Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Angelo Acácio Araújo Silva

Os Quatro Aleatórios

Uma proposta pedagógica voltada a manutenção do conhecimento matemático através de desafios aritméticos

João Pessoa, PB
2021

Angelo Acácio Araújo Silva

Os Quatro Aleatórios

Uma proposta pedagógica voltada a manutenção do conhecimento matemático através de desafios aritméticos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro.

João Pessoa, PB
2021

Angelo Acácio Araújo Silva

S586q Silva, Angelo Acácio Araújo.
Os quatro aleatórios : uma proposta pedagógica voltada a manutenção do conhecimento matemático através de desafios aritméticos / Angelo Acácio Araújo Silva. - João Pessoa, 2021.
52 f. : il.

Orientação: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Aritmética. 2. Números aleatórios. 3. Quatro quatros. 4. Curiosidades matemáticas. I. Ribeiro, Bruno Henrique Carvalho. II. Título.

UFPB/BC CDU 511.1(043)

Elaborado por RUSTON SAMMEVILLE ALEXANDRE MARQUES DA SILVA - CRB-15/0386

Os Quatro Aleatórios

Uma proposta pedagógica voltada a manutenção do conhecimento matemático através de desafios aritméticos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra
Aprovada em 31 de Agosto de 2021
Banca Examinadora:

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Gilson Mamede de Carvalho – UFRPE
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto – UFPB
(Examinador Interno)

João Pessoa, PB
2021

Dedico este trabalho à minha mãe, que aos meus olhos, sempre foi um ser humano exemplar, na qual me espelho para querer crescer cada vez mais.Também quero dedicar esta obra a meus filhos, com intuito de motiva-los na busca por conhecimentos e a minha esposa, que sempre está disposta a me apoiar em todos os momentos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois foi quem permitiu essa conquista e derramou bençãos sobre mim, depois ao meu orientador Prof. Dr. Bruno Henrique pela paciência, amizade e atenção, também gostaria de agradecer aos meus professores do PROFMAT, que me conduziram com bastante maestria nessa jornada, sempre dispostos a ajudar na edificação do conhecimento.

Quero agradecer aos meus colegas de turma, dos diversos ciclos que iniciei, mas que infelizmente não consegui concluir, em especial a João Batista e Luis Geraldo(LG), pois sempre estiveram dispostos a compatilhar saberes e me incentivar durante todo o processo. Além deles, venho aqui fazer agradecimentos às pessoas especiais, nas quais não pertecem mais ao meu convívio, porém foram tão importantes para que eu conseguisse atingir meus objetivos.

Agradeço bastante aos colegas professores que compõem a Escola de Referência em Ensino Médio Apolônio Sales, em especial ao gestor Marcos Antônio, e aos que compõem a Escola São Francisco de Assis, em especial a gestora Micheline Pina, que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho, além de todo o apoio ofertado no dia a dia.

Também agradeço aos integrantes de minha família, destacando minha mãe Leni Alves e meus filhos, por toda a força a mim concedida, incentivo e carinho, eles foram e sempre serão a minha fortaleza e o meu alicerse. E por fim, agradeço infinitamente a minha querida esposa Priscilla Costa, que sempre esteve me apoiando, apresentando sugestões, e mesmo tendo inúmeras atribuições diárias e profissionais, dedicou parte do seu tempo contribuindo efetivamente na edição desse trabalho.

Resumo

Serão apresentados neste trabalho: o grande poder que as curiosidades matemáticas têm de impulsinar na estruturação de conceitos da área, com foco voltado a aritmética; de que forma o problema dos quatro quatros, de Malba Tahan, serviu de inspiração para adequar as ideias presentes nele; sugestões de como construir o número 19 a partir de quatro algarismos aleatórios quaisquer, utilizando operações e/ou símbolos matemáticos, dispondo o total de casos, com suas respectivas características. Além disso, serão mostrados direcionamentos para a construção de outros números dentro da mesma ideia, Também haverá uma abordagem pedagógica, na qual irá levantar questionamentos sobre a necessidade de uma atualização didática das aulas ministradas em sala, levando em consideração as tendências avaliativas recentes. E por fim, associar o uso das ideias descritas como ferramentas educativas e com sugestões baseadas em experiências exitosas.

Palavras-Chave: Números Aleatórios, Quatro Quatros, Aritmética, Curiosidades Matemáticas.

Abstract

The following will be presented in this work: the great power that mathematical curiosities have to boost the structuring of concepts in the area, with a focus on arithmetic; how the problem of the four fours, by Malba Tahan, served as an inspiration to adapt the ideas present in it; suggestions on how to construct the number 19 from any four random digits, using operations and/or mathematical symbols, displaying the total number of cases, with their respective characteristics. In addition, directions will be shown for the construction of other numbers within the same idea. There will also be a pedagogical approach, which will raise questions about the need for a didactic update of the classes taught in the classroom, taking into account recent evaluative trends. And finally, associate the use of the ideas described as educational tools and suggestions based on successful experiences.

Key-words: Random Numbers, Four Fours, Arithmetic, Mathematical Trivia.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

As curiosidades matemáticas sempre despertam interesse em diversos públicos. Para muitos, o desafio é o que movimenta a busca por novos conhecimentos. Diante desses fatos, este trabalho faz uma abordagem aritmética, para um problema que movimenta números, operações e comandos matemáticos.

A inspiração para apresentar uma proposta como a que se encontra nessa obra pode surgir diante de uma necessidade específica, ou simplesmente pelo fato de que o pensamento matemático está presente em ações diárias. Usar matemática é uma necessidade humana, e tê-la de forma transparente nos faz pertencer a um universo descrito de forma mais significativa.

Os números têm relações simbólicas com a vida das pessoas. Mesmo sem que percebam, elas são cercadas por fatos, que muitas vezes estão relacionados à simbologia que um determinado número apresenta. A matemática, por sua vez, é responsável por estabelecer conceitos que determinam as características numéricas e faz as devidas associações operacionais, fundamentais para a resolução de diversos problemas.

Nesta perspectiva, este trabalho tem como objetivo principal relacionar a construção de um número específico, a partir de quatro algarismos pré-estabelecidos, com o auxílio de símbolos matemáticos que representam algum tipo de operação, e, com isso, mostrar que é possível alcançar estratégias e generalizações.

Além do estímulo condicional ao cálculo mental, poder dedutível e organização numérica de uma expressão matemática, essa proposta busca, ainda, conseguir que o indivíduo faça análises conclusivas, estabeleça direcionamentos e perceba qual o caminho mais conveniente a ser seguido.

Essa ideia surgiu quando o autor e sua cônjuge, ao fazer viagens que eram necessárias entre duas cidades nas quais residiam, ao observarem as placas antigas de carros, como matemáticos que são, se desafiavam a conseguir obter o 19, número que representa uma data significativa e comemorativa para ambos, utilizando os algarismos presentes nelas e diversas operações. Para isso, mentalmente eram feitos cálculos, objetivando resultar o que se esperava. Mas surgiu um questionamento entre ambos, potencializado, com o desafio dos “Quatro quatros”, que se encontra no livro “O homem que calculava”, de [1] Malba Taham, que será retomado no capítulo um: Seria possível construir esse número utilizando quaisquer grupos de quatro algarismos? A resposta é sim, e o que será visto mais adiante é como isso pode ser comprovado.

Serão estabelecidos, em todo o processo, as dificuldades impostas por este desafio. Na verdade, foi necessário buscar um método que pudesse sintetizar o universo que se criará com números de quatro algarismos, utilizando os dez símbolos do sistema decimal, o que será apresentado no capítulo dois.

Ainda neste capítulo, durante a busca por esta sintetização e apoiados nos conceitos da análise combinatória, serão mostrados como essa grande quantidade de números pode ser representada de forma menor. O uso das operações e símbolos, que permitidos para o problema terão importante participação nessa redução, a qual será apresentada de forma mais efetiva no capítulo três.

É importante ressaltar que este trabalho está buscando um enlace positivo entre a matemática pura e alguns temas pedagógicos embasados em conceitos matemáticos direcionados ao ensino-aprendizagem, com o objetivo de mostrar que o ensino desta disciplina precisa ser reformulado. Muitos são os problemas enfrentados no que se refere à construção do conhecimento matemático, sejam os professores, buscando ideias que enriqueçam suas aulas, os estudantes, se deparando com suas limitações, a família, eventualmente ficando distante da evolução escolar, e até as esferas avaliativas que têm por objetivo buscar melhorias com os resultados obtidos.

Em sintonia com as ferramentas de avaliação externas, sendo elas de natureza mundial ou nacional, e até aquelas produzidas dentro do universo escolar. O uso dos “Quatro Aleatórios” trabalha conceitos que se encontram presentes, principalmente, entre os descritores propostos como básicos para o conhecimento do estudante, independentemente de sua idade ou série.

No decorrer do capítulo quatro, essas dificuldades serão relatadas, de acordo com cada segmento, com o intuito de justificar a necessidade de haver mudanças de caráter socioeducativo, principalmente na postura daqueles que fazem parte deste processo de ensino-aprendizagem diário. A partir daí, sugestões de situações didáticas serão apresentadas, onde os objetivos desse trabalho estarão colocados, sendo aplicados de maneira lúdica e intuitiva, sempre buscando despertar o interesse de todos.

Capítulo 1:

Desafiando a curiosidade

O desenvolvimento na área das curiosidades matemáticas tem importância histórica e tem colaborado com estudos iniciais de teorias matemáticas. Por exemplo, podem ser citadas o Problema dos Pontos, solucionado por Fermat (1601 – 1665) e Pascal (1623 – 1662), direcionou à Teoria das Probabilidades (EVES, 2004); o Problema das Pontes de Königsberg originou a Teoria dos Grafos, por Euler (1707 – 1788); entre outros.

No Brasil, temos um importante propagador da Matemática Recreativa, Malba Tahan, que em uma de suas obras mais conhecidas, “O Homem que Calculava”, traz o problema dos Quatro Quatros, inspiração ponte da proposta que será apresentada.

1.1. Os Quatro Quatros

Muitas pessoas desconhecem que Malba Tahan é o pseudônimo de Júlio César de Mello e Souza (1895-1974), importante professor de matemática de nacionalidade brasileira, que nos primeiros anos do século XX já tinha uma preocupação de como seriam os rumos do ensino da matemática em seu país.

Dentre suas várias obras, que tinham como objetivo despertar a curiosidade dos jovens para a Matemática, está o seu famoso livro “O Homem que Calculava”, o qual conta a história de um árabe, Beremiz, que usa as suas habilidades em matemática para resolver vários problemas que surgem em suas viagens pelos desertos das “Arábias”.

Na parte intitulada “Os Quatro Quatros”, do capítulo 7 do livro “O Homem que Calculava” (Tahan, 2017, p. 46), Beremiz faz muitas considerações importantes sobre como encontrar todos os números de zero a dez, usando apenas quatro algarismos quatro e as quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Não se deve usar nenhum outro algarismo além do quatro, mas podem ser usados símbolos como os parênteses. Muitas destas resoluções não são as únicas, isto torna este problema ainda mais interessante, pois ele rompe com o senso comum de que em matemática, devido à sua exatidão, há apenas uma solução para cada problema.

O problema dos Quatro Quatros vem sendo discutido por diversos matemáticos e educadores há muito tempo. Na internet, encontram-se muitos textos que fazem referências a ele, levantando novas hipóteses e curiosidades em torno do mesmo. Um desafio ao qual muitos curiosos da matemática se submeteram ao longo do tempo foi tentar escrever todos os números até cem usando a ideia do problema.

Existe ainda quem tenha tentado fazer isto até o impressionante número dez mil. Com essa quantidade de números a atingir, as quatro operações fundamentais mostram-se insuficientes. Os formuladores do desafio, então, estabeleceram a seguinte condição para a resolução do problema: não é permitido usar nenhum símbolo algébrico que envolva letras, como log (logaritmo), lim (limite), sen (seno), cos (cosseno), tg (tangente), etc.

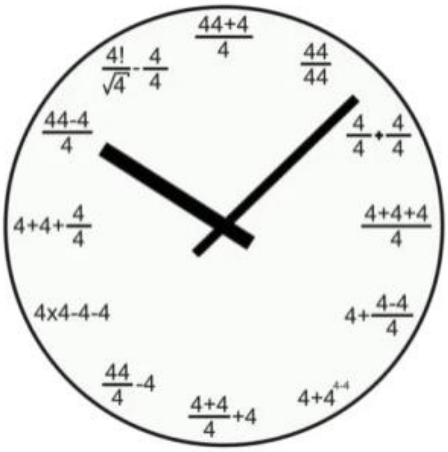
Por outro lado, são permitidas algumas outras operações além das que já haviam sido citadas anteriormente, que envolvem números e símbolos. Em primeiro lugar, a potenciação, utilizando-se apenas a quarta potência, claro. Em segundo lugar, a radiciação, mais precisamente raiz quadrada, aqui é bom lembrar que, na verdade, se é utilizado apenas o radical, sem índice, que implicitamente é 2, mas que, pelas regras de notação da matemática, não precisa ser evidenciado. Portanto, a raiz quadrada não viola a proibição de não aparecer na expressão nenhum outro algarismo além de quatro, visto que se utiliza apenas o símbolo do radical. A terceira operação permitida é o fatorial, normalmente estudado pelos alunos no ensino médio, que é representado por um sinal de exclamação ("!") e, portanto, também não viola a regra de que não podemos usar símbolos algébricos com letras. Um número fatorial é igual ao número multiplicado por todos os seus antecessores até o número um.

Com apenas estas três operações, de acordo com muitos daqueles que já tentaram resolver o problema, ainda não seria possível representar vários dos números de onze a cem. Para isto, será admitida uma quarta operação, que usualmente não é aprendida durante a educação básica, mas que segue o mesmo princípio do fatorial, o termial, representado pelo símbolo de interrogação ("?"). O termial de um número é igual ao número somado a todos os seus antecessores até o número um.

Como disse Malba Tahan "afirmam os pacientes calculistas que é possível escrever todos os números inteiros de 0 até 100"(Tahan, 2017, pg.253), utilizando, além dos números, quaisquer símbolos e operações matemáticas das citadas acima, sem envolver letras ou inventar funções apenas para resolver o problema. Não é desenvolvida, por ele, uma forma única para se conseguir resolver o problema proposto, mas são apresentadas sugestões de resoluções que aleatoriamente são aplicadas de forma conveniente.

Muitos calculistas buscam mostrar suas respectivas soluções de diversas maneiras e em algumas delas se acrescentam ou se excluem outros símbolos e operações, isso pode facilitar os caminhos a serem seguidos, mas também podem dificultar ou banalizar a problemática. Essas regras pré-definidas também variam de acordo com o público que teria acesso, é possível que os estudantes de uma determinada modalidade de ensino ainda não tenham adquirido os conhecimentos necessários para a compreensão de certas operações ou símbolos.

Figura 1: O Quatro de todas as horas



Fonte: Atitude Reflexiva.[2]

O uso deste problema tem se expandido dentro da matemática recreativa e constantemente passou a ser utilizado didaticamente por educadores que buscam, dentre os diversos objetivos, resgatar conceitos, estruturar comandos, direcionar ao aprendizado que por diversas vezes fora distorcido e até mesmo fortalecer conhecimentos que se completam dentro de uma linha temática.

Segundo algumas situações didáticas vivenciadas, como em “Os quatro quatros – Reflexões Sobre Uma Gincana de Matemática” de [3] Ricardo Roberto Plaza Teixeira e “O problema dos quatro quatros” de [4] Clarice Segantini, o problema mostra aos estudantes ser possível resolver uma questão por vários caminhos e que não existe apenas uma solução para o contexto exposto. Mas seria possível realizar construções como essa com outros algarismos? E que outras construções poderiam se inspirar nesta proposta?

1.2. O escolhido foi o número 19

É fato que as dificuldades dos alunos surgem diante de conceitos matemáticos e propriedades básicas, que mesmo sem significatividade e compreensão, foram acumuladas ao longo da vida escolar como regras a serem seguidas. Além disso, a experiência do autor no meio educacional, deixa evidente que a resolução de problemas é umas das metodologias que colaboram com o trabalho do professor ao conduzir o processo de ensino e aprendizagem, uma vez que oportuniza aos alunos tomarem decisões e impulsiona processos cognitivos e a troca de experiências entre os estudantes.

Ainda dentro das considerações descritas e diante de propostas pedagógicas que serão mencionadas mais a frente, é interessante destacar que atividades como a que será proposta podem de fato mobilizar quase a totalidade dos estudantes do meio no qual será aplicada, inclusive muitos daqueles que usualmente se declaram avessos à matemática.

É claro que, devido à complexidade das operações utilizadas (fatorial, termial, potenciação, radiciação), o desafio não pode ser proposto a estudantes das séries iniciais do ensino fundamental, mas, se nos limitarmos ao intervalo de 0 a 10, um trabalho que utilize apenas as operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão), da forma como o problema "Os Quatro Quatros" de Malba Tahan propõe, pode ser realizada com crianças de algumas das séries iniciais do ensino fundamental.

Além disso, atividades como estas incentivam o exercício de uma forma de "criatividade" matemática, como definida por [5] D´Ambrosio (1993, p. 40): "Todas as maneiras de entender criatividade convergem para algo que escapa ao rotineiro, que rompe com o que é esperado e que traz novas dimensões para um esforço."

Matematicamente, existem muitas problemáticas sem ofertas resolutivas, curiosidades que precisam de conceitos conclusivos, para as quais dados explicativos poderiam contribuir fundamentando ideias e formalizando teses. A construção e a representação dos números inteiros, por exemplo, são combustíveis que estão sempre alimentando o desejo de contribuir efetivamente para o crescimento deste conteúdo.

A ideia do autor desta obra vai muito além de propor um simples desafio lúdico, os dados conclusivos podem mostrar contribuições importantes, e que possivelmente serão necessários na formulação de conceitos com maior relevância. Isso deve auxiliar na compreensão de conteúdos associados à aritmética, entre outras áreas.

Esta proposta mostra a possibilidade verídica de comprovar que é possível atingir o objetivo principal, mas que deve ficar claro: os caminhos traçados não são os únicos, eles apenas serão apresentados como sugestões elementares julgadas pelo autor como mais apropriadas. Estratégias aritméticas para buscar comprovações serão mostradas de maneira a otimizar os caminhos que devem ser seguidos.

Muitos outros conceitos matemáticos necessitam de definições para terem a sua fundamentação descrita. O fato de ser possível representar um determinado número inteiro, por exemplo, utilizando padrões estabelecidos e diante de condições determinadas, pode se tornar uma importante ferramenta para ser utilizada na construção de um determinado conceito. Assim é fundamentada boa parte das teorias, que se inicia com pesquisas realizadas por uns, mas que só apresenta um desfecho mais concreto por intermédio de outros.

Inicialmente, será mostrado como foi feita a escolha do número a ser construído e dos outros quatro algarismos que serão utilizados neste processo. É importante observar que diante das características que cada número apresenta, o número a ser construído precisava ser escolhido, e situações relevantes foram consideradas determinantes, como por exemplo, uma data comemorativa ou o número da sorte, na qual se acredita exercer bons atributos àqueles que as tem como fator significante. Além disso, o significado que este número tem dentro da matemática também foi observado, avaliando que grau de dificuldade ele poderia trazer diante daqueles que se submetessem ao processo.

Sob estas perspectivas, o número escolhido foi o “19”, um número primo, o que aumenta a dificuldade de sua construção. Conhecimentos prévios, como este ajudam na otimização dos caminhos a obtê-lo, em meio à limitação por operações diretas.

.

Capítulo 2

Como construir o número 19?

Os algarismos a serem utilizados na construção pertencem ao sistema de numeração decimal, ou seja, será considerado o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Dele serão feitas todas as combinações possíveis para grupos de quatro, sendo permitida a repetição, e em cada um desses grupos será mostrado como é possível criar uma expressão matemática que resulte no valor escolhido.

Os símbolos que podem ser utilizados são: $+$, representando a adição; $-$, representando a subtração; $\times$, representando a multiplicação; $\div$, representando a divisão; $\sqrt{\ }$, representando a raiz quadrada de um número inteiro não negativo; !, representando o fatorial de um número inteiro não negativo; e ?, representando o termial de um número inteiro não negativo. Também é permitida a utilização de parênteses, colchetes e chaves, caso sejam necessários.

Por definição, o fatorial é o produto dos números inteiros não negativos consecutivos de um número inteiro $\boldsymbol{n}$, menores ou iguais a $\boldsymbol{n}$, ou seja,

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1.$$

E o termial é a adição dos números inteiros não negativos consecutivos de um número natural $\boldsymbol{n}$, menores ou iguais a $\boldsymbol{n}$, ou seja,

$$n? = \sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Por exemplo, os números 2964 e 7350 são formados por algarismos que se encontram presentes no conjunto A, logo, tomando esses algarismos e montando as seguintes expressões $2 \times 6 + \sqrt{9} + 4$ e $7 + 3! + 5 + 0!$, observa-se o resultado 19. Mas é perceptível que será muito trabalhoso fazer essa comprovação para todos os números que são formados a partir do referido conjunto.

2.1. São muitos números

Antes de dar início às devidas construções que este trabalho objetiva, são necessários alguns esclarecimentos sobre o terreno no qual a ideia principal está sendo explorada. Primeiramente, tem-se um conjunto A de dez algarismos, $n(A) = 10$, assim veja o total de todos os possíveis números de quatro algarismos, sendo permitida a repetição, que podem ser utilizados na construção do número 19. O conjunto formado por todos os números em questão, será denotado por T.

O uso da Análise Combinatória será necessário para mostrar que, na busca por caminhos mais curtos, nenhuma opção foi desconsiderada. É fato que existem dez opções para cada um dos algarismos dos números em questão. Pelo Princípio Fundamental de Contagem (PFC), a quantidade total de números de T, $n(T)$, que podem se formar com quatro algarismos é dada pelo produto das possibilidades para cada um de seus algarismos, ou seja, $n(T) = 10000$, que vão de 0000 até 9999.

Mas, é importante destacar algumas características dos diversos números que se formam dentro desse universo descrito, fazendo, assim, a separação por subconjuntos, de acordo com particularidades e semelhanças a serem destacadas.

Primeiramente considera-se o conjunto dos números que possuem todos os quatro algarismos distintos, T_1. Neste caso, a quantidade de números que se forma é dada por um Arranjo Simples. O Arranjo Simples de n elementos escolhidos p a p ($A_{n,p}$) leva em consideração a ordem dos elementos, isto é, o valor posicional dos algarismos escolhidos e é dado por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observe que na aplicação acima, $n = 10$ (que é a quantidade de algarismos disponíveis) e $p = 4$ (que é a quantidade de algarismos a ser escolhida). Assim, o total de números formados com os quatro algarismos diferentes, n(T_1), é dado por:

$$n(T_1) = A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 10.9.8.7 = 5040.$$

Agora, considera-se o conjunto dos números com dois algarismos diferentes e dois algarismos iguais, isto é, os números que serão formados por três algarismos distintos, T_2. Para este caso, deve ser observado que há dez opções de algarismos para o par de algarismos iguais e para completar o número de quatro algarismos, serão escolhidos mais dois entre os outros nove disponíveis. Para esta última escolha, é necessária uma Combinação Simples dos nove algarismos, dois a dois. Além disso, após a escolha dos três algarismos, para a formação dos números, é necessária a ordenação dos mesmos, que será dada por uma Permutação com Repetição dos algarismos pré-determinados. Assim, pelo PFC, a quantidade de números que se formarão $n(T_2)$ sairá do produto entre o dez, o número de combinações e o de permutações.

É válido recordar que a Combinação Simples de n elementos escolhidos p a p ($C_{n,p}$), nos fornece a quantidade de grupos possíveis de p elementos escolhidos entre n possíveis, que não leva em consideração a ordem dos mesmos, isto é, o grupo AB é o mesmo que BA. Este número é dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Enquanto a Permutação com Repetição, autoexplicativa, de n elementos em que se o primeiro é repetido r_1 vezes, o segundo r_2 e assim sucessivamente, até o k-ésimo elemento que é repetido r_k vezes, com $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$, é dada por:

$$P_n^{r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$$

Desta forma, tem-se:

$$n(T_2) = 10C_{9,2}P_4^2 = 10.\frac{9!}{2!\,(9-2)!}.\frac{4!}{2!} = 10.\frac{9!}{7!}.2.3 = 10.\frac{9.8.7!}{7!}.2.3 = 10.9.8.2.3 = 4320.$$

Considera-se, em sequência, o conjunto dos números que possuem dois pares de algarismos iguais, mas distintos entre si, isto é, formado por dois algarismos distintos, T_3. Há de se observar que o número de possibilidades para escolha deles é dado por uma Combinação Simples dos dez algarismos, dois a dois. Feita a escolha dos dois algarismos, é a repetição deles que completará aqueles que faltam para a formação dos números, fazendo-se necessária uma Permutação com Repetição para cada combinação gerada ao fixar suas posições. Logo, pelo PFC, a quantidade de números formados neste caso, $n(T_3)$, será dada pelo produto entre o número de combinações e o de permutações, isto é,

$$n(T_3) = C_{10,2}P_4^{2,2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!}.\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{10!}{8!}.3 = \frac{10.9.8!}{8!}.3 = 10.9.3 = 270.$$

Ainda existem os números com três algarismos iguais e um algarismo diferente, isto é, formado por dois algarismos distintos, T_4. Para este caso, deve-se observar que existem dez opções para o trio de algarismos iguais, e nove opções para o quarto algarismo. Faz-se, então, necessidade de uma Permutação com Repetição para obtermos a quantidade de números formados ao se estabelecer as devidas posições. Logo, a quantidade de números com tais características, $n(T_4)$ é dada, de acordo com o PFC, pelo produto entre o 10, o 9 e o número de permutações:

$$n(T_4) = 10.9P_4^3 = 10.9.\frac{4!}{3!} = 10.9.\frac{4.3!}{3!} = 10.9.4 = 360.$$

Por fim, têm-se os números com todos os algarismos iguais, T_5, para este caso deve-se observar que existem apenas dez opções, sendo assim, este é o total de grupos com a referida característica. Isto é, $n(T_5) = 10$.

Temos, então, que os todos os números de quatro algarismos se encaixam em um dos casos relatados, isto é, pertence a T_1, T_2, T_3, T_4 ou T_5. De fato:

$$n(T) = n(T_1) + n(T_2) + n(T_3) + n(T_4) + n(T_5) = 5040 + 4320 + 270 + 360 + 10 = 10000.$$

2.2. Existem formações repetidas

É notório que a quantidade de números é considerável, e fazer a comprovação do que se espera para todos eles, não seria o caminho mais apropriado. Mas se forem levados em consideração apenas os conjuntos de números formados pelos mesmos algarismos, em mesmas quantidades, ou seja, aqueles que diferem apenas pelos seus valores posicionais, isso reduz bastante o universo no qual se há de trabalhar.

De fato, a quantidade de elementos deste conjunto é dada por uma combinação com repetição dos dez algarismos, quatro a quatro, o que reduz a quantidade de números a 715, conforme podemos ver a seguir.

$$C_{10+4-1,4} = C_{13,4} = \frac{13!}{4!\,(13-4)!} = \frac{13.12.11.10}{4.3.2.1} = 13.11.5 = 715.$$

Para chegar a esta quantidade, considera-se, inicialmente, o conjunto E_1 formado por todos os grupos de quatro algarismos distintos. Tem-se que o número de elementos de $E_1, n(E_1)$, é dado por uma Combinação Simples dos dez algarismos quatro a quatro, isto é,

$$n(E_1) = C_{10,4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!} = 10.3.7 = 210.$$

Observe que todos os elementos de T_1 pertencem a um elemento de E_1, portanto, consegue-se reduzir os 5040 números a 210, visto que todos os outros números são obtidos por uma permutação desses 210. Seguindo este critério, reduz-se os demais conjuntos.

Para isto, considera-se agora o conjunto E_2 formado por todos os grupos de dois algarismos iguais e dois algarismos distintos. Análogo ao que ocorreu na formação de T_2, serão dez opções para o par de algarismos iguais e uma combinação simples para compor os dois algarismos que faltam. Pelo PFC, o total de elementos de E_2, $n(E_2)$, será o produto entre o 10 e o número de combinações:

$$n(E_2) = 10C_{9,2} = 10.\frac{9!}{2!\,(9-2)!} = 10.\frac{9.8.7!}{2!\,7!} = 10.9.4 = 360.$$

Reduz-se então os 4320 números que compõe T_2 para 360.

Tem-se, também, o conjunto E_3, formado por todos os grupos de dois pares de algarismos iguais, mas distintos entre si. Análogo ao T_3, faz-se necessário a escolha de apenas dois algarismos, cujo número de possibilidades é dado pela combinação simples dos dez algarismos dois a dois. Assim, o número de elementos de E_3, $n(E_3)$, é dado por:

$$n(E_3) = C_{10,2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{10.9.8!}{2.1.8!} = 5\,.9 = 45.$$

Isto é, reduz-se 270 casos de T_3 para 45.

Em seguida, o conjunto E_4, formado por todos os grupos de três algarismos iguais e um diferente. Tem-se dez opções para o trio de algarismos e nove opções para o algarismo que resta. Logo, pelo PFC, o número de elementos de E_4, $n(E_4)$, se dará pelo produto entre o 10 e o 9, isto é,

$$n(E_4) = 10 \times 9 = 90.$$

Ou seja, reduz-se 360 casos de T_4 para 90.

Por fim, o conjunto E_5, formado por todos os grupos de quatro algarismos iguais. Tem-se dez opções, isto é, $n(E_5) = 10$. Neste caso, não há uma redução em relação a T_5, uma vez que as permutações dos algarismos não geram novos números.

Fazendo o somatório de todos os subgrupos efetivos, uma vez que os conjuntos definidos são disjuntos entre si, tem-se o total de grupos, $n(E)$, que são considerados dentro dos dez mil casos que se podem formar, isto é,

$$n(E) = n(E_1) + n(E_2) + n(E_3) + n(E_4) + n(E_5) = 210 + 360 + 45 + 90 + 10 = 715.$$

Assim, reduz-se 10000 casos de T para 715, uma vez que, como já justificado, os demais números são obtidos pelas permutações entre os elementos desses 715 conjuntos.

2.3. Os dez se tornam quatro

Mesmo com a queda significativa do total de conjuntos a serem trabalhados, ainda se tem uma quantidade consideravelmente alta a ser trabalhada. Uma vez que o objetivo principal é mostrar que é possível a construção do 19 a partir de cada um desses conjuntos, será importante reduzir ainda mais esse número.

Sabendo que os algarismos a serem utilizados nesta construção pertencem ao conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, então já se pode aplicar uma ou mais operações descritas como possíveis, no caso o fatorial, o termial e/ou a raiz quadrada, para alguns desses elementos, e quantas vezes forem necessárias. O objetivo é deixar apenas aqueles valores inteiros que se formam dentro dos limites do conjunto, o que fará com que o número de elementos do conjunto reduza e, consequentemente, diminuirá a quantidade de grupos efetivos que se formariam.

É importante ressaltar que a escolha desse caminho tem por objetivo otimizar as formas de se trabalhar e que este direcionamento não é único, será apresentado apenas como uma sugestão. Também podem ser utilizados o fatorial, o termial e/ou raiz quadrada como operações obrigatórias para alguns algarismos no uso dessa proposta em uma situação didática, assim o conjunto de elementos estaria reduzido.

Observe a tabela a seguir, onde aplica-se as operações destacadas acima em cada algarismo n do conjunto A.

Tabela 1: Operando os algarismos

n	$\sqrt{n}$	$n?$	$n!$
0	0	0	1
1	1	1	1
2	$\sqrt{2}$	3	2
3	$\sqrt{3}$	6	6
4	2	10	24
5	$\sqrt{5}$	15	120
6	$\sqrt{6}$	21	720
7	$\sqrt{7}$	28	5040
8	$\sqrt{8}$	36	40320
9	3	45	362880

É possível perceber que alguns dos algarismos geram, a partir de tais operações, outros algarismos do mesmo conjunto, como destacado. Assim, o algarismo 0 pode ser tranformado no algarismo 1; o algarismo 2 pode ser transformado no 3, que, por sua vez, pode ser transformado no 6, donde 2 e 3 podem ser transformados no 6; o 4 pode ser transformado no 2 e, consequentemente, no 6; e o 9 pode ser tranformado no 3 e, consequentemente, 6. Portanto, os algarismos 0, 2, 3, 4 e 9, se reduzem a 1 e 6. De fato, esta representação pode ser alcançada na ocorrência de mais de uma interação, como é possível comprovar na tabela a seguir. Além disso, é valido ressaltar que o algarismo 8 gera um quadrado perfeito, podendo ser novamente operado.

Tabela 2: Operando mais uma vez com os algarismos

n	$\sqrt{n}?$	$\sqrt{n?}$	$n??$	$\sqrt{n}??$
2	$\sqrt{2}?$	$\sqrt{3}$	6	$\sqrt{2}??$
4	3	$\sqrt{10}$	55	6
8	$\sqrt{8}?$	6	666	$\sqrt{8}??$
9	6	$3\sqrt{5}$	1035	21

Assim, reduz-se, também, o algarismo 8 ao algarismo 6. É importante ressaltar que as mesmas, e mais, interações trabalhadas envolvendo 1, 5, 6 e 7 não geraram novos algarismos, o que leva a reduzir o conjunto de dez algarismo a um conjunto de quatro, como é possível observar na tabela seguinte, em que n_E é o algarismo gerado, denominado efetivo por se tratar do algarismo que será utilizado daqui por diante.

Tabela 3: Algarismos efetivos

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_E	1	1	6	6	6	5	6	7	6	6

Capítulo 3

A construção do número 19

Após as reduções feitas no capítulo anterior, pode-se, tranquilamente, substituir o conjunto dos algarismos a serem trabalhados A, pelo conjunto dos algarismos efetivos, $A_E = \{1, 5, 6, 7\}$, o que faz com que os iniciais 10000 números se reduzam a $4.4.4.4 = 256$. Uma vez que este novo conjunto possui apenas quatro algarismos, isto é, $n(A_E) = 4$, faz-se necessário a reintegração dos grupos que formaram o conjunto E.

Assim como visto no capítulo anterior que as 10000 combinações se reduziam a 715 grupos, tem-se que as 256 se reduzem a 35, observe.

$$C_{4+4-1,4} = C_{7,4} = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7.6.5}{6} = 35.$$

Para tal resultado, considere N_E o conjunto de todos os grupos formados por quatro algarismos de N_E e cada conjunto N_{Ei} será definido exatamente como o conjunto E_i, onde i é um elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, diferindo apenas pela diversidade de algarismos disponíveis. Daí, as quantidades de elementos de cada conjunto N_{Ei} serão obtidas de forma análoga às dos conjuntos E_i, substituindo a quantidade $n(A) = 10$ por $n(A_E) = 4$. Assim:

$$n(N_{E1}) = C_{4,4} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = \frac{4!}{4!\,0!} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$n(N_{E2}) = 4C_{3,2} = 4.\frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 4.\frac{3.2!}{2!\,1!} = 4.3 = 12.$$

$$n(N_{E3}) = C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!\,2!} = \frac{12}{2} = 6.$$

$$n(N_{E4}) = 4 \times 3 = 12.$$

$$n(N_{E5}) = 4.$$

Portanto, segue que:

$$n(N_E) = n(N_{E1}) + n(N_{E2}) + n(N_{E3}) + n(N_{E4}) + n(N_{E5}) = 1 + 12 + 6 + 12 + 5 = 35.$$

Sendo assim, cada grupo efetivo deverá pertencer a uma expressão matemática, cujo resultado seja o 19, as operações utilizáveis devem estar entre aquelas estabelecidas previamente. Nesta concepção, serão apresentadas tabelas compostas por duas colunas: a primeira apresentando cada conjunto n_{Ei} pertencente ao conjunto N_{Ei} em referência; e a segunda apresentando uma possível expressão para a obtenção do 19, envolvendo os algarismos pertencentes ao n_{Ei} em questão.

Para começar, será considerado o único grupo efetivo que contém todos os algarismos diferentes, N_{E1}. Neste caso, tem-se:

Tabela 4: Construção do 19 a partir dos quatro algarismos distintos.

n_{E1}	Expressão
$\{1, 5, 6, 7\}$	$1 + 5 + 6 + 7 =$ 19

Logo, para cada número que é formado por estes quatro algarismos efetivos fica comprovado que é possível atingir o objetivo inicial, a construção do número 19.

Dando continuidade, agora serão considerados os grupos que contêm um par de algarismos iguais e dois algarismos diferentes, isto é, os elementos de N_{E2}.

Tabela 5: Construção do 19 a partir de dois algarismos iguais e dois distintos.

n_{E2}	Expressão
$\{1, 1, 5, 6\}$	$5? + 6 - 1 - 1 =$ $15 + 6 - 1 - 1 =$ 19
$\{1, 1, 5, 7\}$	$(1 + 1) \times 7 + 5 =$ $2 \times 7 + 5 =$ 19
$\{1, 1, 6, 7\}$	$(1 + 1) \times 6 + 7 =$ $2 \times 6 + 7 =$ 19
$\{1, 5, 5, 6\}$	$5 \times 5 - 6 \times 1 =$ $25 - 6 =$ 19
$\{1, 5, 5, 7\}$	$5 \times 5 - (7 - 1) =$

	$25-6=$ 19
$\{1,5,6,6\}$	$(6-1)\times 5-6=$ $5\times 5-6=$ 19
$\{1,5,7,7\}$	$1\times(7+5)+7=$ $1\times 12+7=$ 19
$\{1,6,6,7\}$	$1\times(6+6)+7=$ $1\times 12+7=$ 19
$\{1,6,7,7\}$	$7+7+(6-1)=$ $14+5=$ 19
$\{5,5,6,7\}$	$5?+6-(7-5)=$ $15+6-2=$ 19
$\{5,6,6,7\}$	$\left(\sqrt{6\times 6}\right)?-(7-5)=$ $6?-2=$ 19
$\{5,6,7,7\}$	$7\times 7-5\times 6=$ $49-30=$ 19

Portanto, e de forma análoga a conclusão da tabela anterior, para todos os números efetivos que possuírem tais algarismos e para todos os outros que possam chegar nestes formatos, está comprovado que é possível obter o objetivo inicial.

Seguindo, serão considerados, agora, os grupos efetivos que possuem dois pares de algarismos iguais, mas distintos entre si, isto é, os elementos de N_{E3}.

Tabela 6: Construção do 19 a partir de dois algarismos distintos, ambos repetidos.

n_{E3}	Expressão
$\{1,1,5,5\}$	$5?+5-1\times 1=$ $15+5-1=$ 19
$\{1,1,6,6\}$	$\left(\sqrt{6\times 6}\right)?-(1+1)=$ $6?-2=$ 19
$\{1,1,7,7\}$	$7?-(7+1+1)=$ $28-9=$ 19
$\{5,5,6,6\}$	$5\times 5-\sqrt{6\times 6}=$ $25-6=$

	19
$\{5, 5, 7, 7\}$	$\sqrt{5 \times 5} + 7 + 7 =$ $5 + 7 + 7 =$ 19
$\{6, 6, 7, 7\}$	$6 + 6 + \sqrt{7 \times 7} =$ $6 + 6 + 7 =$ 19

Assim, para todos os números efetivos com tais características e para todos os outros que possam chegar nestes formatos, está comprovado que é possível chegar no objetivo inicial.

Dando seguimento, serão considerados agora os grupos efetivos que possuem três algarismos iguais e um algarismo diferente, isto é, os elementos de N_{E4}.

Tabela 7: Construção do 19 a partir de três algarismos iguais e um distinto.

n_{E4}	Expressão
$\{1, 1, 1, 5\}$	$5? + (1 + 1)? + 1 =$ $15 + 2? + 1 =$ 19
$\{1, 1, 1, 6\}$	$1 \times 6? - (1 + 1) =$ $1 \times 21 - 2 =$ 19
$\{1, 1, 1, 7\}$	$(7 - 1)? - (1 + 1) =$ $6? - 2 =$ 19
$\{5, 5, 5, 1\}$	$5 \times 5 - (5 + 1) =$ $25 - 6 =$ 19
$\{5, 5, 5, 6\}$	$6? - (5 + 5) \div 5 =$ $6? - 10 \div 5 =$ 19
$\{5, 5, 5, 7\}$	$5! \div (5 + 5) + 7 =$ $120 \div 10 + 7 =$ 19
$\{6, 6, 6, 1\}$	$6 + 6 + 6 + 1 =$ $12 + 6 + 1 =$ 19
$\{6, 6, 6, 5\}$	$6? - \sqrt{5 - 6 \div 6} =$ $21 - \sqrt{4} =$ 19
$\{6, 6, 6, 7\}$	$\sqrt{6 \times 6} + 6 + 7 =$ $6 + 6 + 7 =$ 19
$\{7, 7, 7, 1\}$	$(7 - 1)? - \sqrt{7? \div 7} =$

	$6? - \sqrt{4} =$ 19
$\{7, 7, 7, 5\}$	$\sqrt{7 \times 7} + 7 + 5 =$ $7 + 7 + 5 =$ 19
$\{7, 7, 7, 6\}$	$6? - \sqrt{7? \div \sqrt{7 \times 7}} =$ $21 - \sqrt{28 \div 7} =$ 19

Logo, para os números efetivos com tais características, além de todos os outros que podem chegar nestes formatos, fica comprovado que é possível alcançar o objetivo inicial.

Finalizando, serão considerados agora os grupos efetivos com todos os algarismos iguais, isto é, os elementos de N_{E5}.

Tabela 8: Construção do 19 a partir de quatro algarismos iguais.

Grupo	Expressão
$\{1, 1, 1, 1\}$	$(1 + 1)?!? - (1 + 1) =$ $2?!? - 2 =$ 19
$\{5, 5, 5, 5\}$	$5? + 5 - 5 \div 5 =$ $15 + 5 - 1 =$ 19
$\{6, 6, 6, 6\}$	$6? - (6 + 6) \div 6 =$ $21 - 12 \div 6 =$ 19
$\{7, 7, 7, 7\}$	$7? - \left(\sqrt{7? \div 7} + 7\right) =$ $28 - \left(\sqrt{4} + 7\right) =$ 19

Assim, para todos os números efetivos com tal característica, além de todos aqueles outros que podem chegar neste formato, está comprovado que é possível chegar no objetivo inicial.

A tabela a seguir irá mostrar para alguns casos apenas como qualquer número dentre os 10000, formado pelos algarismos do conjunto {0,1 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} passam pelos grupos efetivos e através de algumas operações ou símbolos, geram o número 19. Observe:

Tabela 9: Exemplos numéricos de construção do 19

Número	Grupo	Expressão	n_{Ei}
3 750	$\{0, 3, 5, 7\}$	$0! + 5 + 3! + 7 =$ $\boxed{1} + 5 + \boxed{6} + 7 =$ 19	$\{1, 5, 6, 7\}$
0 258	$\{0, 2, 5, 8\}$	$(2?! - 0!) \times 5 - \sqrt{8?} =$ $(\boxed{6} - \boxed{1}) \times 5 - \boxed{6} =$ $5 \times 5 - 6 =$ 19	$\{1, 5, 6, 6\}$
1 043	$\{0, 1, 3, 4\}$	$\left(\sqrt{3! \times \sqrt{4}?!}\right)? - (1 + 0!) =$ $\left(\sqrt{\boxed{6} \times \boxed{6}}\right)? - (1 + \boxed{1}) =$ $6? - 2 =$ 19	$\{1, 1, 6, 6\}$
8 497	$\{4, 7, 8, 9\}$	$\sqrt{\sqrt{8?} \times \sqrt{9}!} + (\sqrt{4})?! + 7 =$ $\sqrt{\boxed{6} \times \boxed{6}} + \boxed{6} + 7 =$ $6 + 6 + 7 =$ 19	$\{6, 6, 6, 7\}$
9 328	$\{2, 3, 8, 9\}$	$3!? - (2?! + \sqrt{8?}) \div \sqrt{9}! =$ $\boxed{6}? - (\boxed{6} + \boxed{6}) \div \boxed{6} =$ $21 - 12 \div 6 =$ 19	$\{6, 6, 6, 6\}$

Observe que alguns algarismos foram destacados através de um enquadramento. Isto foi feito para destacar a substituição do algarismo inicial pelo algarismo efetivo. Com estes exemplos e a partir das construções das tabelas anteriores pode-se, então, comprovar que qualquer número de quatro algarismos, escolhidos aleatoriamente, utilizando de forma adequada alguns símbolos e operações é possível montar pelo menos uma expressão que resulte no número 19.

Após as observações feitas a partir da escolha por um número específico, uma pergunta que surge naturalmente: seria possível construir outros números inteiros diante destas mesmas condições pré-estabelecidas? Percebe-se que para alguns números essa construção pode ser algo trivial, visto que o conjunto $\{1, 5, 6, 7\}$ gera grupos efetivos que facilitam este processo, inclusive podem até reduzir a quantidade de operações que serão utilizadas.

Dentro desta perspectiva observe como podem ficar essas construções para alguns números inteiros. É importante ressaltar grau de dificuldade para sintetizar um universo tão aleatório como o que se encontra descrito nesse trabalho, então algumas ideias devem ser aproveitadas.

3.1. A construção do 0

O zero é o número que na natureza representa a ausência de quantidade. Para a sua construção, se utilizam os grupos efetivos já citados anteriormente, N_E. Observa-se que de todos os trinta e cinco elementos de N_E, em trinta e quatro deles, existe pelo menos a repetição de um algarismo. Isto facilita bastante o processo, pois com o uso apenas das operações de subtração e de multiplicação, além daquelas utilizadas nas transformações dos grupos efetivos, consegue-se obtê-lo. Estas operações também são suficientes para o único grupo que resta e que não há repetição de algarismos.

Sendo a, b e c algarismos efetivos, isto é, elementos do conjunto A_E então:

Tabela 10: Construção do 0

Grupos	Expressão
$\{1, 5, 6, 7\}$	$5 \times (7 - 1 - 6) =$ $5 \times (6 - 6) =$ $5 \times 0 =$ 0
$\{a, a, a, a\}$	$(a - a) \times a \times a =$ $0 \times a \times a =$ $0 \times a =$ 0
$\{a, a, a, b\}$	$(a - a) \times a \times b =$ $0\times a \times b =$ $0 \times b =$ 0
$\{a, a, b, b\}$	$(a - a) \times b \times b =$ $0 \times b \times b =$ $0 \times b =$ 0
$\{a, a, b, c\}$	$(a - a) \times b \times c =$ $0 \times b \times c =$ $0 \times c =$ 0

Observe alguns exemplos na tabela abaixo:

Tabela 11: Exemplos numéricos de construção do 0

Número	Expressão	Grupo
4 517	$5\ \times\left(7-1-\sqrt{4}?!\right)=$ $5\ \times\left(7-1-\boxed{6}\right)=$ 0	$\{1,5,6,7\}$
7 819	$1\times 7\times\left(\sqrt{8?}-\sqrt{9!}\right)=$ $1\times 7\times\left(\boxed{6}-\boxed{6}\right)=$ 0	$\{1,7,8,9\}$ $\downarrow$ $\{1,6,6,7\}$ $\downarrow$ $\{a,a,b,c\}$
0 126	$(0!-1)\times(2?!-6)=$ $\left(\boxed{1}-1\right)\ \times\left(\boxed{6}-6\right)=$ 0	$\{0,1,2,6\}$ $\downarrow$ $\{1,1,6,6\}$ $\downarrow$ $\{a,a,b,b\}$
5 483	$(3!-5)\times\left(\sqrt{4}?!-\sqrt{8?}\right)=$ $\left(\boxed{6}-5\right)\times\left(\boxed{6}-\boxed{6}\right)=$ 0	$\{3,4,5,8\}$ $\downarrow$ $\{5,6,6,6\}$ $\downarrow$ $\{a,a,a,b\}$
9 468	$\left(\sqrt{4}?!-6\right)\times\left(\sqrt{8?}-\sqrt{9!}\right)=$ $\left(\boxed{6}-6\right)\times\left(\boxed{6}-\boxed{6}\right)=$ 0	$\{2,6,8,9\}$ $\downarrow$ $\{6,6,6,6\}$ $\downarrow$ $\{a,a,a,a\}$

Analogamente, com qualquer um dos grupos formados por quatro algarismos aleatórios e pertencentes aos 10000 grupos já citados antes, é possível se construir o número zero.

3.2. A construção do 1

Além das operações de subtração e multiplicação utilizadas com os grupos efetivos na construção do 0 (zero), e aquelas já utilizadas para os grupos efetivos, acrescentando o símbolo de fatorial, pode-se construir o número 1 com qualquer um dos grupos inclusos nos 100000 falados anteriormente. Uma vez que $0!=1$, torna-se trivial a construção do 1 a partir do mesmo conjunto de algarismos. De fato, já que foi comprovado que é possível obter o zero, basta atribuir o fatorial em cada uma das expressões que o constroem, como é possível observar com na tabela (Tabela 12) a seguir, com os mesmos exemplos e expressões da tabela anterior (Tabela 11).

Tabela 12: Exemplos numéricos de construção do 1

Número	Expressão
4 517	$\left[5\ \times\left(7-1-\sqrt{4}?\,!\right)\right]! =$ $[5\ \times(7-1-6)]! =$ $0! =$ 1
7 819	$\left[1\times 7\times\left(\sqrt{8?}-\sqrt{9!}\right)\right]! =$ $[1\times 7\times(6-6)]! =$ $0! =$ 1
0 126	$[(0!-1)\times(2?\,!-6)]! =$ $[(1-1)\times(6-6)]! =$ $0! =$ 1
5 483	$\left[(3!-5)\times\left(\sqrt{4}?\,!-\sqrt{8?}\right)\right]! =$ $[(6-5)\times(6-6)]! =$ $0! =$ 1
9 468	$\left[\left(\sqrt{4}?\,!-6\right)\times\left(\sqrt{8?}-\sqrt{9!}\right)\right]! =$ $[(6-6)\times(6-6)]! =$ $0! =$ 1

3.3. A construção de outros números

O grande desafio de construir qualquer número inteiro, a partir de quatro algarismos, é o fato de serem aleatórios. Isto é, tomar quaisquer quatro algarismos, utilizar operações e/ou símbolos na construção para obter um determinado número inteiro é algo muito randômico, os padrões ficam distantes, outros conceitos precisam ser inseridos e ainda assim podem deixar alguns pontos sem desfecho. No entanto, é exatamente aí a riqueza deste processo, pois estimula a criatividade e motiva a possíveis descobertas.

Porém, algumas observações podem ser feitas, como, por exemplo, que é possível a construção de algum número com características própias, mais precisamente de um número quadrado perfeito, a partir da soma dos termiais de dois números consecutivos. Considere n e $n+1$, onde n é um inteiro não negativo, então:

$$n?\ +(n+1)? = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+n+n^2+3n+2}{2} = \frac{2n^2+4n+2}{2}$$

$$= n^2+2n+1 = (n+1)^2$$

Assim, temos que, dados a e b, números inteiros não negativos consecutivos, $a? + b? = (\max\{a, b\})^2$. Este argumento será utilizado nas construções a seguir.

Pode-se perceber que, no conjunto de algarismos efetivos já citados, $\{1, 5, 6, 7\}$, e todas as possíveis combinações de grupos que podem ser formadas, o universo fica configurado da seguinte forma: nos grupos que há repetição de algarismos, e naqueles que existem algarismos consecutivos, sem a presença do "um" em ambas as situações, sempre se consegue um quadrado perfeito diferente de 1.

Para os grupos nos quais existe a presença do "um", ou que não há números consecutivos, facilmente é possível obter algarismos que se repetem, consecutivos, ou um quadrado perfeito, e consequentemente todo o grupo sempre gera algum quadrado perfeito. Observe a construção de um quadrado perfeito a partir de todos os grupos efetivos de N_E.

Tabela 13: Dos quatro a um quadrado perfeito.

Grupo genérico	Condição	Grupo específico	Expressão
$\{a, a, a, 1\}$	Com $a \in A_E - \{1\}$	$\{5, 5, 5, 1\}, \{6, 6, 6, 1\}$ e $\{7, 7, 7, 1\}$	$\sqrt{(a \times a)}? + (a+1)? =$ $a? + (a+1)? =$ $(a+1)^2$
$\{a, a, b, b\}$	Com $a, b \in A_E$	$\{1, 1, 1, 1\}, \{5, 5, 5, 5\}, \{6, 6, 6, 6\}, \{7, 7, 7, 7\}, \{5, 5, 1, 1\}, \{6, 6, 1, 1\}, \{7, 7, 1, 1\}, \{5, 5, 6, 6\}, \{6, 6, 7, 7\}$ e $\{5, 5, 7, 7\}$	$a \times a \times b \times b =$ $a^2 \times b^2 =$ $(ab)^2$
$\{a, a, b, 1\}$	Com $a, b \in A_E - \{1\}$ e a e b consecutivos	$\{5, 5, 6, 1\}, \{6, 6, 5, 1\}, \{6, 6, 7, 1\}$ e $\{7, 7, 6, 1\}$	$\sqrt{a \times a}? + b? \times 1 =$ $a? + b? =$ b^2
$\{a, a, b, 1\}$	Com $a, b \in A_E - \{1, 6\}$ e $a \neq b$	$\{5, 5, 1, 7\}$ e $\{7, 7, 1, 5\}$	$(a \div a + 1)?!? + b? =$ $6? + b? =$ $(\max\{b, 6\})^2$
$\{a, a, b, 6\}$	Com $a \in A_E$ e $b \in A_E - \{1, 6\}$	$\{1, 1, 5, 6\}, \{1, 1, 7, 6\}, \{5, 5, 5, 6\}, \{5, 5, 7, 6\}, \{6, 6, 5, 6\}, \{6, 6, 7, 6\}, \{7, 7, 5, 6\}$ e $\{7, 7, 7, 6\}$	$a \div a \times (6? + b?) =$ $1 \times (\max\{a, b\})^2 =$ $(\max\{a, b\})^2$
$\{a, a, 5, 7\}$	Com $a \in A_E$	$\{5, 5, 5, 7\}, \{6, 6, 5, 7\}$ $\{1, 1, 5, 7\}$ e $\{7, 7, 5, 7\}$	$(5 + a \div a)? + 7? =$ $6? \times 7? =$ 7^2
$\{a, 1, 1, 1\}$	Com $a \in A_E - \{1, 6\}$	$\{5, 1, 1, 1\}$ e $\{7, 1, 1, 1\}$	$(1 + 1 + 1)!? + a? =$ $6? + a? =$ $(\max\{a, 6\})^2$
$\{1, 1, 1, 6\}$;	Neste caso não há necessidade	$\{1, 1, 1, 6\}$	$(1 + 1 + 1)! \times 6 =$ $6 \times 6 =$

			6^2
$\{1,5,6,7\}$	Neste caso não há necessidade	$\{1,5,6,7\}$	$5?+\sqrt{(7-1)\times 6?}=$ $5?+6?=$ 6^2

Como já dito anteriormente, estas construções não são únicas, são apenas uma sugestão comprovando a existência de pelo menos uma. Vejamos alguns exemplos com mais expressões na tabela a seguir.

Tabela 14: Construções de quadrados perfeitos a partir de exemplos.

Exemplo de grupo	Grupo Efetivo	Expressões	Quadrados Perfeitos
$\{0,5,7,9\}$	$\{1,5,6,7\}$	$(5-1)\times(7-6)$	4
		$1+6+7-5$	9
		$(5-1)\times 6?+7?$	196
$\{1,3,5,9\}$	$\{1,5,6,6\}$	$(5-1)\times(6-6)$	4
		$(5\times 6)-6!\times 1$	9
		$(5-1)\times 6\times 6$	144
$\{2,4,7,7\}$	$\{6,6,7,7\}$	$6?\div 7+(7-6)$	4
		$(6?\div 7)\times(6!\div 7)$	9
		$6\times 6\times 7\times 7$	1764
$\{0,0,1,8\}$	$\{1,1,1,6\}$	$6\times 1-(1+1)$	4
		$6+1+1+1$	9
		$(1+1+1)!\times 6$	36
$\{2,3,6,8\}$	$\{6,6,6,6\}$	$6-(6+6)\div 6$	4
		$6?-6-\sqrt{6\times 6})$	9
		$6\times 6\times 6\times 6$	1296

Portanto, fica evidente que é possível construir outros números inteiros positivos utilizando a ideias apresentadas nesse trabalho. Agora a busca fica por generalizações, ou padrões que sintetizem a formação de todo e qualquer número inteiro, principalmente, quando fica observado que o universo de algarismos pode se restringir, e a aplicação das operações nos números já construídos podem gerar mais outros números. Veja:

Tabela 15: Gerando um número a partir de outro.

Número inteiro n, possivelmente, já comprovado	$\sqrt{n}$	$n?$	$n!$	$\sqrt{n}?$	$\sqrt{n}??$
4	2	10	24	3	6
9	3	45	362880	6	21

Isso implica no fato de, ao se comprovar que um determinado número inteiro pode ser construído utilizando alguns símbolos e/ou operações entre quaisquer quatro algarismos do sistema de numeração decimal, então, também está comprovado para a infinidade de números que podem ser gerados a partir desse referido número.

Capítulo 4

A construção do número 19 no universo didático

É fato que a curiosidade é uma importante ferramenta pedagógica e despertá-la nos estudantes na maioria das vezes é um desafio. Mas, no âmbito desta construção, que outras questões voltadas ao ensino-aprendizagem da matemática poderiam ser abordadas? Este tema tem movimentado ao longo dos anos muitas comunidades educacionais.

No âmbito escolar, podemos citar a busca dos professores pelas melhores estratégias didáticas; dos alunos, a procura constante por atalhos no processo de aprendizagem; das famílias, a dificuldade de manter elos com a escola, devido a questões de natureza social, como atribuições diárias e profissionais; e até mesmo em relação às normatizações, que se tornam confusas nas constantes transições que são propostas.

É perceptível que a graduação do professor ainda não o prepara efetivamente para os desafios da sala de aula. Quando ele finaliza seu curso, novos obstáculos mostram que sua preparação se encontra incompleta. As mudanças têm ocorrido, porém ainda falta muito. Há inúmeros fatores que dificultam efetivar novas ideias e formulações. É preciso estar aberto às novidades e procurar diferentes métodos de trabalho, partindo de uma análise individual e coletiva das práticas [6] (FREIRE, 1996).

Assim, faz-se necessário ao professor a aplicação de novas metodologias, tendo em vista que o aluno precisa que o ensino-aprendizagem da matemática o seduza para que haja mais interação, o motivando a adquirir conhecimento, propiciando uma relação mais dinâmica com os professores e seus colegas, objetivando absorver de forma mais significativa os conceitos matemáticos.

4.1 Tropeçando na tecnologia

Ressaltando que a velocidade no avanço da tecnologia tem ficado cada vez maior, mesmo o uso delas por grande parte da população não tem acompanhado este processo da mesma forma. Principalmente no universo escolar, as mídias cibernéticas chegaram nas famílias, nos estudantes, e nos professores. Infelizmente, não em um formato uniforme, cada segmento estabeleceu suas prioridades dentro desse mundo virtual.

Não se pode negar que essa evolução tecnológica traz importantes contribuições, principalmente no meio de comunicações, mas de acordo com [7] Neumann e Missel (2019), o lado negativo é fortalecido principalmente por se instaurar nas famílias. Trazendo como consequência filhos e pais separados por um abismo, o que repercute negativamente em diversos aspectos da vida de ambos.

> "Porém, isso é mais percebido pelos pais do que pelos filhos, conforme os dados desta pesquisa, 57,14% dos pais entrevistados afirmaram que frequentemente os filhos preferem ficar conectados a tecnologia ao invés de estar com a família. Enquanto que 50% dos filhos afirmam que o ocasionalmente os pais optam pela tecnologia ao invés de ficar com a família" (NEUMANN e MISSEL, 2019, p.75-91)

Assim, além da comunicação presencial ter se tornado mecânica, quase que restrita ao essencial, infelizmente, as interações pessoais físicas têm diminuído bastante. Isso pode estar fazendo com que cada um esteja criando o seu próprio mundo. Entretanto, não se pode ignorar que a escola é um espaço social, ambiente que necessita de convivências, interações físicas, e que delas são extraídos aprendizados que devem ser levados para toda a vida.

> "Antes de tudo, para um bom convívio, é preciso que haja convívio - o que, por mais óbvio que pareça, nem sempre ocorre. Quando o ensino se resume a treinamento e transferência de informação, as interações entre estudantes chegam a ser evitadas a pretexto de prejudicarem a concentração. O que resta é uma relação de competição entre alunos e de recíproca cobrança entre eles e seus professores." [8] (MENEZES, 2011)

Além disso, caso exista uma convivência caracterizada por cumplicidade dentro do ambiente da sala de aula e em todo tipo de proposta técnica ou cultural, a edificação do conhecimento é dada de maneira natural e processual através de um mutualismo, onde os sentimentos de segurança e amizade prevalecem. Pode ser uma iniciativa de um único docente, porém só irá tomar força quando proliferar entre toda comunidade educacional, incluindo todos os segmentos presentes na escola e os estudantes.

Atualmente, são grandes os desafios dos professores para conseguir promover uma aula atrativa, visto que redes sociais, jogos digitais, filmes, séries, e tudo aquilo que se obtém a partir da internet e de dispositivos móveis deslumbram muito mais as pessoas e principalmente os jovens, do que uma simples transmissão de conhecimento.

> “Os alunos não sabem usar a tecnologia e prol do ensino, são imediatistas, não sabem filtrar as informações da internet e tem dificuldade de concentração em sala de aula. De maneira geral, estudos mostram resultados positivos no uso de celulares e tecnologias da informação e da comunicação em geral”. [9] (GUERIN, 2020, p. 45)

Entretanto, deve-se destacar que estas informações são precoces no que diz respeito a área desta pesquisa. Sendo crianças e adolescentes o público-alvo deste trabalho, se consegue dinamizar as aulas, com situações didáticas que fogem do tradicional, e saem de uma rotulada monotonia, se tornando cada vez mais essenciais à necessidade de evolução intelectual.

Diante de uma situação didática real, estas ferramentas, com destaque para os smartphones, são constantemente criticadas pelos professores, os quais relatam dificuldades de concentração, insuficiente nível de atenção, desnorteando o foco dos estudantes diante dos conteúdos trabalhados na aula.

Soma-se a isso o contínuo desinteresse dos estudantes por quase todos os conteúdos associados à matemática, dentre estes, aqueles que são necessários de forma direta para o dia a dia. Muitos podem ser os motivos que contribuem com este fato, e a manutenção disso vai desde o início da construção do conhecimento, passando pelos direcionamentos recebidos na vida acadêmica, o tratamento compartilhado com os eventuais fracassos e até questões sociais do ambiente em que vivem e que, de alguma forma, afetam o seu crescimento evolutivo.

4.2 Avaliando as avaliações

As avaliações que são aplicadas tanto de origem interna como aquelas que chegam de órgãos externos, vivem em constantes contradições. Muitas vezes, os conhecimentos básicos necessários colidem com aqueles que servirão de suporte para conteúdos técnicos mais avançados. Isso pode afetar de forma circunstancial o crescimento intelectual e a evolução de um estudante.

> “A matemática e o desinteresse dos alunos na escola nos dias atuais, a ousadia, a criatividade e a experimentação, as mudanças impulsionam a perspectiva de competência dos alunos. Como o professor é o orientador desse processo de ensino-aprendizagem, deve sempre renovar sua metodologia. Para isso ocorrer, antes temos que fazer uma autoavaliação, enquanto profissional. Não se deve considerar uma avaliação que considere o aluno como um produto.” [10] (SILVA e CUNHA, 2020, p. 11)

O espaço escolar deve ser para quem o frequenta, um ambiente carregado de confiança, ser uma fonte do saber, lugar onde se pode ser livre para de alguma forma conquistar conhecimentos, cultivar amizades que saibam compartilhar os ganhos e principalmente as perdas diante do processo evolutivo educacional.

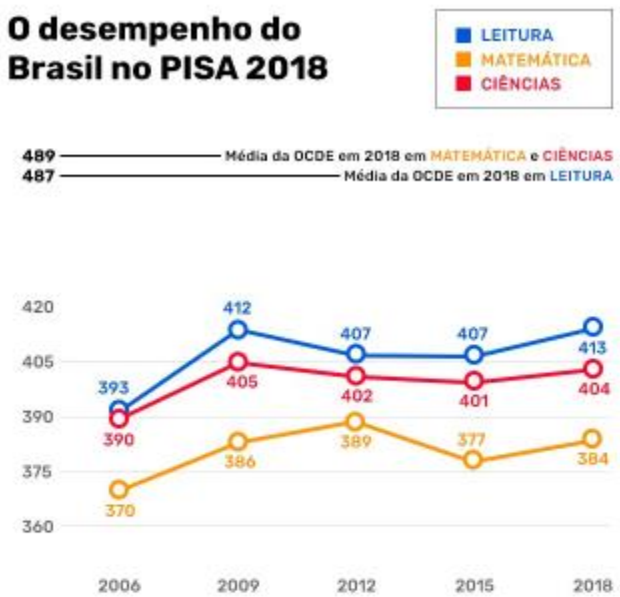
As curiosidades que moveram a construção desse trabalho, também despertaram questões pedagógicas que envolvem as limitações sofridas pelos estudantes, sejam no algoritmo das operações, no desenvolvimento do cálculo mental e até mesmo nas escolhas estratégicas para encontrar a resolução de um problema.

Segundo dados do Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA), os números de 2018 se configuram da seguinte forma: 79 países e 600 mil estudantes foram os números de participantes do teste, que acontece desde o ano 2000. No ranking o Brasil está ocupando a modesta posição de 70º em matemática, entre todos os países participantes desta avaliação.

Outro detalhe importante é que diante de todos os países participantes, foi constatado que os brasileiros são os mais faltosos à escola. Além disso, o tempo perdido de aula por comportamento indevido na sala é maior do que a média geral obtida no PISA 2018. A falta de confiança no seu desempenho também ficou demonstrada, tais estudantes se ajudam bem menos que nos demais países e foi observado o crescimento dos casos de bullying. Tudo isso pertence e é proveniente de um questionário que acompanha a prova.

Veja o comportamento do desempenho brasileiro ao longo dos últimos anos nesta avaliação, mais especificamente em matemática:

Figura 2: O desempenho do Brasil no PISA 2018



Fonte: PISA 2018

De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), cerca de 68,1% dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em matemática e não possuem nível básico, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras. Apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes do PISA apresentou nível máximo de proficiência na área. Em termos de escolarização, os estudantes brasileiros estão três anos e meio atrás dos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico OCDE (489), quando o assunto é proficiência em matemática.

Tudo isso afeta circunstancialmente, e de diversas formas diretamente, a segurança que o indivíduo precisa ter para se sentir confortável, a conseguir receber de forma estruturada os comandos matemáticos destinados ao seu aprendizado. O fracasso não pode ser tratado como algo que destrói, mas como uma parte importante da caminhada, e que muitas vezes é com ele que se consegue evidenciar o melhor caminho para se obter uma solução.

Segundo [11] Emmel e Costa (2019), os problemas relacionados à aprendizagem da Matemática surgem já nos primeiros contatos do aluno com a matéria. O que acontece nos anos iniciais, podendo ser por limitação dos recursos didáticos do docente ou uma quantidade não suficiente de atenção à disciplina ofertada pelo estudante. Mas o que fica marcado na memória de boa parte destes alunos é que a Matemática é inalcançável e sua compreensão é utópica. Dessa forma, isso vai lhes traumatizando quase que permanentemente.

Foi em 2012, a última vez que matemática esteve dominando as diretrizes da avaliação do PISA. Agora, a Matriz de Referência (Quadro Conceitual) de Matemática para a nova prova teve seu lançamento oficial em 14/10/2019 na Universidade de Oxford. Este fato foi paralelo a criação da versão digital e interativa na área e figuram entre suas competências, a capacidade de formular, a aplicação de conceitos e interpretação concisa de situações do mundo real de forma contextualizadas. Infelizmente, a pandemia trouxe consequências, e uma delas é que o PISA 2021 só poderá ser realizado em 2022.

É crescente o interesse global nas "Competências Para o Século XXI", e a ansiedade é grande para que seja incluída nos sistemas educativos. A OCDE divulgou uma publicação focada nas referidas competências, além de financiar "O Futuro da Educação e das Competências: Educação 2030", título de um projeto investigativo. Um total de 25 países se engajaram neste processo internacional, sendo inclusa a colocação destas competências. Este projeto tem por objetivo principal o currículo futuro, iniciando com destaque na matemática.

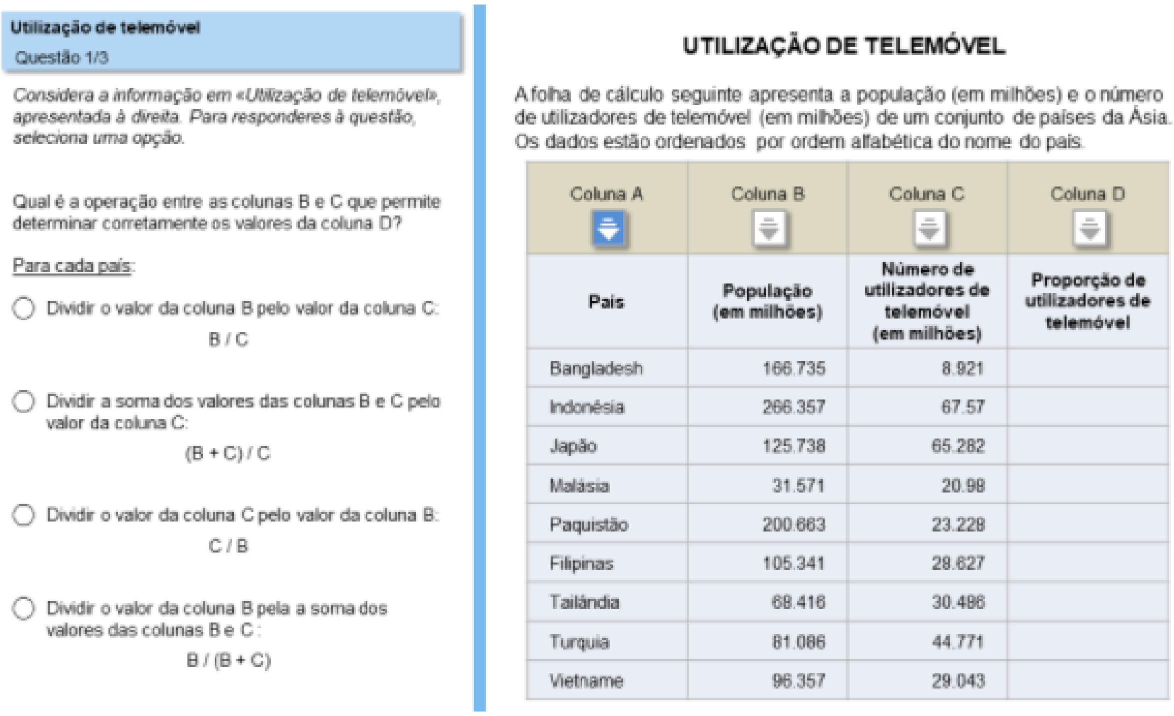
Dentre as competências do século XXI, podem se destacar: o pensamento crítico, que é de grande relevância na nossa sociedade atual. Os questionamentos precisam estar presentes no processo de construção do conhecimento; a criatividade, pois o indivíduo deve estar preparado para se reinventar; a investigação e a pesquisa, tais itens devem fazer parte da natureza humana, pois fortalecem o crescimento intelectual; a autodireção, a iniciativa e a persistência, fatores primordiais que caracterizam a autoconfiança; a utilização de informação, tanto é importante recebe-la como saber como e onde utiliza-la; o pensamento sistémico, ideal para se construir padrões; a comunicação, é com ela que se busca o entendimento e a reflexão, que é essencial para compreensão do mundo.

As competências do século XXI são reconhecidas por quem elabora as questões do teste de matemática do PISA 2022, mas os itens da avaliação não são, exatamente, criados conforme estas competências. Mas a ação de aplicar vem forte dentro desta avaliação. Dentro da matemática, o indivíduo precisa colocar em prática conceitos, procedimentos e seu raciocínio matemático na busca pela resolução de problemas. Segundo o [12] Quadro conceitual do PISA 2022,

> “No processo de empregar conceitos, factos, procedimentos e raciocínio matemático para resolver problemas, os indivíduos executam os procedimentos matemáticos necessários para obter resultados e encontrar uma solução matemática. Eles trabalham num modelo da situação-problema, estabelecendo regularidades, identificando conexões entre entidades matemáticas e criando argumentos matemáticos.”

Observe uma questão teste que se encontra na versão digital do quadro conceitual PISA 2022 como modelo para as que poderão estar na avaliação que será aplicada:

Figura 3: Questão modelo PISA 2022



Utilização de telemóvel
Questão 1/3

Considera a informação em «Utilização de telemóvel», apresentada à direita. Para responderes à questão, seleciona uma opção.

Qual é a operação entre as colunas B e C que permite determinar corretamente os valores da coluna D?

Para cada país:

- Dividir o valor da coluna B pelo valor da coluna C: B / C
- Dividir a soma dos valores das colunas B e C pelo valor da coluna C: (B + C) / C
- Dividir o valor da coluna C pelo valor da coluna B: C / B
- Dividir o valor da coluna B pela a soma dos valores das colunas B e C: B / (B + C)

UTILIZAÇÃO DE TELEMÓVEL

A folha de cálculo seguinte apresenta a população (em milhões) e o número de utilizadores de telemóvel (em milhões) de um conjunto de países da Ásia. Os dados estão ordenados por ordem alfabética do nome do país.

Coluna A	Coluna B	Coluna C	Coluna D
País	**População (em milhões)**	**Número de utilizadores de telemóvel (em milhões)**	**Proporção de utilizadores de telemóvel**
Bangladesh	166.735	8.921	
Indonésia	266.357	67.57	
Japão	125.738	65.282	
Malásia	31.571	20.98	
Paquistão	200.663	23.228	
Filipinas	105.341	28.627	
Tailândia	68.416	30.486	
Turquia	81.086	44.771	
Vietname	96.357	29.043	

Fonte: Quadro conceitual PISA 2022

Nela, percebe-se que as operações fundamentais e o seu uso adequado estão presentes, necessitando assim, de um domínio destes conceitos, por parte dos estudantes, para conseguirem a sua correta resolução.

Olhando especificamente, esse processo se configura como: realizar um simples cálculo, fator essencial na matemática; tirar uma simples conclusão, pois é necessário saber quando houve desfecho; selecionar a estratégia adequada, fará otimizar o tempo; conceber e propiciar a implementação de estratégias para achar soluções, saber outros caminhos ajudam na melhor compreensão; aplicar regras, algoritmos e estruturas matemáticas na busca por soluções; utilizar e alternar diversas representações durante a procura de soluções; dentre outras determinações.

Já o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que começou a ser aplicado em 1990, acontece sempre dentro de um intervalo de 2 anos, e é uma avaliação realizada pelo INEP. Ela oferta subsídios para a criação, o acompanhamento e a adequação de políticas estruturadas de acordo com os resultados, também permite que segmentos do governo avaliem os níveis da educação nacional.

Questionários são elaborados com o objetivo de refletir a aprendizagem dos estudantes em diversos níveis que se descrevem e organizam de forma crescente, e são utilizadas escalas de proficiência em cada etapa avaliada. Os resultados apresentados, em consonância com as taxas de aprovação, reprovação e abandono, forma o índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB).

Entre os descritores presentes na matriz de referência em matemática da avaliação do [13] SAEB para 2021, serão destacados os D17, D18, D19 e D20 pertencentes ao 5º Ano do Ensino Fundamental:

> D17: Calcular o resultado de uma adição ou subtração de números naturais; D18: Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais; D19: Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou subtração: juntar, alteração de um estado inicial (positiva ou negativa), comparação e mais de uma transformação (positiva ou negativa). D20: Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia de proporcionalidade, configuração retangular e combinatória.

E D18, D19 e D20 do 9º Ano do Ensino Fundamental.

> D18: Efetuar cálculos com números inteiros, envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). D19: Resolver problema com números naturais, envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação). D20: Resolver problema com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).

Veja abaixo uma questão que fez parte da avaliação de matemática do SAEB recentemente.

Figura 4: Questão SAEB

Maria comprou um fogão por 240 reais e uma mesa por 180 reais, pagando 150 reais de entrada e o restante em 3 vezes sem juros.

Qual é o valor de cada prestação?

(A) 90 reais.

(B) 130 reais.

(C) 140 reais.

(D) 190 reais.

Fonte: Daeb/Inep

É possível perceber mais uma vez a presença de conceitos relacionadas as operações e o uso adequado delas. Diante disto, [14] Schroeder e Lester (1989) descrevem o ensino da Matemática e a resolução de problemas em três partes: primeiro, é colocado o ensino sobre a resolução de problemas; segundo, destaca-se o ensino para a resolução de problemas; e, por fim, tem-se o ensino através da resolução de problemas.

Assim, foi levado em consideração o ensino através da resolução de problemas para aplicação deste trabalho, visto que,

> "[...] é uma das alternativas que os professores possuem de dinamizar o processo de ensino-aprendizagem. Ao ser mediador, o professor faz os questionamentos necessários para que os alunos construam a base de conhecimentos durante a resolução dos problemas. Os alunos, como sujeitos ativos, adquirem confiança ao trabalharem em grupos, dialogando com seus pares e trocando as informações que precisam. Os problemas são um meio de formalizar os conceitos matemáticos que se almeja ensinar, além de proporcionar as aplicações dos conteúdos já ensinados" (SEGANTINI, 2015, p.121 *apud* SEGANTINI, 2017).

Nessa perspectiva, Silva e Siqueira Filho (2011, p. 145 *apud* Segantini, 2017) afirmam que a resolução de problemas aguça processos cognitivos, uma vez que dá ao aluno possibilidades de reflexão, análise dos procedimentos efetivados, descobertas de caminhos diferenciados para a conclusão do problema em pauta, releitura do resultado encontrado, dentre outras.

4.3. O 19 e as conversas numéricas

Diante das competências descritas e como mostram as questões das referidas ferramentas de avaliação, saber as operações matemáticas, a forma adequada de aplicá-las, e a estruturação na resolução de problemas, estão bem presentes e se mostram necessárias para o conhecimento prévio dos estudantes.

Com esta perspectiva, acredita-se que a utilização das ideias apresentadas neste trabalho podem ser aplicadas em algumas situações didáticas e possivelmente devem apresentar resultados significativos, visto que as propostas são baseadas em experiências exitosas já realizadas e expostas. Isso irá contribuir de alguma forma, com o enriquecimento intelectual dos educandos.

Uma boa sugestão para a utilização das ideias desse trabalho, seria aproveitar para aplicar uma metodologia identificada como "conversas numéricas", descrita por [15] Humphreys (2019) em "Conversas Numéricas: Estratégias de Cálculo Mental para uma Compreensão Profunda da Matemática".

Nela, os estudantes em sala de aula, respondem problemas matemáticos através do cálculo mental, e logo depois compartilham seus cálculos e mostram suas estratégias. Isso tende a deixá-los empolgados e ansiosos para interagir, além do fato de despertar neles a necessidade de um maior envolvimento com a matéria. Esta é uma atividade que busca causar impactos no processo de ensino aprendizagem e dinamizar as relações interpessoais no ambiente escolar.

Sabe-se que grande parte dos professores que trabalham com o Ensino Fundamental e Médio apresentam reclamações sobre as limitações dos conceitos básicos em matemática de seus estudantes. “Cada professor rotineiramente vê estudantes dependentes de procedimentos mecânicos que são aplicados sem pensar” (Humphrey, 2019).

Na situação didática sugerida e que aborda esta metodologia de ensino, o professor na aula desafiaria seus alunos, colocando escrito no quadro ou projetando, qual seria uma expressão matemática criada a partir de um ou mais grupos com quatro algarismos pré-determinados e expostos, utilizando as operações descritas aqui, para que resultasse em 19 ou qualquer outro número inteiro positivo sugerido.

Após ser dado um tempo, cada um deles deve construir suas respectivas soluções mentalmente, aguardar até finalizar o período estipulado, e então, o professor determina qual o aluno começa. Em seguida, na medida que ele expõe a sua forma de fazer, o professor escreve no quadro, depois inicia-se um debate para que todos possam analisar os caminhos utilizados, levantar as hipóteses que justificam as estratégias que foram tomadas, e assim estabelecer com ele as resoluções mais adequadas.

O processo é repetido com cada aluno participante, e deve se respeitar o desejo daqueles que optam em não expor sua resolução. Com isso, na tentativa de dinamizar a aula, será possível trabalhar uma matemática básica, trazendo para os estudantes, de forma implícita, uma fraqueza que a maioria deles têm, e consequentemente fortalecer a ideia dentro deles, de que é possível estruturar conceitos que podem não ter sido bem construídos anteriormente.

Toda essa ação pode ocorrer com a duração de 2 aulas, em qualquer turma do Ensino Fundamental ou Médio, e não há problema algum em repeti-la periodicamente ao longo do ano letivo. Também pode ser oferecido algum tipo de premiação para aqueles que forem bem-sucedidos, sempre tomando cuidado com a possibilidade de exclusão, bullying, ou alguma forma de exposição negativa do aluno.

4.4. Na gincana, sempre dá 19

Outra sugestão enriquecedora para se utilizar das ideias desse trabalho, seria promover uma gincana entre todos os alunos pertencentes a uma série específica, podendo ou não os separar em grupos. Esta situação didática baseia-se na experiência relatada por (Teixeira, 2010) na obra “Os Quatro Quatros” – Reflexões Sobre uma Gincana de Matemática”, publicada na revista Linhas.

A ideia se baseia em o professor, ou um grupo de professores, dividirem os estudantes por turmas de uma mesma série, ou se for o caso, em grupos dentro de uma única série, disponibilizar para cada grupo algumas cartolinas, distribuir igualmente os 715 conjuntos efetivos citados neste trabalho, sem repetição e de 4 algarismos, estipular o tempo que os grupos terão ao mesmo tempo. O comando será dado para que, com os conjuntos de 4 algarismos que receberem, os componentes da turma ou do grupo consigam montar para cada um, pelo menos uma expressão aritmética que resulte no número 19, utilizando as operações descritas neste trabalho, e anotados na cartolina.

Após o término do tempo, serão avaliados os painéis, verificando se os conceitos matemáticos foram respeitados, e será feita uma contagem do número de expressões que foram montadas. Irá vencer aquele grupo com o maior número de construções, no critério de desempate, as expressões feitas com um menor número de operações, serão consideradas mais valiosas.

Seria muito importante que os painéis com as devidas correções fossem expostos para todos os participantes, e que seja reservado um momento para reflexões e debates sobre os caminhos escolhidos nas construções das expressões. Uma atividade como esta pode ocorrer em algum momento do ano letivo, pode mobilizar toda a escola, e por ser uma gincana, um dia ou dois seria um prazo bom para realizá-la. É uma atividade que pode ser realizada com alunos do Ensino Fundamental ou Médio.

A criatividade se desperta com o espírito de competição, e até mesmo aqueles que se dizem avessos à matemática, ficam tentados a interagir e integrar, é como diz D´Ambrósio (1993, p. 40) “Todas as maneiras de entender criatividade convergem para algo que escapa ao rotineiro, que rompe com o que é esperado e que traz novas dimensões para um esforço”.

4.5. A matemática recreativa do 19

Diante das competências, em mais uma sugestão de atividade para aplicar como situação didática, encontra-se uma oficina realizada por Segantini em “O problema dos quatro quatros” e relatada no VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA. A referida atividade usa a matemática criativa como embasamento para nortear as diretrizes que devem ser seguidas.

Uma definição para a Matemática Recreativa, segundo Costa (2014) é toda a atividade com caráter lúdico e pedagógico. E, conforme Lopes (2012), as pessoas praticam por satisfação, prazer, para pensar e para jogar. No Brasil, quem se destacou como grande difusor dessa ideia foi Malba Tahan, já citado anteriormente.

O primeiro momento da atividade será destinado à divisão dos grupos dentro de uma mesma turma na sala de aula. Logo depois, deve ser repassado o mesmo problema para todos: construir uma expressão aritmética com quatro algarismos pré-estabelecidos, utilizando as operações descritas neste trabalho, e que resultem em 19. Cada grupo receberá de maneira uniforme os mesmos 10 conjuntos de 4 algarismos, será feita a leitura do problema, tirada as devidas dúvidas sobre o enunciado e explicada cada uma das operações a serem utilizadas. E assim, ficam livres para de forma coletiva fazerem e registrarem suas devidas construções.

Já no segundo momento, cada grupo deve expor todo o seu material que foi construído, e cada conjunto de quatro algarismos com sua respectiva expressão aritmética, ser feito um debate com todos os estudantes participantes, mostrando as diversas formas para conseguir atingir um mesmo resultado, além de mostrar os possíveis equívocos que poderiam surgir.

O terceiro momento deve ser reservado para o registro, por parte de cada estudante participante. É a hora deles colocarem suas impressões a respeito da atividade realizada, que conclusões puderam tirar, e apresentarem suas sugestões na busca de melhorias. Assim, é possível dar continuidade a um trabalho diferenciado, no qual pode deixar o estudante relaxado e mais concentrado para receber os conceitos matemáticos.

Esta situação didática, não precisa ser feita em um único dia, ela fica mais bem aplicada, quando realizada de maneira tranquila, demonstrando que é necessária a utilização de muita concentração, além do fato que o estudante precisa se sentir presente na construção de seu próprio conhecimento.

Considerações Finais

A ideia inicial deste trabalho tinha alguns propósitos, mas, no decorrer dele, surgiram outras inúmeras curiosidades, o que levantou diversos questionamentos no universo matemático sobre a construção de outros números inteiros a partir da mesma proposta. Foi uma destas situações, buscar estabelecer regras para padronizar a formulação de um determinado número ou grupos específicos de números.

A procura por um padrão ou por generalizações trouxe algumas descobertas que fizeram o processo ficar enriquecedor, o que tinha como motivação inicial a construção do número 19, foi se estendendo a formação de outros números inteiros positivos. É sabido que não é algo simples, devido à complexidade que foi colocado o problema, mas acredita-se que alguma contribuição ficou estabelecida.

Brincar com os números, colocar de forma estratégica as operações, encaixar devidamente os sinais, é algo que discretamente vai envolvendo todo aquele que se sente desafiado a conseguir o objetivo proposto. Logo, a aversão tão configurada dos estudantes diante da matemática tende a ser diminuída e até mesmo superada.

E isso não se restringe apenas àqueles que dominam essa maravilhosa ciência, uma vez que os conceitos matemáticos básicos são colocados de forma tão atraente que fica difícil resistir a eles, e dependendo do público a ter acesso, conteúdos mais fundamentados podem ser inseridos de forma gradativa e agradável.

Fundamentações matemáticas, estruturações conceituais, interações interpessoais em sala de aula, dinamismo didático, melhorias nos resultados avaliativos, são fatores que esse trabalho buscou abordar. Oferecendo sugestões nas quais o autor acredita estarem em consonância com as inúmeras dificuldades enfrentadas em cada âmbito citado, deixando ao leitor o desafio de construção de outros números ainda não abordados, e ao leitor-professor o desafio de aplicar atividades como esta em sua sala de aula.

Referências

[1] TAHAN, Malba. **O homem que calculava** – 45ª edição – Rio de Janeiro: Record, 1997.

[2] MARTINS, Rodrigo. **Os quatro quatros em um relógio**. Atitude Reflexiva, 2019. Disponível em: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/2019/09/04/13634/>. Acesso em 15 de junho de 2021.

[3] TEIXEIRA, Ricardo Roberto Plaza. “**Os quatro quatros” – Reflexões sobre uma gincana de matemática**. Revista Linhas, Florianópolis, v. 11, n. 01, p. 173 - 184, 2010. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/linhas/article/view/1386. Acesso em 1 de julho de 2021.

[4] SEGANTINI, Clarice. **O problema dos quatro quatros**. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática, VII. 2017. Canoas.

[5] D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**. São Paulo: Editora Ática, 1993.

[6] FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 20ª edição. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

[7] NEUMANN, Débora Martins Consteila; MISSEL, Rafaela Jarros. **Família digital: a influência da tecnologia nas relações entre pais e filhos adolescentes**. Pensando fam**.**, Porto Alegre, v. 23, n. 2, p. 75-91, 2019. Disponível em <http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1679-494X2019000200007&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 1 de julho de 2021.

[8] MENEZES, Luis Carlos. **Escolas com bom convívio têm muito a ensinar.** Nova Escola, 2011. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/1587/escolas-com-bom-convivio-tem-muito-a-ensinar>. Acesso em 11 de junho de 2021.

[9] GUERIN, Cintia Soares. **Percepção de professores sobre o uso da tecnologia no ensino e aprendizagem da geração Z.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Foz do Iguaçu. 106f. 2020.

[10] SILVA, Carlos Bruno Cândido; CUNHA, Roseane Cavalcanti da. **A matemática e o desinteresse dos alunos na escola atual**. Open Minds International Journal. São Paulo, vol. 1, n.1: p.36 - 46, Jan, Fev, Mar, Abr/2020. ISSN 2675 – 5157.

[11] EMMEL, Rúbia; COSTA, Paola da. **O Ensino da matemática, a aprendizagem e o fracasso escolar: uma análise dessas relações no Ensino Médio Integrado de uma instituição da rede federal de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico**. REMAT, Bento Gonçalves, v. 5, n: 2, p. 96 - 107, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/ index.php/REMAT/article/ view/3356/2276>. Acesso em: 5 de julho de 2021.

[12] PISA. **PISA 2022 Quadro conceptual de Matemática**, 2019. Disponível em: https://pisa2022-maths.oecd.org/pt/index.html. Acesso em: 26 Jul. 2021.

[13] INEP. **Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) - Matriz de referência de língua portuguesa e matemática**, 2020. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/matriz_de_referencia_de_lingua_portuguesa_e_matematica_do_saeb.pdf. Acesso em 28 Jul. 2021

[14] SCHROEDER, T. L .; LESTER, F.K., JR. **Desenvolvendo compreensão em matemática por meio da resolução de problemas**. In: TRAFTON, P. R .; SHULTE, A. O. (Eds.). Novas direções para a matemática do ensino fundamental. Reston: NCTM, 1989, pág. 31-42.

[15] HUMPHREY, Cathy. **Conversas numéricas: estratégias de cálculo mental para uma compreensão profunda da matemática**. Tradução: Sandra Maria Mallmann da Rosa. Porto Alegre, 2019.

[16] COSTA, O. **A matemática recreativa no ensino básico**. Dissertação (Mestrado em Ciências) Escola de Ciências, Universidade do Minho. Braga-PO, p. 98. 2014.

[17] LOPES, A, J. **Dia da matemática e a obra didática de Malba Tahn, para além do homem que calculava**. Sociedade Brasileira de Eduacação Matemática (SBEM): Boletim n.13. Brasília, 2012.