor será a diferença de área entre do mesmo e da circunferência. A Figura 11 demonstra tal applet com os parâmetros $r = 8$ e $n = 3$

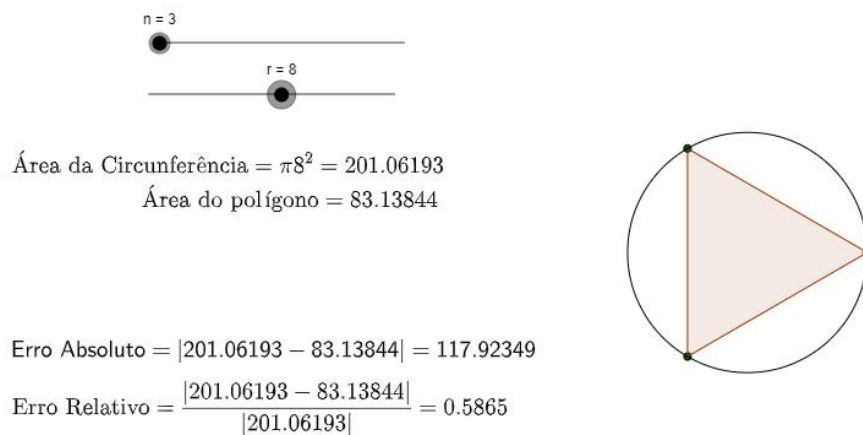


Figura 11 – Diferença entre área circunferência e polígono regular de 3 lados.

Com auxílio de um controle deslizante n o aluno deve aumentar a quantidade de lados, conforme a Figura 12.

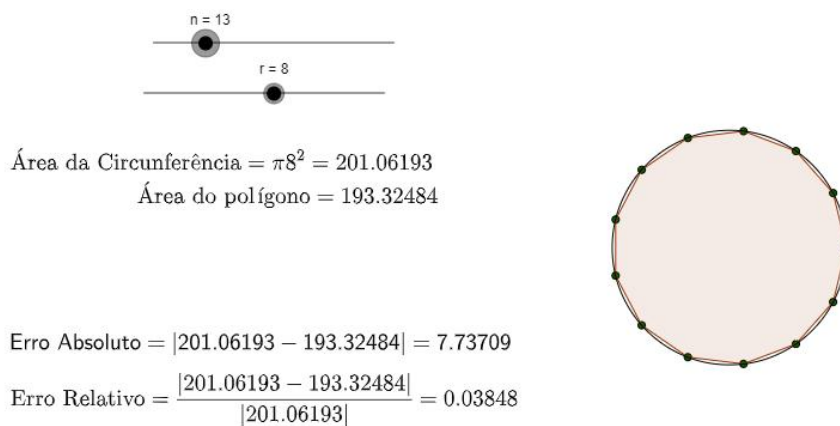


Figura 12 – Diferença entre área circunferência $r = 8$ e polígono regular de 13 lados.

Agora utilizando o controle deslizante r e mantendo o polígono de $n = 13$ lados, nota-se que o erro absoluto aumentou, porém, o erro relativo permaneceu o mesmo, pois, como já comentado no primeiro capítulo o erro absoluto é um valor quantitativo, já o erro relativo é uma porcentagem, ou seja, se aumentar o raio da circunferência e manter a proporção do polígono o erro relativo obrigatoriamente se manter, como mostra Figura 13

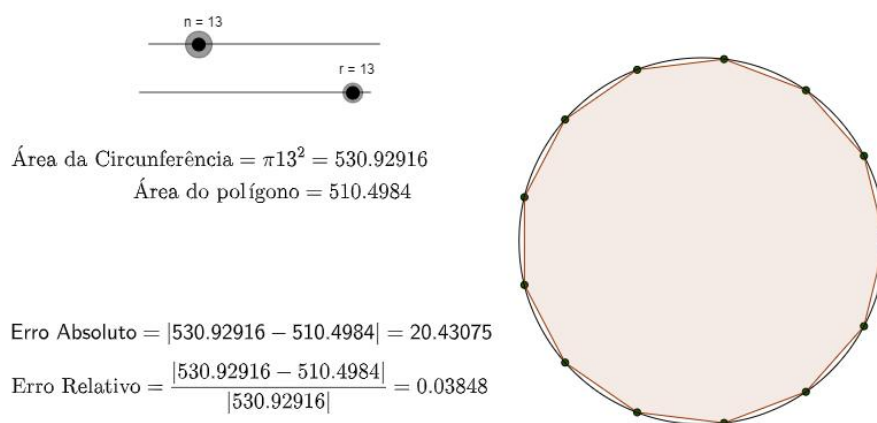


Figura 13 – Diferença entre área circunferência de $r = 13$ e polígono regular de 13 lados.

Por fim, o aluno deve responder duas perguntas, com feedback automático, sobre o capítulo descritas na Figura 14. Para Jorge Cássio Nóbriga e Siple (2020, p.90).

explorando as potencialidades das tecnologias digitais, tais como fornecer novas formas de olhar para objetos matemáticos, propiciar feedback imediato e evidenciar as representações conectadas dinamicamente, propomos algumas características que acreditamos que um livro dinâmico de matemática deveria conter para, dentre outras possibilidades, permitir o desenvolvimento da coordenação entre os diversos registros de representação.

Com o aumento do número de lados do polígono podemos afirmar que:

Assinale a sua resposta aqui

- O valor do erro absoluto diminui
 O valor do erro absoluto mantém

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Variando somente o raio da circunferência, podemos afirmar que:

Assinale a sua resposta aqui

- O erro absoluto e o erro relativo se mantém
 O erro absoluto mantém porem o erro relativo se maném

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Figura 14 – Perguntas finais sobre erro.

O segundo capítulo do livro dinâmico é dividido em quatro secções. A primeira apresenta o método de Newton e o seu Algoritmo 2, a segunda apresenta um applet para realizar as iterações e encontrar uma aproximação da raiz de um polinômio utilizando

a ferramenta disponível no Geogebra, a terceira apresenta uma pequena introdução de derivada e reta tangente, pois, este conceito é fundamental para o método de Newton e a última seção consiste em encontrar uma raiz de um polinômio a partir de uma ponto inicial dado, respondendo perguntas com feedback automático.

3.3 MÉTODO DE NEWTON - EXPLICAÇÃO

Nessa seção, é disponibilizado um vídeo [Interpretação geométrica do Método de Newton](#)², explica o processo do Método de Newton, realizando as retas tangentes a uma função, encontrando o ponto de intersecção dessa reta com eixo x , realizando duas iterações até que de modo indutivo, apresentar a recorrência do método de Newton. Por fim, é comentado que caso a equação da reta tangente, seja paralela ao eixo x , está não intercepta o eixo, não gerando o próximo termo da sequência.

3.4 MÉTODO DE NEWTON - PRATICAR

Antes que o aluno comece a replicar o Algoritmo 2 de Newton, é interessante que realize iterações geométricas, tendo em vista que, por ser mais visual a compreensão é facilitada. Portanto, um applet e um vídeo complementam essa seção. A Figura 15 mostra a tela inicial do applet:

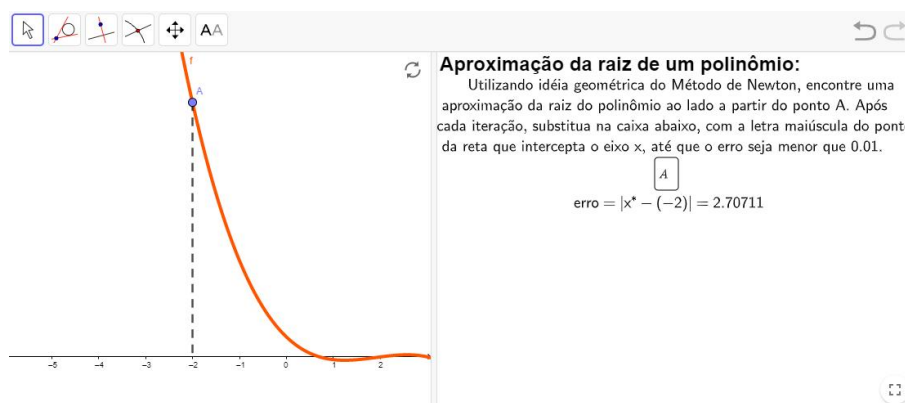


Figura 15 – Tela inicial do applet.

O vídeo [Interpretação geométrica do Método de Newton utilizando Geogebra](#)³ demonstra como utilizar o applet para que o aluno possa replicar ou até mesmo professor realizar em sala com os alunos. Primeiro usaremos a ferramenta reta tangente, selecionando o ponto A e o polinômio. Após isso, utilizaremos a ferramenta intersecção e selecionando a reta tangente e o eixo x , sendo essa intersecção o ponto B . Substituindo na caixa de texto, verificamos que o erro absoluto é menor que o inicial.

² O vídeo pode ser acessado <https://www.youtube.com/watch?v=fv0JqCDP63g>

³ O vídeo pode ser acessado <https://youtu.be/fM6GRAk9R7Y>

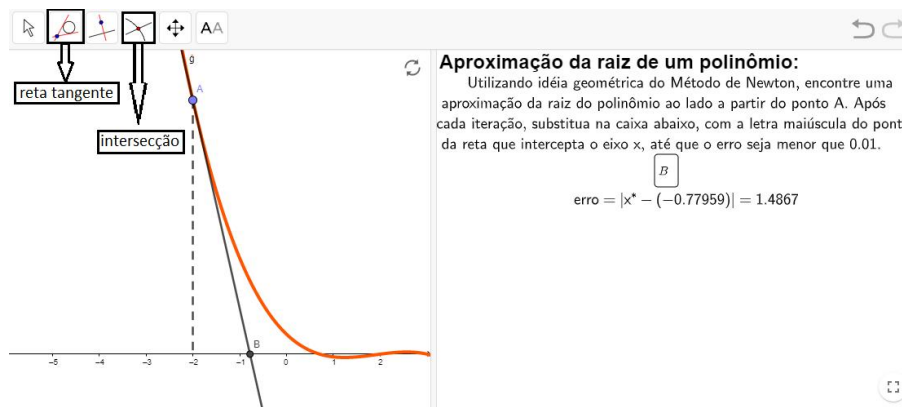


Figura 16 – Apresentação das ferramentas.

Logo, a primeira iteração está concluída. Agora com auxílio da ferramenta reta perpendicular, selecione o ponto B e o eixo x . Esta reta tem interseção com o polinômio no ponto C , encontrado utilizando a ferramenta intersecção. Para finalizar, a segunda iteração, traçamos a reta tangente ao polinômio que passa pelo ponto C e a interseção dessa reta tangente com o eixo x é o ponto D . Substituindo o ponto D na caixa de texto, notamos que estamos cada vez mais perto da raiz, dado que o erro está novamente diminuindo.

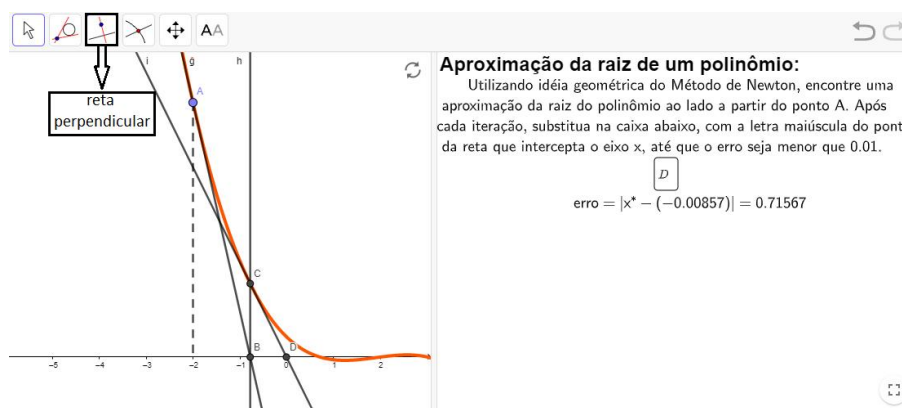


Figura 17 – Applet após 2 interações

Após quatro iterações o erro está menor que 0.1 e automaticamente aparecerá uma caixa de texto informando que se está próximo do resultado. Porém, devemos realizar mais iterações com auxílio do zoom para que o erro seja menor que 0.01, conforme Figura 18.

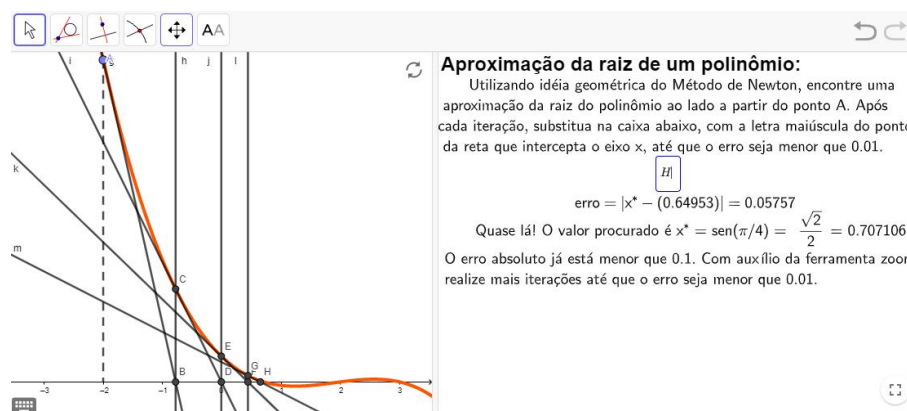


Figura 18 – Applet após 4 iterações.

Importante para o professor que esteja realizando a atividade, caso haja interesse dos alunos, realizar mais iterações e mostrar que mesmo que você aproxime com zoom muitas vezes, os pontos sempre vão estar cada vez mais perto um do outro e em algum momento o computador não conseguirá realizar os cálculos com precisão. Porém, quando chegar a este ponto, você já terá uma ótima aproximação. Necessitamos de mais uma iteração no applet para que o erro seja menor que o solicitado de 0.01, como mostra a Figura 19.

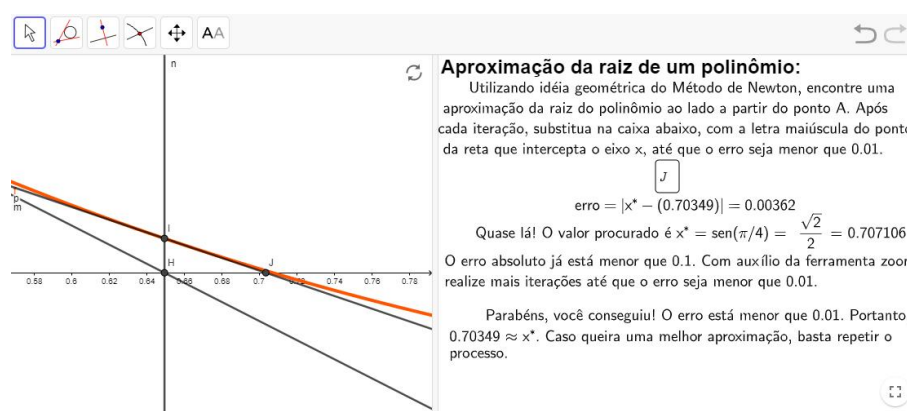


Figura 19 – Applet após 5 iterações.

3.5 MÉTODO DE NEWTON - DERIVADA

A proposta didática, como comentado na introdução deste capítulo, foi produzida para alunos do ensino médio. Portanto, na terceira seção do livro dinâmico é apresentado através de um vídeo. [Video Derivada](#)⁴ como se calcula a derivada de um polinômio. Lembramos que polinômios é conteúdo do currículo do ensino médio. A fórmula fechada para encontrar derivada é a Equação (11), logo o aluno tem condições de calcular.

Além da parte teórica da derivada, essa seção do livro dinâmico é composta por atividades para o aluno calcular a derivada de um polinômio e valor numérico do mesmo,

⁴ O vídeo por ser acessado em https://www.youtube.com/watch?v=MVAXxLw08_U

além de um applet com a relação entre o coeficiente angular de uma reta tangente ao polinômio e a sua derivada, como mostra a Figura 20.

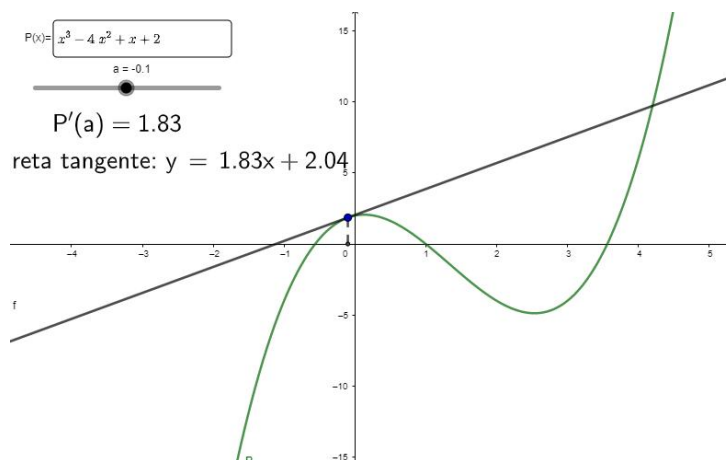


Figura 20 – Reta tangente ao ponto $(a, P(a))$.

Aluno ou professor podem alterar o polinômio que está na caixa de texto, modificando assim automaticamente o gráfico e utilizar o controle deslizando a , para visualizando que o coeficiente angular da reta tangente é igual ao valor numérico da derivada no ponto de tangência; veja Figura 21.

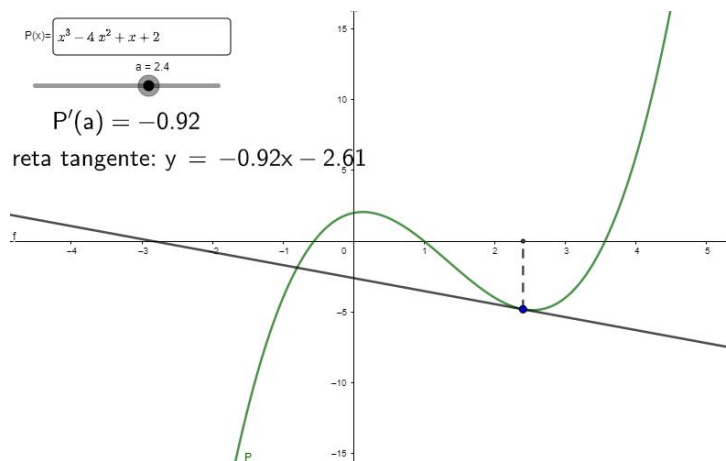


Figura 21 – Reta tangente ao ponto $(a, P(a))$.

Ao final da seção o aluno deve responder duas perguntas com feedback automático sobre o capítulo descritas na Figura 22. Tais perguntas tem o intuito de preparar o aluno para atividade final, pois o mesmo repetirá as etapas produzidas até aqui.

Calcule a derivada do seguinte polinômio:

$$P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$$

Assinale a sua resposta aqui

- $P'(x) = 6x^2 - 8x - 1$
- $P'(x) = 6x^2 - 8x + 2$
- $P'(x) = -3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Coefficiente angular da reta tangente:

Sendo $P(x) = -2x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ e sua derivada $P'(x) = -8x^3 + 9x^2 - 2$, o valor do coeficiente angular da reta tangente a gráfico de $P(x)$ no ponto de abscissa igual a 2 é:

Assinale a sua resposta aqui

- $P'(2) = -30$
- $P'(2) = 10$
- $P'(2) = -15$

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Figura 22 – Perguntas finais sobre derivadas de um polinômio.

3.6 MÉTODO DE NEWTON - ATIVIDADE FINAL

Para conclusão do livro dinâmico, deverá ser respondido uma sequência de perguntas que equivalem ao processo iterativo do método de Newton para encontrar uma aproximação das raízes do polinômio $P(x) = -2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ com ponto inicial $x_0 = -1$ e tolerância 0.01. As perguntas constam nas Figuras 23, 24 e 25.

Primeiro o aluno deve calcular $P(-1)$, pois, o ponto $(-1, P(-1))$ é por onde a reta será tangente ao polinômio P e como para encontrar a reta tangente é preciso do coeficiente angular, o aluno deve calcular a derivada do polinômio e para finalizar o terceiro passo, o valor de $P'(-1)$.

1º Passo:

Calcule o valor de $P(-1)$

Digite sua resposta aqui...

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

2º Passo:

Calcule a derivada do polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

Assinale a sua resposta aqui

- $P'(x) = 6x^2 - 8x - 3$
 $P'(x) = 5x^3 - 4x^2 - 2$
 $P'(x) = -3x^2 - 4x + 2$

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

3º Passo:

Calcule o valor de $P'(-1)$

Digite sua resposta aqui...

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Figura 23 – Atividade final 1º, 2º e 3º passo.

Para realizar a primeira iteração é preciso calcular o valor de x_1 e então substituir os valores encontrados nos passos 1º, 2º e 3º em $x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$. Com esse valor x_1 , o aluno subtrai em módulo de x_0 , e verá que $|x_1 - x_0|$ é maior que a tolerância dada. Estes são os passos 4º e 5º. Para a segunda iteração, é necessário calcular $P(x_1)$ e $P'(x_1)$ e substituir em $x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)}$. O aluno deve repetir o processo até que $|x_n - x_{n-1}| < 0.01$.

4º Passo:

Calcular x_1 pela fórmula $x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{P'(x_0)}$ com os valores encontrados nas questões anteriores.

Assinale a sua resposta aqui:

$x_1 = 0.541251$

$x_1 = -0.818181$

$x_1 = -0.678644$

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

5º Passo:

Calcular o erro $|x_1 - x_0|$

Digite sua resposta aqui...

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

6º Passo:

Como o erro **0.181819** é maior que a tolerância dada 0.01, calcule x_2 a partir de $x_1 = -0.818181$ seguindo os mesmos passos anteriores.

Digite sua resposta aqui...

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Figura 24 – Atividade final 4º, 5º e 6º passo.

7º Passo:

Como o erro **0.04216** é maior que a tolerância dada 0.01, x_3 a partir de $x_2 = -0.776055$

Digite sua resposta aqui...

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

8º Passo:

Como o erro **0.002295** é menor que a tolerância dada, calcule $P(-0.773760)$ onde -0.773760 é uma aproximação da raiz da função

Digite sua resposta aqui...

✓ VERIFIQUE SUA RESPOSTA

Figura 25 – Atividade final 7º e 8º passo

Ao final dessa atividade, esperamos que os alunos possam ter alcançado os objetivos

propostos e quebrar um paradigma que tenho observado no meu período de docência, sobre a solução de um problema, sempre esperar que seja um número inteiro ou pela matemática ser uma ciência considerada exata, há necessidade do valor encontrado ser exatamente o valor procurado. Tendo em vista, que a sequência formada pelo algoritmo do método de Newton, não nos dar o real valor, mas sim uma ótima aproximação.

4 CONCLUSÃO

Esta dissertação teve como objetivo apresentar uma alternativa para encontrar o zero de um polinômio a partir de métodos iterativos para o ensino básico através de uma proposta didática para ser aplicada com alunos do ensino médio. Para o embasamento teórico e a compreensão dos métodos, enunciámos e demonstramos teoremas revelantes de Análise e apresentamos também a teoria de convergência dos métodos da bissecção e de Newton.

Durante o período das aulas do mestrado e a escrita da dissertação, trabalhei em uma rede de ensino com formato “terceirão” para o ensino médio: no decorrer dos dois primeiros anos são trabalhados todos os conteúdos pertinentes a este nível de ensino e no terceiro ano é feita uma revisão dos dois primeiros anos. Tive a oportunidade de ministrar os conteúdos de Polinômios e Geometria analítica, para quatro turmas distintas e em cidades diferentes, e apresentei para todas as turmas os métodos iterativos presente neste trabalho. Entretanto, não o fiz com às quatro aulas de 45 minutos conforme sugestão de nossa proposta didática, já que o cronograma que recebo é bastante rígido. Porém, alguns feriados fizeram ser possível proporcionar esta atividade com uma turma, não dando foco para representação da derivada de um polinômio, mas sim para a interpretação geométrica do método de Newton.

Quando comento que os métodos iterativos convergem para uma aproximação (em geral, não inteira) do zero de uma função, notei uma desafeição nos alunos em aceitar este valor como solução, já que o polinômio que procuramos os zeros tinham sido resolvido em aulas anteriores e suas raízes eram números inteiros. Esse desconforto considero, em partes, falha nas minhas aulas, pois, embora seja comum que grande parte das simulações de experimentos ou modelagem matemática, os valores envolvidos não são números inteiros, em geral os exemplos trabalhados em sala são somente com números inteiros. Também pude perceber o interesse maior pelos alunos que já realizaram algum curso na área da computação, me perguntando qual linguagem computacional é utilizada nos algoritmos.

Portanto, deixamos aqui nossa sugestão de que é possível trabalhar com métodos iterativos durante o ensino básico, aos professores que se disponibilizarem a estudar com seus alunos, inclusive com os materiais didáticos fornecidos nesta dissertação. Espera-se que com a proposta de um novo ensino médio e com habilidades da BNCC relacionadas a algoritmos, linguagens de programação, implementação e raciocínio lógico, se dê mais espaço nos currículos para assuntos relacionados à matemática aplicada e computacional, caso em que as contribuições deste trabalho serão de grande valia.

REFERÊNCIAS

- ALVES, Carlos J. S. **Fundamentos de Análise Numérica I**. Lisboa, PT: AEIST, 2002.
- ASSIM, Marlon Péricles da Silva. **Aproximações de raízes de funções polinomiais através de métodos numéricos iterativos**. 2020. Dissertação de mestrado – PROFMAT/UFAL, Maceió, AL.
- BELLEMAIN, F. Geometria Dinâmica: diferentes implementações, papel da manipulação direta e usos na aprendizagem. *In*: 1. INTERNATIONAL Conference on Graphics Engineering for Arts and Design. São Paulo , SP: [s.n.], 2019. p. 1314–1329.
- BELLEMAIN, F.; CORREIA, A. Geometria dinâmica: Fundamentos epistemológicos. *In*: 4º Congresso Nacional e 1º Encuentro Internacional de Profesores e Investigadores del Área de expresión Gráfica. Rosario, Argentina: [s.n.], 2004.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 11 set. 2020.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) Parte III**. Brasília, DF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>.
- BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Álgebra Numérica**. São Paulo, SP: CENGAGE Learning, 2008.
- CAMPOS FILHO, Frederico F. **Algoritmos numéricos**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2007.
- COURANT, Richard. **Cálculo Diferencial e integral I**. Porto Alegre, RS: Editora Globo, 1970.
- DUVAL, Raymond. **Ver e Ensinar a Matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo, SP: PROEM, 2011. v. 1.
- ELEVA EDUCAÇÃO, Sistema de ensino. **Ensino Médio Matemática**. Rio de Janeiro - RJ: Editora Eleva, 2019.
- JORDAN, Pâmella Almeida Quintino Jordan. **Noções sobre métodos numéricos determinísticos e probabilísticos**. 2015. Dissertação de mestrado – PROFMAT/UFG, Goiânia, GO.
- KAUFMAN JR, Edwin H.; LENKER, Terry D. Linear Convergence and the Bisection Algorithm. **The American Mathematical Monthly**, v. 1, n. 1, p. 48–51, 2018.

- LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. 7. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012. v. 1.
- MEIRELLES, S. Fernando. **Uso da TI - Tecnologia de Informação nas Empresas**. São Paulo, SP: FGVcia, 2021.
- NÓBRIGA, Jorge Cássio; SIPLE, Ivanete Zuchi. **Livros Dinâmicos de Matemática**. São Paulo, SP: Revisa Instituto São Paulo GeoGebra, 2020.
- NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. Demonstrações Matemática Dinâmicas. **REVEMAT**, v. 15, n. 1, p. 1–21, 2019.
- ORTEGA, James M; RHEINBOLDT, Werner C. **Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables**. First. Philadelphia, PA: SIAM, jan. 2000. (Classics in Applied Mathematics). ISBN 0-89871-461-3.
- POLIEDRO, Sistema de ensino. **Pré-vestibular Matemática**. São José dos Campos - SP: Editora Poliedro, 2015.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Rio de Janeiro, RJ: ZAHAR, 2012.
- RUGGIERO, Marcia A. G.; LOPES, Vera L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo, SP: Makron, 1997.
- SANTOS, Janio Cesar Alencar dos Santos. **O método de Newton-Raphson na solução da equação $2^x = x^2$: Uma motivação para o Estudo da Existência de Logaritmo de Números Negativos**. 2018. Dissertação de mestrado – PROFMAT/UFG, Catalão, GO.
- SOUZA, Angelo Márcio. **Utilizando o jogo Euclidea e demonstrações dinâmicas no Geogebra para o ensino de construções geométricas**. 2018. Dissertação de mestrado – PROFMAT/UEM, Maringá PR.
- SOUZA, Renato Carneiro. **Equações Algébricas: Estudos e Sala de Aula**. 2017. Dissertação de mestrado – PROFMAT/UFOP, Ouro Preto, MG.
- SPERLING, Marcos Von. **Introdução à qualidade das águas e ao tratamento de esgotos**. Belo Horizonte, MG: Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental, 1996.
- TERRA, Gláucio. **Fórmula de Taylor - Notas Complementares ao Curso de Cálculo I**. São Paulo: IME/USP, 2011. Notas de aula. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~glaucio/textos/FormulasDeTaylor.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2021.

APÊNDICE A – TEOREMAS IMPORTANTES PARA CÁLCULO NUMÉRICO E POLINÔMIO DE TAYLOR

Para que os métodos numéricos que são abordados nesse trabalho façam sentido e estejam bem definidos matematicamente, ou ainda que convirjam para uma solução do problema (1), é preciso elencar definições e resultados que servem como alicerce das demonstrações, tanto para garantir que os métodos funcionem quanto que estes convirjam. Alguns resultados do cálculo diferencial são primordiais para estas tarefas por isso serão apresentados neste capítulo. Inclusive, é comum encontrarmos nos currículos dos cursos de graduação em Matemática no Brasil os métodos numéricos reunidos na disciplina *Cálculo Numérico*. Em particular, os Teoremas do Valor Intermediário e de Taylor com Resto de Lagrange serão utilizados no Capítulo 2 para formalmente estruturar o Método da Bisseção e o Método de Newton, respectivamente, para os quais as demonstrações se encontram na íntegra.

A.1 RESULTADOS SOBRE SEQUÊNCIAS

Aqui são lembrados resultados sobre sequências de números reais baseado em Lima (2012), dada a importância deste assunto para determinarmos aproximações para o zero de uma função, uma vez que estudaremos algoritmos iterativos que geram sequências que convergem, pelo menos em princípio, para zeros da referida função.

Uma *sequência de números reais* é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado de n -ésimo termo dessa sequência. Neste trabalho, usaremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para representar a sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.

Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é *limitada superiormente* quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De modo análogo, a sequência é *limitada inferiormente* se $x_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que uma sequência é *limitada* quando for limitada inferiormente e superiormente, o que é equivalente a dizer que $|x_n| \leq c$, para algum $c > 0$.

Segundo Roque (2012, p.407), para Leibniz

Duas quantidades são iguais quando a diferença entre elas se torna menor que qualquer quantidade dada. Ou seja, a noção primordial é a de diferença, sendo a igualdade compreendida como um caso particular quando a diferença se torna insignificante.

Logo, em Métodos Numéricos, é importante observar que tal conceito pode ser relaxado de modo que considera-se que dois valores estão suficientemente próximos quando a diferença entre estes é menor que uma condição inicial, chamada de *tolerância*.

As próximas definições serão primordiais neste trabalho.

Definição A.1 (Limite de uma sequência). *Para que um número real a seja o limite de uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é necessário e suficiente que para todo real $\epsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$,*

tais que todos os termos x_n com $n \geq n_0$ respeitem a desigualdade

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Uma sequência que tem limite é chamada convergente.

Definição A.2 (Sequência de Cauchy). Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \text{ para todo } m, n \geq n_0.$$

Então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

O resultado abaixo estabelece que toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.

Teorema A.3 (Sequência de Cauchy e convergência). Toda sequência de números reais é convergente se, e somente se, é sequência de Cauchy.

Demonstração. Veja [Lima \(2012, Teorema 13 p. 99\)](#). □

A.1.1 Erro de aproximação

Os objetivos deste trabalho estão relacionados com o ensino de algoritmos na educação básica, possivelmente algoritmos programados em computadores. Estes computadores usam aritmética de ponto flutuante ([CAMPOS FILHO, 2007](#); [ORTEGA; RHEINBOLDT, 2000](#); [RUGGIERO; LOPES, 1997](#)). Desta forma, é impossível usarmos um algoritmo numérico programado em computador e não termos erros de aproximação. Todo e qualquer resultado é tipicamente aproximado. É desejável que tais erros sejam aceitáveis e pequenos. Para tanto, de modo geral, vamos considerar dois tipos de erros. O primeiro é o *erro absoluto* E_A que é um quantificador que nos dá a diferença entre o valor verdadeiro x^* e uma aproximação \bar{x} , isto é.

$$E_A = |x^* - \bar{x}| \tag{12}$$

O segundo é o *erro relativo* E_R , que é a porcentagem que o valor verdadeiro x^* difere da aproximação \bar{x} , dada por

$$E_R = \frac{|x^* - \bar{x}|}{|x^*|}, \tag{13}$$

em que consideramos $x^* \neq 0$.

Em resumo, para valores muito grandes, o erro absoluto poderá ser um número expressivo, mas em relação ao valor verdadeiro poderá ser insignificante. O exemplo abaixo ilustra esta situação.

Exemplo A.1 (Aproximação de Stirling). Considere a sequência de Stirling dada por

$$x_n := \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Conforme [Courant \(1970, p. 361\)](#), x_n é uma aproximação de $n!$. Na [tabela 6](#), apresentamos os 10 primeiros elementos da sequência de Stirling e o respectivo valor de $n!$. Além disso, mostramos E_A e E_R , para cada iteração, em que, na iteração n , consideraremos $n!$ como o valor verdadeiro x^* e o elemento x_n da sequência o valor aproximado \bar{x} , nas definições dos erros absoluto e relativo.

Tabela 6 – Sequência de Stirling.

n	$n!$	x_n	E_A	E_R
1	1	0.92214	0.077863	0.0778630
2	2	1.919	0.080996	0.0404980
3	6	5.8362	0.16379	0.0272980
4	24	23.5060	0.49382	0.0205760
5	120	118.020	1.9808	0.0165070
6	720	710.08	9.9218	0.0137800
7	5040	4980.4	59.604	0.0118260
8	40320	39902	417.6	0.0103570
9	362880	359540	3343.1	0.0092128
10	3628800	3598700	30104	0.0082960

Note que, na décima interação, o erro absoluto é 30104 mas em relação ao $10! = 3628800$ representa um erro relativo de 0.8%, dependendo da situação em questão, pode ser considerado um erro aceitável.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais convergente cujo limite é x^* , com o valor de x^* desconhecido, não conseguimos usar as definições de E_A e E_R dadas em [\(12\)](#) e [\(13\)](#) para verificar se estamos perto o suficiente de x^* . Porém, pelo [Teorema A.3](#), $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, isto é, para um ϵ suficientemente pequeno, isto para uma tolerância ϵ , tem-se que a sequência satisfaz $|x_{m+1} - x_m| < \epsilon$ para m maior que algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Isto significa que os pontos consecutivos dessa sequência estão ficando cada vez mais próximos. Desta forma, para m suficientemente grande x_{m+1} (e também x_m) estão cada vez mais próximos de x^* . Logo, usaremos o erro absoluto em relação a Cauchy

$$e_A = |x_{m+1} - x_m|$$

e erro relativo e_R em relação a Cauchy

$$e_R = \frac{|x_{m+1} - x_m|}{|x_{m+1}|},$$

desde que $x_{m+1} \neq 0$.

A.1.2 Velocidade de convergência

Suponha uma sequência convergente. O quão rápido tal sequência converge? Podemos ter duas sequências de números reais distintas que convergem para o mesmo limite,

porém, uma delas necessitando de uma quantidade menor de termos para estar perto suficiente do limite da sequência. Por exemplo, as sequências $(2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(n^{-2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergem ambas para 0, entretanto, a última chega mais rápido do ponto de convergência do que a primeira. Para de fato medir esta velocidade, introduzimos a seguinte definição.

Definição A.4 (Convergência linear e quadrática). *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais que converge para x^* . Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem:*

(i) *velocidade de convergência linear se existir uma constante $0 < \rho < 1$ tal que*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \rho |x_n - x^*|,$$

para todo n suficientemente grande;

(ii) *velocidade de convergência quadrática se existir uma constante $M > 0$ tal que*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M |x_n - x^*|^2,$$

para todo n suficientemente grande.

Note que se uma sequência tem convergência quadrática significa que esta converge mais rapidamente para o limite da sequência do que se fosse linear, pois $|x_n - x^*|$ é um número muito pequeno para um n suficientemente grande, elevar esse número ao quadrado, nos dá um número menor ainda. Portanto, o termo x_{n+1} estará mais próximo de x^* , já que

$$x_{n+1} - x^* \leq M |x_n - x^*|^2 \leq \rho |x_n - x^*|$$

A última desigualdade também significa que convergência quadrática implica convergência linear.

A.2 RESULTADOS SOBRE FUNÇÕES

A formulação do cálculo infinitesimal ocorreu por volta dos séculos XVII e XVIII quando Newton e Leibniz trabalharam com métodos infinitesimais, Newton olhando mais para parte física de um problema e Leibniz preocupado com a formalidade da escrita matemática de um modo mais algébrico e não dependente da geometria.

A maior novidade introduzida na matemática por Newton e Leibniz reside no grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais adquiriram com seus trabalhos. Os matemáticos já tinham um enorme conhecimento sobre como resolver problemas específicos do cálculo infinitesimal, mas não se dedicaram a mostrar a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas. (ROQUE, 2012, p. 320)

Neste termos, define-se limite de uma função como segue As definições e teoremas apresentados a seguir, foram produzidos baseados em Lima (2012).

Definição A.5 (Limite de uma função). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com $x_0 \in [a, b]$. Dizemos que o limite de $f(x)$ com x tendendo para x_0 é $L \in \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon > 0$, podemos*

encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in [a, b]$ e $0 < |x - x_0| < \delta$. Representaremos tal limite por

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Definição A.6 (Função contínua). Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita contínua no intervalo $[a, b]$ quando para todo $x_0 \in [a, b]$ temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

O Primeiro teorema que iremos demonstrar por completo nesse trabalho é o *Teorema de Valor Intermediário*, o qual nos garante que se existe um d entre $f(a)$ e $f(b)$ de uma função contínua f definida em um intervalo $[a, b]$, então podemos afirmar que existe um c entre a e b de tal forma que $f(c) = d$. Podemos visualizar tal ideia na Figura A.1.

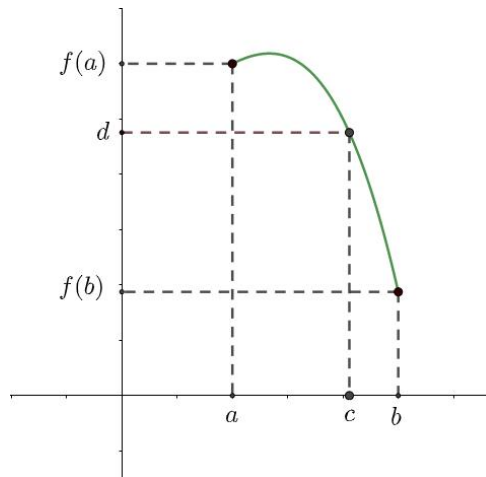


Figura A.1 – Ilustração do Teorema do Valor Intermediário.

Teorema A.7 (Teorema do Valor Intermediário). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ ou $f(a) > d > f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$

Demonstração. Será feita para o caso $f(a) < d < f(b)$, sendo de modo análogo o caso $f(a) > d > f(b)$. Como f é contínua no ponto a , dado $\epsilon := d - f(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ de tal forma que para $x \in [a, a + \delta]$ obtemos $f(x) < f(a) + \epsilon = d$. Portanto, para todos os pontos x suficientemente perto de a no intervalo $[a, b]$ tem-se que $f(x) < d$. De modo análogo, podemos ver que para todos os pontos y suficientemente perto de b no intervalo $[a, b]$ é válido de $d < f(y)$. Logo, os conjuntos $A := \{x \in (a, b) \mid f(x) < d\}$ e $B := \{y \in (a, b) \mid f(y) > d\}$ são não-vazios e disjuntos entre si. Suponha que não exista um ponto c com $a < c < b$ tal que $f(c) = d$. Então, $(a, b) = A \cup B$. Neste caso, como $A \cap B = \emptyset$ devemos ter ou $A = (a, b)$ ou $B = (a, b)$, implicando que ou A ou B é vazio, o que é uma contradição. \square

Em seguida, apresentamos o Teorema de Weierstrass que garante que em todo intervalo fechado no qual está definido uma função contínua, a função assume pelo menos

um valor mínimo e pelo menos um valor máximo. Uma ilustração desse teorema pode ser observada na Figura A.2.

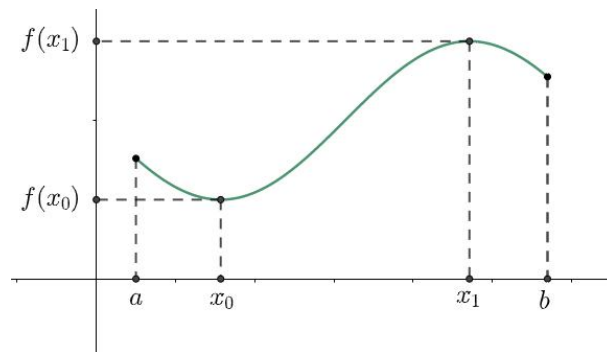


Figura A.2 – Ilustração do Teorema de Weierstrass.

Fato A.8 (Teorema de Weierstrass (LIMA, 2012, p. 212)). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Existem $x_0, x_1 \in [a, b]$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in [a, b]$. Neste caso, x_0 é um minimizador de f e x_1 é um maximizador.*

Passaremos a enumerar alguns teoremas que se baseiam na ideia de derivada de uma função. Em geral, nos cursos de Cálculo Diferencial, a noção de derivada é apresentada após a definição de função real f . Porém, o conceito de função escrita da forma que temos hoje, em ordem cronológica, foi dada após a formulação da derivada; para uma discussão mais aprofundada veja Roque (2012, Cap. 6)

A derivada de uma função é o limite da razão entre a diferença de respectivas coordenadas de dois pontos arbitrariamente perto, sendo cada diferença dada simbolicamente por: dx , na coordenada x ; e por dy , na coordenada y . Tal razão (derivada) nós dá uma noção do quão rápido o gráfico dessa função está crescente ou decrescente e conseguimos inclusive encontrar (caso exista) o ponto em que a função transita entre crescente e decrescente. Este ponto de transição tem derivada é nula, pois, não há variação na coordenada y (LIMA, 2012, p. 209). Outra forma de enxergar a derivada é que ela permite computar a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico da função f (LIMA, 2012, p. 200). Notamos que, neste trabalho, esta propriedade será suma importância, pois, o Algoritmo de Newton 2 pode ser entendido geometricamente através do conceito de reta tangente ao gráfico de uma função.

Um exemplo de como encontrar a derivada usando noção de cálculo infinitesimal dado por Roque (2012) é reproduzida em sequência.

O cálculo leibniziano empregava as chamadas “diferenciais”, designadas na notação de Leibniz por dx e dy . Tais quantidades eram utilizadas nos cálculos como quantidades auxiliares, e com êxito. Por exemplo, para encontrar a derivada a uma curva de equação $y = x^2$, era preciso tomar a diferença entre as ordenadas de dois pontos vizinhos (x, x^2) e $(x + dx, (x + dx)^2)$ sobre essa curva. (ROQUE, 2012)

A seguir apresentamos a ideia formal de função diferenciável, comparando com a citação acima, o ponto $(x_0, f(x_0))$ é o ponto vizinho de $(x, f(x))$ e com auxílio da Definição

A.5, do limite de uma função, aproximamos o valor de x para x_0 , para que a diferença $|x - x_0|$ seja arbitrariamente pequena.

Definição A.9 (Função diferenciável). *Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é dita diferenciável no intervalo, quando para todo $x_0 \in [a, b]$ existir o limite*

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

O número $f'(x_0)$ é denominado derivada da função f em x_0 .

As definições de função contínua e derivável em um intervalo, podem ser interpretadas geometricamente com o fato que é possível desenhar seu gráfico com um lápis em uma folha sem que a ponta do lápis deixe de ter contato com a folha uma única vez (continuidade) bem como este desenho não apresentará nenhum bico (diferenciabilidade). Por conta disso, no caso de funções diferenciáveis, sempre é possível determinar uma reta tangente ao gráfico da função, para todo ponto no intervalo. Inclusive, para um ponto x_0 em que f seja diferenciável, $f'(x_0)$ representa exatamente a inclinação da reta tangente à f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Um fato importante para o estabelecimento dos métodos numéricos estudados neste trabalho é o Teorema de Rolle. Tal resultado nos diz que, se dois pontos diferentes do domínio de uma função têm seus valores funcionais com a mesma altura em relação ao eixo x , então entre esses dois pontos existe pelo menos um outro ponto cuja reta tangente é paralela ao eixo x . A Figura A.3 apresenta uma ilustração deste fato. Enunciamos esse teorema através do seguinte fato.

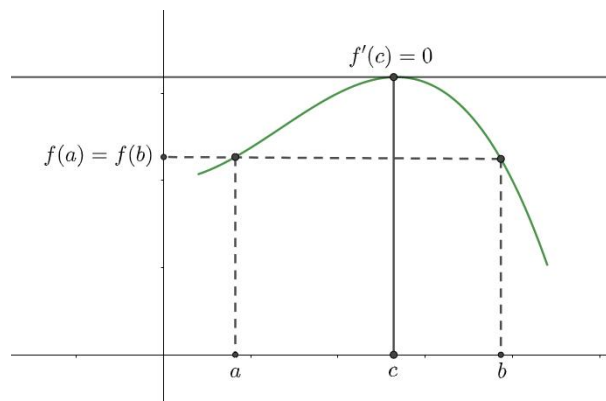


Figura A.3 – Ilustração do Teorema de Rolle.

Fato A.10 (Teorema de Rolle (LIMA, 2012, p. 212)). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$*

Finalmente, apresentamos o Teorema do valor médio de Lagrange. Aqui temos uma função contínua e derivável em um intervalo. Isto implica que existe uma reta tangente ao gráfico da função em um ponto, no intervalo, paralela à reta secante a função nos pontos

de extremidade do intervalo. O fato seguinte formaliza essa ideia, que está representada na Figura A.4

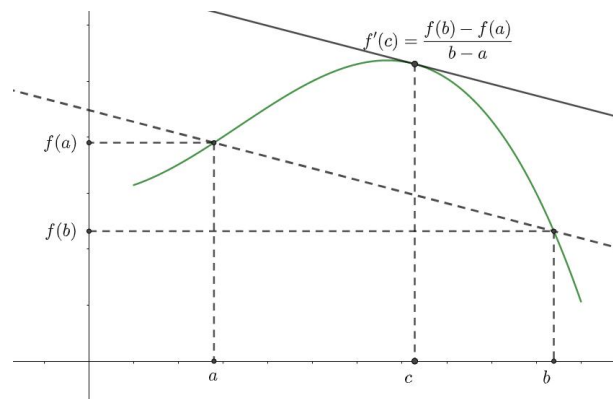


Figura A.4 – Ilustração do Teorema do Valor Médio de Lagrange.

Fato A.11 (Teorema do Valor Médio de Lagrange (LIMA, 2012, p. 213)). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é diferenciável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A.2.1 Polinômio de Taylor

Apresentamos a seguir o Polinômio de Taylor, que será primordial para as demonstrações de convergência e de velocidade de convergência quadrática do Método de Newton.

Seja uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até ordem n numa vizinhança do ponto $(x_0, f(x_0))$ com $x_0 \in [a, b]$. O Teorema de Taylor garante que existe um único polinômio de grau menor ou igual a n para o qual todas as derivadas no ponto de abscissa x_0 são equivalentes às derivadas de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Tal polinômio será denominado *polinômio de Taylor* e tem sua definição formal dada a seguir segundo (TERRA, 2011)

Definição A.12 (Polinômio de Taylor). *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$ tais que f é derivável até de ordem n , portanto o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é o polinômio*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Com efeito, a unicidade do *polinômio de Taylor* será provada considerando que P é a função polinomial de grau menor ou igual a n , que está mais próxima de f no sentido de que a função $R : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ e denominada resto, tem característica que $R_n(x)$ tende a zero mais rapidamente do que $(x - x_0)^n$, o que é equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Provaremos o teorema de Taylor com auxílio do próximo lema.

Lema A.13 (Terra (2011, p. 7)). *Seja $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in [a,b]$.*

(i) *Se f é derivável e R_1 for diferença entre f e o seu polinômio de Taylor de ordem 1 na vizinhança de x_0 , então*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0$$

(ii) *Reciprocamente, se P for uma função polinomial de grau menor ou igual a 1 e $R = f - P$ satisfazer*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Então f é derivável em x_0 e P é o Polinômio de Taylor de ordem 1 de f em x_0

Demonstração. (i) Assumimos que f é derivável em x_0 e então

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Portanto

$$R_1(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

em que na segunda igualdade utilizamos a Definição A.12 do polinômio de Taylor de ordem 1, ou seja, que $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Dividindo ambos os lados da última equação por $x - x_0 \neq 0$ e aplicando limite de x tendendo a x_0 temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f'(x_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que nos dá o item (i).

(ii) Reciprocamente, seja $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de primeiro grau tal que $P(x) = a(x - x_0) + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e considere $R(x) = f(x) - P(x)$, para todo $x \in [a,b]$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$. Em particular, $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$. Como f e P são contínuas, R é contínua e logo $R(x_0) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} R(x) &= f(x) - P(x) \\ &= f(x) - a(x - x_0) - b. \end{aligned}$$

Substituindo x por x_0 na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} R(x_0) &= f(x_0) - a(x_0 - x_0) - b \\ 0 &= f(x_0) - b. \end{aligned}$$

e concluindo que $f(x_0) = b$. Logo,

$$R(x) = f(x) - a(x - x_0) - f(x_0).$$

Dividindo ambos os lados da igualdade acima por $x - x_0 \neq 0$ e aplicando limite de x tendendo a x_0 obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{a(x - x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Então $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$ e logo f é derivável em x_0 . Por fim, $P(x) = f(x_0) + a(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, isto é, P é o polinômio de Taylor de ordem 1 de f no ponto x_0 . \square

A seguir é apresentado o *Teorema Polinômio de Taylor de ordem n , com resto infinitesimal*, dentre os polinômios de Taylor que serão demonstrados no decorrer desse capítulo, o com resto infinitesimal é o mais singelo, pois exige que a função seja somente n vezes diferenciável em torno de x_0 , porém não necessariamente o mais trivial de ser aplicado.

Teorema A.14 (Polinômio de Taylor de ordem n , com resto infinitesimal (TERRA, 2011, p. 7)). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n - 1$ vezes derivável e que $f^{(n-1)}$ seja derivável em $x_0 \in [a, b]$. Então valem as seguintes afirmações.*

(i) *Se R_n é a diferença entre f e o seu polinômio de Taylor de ordem n na vizinhança de x_0 , então*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

(ii) *Reciprocamente, se P for uma função polinomial de grau menor ou igual a n e $R = f - P$ satisfizer*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

então P é o Polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0 .

Demonstração. Será feita por indução sobre n . O caso $n = 1$ é exatamente o Lema A.13. Suponha agora (i) e (ii) sejam válidas para $n \leq k - 1$ com $k \geq 2$. Provaremos que também serão verdadeiras para $n = k$.

Item (i) para todo $x \in [a, b]$, por hipótese $R_k(x) = f(x) - P_k(x)$. Portanto, $R_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável e

$$\begin{aligned}
 R'_k(x) &= f'(x) - P'_k(x) \\
 &= f'(x) - \frac{d}{dx}(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k) \\
 &= f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}2(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x - x_0)^{k-1} \\
 &= f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} \\
 &= f'(x) - (f')(x_0) - (f')'(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{(f')^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} \\
 &= f'(x) - \hat{P}_{k-1}(x) \\
 &= \hat{R}_{k-1}(x),
 \end{aligned}$$

em que \hat{P}_{k-1} é o polinômio de Taylor de ordem $k - 1$ em torno de x_0 da função f' e $\hat{R}_{k-1}(x)$ é a função resto respectiva. Usando a hipótese de indução, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_k(x)}{(x - x_0)^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\hat{R}_{k-1}(x)}{(x - x_0)^{k-1}} = 0.$$

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow x_0} R_k(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^k = 0$, a regra de L'Hôspital se aplica e obtemos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_k(x)}{(x - x_0)^{k-1}} = 0,$$

Item (ii) suponha $f(x) = P(x) + R(x)$ para todo $x \in [a, b]$, com o grau do polinômio P menor ou igual a k e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^k} = 0$. Mais que isto, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^m} = 0$ para $0 \leq m \leq k$. Sejam $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ os coeficientes do polinômio P de tal forma que

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_{k-1}(x - x_0)^{k-1} + a_k(x - x_0)^k.$$

Definimos o polinômio \hat{P} dado por $\hat{P}(x) := P(x) - a_k(x - x_0)^k$ com grau estritamente menor que k . Portanto

$$f(x) - \hat{P}(x) = a_k(x - x_0)^k + R(x). \tag{14}$$

Temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \hat{P}(x)}{(x - x_0)^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_k(x - x_0)^k + R(x)}{(x - x_0)^{k-1}} = 0$$

e pela hipótese de indução \hat{P} é o polinômio de Taylor de ordem $k - 1$ de f em uma vizinhança de x_0 , isto é $a_\ell = \frac{f^{(\ell)}(x_0)}{\ell!}$ para $0 \leq \ell \leq k - 1$. Segue que

$$\hat{P}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1}.$$

Falta-nos somente mostrar que $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ e para isso devemos demonstrar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \hat{P}(x)}{(x - x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq j \leq k - 2$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f^{(j)}(x) - \hat{P}^{(j)}(x) \right] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f^{(j)}(x) - \frac{d}{dx^j} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots - \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{(k-1)} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f^{(j)}(x) - f^{(j)}(x_0) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{f^{(k+1-j)}(x_0)}{(k+1-j)!} (x - x_0)^{(k+1-j)} \right] \\ &= f^{(j)}(x_0) - f^{(j)}(x_0) - 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

e o

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d}{dx^j} \left[(x - x_0)^k \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} k(k-1) \dots (k-j+1)(x - x_0)^{j-k} = 0.$$

Além disso, $\hat{P}^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x_0)$. Por hipótese $f^{(k-1)}$ é diferenciável, logo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k-1)}(x) - \hat{P}^{(k-1)}(x)}{k!(x - x_0)} = \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(x_0)}{(x - x_0)} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!(x - x_0)}.$$

Por fim, aplicando a regra de L'Hôpital $(k-1)$ vezes em $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \hat{P}(x)}{(x - x_0)^k}$ temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \hat{P}(x)}{(x - x_0)^k} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(x_0)}{k!(x - x_0)} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!(x - x_0)}.$$

Por outro lado, pela Equação (14)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \hat{P}(x)}{(x - x_0)^k} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a_k(x - x_0)^k + R_k(x)}{(x - x_0)^k} = a_k + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_k(x)}{(x - x_0)^k} = a_k + 0 = a_k.$$

Pela unicidade do limite, obtemos $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Logo P é o polinômio de Taylor de ordem k de f em x_0 , o que finaliza a demonstração. \square

Por fim o *Teorema Polinômio de Taylor de ordem n , com resto Lagrange*, é de fácil aplicação comparado ao Polinômio com resto infinitesimal, porém necessita que a função seja $(n+1)$ vezes diferenciável numa vizinhança de x_0 e também é uma generalização Teorema do Valor Médio (Fato A.11).

Teorema A.15 (Polinômio de Taylor de ordem n , com resto de Lagrange). *Seja $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até ordem $n + 1$ e considere $x_0, x \in [a,b]$. Então existe ξ entre x_0 e x tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Demonstração. Suponha $x_0 < x$. Para o caso $x < x_0$ a demonstração se dá de modo análogo. Definimos $F : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(y) := f(x) - \left(f(y) + \frac{f'(y)(x - y)}{1!} + \frac{f''(y)(x - y)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(y)(x - y)^n}{n!} \right) - \alpha(x - y)^{n+1},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ escolhido de tal forma que $F(x_0) = 0$. Como f é contínua e derivável no intervalo $[a,b]$, pois todas as derivadas de ordem menor ou igual a n são contínuas em $[a,b]$ pela hipótese, temos que F também será derivável e contínua em $[x_0, x] \subset [a,b]$, e $F(x) = F(x_0) = 0$. Pelo Teorema A.10 (de Rolle), existe $\xi \in (x_0, x)$ de tal forma que $F'(\xi) = 0$. Derivando F em relação y temos

$$\begin{aligned} F'(y) &= 0 - f'(y) - f''(y)(x - y) + f'(y) - \frac{f'''(y)(x - y)^2}{2!} + \frac{2f''(y)(x - y)}{2!} - \dots - \\ &\quad - \frac{f^{(n+1)}(y)(x - y)^n}{n!} + \frac{nf^{(n)}(y)(x - y)^{(n-1)}}{n!} + (n+1)\alpha(x - y)^n \\ &= -f'(y) - f''(y)(x - y) + f'(y) - \frac{f'''(y)(x - y)^2}{2!} + f''(y)(x - y) - \dots - \\ &\quad - \frac{f^{(n+1)}(y)(x - y)^n}{n!} + \frac{f^{(n)}(y)(x - y)^{(n-1)}}{(n-1)!} + (n+1)\alpha(x - y)^n \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(y)(x - y)^n}{n!} + (n+1)\alpha(x - y)^n. \end{aligned}$$

Usando os fatos de que $F'(\xi) = 0$ e $\xi \neq x$ na igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n}{n!(n+1)(x - \xi)^n} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Logo

$$0 = F(x_0) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \right) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Isolando $f(x)$ na equação acima obtemos o teorema. □