UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

Conjunto dos Números Reais: Caracterização, Construção e Ensino

Outubro de 2021.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Conjunto dos Números Reais: Caracterização, Construção e Ensino

Gilderléia Bezerra Colares

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:
André Vicente (Orientador)
Fernando Pereira de Souza
Flávio Roberto Dias Silva

Cascavel, Outubro de 2021.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Bezerra Colares, Gilderléia
Conjunto dos Números Reais: Caracterização, Construção e Ensino / Gilderléia Bezerra Colares; orientador André Vicente. -- Cascavel, 2021.
79 p.

Dissertação (Mestrado Profissional Campus de Cascavel) -- Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional, 2021.

1. Conjunto dos Números Reais. I. Vicente, André, orient. II. Título.

Gilderléia Bezerra Colares

Conjunto dos Números Reais: Caracterização, Construção e Ensino

Trabalho Final de Conclusão apresentado ao Programa de pós-graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, área de concentração Ensino de matemática, linha de pesquisa Ensino básico de matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:

Orientador(a) - Prof. Dr. André Vicente

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza

Universidade Federal do mato Grosso do Sul - Campus de Três Lagos

Flávio R Dias Silva

Prof. Dr. Flávio Roberto Dias Silva

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 01 de outubro de 2021

Agradecimentos

À Deus por estar presente em todos os momentos.

Aos meus pais Gentil e Olivia, que com seu amor infinito e incondicional, construíram o ser humano que sou hoje. Especialmente meu pai, que deixou muita saudade, e continua me cuidando lá de cima.

Ao meu esposo, meu amor, Eduardo, que esteve comigo nos bons e maus momentos, me dando suporte nessa caminhada.

Ao meu orientador, professor André, pelos conselhos, pela dedicação e por me atender com paciência sempre que o busquei.

Aos professores que tive, de todos os níveis de ensino pelos quais passei, por de uma forma ou de outra me ensinarem, além de tudo o que é ser um bom professor, e com isso me fizeram amar a minha profissão.

À minha amiga Carla pelo apoio no passo inicial e por sempre me apoiar com suas palavras extremamente positivas, me ajudando a perceber meu potencial.

Aos meus colegas de viagem, pelo apoio, e por ajudarem a tornar o trajeto de Foz a Cascavel menos cansativo.

À Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela bolsa de estudos que foi de grande auxílio nestes dois anos.

Enfim, a todos que contribuíram de alguma forma com a minha jornada, a minha eterna gratidão!

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo sobre aspectos envolvendo o conjunto dos números reais. Destacamos três fatos importantes que caracterizam tal conjunto. O primeiro mostra que, associando os números racionais a pontos de uma reta, é impossível cobrir toda a reta somente com os números racionais. O segundo fato trata sobre a existência de segmentos incomensuráveis e o terceiro apresenta que o conjunto dos números racionais não é um corpo ordenado completo. Também construímos o conjunto dos números reais via cortes de Dedekind. Por último, apresentamos uma proposta de como introduzir o conceito de conjunto dos números reais para alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Números Reais; Cortes de Dedekind; Segmentos Incomensuráveis; Corpo Ordenado Completo.

Abstract

In this work we studied aspects involving the set of real numbers. We highlight three important facts that characterize this set. The first shows that, by associating rational numbers with points on a straight, it is impossible to cover the entire straight with only rational numbers. The second fact deals with the existence of incommensurable segments and the third one presents that the set of rational numbers is not a complete ordered field. We also construct the set of real numbers via Dedekind cuts. Finally, we present a proposal on how to teach the set of real numbers, for the high school students.

Key-words: Real Numbers; Dedekind Cuts; Incommensurable Segments; Complete Ordered Field.

Sumário

Introdução **13**

1 Números Racionais **15**

1.1 O conjunto dos números racionais e a Reta Real 15

1.1.1 Localização dos números naturais na Reta Real 16

1.1.2 Localização dos números inteiros na Reta Real 17

1.1.3 Localização dos números racionais na Reta Real 17

1.2 Dízimas 18

1.3 Característica 1: Impossibilidade de cobrir a Reta Real com os números racionais 20

1.4 Segmentos comensuráveis e o Teorema de Tales. 23

1.5 Corpos 27

1.6 Corpos ordenados 31

2 Números Irracionais **34**

2.1 $\sqrt{2}$ não é um número racional. 34

2.2 Característica 2: Segmentos incomensuráveis 36

2.2.1 O Teorema de Tales 39

2.3 Dízimas não periódicas e os números irracionais 39

2.4 O Número π 40

2.5 O Número e 45

2.6 Os números irracionais e a Reta Real 47

3 Construção dos Números Reais **53**

3.1 Característica 3: Corpos ordenados completos 54

3.2 Cortes de Dedekind 57

4 Densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e uma Proposta para o Ensino dos Números Reais **65**

4.1 Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ 65

4.2 Densidade de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ 67

4.3 Uma proposta metodológica 70

4.3.1 Provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional 70

4.3.2 Localização de números racionais e irracionais na Reta Real 72

4.3.3 Densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ 73

4.3.4 Definição de $\mathbb{R}$ 74

4.3.5 Porque é importante estudar o conjunto dos números reais 75

Referências Bibliográficas **77**

Introdução

Os números reais são de grande importância para a Matemática, e sua descoberta ocorreu a partir do desenvolvimento da própria Matemática. Os números reais possuem características que o diferenciam do conjunto dos números racionais. Na antiguidade, acreditava-se que a maior classe de conjuntos existente era a dos números racionais, tanto que a descoberta que haviam números que não pertencem às classes até então conhecidas causou uma crise na matemática.

Ao calcular a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário, Hipaso de Metaponto, seguidor de Pitágoras, se deparou com grandezas incomensuráveis, as quais estão associadas à existência do número $\sqrt{2}$, o primeiro número irracional descoberto. Isso representou um marco para a geometria, pois muitos resultados provados até o momento estavam apoiados no fato que quaisquer dois segmentos são sempre comensuráveis.

Neste trabalho realizamos um levantamento sobre alguns fatos envolvendo o conjunto dos números reais. Apresentamos 3 deles, os quais chamamos aqui de Característica 1, 2 e 3.

Uma maneira interessante de introduzir o conjunto dos números reais para alunos do ensino médio é associar os números à pontos de uma reta, chamada de Reta Real. A Característica 1 trata da impossibilidade de cobrir a Reta Real somente com números racionais. Portanto, isso mostra o problema de tal conjunto.

A Característica 2 trata da associação de números irracionais com segmentos incomensuráveis. É um fato que a descoberta que existem segmentos que não são comensuráveis foi um grande obstáculo na Matemática, pois muitas provas até o momento estavam baseadas no fato que quaisquer dois segmentos sempre são comensuráveis. Neste texto, para expor tal problema, apresentamos a prova do Teorema de Tales envolvendo segmentos comensuráveis e também fazemos uma breve discussão da extensão da prova para o caso de segmentos incomensuráveis.

A Característica 3 apresenta um aspecto mais teórico a respeito do conjunto dos números racionais, o fato de tal conjunto não ser completo. Esta característica não convém ser abordada no ensino médio, mas desempenha um papel importante para provar vários resultados na Matemática. Por esse motivo, à apresentaremos neste texto.

O trabalho está organizado em 4 Capítulos. No Capítulo 1, apresentamos o conjunto dos números racionais. Também introduzimos o conceito de Reta Real e localizamos os números racionais na Reta Real. Num segundo momento, introduzimos o conceito de dízimas. A Característica 1 é tratada neste Capítulo. Após isso, apresentamos a definição de segmentos comensuráveis e a prova do Teorema de Tales para este caso. Por último, verificamos que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado.

No Capítulo 2, apresentamos uma prova que $\sqrt{2}$ não é um número racional e em seguida discutimos sobre a Característica 2, descrita acima e o Teorema de Tales. Também, apresentamos o conceito de dízimas não periódicas e de números irracionais. Além disso, dedicamos duas seções aos números π e e. Finalmente, localizamos alguns números irracionais na Reta Real.

No Capítulo 3 apresentamos a construção do conjunto dos números reais via cortes de Dedekind. Procuramos apresentar algumas figuras para facilitar o entendimento do conceito de corte.

Finalmente, no Capítulo 4 apresentamos uma prova de densidade do conjunto dos números racionais (e do conjunto dos números irracionais) em $\mathbb{R}$. Tal fato é de extrema importância e acreditamos que deve ser abordado quando se introduz o conjunto dos números reais. Por último, nesse Capítulo apresentamos uma proposta metodológica de como introduzir o conjunto dos números reais à alunos do ensino médio. Tal proposta contém alguns elementos que foram discutidos ao longo do texto e encontra-se numa versão inicial a qual deve ser melhor discutida. Destacamos ainda que para trabalhar tal proposta são necessárias várias aulas, mas devido à importância de tal assunto, acreditamos que isso trará aos alunos uma compreensão melhor do conjunto dos números reais.

Capítulo 1

Números Racionais

A necessidade de representar partes de um inteiro originou o estudo dos números racionais, sendo que, inicialmente essa classe numérica era representada apenas com frações, como se pode observar no Papiro de Rhind datado de aproximadamente 1650 a.C. (ALMEIDA; CORRÊA, 1997). No entanto, os números decimais, só vieram a ser estudados muito tempo depois, por diversos matemáticos, entre os séculos XI e XVII (DIAS, 2016), a simbologia utilizada nos tempos atuais, para representar um número decimal qualquer foi introduzida por Simon Stevin (1585) e adaptado por John Napier (1617), sendo que este último sugeriu o uso de ponto ou vírgula para separar a parte inteira e a parte fracionária do mesmo número.

Neste capítulo apresentamos alguns aspectos sobre o conjunto dos números racionais. Inicialmente, apresentamos a definição do conjunto dos números racionais e as operações usuais com suas propriedades. Posteriormente, introduzimos o conceito de dízimas periódicas e alguns exemplos. No segundo momento, apresentamos o conceito de segmentos comensuráveis e uma demonstração do Teorema de Tales baseado na noção de segmentos comensuráveis. Ainda neste capítulo, apresentamos uma prova que é impossível cobrir a reta somente com os números racionais. Finalmente, na última seção, apresentamos o conceito de corpo ordenado e verificamos que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado.

1.1 O conjunto dos números racionais e a Reta Real

Começamos esta seção admitindo que já estão estabelecidos o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

e o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

Assim, um número racional x é o elemento que pode ser escrito como razão de dois números inteiros p e q, sendo $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, isto é, $x = \dfrac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$. O conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}\right\}$$

é o conjunto dos números racionais. Neste conjunto estão definidas as operações:

(i) Adição: a cada par $a = \dfrac{p}{q}$ e $b = \dfrac{r}{s}$, com $a, b \in \mathbb{Q}$ associamos um número racional $a + b$ denominado soma de a com b, definido por:

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}.$$

(ii) Multiplicação: a cada par $a, b \in \mathbb{Q}$, em que $a = \dfrac{p}{q}$, $b = \dfrac{r}{s}$ associamos a um único racional $a \cdot b$ denominado produto dos racionais a e b definido por:

$$a \cdot b = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$

O próximo passo será identificar os números racionais como pontos de uma reta.

1.1.1 Localização dos números naturais na Reta Real

Considere uma reta qualquer, a qual chamamos de Reta Real, e seja O um ponto fixado na reta. Agora, seja A um outro ponto, à direita de O na reta. Definimos o segmento OA como unidade de comprimento.

O ponto O divide a reta em duas semirretas. A que contém A, à direita de O, chamamos de semirreta positiva. A semirreta que não contém A, é chamada de semirreta negativa, contém os pontos que estão à esquerda de O.

Tomando O como a origem da semirreta, dizemos que a abscissa de A é o número natural 1. Agora, seja n um número natural qualquer, considere X um ponto à direita de O tal que o segmento de reta OA cabe exatamente n vezes em OX. Então dizemos que a abscissa de X é o número natural n. Ver na Figura 1.1.

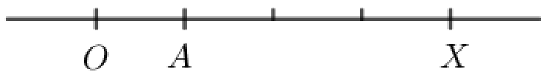

Figura 1.1: A abscissa de OA é 1 e a abscissa de OX é 4.
Fonte: a autora.

1.1.2 Localização dos números inteiros na Reta Real

O caso dos inteiros positivos já foi estabelecido acima. Se o número inteiro é o zero, o associamos ao ponto O.

Se $z \in \mathbb{Z}$ é negativo, então considere X o ponto à esquerda de O tal que o segmento de reta OA cabe exatamente n vezes em OX. E, então dizemos que a abscissa de X é um número inteiro negativo z. Ver Figura 1.2.

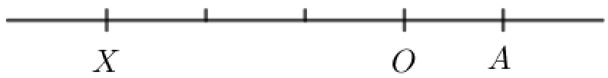

Figura 1.2: A abscissa de OX é -3.
Fonte: a autora.

1.1.3 Localização dos números racionais na Reta Real

Seja $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ positivo. Seja Y um ponto à direita de O tal que o segmento OY cabe exatamente n vezes em OA.

Agora, seja X o ponto à direita de O tal que o segmento OY cabe exatamente m vezes em OX. Dizemos que a abscissa de X é o número racional $a = \dfrac{m}{n}$. Ver Figura 1.3. O caso negativo é feito de forma análoga.

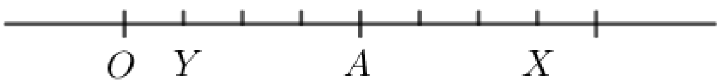

Figura 1.3: A abscissa OX é $\dfrac{7}{4}$.
Fonte: a autora.

O segmento OY cabe exatamente 4 vezes em OA.

1.2 Dízimas

Os números racionais podem possuir representação exata ou não, por exemplo, o número $\frac{1}{2} = 0,5$ tem representação exata, já o número $\frac{1}{3} = 0,3333\cdots$ não tem representação exata, pois as reticências simbolizam que há uma infinidade de dígitos. Os números de representação não exata são chamados de dízimas.

No número $a = a_0, a_1a_2a_3a_4\cdots$, onde $a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$, para $k \in \mathbb{N}$, ou seja, os dígitos são números naturais. Além disso, a_0 é chamado de parte inteira, e, $a_1a_2a_3\cdots$ é chamado de parte fracionária.

Se a partir do k-ésimo dígito, na parte fracionária da dízima houver uma repetição, então classificamos em dízima periódica. Os números que se repetem são chamados período, por exemplo, o número $0,0212121\cdots$ tem período 21. Todas as dízimas periódicas possuem fração geratriz, veja alguns exemplos:

Exemplo 1.1. *Vamos obter os a fração geratriz da dízima* $0,121212\cdots$.

Inicialmente, definimos

$$a = 0,121212\cdots \tag{1.1}$$

ao multiplicar a por 100, obtemos

$$100a = 12,121212\cdots. \tag{1.2}$$

Agora subtraimos (1.1) de (1.2), e temos

$$100a - a = 12,121212\cdots - 0,121212\cdots$$

$$99a = 12$$

logo, $a = \frac{12}{99}$, assim, na forma simplificada $a = \frac{4}{33}$.

Portanto, $\frac{4}{33}$ é a fração geratriz do número decimal a.

Exemplo 1.2. *Obter a fração geratriz da dízima* $3,12345345345\cdots$, *cujo período é* 345.

Definimos

$$b = 3,12345345345\cdots$$

Nesse caso, para determinar a fração geratriz correspondente, multiplicamos b por 100 e também multiplicamos b por 10000, obtendo assim:

$$
\begin{aligned}
100b &= 312,345345\cdots && (1.3)\\
10000b &= 312345,345345\cdots\,. && (1.4)
\end{aligned}
$$

Ao subtrair (1.3) de (1.4), obtemos:

$$9900b = 312033$$

logo, na forma simplificada, temos que $b = \dfrac{104011}{3300}$.

Podemos perceber que, para obter a fração geratriz de uma dízima periódica basta multiplicarmos o número por potências de 10, até que possamos obter números diferentes com partes fracionárias iguais, assim, subtraindo-os encontramos a respectiva fração geratriz.

Para dar significado às reticências na definição das dízimas não exatas positivas, podemos considerar:

$$a = a_0, a_1 a_2 \cdots$$

então escrevemos:

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots\,.$$

Agora, seja

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

assim, temos

$$0 < a - \alpha_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots\,.$$

Note que:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{10} &\leq 1,\\
\frac{a_{n+2}}{10} &\leq 1,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

donde,

$$
\begin{aligned}
0 < a - \alpha_n &< \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+2}} + \cdots\\
&= \frac{1}{10^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

Como a soma do lado direito é uma progressão geométrica infinita, temos que:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9},$$

portanto, concluímos que:

$$0 < a - \alpha_n < \frac{1}{10^n} \cdot \frac{10}{9} < \frac{1}{10^{n-1}}. \tag{1.5}$$

De (1.5), observamos que, a medida que n aumenta, a diferença entre α_n e a torna-se arbitrariamente pequena. Neste caso, dizemos que a é o limite de α_n. Como α_n é uma soma finita, então é possível calcular aproximação de a (por falta) tomando $n \in \mathbb{N}$ e com (1.5) temos uma estimativa do erro de aproximação.

1.3 Característica 1: Impossibilidade de cobrir a Reta Real com os números racionais

Ao estudarmos conjuntos numéricos, podemos facilmente perceber que todo conjunto finito tem um número determinado de elementos, logo, esses elementos podem ser contados. No entanto, nos conjuntos infinitos, como o conjunto dos números racionais, essa "contagem" de elementos se torna um pouco mais complexa.

Nesta seção apresentamos o conceito de conjunto enumerável e, em seguida, provamos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Posteriormente usamos o fato que $\mathbb{Q}$ é enumerável com um argumento geométrico, provamos o que chamamos neste texto de Característica 1 do conjunto dos números racionais. Precisamente, provamos que os números racionais não são suficientes para cobrir a Reta Real. Este argumento pode ser encontrado em Ávila (1985).

Um conjunto numérico cujos elementos podem ser contados, ou ordenados é chamado enumerável, ou seja, A é um conjunto enumerável se existir uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto A. Matematicamente, podemos assim definir:

Definição 1.1 (Conjuntos Enumeráveis)**.** *Um conjunto A é enumerável se é finito, ou se existir uma função $f : \mathbb{N} \to A$, bijetiva.*

Agora, a respeito dos conjuntos infinitos, de fato, não são todos enumeráveis, porém cabe ao nosso estudo verificar o conjunto dos números racionais, e, para isso, vamos apresentar o estudo realizado pelo alemão Georg Cantor, considerado o criador da teoria dos conjuntos.

Teorema 1.1. *O conjunto dos números racionais é enumerável.*

Demonstração. Por simplicidade, consideremos o caso dos racionais positivos. Organizamos as frações em grupos, onde a soma do numerador com o denominador tem o mesmo valor, assim o k-ésimo grupo é composto por todas as frações em que a soma do numerador com o denominador é k:

$$\begin{aligned}
k = 1 &\mapsto \frac{0}{1} \\
k = 2 &\mapsto \frac{0}{2}, \frac{1}{1} \\
k = 3 &\mapsto \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1} \\
k = 4 &\mapsto \frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1} \\
k = 5 &\mapsto \frac{0}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \\
k = 6 &\mapsto \frac{0}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1} \\
k = 7 &\mapsto \frac{0}{7}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}.
\end{aligned}$$

Note que, prosseguindo desta maneira, podemos escrever todos números racionais, além disso, se extrairmos destes grupos os números racionais equivalentes, e ordená-los na sequência em que aparecem, temos:

$$\begin{aligned}
r_0 &= 0 \\
r_1 &= 1 \\
r_2 &= \frac{1}{2} \\
r_3 &= 2 \\
r_4 &= \frac{1}{3} \\
r_5 &= 3 \\
r_6 &= \frac{1}{4} \\
r_7 &= \frac{2}{3} \\
r_8 &= \frac{3}{2} \\
r_9 &= 4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais positivos, ou seja, o segundo conjunto é enumerável.

$\square$

Com a prova da enumerabilidade de $\mathbb{Q}$, estamos aptos a provar que é impossível obter uma correspondência biunívoca entre os números racionais e os pontos da Reta Real. De fato, considere os números racionais enumeráveis conforme a prova do teorema acima, isto é,

$$\begin{aligned} r_0 &= 0, \\ r_1 &= 1, \\ r_2 &= \frac{1}{2}, \\ r_3 &= 2, \\ r_4 &= \frac{1}{3}, \\ r_5 &= 3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sem perca de generalidade, tomamos a semirreta real positiva e organizamos tais números à partir do r_1, obtendo assim:

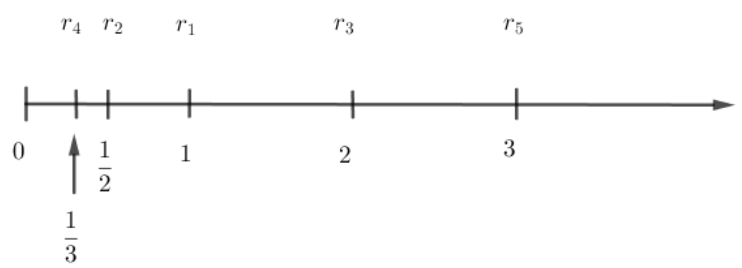

Figura 1.4: Abscissas r_k na semirreta.
Fonte: a autora.

A partir de tais pontos, tomamos um segmento de comprimento c, de forma que cada número r_1 seja coberto por um segmento de comprimento $\dfrac{c}{2^1}$, com centro em r_1; r_2 será coberto por um segmento de comprimento $\dfrac{c}{2^2}$, centrado em r_2; e assim por diante, conforme a Figura 1.5:

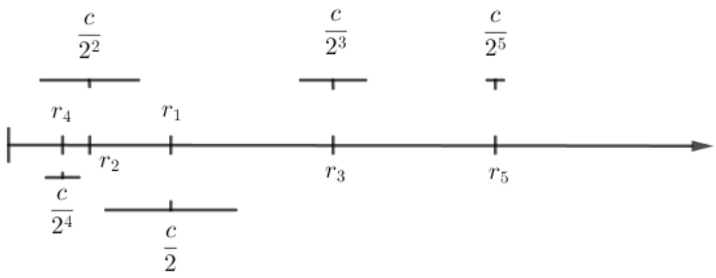

Figura 1.5: Segmentos de comprimento $\frac{c}{2^k}$ cobrindo os pontos r_k.
Fonte: a autora.

Perceba que a sequência de comprimentos $\left(\frac{c}{2^1}, \frac{c}{2^2}, \frac{c}{2^3}, \frac{c}{2^4}, \cdots\right)$ é uma progressão geométrica, de razão $\frac{1}{2}$, assim calculamos a soma de seus elementos, através da fórmula da soma de uma progressão geométrica:

$$S = \frac{\frac{c}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{1}{2}} = c.$$

Logo, a soma dos comprimentos resulta no valor c, ou seja, a soma de todos os comprimentos dos segmentos que cobrem todos os números racionais é o número finito c. Portanto, não é possível cobrir a reta somente com os números racionais.

1.4 Segmentos comensuráveis e o Teorema de Tales.

Os gregos acreditavam que, em qualquer segmento "caberia" um número exato de segmentos menores que ele. E, de fato considerando que na época eram conhecidos apenas os números naturais, ao tomarmos os comprimentos de dois segmentos AB e CD, pensava-se que havia um segmento EF, de forma que $\overline{AB} = x \cdot \overline{EF}$ e também $\overline{CD} = y \cdot \overline{EF}$, com x e y inteiros positivos. Sendo assim, nessas condições, AB e CD são chamados segmentos comensuráveis.

Nessa seção, apresentamos a definição de segmentos comensuráveis e a prova do Teorema de Tales baseado no conceito de segmentos comensuráveis. A ideia de demonstrar o Teorema de Tales é mostrar essa característica que havia em demonstrações relacionadas à geometria na época em que descobriu-se, ou identificou-se, a existência de segmentos incomensuráveis. Esta última classe de segmentos será elaborada no próximo Capítulo.

Assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.2. *Dois segmentos são ditos comensuráveis sempre que existir um terceiro segmento de comprimento menor ou igual aos anteriores, que seja múltiplo de ambos.*

Exemplo 1.3. *Tomando segmentos cujos comprimentos são $\overline{AB} = 7$ e $\overline{CD} = 5$, então, tomando $\overline{EF} = 1$, temos:*

$$\overline{AB} = 7 \cdot \overline{EF}$$

e

$$\overline{CD} = 5 \cdot \overline{EF},$$

logo, AB e CD são segmentos comensuráveis.

Note que, mesmo que AB e CD sejam segmentos com medidas de comprimento que representam números primos, basta tomar EF com comprimento unitário, e temos segmentos comensuráveis.

Para o prova do Teorema de Tales, começamos com o seguinte conceito: tomando segmentos de comprimento $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$, dizemos PQ está para QR, respectivamente, na razão $\frac{m}{n}$ e escrevemos

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \frac{m}{n},$$

se existe o segmento σ tal que

$$\overline{PQ} = m \cdot \sigma,$$

e

$$\overline{QR} = n \cdot \sigma,$$

ou, equivalentemente,

$$n \cdot \overline{PQ} = m \cdot \overline{QR}.$$

Agora podemos enunciar o Teorema de Tales.

Teorema 1.2 (Teorema de Tales)**.** *Num mesmo plano, três retas paralelas e duas retas transversais determinam segmentos de comprimentos proporcionais.*

Nesta seção, consideramos apenas segmentos comensuráveis, portanto, tomamos retas paralelas de forma que a distância entre elas representam medidas comensuráveis.

Demonstração. Considere as retas obtidas pelos pontos PQR e $P'Q'R'$ como na Figura 1.6:

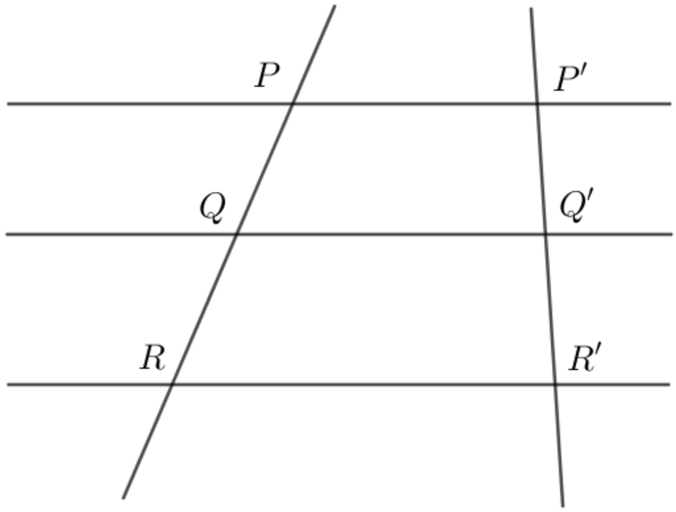

Figura 1.6: PP', QQ' e RR' são retas paralelas cortadas pelas transversais PR e $P'R'$.
Fonte: a autora.

Devemos provar que:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{Q'R'}}.$$

Sendo PQ e QR segmentos comensuráveis, existe σ, um submúltiplo comum de PQ e QR. Assim, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\overline{PQ} = m \cdot \sigma \text{ e } \overline{QR} = n \cdot \sigma.$$

Sobre PQ marcamos

$$\overline{PS} = \overline{ST} = \overline{TU} = \cdots = \sigma,$$

conforme a Figura 1.7.

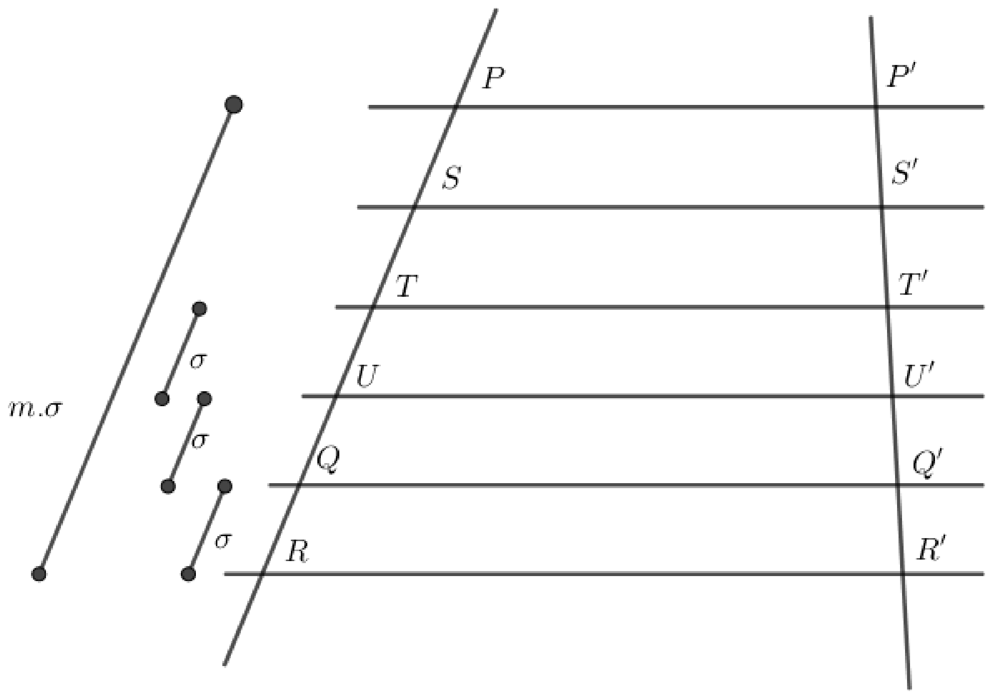

Figura 1.7: Retas SS', TT', UU', $\cdots$, paralelas à PP'.
Fonte: a autora.

Agora, considere as retas $P'V'$, $S'X'$, $T'Y'$, $\cdots$ paralelas a PQ conforme a Figura 1.8.

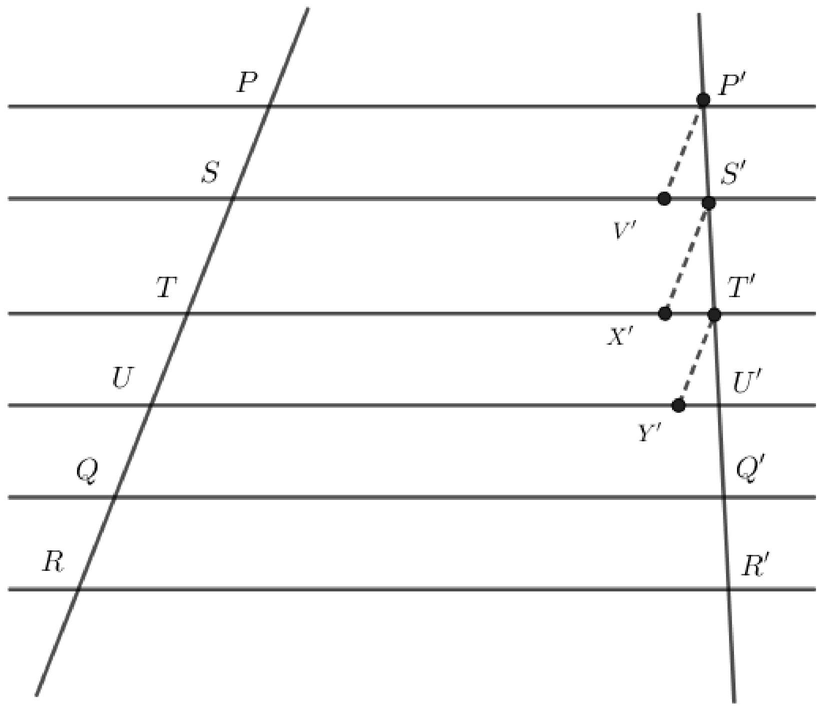

Figura 1.8: Segmentos $P'V'$, $S'X'$, $T'Y'$, $\cdots$ são paralelos à PQ.
Fonte: a autora.

Por construção, é possível verificar que $P'V'S'$, $S'X'T'$, $T'Y'U'$, $\cdots$ são congruentes, pelo caso lado, ângulo e ângulo oposto. Assim,

$$\overline{P'S'} = \overline{S'T'} = \overline{T'U'} := \sigma',$$

disto, e como $PQ = m\sigma$, seguem

$$\overline{P'Q'} = m \cdot \sigma',$$

analogamente,

$$\overline{Q'R'} = m \cdot \sigma'.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{Q'R'}}.$$

□

1.5 Corpos

Para a matemática, corpos são estruturas algébricas que tornam as operações de adição, subtração, multiplicação e a divisão bem definidas através das regras usuais de associatividade, comutatividade e distributividade. Sendo assim, seu estudo representa extrema importância para a álgebra.

A definição de corpos e suas propriedades que faremos em sequência pode ser encontrada com mais detalhes em Lima (2006).

Um conjunto K, seja finito ou infinito, porém não vazio, é chamado de corpo se, sobre o qual podem ser definidas duas operações, adição e multiplicação, de forma que, tomando dois elementos $x, y \in K$, temos que a adição $x + y \in K$, além disso, a multiplicação $x \cdot y \in K$. Estas operações satisfazem certas condições, denominadas axiomas de corpo, assim definidas, considerando que $x, y, z \in K$:

- Axiomas da adição (A):

  (A1) Associatividade da adição:

  $$(x + y) + z = x + (y + z).$$

  (A2) Comutatividade da adição:

  $$x + y = y + x.$$

  (A3) Elemento neutro:

  Existe um elemento, chamado de elemento neutro e denotado por 0 (zero) tal que, para todo $x \in K$, tem-se

  $$x + 0 = 0 + x = x.$$

  (A4) Elemento simétrico:

  Tomando qualquer $x \in K$, existe o simétrico $-x \in K$, tal que

  $$x + (-x) = 0.$$

  A adição de um elemento x, com o elemento simétrico de y, $-y$, simbolizada por $x + (-y)$ também pode ser denotada por $x - y$ e a denominamos subtração ou diferença entre x e y.

  Note que:

  – do axioma do elemento simétrico, segue que:

  $$x - x = -x + x = 0;$$

  – tomando $x - y = z$, ao adicionarmos y a ambos os membros da equação temos:

  $$x = z + y;$$

– se

$$x + \alpha = x \Rightarrow \alpha = x - x \Rightarrow \alpha = 0,$$

ou seja, o elemento neutro da adição, 0 é único;

– um outro resultado importante, que segue é que, o elemento simétrico de qualquer $x \in K$ é único, pois

$$x + y = 0 \Rightarrow x = 0 - y,$$

isto é, $x = -y$;

– sendo $-(-x)$ o inverso do inverso de x, então

$$-(-x) + (-x) = 0.$$

Ao somarmos x a ambos os termos da equação temos:

$$-(-x) + (-x) + x = 0 + x$$

logo,

$$-(-x) = x,$$

ou seja, o inverso do inverso de x é o próprio x.

A "lei do corte" segue das relações observadas à seguir: Seja $x + y = y + z$, somandos $-y$ a ambos os termos da equação, e temos que

$$x + y + (-y) = y + z + (-y),$$

daqui,

$$x = y + (-y) + z,$$

logo,

$$x = z.$$

Assim, podemos concluir que as regras usuais relativas à adição e subtração derivam desses quatro axiomas.

- Axiomas da multiplicação (M):

(M1) Associatividade da multiplicação:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

(M2) Comutatividade da multiplicação:

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(M3) Elemento neutro:

Existe um elemento em K, chamado de elemento neutro da multiplicação, denotado por 1, tal que,

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,$$

para todo $x \in K$.

(M4) Inverso multiplicativo: qualquer elemento, $x \in K$, desde que $x \neq 0$, admite inverso multiplicativo, simbolizado por x^{-1}, de forma que,

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

A operação denominada divisão, simbolizada por x/y ou $\dfrac{x}{y}$ é equivalente à $x \cdot y^{-1}$, e definida para qualquer $x \cdot y \in K$, com $y \neq 0$.

Agora, note que, com $y \neq 0$, se tivermos $\dfrac{x}{y} = z$, então $\dfrac{x}{y} \cdot y = z \cdot y$, donde $x = z \cdot y$. Da mesma forma que, se tivermos $x \cdot z = y \cdot z$ implica que, obrigatoriamente, sendo $z \neq 0$, temos que $x = y$. Essas regras também são definidas como "Lei do corte".

Se tivermos $x \cdot y = x$, então podemos analisar apenas duas possibilidades: se $x \neq 0$, pela lei do corte, só podemos ter $y = 1$, com isso, provamos a unicidade do elemento 1. Por outro lado, sendo $x = 0$, y pode ser qualquer valor em K, pois temos que $0 \cdot y = 0$. Tomando agora $x \cdot y = 1$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, ao multiplicar ambos os lados da equação por y^{-1}, temos $x \cdot y \cdot y^{-1} = y^{-1}$ o que nos leva a $x = y^{-1}$, e com isso temos a unicidade do elemento inverso.

Finalmente, deve valer o seguinte axioma:

- Axioma da distributividade (D):

  Sendo $x, y, z \in K$ então

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

A partir deste axioma, podemos provar que $x \cdot 0 = 0$, partindo de

$$x \cdot 1 = x.$$

De fato, note que

$$x \cdot (1 + 0) = x,$$

disso, e por distributividade, temos que

$$x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + 0,$$

portanto, $x \cdot 0 = 0$. Ao tomarmos $x \cdot y = 0$, segue que $x = 0$ ou $y = 0$, pois considerando $x \neq 0$, então temos $x \cdot y \cdot x^{-1} = 0 \cdot x^{-1}$, donde, pela lei do corte, $y = 0$, e de forma análoga, teríamos $x = 0$ se considerássemos $y \neq 0$.

Munindo $\mathbb{Q}$ com as operações usuais

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d},$$

e

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

temos que $\mathbb{Q}$ é um corpo. Portanto, se estamos interessados em trabalhar em um conjunto com as operações básicas no qual valem as propriedades usuais citadas e manipulações algébricas dos números, temos que o conjunto dos números racionais é suficiente.

1.6 Corpos ordenados

O objetivo dessa seção é introduzir mais um ingrediente à estrutura de corpo. Assim, começamos com a seguinte definição:

Definição 1.3. *Um corpo K é dito um corpo ordenado, se nele estiver contido um subconjunto P que satisfaz as seguintes propriedades:*

(P1) Sendo $x, y \in P$ então $x + y \in P$ e $x \cdot y \in P$. Em particular, sendo P um conjunto com apenas números positivos, ele é fechado com relação à adição e à multiplicação;

(P2) Para todo $a \in K$ ocorre apenas uma das três possibilidades: $a \in P$, $-a \in P$ ou $a = 0$.

Tomando por $-P$, o conjunto dos números simétricos de P, então temos

$$K = P \cup -P \cup \{0\},$$

sendo os três subconjuntos disjuntos dois a dois.

Num corpo ordenado, podemos "organizar" os elementos em uma "ordem" usando a definição à seguir:

Definição 1.4. *Dados x e y, elementos de um corpo K, escrevemos*

$$x < y$$

e dizemos que x é menor do que y, quando

$$y - x \in P,$$

onde P é um conjunto com apenas números positivos.

Dizemos que x é menor ou igual a y quando

$$x < y \text{ ou } x = y$$

e escrevemos $x \leq y$.

Lema 1.1. *Um corpo ordenado K, com $x, y, z \in K$, possui as seguintes propriedades:*

(O1) Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;

(O2) Tricotomia: das três possibilidades $x < y$, $y < x$ ou $x = y$, apenas uma e só uma ocorre;

(O3) Monotonicidade da adição: Sendo $x < y$ então $x + z < y + z$;

(O4) Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$, e, para todo $z \in P$, logo, $x \cdot z < y \cdot z$. Porém, em contrapartida, com $z \notin P$, se $x < y$ então, $x \cdot z > y \cdot z$.

Demonstração. Por hipótese, temos que $x, y, z \in K$, logo, satisfaz as propriedades (P1) e (P2).

(O1) Se $x < y$ e $y < z$ então $y - x \in P$, assim como $z - y \in P$, logo $(y - x) + (z - y) \in P$, sabendo que $(y - x) + (z - y) = z - x$ então temos que $z - x \in P$, portanto $x < z$.

(O2) Sendo $x < y$, então $y - x \in P$, mas se $y < x$, então $x - y = -(y - x) \in P$ ou ainda, $x = y$, então $x - y = 0$ e, por (P2), só ocorre uma única das três possibilidades.

(O3) Seja $x < y$, então $y - x \in P$, $y - x = y - x + 0 = y - x + z - z = (y + z) - (x + z)$, assim $(y + z) - (x + z) \in P$, logo $x + z < y + z$.

(O4) Vamos separar os dois casos:

(i) Se $z > 0$, com $x < y$, temos $y - x \in P$ e $z \in P$, então $(y - x) \cdot z = y \cdot z - x \cdot z \in P$, logo $x \cdot z < y \cdot z$.

(ii) Se $z < 0$, é um caso análogo ao anterior, basta notarmos que $-z \in P$, donde $(y - x) \cdot (-z) = [y \cdot (-z)] + (-x) \cdot (-z) = x \cdot z - y \cdot z \in P$, portanto $y \cdot z < x \cdot z$.

□

Se estamos interessados em trabalhar um conjunto no qual estão definidas as quatro operações básicas e valem as propriedades usuais envolvendo estas operações e que, além disso, é possível estabelecer uma relação de ordem entre os elementos, então o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, munido com as operações usuais, e o conjunto P sendo

$$P = \mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{N}\right\}$$

é suficiente. Precisamente, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

Para verificar que $\mathbb{Q}^+$ satisfaz (P1) e (P2), consideramos $x, y \in \mathbb{Q}^+$ tal que $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$. Assim,

(P1) Sendo $x + y = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ notamos que, como $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ então, na fração, numerador e denominador são números naturais, portanto $x + y \in \mathbb{Q}^+$;

(P2) Sendo $z = \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ temos três possibilidades: $\dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, nesse caso, $\alpha = 0$. Se $\dfrac{\alpha}{\beta} > 0$, então $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}^+$, ou ainda, se $\dfrac{\alpha}{\beta} < 0$ temos que $-\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}^+$.

Portanto, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

Para finalizar esta seção, apresentamos dois resultados sobre corpos ordenados.

Proposição 1.1. *Tomando K um corpo ordenado, e $P \subset K$ um subconjunto munido de (P1) e (P2), sendo $a \in P$, então $a^2 \in P$.*

Demonstração. Pela propriedade (P2), temos que $a \in P$ ou $-a \in P$, sendo assim, estudaremos os dois casos.

(i) Com $a \in P$, $a \cdot a \in P$ e, como $a \cdot a = a^2$ então, por (P1), $a^2 \in P$;

(ii) Tomando agora, $-a \in P$, temos, $(-a) \cdot (-a) = a^2$, assim, também, $a^2 \in P$.

□

Desta proposição, um fato importante a se observar é que, com $a \in P$, não ocorre $a^2 \in -P$.

Proposição 1.2. *Se K é um corpo ordenado e $P \subset K$ um subconjunto munido de (P1) e (P2), então, o elemento neutro da multiplicação, $1 \in P$.*

Demonstração. Pela definição de corpos, temos que os elementos neutros da adição e da multiplicação são distintos. Supondo, por absurdo, que $1 \notin P$. Então, pela propriedade (P2), $-1 \in P$, e, pela propriedade (P1), temos que $(-1) \cdot (-1) = 1 \in P$, o que contradiz a hipótese, portanto, $1 \in P$. □

Capítulo 2

Números Irracionais

Neste Capítulo, realizamos um estudo sobre o conjunto dos números irracionais. Começamos com a prova de que não existe um número racional cujo quadrado seja 2. Num segundo momento, apresentamos uma breve discussão sobre a existência de segmentos incomensuráveis, o que chamamos neste texto de Característica 2. Neste momento retornamos ao Teorema de Tales para refletir sobre este fato histórico importante que foi a descoberta de que existem segmentos incomensuráveis. O próximo passo é caracterizar os números irracionais. Na seção 2.4 fazemos uma discussão sobre o número π e na seção 2.5 sobre o número e. Finalmente, na seção 2.6 localizamos alguns números irracionais na Reta Real.

2.1 $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Como descrito acima, nessa seção apresentamos uma prova de que não existe um número racional cujo quadrado é 2, ou seja, $\sqrt{2}$ não é um número racional. Precisamente, provamos o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

Antes de efetuar a prova deste teorema, demonstramos a seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Considere $a, b \in \mathbb{Z}$:*

(i) Se a é par, a^2 também é par;

(ii) Se a é ímpar, a^2 também é ímpar.

Demonstração. Vamos analisar cada item:

(i) Se a é par, então existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = 2p,$$

então

$$a^2 = (2p)^2,$$

logo

$$a^2 = 2(2p^2),$$

o que prova que a^2 é par;

(ii) Se a é ímpar, então existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = 2p + 1,$$

então

$$a^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1,$$

portanto, neste caso, a^2 é ímpar.

$\square$

Com isso, podemos efetuar a prova que não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2.

Demonstração do teorema 2.1. Suponha, por absurdo, que $\dfrac{p}{q}$ exista e seja um número racional na forma de fração na forma irredutível, tal que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Logo,

$$p^2 = 2q^2,$$

sendo assim, p^2 é par, logo p também é par. Desta forma, p pode ser escrito como $p = 2k$, com k inteiro. E, de $p^2 = 2q^2$ temos:

$$(2k)^2 = 2q^2,$$

$$4k^2 = 2q^2,$$

$$2k^2 = q^2.$$

Assim, q também é par, e com p e q números pares, a fração $\dfrac{p}{q}$ não é irredutível. Assim, chegamos a uma contradição. Portanto, não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.

$\square$

Mesmo $\sqrt{2}$ não sendo um número racional, vamos fazer os cálculos para encontrar o resultado aproximado, usando os números racionais.

Sendo assim, vamos procurar valores para $x = \sqrt{2}$ de forma que $x^2 = 2$. Note que, se:

- $x = 1$, temos $x^2 = 1^2 = 1$,

e, se

- $x = 2$, temos que $x^2 = 2^2 = 4$,

logo, o valor procurado está entre 1 e 2, por isso, tomamos

- $x = 1,5$, então $x^2 = 1,5^2 = 2,25$,

sendo assim, x é um numero menor que $1,5$, agora, tomamos

- $x = 1,4$, e obtemos $x^2 = 1,4^2 = 1,96$.

Portanto $1,4 < x < 1,5$. Dessa forma podemos realizar o mesmo procedimento tantas vezes quantas forem necessárias, para obtermos um resultado aproximado de $\sqrt{2}$. Como exemplo, se tomarmos $x = 1,41421356$, então, $x^2 = 1,9999999932878736$, note que, quanto mais casas decimais tomarmos, teremos uma melhor aproximação para $\sqrt{2}$.

Assim como $\sqrt{2}$ não é um número racional, podemos generalizar esse fato através do seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Dado $n \in \mathbb{N}$, se $m \in \mathbb{N}$ não possuir uma raiz n-ésima natural, também não possuirá uma raiz n-ésima racional.*

Demonstração. Tomando $\frac{p}{q}$ uma fração irredutível, tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^n = m$, logo $p^n = m \cdot q^n$, assim, temos que p^n é múltiplo de q^n. Mas, como, por hipótese, p e q são primos entre si, então, também podemos concluir que p^n e q^n também são primos entre si, o que é um absurdo, portanto, $\sqrt[n]{m}$ não é um número racional. □

2.2 Característica 2: Segmentos incomensuráveis

No Capítulo 1, vimos a definição de segmentos comensuráveis, também apresentamos a prova do Teorema de Tales, a qual estava fundamentada no fato de tomarmos dois segmentos comensuráveis quaisquer.

A descoberta de que poderiam haver segmentos incomensuráveis causou uma crise histórica. Pois, o fato implicava na insuficiência dos conjuntos numéricos até então conhecidos.

Segundo Ávila (1984), os pitagóricos descobriram os segmentos incomensuráveis, entre 450 e 400 a.C. ao estudar os elementos do quadrado, conforme faremos em sequência.

Considere o quadrado $ADBC$, conforme a Figura 2.1:

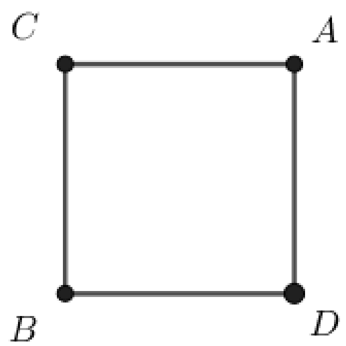

Figura 2.1: Quadrado $ADBC$.
Fonte: a autora.

Para facilitar a notação, tomamos como $\alpha = BC$ a medida do lado do quadrado e $\beta = AB$ sua diagonal, supomos por hipótese que α e β são segmentos comensuráveis, de forma que existe um segmento de medida x, tal que $\alpha = m \cdot x$ e $\beta = n \cdot x$, em que m e n são inteiros positivos.

Por construção, traçamos o arco com centro em A e raio α, encontrando assim o ponto E sob o segmento AB. Agora, traçamos a tangente deste arco, por E, encontrando assim o ponto F, sob o segmento BC. Ver Figura 2.2.

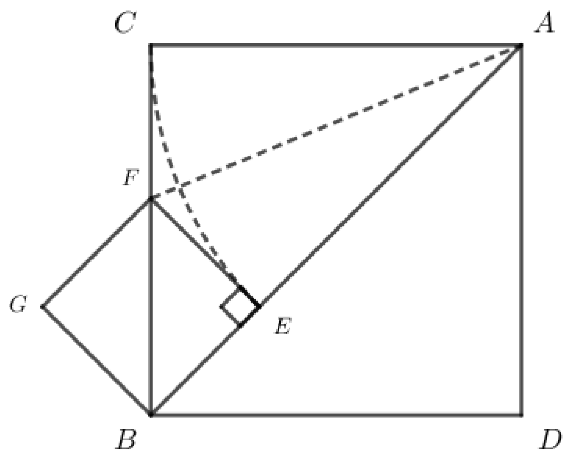

Figura 2.2: No quadrado $ADBC$, os triângulos AFC e AEF são congruentes.
Fonte: a autora.

Podemos perceber que ACF é um triângulo retângulo em C, assim como AEF é retângulo em E. O segmento AF é um lado comum a ambos e AC e AE são raios do arco construído, então pelo caso de congruência especial para triângulos retângulos, ACF e AEF são congruentes. A partir disso, usaremos a congruência entre os catetos CF e EF. Note que o ângulo $\angle ADB = 45°$, logo $\angle FBE = 45°$ e com $\angle BEF = 90°$, então $\angle EFB = 45°$, ou seja, o triângulo FEB é isósceles, e assim, $EB = FB$.

Assim,

$$\beta = \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB}, \tag{2.1}$$

e, como $AE = AC = \alpha$, então

$$\beta = \alpha + \overline{EB},$$

e, também

$$\alpha = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC}$$

pela congruência observada anteriormente, temos $FC = FE$, assim,

$$\alpha = \overline{BF} + \overline{FE} = \overline{BF} + \overline{BE}. \tag{2.2}$$

Como x é um submúltiplo comum de α e β, de (2.1) temos que x é um submúltiplo de EB. Agora, sendo x submúltiplo de EB e de α, por (2.2), temos que x é submúltiplo de BF. Ou seja, se existir x que é submúltiplo do lado e da diagonal do quadrado $ADBC$, então x também é submúltiplo do lado e da diagonal do quadrado $BEFG$. Observe que o lado do quadrado $ADBC$ é mais que o dobro do lado do quadrado $BEFG$. Podemos repetir o processo, partindo de $BEFG$, chegamos a um quadrado ainda menor tal que x ainda seja um submúltiplo do lado e da diagonal deste quadrado.

Ao repetirmos o processo uma quantidade finita de vezes, chegamos a um quadrado com o lado de medida menor do que x, tal que x é submúltiplo de x, o que é uma contradição.

Assim, então provamos que o lado e a diagonal de qualquer quadrado representam segmentos incomensuráveis.

A prova acima pode ser encontrada em Ávila (1984). Veja também Vicente (2014) onde os autores fizeram uma prova usando o *software* Geogebra.

2.2.1 O Teorema de Tales

Como descrito anteriormente, a descoberta de segmentos incomensuráveis foi um ponto de inflexão na matemática e alguns resultados provados até o momento precisavam ser revistos. Além disso, no Capítulo 1, quando tratamos o caso de segmentos comensuráveis, escrevemos que, dadas duas grandezas A e B, A está para B na razão $\frac{m}{n}$ se $n \cdot A = m \cdot B$. Eudoxo abriu mão da definição acima para atribuir um significado à expressão $\frac{A}{B}$ quando A e B são grandezas (por exemplo comprimento de segmentos) incomensuráveis. A ideia de Eudoxo foi a seguinte, dados quatro segmentos A, B, C e D diz-se que A está para B assim como C está para D, $\left(\frac{A}{B} = \frac{C}{D}\right)$ se quaisquer que sejam os números m e n, então

$$n \cdot A > m \cdot B, \text{se, e somente se}, n \cdot C > m \cdot D,$$

$$n \cdot A = m \cdot B, \text{se, e somente se}, n \cdot C = m \cdot D,$$

$$n \cdot A < m \cdot B, \text{se, e somente se}, n \cdot C < m \cdot D.$$

Com essa definição, é possível rever a prova do Teorema de Tales e prová-lo para o caso de segmentos incomensuráveis. A prova pode ser encontrada em Ávila (1984).

2.3 Dízimas não periódicas e os números irracionais

No Capítulo 1 escrevemos que os números racionais possuem representação decimal a qual pode ser exata como $\frac{1}{2} = 0,5$, ou na forma de uma dízima periódica, como $\frac{1}{3} = 0,333\cdots$, ou $\frac{7}{9} = 0,777\cdots$, ou $1 = 0,999\cdots$.

Também explicamos qual é o entendimento das reticências nas expressões acima. Basicamente, dizer que $\frac{1}{3} = 0,333\cdots$ é equivalente a dizer que $\frac{1}{3}$ é o limite da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}.$$

Por outro lado, não é difícil de produzir dízimas não periódicas. De fato, considere o exemplo:

$$\alpha = 0,101001000100001\cdots$$

ou

$$\beta = 0,373773777377773\cdots,$$

números dessa forma são chamados de números irracionais.

Um exemplo importante de um número irracional, o qual será abordado posteriormente, é o número

$$\pi = 3,141592653589\cdots.$$

De modo que, as dízimas não periódicas são expressões da forma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots, \tag{2.3}$$

onde $a_0, a_1, \cdots \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ e (2.3) não possui um período.

2.4 O Número π

Um dos números irracionais mais conhecidos é chamado π. Ele aparece nos estudos relacionados à circunferências, e, por essa razão, sempre causou grande curiosidade entre os matemáticos por vários séculos.

Apesar de Arquimedes (aproximadamente 250 a.C.) ser considerado um dos primeiros à apresentar estudos concretos relativos ao π, há vários relatos que, muito antes dele, os gregos e os babilônios apresentavam curiosidade sobre tal número (Pierre, 2004).

Por definição, o número π pode ser visto como o resultado obtido da razão entre comprimento e diâmetro de qualquer circunferência, independente do seu tamanho. Em seus estudos, Arquimedes conseguiu descobrir uma aproximação muito boa, $3,141$, levando em conta que na época não haviam calculadoras e instrumentos usados para efetuar medições eram extremamente limitados, comparados aos de hoje, esse é um feito extremamente notável. No entanto, ele percebeu que esse número tinha mais casas decimais. Esse fato aguçava a curiosidade dos estudiosos.

A notação para esse número, veio com a abreviação da palavra perímetro, que na escrita grega ficava da seguinte forma $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho\sigma\varsigma$.

As demais casas decimais de π foram sendo descobertas a partir dos estudos de Arquimedes, no entanto, os avanços substanciais ocorreram com a utilização dos aparelhos eletrônicos de cálculos, e mais ainda com o surgimento dos computadores. A precisão mais atual que se tem notícia foi efetivada pela The Santa Clara University, em 2013, e apresenta 8 quadrilhões de casas decimais.

Vamos efetuar agora o método clássico para determinação de π realizado por Arquimedes. Tal prova encontra-se em Pierre (2004), onde o leitor pode encontrar com mais detalhes.

Inicialmente, Arquimedes considerou uma circunferência na qual inscreveu e circunscreveu à ela dois hexágonos, conforme a Figura 2.3.

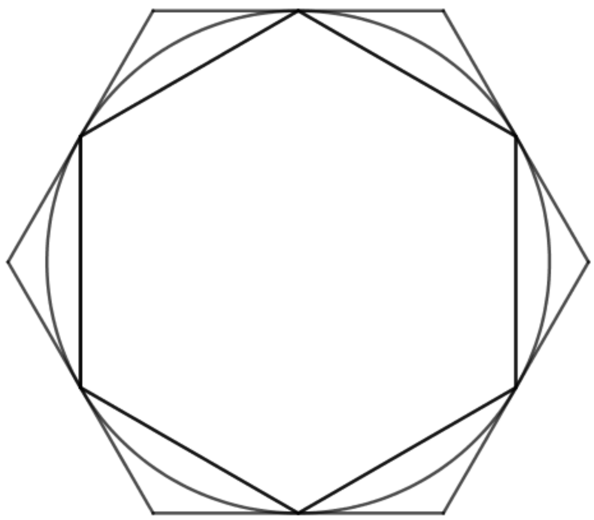

Figura 2.3: Circunferência inscrita e circunscrita em hexágonos.
Fonte: a autora.

Arquimedes calculou o perímetro dos hexágonos, pois ele havia notado que o comprimento da circunferência é um valor entre os dois perímetros. Vamos nomear como P_6 e p_6 o perímetro dos hexágonos circunscrito e inscrito, respectivamente, e C o comprimento da circunferência, assim:

$$p_6 < C < P_6,$$

além disso, como $C = \pi.d$, onde d é o diâmetro da circunferência, temos

$$p_6 < \pi.d < P_6.$$

Vamos considerar, sem perca de generalidade uma circunferência de raio 1.

Assim, $P_6 = 4\sqrt{3}$ e $p_6 = 6$ nos leva à:

$$6 < 2\pi < 4\sqrt{3},$$

ou seja,

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} \cong 3,46.$$

Como, na época era conhecida a fórmula

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - (l_n)^2}},$$

que relaciona a medida do lado de um polígono regular de n lados, l_n, com outro polígono, também regular, de $2n$ lados, l_{2n} ambos inscritos numa circunferência de raio r, ele conseguiu fazer aproximações para polígonos de 12 lados, depois 24, 48 até chegar num polígono de 96 lados, obtendo

$$3,14156 < \pi < 3,14167.$$

Assim, quanto mais iterações Arquimedes foi fazendo, ele descobria mais casas decimais, mas percebia também, que não obtinha um resultado exato.

O próximo passo será provar que π, de fato, é um número irracional. Para isso, provamos inicialmente duas proposições.

Proposição 2.2. *Considerando a função* $f_n(x) = \dfrac{x^n \cdot (1-x)^n}{n!}$ *onde* $n \in \mathbb{Z}^+$. *Sendo* $f_n^{(k)}(x)$ *a* k*-ésima derivada da função* $f_n(x)$. *Então,* $f_n^{(k)}(0)$ *e* $f_n^{(k)}(1)$ *representam números inteiros.*

Demonstração. Note que se tivermos $0 < x < 1$ então $0 < x^n \cdot (1-x)^n < 1$, donde $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!}$. Ao expandir o produto $x^n \cdot (1-x)^n$, a maior potência de x que se pode obter é $2n$, assim como a menor é n, logo, ao reescrever f_n, encontramos

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i \cdot x^i,$$

sendo c_i números inteiros. A partir desta expressão, temos que $f_n^{(k)}(0) = 0$ se $k < n$ ou $k > 2n$. E, ainda

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot [n! \cdot c_n + \alpha],$$

onde α representa a soma dos termos da função que envolvem a incógnita x, além disso,

$$f_n^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot [(n+1)! \cdot c_{n+1} + \alpha],$$

$$\cdots$$

$$f_n^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot [(2n)! \cdot c_{2n}],$$

então

$$f_n^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \cdot [n! \cdot c_n] = c_n,$$

$$f_n^{(n+1)}(0) = \frac{1}{n!} \cdot [(n+1)! \cdot c_{n+1}] = (n+1) \cdot c_{n+1},$$

$$\cdots$$

$$f_n^{(2n)}(0) = (2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot c_{2n},$$

portanto, como $n \in \mathbb{Z}$, então $f_n^{(k)}(0)$ é inteiro para todo k.

Agora, sendo $f_n(x) = \dfrac{x^n \cdot (1-x)^n}{n!}$, então

$$f_n(1-x) = \frac{(1-x)^n \cdot [1-(1-x)]^n}{n!} = \frac{(1-x)^n \cdot x^n}{n!} = f_n(x),$$

donde $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$, assim $f_n^{(k)}(1)$ também representa um número inteiro para todo k. □

Proposição 2.3. *Se a é um número qualquer, $\varepsilon > 0$, então para um número n suficientemente grande, temos $\dfrac{a^n}{n!} < \varepsilon$.*

Demonstração. Tomando $n \geq 2a$, temos

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

E, com isso, vamos verificar os valores sucessivos da expressão:

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!},$$

$$\frac{a^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!},$$

$$\cdots$$

$$\frac{a^{n+k}}{(n+k)!} < \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

Portanto, se k for tão grande que $\dfrac{a^n}{n!} < 2^k$, então $\dfrac{a^{n+k}}{(n+k)!} < \varepsilon$. □

Agora sim, vamos provar que π é um número irracional.

Teorema 2.3. *π é um número irracional.*

Demonstração. Sendo o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ um corpo, então tomando $q \in \mathbb{Q}$, teremos $q^2 \in \mathbb{Q}$, ou equivalentemente, se, $q^2 \notin \mathbb{Q}$, teremos $q \notin \mathbb{Q}$.

A partir disso, supomos por absurdo que π^2 seja racional, logo, $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos e, $mdc(a, b) = 1$. Definamos a função

$$G(x) = b^n[\pi^{2n} \cdot f_n(x) - \pi^{2n-2} \cdot f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} \cdot f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n \cdot f_n^{(2n)}(x)],$$

onde $f_n(x) = \dfrac{x^n \cdot (1-x)^n}{n!}$. Podemos notar que

$$b^n \cdot \pi^{2n-2k} = b^n \cdot (\pi^2)^{n-k} = b^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k} \cdot b^k$$

são todos números inteiros. E, como $f_n^{(k)}(0)$ e $f_n^{(k)}(1)$ são inteiros, assim temos que $G(0)$ e $G(1)$ são inteiros. Na segunda derivada de G, temos

$$G^{(2)}(x) = b^n \cdot [\pi^{2n} \cdot f_n^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} \cdot f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n \cdot f_n^{(2n+2)}(x)].$$

Agora,

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(x) + \pi^2 \cdot G(x) &= b^n \cdot [\pi^{2n} \cdot f_n^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} \cdot f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \pi^2 \cdot f_n^{(2)}(x)] \\
&+ b^n \cdot [\pi^{2n+2} \cdot f_n(x) - \pi^{2n} \cdot f_n^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^n \cdot \pi^2 \cdot f_n^{(2n)}(x)] \\
&= b^n \cdot [\pi^{2n+2} \cdot f_n(x)] \\
&= b^n \cdot [\pi^{2n} \cdot \pi^2 f_n(x)] \\
&= b^n \cdot \pi^2 \cdot \frac{a^n}{b^n} \cdot f_n(x) \\
&= \pi^2 \cdot a^n \cdot f_n(x).
\end{aligned}$$

Definamos também a função $H(x)$ por

$$H(x) = G'(x) \cdot sen(\pi x) - \pi \cdot G(x) \cdot cos(\pi x).$$

Ao derivar H, obtemos

$$\begin{aligned}
H'(x) &= \pi \cdot G'(x) \cdot cos(\pi x) + G^{(2)}(x) \cdot sen(\pi x) - \pi \cdot G'(x) \cdot cos(\pi x) + \pi^2 \cdot G(x) \cdot sen(\pi x) \\
&= G^{(2)}(x) \cdot sen(\pi x) + \pi^2 \cdot G(x) \cdot sen(\pi x) \\
&= [G^{(2)}(x) \cdot + \pi^2 \cdot G(x)] \cdot sen(\pi x) \\
&= \pi^2 \cdot a^n \cdot f_n(x) \cdot sen(\pi x).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\pi^2 \cdot \int_0^1 [a^n \cdot f_n(x) \cdot sen(\pi x)]dx = H(1) - H(0)$$

$$\begin{aligned} &= G'(1) \cdot sen(\pi) - \pi \cdot G(1) \cdot cos(\pi) + \\ &- G'(0) \cdot sen(0) + \pi \cdot G(0) \cdot cos(0) \\ &= \pi \cdot [G(1) + G(0)] \end{aligned}$$

logo,

$$\pi \cdot \int_0^1 [a^n \cdot f_n(x) \cdot sen(\pi x)]dx = G(1) + G(0)$$

e, este resultado nos indica que $\pi \cdot \int_0^1 [a^n \cdot f_n(x) \cdot sen(\pi x)]dx$ representa um número inteiro.

Agora, analisando por outro lado, como

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!},$$

para $0 < x < 1$, então

$$0 < \pi \cdot a^n \cdot f_n(x) \cdot sen(\pi x) < \frac{\pi \cdot a^n}{n!},$$

consequentemente temos

$$0 < \pi \cdot \int_0^1 [a^n \cdot f_n(x) \cdot sen(\pi x)]dx < \int_0^1 \left[\frac{\pi \cdot a^n}{n!}\right] dx = \frac{\pi \cdot a^n}{n!}$$

independentemente do valor de n. No entanto, se n for suficientemente grande, obtemos

$$0 < \pi \cdot \int_0^1 [a^n \cdot f_n(x) \cdot sen(\pi x)]dx < \frac{\pi \cdot a^n}{n!} < 1.$$

Assim, logo temos um absurdo, pois o resultado desta integral é um número inteiro, porém não existe inteiro entre 0 e 1. Portanto π^2 é um número irracional, e, sendo assim, π também é um número irracional. $\square$

2.5 O Número e

O escocês John Napier (1550 - 1617) desenvolveu estudos para facilitar determinados cálculos, surgindo assim os logaritmos, que foram apresentados na publicação de 1614, intitulada "Mirifici logarithmorum canonis descriptio" (Descrição do maravilhoso método dos logaritmos), além disso, ele inventou o logaritmo natural, hoje conhecido como logaritmo neperiano e, apresentou pela primeira vez o número e. (PRECIOSO, 2013)

Como, no século XVII não existiam calculadoras nem computadores, se pode imaginar a dificuldade em se realizarem cálculos que hoje acreditamos serem simples. Napier definiu o número e como a base do logaritmo natural, posteriormente caracterizado por $ln(e) = 1$.

Somente um século mais tarde, Leonhard Euler (1707-1783), desenvolveu a teoria sobre o número e o "batizou" com a letra e, como menção à primeira letra da palavra "exponencial", por isso, o número e é conhecido como constante de Euler e também por constante de Napier.

O número e pode ser definido como o ponto no eixo x tal que a área limitada pelo gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $1 \leq x \leq e$, e o eixo x é igual a 1. Veja a Figura 2.4.

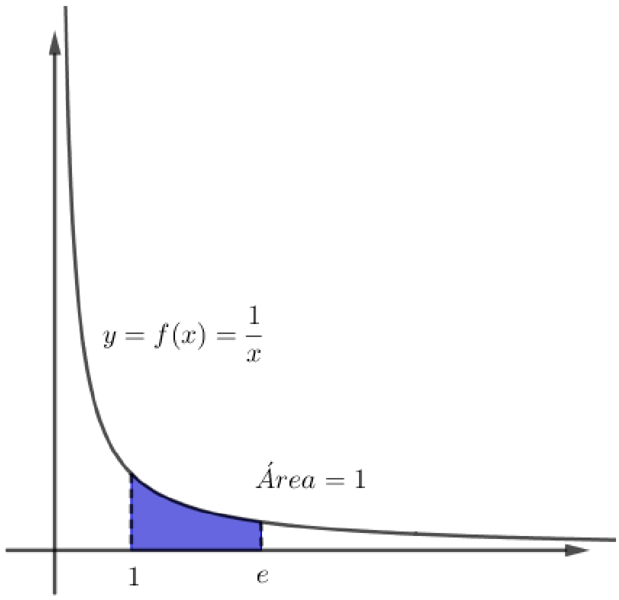

Figura 2.4: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cuja área delimitada por 1 e e é 1.
Fonte: a autora.

O número e também pode ser definido como

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Agora, provamos que e é um número irracional, tal prova pode ser encontrada de forma mais detalhada em Figueiredo (2011).

Teorema 2.4. *O número e é irracional.*

Demonstração. Inicialmente, façamos algumas observações, para isso, tomemos

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \tag{2.4}$$

supomos por absurdo que e seja um número racional, assim $e = \dfrac{p}{q}$, onde p, $q \in \mathbb{N}$, são primos entre si. Assim, por (2.4), segue que

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!}. \tag{2.5}$$

Com isso, faremos uma estimativa de $\displaystyle\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} &= \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

A expressão entre parênteses em (2.6) é uma série geométrica do tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, de forma que, se $0 < r < 1$, a soma resulta em $\dfrac{r}{1-r}$. Com isso, de (2.6), obtemos:

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q} \tag{2.7}$$

agora, usando (2.7) na equação (2.5), temos que

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}, \tag{2.8}$$

assim, multiplicando (2.8) por $q!$, obtemos

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}. \tag{2.9}$$

Observe que, se efetuarmos $q!\left(\dfrac{p}{q} - 1 - \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!} - \cdots - \dfrac{1}{q!}\right)$, em (2.9), obtemos um número inteiro. Mas, sendo $\dfrac{1}{q} \leq 1$, temos um absurdo. Logo e é irracional. $\square$

2.6 Os números irracionais e a Reta Real

O objetivo dessa seção é associar os números irracionais à pontos da Reta Real definida no Capítulo 1. Já vimos que os números racionais não são suficientes para "cobrir" toda a reta. Faremos a localização dos números $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Também faremos uma aproximação da localização do número π.

Lembramos que na seção 1.1 associamos o número 1 à abscissa de A. Como na Figura 2.5.

Figura 2.5: Reta Real com $OA = 1$.
Fonte: a autora.

Agora vamos localizar o ponto associado ao $\sqrt{2}$. Procedemos da seguinte forma: por A traçamos um segmento AB perpendicular à reta real e de comprimento OA. Conforme a Figura 2.6.

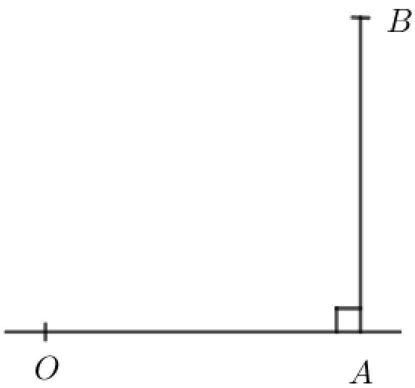

Figura 2.6: Segmento AB, perpendicular e de mesmo comprimento que OA.
Fonte: a autora.

Note que OB mede $\sqrt{2}$. Com um compasso podemos transportar o comprimento OB à Reta Real, determinando assim a abscissa C. Conforme a Figura 2.7.

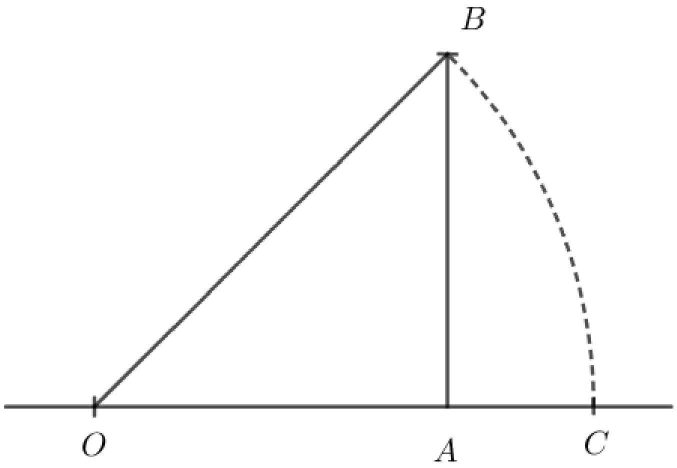

Figura 2.7: Segmento $OC = OB$.
Fonte: a autora.

Temos que a abscissa do ponto C é $\sqrt{2}$.

Agora localizamos o ponto associado a $\sqrt{3}$. A partir do ponto B da Figura 2.7, traçamos um segmento BD, de comprimento OA, perpendicular à OB. Ver Figura 2.8.

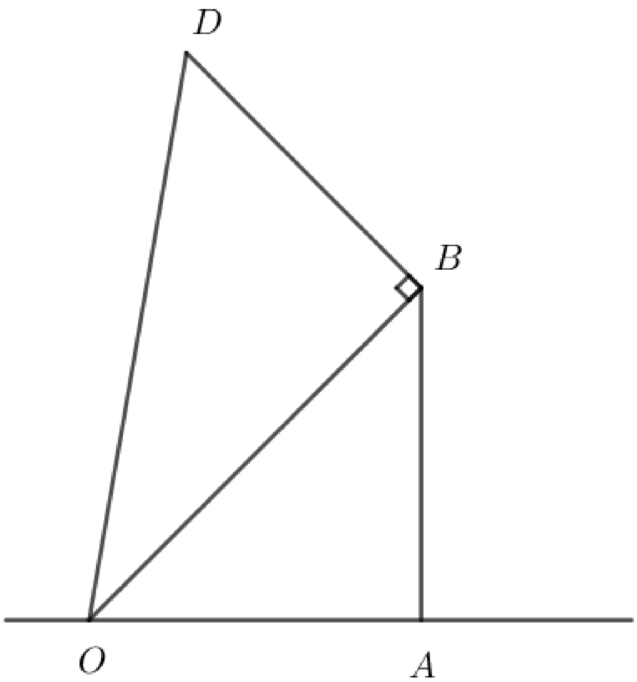

Figura 2.8: A medida do segmento $BD = AB$, com OB e BD perpendiculares.
Fonte: a autora.

Aplicando o Teorema de Pitágoras em OBD, temos que OD mede $\sqrt{3}$. Assim, transportando com o compasso OD à Reta Real, encontramos o ponto E cuja abscissa é $\sqrt{3}$. Ver Figura 2.6.

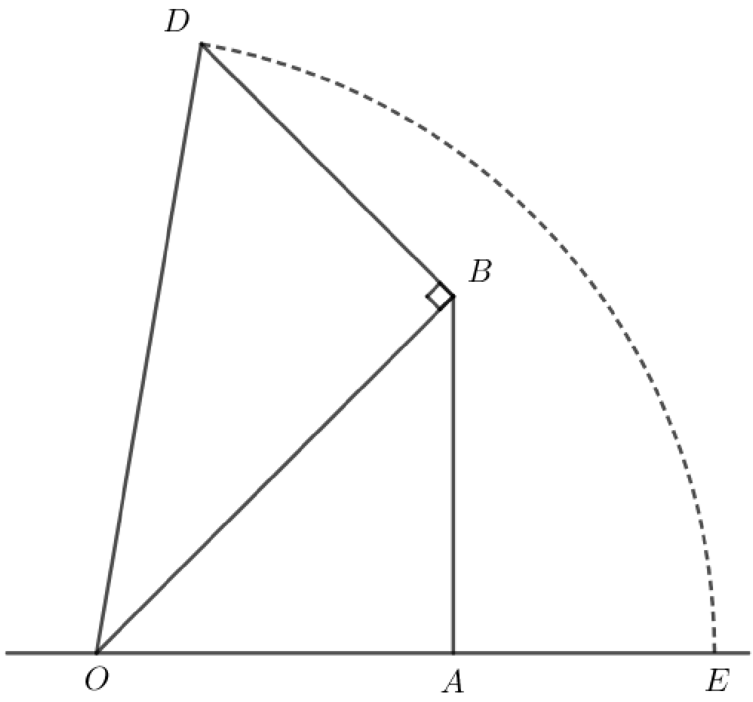

Figura 2.9: Segmento $OD = OE = \sqrt{3}$.
Fonte: a autora.

Para localizar o ponto $-\sqrt{2}$ e $-\sqrt{3}$ procedemos da mesma forma com os pontos localizados à esquerda de O. Ver Figura 2.10.

Figura 2.10: Os pontos F e G representam abscissas negativas.
Fonte: a autora.

A próxima etapa é localizar o ponto da Reta Real que está associado ao número π. Essa localização não será precisa devido à impossibilidade de retificar um arco com régua e compasso. No entanto, faremos tal localização com uma certa precisão.

Considere o segmento OB perpendicular à OA, conforme a Figura 2.11, com medida de OB igual à medida de OA que é 1.

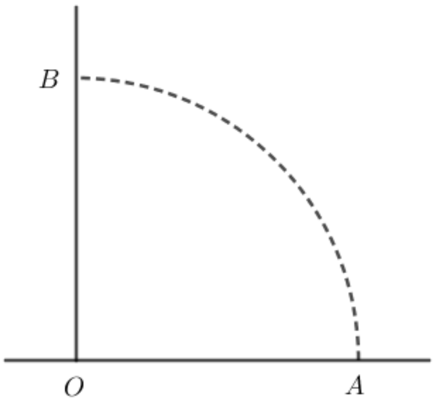

Figura 2.11: Arco AB com comprimento $\frac{\pi}{2}$.
Fonte: a autora.

Temos que o arco AB mede $\frac{\pi}{2}$. Faremos essa retificação do arco AB com uma certa precisão. Assim, conseguimos localizar o ponto na Reta Real de abscissa $\frac{\pi}{2}$. Para localizar o ponto de abscissa π, basta tomar duas vezes este segmento.

Tomamos C o ponto de abscissa $-\frac{7}{4}$. Seja r uma reta que passa por A e é perpendicular à OA. Ver Figura 2.12.

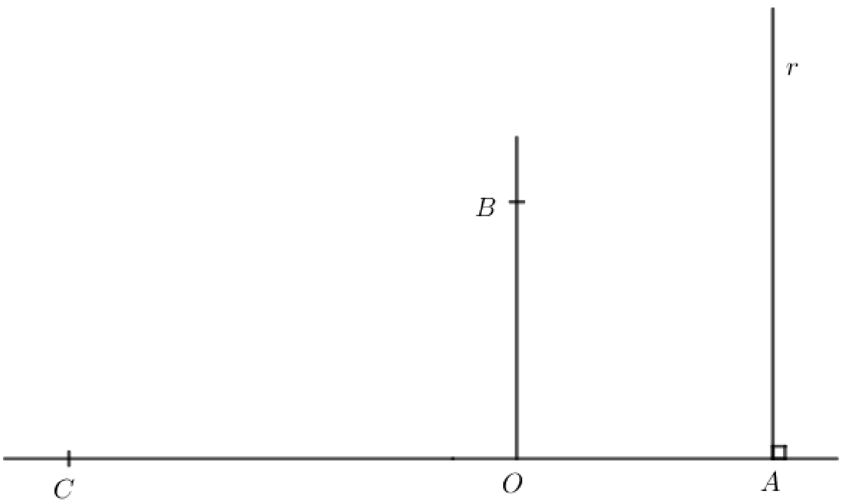

Figura 2.12: A reta r é perpendicular à reta OA.
Fonte: a autora.

Seja s a reta que passa por BC e intercepta a reta r no ponto P. Ver Figura 2.13.

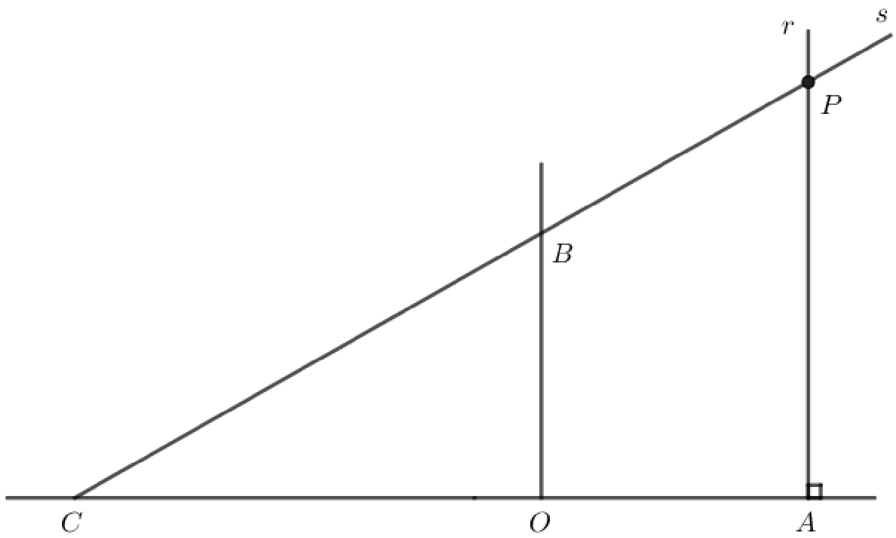

Figura 2.13: Reta BC intercepta r no ponto P.
Fonte: a autora.

Temos que o comprimento do segmento AP é uma aproximação do comprimento do arco AB. De fato, note que os triângulos OBC e APC são semelhantes. Assim, temos que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}.$$

Daqui, obtemos

$$\frac{\overline{AP}}{\frac{11}{4}} = \frac{1}{\frac{7}{4}},$$

portanto,

$$\overline{AP} = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{11}{7} = 1,571428\cdots.$$

Consequentemente,

$$2AP = 3,142857\cdots,$$

e

$$\pi - 2AP < 0,001265\cdots.$$

Portanto, o comprimento do segmento $2AP$ é uma aproximação de π. Note que a construção acima faz uso somente de régua e compasso. Além disso, a retificação do arco feita acima pode ser feita para qualquer arco.

Capítulo 3

Construção dos Números Reais

Neste Capítulo apresentamos uma construção precisa do conjunto dos números reais, a qual é devida à Richard Dedekind, e segue os moldes da construção apresentada em Rudin (1964), onde o leitor pode encontrar mais detalhes. Tal construção envolve conceitos elaborados de matemática e não deve ser abordada no Ensino Médio. Isso expõe uma dificuldade na apresentação dos números reais para alunos desse nível escolar.

Na primeira seção apresentamos o que chamamos de Característica 3. Trata-se de uma característica que o conjunto dos números racionais não possui. De fato, vimos anteriormente que o conjunto dos números racionais é um corpo ordenado. Portanto, em tal conjunto é possível definir duas operações que o tornam um corpo. Além disso, é possível criar um subconjunto de $\mathbb{Q}$, tornando $\mathbb{Q}$ ordenado. Assim, é possível estabelecer uma ordem entre os elementos de $\mathbb{Q}$. Aqui, introduzimos mais uma característica, o corpo ordenado ser completo. Isso distingue os racionais dos reais.

Pensando em termos práticos essa característica não possui uma utilidade direta. Pois, em termos de contas, um corpo ordenado é suficiente para explicar vários fatos. Agora, de um ponto de vista mais estrutural da matemática, essa característica é de extrema importância. Várias demonstrações estão fundamentadas em tal fato.

Esse Capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.1 apresentamos a noção de corpo ordenado completo. Na seção 3.2 apresentamos a construção do conjunto dos números reais de Dedekind, a qual é chamada de construção via cortes de Dedekind. As demonstrações deste capítulo podem ser encontradas em Rudin (1964).

3.1 Característica 3: Corpos ordenados completos

Como descrevemos acima nesta seção apresentamos alguns aspectos sobre corpos ordenados completos. Assim, começamos com algumas definições.

Definição 3.1. *Seja K um corpo ordenado e $X \subset K$,*

(i) Um elemento $b \in K$ é uma cota superior de X se

$$b \geq x, \forall\, x \in X.$$

(ii) Um elemento $a \in K$ é uma cota inferior de X se

$$a \leq x, \forall\, x \in X.$$

(iii) A menor das cotas superiores chamamos de supremo, isto é, para que $b \in K$ seja supremo de X é necessário e suficiente que:

a) $\forall\, x \in X$, tem-se que $x \leq b$;

b) $c \in K$ é tal que $x \leq c, \forall\, x \in X \Rightarrow b \leq c$.

Notação: $b = \sup X$.

iv) A maior das cotas inferiores chamamos de ínfimo, isto é, para que $a \in K$ seja ínfimo de X é necessário e suficiente que

a) $\forall x \in X$, tem-se que $a \leq x$;

b) $c \in K$ é tal que $c \leq x, \forall x \in X \Rightarrow c \leq a$.

Notação: $a = \inf X$.

Agora apresentamos a definição de corpo ordenado completo.

Definição 3.2. *Um corpo ordenado é completo se todo subconjunto não vazio limitado superiormente possuir supremo.*

O exemplo abaixo mostra que $\mathbb{Q}$ não possui característica de ser completo. Sendo assim, se precisamos de tal fato, é necessário trabalhar em outro conjunto.

Exemplo 3.1. *Considere o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ e o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q};\, x \geq 0,\, x^2 < 2\}$. Note que, o conjunto X é limitado por $0 \leq x < 2$. No entanto seu supremo seria $\sqrt{2}$, que não é racional, portanto, X não possui supremo em $\mathbb{Q}$. Faremos a prova disso.*

Considere o conjunto

$$Y = \{y \in \mathbb{Q};\, y > 0 \, e \, y^2 > 2\}.$$

Vamos provar os seguintes fatos:

(i) X não possui elemento máximo;

(ii) Y não possui elemento mínimo;

(iii) Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$.

Ver Figura 3.1.

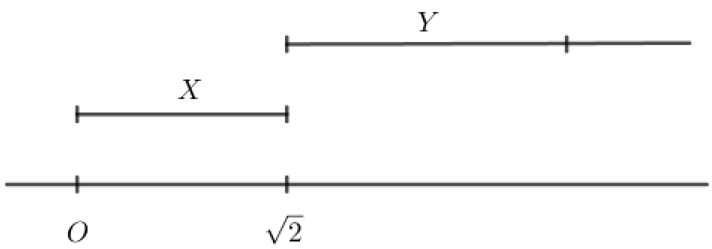

Figura 3.1: Sendo $x \in X$ e $y \in Y$, temos que $x < y$.
Fonte: a autora.

Vamos efetuar as provas.

(i) Provamos que se $p \in X$, então é possível construir um elemento $p+\epsilon$, com $\epsilon > 0$ tal que $p+\epsilon \in X$. Isto é suficiente para concluir que X não possui elemento máximo. Assim, seja $p \in X$ qualquer, consideramos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{2p+1}{2p-p^2}.$$

Contudo, definindo $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(p+\epsilon)^2 &= p^2 + 2p\epsilon + \epsilon^2 \\
&= p^2 + \frac{2p}{n} + \frac{1}{n^2} \\
&< p^2 + \frac{2p}{n} + \frac{1}{n} \\
&= p^2 + \frac{1}{n}(2p+1) \\
&< p^2 + \frac{1}{n}[(2p-p^2)n]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= p^2 + 2 - p^2 \\ &= 2, \end{aligned}$$

ou seja, $p + \epsilon$ tem a propriedade que define X. Portanto, $p + \epsilon \in X$.

(ii) Provamos que se $q \in Y$, então é possível construir um elemento $q - \epsilon$, com $\epsilon > 0$, tal que $q - \epsilon \in Y$. Assim, Y não possui elemento mínimo.

Seja $q \in Y$ qualquer. Considere $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > \frac{2y}{y^2 - 2}.$$

Assim, tomando $\epsilon = \dfrac{1}{n}$ temos que

$$\begin{aligned} (y-\epsilon)^2 &= y^2 - 2y\epsilon + \epsilon^2 \\ &= y^2 - \frac{2y}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &> y^2 - \frac{2y}{n} \\ &> y^2 - \frac{1}{n}[n(y^2 - 2)] \\ &= y^2 - y^2 + 2 \\ &= 2, \end{aligned}$$

ou seja, $y - \epsilon \in Y$. Portanto Y não possui elemento mínimo.

(iii) Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Assim

$$x^2 < 2 < y^2.$$

Daqui,

$$x^2 < y^2,$$

com x, $y > 0$, temos

$$x < y.$$

Agora, podemos concluir que não existe $a = \sup X$, uma vez que $X \subset \mathbb{Q}$. Suponha, por um momento que existe $a = \sup X$, então

$$\text{ou } a^2 < 2, \text{ ou } a^2 > 2, \text{ou } a^2 = 2.$$

Se ocorresse o primeiro caso, teríamos que $a \in X$, ou seja sup $\in X$, logo X teria um elemento máximo, mas isso contraria o item (i).

Se ocorresse o segundo caso, então $a \in Y$, disso e do item (ii) temos que existe $\epsilon > 0$ tal que

$$a - \epsilon \in Y.$$

Disso e do item (ii), temos que

$$x < a - \epsilon, \forall x \in X,$$

ou seja, $a - \epsilon$ é maior do que todo elemento do conjunto x. Assim $a - \epsilon$ é uma cota superior de X menor do que $a = \sup X$, o que é uma contradição.

Portanto, deveria ocorrer o terceiro caso, isto é, $a^2 = 2$. Mas, no Capítulo 2 provamos que $\sqrt{2}$ não é racional, logo X não possui supremo em $\mathbb{Q}$. Portanto, não existe $a = \sup X$.

3.2 Cortes de Dedekind

O matemático alemão Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), que teve sua tese de doutorado muito elogiada por Gauss, dedicou a maior parte de sua vida ao ensino secundário. No entanto, em alguns anos em que permaneceu na Universidade de Gottingen desenvolveu estudos sobre números irracionais e a reta numérica, mais tarde nomeados de cortes de Dedekind.

Definição 3.3 (Cortes de Dedekind). *Um conjunto A de números racionais é chamado de corte de Dedekind se*

(i) $A \neq \emptyset$ e $A \neq \mathbb{Q}$*;*

(ii) Se $p \in A$ *e* $q < p$ $(q \in \mathbb{Q})$*, então* $q \in A$*;*

(iii) A *não possui máximo em* $\mathbb{Q}$*.*

Teorema 3.1 (Corte Racional). *Seja $r \in \mathbb{Q}$. Se $A = \{p \in \mathbb{Q}; p < r\}$, então A é um corte.*

Demonstração. Temos que provar que A satisfaz os três itens da definição de corte. Os dois primeiros segue sem dificuldades. Para o terceiro item, suponha que existe $p \in A$ tal que $p = \max A$, então, sabendo que

$$p < \frac{p+r}{2} < r$$

com p, $r \in \mathbb{Q}$, temos

$$\frac{p+r}{2} \in \mathbb{Q},$$

logo

$$\frac{p+r}{2} \in A,$$

isto é, obtemos um elemento de A maior do que p, então p não é o máximo de A. □

Definição 3.4. *O corte A construído no teorema acima é chamado de corte racional e será denotado por $A = r^*$.*

A partir disso, podemos estudar o exemplo seguinte.

Exemplo 3.2. *Seja $A = \left\{p \in \mathbb{Q}; p < \dfrac{3}{4}\right\}$, pela definição acima A é um corte racional e é denotado por $\left(\dfrac{3}{4}\right)^*$.*

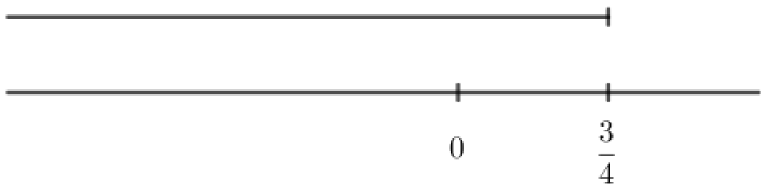

Figura 3.2: Corte $\left(\dfrac{3}{4}\right)^*$.
Fonte: a autora.

Agora, definimos a igualdade entre cortes.

Definição 3.5. *Sejam A e B cortes. Diremos que $A = B$ quando*

(i) $p \in A \Rightarrow p \in B$, $\forall\ p \in A$;

(ii) $p \in B \Rightarrow p \in A$, $\forall\ p \in B$.

Exemplo 3.3.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^* = \left(\frac{2}{4}\right)^* \ \textit{pois}\ \left(\frac{1}{2}\right)^* \subset \left(\frac{2}{4}\right)^* \ \textit{e}\ \left(\frac{2}{4}\right)^* \subset \left(\frac{1}{2}\right)^*.$$

A definições seguintes estabelecem uma relação de ordem no conjunto dos cortes.

Definição 3.6. *Sejam A, B cortes. Diremos que A é menor do que B (Notação: $A < B$) quando $\exists\ p \in B$; $p \notin A$.*

Definição 3.7. *Diremos que $A \leq B$ quando $A = B$ ou $A < B$.*

O teorema que segue nos auxilia na definição de soma entre cortes.

Teorema 3.2. *Sejam A e B cortes. Seja C o conjunto dado por*

$$C = \{r \in \mathbb{Q}; r = p + q, p \in A \text{ e } q \in B\},$$

então C é um corte.

Figura 3.3: Exemplo de cortes em que $\left(\frac{1}{2}\right)^* < \left(\frac{3}{4}\right)^*$.
Fonte: a autora.

Definição 3.8. *O corte C obtido no teorema acima é chamado de soma de A e B, e será denotado por $A + B$.*

Exemplo 3.4.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^* = \left\{p \in \mathbb{Q};\ p < \frac{1}{2}\right\} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^* = \left\{p \in \mathbb{Q};\ p < \frac{3}{4}\right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^* + \left(\frac{3}{4}\right)^* &= \left\{r \in \mathbb{Q};\ r = p + q,\ p \in \left(\frac{1}{2}\right)^* \ e\ q \in \left(\frac{3}{4}\right)^*\right\} \\ &= \left\{r \in \mathbb{Q};\ r < \frac{7}{4}\right\} \end{aligned}$$

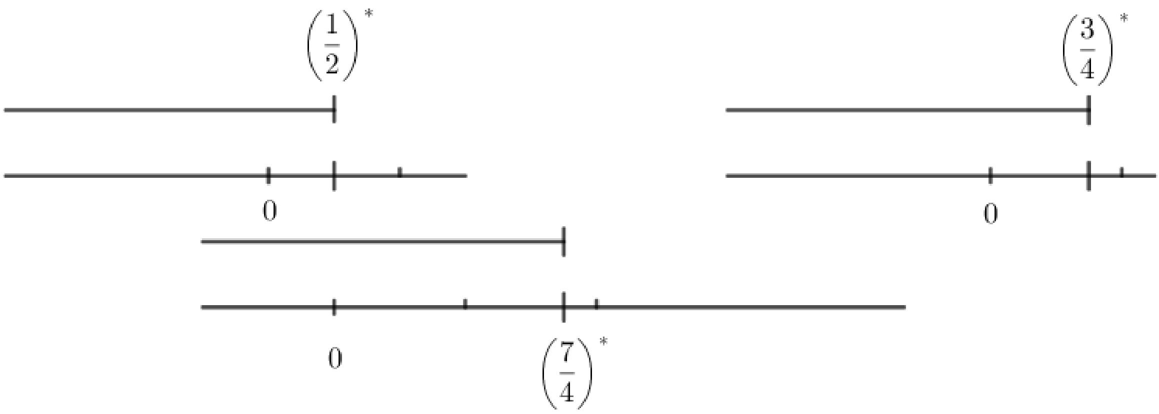

Figura 3.4: Corte $\left(\frac{1}{2}\right)^* + \left(\frac{3}{4}\right)^* = \left(\frac{7}{4}\right)^*$.
Fonte: a autora.

O teorema à seguir prova que no conjunto de cortes são válidas as propriedades comutativa, associativa e elemento neutro para a adição.

Teorema 3.3. *Sejam A, B, C cortes. Então* *(i)* $A + B = B + A$;

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(iii) $A + 0^* = A$.

Além destas propriedades, também podemos notar que todo corte A possui simétrico.

Teorema 3.4. *Seja A um corte. Então existe um e somente um corte B tal que $A+B = 0^*$.*

Definição 3.9. *O corte B construído no teorema acima é chamado de simétrico de A e será denotado por $-A$.*

Resumindo o que foi feito até aqui temos que, definimos no conjunto dos cortes uma operação, chamada de adição, a qual satisfaz as propriedades de 1 à 4 da definição de corpo. Definimos também uma relação de ordem nesse conjunto de cortes. Iremos agora definir a multiplicação de cortes.

Teorema 3.5. *Sejam A e B cortes tal que $A \geq 0^*$ e $B \geq 0^*$, seja também*

$$C = \{r \in \mathbb{Q}; r < 0 \ \textit{ou} \ r = pq, \ \textit{onde} \ p \in A, q \in B, p, q \geq 0\},$$

então C é um corte.

Definição 3.10. *Sejam $A \geq 0^*$ e $B \geq 0^*$, o corte definido no teorema acima é chamado de produto de A e B, e é denotado por $A \cdot B$.*

Definição 3.11. *Dado um corte A, definimos o valor absoluto de A, e denotaremos por $|A|$, como sendo:*

$$|A| = \begin{cases} A & se \quad A \geq 0^*, \\ -A & se \quad A < 0^*. \end{cases}$$

A próxima definição estende a definição 3.10 para A e B cortes quaisquer.

Definição 3.12. *Sejam A, B cortes . Definimos:*

$$A \cdot B = \begin{cases} -(|A| \cdot |B|) & se \quad A < 0^*, B \geq 0^*, \\ -(|A| \cdot |B|) & se \quad A \geq 0^*, B < 0, \\ |A| \cdot |B| & se \quad A < 0^*, B < 0^*. \end{cases}$$

Com isso, podemos enumerar as propriedades da multiplicação seguintes:

Teorema 3.6. *Para quaisquer cortes A, B, C temos que*

1. *$A \cdot B = B \cdot A$;*

2. *$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;*

3. *$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;*

4. *$A \cdot 0^* = 0^*$;*

5. *$A \cdot B = 0^*$ somente se $A = 0^*$ ou $B = 0^*$;*

6. *$A \cdot 1^* = A$;*

7. *Se $0^* < A < B$, e $C > 0^*$, então $A \cdot C < B \cdot C$;*

8. *Dado $A \neq 0^*$, existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = 1^*$.*

Agora, apresentamos um resultado que permite ver $\mathbb{Q}$ como um subconjunto do conjunto dos cortes. Para isso, é construída uma aplicação $\varphi : \mathbb{Q} \to \zeta$, onde ζ é o conjunto dos cortes, a qual é um isomorfismo. Ou seja, é uma aplicação que preserva as operações de soma e multiplicação. Além disso, provamos que tal aplicação preserva a ordem entre os elementos.

Teorema 3.7. *Para quaisquer racionais p e q, temos que:*

(i) $p^* + q^* = (p + q)^*$;

(ii) $p^* \cdot q^* = (p \cdot q)^*$;

(iii) $p^* < q^* \Leftrightarrow p < q$.

Demonstração. Para efetuar a prova o item (i), consideremos $r \in p^* + q^*$, assim, temos que $r = s + t$, com $s < p$ e $t < q$, de modo que $r < p + q$. Portanto, $r \in (p + q)^*$.

Por outro lado, tomando $r \in (p + q)^*$, então $r < p + q$. Sejam,

$$h = p + q - r,$$

$$s = p - \frac{h}{2}$$

e

$$t = q - \frac{h}{2}.$$

Logo, $s \in p^*$, $t \in q^*$ e $r = s + t$, de modo que $r \in p^* + q^*$, o que prova o item (i).

A prova do item (ii) é análoga.

Agora, para provar o item (iii), consideremos que:

- Se $p < q$, então $p \in q^*$, mas $p \notin p^*$, de modo que $p^* < q^*$;
- Se $p^* < q^*$, existe um racional r tal que $r \in q^*$, $r \notin p^*$.

Portanto,

$$p \leq r < q.$$

$\square$

Agora sim, podemos construir um isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ e um subconjunto do conjunto dos cortes. Seja

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q} &\rightarrow \zeta \\ q &\mapsto \varphi(q) = q^*. \end{aligned}$$

Sejam $p, q \in \mathbb{Q}$ quaisquer, então

$$\varphi(p+q) = (p+q)^* = p^* + q^* = \varphi(p) + \varphi(q)$$

e

$$\varphi(p \cdot q) = (p \cdot q)^* = p^* \cdot q^* = \varphi(p) \cdot \varphi(q).$$

Portanto, φ é um isomorfismo. Além disso, temos que

$$p < q \Leftrightarrow p^* < q^* \Leftrightarrow \varphi(q) < \varphi(q).$$

Agora, podemos definir o que é um número real.

Definição 3.13. *Os cortes serão chamados de números reais e o conjunto dos números reais é representado por $\mathbb{R}$.*

O próximo resultado é chamado de Teorema de Dedekind e nos fornece os ingredientes para provar que o conjunto dos números reais é completo.

Teorema 3.8 (Dedekind)**.** *Sejam X e Y conjuntos de números reais tal que:*

(i) $X \cup Y = \mathbb{R}$;

(ii) $X \cap Y = \emptyset$;

(iii) $X \neq \emptyset$ *e* $Y \neq \emptyset$;

(iv) Se $\alpha \in X$ *e* $\beta \in Y$*, então* $\alpha < \beta$.

Então existe um, e somente um, número real γ tal que $\alpha \leq \gamma$, $\forall\ \alpha \in X$, e $\gamma \leq \beta$, $\forall\ \beta \in Y$.

Corolário 3.1. *Sob as hipóteses do teorema acima, ou X contém elemento máximo, ou Y contém elemento mínimo.*

Agora sim provamos que $\mathbb{R}$ é completo.

Teorema 3.9. *Seja $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Se X é limitado superiormente, então X possui supremo.*

Demonstração. Sejam

$$\begin{aligned} A &= \{\alpha \in \mathbb{R} \text{ tal que } \exists\ x \in X \text{ com } \alpha < x\}, \\ B &= A^c = \{\alpha \in \mathbb{R};\ \alpha \geq x,\ \forall\ x \in X\}. \end{aligned}$$

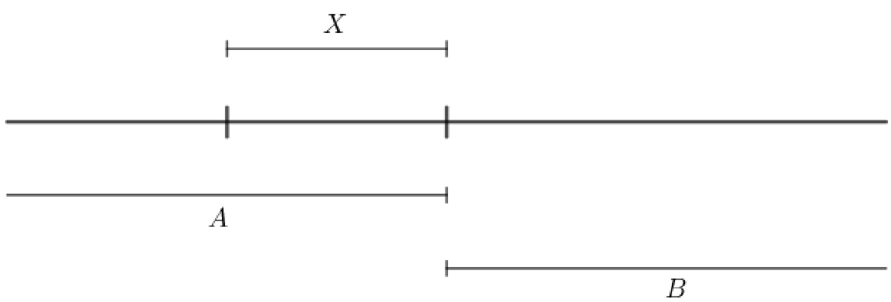

Figura 3.5: O conjunto X é limitado superiormente. Representação quadrática de A e B. Fonte: a autora.

Note que:

- nenhum elemento de A é cota superior de X;
- todo elemento de B é cota superior de X.

(i) $A \cup B = \mathbb{R}$;

(ii) $A \cap B = \emptyset$;

(iii) $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$;

De fato, sendo $X \neq \emptyset$, então existe $x \in X$, Assim $x - 1 < x$, logo $x - 1 \in A$, ou seja, $A \neq \emptyset$.

Como X é limitado superiormente tem-se que existe y tal que $x \leq y$, $\forall\ x \in X$, então $y \in B$, ou seja $B \neq \emptyset$.

(iv) Se $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, então $\alpha < \beta$.

Se $\alpha \in A$, então $\exists\, x \in X$ tal que $\alpha < x$, se $\beta \in B$, então $x \leq \beta$, portanto $\alpha < x \leq \beta$, logo $\alpha < \beta$, $\forall\, \alpha \in A$, $\beta \in B$.

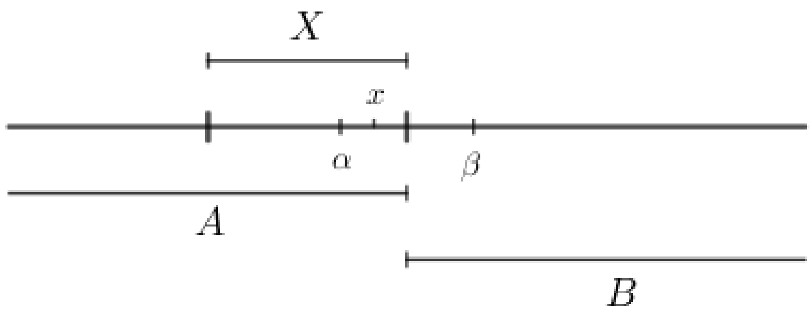

Figura 3.6: $\forall \alpha \in A$ e $\forall \beta \in B$, então $\alpha < \beta$.
Fonte: a autora.

Pelo corolário acima temos que:

- ou A tem elemento máximo;
- ou B tem elemento mínimo.

Mostraremos que A não tem máximo. De fato, seja $\alpha \in A$, então existe $x \in X$ tal que $\alpha < x$, escolha α' tal que $\alpha < \alpha' < x$, então $\alpha' < x$, assim $\alpha' \in A$, isto é, existe $\alpha' \in A$ tal que $\alpha < \alpha'$, então α não é máximo de A.

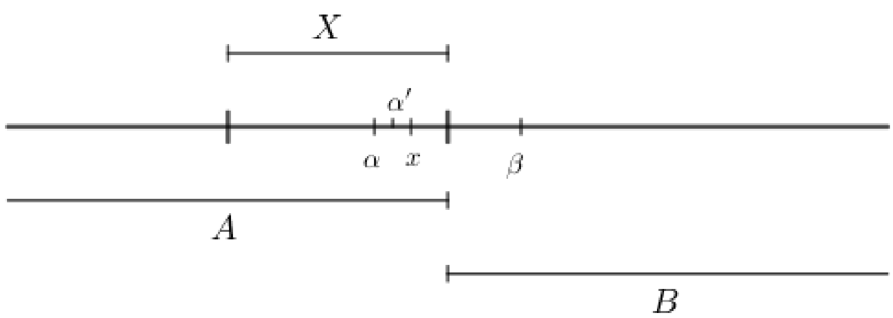

Figura 3.7: A não tem um elemento máximo.
Fonte: a autora.

Portanto o conjunto B tem elemento mínimo, como B é o conjunto das cotas superiores de X, tem-se então que o conjunto X possui supremo. $\square$

Capítulo 4

Densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e uma Proposta para o Ensino dos Números Reais

4.1 Densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

O objetivo desta seção é mostrar geometricamente que dados dois números reais a e b, existe um número racional c entre a e b.

Para simplificar a descrição, consideremos a e b racionais, com $a < b$. Como a soma dos números racionais é um número racional, temos que

$$a + b \in \mathbb{Q}.$$

Como $a + b \in \mathbb{Q}$ e $2 \in \mathbb{Q}$, então observando a definição de $\mathbb{Q}$, temos que

$$\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}.$$

O próximo passo é verificar que, sendo $a < B$ temos

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

De fato, temos que:

$$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

e

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} < \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

Portanto, $\frac{a+b}{2}$ é um número racional entre a e b.

Agora faremos a localização de $\frac{a+b}{2}$ na Reta Real. Para isso, trace uma reta perpendicular à Reta Real da seguinte forma: tome o compasso com abertura de medida y, maior do que a metade da distância entre a e b. Forme o triângulo como na Figura 4.1.

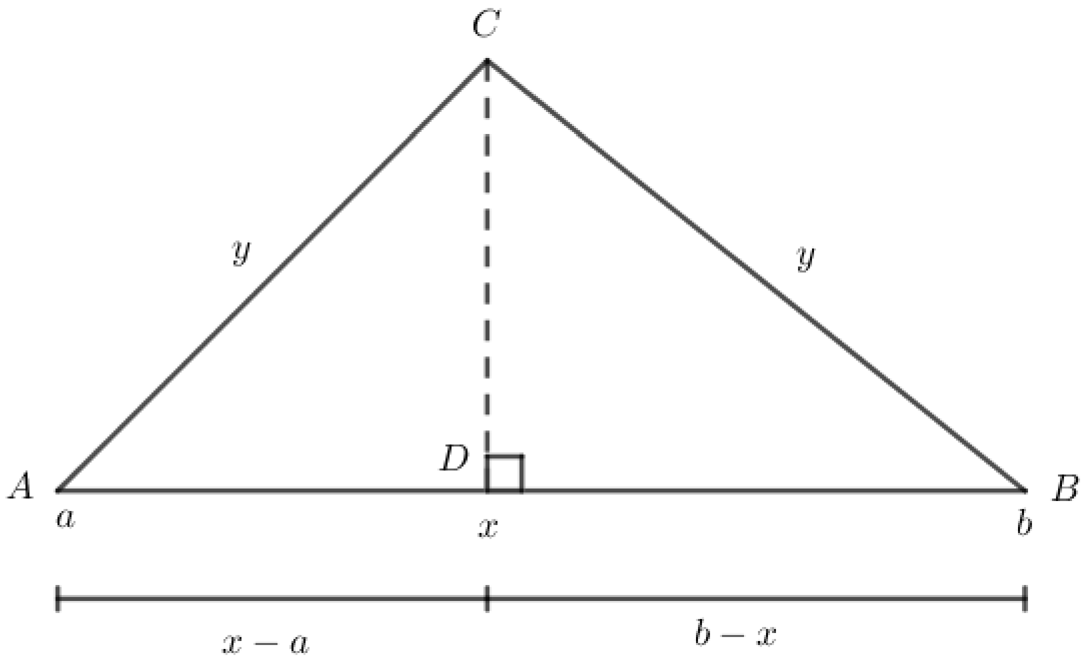

Figura 4.1: Triângulo ABC.
Fonte: a autora.

Temos que os triângulos ACD e BCD são semelhantes, então

$$\frac{x-a}{y} = \frac{b-x}{y},$$

daqui,

$$x - a = b - x,$$

portanto,

$$x = \frac{a+b}{2},$$

ou seja, o ponto x é o número racional entre a e b construído acima.

4.2 Densidade de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

Nessa seção mostraremos que dados dois números reais a e b existe um número irracional entre a e b.

Para simplificar a descrição, consideremos a e b racionais. Vamos provar que:

$$c = a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (b - a)$$

é um número irracional entre a e b. Inicialmente, note que se $\lambda \in \mathbb{Q}$, então

$$\lambda \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

De fato, se $\lambda \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então existe $\beta \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\lambda \cdot \sqrt{2} = \beta.$$

Logo,

$$\sqrt{2} = \frac{\beta}{\lambda},$$

ou seja, o número irracional $\sqrt{2}$ está escrito como um quociente, o que é uma contradição. Assim, tomando

$$\lambda = \frac{b - a}{2},$$

temos que

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{b - a}{2}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Agora, se $\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então

$$a + \delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

De fato, se $a + \delta \in \mathbb{Q}$, então existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que

$$a + \delta = \alpha,$$

logo

$$\delta = \alpha + (-a) \in \mathbb{Q},$$

o que é uma contradição. Tomando

$$\delta = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{b - a}{2}\right)$$

temos que

$$c := a + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{b - a}{2}\right) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Agora verificamos que c está entre a e b. Para isso, note que

$$\begin{aligned} a+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right) &= a+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a \\ &= \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot a+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b \\ &< \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot b+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b \\ &= b, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right) &= a+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a \\ &> a+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a \\ &= a. \end{aligned}$$

O próximo passo é localizar o ponto c na Reta Real.

Inicialmente, consideramos uma reta r perpendicular à Reta Real e que passe por a. Marque um ponto C em r tal que $AC = 1$. Conforme Figura 4.2.

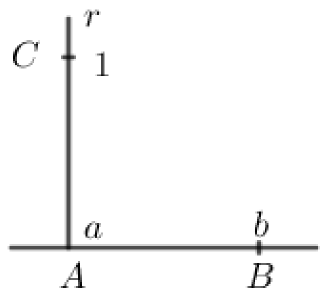

Figura 4.2: AB é perpendicular à AC e $AC = 1$.
Fonte: a autora.

Seja D o ponto médio entre A e B e considere E o ponto de r tal que $AE = AD$. Ver Figura 4.3.

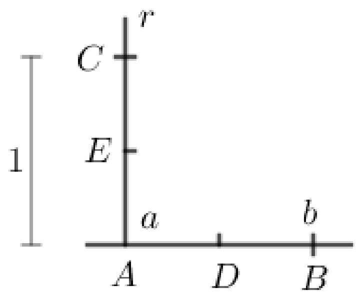

Figura 4.3: E e D são pontos médios de AC e AB, respectivamente.
Fonte: a autora.

Seja F tal que $AF = \sqrt{2}$. Esse segmento pode ser construído conforme a seção 2.6. Ver Figura 4.4.

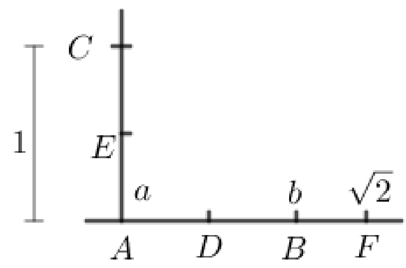

Figura 4.4: O segmento $AF = \sqrt{2}$.
Fonte: a autora.

Seja s a reta que passa por C e F. Construa uma reta t, paralela à reta s e que passe por E. Ver Figura 4.5.

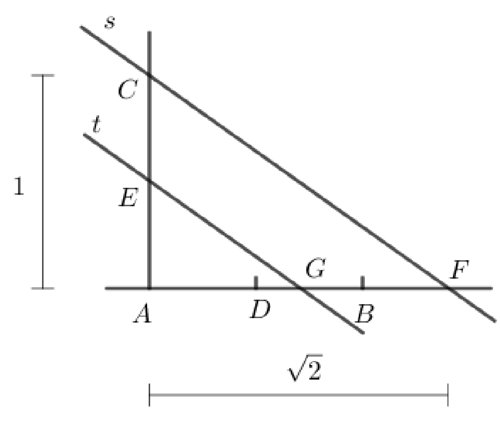

Figura 4.5: Reta t paralela à reta s, e que contém E.
Fonte: a autora.

Seja G o ponto que pertence à Reta Real e à reta t. Como os triângulos AEG e ACF são semelhantes, temos que

$$\frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AC}.$$

Logo,

$$\frac{AG}{\frac{b-a}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1},$$

ou seja,

$$AG = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right).$$

Disso, e como

$$c = OA + AG,$$

segue que $c = a + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)$ como queríamos demosntrar.

4.3 Uma proposta metodológica

Nesta seção apresentamos uma proposta de como introduzir o conjunto dos números reais à alunos do ensino fundamental e médio. A ideia é trabalhar com 5 momentos. No entanto, destacamos que trata-se de uma visão preliminar, que deve estar associada a um planejamento que dimensione de forma adequada a evolução do conhecimento dos alunos perante o tema.

4.3.1 Provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional

É fundamental mostrar aos alunos a existência de números que não podem ser expressos como quociente de números inteiros. A prova envolvendo $\sqrt{2}$, que apresentamos aqui pode ser explorada.

Objetivo:

Encaminhamento metodológico: A ideia é mostrar que não existe um número racional cujo quadrado é 2 explorando a prova por contradição, analisando os casos em que o numerador e o denominador são número par ou ímpar.

A prova apresentada abaixo pode ser encontrada em Vicente (2014).

Suponha que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$x^2 = 2.$$

Então existem $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, primos entre si, tais que:

$$x = \frac{m}{n},$$

logo,

$$x^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Assim,

$$m^2 = 2n^2. \tag{4.1}$$

Agora vamos analisar as possibilidades que ocorrem com (4.1) quando m e n são números pares ou ímpares. Então temos que pode ocorrer:

m	n
par	par
ímpar	par
ímpar	ímpar
par	ímpar

Tabela 4.1: Combinações entre m e n par ou ímpar.

Antes de prosseguir mostre ao aluno que:

- o resultado de um número par elevado ao quadrado é um número par;
- o resultado de um número ímpar elevado ao quarado é um número ímpar.

Contudo, temos que o primeiro caso não ocorre, pois m e n são primos entre si.

O segundo e o terceiro caso também não ocorrem. Pois, se m é ímpar, então m^2 é ímpar, mas por (4.1) temos que m^2 é par, ou seja, estas opções para m e n não ocorrem.

Agora, analisemos o último caso. Para isso, inicialmente chame a atenção dos alunos para a decomposição de um número natural em fatores primos. Faça exemplos como:

$$\begin{aligned}
1035 &= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23, \\
135 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5, \\
429 &= 3 \cdot 11 \cdot 13, \\
1028 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2, \\
530 &= 2 \cdot 5 \cdot 53,
\end{aligned}$$

$$140 \quad = \quad 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Explique para os alunos que a decomposição em fatores primos de um número ímpar não tem fator 2.

Assim, considere a decomposição em fatores primos de n o qual é ímpar.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n,$$

onde $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ são números primos e nenhum p_i é par.

Consequentemente a decomposição em números primos de n^2 não possui 2, pois

$$n^2 = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n)^2 = p_1p_1 \cdot p_2p_2 \cdots p_np_n,$$

e $p_1, p_2, \cdots, p_n$ não são o número 2. Assim,

$$2n^2 = 2p_1p_1 \cdot p_2p_2 \cdots p_np_n,$$

ou seja, a decomposição em fatores primos de $2n^2$ tem o número 2 somente uma vez.

Agora, pensemos na decomposição em fatores primos de m^2. Como m é par, então m^2 tem uma quantidade par de vezes que o número 2 aparece em sua decomposição. Resumindo:

- $2n^2$ tem uma quantidade ímpar de vezes que o número 2 aparece em sua decomposição (uma vez);
- m^2 tem uma quantidade par de vezes que o número 2 aparece em sua decomposição.

Estes fatos não ocorrem simultaneamente. Portanto, o quarto caso da tabela também não ocorre.

Como nenhum caso é possível, concluímos que não é possível escrever o número x tal que $x^2 = 2$, como uma fração.

4.3.2 Localização de números racionais e irracionais na Reta Real

Um fato muito importante que deve ser trabalhado é a disposição dos números reais na Reta Real. O apelo à Reta Real permite ao aluno a visualização geométrica na ordem em que esses números estão organizados. A construção de exemplos com números como: 0, 1, 2, -3, -5, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $-\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, etc, pode ser feita como apresentamos nos Capítulos 1 e 2.

Objetivos:

- localizar números racionais e irracionais na Reta Real;
- perceber que os números estão organizados na Reta Real e que cada ponto está associado de modo único à um número.

Encaminhamento metodológico:

Proceder como descrito no Capítulo 1:

- introduzir o conceito de Reta Real;
- localizar alguns números naturais na Reta Real;
- localizar alguns números inteiros negativos na Reta Real;
- localizar alguns números racionais não inteiros na Reta Real.

Após isso, chamar a atenção dos alunos que, como o $\sqrt{2}$, os números $\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{5}$ também não são números racionais.

Proceder da seguinte forma:

- construir segmentos de comprimento $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ como no Capítulo 3;
- localizar $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$ e $-\sqrt{3}$ na Reta Real, como no Capítulo 3.

4.3.3 Densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

Após trabalhar com os alunos a localização dos números na Reta Real deve-se provar/verificar o conceito de que entre quaisquer dois números reais é possível obter um número racional e um número irracional. Deve ser explicado/mostrado ao aluno que os números irracionais estão distribuídos por toda a Reta Real.

Objetivo: Mostrar aos alunos que os números racionais e os números irracionais estão distribuídos por toda a Reta Real.

Encaminhamento metodológico:

- Inicialmente considere dois números racionais, como por exemplo $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$;
- Verifique que
$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2},$$
ou seja, a média de $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ está entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$;

- Localize $\frac{1}{3}$, $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}$ e $\frac{1}{2}$ na Reta Real;
- Faça o mesmo exemplo com números sugeridos pelos alunos;
- Mostre aos alunos que se $\lambda \in \mathbb{Q}$, então
$$\lambda \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$$
- Considere os números:
$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{3} + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{2} \right);$$
- Verifique que
$$\frac{1}{3} < \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{2}$$
e explique que $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ é um número irracional entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$;
- Faça o mesmo exemplo com números sugeridos pelos alunos;
- Explique que é possível provar que dados dois números quaisquer sempre é possível (usando os argumentos acima) construir números racionais e números irracionais entre eles.

4.3.4 Definição de $\mathbb{R}$

Após explorar geometricamente a localização dos números racionais e irracionais na reta real e também a densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, defina o conjunto dos números reais com a união
$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Objetivos:

- Introduzir o conjunto dos números reais;
- Associar os números reais à pontos da Reta Real.

Encaminhamento metodológico:

- Definir o conjunto dos números racionais;
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^* \right\}$$
e o conjunto dos números irracionais como
$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \text{ o conjunto dos números que não podem ser escritos como fração;}$$

- Definir

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$$

- Chamar a atenção para a existência de números irracionais que não estão associados ao cálculo de raiz quadrada. Neste momento falar/descrever sobre o número π;

- Trabalhar o conceito das dízimas não periódicas, números irracionais.

4.3.5 Porque é importante estudar o conjunto dos números reais

O professor deve explicar que é necessário estabelecer conceitos matemáticos importantes, os quais são possíveis quando trabalha-se o conjunto dos números reais. Um exemplo que pode ser trabalhado é a definição exponencial que possui uma aplicação notória no estudo de modelos relacionados à dinâmica populacional. Um exemplo é o que envolve o estudo da evolução de casos relacionados ao COVID-19.

Objetivos: Mostrar a importância de se estabelecer o conjunto dos números reais.

Encaminhamento metodológico:

Apresentar ao aluno o seguinte exemplo:

Suponha que um indivíduo está infectado com determinado vírus. Suponha que estudos apontam que a cada semana um indivíduo transmite tal vírus para duas outras pessoas. Assim, ao final de cada semana teremos a quantidade de contaminados conforme o quadro abaixo.

Semana	Infectados
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$
$\vdots$	$\vdots$
n	2^n

Podemos escrever uma fórmula geral para representar o número de infectados $f(n)$ em função do números de semanas que se passaram, n, da seguinte forma

$$f(n) = 2^n.$$

Podemos associar os pares ordenados $(1, f(1))$, $(2, f(2))$, $\cdots$, $(n, f(n))$ como pontos no gráfico abaixo.

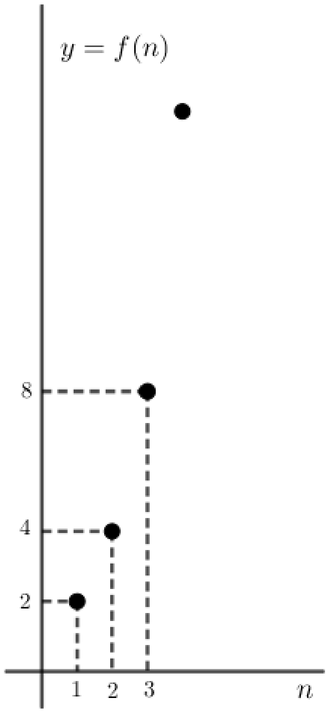

Figura 4.6: Função $y = f(n) = 2^n$.
Fonte: a autora.

Explorar as seguintes questões:

- após 4 semanas, quantas pessoas foram infectadas?

$$f(4) = 2^4 = 16.$$

- após 4 meses, quantas pessoas foram infectadas?

$$f(16) = 2^{16} = 65536.$$

- explicar que expressões do tipo

$$f(x) = a^x,$$

onde a é uma constante positiva, diferente de 1, nos conduz às funções exponenciais.

- explicar que tais funções são definidas no conjunto dos números reais e são muito importantes para explicar fenômenos como o crescimento populacional.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, Arthur da Costa; CORRÊA, Francisco José Sobreira de Araújo. **Papiro de Rhind e as Frações Unitárias.** Revista do Professor de Matemática , São Paulo, v. 35, p. 02-08, 1997.

ÁVILA, Geraldo. **Grandezas Incomensuráveis e Números Irracionais.** Revista do Professor de Matemática , São Paulo, v. 05, 1984.

ÁVILA, Geraldo. **Eudoxo, Dedekind, Números Reais e Ensino Matemática.** Revista do Professor de Matemática , São Paulo, v. 07, 1985.

DIAS, Sandy da Conceição. **Simon Stevin e os Números Decimais.** Educação Matemática na Contemporaneidade: Desafios e Possibilidades. São Paulo – SP, 2016.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Números Irracionais e Transcendentes.** Rio de Janeiro: Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Coleção Fundamentos da Matemática elementar, 3 ed, 2011.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real, volume 1: Funções de Uma Variável.** 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

PIERRE, Eymard; LAFON, Jean-Pierre. **The Number π.** American Mathematical Society, Bourg la Reine, 2004.

PRECIOSO, Juliana Conceição; PEDROSO, Hermes Antonio. **História do Número e: Gênese e Aplicações.** Revista Eletrônica Matemática e Estatística em Foco. Uberlândia - MG, v. 1, n. 1. 2013.

RUDIN, Walter. **Principles of Mathematical Analysis.** McGraw-Hill Book Company. Inc, 2 ed, New York, 1964.

VICENTE, Daniela Maria Grande; VICENTE, André. **Números Irracionais e Segmentos Incomensuráveis: Uma Abordagem Envolvendo o Software Geogebra**. In: XXVIII Semana Acadêmica de Matemática, 2014, Cascavel. Anais XXVIII - SAM, 2014.