

Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ



Campus Alto Paraopeba - CAP

Programa de Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional - PROFMAT



Marina Maria Moreira

## Geometria diferencial de curvas em espaços euclidianos e $\mathcal{R}$ -equivalência

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Campus Alto Paraopeba da Universidade Federal de São João del-Rei como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

### Banca Examinadora:

Prof(a). Pedro Benedini Riul - UFSJ (Orientador)

Prof(a). Amanda Gonçalves Saraiva Ottoni - UFSJ

Prof(a). Rafaella de Souza Martins - UDESC

Ouro Branco  
Dezembro 2021

## Geometria diferencial de curvas em espaços euclidianos e $\mathcal{R}$ -equivalência

Marina Maria Moreira <sup>1</sup>

Pedro Benedini Riul <sup>2</sup>

**Resumo:** Esse texto apresenta um estudo das curvas regulares em espaços Euclidianos em dois contextos. Inicialmente através da geometria diferencial clássica e em seguida sob o ponto de vista da teoria de contato. O contato de curvas com objetos de referência, sendo estes retas e círculos para curvas planas e planos e esferas para curvas espaciais, é medido através das singularidades das funções altura e distância ao quadrado. Mais ainda, fazemos uma investigação acerca da  $\mathcal{R}$ -equivalência de funções reais de uma variável, relacionando-a com a teoria de contato.

**Palavras-chave:** Curvas parametrizadas; Teoria de contato; Teoria das Singularidades.

**Abstract:** This paper presents a study of regular curves in Euclidean spaces in two contexts. First, it is done through the classical differential geometry and then from the point of view of the contact theory. The contact of curves with reference objects, these being straight lines and circles for plane curves and planes and spheres for space curves, is measured through the singularities of the height and distance-squared functions. Moreover, we investigate the  $\mathcal{R}$ -equivalence of one-variable real functions, relating it to contact theory.

**Keywords:** Parametrised curves; Contact theory; Singularities theory.

## 1 Introdução

O nascimento da Teoria das Singularidades se deve ao trabalho pioneiro do matemático e topólogo Hassler Whitney, que em 1955 classificou as singularidades de aplicações do plano no plano (WHITNEY, 1955). No final da década de 60, o matemático John Mather em (MATHER, 1968) e (MATHER, 1970) introduziu grupos que agem no conjunto de classes de equivalência de germes de aplicações e definiu as bases para um estudo sistemático, através da investigação da determinação finita e desdobramentos desses germes de aplicações. As ferramentas desenvolvidas da Teoria das Singularidades têm sido cada vez mais utilizadas em diferentes áreas nas últimas décadas, principalmente na Geometria Diferencial de variedades regulares e singulares.

Esse trabalho tem foco na geometria de curvas regulares em espaços Euclidianos. Inicialmente, usando como referência (CARMO, 2010), (DELGADO, 2017) e (TENENBLAT, 2008), na Seção 2 discutimos as curvas parametrizadas diferenciáveis no plano e no espaço, seus elementos fundamentais

---

<sup>1</sup> Aluna de Mestrado do PROFMAT, Turma 2019, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Campus Alto Paraopeba (CAP), e-mail marina\_maria06@yahoo.com.br

<sup>2</sup> Professor Orientador, Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM/UFSJ, e-mail benedini@ufsj.edu.br

e características. Definimos a reparametrização por comprimento de arco de uma curva e a sua importância na análise da geometria de curvas parametrizadas. Apresentamos, na Seção 3, as Fórmulas de Frenet, que nos fornecem equações para os invariantes de uma curva, a saber, curvatura e torção.

Dando continuidade ao estudo de curvas, na Seção 4 mostramos que é possível analisar a geometria de uma curva através do seu contato com objetos de “referência”. Para curvas planas, estudamos o seu contato com retas e círculos; para curvas espaciais, com planos e esferas. Para essa discussão, usamos como referência os trabalhos (BRUCE; GIBLIN, 1992) e (IZUMIYA et al., 2015). Apresentamos com detalhes as funções distância ao quadrado, que mede o contato de curvas com círculos e esferas, e altura, que mede o contato de curvas com retas e planos. Discutimos suas características algébricas e geométricas, diretamente relacionadas com o estudo do contato de curvas, e investigamos as estruturas das curvas especiais: pedal, paralela e evoluta.

Na Seção 5 estudamos as singularidades de funções reais de uma variável. Para tanto, definimos a  $\mathcal{R}$ -equivalência, uma relação de equivalência definida para funções reais, dada pela mudança de coordenadas locais na fonte (domínio) e que determina o tipo de singularidade das funções. O Teorema 5.2.2, o principal desta seção, determina formas normais polinomiais para algumas classes de equivalência, as chamadas singularidades do tipo  $A_k$ . Mais ainda, o estudo das  $A_k$ -singularidades das funções altura e distância ao quadrado recupera, sob o ponto de vista da Teoria de Singularidades, o contato de curvas com retas, planos, círculos e esferas. Finalizamos o trabalho com a síntese dos temas discutidos, construindo tabelas que interligam os resultados determinados anteriormente. Fazemos também uma discussão a respeito das funções chatas, que exemplificam uma exceção à classificação das funções segundo sua  $A_k$ -singularidade.

## 2 Curvas Planas e no Espaço

Nessa seção, estudaremos curvas paramétricas diferenciáveis. Discutiremos a mudança de parâmetro de uma curva regular e sua reparametrização pelo comprimento de arco.

### 2.1 Curva Parametrizada Diferenciável

**Definição 2.1.1.** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $\gamma$  uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$  (*suave*), de  $I$  em  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ). Chamamos  $\gamma$  de uma *curva parametrizada diferenciável*,  $t \in I$  é o *parâmetro* da curva e  $\gamma(I) \in \mathbb{R}^n$  é o *traço* da curva.

Temos assim,

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

com  $\gamma_i(t)$  *suave* para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**Exemplo 2.1.2.** A aplicação  $\gamma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  com  $a^2 + b^2 \neq 0$ , é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é uma reta que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$  e é paralela ao vetor de coordenadas  $(a, b)$ . Ver Figura 1.

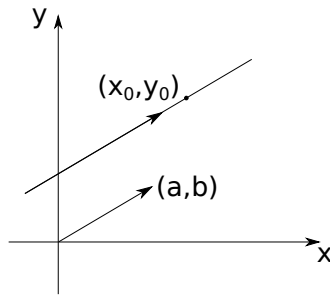


Figura 1 – Curva do Exemplo 2.1.2

Duas curvas parametrizadas diferenciáveis podem ter o mesmo traço.

**Exemplo 2.1.3.** Sejam  $\gamma$  e  $\alpha$  as curvas dadas por  $\gamma(t) = (t, 2t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $\alpha(r) = (r+1, 2r+2)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Fazendo  $r+1 = t$ , vemos que ambas as curvas possuem o mesmo traço. Ver Figura 2.

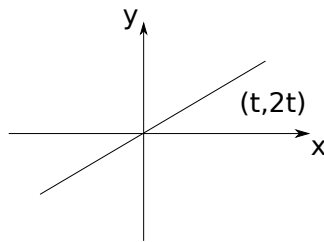


Figura 2 – Curva do Exemplo 2.1.3

**Definição 2.1.4.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), uma curva parametrizada diferenciável. O vetor  $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$  é chamado de *vetor tangente* à  $\gamma$  em  $t$ .

**Exemplo 2.1.5.** Considere  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva parametrizada diferenciável  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . O vetor tangente a  $\gamma$  em  $t$  é  $\gamma'(t) = (1, 2t)$ .

**Definição 2.1.6.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), uma curva parametrizada diferenciável. Se  $\gamma'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ , a curva é dita *regular*. Se  $\gamma$  é regular, a *reta tangente* à  $\gamma$  em  $t_0$  é a reta que passa por  $\gamma(t_0)$  na direção de  $\gamma'(t_0)$ , e é dada por:

$$g(r) = \gamma(t_0) + r \gamma'(t_0), \quad r \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 2.1.7.** A curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , cujo traço é um círculo de raio 1, é regular, pois  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Já a curva  $\alpha(t) = (2\sin^2 t, 2\sin^2 t \tan t)$ ,  $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ , mostrada esquematicamente na Figura 3, não é regular pois  $\alpha'(t) = (4\sin t \cos t, 4\sin^2 t + \tan^2 t)$  é o vetor nulo quando  $t = 0$ . O traço da curva  $\alpha$  é uma cúspide.

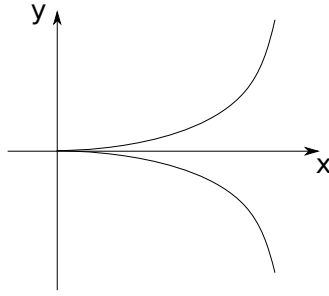


Figura 3 – Cúspide

## 2.2 Mudança de parâmetro

Vimos no Exemplo 2.1.3 que duas curvas podem ter o mesmo traço. A partir de uma curva regular  $\gamma$ , é possível obter várias curvas regulares com o mesmo traço de  $\gamma$ , aplicando a *mudança de parâmetro*.

**Definição 2.2.1.** Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), uma curva regular e  $h : J \rightarrow I$  uma função *suave*, com  $h' \neq 0$  para todo  $j \in J$ , tal que  $h(J) = I$ . A composição  $\beta = \gamma \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva regular, denominada *reparametrização de  $\gamma$  por  $h$* , que tem o mesmo traço de  $\gamma$ . A função  $h$  é dita *mudança de parâmetro*.

Voltemos ao Exemplo 2.1.3 das curvas com o mesmo traço. Temos que  $\alpha(r) = (r + 1, 2r + 2)$ , com  $r \in \mathbb{R}$ , é a reparametrização de  $\gamma(t) = (t, 2t)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , considerando a mudança de parâmetro  $h(r) = r + 1, r \in \mathbb{R}$ .

Uma mudança de parâmetro  $h$  é uma função bijetora, estritamente crescente ou decrescente. Temos também que se  $\beta = \gamma \circ h$  é uma reparametrização de  $\gamma$  por  $h$ , então  $\gamma = \beta \circ h^{-1}$  é uma reparametrização de  $\beta$  por  $h^{-1}$ .

O sentido do percurso do traço de uma curva regular  $\gamma$  é chamado de *orientação*. Consideremos  $\beta$  uma reparametrização de  $\gamma$  por  $h$ . Se  $h$  é estritamente crescente, isso é,  $h' > 0$ , então  $\beta$  e  $\gamma$  têm a mesma orientação. Se  $h$  é estritamente decrescente, isto é,  $h' < 0$ , então  $\beta$  e  $\gamma$  têm orientações opostas.

**Definição 2.2.2.** A integral definida  $\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt$  é chamada de *comprimento de arco* da curva  $\gamma$  a partir de  $t_0$  a  $t_1$ . A *função comprimento de arco* da curva  $\gamma$  a partir de  $t_0$  é a aplicação

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Uma vez que  $\gamma$  é uma curva regular,  $s(t)$  é *suave*.

**Definição 2.2.3.** Dizemos que uma curva regular  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), é dita *parametrizada pelo comprimento de arco (ppca)* se, para cada  $t_0, t_1 \in I$ ,  $t_0 \leq t_1$ , o comprimento do arco de  $t_0$  a  $t_1$  da curva  $\gamma$  é igual a  $t_1 - t_0$ . Ou seja,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(u)\| du = t_1 - t_0.$$

**Proposição 2.2.4.** Uma curva regular  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ( $n = 2, 3$ ), está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, para todo  $t \in I$ ,  $\|\gamma'(t)\| = 1$

**Demonstração:** Suponhamos  $\gamma$  *ppca* e um  $t_0 \in I$  fixo. Seja  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\gamma$  a partir de  $t_0$   $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du$ . Se  $t_0 \leq t$ , então, por hipótese,  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du = t - t_0$ . Se  $t \leq t_0$ , pela propriedade das integrais,  $s(t) = -\int_t^{t_0} \|\gamma'(u)\| du = t - t_0$ . Portanto, para todo  $t \in I$ ,  $s(t) = t - t_0$  e  $s'(t) = 1$ . Uma vez que  $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ , podemos concluir que  $\|\gamma'(t)\| = 1$ , para todo  $t \in I$ . A recíproca é imediata, pois se  $\|\gamma'(t)\| = 1$  para todo  $t \in I$ , temos  $s(t) = \int_{t_0}^t 1 du = t - t_0$  para quaisquer  $t_0, t \in I, t_0 \leq t$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.5.** Seja  $\gamma(t) = (a \cos \frac{t}{a}, a \sin \frac{t}{a})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ . Usando a regra da cadeia para derivadas, temos que  $\gamma'(t) = (-\sin \frac{t}{a}, \cos \frac{t}{a})$ . Uma vez que  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin \frac{t}{a})^2 + (\cos \frac{t}{a})^2} = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma(t)$  é uma curva *ppca*.

A seguinte proposição garante que toda curva regular  $\gamma$  admite uma reparametrização  $\beta$ , com  $\beta$  parametrizada pelo comprimento de arco.

**Proposição 2.2.6.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), uma curva regular e  $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\gamma$  a partir de  $t_0$ . Então existe uma função  $h$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$ , inversa de  $s$ , tal que  $\beta = \gamma \circ h$  é uma reparametrização de  $\gamma$ , onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

**Demonstração:** Sendo  $\gamma$  uma curva regular, temos  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ , ou seja,  $s$  é estritamente crescente. Sendo assim, existe a função inversa de  $s$ ,  $h : J \rightarrow I$ . Como para todo  $t \in I$ ,  $h(s(t)) = t$ , temos que  $\frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$ , logo  $\frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} > 0$ . Concluimos que  $\beta(s) = \gamma \circ h(s)$ ,  $s \in J$ , é uma reparametrização de  $\gamma$  e  $\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \left| \frac{d\gamma}{dt} \frac{dh}{ds} \right| = \left| \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right| = 1$ . Logo, pela Proposição 2.2.4,  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.  $\square$

A aplicação  $\beta$  é dita uma *reparametrização de  $\gamma$  pelo comprimento de arco*. Uma vez que  $\beta$  depende da função comprimento de arco e esta depende de um  $t_0$  fixado, a reparametrização não é única.

Terminaremos essa seção com uma exemplo de reparametrização pelo comprimento de arco, que será feito com detalhes.

**Exemplo 2.2.7.** A curva dada por  $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  é chamada *espiral logarítmica*. Para calcularmos  $\|\gamma'(t)\|$ , temos:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (e^t \cos t + e^t(-\sin t), e^t \sin t + e^t \cos t) \\ &= (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)). \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} |\gamma'(t)| &= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t) + e^{2t}(\sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t)} \\ &= \sqrt{e^{2t}(1 - 2\sin t \cos t) + e^{2t}(1 + 2\sin t \cos t)} \\ &= \sqrt{e^{2t}(1 - 2\sin t \cos t + 1 + 2\sin t \cos t)} \\ &= \sqrt{e^{2t}2} \\ &= e^t \sqrt{2} \end{aligned}$$

A função comprimento de arco de  $\gamma$ , a partir de  $t_0 = 0$ , é:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^t e^t \sqrt{2} dt = e^t \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

Para calcular a função inversa, temos que se  $y = e^t \sqrt{2} - \sqrt{2}$ , então:

$$\begin{aligned} t = e^y \sqrt{2} - \sqrt{2} &\iff t + \sqrt{2} = e^y \sqrt{2} \iff \frac{t + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = e^y \iff e^y = \frac{t}{\sqrt{2}} + 1 \iff \\ \ln e^y &= \ln \left( \frac{t}{\sqrt{2}} + 1 \right) \iff y = \ln \left( \frac{t}{\sqrt{2}} + 1 \right) \end{aligned}$$

Logo,  $s^{-1}(t) = h(s) = \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right)$  é a função inversa. Fazendo a reparametrização em  $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sen t)$ , temos:

$$\beta(s) = \left( e^{\ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right)} \cos \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right), e^{\ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right)} \sen \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right) \right)$$

Pela propriedade dos logaritmos, sabemos que  $a^{\log_a b} = b$ , então,  $e^{\ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right)} = \frac{s}{\sqrt{2}} + 1$ . Assim,

$$\beta(s) = \left( \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \cos \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right), \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \sen \left( \ln \left( \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right) \right) \right)$$

é uma reparametrização de  $\gamma$  pelo comprimento de arco.

Vale observar que no Exemplo 2.2.7, após a reparametrização da curva pelo comprimento de arco, foi feita uma alteração de parâmetro de  $t$  para  $s$ . Essa estratégia será adotada no decorrer do texto, com o objetivo de deixar imediata a identificação de uma curva *ppca*.

### 3 As Fórmulas de Frenet

#### 3.1 Fórmulas de Frenet para curvas planas

Consideremos a curva regular *ppca*

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)), \quad s \in I.$$

Como sabemos,  $\|\gamma'(s)\| = 1$ , então para cada  $s \in I$ ,  $\gamma'(s)$  é um vetor unitário. Denotando-o por  $\mathbf{t}(s)$ , temos:

$$\mathbf{t}(s) = (x'(s), y'(s)).$$

Seja  $\mathbf{n}(s)$  um vetor unitário ortogonal a  $\mathbf{t}(s)$ , de modo que  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  formem uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^2$  que tem a mesma orientação que a base canônica. Logo,

$$\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Denominamos *referencial de Frenet* da curva  $\gamma$  em  $s$  o conjunto de vetores  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$ . A reta que passa por  $\gamma(s_0)$  na direção de  $\mathbf{n}(s_0)$  é chamada de *reta normal*. A Figura 4 representa graficamente os vetores.

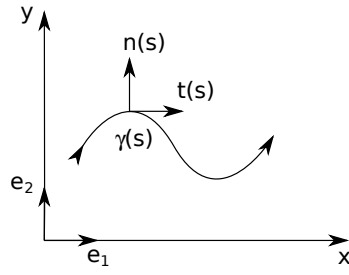


Figura 4 – Vetores  $\mathbf{n}(s)$  e  $\mathbf{t}(s)$  da curva

Os vetores  $\mathbf{t}'(s)$  e  $\mathbf{n}'(s)$  de  $\mathbb{R}^2$  podem ser escritos como combinação linear de  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$ . Uma vez que  $\mathbf{t}(s)$  é unitário e  $\mathbf{t}'(s)$  é ortogonal a  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{t}'(s)$  é proporcional a  $\mathbf{n}(s)$ . O fator de proporcionalidade entre  $\mathbf{t}'(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  é chamado de *curvatura* de  $\gamma$  e denotado por  $\kappa(s)$ . Dessa forma,

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

Considerando a curva  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , temos:

$$\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \kappa(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \kappa(s) \cdot 1 = \kappa(s)$$

Logo,  $\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \gamma''(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ . Segue:

$$\kappa(s) = \langle (x''(s), y''(s)), (-y'(s), x'(s)) \rangle = -y'(s)x''(s) + y''(s)x'(s)$$

De modo análogo,  $\mathbf{n}(s)$  é unitário e  $\mathbf{n}'(s)$  é ortogonal a  $\mathbf{n}(s)$ , logo, proporcional a  $\mathbf{t}(s)$ . Assim,

$$\langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = -x'(s)y''(s) + x''(s)y'(s),$$

ou seja,  $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)$ .

As equações

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$$

$$\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)$$

são denominadas *Fórmulas de Frenet* de uma curva plana regular, parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ .

Vejam alguns exemplos:

**Exemplo 3.1.1.** Seja  $\gamma(s) = (as + x_0, bs + y_0)$ ,  $s \in I$  uma curva *ppca*, de modo que  $a$  e  $b$  são constantes e  $a^2 + b^2 = 1$ . Temos que  $\gamma'(s) = \mathbf{t}(s) = (a, b)$ . Logo,  $\mathbf{t}'(s) = 0$ . Segue que  $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$  e como  $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$ , então  $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)(-b, a) = 0$ . Logo,  $\kappa(s) = 0$ ,  $\forall s \in I$ , de onde concluímos que a curvatura de uma reta é zero em todos os seus pontos.

**Exemplo 3.1.2.** Seja

$$\gamma(s) = \left( a + b \cos \frac{s}{b}, c + b \sin \frac{s}{b} \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad b > 0$$

a curva cujo traço é uma circunferência de raio  $b$  e centro  $(a, c)$ . Usando a regra da cadeia para as derivadas dos termos  $b \cos \frac{s}{b}$  e  $b \sin \frac{s}{b}$ , temos:



$$\gamma'(s) = \mathbf{t}(s) = \left( -\operatorname{sen} \frac{s}{b}, \cos \frac{s}{b} \right), \quad \mathbf{n}(s) = \left( -\cos \frac{s}{b}, -\operatorname{sen} \frac{s}{b} \right).$$

Como  $\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$  e

$$\mathbf{t}'(s) = \left( -\frac{1}{b} \cdot \cos \frac{s}{b}, -\frac{1}{b} \cdot \operatorname{sen} \frac{s}{b} \right),$$

então

$$\kappa(s) = \left( -\frac{1}{b} \cos \frac{s}{b} \cdot \left( -\cos \frac{s}{b} \right) + -\frac{1}{b} \operatorname{sen} \frac{s}{b} \cdot \left( -\operatorname{sen} \frac{s}{b} \right) \right) = \frac{1}{b} \left( \cos^2 \frac{s}{b} + \operatorname{sen}^2 \frac{s}{b} \right) = \frac{1}{b}.$$

Concluimos que a curvatura de uma circunferência de raio  $b$  é  $\kappa(s) = \frac{1}{b}$ . Note que a curvatura de um círculo é inversamente proporcional ao seu raio.

Observe que se mudarmos a orientação da circunferência, a curvatura muda de sinal e passa a ser  $\kappa(s) = -\frac{1}{b}$ .

As *Fórmulas de Frenet*, discutidas até então para curvas *ppca*, podem ser estendidas para quaisquer curvas regulares, uma vez que toda curva regular admite tal reparametrização. Para uma curva regular  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com qualquer parâmetro  $r \in I$ , as equações são dadas segundo a seguinte proposição, cuja demonstração será omitida no texto, mas encontra-se com detalhes em (TENENBLAT, 2008).

**Proposição 3.1.3.** Seja  $\gamma(r) = (x(r), y(r))$ ,  $r \in I$  uma curva regular. Então,

$$\mathbf{t}(r) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}; \quad \mathbf{n}(r) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}; \quad \kappa(r) = \frac{-x''y' + x'y''}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}.$$

### 3.2 Fórmulas de Frenet para curvas no espaço

Consideremos  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva *ppca*. A velocidade com que as retas tangentes desta curva mudam de direção é a curvatura de  $\gamma$ , definida formalmente como abaixo.

**Definição 3.2.1.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva *ppca*. O número real

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$$

é chamado *curvatura* de  $\gamma$  em  $s \in I$ .

**Exemplo 3.2.2.** Seja  $\gamma$  a curva regular *ppca*

$$\gamma(s) = \left( \frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \quad s \in (-1, 1).$$

Temos

$$\gamma'(s) = \left( \frac{(1+s)^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{-(1-s)^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \gamma''(s) = \left( \frac{1}{4(1+s)^{\frac{1}{2}}}, \frac{-1}{4(1-s)^{\frac{1}{2}}}, 0 \right).$$

$$\text{Então } \kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{8(1-s)^2}}.$$

A seguinte proposição estabelece que a curvatura de uma reta é zero.

**Proposição 3.2.3.** Uma curva regular *ppca*  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um segmento de reta se, e somente se,  $\kappa(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ .

**Demonstração:** Se  $\gamma(I)$  é um segmento de reta, então pode ser parametrizado por  $\gamma(s) = w + vs$ , onde  $w \in \mathbb{R}^3$  e  $v$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$ . Logo,  $\gamma'(s) = v$  e  $\gamma''(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ . Então,  $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = 0$ . Reciprocamente, sendo  $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = 0$ , para todo  $s \in I$ , temos que  $\gamma''(s) = 0$ . Usando a integração,  $\gamma'(s) = v$  e  $\|v\| = 1$ . Novamente por integração,  $\gamma(s) = w + vs$ , uma reta.  $\square$

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular *ppca*. Uma vez que  $\|\gamma'(s)\| = 1$  e  $\|\gamma'(s)\| = \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle$ , fazendo a derivada, temos que  $\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0$ , ou seja, o vetor  $\gamma''(s)$  é ortogonal a  $\gamma'(s)$ . Logo, para todo  $s \in I$  e  $\gamma''(s) \neq 0$ , ou seja,  $\kappa(s) \neq 0$ , é possível definir um vetor unitário na direção de  $\gamma''(s)$ .

**Definição 3.2.4.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular *ppca* com  $\kappa(s) > 0$ . O vetor  $\mathbf{n}(s)$  é o *vetor normal* a  $\gamma$  em  $s$ , onde

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)}.$$

A reta que passa por  $\gamma(s_0)$ ,  $s_0 \in I$  na direção do vetor normal  $\mathbf{n}(s_0)$  é a *reta normal* de  $\gamma$  em  $s_0$ .

De modo análogo às curvas planas, denotamos o vetor unitário  $\gamma'(s)$  como  $\mathbf{t}(s)$ . Temos que são ortonormais os vetores  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  e

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s).$$

**Definição 3.2.5.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular *ppca* com  $\kappa(s) > 0$ . O vetor

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

é o *vetor binormal* a  $\gamma$  em  $s$ . Denomina-se *Triedro de Frenet* de  $\gamma$  em  $s$  o referencial ortonormal  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ . Veja a Figura 5.

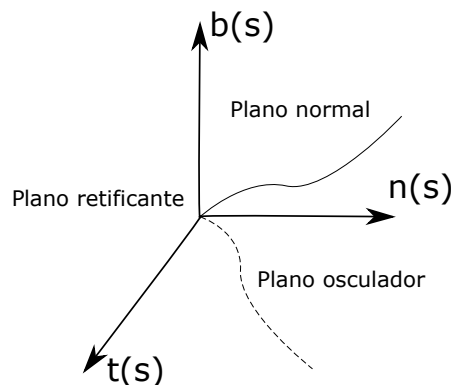


Figura 5 – Planos em  $\mathbb{R}^3$  formados pelos pares de vetores do *Triedro de Frenet*

Os planos em  $\mathbb{R}^3$  formados pelos pares de vetores do *Triedro de Frenet* são denominados *plano normal* ( $\mathbf{b}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$ ), *plano osculador* ( $\mathbf{n}(s)$  e  $\mathbf{t}(s)$ ) e *plano retificante* ( $\mathbf{b}(s)$  e  $\mathbf{t}(s)$ ).

**Definição 3.2.6.** O número real  $\tau(s)$  denomina-se *torção* da curva em  $s$  e é definido por

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s).$$

**Exemplo 3.2.7.** Considere a hélice circular *ppca*, Figura 6,

$$\gamma(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), s \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ constante.}$$

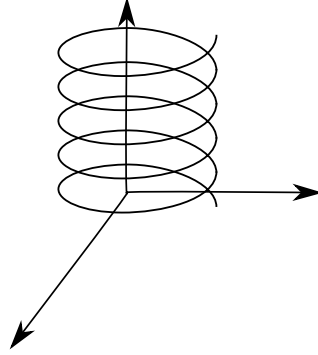


Figura 6 – Hélice circular

Vamos obter o Triedro de Frenet, a curvatura e a torção.

Temos, para o Triedro de Frenet  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ :

$$\mathbf{t}(s) = \gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( -a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \right)$$

$$\gamma''(s) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right) \text{ e } \kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

portanto,

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)} = \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right) \text{ e}$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( b \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \right).$$

Para a torção, temos:

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s), \tau(s) \in \mathbb{R}$$

$$\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \tau(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \tau(s)\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \tau(s).1$$

Logo,

$$\tau(s) = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle.$$

Como

$$\mathbf{b}'(s) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right),$$

$$\tau(s) = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Uma vez que  $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$ , temos que  $\kappa(s) \geq 0$ . Já a torção pode ser negativa ou positiva e seu módulo mede a velocidade da variação do plano osculador.

Já vimos que, dada uma curva regular *ppca*  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $\kappa(s) > 0$  para todo  $s \in I$ , o *Triedro de Frenet* de  $\gamma$  em  $s$  é um referencial ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Sendo assim, é possível obter os vetores  $\mathbf{t}'(s)$ ,  $\mathbf{n}'(s)$  e  $\mathbf{b}'(s)$  como combinação linear de  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n}(s)$  e  $\mathbf{b}(s)$ .

O vetor  $\mathbf{n}(s)$  é ortogonal ao plano definido por  $\mathbf{b}(s)$  e  $\mathbf{t}(s)$ , então

$$\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s).$$

Derivando  $\mathbf{n}(s)$ , temos  $\mathbf{n}'(s) = \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s)$ . Como  $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$  e  $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$ , substituindo e aplicando as propriedades do produto vetorial, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \kappa(s)\mathbf{n}(s) = \tau(s)(\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s)) + \kappa(s)(\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s)) \\ &= \tau(s)(-\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)) + \kappa(s)(-\mathbf{n}(s) \times \mathbf{b}(s)) = \tau(s)(-\mathbf{b}(s)) + \kappa(s)(-\mathbf{t}(s)) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{b}(s) - \kappa(s)\mathbf{t}(s). \end{aligned}$$

São denominadas *Fórmulas de Frenet* as equações

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

para  $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ ,  $\mathbf{n}(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$  e  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ .

Uma aplicação das *Fórmula de Frenet* é o fato de que curvas planas tem torção nula. Finalizamos nossa discussão com o lema e a proposição que seguem, apresentando esse resultado.

**Lema 3.2.8.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular com curvatura não-nula. Se  $\gamma$  é uma curva plana, o plano osculador contém o traço de  $\gamma$  e independe do parâmetro.

**Demonstração:** Suponhamos  $\gamma(s)$  *ppca*. Uma vez que  $\gamma$  é plana, existe um plano  $\pi$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\gamma(I) \subset \pi$ . Vamos provar que  $\pi = [\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)]$ , ou seja,  $\pi$  é o plano osculador. Para tanto, consideremos um vetor  $v$  não nulo e ortogonal a  $\pi$ , conforme Figura 7. Fixando  $s_0 \in I$ , para todo  $s \in I$ , temos

$$\langle \gamma(s) - \gamma(s_0), v \rangle = 0 \tag{3.1}$$

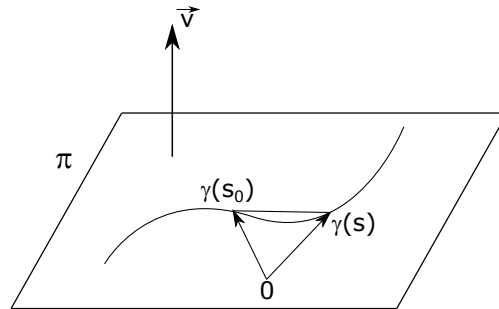


Figura 7 – Plano  $\pi$  ortogonal a  $v$

Derivando a expressão 3.1, obtemos

$$\begin{aligned}\langle \gamma'(s), v \rangle + \langle (\gamma(s) - \gamma(s_0)), 0 \rangle &= 0 \\ \langle \gamma'(s), v \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Logo,  $\mathbf{t}(s)$  é ortogonal a  $v$ . Derivando novamente,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{t}'(s), v \rangle + \langle \mathbf{t}(s), 0 \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{t}'(s), v \rangle &= 0, \\ \langle \kappa(s)\mathbf{n}(s), v \rangle = \kappa(s)\langle \mathbf{n}(s), v \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Ou seja,  $\mathbf{n}(s)$  é ortogonal a  $v$ . Como  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$  são ortogonais a  $v$ , temos que  $v$  é paralelo a  $\mathbf{b}(s)$ , para todo  $s \in I$ , concluindo que  $\pi$  é o plano osculador.  $\square$

**Proposição 3.2.9.** A curva regular, de curvatura não nula,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma curva plana se, e somente se,  $\tau \equiv 0$ .

**Demonstração:** Considerando  $\gamma$  uma curva plana, *ppca*, pelo Lema 3.2.8,  $\mathbf{b}(s)$  é constante e, para todo  $s \in I$ ,  $\mathbf{b}'(s) = 0$ . Logo,  $\tau(s) = \langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$ , para todo  $s \in I$ .

Reciprocamente, se  $\tau(s) = 0$ , para todo  $s \in I$ , temos que  $\mathbf{b}'(s) = 0$  e  $\mathbf{b}(s) = b$ , constante. Consideremos a função  $f(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), b \rangle$  para um  $s_0 \in I$  fixo. Derivando  $f(s)$  temos  $f'(s) = \langle \gamma'(s), b \rangle + \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), 0 \rangle$ ,  $f'(s) = \langle \mathbf{t}(s), b \rangle = 0$ , logo  $f(s)$  é constante. Uma vez que  $f(s_0) = 0$ , segue que  $f(s) = 0$ . Com isso, concluímos que  $\gamma(I)$  está contida no plano que contém  $\gamma(s_0)$  e é ortogonal ao vetor  $b$ .  $\square$

## 4 Contato de curvas

Nessa seção, discutiremos o contato entre curvas. Diversas informações sobre a geometria de uma curva podem ser obtidas através da análise do seu contato com objetos de referência: retas e círculos (para curvas em  $\mathbb{R}^2$ ) e planos e esferas (para curvas em  $\mathbb{R}^3$ ). Para tanto, procediremos da seguinte maneira: tomaremos a curva, que é nosso objeto de estudo, na forma parametrizada e o objeto de referência será dado como imagem inversa (conjunto de nível) de uma função apropriada.

### 4.1 Contato

Para que possamos definir o contato de curvas, inicialmente, apresentaremos equações importantes que servirão de base para discussões posteriores.

Consideremos uma curva regular  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Estamos interessados em determinar o contato de  $\gamma$  com um objeto dado pela solução da equação  $F(X) = 0$ , onde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e zero é um valor regular de  $F$ . Consideremos as equações  $F(X) = 0$ , onde

$$F(X) = \|X - u\|^2 - \|u - p\|^2 \tag{4.1}$$

ou

$$F(X) = \langle X - p, u \rangle, \tag{4.2}$$

com  $u$  e  $p$  pontos de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada uma dessas funções, o conjunto

$$F^{-1}(0) = \{X \in \mathbb{R}^n; F(X) = 0\}$$

nos dá a equação do objeto cujo contato com curvas será estudado.

Para  $n = 2$ , temos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto F(x, y)$ , onde  $X = (x, y)$ . Considerando o ponto  $u = (u_1, u_2)$ , segue:

$$F(X) = 0 \iff \|X - u\|^2 - \|u - p\|^2 = 0$$

$$\|X - u\|^2 = \|u - p\|^2$$

$$\|(x, y) - (u_1, u_2)\|^2 = \|u - p\|^2$$

$$\|(x - u_1, y - u_2)\|^2 = \|u - p\|^2$$

$$(x - u_1)^2 + (y - u_2)^2 = \|u - p\|^2$$

ou seja, para a Equação 4.1,  $F^{-1}(0)$  é a equação de uma circunferência centrada em  $u = (u_1, u_2)$  e de raio  $\|u - p\|$ .

Para  $n = 3$ , temos que  $X = (x, y, z)$  e  $u = (u_1, u_2, u_3)$ . Desenvolvendo de modo análogo ao plano, para a Equação 4.1, temos

$$(x - u_1)^2 + (y - u_2)^2 + (z - u_3)^2 = \|u - p\|^2$$

ou seja,  $F^{-1}(0)$  é a equação de uma esfera de centro  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e raio  $\|u - p\|$ .

Fazendo o desenvolvimento para a equação 4.2, onde  $X = (x, y)$ ,  $u = (u_1, u_2)$  e  $p = (p_1, p_2)$  temos:

$$F(X) = 0 \iff \langle X - p, u \rangle = 0 \iff (X - p) \perp u$$

$$\langle (x, y) - (p_1, p_2), (u_1, u_2) \rangle = 0 \iff \langle (x - p_1, y - p_2), (u_1, u_2) \rangle = 0 \iff$$

$$(x - p_1)u_1 + (y - p_2)u_2 = 0 \iff xu_1 - p_1u_1 + yu_2 - p_2u_2 = 0 \iff$$

$$yu_2 = -xu_1 + (p_1u_1 + p_2u_2) \iff$$

$$u_1x + u_2y = p_1u_1 + p_2u_2$$

ou seja, em  $\mathbb{R}^2$ ,  $F^{-1}(0)$  é uma reta no plano, perpendicular ao vetor  $u$  e que passa por  $p$ . Para  $\mathbb{R}^3$ , desenvolvendo de modo análogo, considerando  $X = (x, y, z)$  e  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , obtemos

$$u_1x + u_2y + u_3z = p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3$$

ou seja,  $F^{-1}(0)$  é uma plano normal ao vetor  $u$  e que passa por  $p = (p_1, p_2, p_3)$ .

Com o conhecimento das Equações 4.1 e 4.2 e suas implicações geométricas, podemos agora definir formalmente o contato entre curvas:

**Definição 4.1.1.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva regular,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Dizemos que  $\gamma$  e  $F^{-1}(0)$  possuem *contato de ordem*  $k$  em  $t = t_0$ , se a função  $g$  definida por  $g(t) = F(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = F(\gamma(t))$  satisfaz  $g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k-1)}(t_0) = 0$  e  $g^{(k)}(t_0) \neq 0$ .

**Exemplo 4.1.2.** Consideremos  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, t^k)$  e  $t_0 = 0$ . Seja  $X = (x, y)$  e  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(X) = y$ . Assim,  $F^{-1}(0)$  representa o eixo  $x$  em  $\mathbb{R}^2$ . A função  $g$  que define o contato entre  $\gamma$  e  $F^{-1}(0)$  é  $g(t) = F(\gamma(t)) = t^k$ . A curva  $\gamma$  tem contato de ordem  $k$  com  $F^{-1}(0)$ , o que é verificado conforme variamos o valor de  $k$ , sendo que para  $k = 1$ ,  $g(t_0) = 0$ .

Para  $k = 2$ , temos  $g(t) = t^2$ ,  $g'(t_0) = 2t_0 = 0$  e  $g''(t_0) = 2 \neq 0$ , ou seja, contato de ordem 2. Para  $k = 3$ ,  $g(t) = t^3$ ,  $g'(t_0) = 3(t_0)^2 = 0$ ,  $g''(t_0) = 6t_0 = 0$  e  $g'''(t_0) = 6 \neq 0$ , ou seja, contato de ordem 3. Observamos que, a medida que o valor de  $k$  aumenta, maior o contato de  $\gamma$  com o eixo  $x$  na origem. A Figura 8 ilustra graficamente esse resultado.

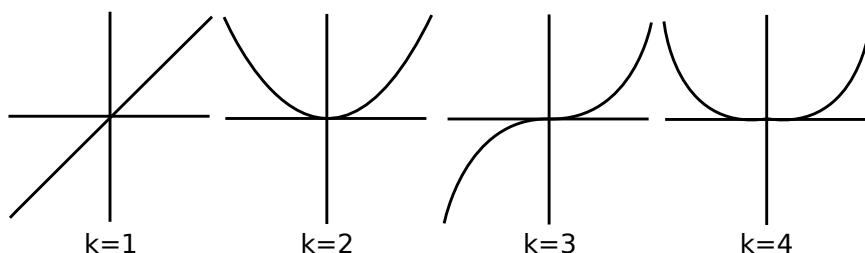


Figura 8 – Contato de  $\gamma$  com o eixo  $x$  conforme variação de  $k$

**Definição 4.1.3.** Quando o conjunto  $F^{-1}(0)$  é, respectivamente, um círculo ou uma reta, temos que:

- (i) Denomina-se *vértice ordinário* (respectivamente *alto* ou *degenerado*) de curva plana  $\gamma$  em  $t_0$  o ponto  $p = \gamma(t_0)$  para o qual existe um círculo com contato de ordem 4 (pelo menos 5) com a curva em  $t = t_0$ . Dizemos que a curva  $\gamma$  tem um vértice em  $p$  (ou em  $t_0$ ). Veja Figura 9.
- (ii) Denomina-se *inflexão ordinária* (respectivamente *alta* ou *degenerada*) da curva plana  $\gamma$  em  $t_0$  o ponto  $p = \gamma(t_0)$  para o qual existe uma reta tangente com contato de ordem 3 (pelo menos 4) com a curva em  $t = t_0$ . Dizemos que a curva  $\gamma$  tem uma inflexão em  $p$  (ou em  $t_0$ ). Veja Figura 9.

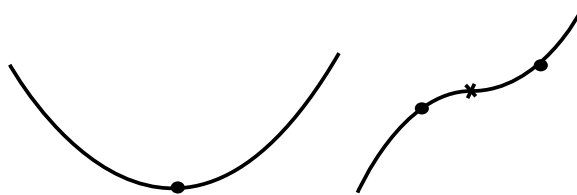


Figura 9 – Vértice e Inflexão

**Exemplo 4.1.4.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, t^k)$ , com  $k$  inteiro. Vamos mostrar que para qualquer  $t_0 \neq 0$ , a reta tangente à curva em  $t_0$  tem contato de ordem 2 com a curva no ponto. Mostraremos também que  $t_0 = 0$  é um ponto de inflexão, se, e somente se,  $k = 3$ .

Inicialmente, vamos determinar a equação da reta tangente,  $y = ax + b$ . Considerando a função real dada por  $h(t) = t^k$ , o traço da curva  $\gamma$  coincide com o gráfico de  $h$ . Temos que  $h'(t) = k t^{k-1}$  é o coeficiente angular da reta tangente, de modo que para o ponto  $t_0$ , segue  $y = k t_0^{k-1}x + b$ . Como o

ponto  $(t_0, t_0^k)$  pertence à curva, para o coeficiente linear  $b$  da reta tangente, tem-se  $t_0^k = k t_0^{k-1} t_0 + b$ , logo  $b = t_0^k (1 - k)$ . Assim, a reta tangente tem por equação  $y = k t_0^{k-1} x + t_0^k (1 - k)$ .

Pela definição de contato, temos que para que  $F^{-1}(0)$  seja a reta tangente, basta tomarmos  $F(x, y) = y - k t_0^{k-1} x - t_0^k (1 - k)$ . Logo,  $g(t) = F(\gamma(t)) = t^k - k t_0^{k-1} t - t_0^k (1 - k)$ .

Para  $t = t_0$ ,  $g(t_0) = t_0^k - k t_0^{k-1} t_0 - t_0^k (1 - k)$ ,  $g(t_0) = 0$ . Calculando a primeira derivada, temos  $g'(t) = k t^{k-1} - k t_0^{k-1}$ ,  $g'(t_0) = k t_0^{k-1} - k t_0^{k-1} = 0$ . Para a segunda derivada,  $g''(t) = k(k-1)t^{k-2}$  e  $g''(t_0) = k(k-1)t_0^{k-2}$ . Como  $t_0 \neq 0$ ,  $g''(t_0) \neq 0$ , mostrando que, de fato, a curva  $\gamma$  tem contato de ordem 2 com a reta tangente.

Quando  $t_0 = 0$ , é imediato que  $g(0) = g'(0) = g''(0)$ . Temos que  $g'''(t_0) = k(k-1)(k-2)t_0^{k-3}$ . Tomando  $k = 3$  em  $g'''(0)$ , temos  $g'''(0) = k(k-1)(k-2) \neq 0$ , ou seja,  $t_0 = 0$  é ponto de inflexão apenas para  $k = 3$ .

## 4.2 Função Distância ao Quadrado

**Definição 4.2.1.** Seja  $u \in \mathbb{R}^n$ . Denomina-se *função distância ao quadrado* de  $\gamma$  em  $u$  a função  $f_d : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f_d(t) = \|\gamma(t) - u\|^2 = \langle \gamma(t) - u, \gamma(t) - u \rangle.$$

**Proposição 4.2.2.** A curva  $\gamma$  tem contato de ordem  $k$ , em  $t = t_0$ , com o círculo de centro  $u \in \mathbb{R}^n$ , passando por  $\gamma(t_0)$ , se, e somente se, a função distância ao quadrado  $f_d$  de  $\gamma$  em  $u$  satisfaz  $f'_d(t_0) = \dots = f_d^{(k-1)}(t_0) = 0$  e  $f_d^{(k)}(t_0) \neq 0$ . Em especial,  $\gamma$  tem um vértice ordinário (respectivamente alto) para  $t = t_0$  se, e somente se,  $f_d$  satisfaz a condição dada para  $k = 4$  (respectivamente para algum  $k \geq 5$ ).

**Demonstração:** Temos que a circunferência que passa por  $\gamma(t_0)$  e tem centro em  $u$  é o conjunto dos pontos  $X \in \mathbb{R}^2$  tais que

$$F(X) = \|X - u\|^2 - \|\gamma(t_0) - u\|^2 = 0.$$

Logo,  $g(t) = F(\gamma(t)) = \|\gamma(t) - u\|^2 - \|\gamma(t_0) - u\|^2$  é a função cujas derivadas determinam o contato de  $\gamma$  com o círculo  $F^{-1}(0)$  em  $\gamma(t_0)$ . Como  $\|\gamma(t_0) - u\|^2$  é constante, o cálculo das derivadas de  $g(t)$  se limitam em derivar  $g(t) = \|\gamma(t) - u\|^2$ . Ou seja, para medir o contato entre  $\gamma$  e a circunferência dada, é suficiente estudar as derivadas da função distância ao quadrado de  $\gamma$  em  $u$ .  $\square$

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , regular, suave, *ppca* e  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ . Vimos que, para determinar o contato entre  $\gamma$  e o círculo centrado em  $u$  passando por  $\gamma(s)$ , basta estudar as derivadas da função distância ao quadrado  $f_d(s) = \|\gamma(s) - u\|^2 = \langle \gamma(s) - u, \gamma(s) - u \rangle$ . Desenvolvendo as derivadas de  $f_d$  e aplicando as Fórmulas de Frenet para curvas planas, vamos estabelecer as condições para diferentes ordens de contato da curva com o círculo. Para simplificar os cálculos, omitiremos o parâmetro  $s$  em alguns momentos. Segue:

- $f'_d = 2 \langle \mathbf{t}, \gamma - u \rangle$

Dessa forma,  $f'_d = 0$  se, e somente se,  $\gamma - u = \lambda \mathbf{n}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ), pois  $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ . Ou seja,  $u$  pertence à reta normal à  $\gamma$  em  $s$ . Sendo assim, o contato de  $\gamma$  (em  $s$ ) com qualquer círculo cujo centro pertence à reta normal da curva é de ordem pelo menos 2.



- $f_d'' = \kappa \langle \mathbf{n}, \gamma - u \rangle + 1$

Temos  $f_d' = f_d'' = 0$  se, e somente se,  $\gamma - u = -\frac{\mathbf{n}}{\kappa}$ ,  $\kappa \neq 0$ . Sendo assim,  $u = \gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$ . Portanto, existe um único círculo passando por  $\gamma(s)$  que tem contato de ordem pelo menos 3 com a curva em  $s$ . Esse círculo é chamado *círculo osculador*, cujo centro  $u = \gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$  é chamado *centro de curvatura* e cujo raio,  $\rho = \frac{1}{\|\kappa\|}$ , é chamado de *raio de curvatura*.

- $f_d''' = \kappa' \langle \mathbf{n}, \gamma - u \rangle - \kappa^2 \langle \gamma - u, \mathbf{t} \rangle$

Neste caso, temos  $f_d' = f_d'' = f_d''' = 0$  se, e somente se,  $\kappa' = 0$ ,  $\kappa \neq 0$  e  $u = \gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$ .

- $f_d^{(iv)} = (\kappa'' - \kappa^3) \langle \mathbf{n}, \gamma - u \rangle - 3\kappa\kappa' \langle \gamma - u, \mathbf{t} \rangle - \kappa^2$

Finalmente, para obtermos  $f_d' = f_d'' = f_d''' = f_d^{(iv)} = 0$ , é necessário e suficiente que  $u = \gamma + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$ ,  $\kappa \neq 0$  e  $\kappa' = \kappa'' = 0$ .

Concluimos, a partir de  $f_d''$  e  $f_d^{(iv)}$ , que o único círculo osculador tem contato de ordem pelo menos 4 (respectivamente 5) com  $\gamma$  em  $s$  se  $\kappa'(s) = 0$  (respectivamente  $\kappa''(s) = 0$ ). Sendo assim,  $\kappa'(s) = 0$  é condição necessária e suficiente para que exista um vértice (respectivamente alto) em  $\gamma$ . A Figura 10 representa os círculos com contato em  $\gamma(s)$ , sendo o osculador aquele que possui o maior contato.

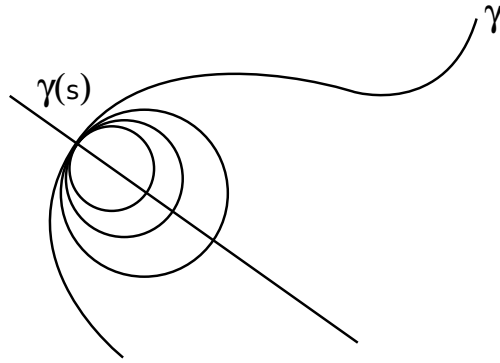


Figura 10 – Círculos com contato em  $\gamma(s)$

**Exemplo 4.2.3.** Seja  $\gamma$  uma curva plana, suave, *ppca* e  $f_d(s)$  a função distância ao quadrado de  $\gamma$  em  $s$ . Suponhamos que  $f_d'(s) = 0$ , então  $u = \gamma(s) + \lambda\mathbf{n}(s)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Seja também  $\kappa(s) > 0$ . Vamos analisar o sinal da segunda derivada de  $f_d(s)$  e determinar os valores de  $\lambda$  para os quais  $f_d$  tem um máximo e para os quais  $f_d$  tem um mínimo em  $s$ .

Sabemos que  $f_d''(s) = \kappa \langle \mathbf{n}, \gamma - u \rangle + 1$ . Tomando  $u = \gamma + \lambda\mathbf{n}$  temos que  $f_d''(s) = \kappa \langle \mathbf{n}, -\lambda\mathbf{n} \rangle + 1$ . Para o máximo da função, precisamos determinar os valores de  $\lambda$  para os quais  $f_d''(s) < 0$ . Temos então:

$$\kappa \langle \mathbf{n}, -\lambda\mathbf{n} \rangle + 1 < 0 \iff \kappa \langle \mathbf{n}, -\lambda\mathbf{n} \rangle < -1 \iff -\lambda \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle < -\frac{1}{\kappa} \iff \lambda > \frac{1}{\kappa}.$$

Isto é, a função distância ao quadrado assume um valor de máximo em  $s$  quando  $\lambda > \frac{1}{\kappa}$ .

Para o mínimo da função, procedemos de modo análogo, considerando  $f_d''(s) > 0$  e obtemos que a função distância ao quadrado assume o valor de mínimo em  $s$  quando  $\lambda < \frac{1}{\kappa}$ .

Portanto, concluímos que o centro de curvatura  $u$  em  $s$  separa pontos na reta normal para os quais a distância da curva (ou seu quadrado) é minimizado daqueles para os quais é maximizado em  $\gamma(s)$ , sendo  $\lambda = \frac{1}{\|\kappa\|}$  o ponto crítico da função distância ao quadrado.

De modo análogo ao desenvolvimento para curvas planas, podemos estudar o contato de curvas no espaço com esferas através do estudo das derivadas da função distância ao quadrado. Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , regular, suave, *ppca* e  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ . Aplicando as Fórmulas de Frenet para curvas no espaço e omitindo o parâmetro  $s$ , temos:

- $f'_d = 2 \langle \mathbf{t}, \gamma - u \rangle$

Aqui, temos  $f'_d = 0$  se, e somente se,  $\langle \mathbf{t}, \gamma - u \rangle = 0$ , ou seja se, e só se,  $\gamma - u$  é ortogonal ao vetor  $\mathbf{t}$ . Logo,  $\gamma - u$  está contido no plano normal e pode ser escrito como combinação linear de  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{n}$ .

- $f''_d = 1 + \kappa \langle \mathbf{n}, \gamma - u \rangle$

Neste caso, temos que  $f'_d = f''_d = 0$  se, e somente se,  $\langle \mathbf{n}, \gamma - u \rangle = -\frac{1}{\kappa}$ . Fazendo  $\gamma - u = p\mathbf{b} + q\mathbf{n}$ , com  $p$  e  $q$  reais, temos que  $\langle \mathbf{n}, p\mathbf{b} + q\mathbf{n} \rangle = -\frac{1}{\kappa}$ , logo  $q = -\frac{1}{\kappa}$ . Assim, podemos escrever  $\gamma - u = p\mathbf{b} - \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$ .

- $f'''_d = \kappa' \langle \mathbf{n}, \gamma - u \rangle + \kappa (\langle \mathbf{n}', \gamma - u \rangle + \langle \mathbf{n}, \gamma' \rangle)$

Como  $\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}$  e  $\mathbf{n}$  é ortogonal a  $\gamma'$ , podemos escrever  $f'''_d = \kappa' \langle \mathbf{n}, \gamma - u \rangle + \kappa \langle -\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}, \gamma - u \rangle$ . Desse modo,  $f'_d = f''_d = f'''_d = 0$  se, e só se,  $\kappa' \langle \mathbf{n}, \gamma - u \rangle + \kappa \langle -\kappa\mathbf{t} - \tau\mathbf{b}, \gamma - u \rangle = 0$ . Como  $\gamma - u = p\mathbf{b} - \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$ , temos que  $-\frac{\kappa'}{\kappa} - \kappa\tau p = 0$ , ou seja,  $p = -\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}$ . Sendo assim, escrevemos  $\gamma - u = -\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\mathbf{b} - \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$  e analisamos dois casos:

- Se  $\tau \neq 0$  temos que  $u = \gamma + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\mathbf{b} + \frac{1}{\kappa}\mathbf{n}$  em  $s$ .

- Se  $\tau = 0$ , então  $\kappa' = 0$  em  $s$ .

Desse modo, verificamos que a função distância ao quadrado em  $s$  mede o contato da curva  $\gamma$  com a esfera de centro  $u$ . A única esfera possuindo contato de ordem pelo menos 4 com  $\gamma$  em  $s$  é chamada de *esfera de curvatura* ou *esfera osculadora* em  $s$  e existirá quando  $\tau(s) \neq 0$  e  $\kappa' \neq 0$ , sendo  $u$  o *centro de curvatura esférica*.

**Exemplo 4.2.4.** Consideremos a hélice *ppca* dada por  $\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(s), \sin(s), s)$ . Vamos mostrar que para todo  $s$ ,  $\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Vamos também determinar expressões para  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n}(s)$  e mostrar que  $\mathbf{b}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(s), -\cos(s), 1)$ , para todo  $s$ . Além disso, encontraremos o valor de  $\tau$  e o centro de curvatura esférica de  $\gamma$ .

Uma vez que a curva está *ppca*, temos que  $\kappa(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$ . Logo,

$$\mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin(s), \cos(s), 1), \quad \mathbf{t}'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos(s), -\sin(s), 0) \text{ e } \kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como  $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ , fazendo  $\mathbf{n}(s) = (a, b, c)$ , segue  $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(s), -\sin(s), 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a, b, c)$ .  
Então:

$$\mathbf{n}(s) = (-\cos(s), -\sin(s), 0).$$

Sabemos que  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ , logo, usando as expressões já definidas, temos que:

$$\mathbf{b}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s), -\cos(s), 1),$$

como queríamos.

Para a torção  $\tau$ , usando  $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$ , temos  $\tau(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Finalmente, o centro de curvatura esférica de  $\gamma$  é determinado diretamente das substituições na expressão  $u = \gamma(s) + \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\mathbf{b}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s)$ , de onde concluímos  $u = \frac{3\sqrt{2}}{2}(2\cos(s), 2\sin(s), s)$ .

### 4.3 Função Altura

**Definição 4.3.1.** Seja  $u$  um vetor unitário de  $\mathbb{R}^n$ . A *função altura* de  $\gamma$  na direção de  $u$  é a função  $f_h : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f_h(t) = \langle \gamma(t), u \rangle.$$

**Proposição 4.3.2.** A curva  $\gamma$  tem contato de ordem  $k$  com a sua reta tangente em  $t = t_0$  se, e somente se, a função altura  $f_h$  de  $\gamma$  na direção de  $u$  perpendicular à tangente satisfaz  $f_h'(t_0) = \dots = f_h^{(k-1)}(t_0) = 0$  e  $f_h^{(k)}(t_0) \neq 0$ . Em especial,  $\gamma$  tem uma inflexão ordinária (respectivamente alta) para  $t = t_0$  se, e somente se,  $f_h$  satisfaz a condição dada para  $k = 3$  (respectivamente para algum  $k \geq 4$ ).

**Demonstração:** A reta tangente à  $\gamma(t_0)$  é o conjunto dos pontos  $X \in \mathbb{R}^2$  tais que

$$F(X) = \langle X - \gamma(t_0), u \rangle = 0,$$

onde  $u$  é o vetor normal à  $\gamma$  em  $t_0$ . Logo,  $g(t) = F(\gamma(t)) = \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), u \rangle$  é a função cujas derivadas determinam o contato de  $\gamma$  com a tangente  $F(X)$  em  $\gamma(t_0)$ . Como as derivadas do fator constante  $\gamma(t_0)$  não interferem, concluímos que, para medir o contato entre  $\gamma$  e sua reta tangente em  $t_0$ , é suficiente estudar as derivadas de função altura de  $\gamma$  na direção de  $u$  em  $t_0$ .  $\square$

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular, suave e *ppca* e  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|u\| = 1$ . Da mesma forma como foi desenvolvido para a função distância ao quadrado, vamos estudar as derivadas da função altura  $f_h = \langle \gamma, u \rangle$  para determinar as condições de contato entre  $\gamma$  e a reta tangente. Segue:

- $f_h' = \langle \gamma', u \rangle = \langle \mathbf{t}, u \rangle$

Temos que  $f_h' = 0$  se, e somente se,  $\langle \mathbf{t}, u \rangle = 0$ , o que ocorre quando  $\mathbf{t}$  é ortogonal a  $u$ . Para tanto, temos que  $\mathbf{n} = \pm u$ , ou seja, a reta tangente é a única reta que tem contato de ordem pelo menos 2 com  $\gamma$  em  $s$ .

- $f_h'' = \langle \mathbf{t}', u \rangle = \kappa \langle \mathbf{n}, u \rangle$

Dessa forma,  $f_h' = f_h'' = 0$  se, e somente se,  $\kappa \langle \mathbf{n}, u \rangle = 0$ , o que implica  $\kappa = 0$ , pois  $\mathbf{n} = \pm u$ .

- $f_h''' = \kappa' \langle \mathbf{n}, u \rangle$

Neste caso,  $f_h' = f_h'' = f_h''' = 0$  se, e somente se,  $\kappa' \langle \mathbf{n}, u \rangle = 0$  o que ocorre se, e só se,  $\kappa = \kappa' = 0$ , pois temos que  $\mathbf{n} = \pm u$ .

A partir de  $f_h''$  e  $f_h'''$ , concluímos que a condição necessária e suficiente para que  $\gamma$  possua um ponto de inflexão (respectivamente alta) em  $s$ , é  $\kappa(s) = 0$  e  $\kappa'(s) \neq 0$  (respectivamente  $\kappa'(s) = 0$ ).

Analogamente, vamos estudar as derivadas da função altura para curvas em  $\mathbb{R}^3$ , para determinar o contato da curva com planos, usando as Fórmulas de Frenet para curvas no espaço. Para tanto, seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regular, *ppca* e  $u \in \mathbb{R}^3$ ,  $\|u\| = 1$ . Segue:

- $f_h' = \langle \gamma', u \rangle$

Temos  $f_h' = 0$  se, e só se,  $\gamma'$  ortogonal a  $u$ , ou seja,  $u$  está no plano normal a  $\gamma(s)$ .

- $f_h'' = \langle \gamma'', u \rangle = \kappa \langle \mathbf{n}, u \rangle$

Neste caso,  $f_h' = f_h'' = 0$  se, e somente se,  $u = \pm \mathbf{b}$ .

- $f_h''' = \kappa' \langle \mathbf{n}, u \rangle - \kappa^2 \langle \mathbf{t}, u \rangle - \kappa\tau \langle \mathbf{b}, u \rangle = -\kappa\tau \langle \mathbf{b}, u \rangle$ , pois  $\mathbf{n} \perp u$  e  $\mathbf{t} \perp u$ .

Desse modo,  $f_h' = f_h'' = f_h''' = 0$  se, e somente se,  $-\kappa\tau = 0$ , pois  $u = \pm \mathbf{b}$ .

- $f_h^{(iv)} = -\kappa'\tau - \kappa\tau'$

Finalmente, para obtermos  $f_h' = f_h'' = f_h''' = f_h^{(iv)} = 0$  é necessário e suficiente que  $\tau = \tau' = 0$

Logo, é possível concluir que o único plano que tem contato de ordem pelo 3 em  $\gamma(s)$  é o plano osculador.

**Exemplo 4.3.3.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . É possível observar que a projeção ortogonal da origem  $O$  à reta tangente à curva plana  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  é dada por  $\langle \langle \gamma(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \mathbf{n}(s) \rangle$ . Conforme o parâmetro  $s$  varia, os pontos dessa projeção formam a curva *pedal*  $\psi$  de  $\gamma$ , de ponto pedal  $O'$ . Veja Figura 11.

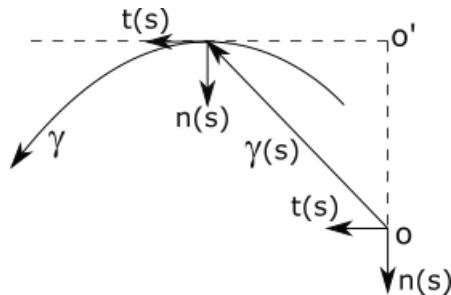


Figura 11 – Pedal

Vamos mostrar que  $\psi(s) = \langle \langle \gamma(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \mathbf{n}(s) \rangle$ .

Considerando a base  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$ , podemos escrever  $\gamma(s)$  como combinação linear dessa base, ou seja,  $\gamma(s) = a(s)\mathbf{t}(s) + b(s)\mathbf{n}(s)$ , onde  $b(s)$  é a projeção de  $\gamma(s)$  em  $\mathbf{n}(s)$ . Seja  $O'(s) = \langle b(s), \mathbf{n}(s) \rangle$  o pé da perpendicular baixada da origem à reta tangente à  $\gamma(s)$ .

Temos,

$$\gamma(s) = a(s)\mathbf{t}(s) + b(s)\mathbf{n}(s) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\langle \gamma(s), \mathbf{n}(s) \rangle &= \langle a(s)\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle + \langle b(s)\mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle \Rightarrow \\ \langle \gamma(s), \mathbf{n}(s) \rangle &= b(s).\end{aligned}$$

Assim,

$$O'(s) = \langle \langle \gamma(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \mathbf{n}(s) \rangle = \psi(s),$$

confirmando o resultado procurado.

**Exemplo 4.3.4.** Seja  $\gamma$  uma curva plana, *ppca*, e  $d$  um número real fixado. A curva  $\delta(s) = \gamma(s) + d\mathbf{n}(s)$  é denominada *paralela* à  $\gamma$  a uma distância  $d$ . Veja Figura 12.

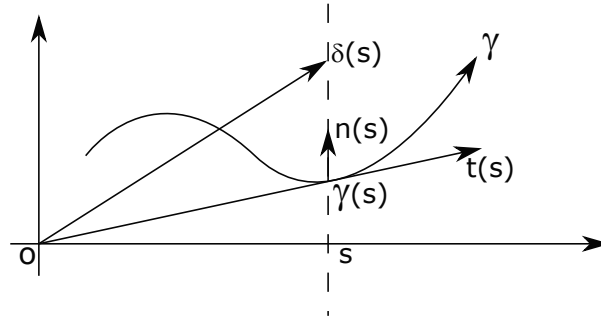


Figura 12 – Paralela

Vamos mostrar que  $\delta$  é regular exceto para valores de  $s$  tais que  $\kappa(s) \neq 0$  e  $d = \frac{1}{\kappa(s)}$ . Mostraremos também que, para esses pontos irregulares,  $\delta(s)$  é o centro de curvatura em  $s$  de  $\gamma$ .

Sabemos que  $\delta$  é regular se  $\delta'(s) \neq 0$ . Vamos determinar as condições onde isso não ocorre, ou seja,  $\delta'(s) = 0$ .

Temos que  $\delta'(s) = \gamma'(s) + d\mathbf{n}'(s)$ . Usando as Fórmulas de Frenet para curvas planas, temos que  $\gamma'(s) = \mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)$ . Logo,

$$\delta'(s) = \mathbf{t}(s) - d\kappa(s)\mathbf{t}(s) = 0 \iff \mathbf{t}(s)(1 - d\kappa(s)) = 0.$$

Uma vez que  $\gamma$  é *ppca*,  $\mathbf{t}(s) \neq 0$ , para todo  $s \in I$ . Logo,

$$1 - d\kappa(s) = 0 \iff d = \frac{1}{\kappa(s)}, \quad \kappa(s) \neq 0.$$

Portanto,  $\delta$  não é regular quando  $\kappa(s) \neq 0$  e  $d = \frac{1}{\kappa(s)}$ .

Seja também  $f_d(s) = \langle \gamma(s) - u, \gamma(s) - u \rangle$  a função distância ao quadrado. Sendo  $d = \frac{1}{\kappa(s)}$  e  $\kappa(s) \neq 0$ , o centro de curvatura de  $\gamma$  é  $u = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s) = \delta(s)$ , como queríamos.

**Exemplo 4.3.5.** Seja a curva plana  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , *ppca*, com  $\kappa \neq 0$ . Considerando os centros das curvaturas de  $\gamma$ , obtemos a curva

$$\varepsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{n}(s),$$

denominada *evoluta* de  $\gamma$ . A Figura 13 ilustra a evoluta da elipse e da parábola.

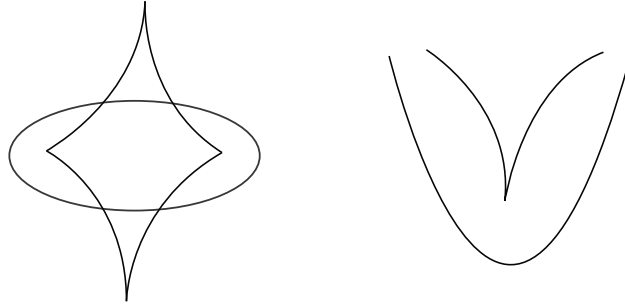


Figura 13 – Evoluta da elipse e da parábola

a) Vamos mostrar que a evoluta é regular exceto para valores de  $s$  em que  $\kappa'(s) = 0$ , ou seja, nos vértices de  $\gamma$ .

Temos

$$\begin{aligned}
 \varepsilon'(s) &= \gamma'(s) + \frac{\mathbf{n}'(s)\kappa(s) - \mathbf{n}(s)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \\
 &= \mathbf{t}(s) + \frac{\kappa(s)(-\kappa(s)\mathbf{t}(s)) - \frac{\mathbf{t}'(s)\kappa'(s)}{\kappa(s)}}{\kappa^2(s)} \\
 &= \frac{\mathbf{t}(s)\kappa^2(s) - \mathbf{t}(s)\kappa^2(s) - \frac{\mathbf{t}'(s)\kappa'(s)}{\kappa(s)}}{\kappa^2(s)} \\
 &= -\mathbf{t}'(s)\frac{\kappa'(s)}{\kappa^3(s)}.
 \end{aligned}$$

Uma vez que  $\kappa(s) \neq (0)$  e  $\mathbf{t}'(s) \neq 0$ , para todo  $s \in I$ , temos  $\varepsilon'(s) = 0$  se, e somente se,  $\kappa'(s) = 0$ . Concluimos então, que a evoluta é uma curva regular exceto para os valores onde  $\gamma$  tem contato de ordem pelo menos 4 com o círculo osculador, ou seja,  $\kappa'(s) = 0$ , sendo regular quando  $\kappa'(s) \neq 0$ .

b) Assumindo  $\kappa'(s) < 0$  em  $I$ , o raio de curvatura  $\rho(s) = \frac{1}{\|\kappa(s)\|}$  é crescente em  $I$ . Vamos mostrar que o comprimento de arco de  $\varepsilon$  de  $s_0$  a  $s_1$ ,  $s_1 > s_0$  é  $\rho(s_1) - \rho(s_0)$ .

De  $\varepsilon'(s) = -\mathbf{t}'(s)\frac{\kappa'(s)}{\kappa^3(s)}$ , temos

$$\varepsilon'(s) = -\kappa(s)\mathbf{n}(s)\frac{\kappa'(s)}{\kappa^3(s)} \Rightarrow \varepsilon'(s) = -\mathbf{n}(s)\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}.$$

Calculando o comprimento de arco  $l$ , temos

$$l(s) = \int_{s_0}^{s_1} \|\varepsilon'(s)\| ds = \int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \right\| ds,$$

pois  $\mathbf{n}$  é unitário. Fazendo  $u = \kappa(s)$ ,  $du = \kappa'(s)ds$ , segue:

$$\int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \right\| ds = \int_{\kappa(s_0)}^{\kappa(s_1)} \|u^{-2}\| du = \left[ \frac{1}{u} \right]_{\kappa(s_0)}^{\kappa(s_1)} = \frac{1}{\kappa(s_1)} - \frac{1}{\kappa(s_0)}.$$

Logo,  $l(s) = \rho(s_1) - \rho(s_0)$ . Se considerarmos  $\kappa'(s) > 0$ , temos  $l(s) = \rho(s_0) - \rho(s_1)$ .

c) Ainda com  $\kappa'(s) < 0$ , vamos mostrar que o vetor tangente unitário e o vetor normal a  $\varepsilon$  satisfazem  $\mathbf{t}_\varepsilon(s) = \mathbf{n}_\gamma(s)$  e  $\mathbf{n}_\varepsilon(s) = -\mathbf{t}_\gamma(s)$ .

Sabendo que o vetor tangente unitário a  $\varepsilon$  é dado por  $\mathbf{t}_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon'(s)}{\|\varepsilon'(s)\|}$ , temos:

$$\mathbf{t}_\varepsilon(s) = \frac{\mathbf{t}_\gamma(s)\kappa^2(s) - \mathbf{t}_\gamma(s)\kappa^2(s) - \mathbf{n}_\gamma(s)\kappa'(s)}{\frac{\kappa^2(s)}{\|\varepsilon'(s)\|}} = \frac{-\mathbf{n}_\gamma(s)\kappa'(s) \|\varepsilon'(s)\|}{\kappa^2(s)}.$$

Como  $\varepsilon'(s) = -\mathbf{n}_\gamma(s) \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}$ , então  $\|\varepsilon'(s)\| = \frac{\|-\mathbf{n}_\gamma(s)\kappa'(s)\|}{|\kappa^2(s)|} = \frac{|\kappa'(s)|}{\kappa^2(s)}$ .

Sendo assim, podemos escrever

$$\mathbf{t}_\varepsilon(s) = \frac{-\mathbf{n}_\gamma(s)\kappa'(s)}{\kappa^2(s)} \frac{\kappa^2(s)}{|\kappa'(s)|} = \mathbf{n}_\gamma(s),$$

ou seja,  $\mathbf{t}_\varepsilon(s) = \mathbf{n}_\gamma(s)$ .

Sejam  $\mathbf{t}_\varepsilon(s) = (a, b)$ ,  $\mathbf{n}_\varepsilon(s) = (-b, a)$ ,  $\mathbf{t}_\gamma(s) = (c, d)$  e  $\mathbf{n}_\gamma(s) = (-d, c)$ . Desse modo,

$$\mathbf{t}_\varepsilon(s) = \mathbf{n}_\gamma(s) \Rightarrow (a, b) = (-d, c) \Rightarrow a = -d \text{ e } b = c;$$

$$\mathbf{n}_\varepsilon(s) = (-b, a) = (-c, -d) = -(c, d) = -\mathbf{t}_\gamma(s), \text{ ou seja } \mathbf{n}_\varepsilon(s) = -\mathbf{t}_\gamma(s).$$

Assumindo  $\kappa'(s) > 0$ , os resultados seriam  $\mathbf{t}_\varepsilon(s) = -\mathbf{n}_\gamma(s)$  e  $\mathbf{n}_\varepsilon(s) = \mathbf{t}_\gamma(s)$ .

## 5 $\mathcal{R}$ -Equivalência e Classificação de Funções

Nessa seção, nosso objetivo será classificar funções reais definidas na vizinhança de algum ponto em um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Tal classificação será obtida através de uma relação de equivalência no conjunto dessas funções de onde relacionaremos as classes de equivalência. Mais ainda, utilizaremos essa classificação para estudar as singularidades das funções altura e distância ao quadrado.

### 5.1 $\mathcal{R}$ -Equivalência

Sejam  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ , subconjuntos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $t_i \in U_i$  e  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves.

**Definição 5.1.1.** Dizemos que  $f_1$  (em  $t_1$ ) e  $f_2$  (em  $t_2$ ) são  $\mathcal{R}$ -equivalentes se existirem intervalos abertos  $V_i \subset U_i$ , com  $t_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ , sendo  $h : V_1 \rightarrow V_2$  um difeomorfismo, e  $c$  uma constante real, de modo que

$$h(t_1) = t_2 \text{ e } f_1(t) = f_2(h(t)) + c,$$

para todo  $t \in V_1$ .

A Definição 5.1.1 pode ser representada pelo seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} U_1 \supset V_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow x \mapsto x - c \\ U_2 \supset V_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \end{array}$$

Temos então que  $f_1$ , em uma vizinhança de  $t_1$ , é obtida de  $f_2$ , em uma vizinhança de  $t_2$ , a partir de uma mudança de parâmetro ( $h(t)$ ) e a adição de uma constante  $c = f_1(t_1) - f_2(t_2)$ .

**Proposição 5.1.2.** A relação  $\mathcal{R}$ -equivalência é uma relação de equivalência no conjunto das funções reais definidas para algum intervalo aberto em  $\mathbb{R}$ .

**Demonstração:** De fato. Ela satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

- Propriedade reflexiva:  $f_1$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $f_1$  em  $t_1$ .

Basta considerar a função identidade  $h(t) = t$  como mudança de parâmetro e  $c = 0$ . Assim,  $f_1(t) = f_1(h(t)) + c$ .

- Propriedade simétrica: se  $f_1$  (em  $t_1$ ) é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_2$  (em  $t_2$ ), então  $f_2$  (em  $t_2$ ) é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_1$  (em  $t_1$ ).

Temos que se  $f_1$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_2$ , existe um difeomorfismo  $h$ , onde  $h(t_1) = t_2$  e  $f_1(t) = f_2(h(t)) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Uma vez que  $h$  é difeomorfismo, existe  $h^{-1}$ , tal que  $h^{-1}(t_2) = t_1$  e  $f_2(t) = f_1(h^{-1}(t)) + d$ ,  $d \in \mathbb{R}$ .

- Propriedade transitiva: se  $f_1$  (em  $t_1$ ) é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_2$  (em  $t_2$ ), e  $f_2$  (em  $t_2$ ) é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_3$  (em  $t_3$ ), então  $f_1$  (em  $t_1$ ) é  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_3$  (em  $t_3$ ).

Sendo  $f_1$  (em  $t_1$ )  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_2$  (em  $t_2$ ), existe  $h_1$  difeomorfismo, tal que  $f_1(t) = f_2(h_1(t)) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Igualmente, sendo  $f_2$  (em  $t_2$ )  $\mathcal{R}$ -equivalente à  $f_3$  (em  $t_3$ ), existe  $h_2$  difeomorfismo, de modo que  $f_2(t) = f_3(h_2(t)) + d$ ,  $d \in \mathbb{R}$ . Como  $h_1$  e  $h_2$  são difeomorfismos,  $h$ , tal que  $h = h_2(h_1(t))$  também é. Podemos então considerar  $h = h_2(h_1(t))$  e  $a = c + d$  e temos que  $f_1(t) = f_3(h(t)) + a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Como a relação  $\mathcal{R}$ -equivalência satisfaz as condições de equivalência no conjunto das funções, fica mostrada a proposição.  $\square$

**Exemplo 5.1.3.** Consideremos as funções  $f_1(t) = t^2$  e  $f_2(t) = -t^2$ . Temos que  $f_1$  e  $f_2$  não são  $\mathcal{R}$ -equivalentes em  $t_1 = t_2 = 0$ . Caso fossem, existiria  $h$ , difeomorfismo, tal que  $t^2 = -(h(t))^2$  para todo  $t$  próximo de zero. No entanto, a igualdade só é válida para  $t = h(t) = 0$  e não para a vizinhança de zero. Se considerarmos  $t_1 = t_2 = 1$ ,  $f_1$  passa a ser  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $f_2$ , bastando tomar  $h(t) = \sqrt{2 - t^2}$  e  $c = 2$ .

Denotamos uma função definida em uma vizinhança de  $t_0 \in \mathbb{R}$  por  $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$  e consideramos iguais duas funções que coincidem em alguma vizinhança de  $t_0$ . Quando  $f_1$  e  $f_2$  forem  $\mathcal{R}$ -equivalentes, denotaremos por  $f_i : (\mathbb{R}, t_i) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , um representante da classe de equivalência, o que significa que  $f_1$  em  $t_1$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $f_2$  em  $t_2$ . A notação  $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow (\mathbb{R}, c)$  significa que  $f(t_0) = c$ .

## 5.2 Lema de Hadamard e Classificação de Funções

Utilizando a relação dada pela  $\mathcal{R}$ -equivalência no conjunto de funções reais definidas em um intervalo, vamos obter uma família de classes de equivalência: as singularidades  $A_k$ . Antes da classificação, necessitamos de um lema auxiliar:

**Lema 5.2.1.** (*Lema de Hadamard*) Seja  $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$  suave, e suponha  $f^{(p)}(t_0) = 0$  para todo  $1 \leq p \leq k$ . Então, existe uma função  $f_1 : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} f_1(t)$  para todo  $t$  em alguma vizinhança de  $t_0$ . Mais ainda, se  $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ , então  $f_1(t_0) \neq 0$ .

**Demonstração:** Iniciaremos a prova com o caso particular  $t_0 = 0$  e  $f(t_0) = 0$ . Para tanto, vamos supor a função suave  $F : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F^{(p)}(0) = 0$ ,  $1 \leq p \leq k$ . Queremos mostrar que



$F(t) = F(t_0) + (t - t_0)^{k+1}F_1(t)$ , ou seja,  $F(t) = t^{k+1}F_1(t)$ , para  $F_1$  suave e para todo  $t$  na vizinhança de 0.

Faremos a prova por indução sobre  $k$ . Para  $k = 0$ , temos  $F(0) = 0$  e buscamos  $F(t) = tF_1(t)$ .

Para tanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (NETO, 2015), temos

$$\int_0^1 \frac{d}{du} F(tu) du = F(t) - F(0) = F(t),$$

portanto,

$$F(t) = \int_0^1 \frac{d}{du} F(tu) du = \int_0^1 tF'(tu) du = t \int_0^1 F'(tu) du,$$

de onde podemos tomar  $F_1(t) = \int_0^1 F'(tu) du$ , suave, como queríamos.

Para mostrar que  $F_1(0) \neq 0$  se  $F'(0) \neq 0$ , suponha, por absurdo, que  $F_1(0) = 0$ . Temos,

$$F_1(0) = \int_0^1 F'(0) du = F'(0) \int_0^1 du = F'(0) = 0,$$

o que é uma contradição. Logo, temos que  $F'(0) \neq 0$  implica  $F_1(0) \neq 0$ , o que finaliza a prova para  $k = 0$ .

Por hipótese de indução, suponhamos o resultado válido para  $k$ ,  $k \geq 0$ :

$$F^{(p)}(0) = 0, \quad 1 \leq p \leq k \text{ e } F(t) = t^{k+1}F_1(t).$$

Precisamos mostrar que o resultado é válido para  $k + 1$ , isto é,

$$F^{(p)}(0) = 0, \quad 1 \leq p \leq k + 1 \text{ e } F(t) = t^{k+2}G(t).$$

Para  $F(t) = tG(t)$ , fazendo as derivadas temos  $F'(t) = G(t) + tG'(t)$ ,  $F''(t) = 2G'(t) + tG''(t)$ ,  $F'''(t) = 3G''(t) + tG'''(t)$ , etc. De modo geral, temos

$$F^{(n)}(t) = nG^{(n-1)}(t) + tG^{(n)}(t), \quad n \geq 1.$$

Uma vez que  $F^{(p)}(0) = 0$ ,  $1 \leq p \leq k + 1$ , temos  $F^{(p)}(0) = pG^{(p-1)}(0) = 0$ ,  $1 \leq p \leq k + 1$ . Como  $p \neq 0$ ,  $G^{(p-1)}(0) = 0$ ,  $0 \leq p - 1 \leq k$ . Fazendo  $q = p - 1$ , segue

$$G^{(q)}(0) = 0, \quad 0 \leq q \leq k.$$

Aplicando a hipótese de indução em  $G$ , temos  $G(t) = t^{k+1}F_1(t)$  e, de  $F(t) = tG(t)$ ,

$$F(t) = t(t^{k+1}F_1(t)) = t^{k+2}F_1(t),$$

mostrando que  $F(t) = t^{k+1}F_1(t)$  é válida para qualquer  $k$  real quando  $t_0 = 0$ .

Para a segunda parte, derivando  $F(t)$  e considerando  $t_0 = 0$ , temos

$$F^{(k+1)}(0) = (k + 1)!F_1(0)$$

e como  $(k + 1)! \neq 0$ , temos que se  $F^{(k+1)}(0) \neq 0$  então  $F_1(0) \neq 0$ , finalizando a prova do lema para  $t_0 = 0$ .

Para o caso geral, o desenvolvimento segue de modo análogo, bastando considerar  $t$  em uma vizinhança de  $t_0$ . Para tanto, seja  $F(t) = f(t + t_0) - f(t_0)$ . Como  $F^{(p)}(0) = 0$ , para  $1 \leq p \leq k$ , segue que  $F(t) = t^{k+1}F_1(t)$ . Logo  $f(t + t_0) = f(t_0) + t^{k+1}F_1(t)$ , onde  $t + t_0$  está em uma vizinhança de  $t_0$ .

Fazendo  $t + t_0 = u$ ,  $t = u - t_0$ , temos

$$f(u) = f(t_0) + (u - t_0)^{k+1} F_1(u - t_0),$$

e obtemos  $f_1(u) = F_1(u - t_0)$ . Logo,

$$f(u) = f(t_0) + (u - t_0)^{k+1} f_1(u),$$

onde fazendo  $u = t$  a prova segue com os mesmos argumentos usados no caso particular.  $\square$

O seguinte teorema é o principal desta seção. Nele, é apresentada uma classificação de funções reais segundo a  $\mathcal{R}$ -equivalência, fornecendo formas normais polinomiais para as distintas classes de equivalência.

**Teorema 5.2.2.** (*Classificação de funções*) Sejam  $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$  suaves,  $k \geq 0$ . Suponha que  $f^{(p)}(t_0) = 0$  para todo  $1 \leq p \leq k$ , e que  $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ . Então  $f$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(t) = \pm t^{k+1}$ , sendo o sinal positivo quando  $f^{(k+1)}(t_0) > 0$  e o sinal negativo quando  $f^{(k+1)}(t_0) < 0$ .

**Demonstração:** Definimos a função  $h(t) = (t - t_0)(\pm f_1(t))^{\frac{1}{k+1}}$ , sendo  $f_1(t)$  tal que  $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} f_1(t)$ , pelo *Lema de Hadamard*. Observe que

$$\begin{aligned} h(t_0) &= (t_0 - t_0)(\pm f_1(t_0))^{\frac{1}{k+1}} = 0, \\ h'(t) &= (\pm f_1(t))^{\frac{1}{k+1}} + (t - t_0) \frac{1}{k+1} (\pm f_1(t))^{\frac{1}{k+1} - 1} e \\ h'(t_0) &= (\pm f_1(t_0))^{\frac{1}{k+1}} \neq 0. \end{aligned}$$

Assim,  $h$  é um difeomorfismo em alguma vizinhança de  $t_0$  e vale  $f(t) = t^{k+1} f_1(t)$ , de onde  $f^{(k+1)}(t) = (k+1)! f_1(t)$  e  $f^{(k+1)}(t_0) = (k+1)! f_1(t_0)$ . Uma vez que  $(k+1)!$  é sempre positivo, o sinal de  $f^{(k+1)}(t_0)$  depende do sinal de  $f_1(t_0)$ .

Temos

$$g(h(t)) = \pm \left[ (t - t_0)(\pm f_1(t))^{\frac{1}{k+1}} \right]^{k+1} = \pm (t - t_0)^{k+1} f_1(t).$$

Como  $f_1(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{(t - t_0)^{k+1}}$ , segue que  $g(h(t)) = f(t) - f(t_0)$ , ou seja,

$$f(t) = g(h(t)) + f(t_0),$$

sendo  $c = f(t_0)$ . Logo,  $f(t)$  em  $t_0$  é  $\mathcal{R}$ -equivalente a  $g(t)$  em 0.  $\square$

Observe que se  $k$  é par,  $g_1(t) = t^{k+1}$  e  $g_2(t) = -t^{k+1}$  são  $\mathcal{R}$ -equivalentes por  $h(t) = -t$  quando  $t = 0$ . Já para  $k$  ímpar isso não acontece, conforme já foi mostrado no Exemplo 5.1.3.

**Definição 5.2.3.** Suponha  $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{R}$ -equivalente à  $g(t) = \pm t^{k+1}$ . Para  $k \geq 0$ , dizemos que  $f$  tem uma *singularidade do tipo  $A_k$*  em  $t_0$  se  $f^{(p)}(t_0) = 0$ , para todo  $p$ ,  $1 \leq p \leq k$  e  $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ . Dizemos que  $f$  tem *singularidade do tipo pelo menos  $k$*  em  $t_0$  e denotamos por  $A_{\geq k}$  se  $f^{(p)}(t_0) = 0$ , para todo  $1 \leq p \leq k$ .

**Observação 5.2.4.** Pela Definição 5.2.3, temos que a singularidade de  $f$  do tipo  $A_0$  em  $t_0$  acontece se, e só se,  $f'(t_0) \neq 0$ .

**Observação 5.2.5.** Com relação a interpretação geométrica, temos que a função  $f$  tem singularidade do tipo  $A_k$  em  $t_0$ ,  $k \geq 0$ , se o gráfico de  $f$ , dado por  $\gamma(t) = (t, f(t))$  tem contato de ordem  $k + 1$  com a reta no plano paralela ao eixo  $t$  passando por  $(t_0, f(t_0))$ . Com efeito, tomando  $F(t, y) = y - f(t_0)$ , temos  $F^{-1}(0) = \{(t, y); F(t, y) = 0\} = \{(t, y); y = f(t_0)\}$ . Desse modo, para analisarmos o contato, devemos considerar a função  $g$  definida por  $g(t) = F(\gamma(t))$ , de onde  $g(t) = F(t, f(t)) = f(t) - f(t_0)$  e estudar suas derivadas, o que se resume em estudar as derivadas de  $f$  e portanto seu tipo de  $A_k$  singularidade. Mais ainda, tomando  $F$  como em 4.1 e 4.2, temos que, estudar o contato de uma curva com  $F^{-1}(0)$  é equivalente a estudar as singularidades das funções altura e distância ao quadrado.

**Exemplo 5.2.6.** Seja  $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5) = (t, Y(t))$ , com  $a_i$  constante,  $\gamma(0) = 0$ . Seja  $f(t) = (t - a)^2 + (Y(t) - b)^2$  a função distância ao quadrado da curva em  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Determinaremos condições para  $a, b, a_1, \dots, a_5$  para que  $f$  tenha singularidade do tipo  $A_k$  em 0,  $k \geq 0$ .

Inicialmente, analisando as derivadas da função distância ao quadrado  $f(t)$  para  $t = 0$ , obtemos os seguintes resultados:

- $f'(0) = -2a$

Assim,  $f'(0) = 0$  se, e somente se,  $a = 0$ .

- $f''(0) = 2 - 4a_2b$

Desse modo,  $f''(0) = 0$  se, e só se,  $a_2 = \frac{1}{2b}$ ,  $b \neq 0$ .

- $f'''(0) = -12ba_3$

Logo,  $f'''(0) = 0$  para  $a_3 = 0$ .

- $f^{(iv)}(0) = 24a_2^2 - 48ba_4$

Como  $a_2 = \frac{1}{2b}$ , temos que  $f^{(iv)}(0) = 0$  se, e somente se,  $a_4 = \frac{1}{8b^3}$ ,  $b \neq 0$ .

- $f^{(v)}(0) = 20(6a_32a_2) - 2b(120a_5)$

Uma vez que  $a_3 = 0$ ,  $f^{(v)}(0) = 0$  se, e só se,  $a_5 = 0$ .

- $f^{(vi)}(0) = 30(24a_42a_2) + 20(6a_36a_3)$

Assumindo as condições anteriores, temos  $f^{(vi)}(0) = 90\frac{1}{b^4}$  e  $f^{(vi)}(0) = 0$  ocorre somente se  $\frac{1}{b^4} = 0$ , o que é absurdo.

A partir dos resultados obtidos, podemos concluir, para  $t = 0$ :

- $f(t)$  tem singularidade do tipo  $A_1$  quando  $a = 0$  e  $a_2 \neq \frac{1}{2b}$  com  $b \neq 0$ .

- $f(t)$  tem singularidade do tipo  $A_2$  quando  $a = 0$  e  $a_2 = \frac{1}{2b}$  com  $b \neq 0$  e  $a_3 \neq 0$ .

- $f(t)$  tem singularidade do tipo  $A_3$  quando  $a = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{2b}$  com  $b \neq 0$ ,  $a_3 = 0$  e  $a_4 \neq \frac{1}{8b^3}$  com  $b \neq 0$ .

- $f(t)$  tem singularidade do tipo  $A_4$  quando  $a = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{2b}$  com  $b \neq 0$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 \neq \frac{1}{8b^3}$  com  $b \neq 0$  e  $a_5 \neq 0$ .

- $f(t)$  tem singularidade do tipo  $A_5$  quando  $a = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{2b}$  com  $b \neq 0$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 \neq \frac{1}{8b^3}$  com  $b \neq 0$  e  $a_5 = 0$ .

A condição para que  $f(t)$  tenha singularidade do tipo  $A_{\geq 6}$  não pode ser satisfeita. Desse modo, concluímos que a função  $f(t) = (t - a)^2 + (Y(t) - b)^2$  tem singularidade de no máximo tipo  $A_5$  na origem.

Analisando um caso particular, tomemos  $\gamma(t) = (t, t^2)$  e  $u = (a, b)$  o centro de um círculo. Fazendo  $F(X) = f_d$ , temos  $f_d = (t - a)^2 + (t^2 - b)^2$  e  $f'_d(0) = 0$  quando  $a = 0$ . Sendo assim, valendo da Proposição 4.2.2, o círculo centrado em  $u$  tem contato de ordem 2 na origem com  $\gamma$  se, e só se,  $f$  tem singularidade de tipo  $A_1$ , o que ocorre quando  $a = 0$ . O contato de ordem 3 ocorre quando  $f$  tem singularidade do tipo  $A_2$ , o que nos dá a condição  $b = \frac{1}{2}$ , pois  $f'_d(0) = f'_d(0) = 0$  quando  $b = \frac{1}{2}$ .

Uma vez que  $f'''(0) = 0$  e  $f^{(iv)}(0) \neq 0$  para todo  $t$ , concluímos que o contato de  $\gamma$  e o círculo centrado em  $(a, b)$  na origem é de ordem 4 se, e somente se,  $f$  tem singularidade do tipo  $A_3$  e o centro do círculo é  $(0, \frac{1}{2})$ .

Na Observação 5.2.5, mostramos que classificar as singularidades das funções altura e distância ao quadrado fornece informações sobre o contato de curvas com retas, planos, círculos e esferas. Para sintetizar essa relação, apresentamos as tabelas seguintes, levando em consideração as condições algébricas e interpretações geométricas já desenvolvidas na Seção 4.

Singularidade	Condição	Interpretação geométrica
$A_1$	$u = \gamma - \lambda \mathbf{n}$ , $\lambda \in \mathbb{R}$	$u$ pertence à reta normal à $\gamma$ em $s$ e o contato de $\gamma$ em $s$ com qualquer círculo com centro em $\mathbf{n}$ é de ordem pelo menos 2.
$A_2$	$u = \gamma + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$ , $\kappa \neq 0$ ,	O único círculo passando por $\gamma$ com contato de ordem pelo menos 3 com a curva em $s$ é o círculo osculador.
$A_3$	$u = \gamma + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$ $\kappa \neq 0$ , $\kappa' = 0$	Existe um único círculo osculador com contato de ordem pelo menos 4 com $\gamma$ em $s$ e existe um vértice em $\gamma$ .
$A_4$	$u = \gamma + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}$ $\kappa \neq 0$ , $\kappa' = \kappa'' = 0$	

Tabela 1 – Função distância ao quadrado para curvas em  $\mathbb{R}^2$

Singularidade	Condição	Interpretação geométrica
$A_1$	$\langle \mathbf{t}, \gamma - u \rangle = 0$	$\gamma - u$ está contido no plano normal, sendo $\gamma - u = p\mathbf{b} + q\mathbf{n}$ , $p$ e $q$ reais.
$A_2$	$q = -\frac{1}{\kappa}, \kappa \neq 0$	A esfera osculadora de centro de curvatura $u$ é a única que possui contato de ordem pelo menos
$A_3$	$p = -\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}$	4 com $\gamma$ em $s$ e existe quando $\tau \neq 0$ e $\kappa' \neq 0$ .

Tabela 2 – Função distância ao quadrado para curvas em  $\mathbb{R}^3$

Singularidade	Condição	Interpretação geométrica
$A_1$	$\mathbf{t} \perp u$	A reta tangente é a única que tem contato de ordem pelo menos 2.
$A_2$	$\kappa = 0$	$\gamma$ possui ponto de inflexão em $s$ .
$A_3$	$\kappa = \kappa' = 0$	

Tabela 3 – Função altura para curvas em  $\mathbb{R}^2$

Singularidade	Condição	Interpretação geométrica
$A_1$	$\gamma' \perp u$	$u$ está no plano normal a $\gamma(s)$ .
$A_2$	$u = \pm \mathbf{b}$	O único plano que tem contato de ordem pelo menos 3 é o plano osculador.
$A_3$	$-\kappa\tau = 0$	
$A_4$	$\tau = \tau' = 0$	

Tabela 4 – Função altura para curvas em  $\mathbb{R}^3$

Os resultados e definições apresentados mostram que podemos classificar funções com a relação de  $\mathcal{R}$ -equivalência, identificando-as como sendo de algum tipo  $A_k$ . Para tanto, é necessário que  $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Mas uma pergunta que surge de maneira natural é: toda função real é uma singularidade  $A_k$  para algum  $k$ ?

Consideremos uma função analítica  $f$ , definida por

$$f(t) = \sum_{p \geq 0} a_p (t - t_0)^p,$$

uma série de potências convergente. Ao tomar o menor valor de  $p$  para o qual  $a_p \neq 0$ , temos que  $f$  é do tipo  $A_{p-1}$  em  $t_0$ . Caso tal  $p$  não exista, temos que  $f$  é nula para qualquer  $t_0$ , sendo essa a única exceção. Portanto, sendo  $f$  analítica não identicamente nula, podemos concluir  $f$  do tipo  $A_k$  para algum  $k$ .

O exemplo a seguir encerra nossa discussão acerca da classificação de funções e mostra que nem todas as funções são analíticas e possíveis de serem classificadas pela  $\mathcal{R}$ -equivalência.

**Exemplo 5.2.7.** Seja a função definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que  $f^{(p)}(0) = 0$  para todo  $p \geq 0$ .

Mostraremos por indução sobre  $p$ . Temos que  $f(0) = 0$ , de maneira imediata pela lei da função. Suponhamos que  $f^{(p)}(0) = 0$ , para  $t > 0$ . Precisamos mostrar que para  $p + 1$ ,  $f^{(p+1)}(0) = 0$ .

De fato,

$$f^{(p+1)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(p)}(t) - f^{(p)}(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(p)}(t)}{t}.$$

Aplicando o resultado que afirma que, para  $n$  inteiro, existe um polinômio de grau  $n$ ,  $P_n$ , tal que  $f^{(n)}(t) = P_n(\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}}$ , para todo  $t > 0$ , e fazendo  $\frac{1}{t} = u$ , temos que

$$\frac{f^{(p)}(t)}{t} = P_p\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} \frac{1}{t} = \frac{P_p(u)u}{e^u}.$$

Fundamentado pelo Teorema 60, em (NETO, 2015), que garante que se  $P$  é um polinômio, então  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t)}{e^t} = 0$ , segue que

$$f^{(p+1)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(p)}(t)}{t} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P_p(u)u}{e^u} = 0.$$

Desse modo, a expansão em série é nula e  $f$  não é analítica.

As demonstrações dos resultados utilizados para a resolução não cabem no objetivo desse texto, mas se encontram em detalhes em (NETO, 2015).

A função do Exemplo 5.2.7 é denominada *função chata* em  $t_0$ , o que significa que todas as derivadas  $f^{(p)}(t_0)$ ,  $p \geq 1$  são nulas em  $t_0$ . As funções chatas não são classificáveis como do tipo  $A_k$  para nenhum  $k$ .

## Considerações Finais

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou a discussão sobre curvas paramétricas e suas propriedades. Além disso, apresentou os resultados acerca do contato de uma curva com objetos de referência, identificando seu comportamento geométrico. Ao estudar as singularidades das funções altura e distância ao quadrado, evidencia-se a relação entre contato e a singularidade de uma função.

É importante ressaltar que a Teoria das Singularidades possui diversas outras aplicações e implicações, mas que fogem da abrangência e objetivo desse texto.

## Agradecimentos

A Deus, por me conceder saúde física e mental em momentos tão difíceis, me dando força e perseverança.

Ao meu orientador Pedro Benedini Riul, que foi um professor e um amigo durante todo esse processo. Agradeço por sua paciência, compreensão e disponibilidade.

A Universidade Federal de São João del-Rei e a todos os professores que tanto contribuíram para meu crescimento e me possibilitaram chegar até aqui.

Ao meu esposo, por seu apoio e compreensão quando estive ausente.

Aos colegas de curso, pelas trocas de ideias e ajuda mútua.

Finalmente, a todos e todas que de alguma forma, torceram por mim e jamais deixaram de acreditar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J. *Curves and Singularities: A Geometrical Introduction to Singularity Theory*. 2. ed. .: Cambridge University Press, 1992.

CARMO, M. P. D. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

DELGADO, K. R. F. *Notas de Geometria diferencial I*. .: UFF, 2017.

IZUMIYA, S. et al. *Differential Geometry From A Singularity Theory Viewpoint*. .: World Scientific, 2015.

MATHER, J. N. Stability of c mappings: I. the division theorem. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 89–104, 1968.

MATHER, J. N. Stability of c mappings: V, transversality. *Advances in Mathematics*, Elsevier, v. 4, n. 3, p. 301–336, 1970.

NETO, A. C. M. Fundamentos de cálculo. *Rio de Janeiro: SBM*, 2015.

TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. .: Blucher, 2008. ISBN 9788521215622.

WHITNEY, H. On singularities of mappings of euclidean spaces. i. mappings of the plane into the plane. *Annals of Mathematics*, JSTOR, p. 374–410, 1955.