Universidade Federal de São Paulo

Instituto De Ciências Ambientais,

Químicas E Farmacêuticas

Campus Diadema

Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Demonstrações de Identidades Trigonométricas

Uma abordagem através de representações geométricas e algébricas

Cícero Leonardo Bezerra de Morais

Orientador: Prof. Dr. Tiago Nunes Castilho

Diadema
Dezembro, 2021

Demonstrações de Identidades Trigonométricas

Dissertação apresentada ao Instituto De Ciências Ambientais, Químicas E Farmacêuticas da UNIFESP, campus Diadema/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Diadema

Dezembro, 2021

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Morais, Cícero Leonardo Bezerra de
Demonstrações de Identidades Trigonométricas: uma abordagem através de representações geométricas e algébricas. / Cícero Leonardo Bezerra de Morais. – – Diadema, 2021.
96 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2021.

Orientador: Tiago Nunes Castilho

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Trigonometria. 4. Ensino médio. 5. Demonstrações. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas, Campus Diadema da Universidade Federal de São Paulo, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Universidade Federal de São Paulo

UNIFESP

PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DISSERTAÇÃO E TESE nº 0932946/2021/PROGRAMA MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA

Diadema, 17 de dezembro de 2021.

Aos dezessete dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e um, reuniu-se através da Plataforma Google Meet às 09:30 horas, a Comissão Julgadora para a DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO, solicitada por **CÍCERO LEONARDO BEZERRA DE MORAIS**, aluno do Programa de Pós-Graduação **Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT**, que apresentou dissertação sob o Título: "**DEMONSTRAÇÕES DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS - UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DE REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS E ALGÉBRICAS**".

A referida Comissão esteve constituída pelos Professores Doutores:

Prof. Dr. Renato de Sá Teles - Universidade Federal de São Paulo;

Profa. Dra. Roseli Künzel - Universidade Federal de São Paulo;

Profa. Dra. Marcia Aguiar - Universidade Federal do ABC.

O Presidente Prof. Dr. **Tiago Nunes Castilho** inicia a sessão dando a palavra ao candidato, que dispõe de um período de tempo entre trinta e cinquenta minutos, para expor sua tese. A seguir dá a palavra aos Professores para a arguição. Cada examinador dispõe de trinta minutos, no máximo, para arguição, bem como o candidato para as respostas. Tendo o candidato respondido todas as arguições em tempo hábil os membros da Banca Examinadora, emitiram seus

Pareceres:

Prof. Dr. Renato de Sá Teles	**(X)APROVADO ( ) REPROVADO**
Profa. Dra. Roseli Künzel	**(X)APROVADO ( ) REPROVADO**
Profa. Dra. Marcia Aguiar	**(X)APROVADO ( ) REPROVADO**
Prof. Dr. Tiago Nunes Castilho	**Orientador(a) / Presidente**

Em face dos referidos pareceres, a Comissão Julgadora considera o Sr **CÍCERO LEONARDO BEZERRA DE MORAIS**

(X) Habilitado / ( )**NÃO** habilitado

a receber o título de MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA pela UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO.

E por estarem de acordo, assinam a presente ata.

Diadema, 17 de dezembro de 2021.

Sugestões e Observações: - Fazer as correções indicadas. - Incluir uma articulação mais explicita entre as partes do texto.

Documento assinado eletronicamente por **Tiago Nunes Castilho**, **Docente**, em 17/12/2021, às 16:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Renato de Sa Teles**, **Docente**, em 17/12/2021, às 16:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Roseli Kunzel**, **Docente**, em 17/12/2021, às 17:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Marcia Aguiar**, **Usuário Externo**, em 17/12/2021, às 17:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida clicando aqui, ou pelo endereço: "https://sei.unifesp.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0" informando o código verificador **0932946** e o código CRC **9A0F850C**.

Rua São Nicolau, 210 5º Andar - Bairro Centro - Diadema - SP CEP 09913-030 - http://www.unifesp.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

Instituto De Ciências Ambientais, Químicas E Farmacêuticas

Mestrado em Rede Nacional - PROFMAT

Chefe de departamento:

Prof. Dr. Renato Marcone José de Souza

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:

Prof. Dr. Renato de Sá Teles

Agradecimento

Ao meu Deus, por mais uma realização e sobretudo pela vida.

A minha esposa Elisabete e aos meus filhos Lucas e Camila, pela compreensão e pelo companheirismo.

Em memória da minha mãe, que sempre acreditou na educação como meio de transformação e que sempre foi muito resiliente. Em memória ainda do meu pai que sempre se mostrou uma pessoa muito passiva e educada.

Ao meu orientador, Dr. Tiago N. Castilho, sempre disposto a ajudar e dando contribuições significativas para realização desse trabalho.

Aos colegas e professores do curso PROFMAT, que não largaram nossas mãos nos momentos mais difíceis.

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001”.

Meus agradecimentos.
Cícero Leonardo Bezerra de Morais.

RESUMO

O trabalho consiste em uma proposta para o ensino de *Identidades Trigonométricas* visando refletir sobre a possibilidade/oportunidade desse ocorrer usando mais de uma linguagem. Assim sendo, as demonstrações serão desenvolvidas utilizando tanto da linguagem geométrica quanto da algébrica (mais especificamente, da aritmética). A fim ainda de tornar as demonstrações das referidas identidades mais acessíveis, criamos um protocolo que permite o discente do Ensino Médio realizar tais construções geométricas, e ainda compreender etapas importantes das demonstrações, no intuito de tornar visível o processo dinâmico das construções realizadas. Vale aqui salientar, que utilizamos o Geogebra (software de geometria dinâmica) para construção das figuras. Buscamos alguns pressupostos para a pesquisa: na Teoria das Representações de Duval (1993), através da leitura do artigo da Damm (2012); quanto ao papel e funções das demonstrações, em Villers (2001); e quanto às diretrizes para o ensino da matemática, na BNCC (2018) e ainda em trabalhos escritos sobre o uso da geometria nas demonstrações. Apresentamos propostas de demonstrações usando procedimentos aritméticos e geométricos e ainda apresentamos um protocolo em tabela em cada demonstração. As demonstrações geométricas das *Identidades Trigonométricas* foram restritas ao primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, podendo o mesmo raciocínio ser estendido aos demais. Acreditamos que tal pesquisa pode fornecer elementos importantes de reflexão que podem subsidiar o trabalho de professores de matemática quanto ao ensino do referido *objeto de aprendizagem*.

Palavras-chave : Matemática. Geometria. Trigonometria. Ensino Médio. Demonstrações.

ABSTRACT

This study consists of a proposal for the teaching of *Trigonometric Identities* aiming to reflect about the possibility/opportunity of using more than one language. The demonstrations will be developed through the use of both the geometric and the algebraic languages (specially, arithmetic). In order to make the demonstrations more accessible, we have created a protocol that enables the high school teachers to use the geometric constructions and understand their important stages, in order to turn the dynamic process visible. It is important to highlight that we used Geogebra (Dynamic Geometry Software) to build the shapes. This research is based on Teoria das Representações de Duval (1993) in Damm's article (2012); about the role and functions of the demonstrations, on Villers (2001); about the rules and guidelines in mathematic teaching, on BNCC (2018); and other papers about the use of geometry on demonstrations. We have presented proposals of demonstrations using arithmetic and geometric procedures as well as a chart with the protocol used in each demonstration. The geometric demonstrations of the *Trigonometric Identities* were only related to the first quadrant in the trigonometric circle; however, the same procedures may be applied to the other quadrants. We believe that this research may provide important elements of reflection that may help mathematic teachers when teaching the referred learning object.

Keywords: Mathematics. Geometry. Trigonometry. High School. Demonstrantion.

Sumário

INTRODUÇÃO

Mediante vivência como professor da educação básica, por vezes me pergunto se a maneira como ocorre o ensino de um determinado *objeto de estudo* (conteúdo) é o único caminho para sua abordagem. Esse questionamento tem relação com uma percepção pontual da não compreensão do objeto de estudo pelo educando. Outra reflexão recorrente, ocorre com relação a minha prática pedagógica diária, seja essa orientada por um currículo oriundo de diretrizes, ou até mesmo por um sistema apostilado que propõe uma sequência preestabelecida.

Um dos elementos de aprendizagens que me despertou esse sentimento foi a abordagem do objeto de estudo, *Identidades Trigonométricas*, e a percepção por vezes da dificuldade de apreensão (aprendizagem) por parte do aluno.

Diante de tal situação, surge o interesse da pesquisa acerca da possibilidade de abordagem do tema, por meio de demonstrações e da utilização de mais de uma representação para tal finalidade.

Inicialmente recorri ao banco de dissertações do PROFMAT, realizando leitura sobre *demonstrações trigonométricas via geometria plana*, de Mendes (2014). A minha intuição me levou à busca do caminho das *demonstrações geométricas*, a fim de *justificar* a utilização da geometria na trigonometria. Surge um outro questionamento: quais seriam as *funções* ou as *finalidades* das *demonstrações*? A fim de melhor compreender a que se destina o uso das demonstrações, recorremos a um artigo de Villers (2001), que trata do *papel e funções das demonstrações.*

Outra inquietação já citada, tem relação com estratégias de abordagens do ensino desse conteúdo. Minha primeira impressão vivenciada em sala de aula, sugere que quando utilizo de recursos geométricos associados aos algébricos isso facilita a compreensão de tais relações trigonométricas. Aqui buscamos um referencial na teoria de Raymond Duval, acerca das representações, que se concretizou com a leitura do artigo da Damm (2012).

Buscamos ainda entender quais são as diretrizes observadas para o ensino da matemática no documento: Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018).

Em busca de uma abordagem que promova o uso de representações diversificadas a respeito do ensino da trigonometria na educação básica, obedecendo a um rigor matemático e alinhado às novas tecnologias, desenvolvemos uma proposta para o ensino de algumas identidades trigonométricas não somente por meio dos recursos algébricos, mas utilizando também da geometria plana.

No que segue, passamos a uma descrição dos capítulos:

No primeiro capítulo discorremos sobre os pressupostos da pesquisa, elencando e refletindo acerca dos três elementos orientadores do nosso trabalho, a saber: Registros de representação, Damm (2012); Papel e funções das demonstrações, Villers (2001); Base Nacional Comum Curricular, BNCC (2018).

No segundo capítulo buscamos escrever algumas definições que julgamos importantes para o desenvolvimento do objeto de estudo *Identidades Trigonométricas*. Elencamos a definição de ciclo trigonométrico, dos eixos, das razões seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante. Além de uma ilustração do primeiro quadrante desse ciclo com a presença das relações citadas.

No terceiro capítulo apresentamos demonstrações de algumas identidades trigonométricas por meio da utilização de mais de uma *representação*. Por uma lado realizamos as demonstrações com repesentação aritmética/algébrica, por outro temos um processo de demonstração com auxílio da geometria plana. Acrescentamos ainda, em formato de tabela, um protocolo de construção das figuras geométricas e do desdobramento das demonstrações.

Na conclusão fizemos uma reflexão acerca das possibilidades criadas pelo trabalho escrito e ainda das experiências adquiridas no processo de pesquisa.

1 PRESSUPOSTOS DA PESQUISA

LINGUAGENS E REPRESENTAÇÕES

1.1 Representação algébrica e representação geométrica

À luz de uma reflexão acerca da aquisição do conhecimento matemático e da influência das representações sobre seu ensino, recorremos a um artigo escrito por Regina Flemming Damm, embasado na teoria de Raymond Duval (Damm, 2012).

Para Duval (1993), segundo Damm (2012), a comunicação se dá na Matemática por intermédio das representações.

> Em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Um dos primeiros passos a ser dado é a compreensão do que seriam essas representações essenciais ao funcionamento do conhecimento e ao desenvolvimento dos conhecimentos. [...] (Duval, 1993, *apud* Damm, 2012, p. 167)

Dentro dessa linha de pensamento acredito que, para o desenvolvimento das *Identidades Trigonométricas* acontecer, o ensino deve ocorrer sobre formas de representações algébrica e geométrica, não priorizando uma em detrimento da outra e sim através de um processo mútuo de auxilio e transição natural, assumindo assim que já identificamos essas como representações essenciais.

A autora nos atenta à distinção entre o que é o objeto tratado e o que é a sua representação, a fim de não confundir um com o outro, tal como sugere Duval (*apud* Damm, 2012):

> Os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda da compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo do seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações inérteis que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática. (Duval, 1993, p. 268)

Outro elemento extremamente importante observado e relatado tem a ver com a dificuldade de transição de uma representação para outra, ressaltando que o educando até consegue realizar procedimento em diferentes representações, mas não observa uma transição natural entres essas.

À luz da teoria de Duval, a autora Damm busca esclarecer o que são essas representações e fornece uma descrição dos processos cognitivos essenciais para o que ela chama de boa apreensão de um dado conhecimento.

1.1.1 Análise cognitiva de atividades matemáticas e representações

Com base na teoria de Duval (1993), que discorre sobre o conhecimento matemático ocorrer mediante a utilização de representações, apoiado como já citado no artigo da Damm (2012), estudaremos sobre a importância das representações para apreensão do conhecimento do objeto de estudo *Identidades Trigonométricas*.

A primeira necessidade do uso das representações está associada ao fato de que os objetos da matemática são objetos abstratos, logo não acessíveis à percepção direta, sendo necessária a representação por meio de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos, etc. São esses que possibilitam as diferentes representações para o mesmo objeto matemático.

Duval, segundo Damm (2012), estabelece três aproximações da noção de representação:

A primeira como representação subjetiva e mental, concepção que remete ao método da conversão, onde aquilo que aparece como erro passa a ser um indício das coisas ou de outra lógica.

A segunda são as representações internas ou computacionais, já num âmbito de um procedimento mais mecânico, onde a execução se sobrepõe à reflexão e privilegiando o *tratamento*. São representações internas e não conscientes do sujeito como por exemplo a utilização dos algoritmos, sejam computacionais ou operatórios, quando o foco principal está na execução.

A terceira diz respeito as representações semióticas, tendo origem em problemas de *modelização* da linguagem e posteriormente ampliada com a introdução de *sistemas semióticos*, e ainda pelo desenvolvimento de estudos sobre a aquisição do conhecimento matemático e a problematização de suas aprendizagens.

A autora elenca o papel fundamental de uma representação semiótica como segue:

> [...] elas são relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural, linguagem formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um, objeto matemático [...] De onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações semióticas: forma (o representante) e conteúdo (o representado). (DUVAL, 1994, p. 3 *apud.* Damm, 2012, p. 173)

Identifico aqui a importância do uso de mais de uma representação para o ensino de *identidades trigonométricas*, reforçando, assim, minha intuição acerca da apreensão do objeto de estudo poder ocorrer com a utilização da representação visual, fazendo uso da geometria plana, juntamente com uma representação algébrica que ocorre por meio de procedimentos aritméticos.

Ressaltando como coloca Damm (2012, p. 173) "[...] o tratamento dos conhecimentos depende da forma e não do conteúdo envolvido". Nesse sentido vamos refletir sobre a conversão na representação semiótica.

A *conversão* de uma representação semiótica em outra, tem a ver com mudar a forma pela qual os objetos são representados. Um exemplo seria quando um aluno percebe que o número racional $0,5$ é igual $\frac{1}{2}$. Estamos pensando acerca de uma dinâmica relativamente mais elaborada, porém de suma importância no processo de aprendizagem, com desafio ímpar de transitar entre diferentes representações, não esquecendo o principal papel do representante e do representado.

Como já mencionado, a geometria e a álgebra são sistemas de representações semióticas. Os elementos (os representantes) estão sujeitos à leis próprias e auxiliam nas representações de outras coisas (o representado).

Segundo Duval (*apud.* Damm, 2012, p. 176), as representações semióticas "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento".

Dependendo do sistema a ser usado, as representações semióticas dão suporte as representações mentais, tendo a função de comunicação. Porém não se limitam a isso, pois, também são essenciais para atividades cognitivas do pensamento.

Segundo Duval (apud Damm, 2012) para que ocorra a apreensão de um objeto matemático, é necessário que a noésis (conceituação) ocorra por intermédio de significativas semiósis (representações).

Para que um registro semiótico seja um registro de representação é necessário:

> A formação de uma representação identificável. Essa representação identificável pode ser estabelecida através de um enunciado compreensível numa determinada língua natural, na composição de um texto, no desenho de uma figura geométrica, na escrita de uma fórmula, de um gráfico... Podemos comparar a formação de uma representação à realização de uma tarefa de descrição. Essa formação deve respeitar regras: gramaticais para a composição de um texto, restrições de construções para as figuras, para a construção, por exemplo, do algoritmo da multiplicação, o sistema posicional e o sistema de numeração decimal [...] (Damm, 2012, p. 178)

Uma representação identificável requer seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado, o que pressupõe regras para assegurar o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamento.

O *tratamento* de uma representação é uma transformação interna ao registro, acontece portanto dentro do próprio registro onde foi formada. Esse tratamento requer conhecimento próprio, com regras próprias, portanto cada registro tem seu tratamento que obedece as tais regras. Por exemplo, as operações no conjunto dos números naturais, quando o sistema de registro é aquele formado pelos elementos nos algoritmos, se faz necessário para o tratamento a compreensão das regras do sistema posicional e da base dez. Sendo assim, o sistema só terá sentido caso o tratamento também o tenha.

Na operação com números racionais, temos muitas vezes a possibilidade de realizar este processo na sua forma decimal ou fracionária, o que exige tratamentos diferentes. Esse caso é bem sugestivo para observar que trata-se de duas representações diferentes com tratamentos diferentes e que se destinam a compreensão do mesmo objeto matemático. Vale salientar que o grau de dificuldade para quem está aprendendo não é o mesmo tendo em vista qual registro foi escolhido, por isso, cabe a quem realiza a proposta (o educador) desenvolver um tratamento que possa ser compreendido pelo educando e que construa relações bem estabelecidas para seu uso.

Quando a transformação ocorre entre registros, ou melhor, não dentro do mesmo, isto significa dizer que ocorreu uma *conversão*. Portanto, a conversão é uma ação sobre o mesmo objeto matemático, ou acerca dos seus elementos principais, por meio de representações diferentes. À transformação de um texto escrito na língua materna, sua representação por meio de imagens que poderiam ser geométricas e ainda sua representação utilizando recursos algébricos (expressões/equações/inequações) são exemplos da utilização da conversão.

Devemos ainda diferenciar a conversão de outras atividades da qual há aproximação, a saber, a ação de codificar e a interpretação. A última está associada a uma mudança de quadro teórico ou de contexto. Já a codificação é a transcrição de uma representação semiótica em outra, diferente daquela onde ela foi dada.

Segundo Duval (apud Damm, 2012), para o ensino da matemática não basta levar em consideração apenas as representações e os tratamentos. O que garante uma aprendizagem significativa, ou seja, a apreensão do objeto matemático, é a realização da *coordenação* entre esses vários registros de representação.

> [...] não adianta o sujeito resolver uma operação usando material concreto ou através de um desenho, se não conseguir enxergar/coordenar esses procedimentos no tratamento aritmético (algoritmo da operação), no problema envolvendo essa operação ou mesmo em outro registro de representação qualquer. (Damm, 2012, p. 182)

A fim de responder qual a necessidade da diversidade de registros de representação para o desenvolvimento do pensamento humano, Duval (apud Damm, 2012) elenca três posições:

I - Custo de tratamento e funcionamento de cada registro;

II - Limitações representativas específicas a cada registro entre diferentes modos de representação, donde a necessidade da *complementaridade* de registros;

III - A conceitualização que implica uma *coordenação* de registros de representação.

A questão da economia é posta pressupondo o conhecimento de vários registros e um exemplo pode ser o de processos operatórios para realização da multiplicação entre os números 32 e 12. Possibilidades: $32 + 32 + 32 + \ldots + 32$, ou seja, 12 vezes a parcela 32; $32 \times 12 = 4 + 60 + 20 + 300 = 384$; ou ainda a utilização do algoritmo da multiplicação. Como cada registro requer custo de tratamentos diferentes, podemos analisar onde está a economia de tratamento que possibilite apreensão do objeto de estudo. Vale salientar que essa economia se aproxima com a língua natural.

Quanto às limitações específicas a cada registro, por vezes se faz necessário a presença da *complementaridade* de registros.

Exemplos elencados pela Damm reforçam tal observação:

> - Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representações que uma figura ou um diagrama;
> - A exigência de uma representação intermediária para a compreensão dos problemas, na passagem de um enunciado ao tratamento matemático. (Damm, 2012, p. 184)

A *complementaridade* possibilita por intermédio da conversão, uma compreensão do objeto estudado, visto que existe limitações para um determinado registro. Sendo assim, o conhecimento de vários registros é fundamental. As funções, os gráficos, as tabelas e as equações são todos registros parciais do objeto de estudo.

Refletimos neste momento quais são os limites da nossa representação geométrica acerca do estudo das identidades trigonométricas e quando devemos buscar uma *complementaridade* com auxílio de procedimentos aritméticos e algébricos.

O terceiro elemento citado pela autora é a conceitualização, que ela ressalta implicar em uma coordenação de registros de representação fundamental para a compreensão. A autora cita a questão do fechamento, elemento que associa um problema de aprendizagem, visto que o aluno associa a compreensão de um conteúdo, limitada à forma de representação utilizada.

Com base na leitura do artigo da Damm (2012), podemos inferir que, para o ensino e aprendizagem das *Identidades Trigonométricas*, é de suma importância a utilização de registros diferentes e ainda da complementaridade desses em busca de uma ampliação da possibilidade do conhecimento. Isso reforça nossa intuição acerca de como esse conteúdo pode ser abordado e desenvolvido, mediante o uso de uma representação geométrica e algébrica.

1.2 Papel e funções da demonstração

A fim de ter embasamento teórico acerca da aplicação das demonstrações no Ensino Médio, fiz leitura orientada do artigo de Villiers (2001) e elenquei observações que julgamos convenientes e essenciais, conforme segue.

Nesse artigo o autor defende a importância e o caráter indispensável da demonstração no conhecimento matemático e analisa qual é o papel e as funções dessas demonstrações observadas também por outros autores em determinado tempo. Na introdução há uma reflexão a respeito do ensino e da aprendizagem do item em questão. Inicia-se relatando a dificuldade do aluno em compreender tal necessidade de aprendizagem e remonta à pesquisas anteriores:

> [...] os alunos [...] não [...] reconhecem a necessidade de demonstração lógica dos teoremas da geometria, especialmente quando essas demonstrações têm visualmente um carácter óbvio ou podem ser feitas empiricamente". (GONOBOLIN, 1954, p. 61, *apud* Villiers, 2001, p. 31)

Faremos neste momento uma reflexão, a fim de nos questionarmos se a percepção empírica seria suficiente para comprovação de uma conjectura sobre um elemento matemático. Peguemos por exemplo um desafio proposto em 1953 pelo mágico amador norte-americano Paul Curry. Esse desafio propunha um quebra-cabeça que ficou conhecido como "*Os quadrados perdidos*". Curry imaginou um triângulo que parecesse desafiar os princípios mais básicos do cálculo de áreas.

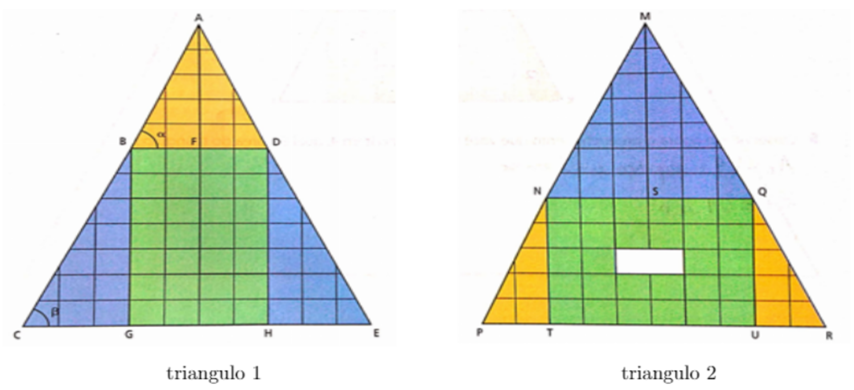

Figura 1: Triângulo de Curry

As imagens da figura 1, sugerem dois triângulos compostos cada um deles por seis peças: quatro triângulos retângulos (dois na cor azul e dois na cor amarelo); e dois hexágonos não convexos (dois na cor verde), posicionadas de maneiras diferentes, desafiando o conceito da conservação da área.

Se calcularmos a área desses dois triângulos (vale aqui salientar que a unidade utilizada será o quadrilátero/retângulo das imagens), através da composição dos triângulos (ACE e MPR) e por meio da relação $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$, encontraremos três respostas:

$$\text{Triângulo 1} = 59 \text{ quadriláteros.}$$

$$\text{Triângulo 2} = 61 \text{ quadriláteros.}$$

e utilizando do algoritmo,

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = 60 \text{ quadriláteros.}$$

Surge assim a indagação: Se falamos do mesmo elemento porque suas áreas não são iguais?

O desafio proposto por Curry foi interrogar onde estariam os dois quadrados do triângulo 2 (quadrados perdidos), já que foram utilizadas as mesmas peças para compor os triângulos. Nossa indagação remete ao conhecimento sobre áreas de triângulos. Por que temos três valores distintos de área?

Em uma proposta didática de atividade com alunos do 9° ano, do Ensino Fundamental 2 (material Anglo), ocorre o seguinte diálogo:

Aluno - Eu olho para as figuras e não consigo encontrar o erro!

Professor - Isso mostra que, em Matemática, somente as observações e as medidas não são suficientes para justificar um fato ou uma propriedade.

Surge nesse momento a importância da validação dessas afirmações geométricas por vias outras que não meramente visuais. Nesse caso nos perguntamos se devemos sempre confiar em nossas concepções empíricas e se ela é suficiente para sustentar uma conjectura matemática. O mistério acerca do Triângulo de Curry tem relação com os ângulos α (alfa) e β (beta), como são ângulos correspondentes deveriam ser congruentes, mas, quando calculados por meio da razão trigonométrica tangente, chegamos nos seguintes resultados:

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad tg\,\beta = \frac{\overline{BG}}{\overline{CG}} = \frac{7}{3}$$

Temos portanto $tg\,\alpha \neq tg\,\beta$, sendo assim, os pontos A, B e C não são colineares. Algo que não levamos em consideração quando confiamos apenas nos recursos visuais.

Retomando ao artigo, ainda na sua introdução, outro elemento que aparece como uma das razões para as demonstrações não serem acessíveis ao aluno, é o fato que esse procedimento não lhe parece ter finalidade. São levantados problemas que poderiam estar associados com questões cognitivas, como a falta de competência no raciocínio lógico. O autor diz ainda que os alunos não compreendem sua função, ou seja, o significado, o objetivo e a utilidade.

Villiers coloca que o principal problema em jogo parece ser a motivação que as várias funções assumem para os alunos. Nesse sentido busca refletir a respeito de uma questão: *"Que funções tem a demonstração na própria matemática que podem ser utilizadas na sala de aula para tornar a demonstração mais significativa para os alunos?"*. Na busca por respostas, elencamos e discorremos sobre alguns elementos observados em seu artigo conforme segue nas seções a seguir.

1.2.1 As funções da demonstração em matemática

Em seu artigo "Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad, (Villiers, 2001) ", Villiers discorre sobre algumas *funções* que a demonstração pode exercer, elencando para o desenvolvimento citações de outros estudiosos sobre o assunto e propondo uma reflexão acerca dos seus *papéis*, levando ainda em consideração o olhar sobre o ensino na Educação Secundária.

Villiers (2001) propõe um olhar sobre as funções da demonstração, que remete a papéis elencados conforme segue:

- verificação (com respeito à verdade da afirmação);
- explicação (fornecendo explicações quanto ao fato de ser verdadeira);
- sistematização (com respeito à organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas);
- descoberta (com respeito à descoberta ou invenção de novos resultados);
- comunicação (com respeito à comunicação do conhecimento matemático);
- desafio intelectual (com respeito à realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração).

Seguimos, portanto, na busca de um melhor entendimento sobre os aspectos relevantes que podem nos nortear acerca da importância e do significado das demonstrações para o estudante do Ensino Médio e sobre qual maneira poderemos propor essa ferramenta para o ensino das Identidades Trigonométricas.

1.2.2 A demonstração como processo de verificação e convencimento

Segundo Villiers (2001), tradicionalmente a função da demonstração sempre foi vinculada a verificação de uma afirmação, muitas vezes associada a necessidade do rigor matemático. Essa visão consta no seu artigo quando vincula citações como as que seguem:

"[...] de acordo com Kline (1944, p. 318): Uma demonstração apenas tem significado quando responde às dúvidas dos alunos, quando prova o que não é óbvio."

"Hanna (1989) e Volmink (1990). Uma demonstração é um argumento necessário para validar uma afirmação, um argumento que pode assumir várias formas diferentes desde que seja convincente."

"Volmink (1990, p. 8 - 10). [...] podemos encarar a demonstração como um argumento suficiente para convencer um céptico razoável."

"Freudenthal (1973, p. 151). [...] para haver progresso no rigor, o primeiro passo é duvidar do rigor em que se acredita naquele momento. Sem essa dúvida nada haveria que levasse outras pessoas a prescrever para si próprias novos critérios de rigor."

Essa função associada ao convencimento ainda consta de uma maneira bem evidente em uma citação de Tall (1989, p. 30). O autor propõe três estágios na construção de um argumento convincente, nomeadamente *o convencer-se a si próprio, o convencer um amigo e o convencer um inimigo.*

As citações anteriores, elencadas no artigo, remetem à função principal de *verificação* da demonstração. Surge uma dúvida: será que não podemos estarmos convencidos a respeito da verdade de uma afirmação antes mesmo da realização de um processo de demonstração?

Segundo Villiers (2001), temos a impressão de que a demonstração é o único caminho para validar uma conjectura, mas muitas vezes já estamos convencidos dessa conjetura e isso nos encoraja a busca de tal demonstração. Essa visão está observada numa citação de Polya.

> [...] tendo verificado o teorema em muitos casos particulares, obtivemos uma forte evidência indutiva a seu respeito. A fase indutiva venceu a nossa suspeita inicial e deu-nos uma forte **confiança** no teorema. Sem tal **confiança** dificilmente teríamos encontrado coragem para empreender a sua demonstração que não parece de modo algum uma tarefa rotineira. Quando se está convencido que o teorema é **verdadeiro**, começamos a **demonstrá-lo**. (POLYA, 1954, p. 83 - 84, *apud* Villiers, 2001, p. 32)

Nessa citação percebemos que a convicção precede a demonstração. O autor observa que há casos onde as evidências são tão fortes que, mesmo antes da existência de uma demonstração, o convencimento já existe antecipadamente, como no teorema dos *primos gêmeos* e na *Hipótese de Riemann.*

Em um processo real de investigação matemática a convicção acontece muitas vezes através da combinação de intuição, verificação por vezes até empírica e de uma demonstração não necessariamente rigorosa. A observação acerca de um determinado elemento ou uma conjectura nos faz repensar sobre o papel da demonstração como *verificação/convencimento*.

Reconhecendo que o processo de intuição e a utilização de métodos empíricos tem suas limitações, também não ignorando que são importantes, sobretudo para o encorajamento na busca de uma comprovação de um determinado argumento, reconhecemos a importância da demonstração como processo de *validação* principalmente quando a conjectura envolve casos duvidosos ou surpreendentes.

1.2.3 A demonstração como processo de explicação

As verificações aqui denominadas como quase-empíricas, que tem como base o teste de resultados utilizando de procedimentos de substituição, por mais que nos leve a atingir um nível de confiança cada vez maior, não nos conforta psicologicamente que estamos esclarecidos dessa verdade, remetendo a necessidade que haja uma explicação.

Uma reflexão acerca dessa necessidade está presente na citação a seguir:

> É interessante perguntar, num contexto como este, porque sentimos ainda a necessidade de uma demonstração [...] Parece claro que desejamos uma demonstração porque [...] se algo é verdadeiro e não conseguimos demonstrá-lo, este é um sinal de falta de compreensão da nossa parte. Por outras palavras, acreditamos que uma demonstração seria um modo de compreendermos porque razão a conjectura de Riemann é verdadeira, o que é algo mais do que sabermos através de um raciocínio heurístico convincente que é verdadeira. (DAVIS e HERSH , 1982, p. 368, *apud* Villiers, 2001, p. 33)

E também na citação a seguir:

> Lanford e outros matemáticos não estavam a tentar validar os resultados de Feigenbaum mais do que, digamos, Newton estava a tentar **validar** as descobertas de Kepler sobre as órbitas dos planetas. Em ambos os casos a validade dos resultados nunca esteve em questão. O que faltava era uma **explicação**. Porque eram elípticas as órbitas? Porque satisfazem certas relações particulares? [...] há um mundo de diferença entre validação e explicação. (Gale, 1990, *apud* Villiers, 2001, p. 33)

Essas citações abordam um papel da demonstração que não é o da verificação e sim o da busca da compreensão e do entendimento dessa convicção. Sendo assim, a demonstração assume possivelmente a função de explicação, justificando porque o que se anuncia num teorema é verdadeiro.

1.2.4 A demonstração como processo de descoberta

Neste campo de observação, Villiers (2001) reflete a respeito do que se pensa popularmente que: "*os teoremas são a maior parte das vezes descobertos por meio da intuição e de métodos quase-empíricos, antes de serem verificados através de demonstrações*."

Porém, o autor nos chama a atenção de que, ao longo dos tempos, exemplos nos mostram o surgimento de novos resultados, tais como o da geometria não euclidiana, oriundos de processos puramente dedutivos em contraponto aos processos indutivos. Podendo, dentro de um processo formal dedutivo, descobrir novos elementos e resultados.

Segundo (Schoenfeld, 1986 e De Jager, 1990, *apud* Villiers, 2001, p. 33), "*Para o matemático profissional, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas também muitas vezes um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados*".

A fim de abrir uma reflexão sobre a intuição e a demonstração, Villiers propõe a construção de um quadrilátero por ele denominado "papagaio" em um software dinâmico, o Sketchpad.

Observamos e refletimos sobre a proposta a seguir:

Unidos os pontos médios dos lados desse quadrilátero $ABCD$ (papagaio), surge um novo quadrilátero $EFGH$, o que sugere intuitivamente ser um retângulo. Com a manipulação desse elemento original em um software dinâmico nossa intuição fica ainda mais aguçada e parecemos convencidos de tal propriedade. No entanto, ficamos carentes de uma explicação, essa podendo vir por intermédio de uma demonstração dedutiva.

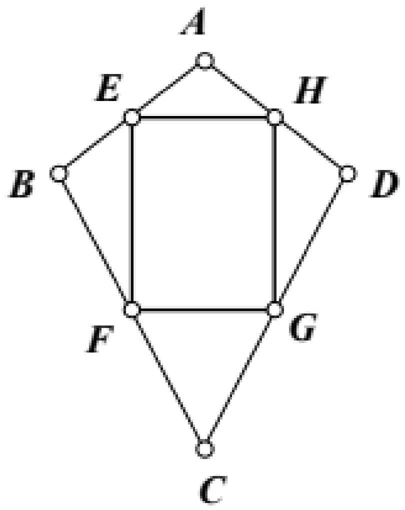

Figura 2: "papagaio".

Como proposta que tal observação ocorre na ferramenta interativa (Sketchpad), resolvi verificar o processo intuitivo em outro software a saber (Geogebra), a fim de cumprir uma etapa desse processo.

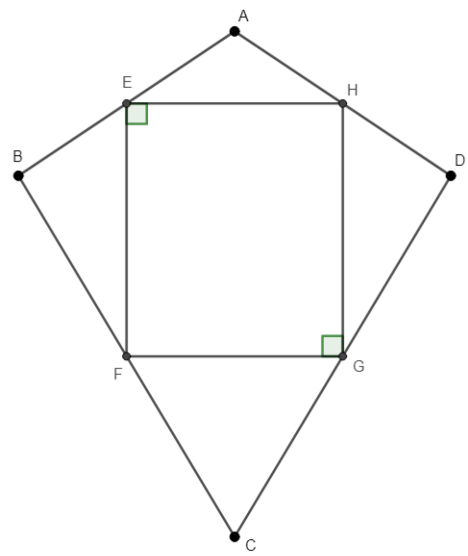

Figura 3: papagaio - GeoGebra.

Ao movimentar os pontos A e B, conforme figuras: 4, 5, 6 e 7, até que o quadrilátero $ABCD$ torne-se não convexo, a propriedade da união de seus pontos médios formarem um retângulo, dinamicamente, se mantém.

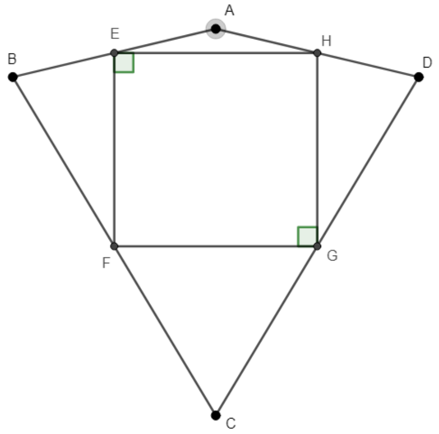

Figura 4: ponto A - fase 1.

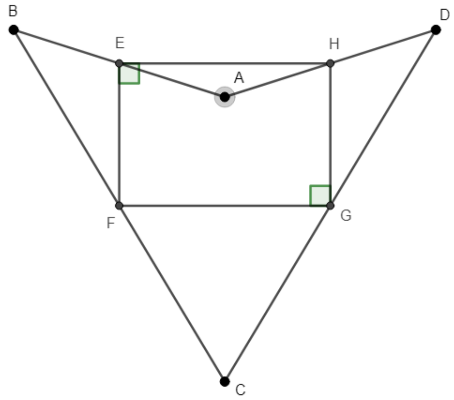

Figura 5: ponto A - fase 2.

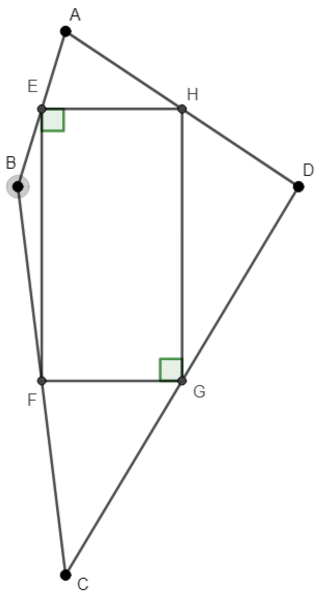

Figura 6: ponto B - fase 1.

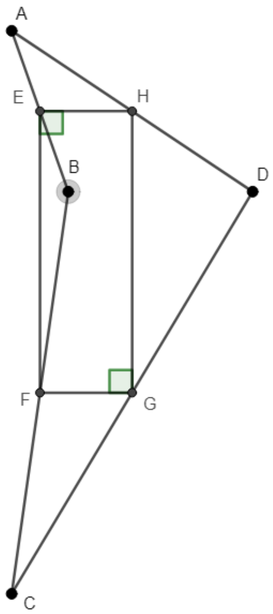

Figura 7: ponto B - fase 2.

Na mesma ferramenta (software), ao deslocar os pontos C e D, a propriedade de se formar um retângulo também se mantém.

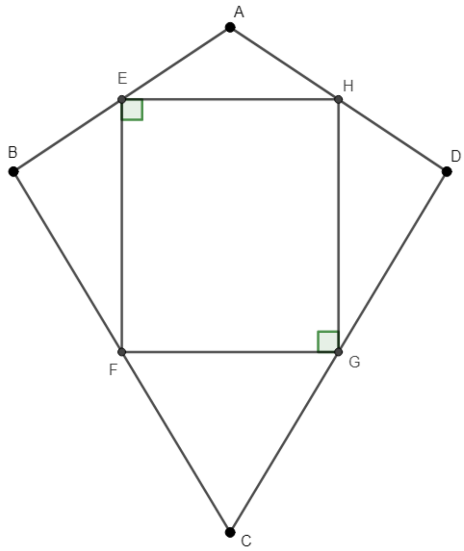

Figura 8: Papagaio.

O que devemos nos ater é que esse procedimento não explica tal relação, sendo imprescindível uma demonstração dedutiva. Considere a seguir uma demonstração.

Demonstração. O teorema da base média de um triângulo afirma que "*se um segmento tem extremidade nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao terceiro lado e tem medida igual à metade desse terceiro lado*".

Segue que, $EF||AC$ e $HG||AC$ e, por transitividade, temos $EF||HG$, sendo as suas medidas iguais. Da mesma forma podemos inferir que $EH||BD$ e $FG||BD$ e, por transitividade, temos $EH||FG$, sendo as suas medidas iguais. Temos, portanto, que o quadrilátero $EFGH$ é paralelogramo.

Se consideramos o caso particular em que AC é perpendicular a BD, uma vez que tal conjectura está associada ao objeto *"papagaio"* e essa característica é essencial, pelas relações de paralelismo anteriores, podemos concluir que o quadrilátero $EFGH$ é retângulo.

$\square$

1.2.5 A demonstração como um processo de sistematização

As demonstrações cumprem um papel que nenhum método empírico ou intuitivo é capaz de cumprir, e se dão através de um sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas. A sistematização é a organização das informações a princípio isoladas e não relacionadas logicamente em um todo unificado e coerente.

Segundo Villiers (2001, p. 34), são funções mais importantes de uma sistematização dedutiva:

- Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares, e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas;
- Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados, conduzindo assim a uma apresentação econômica dos resultados;
- Fornece uma perspectiva global ou visão de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas;
- Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação da aplicabilidade dos seus axiomas e definições;
- Conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas e/ou são mais econômicos, elegantes e poderosos do que os existentes.

Segundo o autor, o processo de sistematização trás benefícios importantes: dentro de um processo de sistematização é possível identificar erros quando por vezes partimos de uma verdade assumida e não elucidada; podemos refletir sobre argumentos necessários e observar hipóteses relevantes acerca da conjectura a ser demonstrada; dá a demonstração um caráter de objetividade utilizando apenas de argumentos ou procedimentos necessários e suficientes; fornece uma visão global sobre o elemento de estudo, seja ele pertinente ou não a Matemática, e ainda pode conduzir a novas possibilidades de demonstrações ainda mais elegantes, ou seja, objetiva e clara.

1.2.6 A demonstração como meio de comunicação

Sem dúvida utilizamos de linguagens para nos comunicar em sociedade, e se pensarmos no contexto de pessoas que falam sobre a Matemática, por que não assumir que a demonstração pode ser uma ferramenta de diálogo?

Segundo Davis (1976, *apud* Villiers, 2001, p. 35), "[...] a demonstração pode ser um modo único de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, e entre os próprios estudantes [...]".

Nesse contexto, o conhecimento matemático é disseminado por meio da interação e essa troca a torna mais elaborada, formalizada e menos passiva de erros sobre um olhar de uma comunidade que compreende sua linguagem e suas justificativas.

1.2.7 A demonstração como desafio intelectual

A demonstração para o matemático é um desafio intelectual que, quando obtido sucesso, lhe dá certa sensação de satisfação. O mesmo ocorre em outras atividades, sejam elas também intelectuais ou físicas, proporcionam sentimentos análogos. O que se associa é uma realização própria, que merece por vezes uma celebração.

Segundo Davis e Hersh (1983, p. 369, *apud* Villiers, 2001, p. 35), "a demonstração é portanto um campo de teste para energia intelectual e engenho do matemático".

> "Parafraseando o comentário famoso de Mallory sobre os seus motivos para subir ao Monte Evereste: Demonstramos os nossos resultados porque eles estão diante de nós. Levando essa analogia ainda mais longe: muitas vezes não é a existência da montanha que está em dúvida (a verdade do resultado), mas se (e como) seremos capazes de conquistá-la (demonstrá-la)!" (Villiers, 2001, p. 35)

Vimos, portanto, alguns *papéis* e *funções* que as demonstrações podem exercer. Fato é que nem todas foram listadas nesse artigo, como observa o autor, pois, certamente atende a outras classificações e não necessariamente estão essas funções desassociadas umas das outras. Para melhor compreensão de sua importância, papel e função, se faz necessário observar o cenário a qual ela está empregada, levando em consideração a que público se pretende dirigir.

1.3 A BNCC e o Ensino da Matemática

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), na área de conhecimento Matemática e suas tecnologias, discorre inicialmente sobre a importância do conhecimento matemático ocorrer na educação básica em todas as etapas do ensino.

Segundo o documento, *"O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais."* BNCC (2018, pág. 265).

Esse conhecimento passa por um processo de *"letramento matemático"*, que tem a ver com a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos.

Para que isso aconteça, se faz necessário observar as competências da Educação Básica, das etapas do ensino e da área da matemática, elencando posteriormente as competências específicas.

Como no Ensino Médio se trata, sobretudo, da continuidade das aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental e o aprofundamento dessas, elencaremos na sequência quais são as *competências específicas* a serem desenvolvidas na Etapa do Ensino Fundamental:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho;

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo;

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes;

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados;

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados);

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza;

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Quanto ao Ensino Médio, temos atualmente em andamento um processo de implementação de sua reformulação mediante a necessidade de recontextualização do mesmo, uma vez que sobre a proposta anterior, a saber, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB - 1996), se faz necessário observar que os adolescentes atuais demandam novas necessidades e ainda que não podem ser classificados como grupo homogêneo nem mesmo dentro de uma concepção local.

Um dos papéis da etapa correspondente ao Ensino Médio é garantir a continuidade das aprendizagens adquiridas no Ensino Fundamental por meio da consolidação de aprendizagens anteriores e ainda do aprofundamento dessas. Devendo atender ainda a formação geral do cidadão, construindo aprendizagens como segue: *"aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea".* (BNCC, 2018, p. 14)

O novo Ensino Médio tem modificação principal em sua estrutura no que se diz respeito à oferta para o estudante. Agora é composto por uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - com no máximo 1800 horas - e também por uma parte destinada ao que está sendo chamado de *"itinerários formativos"* - com o mínimo de 1200 horas - , flexibilizando o currículo e levando em consideração uma realidade local. Esse novo Ensino Médio foi dividido em áreas de conhecimento como segue,

I – linguagens e suas tecnologias;

II – matemática e suas tecnologias;

III – ciências da natureza e suas tecnologias;

IV – ciências humanas e sociais aplicadas;

V – formação técnica e profissional.

As *competências* especificas de cada área, norteiam a *base comum* e os *itinerários formativos*, em consonância com as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, e atendendo as demandas dos educandos do Ensino Médio. Associadas a cada *competência específica* devem ser desenvolvidas *habilidades específicas.* Vale salientar que *competências* e *habilidades* constituem o que é chamado de *"Base Comum".*

Segundo diretrizes da nova BNCC (2018), tem a matemática as seguintes funções:

> A área de Matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BNCC, 2018, p. 471)

O uso da tecnologia é evidente nos dias atuais e isso tende a se acentuar cada vez mais. Mediante tal realidade, o currículo deve levar em consideração demandas atuais e futuras, sendo essa linguagem entendida como um *novo letramento* necessário a todas as áreas.

A estrutura de organização do componente Matemática na BNCC, para o Ensino Fundamental, está pautada em: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Além de que, as habilidades podem e devem possibilitar o diálogo entre essas áreas da matemática.

No Ensino Médio, por meio do aprofundamento desses conhecimentos o aluno deve ser capaz de raciocinar, representar, comunicar e argumentar, tornando-se um ser letrado em matemática.

No que segue são elencadas as competências específicas de matemática e suas tecnologias a serem desenvolvidas no Ensino Médio, conforme a BNCC, e algumas habilidades relacionáveis ao tema do nosso trabalho.

Competência 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Na habilidade (EM13MAT105) devemos utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). Elementos importantes para observação de figuras geométricas que serão associadas as demonstrações no nosso trabalho.

Competência 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Competência 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Observando elementos da trigonometria, a possibilidade do uso de tecnologias e o uso de representações, temos nessa competência duas habilidades a serem observadas e desenvolvidas. A saber:

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Competência 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

As habilidades (EM13MAT401), (EM13MAT402) e (EM13MAT403), que tratam da *conversão* de representações algébricas, geométricas e por meio de tabelas, com ou sem o uso de tecnologias, para o ensino de funções, são habilidades relacionáveis com o ensino da trigonometria e elemento importante a se considerar pra o desenvolvimento desse trabalho como já mencionado no artigo da Damm (2012. p. 177 – 182).

Competência 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

As habilidades (EM13MAT501) e (EM13MAT502) desenvolvem a investigação entre números expressos em tabelas e a correspondência com sua representação no plano cartesiano dada por pontos e ainda sua representação gráfica. Na habilidade (EM13MAT503) o objetivo é desenvolver o estudo de pontos de máximos e mínimos de uma função.

As habilidades observadas denotam uma proximidade com o estudo da trigonometria, principalmente com relação a utilização das representações, algébrica, geométrica e por meio de tabelas.

2 DEFINIÇÕES

2.1 Ciclo trigonométrico

Esse é um capítulo onde estaremos apresentando definições elementares e fixando alguma notação. Em parte estaremos seguindo Muniz Neto (2013).

No plano cartesiano o **ciclo trigonométrico** é o ciclo Γ da figura 9, centrado na origem $O(0,0)$ com raio 1 e comprimento 2π.

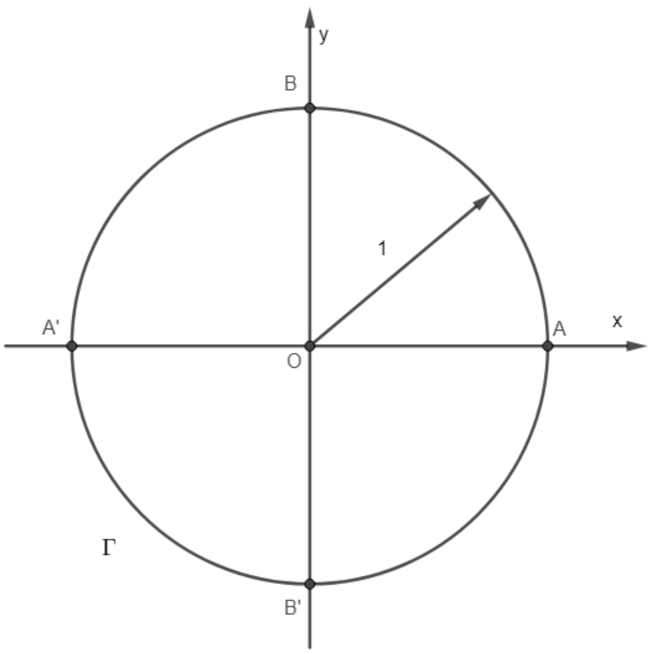

Figura 9: Ciclo trigonométrico.

Dado um número real x, medimos sobre Γ, a partir de A, um arco de comprimento $|x|$, no sentido anti-horário se $x > 0$ e no sentido horário se $x < 0$. Sendo P a extremidade final desse arco, dizemos que o arco $\overset{\frown}{AP}$ (de comprimento possivelmente maior que 2π) mede x radianos.

Sobre Γ, convencionamos que o **sentido trigonométrico** (de percurso) é o sentido anti-horário. Assim, o arco de 2π radianos sobre Γ é o arco que dá uma volta em Γ no sentido trigonométrico, retornando ao ponto A. Por outro lado, o arco de -2π radianos em Γ é o arco que dá uma volta em Γ no sentido horário, retornando também ao ponto A. Assim, temos as correspondências fundamentais a seguir:

- 2π radianos correspondem a $360°$ medidos no sentido trigonométrico a partir de A;
- -2π radianos correspondem a $360°$ medidos no horário a partir de A.

2.2 Eixos

Tendo o conhecimento acerca do ciclo trigonométrico, acrescentemos a ele, eixos para desenvolvimento de estudo das razões e das identidades trigonométricas.

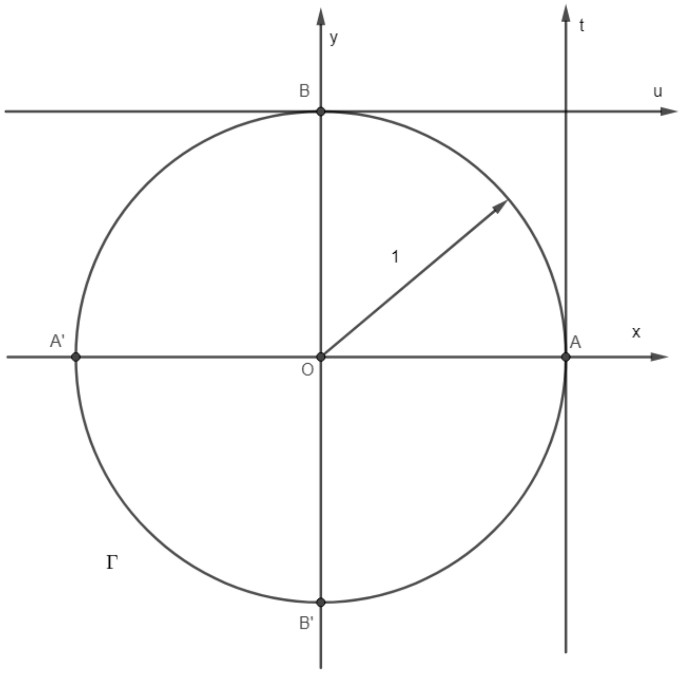

Figura 10: Ciclo trigonométrico - eixos.

Conforme figura 10, segue abaixo observações sobre os eixos.

1° eixo dos cossenos (x)	$\overleftrightarrow{OA}$;
2° eixo dos senos (y)	perpendicular a x, por O;
3° eixo das tangentes (t)	paralelo a y por A;
4° eixo das cotangentes (u)	paralelo a x por B.

2.3 Seno e Cosseno

Para $c \in \mathbb{R}$, definimos o **seno** e o **cosseno** de c (radianos), abreviados respectivamente $sen\, c$ e $cos\, c$, por

$$cos\, c = \text{a abscissa de } P \quad e \quad sen\, c = \text{a ordenada de } P$$

Assim, um ponto no P no círculo trigonométrico com coordenadas $(cos\, c, sen\, c)$, é denotado por

$$P(cos\, c, sen\, c)$$

Veja a figura: 11

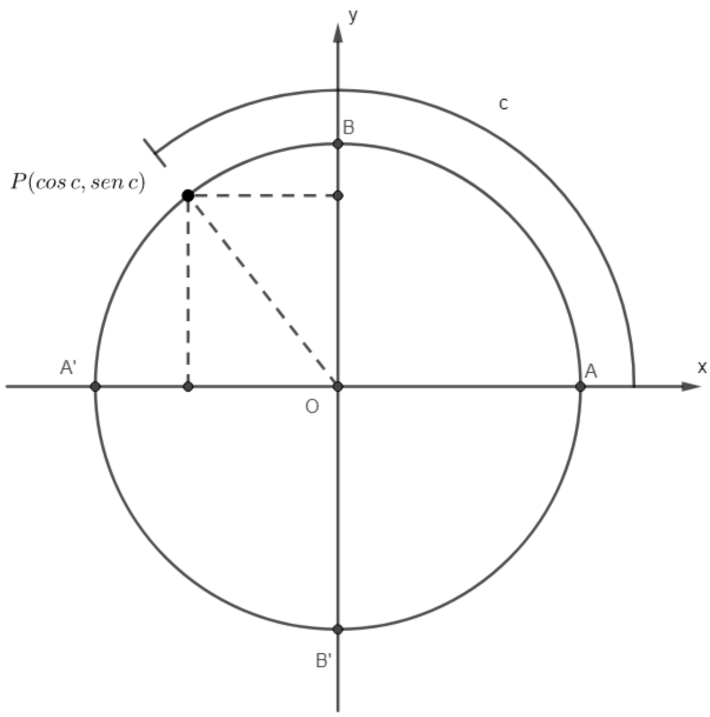

Figura 11: Seno e cosseno de um arco.

Definimos, assim, o eixo das abscissas como eixo dos cossenos, e o eixo das ordenadas como eixo dos senos.

Os valores máximos e mínimos do seno e cosseno no ciclo trigonométrico podem ser expressos. A maior ordenada de um ponto de Γ é a de $B(0, 1)$, igual a 1, ao passo que a menor ordenada é a de $B'(0, -1)$, igual a -1. Analogamente, a maior abscissa de um ponto de Γ é a de $A(0, 1)$, igual a 1, a menor abscissa é a de $A'(-1, 0)$, igual a -1. Portanto,

$$-1 \leq sen\, c \leq 1 \quad e \quad -1 \leq cos\, c \leq 1$$

Reciprocamente, fixado um real $h \in [-1, 1]$, a reta paralela ao eixo das abscissas traçada pelo ponto $(0, h)$ intersecta Γ em pelo menos um ponto P; sendo $P(\cos c, \operatorname{sen} c)$, é imediato que $\operatorname{sen} c = h$. Em outras palavras, todo número real no intervalo $[-1, 1]$ é o seno (e, analogamente, o cosseno) de algum arco. No caso do cosseno a reta deve ser paralela ao eixo das ordenadas traçada pelo ponto $(h, 0)$.

Na figura 12 temos um exemplo, onde $0 < h < 1$. Neste caso há dois pontos, a saber, P_1 e P_2, que definem arcos distintos, cujo *seno* tem mesmo valor h.

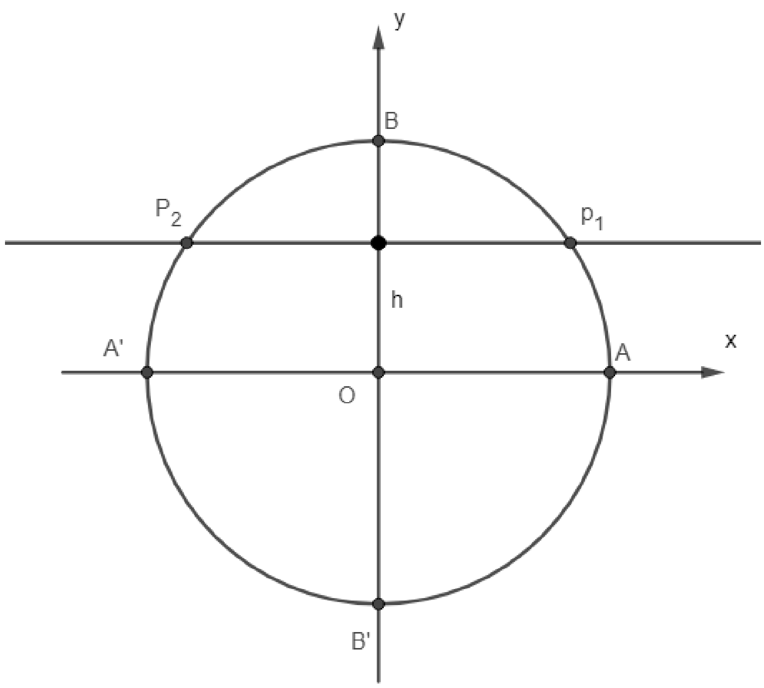

Figura 12: Seno de um arco.

Na figura 13 temos um exemplo, onde $0 < h < 1$. Neste caso há dois pontos, a saber, P_1 e P_2, arcos distintos, cujo *cosseno* tem mesmo valor h.

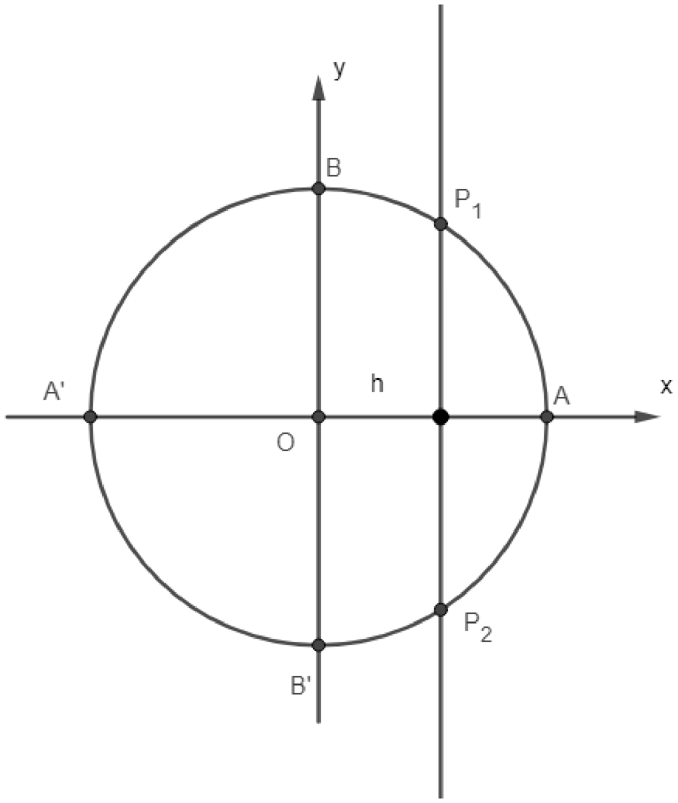

Figura 13: Cosseno de um arco.

Para arcos não limitados à primeira volta, vale uma obervação. Para $k \in \mathbb{Z}$, é imediato que a extremidade final de um arco de $2k\pi$ radianos coincide com o ponto A de Γ. Mais, fixado $c \in \mathbb{R}$, a extremidade final de um arcos de comprimento $c + 2k\pi$ coincide com aquela de um arco de comprimento simplesmente igual a c, de maneira que, para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$sen(c + 2k\pi) = sen\, c \quad e \quad cos(c + 2k\pi) = cos\, c$$

2.4 Tangente

Dado um número real $c \in [0, 2\pi]$, $c \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e $c \neq \dfrac{3\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos **tangente de** c (e indicamos $tg\, c$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Notemos que, para $c = \dfrac{\pi}{2}$, P está em B e, para $c = \dfrac{3\pi}{2}$, P está em B', de modo que a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, o valor de $tg\, c$ não está definido.

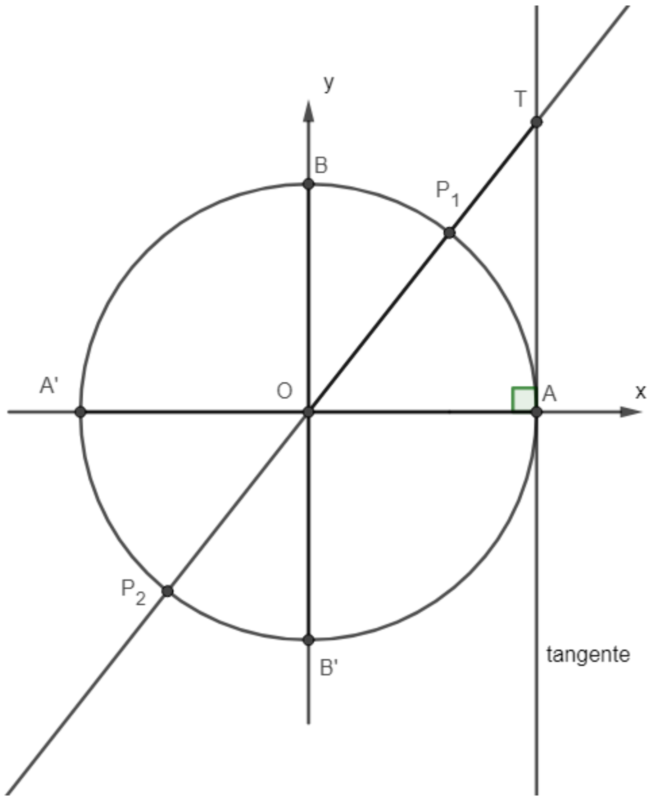

Figura 14: Tangente de um arco.

2.5 Cotangente

Dado um número real c, $c \neq k\,\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo da cotangentes. Denominamos **cotangente de** c (e indicamos $cotg\,c$) a medida algébrica do segmento $\overline{BD}$.

Note que, para $c = k\,\pi$, o ponto P está em A ou A', ficando a reta $\overleftrightarrow{OP}$ paralela ao eixo das cotangentes, sendo assim não existe o ponto D e, consequentemente, o valor de $cotg\,c$ não está definido.

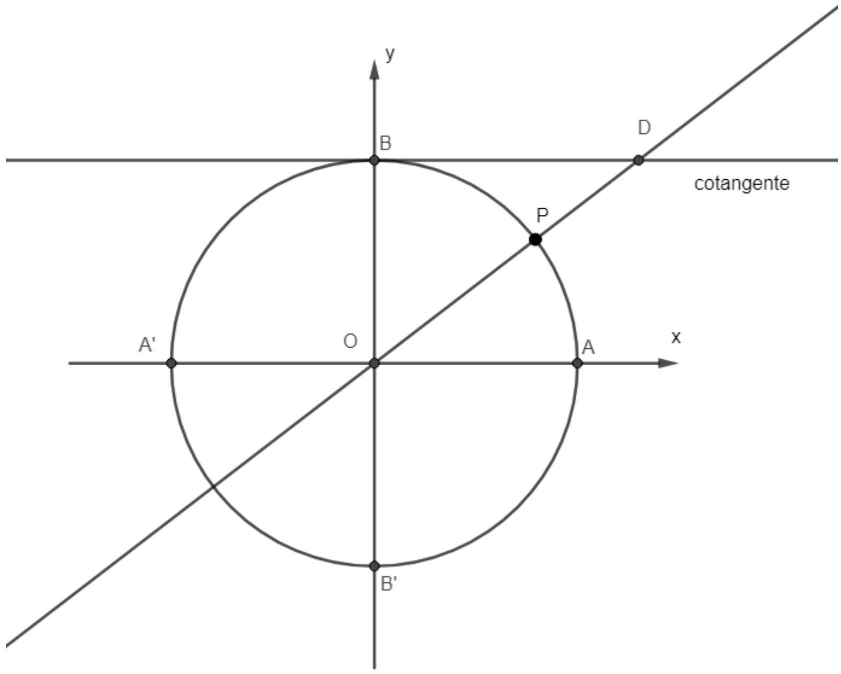

Figura 15: Cotangente de um arco.

2.6 Secante

Dado um número real c, $c \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos **secante de** c (e indicamos $sec\,c$) a abscissa $\overline{OS}$ do ponto S.

Note que, para $c = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$, o ponto P está em B ou B', ficando a reta s paralela ao eixo dos cossenos, sendo assim não existe o ponto S e, consequentemente, o valor de $sec\,c$ não está definido.

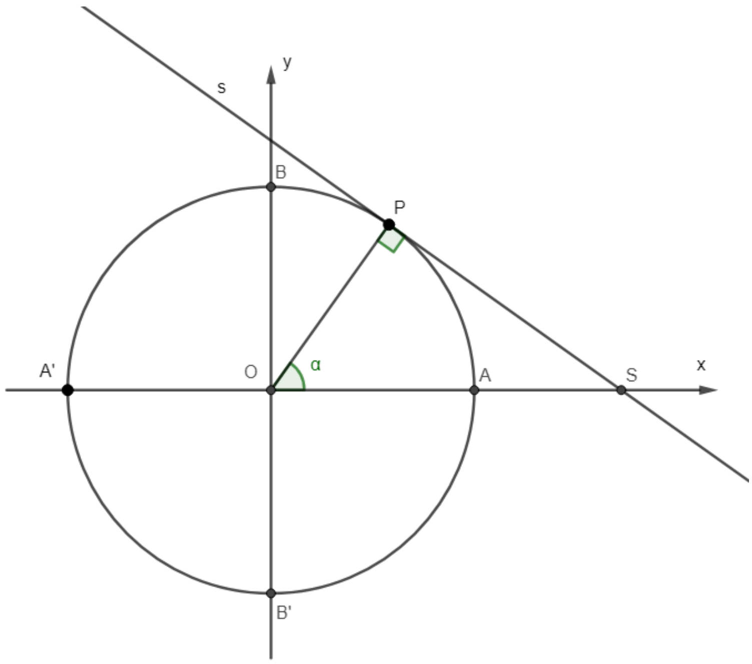

Figura 16: Secante de um arco.

2.7 Cossecante

Dado um número real c, $c \neq k\,\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua intersecção com o eixo dos Senos. Denominamos **cossecante de** c (e indicamos $cossec\,c$) a ordenada $\overline{OC}$ do ponto C.

Note que, para $c = k\,\pi$, o ponto P está em A ou A', ficando a reta s paralela ao eixo dos Senos, sendo assim não existe o ponto C e, consequentemente, o valor de $cossec\,c$ não está definido.

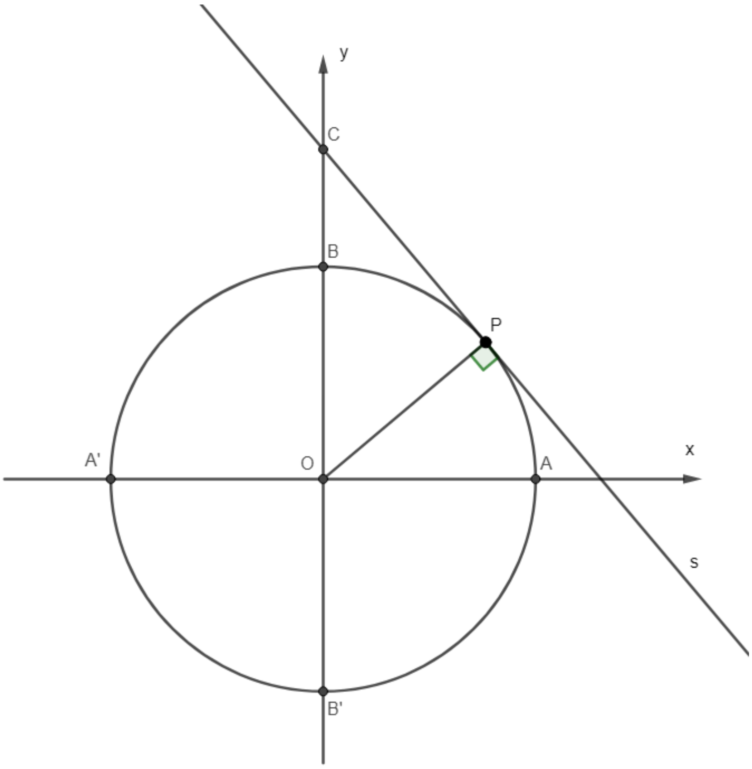

Figura 17: Cossecante de um arco.

2.8 O ciclo e algumas definições trigonométricas

Abaixo segue uma imagem do ciclo junto com algumas definições trigonométricas dadas, representadas no primeiro quadrante.

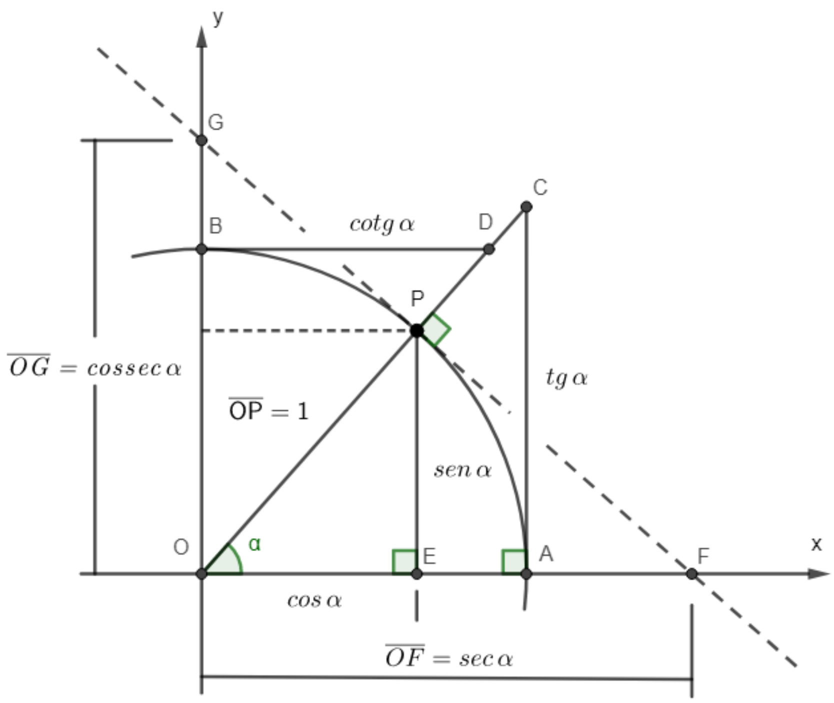

Figura 18: Identidades trigonométricas no 1º quadrante do ciclo.

3 DEMONSTRAÇÕES

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

3.1 Relação fundamental da trigonometria

Proposição 1. *Para todo $c \in \mathbb{R}$, temos*

$$sen^2 c + cos^2 c = 1\,.$$

Demonstração. Seja $\widehat{AP} = c$ (cf. figura 19). Sejam C e D os pés das projeções ortogonais de P em relação às retas por OA e OB, respectivamente. Note que o triângulo OCP é retângulo em C e tal que $\overline{OD} = sen\ c$ e $\overline{OC} = cos\ c$. Pelo teorema de Pitágoras,

$$sen^2\, c + cos^2\, c = 1^2 = 1$$

□

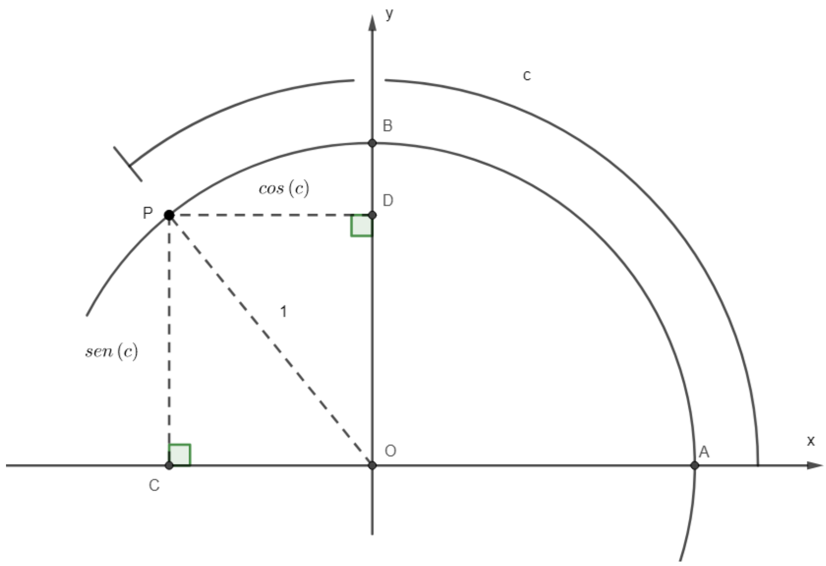

Figura 19: Relação Fundamental da Trigonometria.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto P	Marque o ponto P sobre a circunferência Γ
Arco $\widehat{AP}$	Defina a medida do arco $\widehat{AP}$ como comprimento (c)
Coordenadas de P	$P(cos\, c, sen\, c)$
Ponto C	Pé da perpendicular baixada de P sobre a reta por OA
$cos\, c$	Projeção de $\overline{OP}$ sobre o eixo das abscissas
Ponto D	Pé da perpendicular baixada de P sobre a reta por OB
$sen\, c$	Projeção de $\overline{OP}$ sobre o eixo das ordenadas
Segmento $\overline{OP}$	De comprimento unitário ou seja $\overline{OP} = 1$
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo OCP	Triângulo de ângulo reto C
Triângulo ODP	Triângulo de ângulo reto D
Teorema de Pitágoras	Aplicar o teorema a um dos triângulos retângulos
Demonstração	Relação fundamental: $sen^2 c + cos^2 c = 1$

3.2 Relação da Tangente

Proposição 2. *Para todo c real, $c \in [0,\, 2\pi]$ e $c \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vale a relação:*

$$tg\, c = \frac{sen\, c}{cos\, c}\,.$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura ao lado. Seja c o comprimento do arco do círculo. Se $c \in \left\{0,\, \pi,\, 2\pi\right\}$ então $tg\ c = 0$. Se $c \notin \left\{0,\, \pi,\, 2\pi\right\}$, então c é distinto de A e A', logo, temos:

$$OAT \sim OCP$$

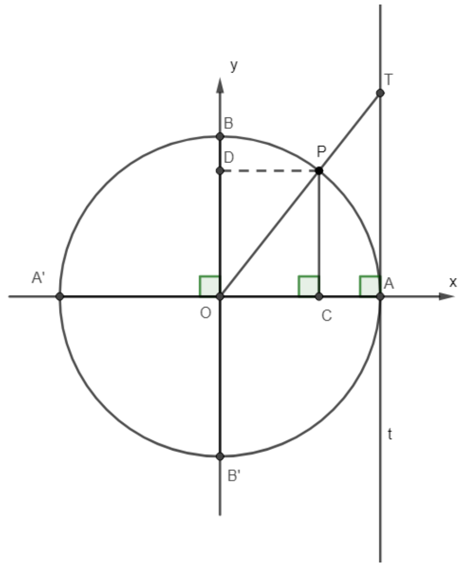

Figura 20: Relação da tangente.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AT}}{\overline{CP}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \\ \frac{tg\, c}{sen\, c} &= \frac{1}{cos\, c} \\ \frac{tg\, c}{1} &= \frac{sen\, c}{cos\, c} \\ tg\, c &= \frac{sen\, c}{cos\, c} \end{aligned}$$

□

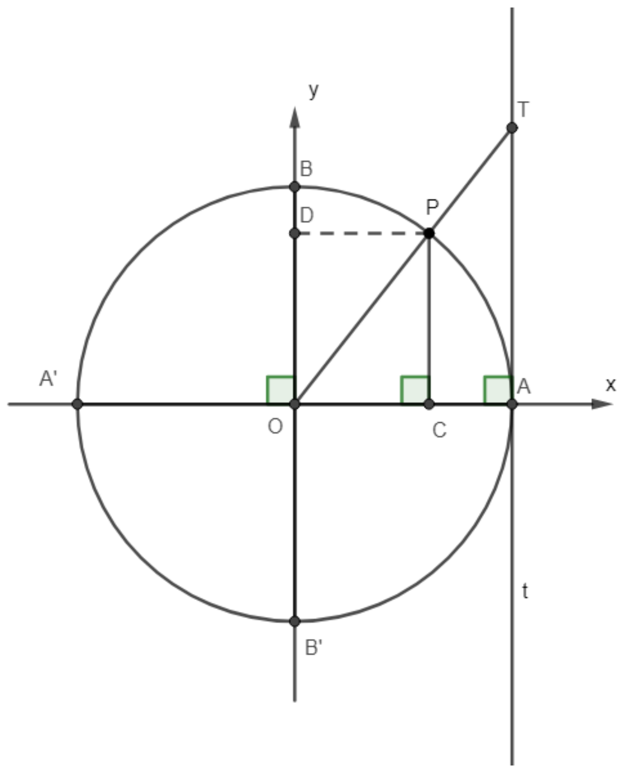

Figura 21: Relação da tangente.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto P	Marque o ponto P sobre a circunferência Γ
Arco $\widehat{AP}$	Defina a medida do arco $\widehat{AP}$ como comprimento (c)
Coordenadas de P	$P(cos\,c, sen\,c)$
Ponto C	Pé da perpendicular baixada de P sobre a reta por OA
$cos\,c$	Projeção de $\overline{OP}$ sobre o eixo das abscissas
Ponto D	Pé da perpendicular baixada de P sobre a reta por OB
$sen\,c$	Projeção de $\overline{OP}$ sobre o eixo das ordenadas
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo OCP	Triângulo de ângulo reto C
Triângulo OAT	Triângulo de ângulo reto A
Triângulos OCP e OAT	Semelhantes (caso AA)
Segmentos $\overline{AT}$ e $\overline{CP}$	São correspondentes e proporcionais
Segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OC}$	São correspondentes e proporcionais
Segmento $\overline{OA}$	De comprimento unitário ou seja $\overline{OA} = 1$
Demonstração	Relação da tangente: $tg\,c = \frac{sen\,c}{cos\,c}$

3.3 Cosseno da soma

Cosseno da soma com o auxílio da geometria

Proposição 3. *Para a, $b \in \mathbb{R}$, temos:*

$$cos(a+b) = cos\, a \cdot cos\, b - sen\, a \cdot sen\, b\,.$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura ao lado. Sejam, P, Q e R os pontos do ciclo associados aos números $a, a+b$ e $-b$, respectivamente. Em relação ao sistema cartesiano xOy, as coordenadas desses pontos são:

$$\mathbf{P}(cos\, a,\ sen\, a)$$
$$\mathbf{Q}(cos\, a+b,\ sen\, a+b)$$
$$\mathbf{R}(cos\, b,\ -sen\, b)$$

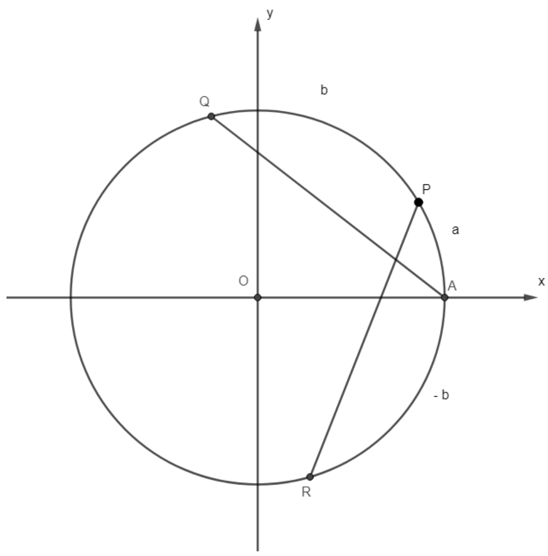

Figura 22: Cosseno da soma.

Os arcos $\overset{\frown}{AQ}$ e $\overset{\frown}{RP}$ têm a mesma medida, portanto as cordas $\overline{AQ}$ e $\overline{PR}$ têm medidas iguais. Segue da geometria analítica que:

$$\begin{aligned}
(d_{AQ})^2 &= (X_Q - X_A)^2 + (Y_Q - Y_A)^2 \\
&= [cos\,(a+b) - 1]^2 + [sen\,(a+b) - 0]^2 \\
&= cos^2(a+b) - 2 \cdot cos\,(a+b) + 1 + sen^2(a+b) \\
&= 2 - 2 \cdot cos(a+b) \\
(d_{RP})^2 &= (X_P - X_R)^2 + (Y_P - Y_R)^2 \\
&= [cos\, a - cos\, b]^2 + [sen\, a + sen\, b]^2 \\
&= cos^2 a - 2 \cdot cos\, a \cdot cos\, b + sen^2\, a + 2 \cdot sen\, a\ \cdot sen\, b + sen^2\, b \\
&= 2 - 2 \cdot cos\, a \cdot cos\, b + 2 \cdot sen\, a \cdot sen\, b
\end{aligned}$$

Como $d_{AQ} = d_{RP}$, segue que:

$$
\begin{aligned}
2 - 2 \cdot cos\,(a+b) &= 2 - 2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b + 2 \cdot sen\,a \cdot sen\,b \\
-2 \cdot cos\,(a+b) &= -2 \cdot cos\,a \cdot cos\,b + 2 \cdot sen\,a \cdot sen\,b
\end{aligned}
$$

Dividindo ambos os membros da equação por -2, temos:

$$cos(a+b) = cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b$$

$\square$

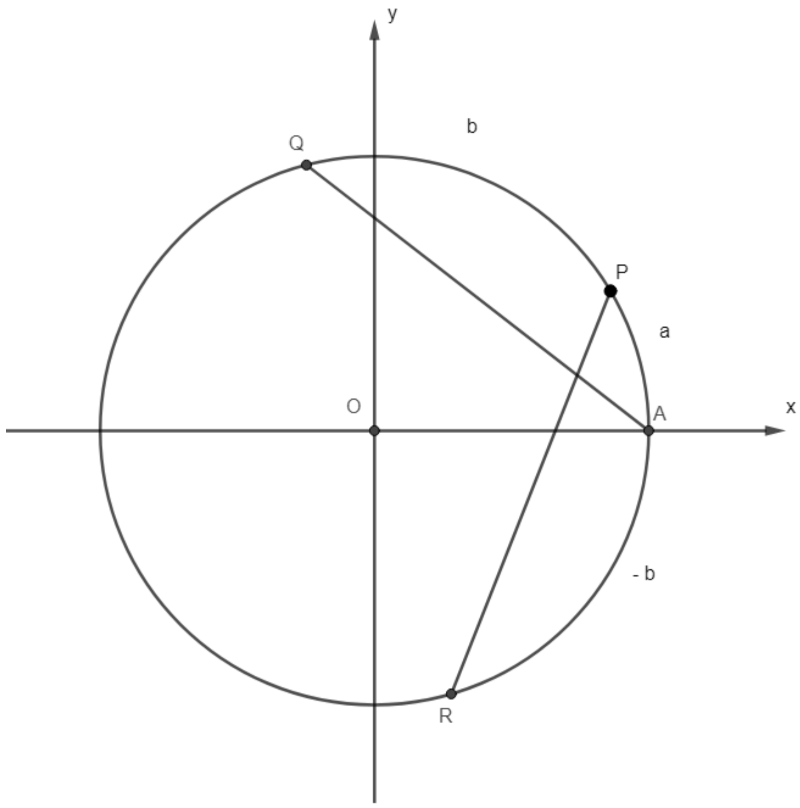

Figura 23: Cosseno da soma.

Protocolo	Descrição protocolar do procedimento geométrico
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto P	Marque o ponto P sobre a circunferência Γ
Arco $\overset{\frown}{AP}$ menor	Defina a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$ como comprimento a
Ponto Q	Marque o ponto Q sobre a circunferência Γ
Arco $\overset{\frown}{PQ}$ menor	Defina a medida do arco $\overset{\frown}{PQ}$ como comprimento b
Arco $\overset{\frown}{AR}$ menor	Construa o arco $\overset{\frown}{AR}$ com comprimento b
Arcos $\overset{\frown}{AR}$ e $\overset{\frown}{PQ}$	Arcos congruentes de comprimento b
Segmento $\overline{AQ}$	Arco de visão $\overset{\frown}{AQ}$
Segmento $\overline{PR}$	Arco de visão $\overset{\frown}{PR}$
$\overline{AQ} = \overline{PR}$	Sendo os arcos, $\overset{\frown}{AQ} = a + b$ e $\overset{\frown}{PR} = a + b$
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Seja d_{AQ}	Distância entre os pontos A e Q
Calculando d_{AQ}	$(d_{AQ})^2 = (X_Q - X_A)^2 + (Y_Q - Y_A)^2$
Seja d_{PR}	Distância entre os pontos P e R
Calculando d_{PR}	$[cos\,(a+b) - 1]^2 + [sen\,(a+b) - 0]^2$
Como $d_{AQ} = d_{PR}$	Desenvolvendo a igualdade algebricamente, temos
Demonstração	$cos(a+b) = cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b$

3.4 Cosseno da diferença

Procedimento algébrico

Proposição 4. *Para* $a, b \in \mathbb{R}$*, temos:*

$$cos(a-b) = cos\,a \cdot cos\,b + sen\,a \cdot sen\,b\,.$$

Para o cosseno da diferença podemos utilizar a soma do oposto de b, realizando assim um método puramente algébrico, como segue:

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned} cos(a-b) &= cos[\,a+(-b)] \\ &= cos\,a \cdot cos(-b) - sen\,a \cdot sen(-b) \\ &= cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot (-sen\,b) \\ &= cos\,a \cdot cos\,b + sen\,a \cdot sen\,b \end{aligned}$$

□

Cosseno da diferença com o auxílio da geometria

Demonstração. Considere as notações tais como na figura ao lado. Seja $\overset{\frown}{AC} = b$ e $\overset{\frown}{AD} = a$, ambos arcos menores. E seja ainda $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{PD}$. Temos

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{PD} \Rightarrow \overset{\frown}{AP} = \overset{\frown}{CD}$$

Logo, $d_{AP} = d_{CD}$. Utilizando assim a geometria analítica e levando em consideração as coordenadas dos pontos $A(1,0)$, $C(cos\, b, sen\, b)$, $P(cos\,(a-b), sen\,(a-b))$ e $D(cos\, a, sen\, a)$, temos:

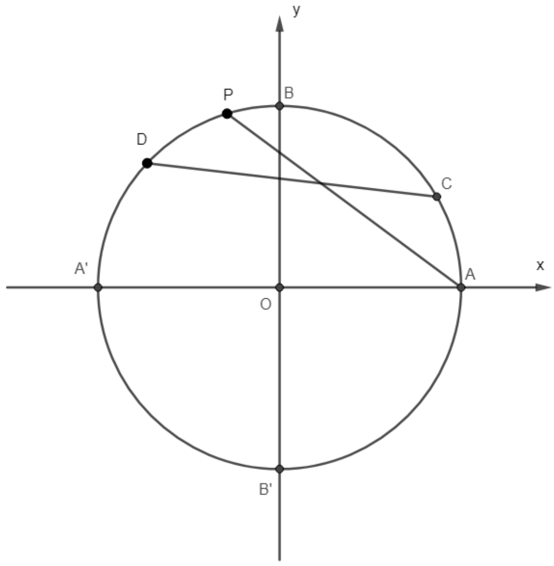

Figura 24: Cosseno da diferença.

$$\begin{aligned}
d_{AP} &= d_{CD} \\
\sqrt{[1 - cos(a-b)]^2 + [0 - sen(a-b)]^2} &= \sqrt{(cos\, b - cos\, a)^2 + (sen\, b - sen\, a)^2} \\
[cos(a-b) - 1]^2 + [sen(a-b) - 0]^2 &= (cos\, a - cos\, b)^2 + (sen\, a - sen\, b)^2 \\
cos^2(a-b) - 2cos(a-b) + 1 + sen^2(a-b) &= cos^2 a - 2cos\, a \cdot\, cos\, b + cos^2 b \\
&+ sen^2 a - 2sen\, a \cdot\, sen\, b + sen^2 b \\
cos^2(a-b) + sen^2(a-b) - 2cos(a-b) + 1 &= cos^2 a + sen^2 a - 2cos\, a \cdot\, cos\, b \\
&+ cos^2 b + sen^2 b - 2sen\, a \cdot\, sen\, b \\
1 - 2cos(a-b) + 1 &= 1 - 2cos\, a \cdot\, cos\, b + 1 - 2sen\, a \cdot\, sen\, b \\
-2cos(a-b) &= -2cos\, a \cdot\, cos\, b - 2sen\, a \cdot\, sen\, b \\
cos(a-b) &= cos\, a \cdot cos\, b + sen\, a \cdot sen\, b
\end{aligned}$$

□

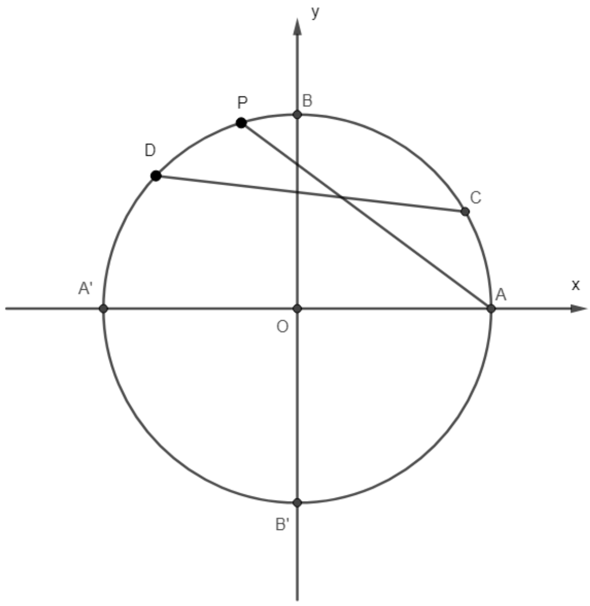

Figura 25: Cosseno da diferença.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto P	Marque o ponto P sobre a circunferência Γ
Ponto C	Marque o ponto C sobre a circunferência Γ
Ponto D	Marque o ponto D sobre a circunferência Γ
Pontos C e P	Respectivamente e entre os pontos A e D sentido anti-horário
Arcos $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{AD}$	Defina a medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ por b e do arco $\overset{\frown}{AD}$ por a
Sendo $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{PD}$	Consequentemente, a medida do arco $\overset{\frown}{AP}$ tem comprimento $a - b$
Coordenadas de P	$P(cos(a\ -\ b),\ sen(a\ -\ b))$
Coordenadas de C	$C(cos\, b,\ sen\, b)$
Coordenadas de D	$D(cos\, a,\ sen\, a)$
Segmento $\overline{AP}$	Arco de visão $\overset{\frown}{AP}$
Segmento $\overline{CD}$	Arco de visão $\overset{\frown}{CD}$
$\overline{AP} = \overline{CD}$	Sendo os arcos, $\overset{\frown}{AP} = a - b$ e $\overset{\frown}{CD} = a - b$
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Seja d_{AP}	Distância entre os pontos A e P
Calculando d_{AP}	$\sqrt{[1 - cos(a-b)]^2 + [0 - sen(a-b)]^2}$
Seja d_{CD}	Distância entre os pontos C e D
Calculando d_{CD}	$\sqrt{(cos\, b - cos\, a)^2 + (sen\, b - sen\, a)^2}$
Como $d_{AP} = d_{CD}$	Desenvolvendo a igualdade algebricamente, temos
Demonstração	$cos(a-b) = cos\, a \cdot cos\, b + sen\, a \cdot sen\, b$

3.5 Cosseno do dobro de um arco

Procedimento algébrico

Proposição 5. *Para $a \in \mathbb{R}$, temos:*

$$cos(2a) = cos^2 a - sen^2 a\,.$$

Para o cosseno do dobro de um arco, utilizaremos o cosseno da soma com ângulos iguais.

Demonstração. Basta notar

$$\begin{aligned}
cos(a+b) &= cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b \\
cos(a+a) &= cos\,a \cdot cos\,a - sen\,a \cdot sen\,a \\
cos(a+a) &= cos^2 a - sen^2 a \\
cos(2a) &= cos^2 a - sen^2 a
\end{aligned}$$

□

Cosseno do dobro de um arco com auxilio da geometria

A fim de ter uma representação geométrica para o dobro do cosseno de um arco, faremos uma relação entre um arco duplo e a razão trigonométrica citada.

Demonstração. Considere as notações tais como na figura ao lado. Seja a reta r a bissetriz do ângulo $\angle AOC$. Temos:

$\overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD} = 1$ (raio da circunferência trigonométrica) ;

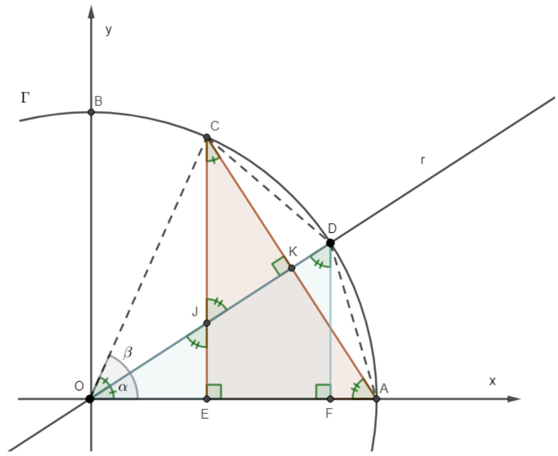

Figura 26: Arco duplo - Cosseno.

$$\begin{aligned} A\hat{O}C &= \beta; \\ A\hat{O}D &= \alpha; \\ \overline{OF} &= cos\,\alpha; \\ \overline{FD} &= sen\,\alpha; \\ \overline{OE} &= cos\,\beta; \\ \overline{EC} &= sen\,\beta. \end{aligned}$$

A partir de tais definições podemos concluir que as medidas das laterais do triângulo ACE são:

$$\overline{EA} = 1 - cos\,\beta\,;$$
$$\overline{EC} = sen\,\beta\,.$$

Como por construção $\beta = 2\,\alpha$, temos ainda:

$$\overline{AC} = 2 \cdot sen\,\alpha$$

pois,

$$\overline{AK} = \overline{KC}$$

e

$$\overline{AK} = sen\,\alpha\,.$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACE, segue:

$$\begin{aligned}
(2 \cdot sen\, \alpha)^2 &= (1 - cos\, \beta)^2 + (sen\, \beta)^2 \\
4 \cdot sen^2\, \alpha &= 1 - 2 \cdot cos\, \beta + cos^2\, \beta + sen^2\, \beta \\
4 \cdot sen^2\, \alpha &= 1 - 2 \cdot cos\, \beta + 1 \\
4 \cdot sen^2\, \alpha &= 2 - 2 \cdot cos\, \beta \\
2 \cdot sen^2\, \alpha &= 1 - cos\, \beta \\
cos\, \beta &= 1 - 2 \cdot sen^2\, \alpha \\
cos\, \beta &= sen^2\, \alpha + cos^2\, \alpha - 2 \cdot sen^2\, \alpha \\
cos\, \beta &= cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha
\end{aligned}$$

Como $\beta = 2\alpha$, temos

$$cos\,(2\alpha) = cos^2\, \alpha - sen^2\, \alpha$$

□

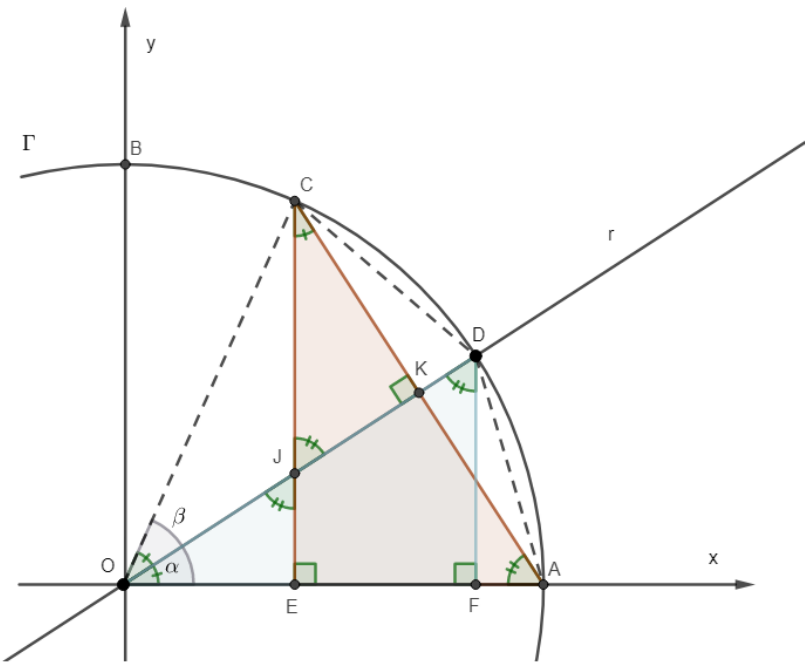

Figura 27: Arco duplo - Cosseno.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto D	Marque o ponto D sobre a circunferência Γ no primeiro quadrante
Reta (r)	Trace a reta r passando por O e D
Ponto C	Marque o ponto C através da reflexão de A em relação a r
Ponto E	Pé da perpendicular baixada de C sobre a reta por OA
Ponto F	Pé da perpendicular baixada de D sobre a reta por OA
Triângulo ODF	Construa o triângulo ODF de vértices O, D e F
Triângulo CAE	Construa o triângulo CAE de vértices C, A e E
Ponto J	Marque o ponto J na interseção do segmento CE com a reta r
Ponto K	Marque o ponto K na interseção do segmento CA com a reta r
Segmento OC	Construa o segmento OC
Segmento CD	Construa o segmento CD
Segmento DA	Construa o segmento DA
Ângulo (α)	Denote por α o ângulo de vértice em O e de lados $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Or}$
Ângulo (β)	Denote por β o ângulo de vértice em O e de lados $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{OC}$
Ângulos	$\angle$ OJE é congruente a $\angle$ CJD (opostos pelo vértice)
Ângulos	$\angle$ OJE é congruente a $\angle$ ODF (correspondentes)
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo OFD	Temos o triângulo OFD retângulo em F
Triângulo OEJ	Temos o triângulo OEJ retângulo em E
Triângulo CEA	Temos o triângulo CEA retângulo em E
Triângulo CKJ	Temos o triângulo CKJ retângulo em K
Semelhança	$OFD \sim OEJ \sim CEA \sim CKJ$
Medidas de OFD	$\overline{OF} = cos\,\alpha$, $\overline{FD} = sen\,\alpha$ e $\overline{OD} = 1$
Medidas de CEA	$\overline{CE} = sen\,\beta$, $\overline{EA} = 1 - cos\,\beta$ e $\overline{AC} = 2 \cdot sen\,\alpha$
Pitágoras	$(2 \cdot sen\,\alpha)^2 = (1 - cos\,\beta)^2 + (sen\,\beta)^2$
Relação	$cos\,\beta = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha$
Por construção	$\beta = 2\,\alpha$
Demonstração	$cos\,(2\alpha) = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha$

3.6 Seno da soma e da diferença

Na demonstração do seno da soma de arcos faremos primeiramente, uma retomada acerca do entendimento sobre pontos simétricos e relações existentes entres as razões seno e cosseno.

Lema 1. *Para $c \in \mathbb{R}$, temos:*

$$sen(-c) = -\,sen\,c \quad \text{e} \quad cos(-c) = cos\,c\,.$$

Demonstração. Considere, no ciclo trigonométrico, as extremidades finais P e Q tais que $\overset{\frown}{AP} = c$ e $\overset{\frown}{AQ} = -\,c$ (conforme a fig. 28). Como os arcos de c e $-\,c$ radianos tem comprimentos iguais mas são marcados em sentidos opostos (um no sentido trigonométrico e outro no sentido horário). Os ângulos $\angle QPA$ e $\angle AQP$ são iguais (pois a visada de ambos têm tamanho c), logo $\overline{AP} = \overline{AQ}$. Daí que o triângulo PAQ é isósceles de base PQ. A reta por OA é bissetriz de PAQ, logo passa pela base PQ perpendicularmente. Segue que P e Q são simétricos em relação ao eixo das abscissas. Portanto P e Q têm abscissas iguais e ordenadas opostas. Mas, como $P = (cos\,c, sen\,c)$ e $Q = (cos\,(-\,c), sen\,(-\,c))$, segue que $cos\,c = cos(-\,c)$, pois as abscissas são iguais e $-\,sen\,c = sen(-\,c)$, uma vez que as ordenadas são opostas.

□

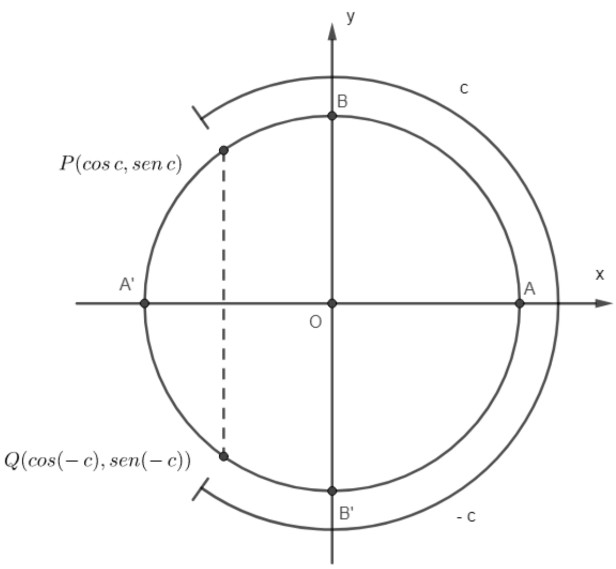

Figura 28: Lema 1.

Lema 2. *Para $c \in \mathbb{R}$, temos:*

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = cos\, c \quad \text{e} \quad cos\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = sen\, c\,.$$

Demonstração. Basta nesse caso demonstrar que $sen\left(c - \frac{\pi}{2}\right) = -cos\, c$ e $cos\left(c - \frac{\pi}{2}\right) = sen\, c$.

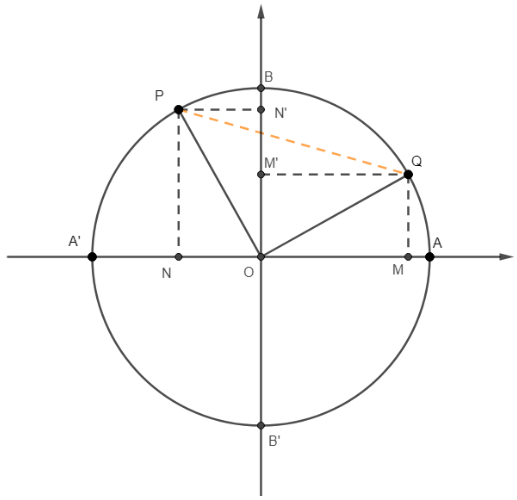

Figura 29: Lema 2.

Considere, no ciclo trigonométrico, os pontos

$P(cos\, c, sen\, c)$ e $Q(cos\, (c - \frac{\pi}{2}), sen\, (c - \frac{\pi}{2})$,

tais como na figura, sendo $\overset{\frown}{AP} = c$ e $\overset{\frown}{AQ} = c - \frac{\pi}{2}$.

Como $\overline{OP} = \overline{OQ}$ e o ângulo $Q\hat{O}P = 90°$, temos que o triângulo QOP é isósceles de base PQ. Seja N' o pé da perpendicular baixada a partir de P sobre a BB' e seja M o pé da perpendicular baixada a partir de Q sobre a AA'. Mostraremos que os triângulos $N'PO$ e MQO são congruentes. De fato, por um lado, pelo teorema das paralelas,

$$\begin{aligned} O\hat{P}N' &= N\hat{O}P \\ &= 180^0 - (90^o + M\hat{O}Q) \\ &= 90^o - M\hat{O}Q \\ &= 90^o - (180^o - (90^o + M\hat{Q}O)) \\ &= M\hat{Q}O \end{aligned}$$

Por outro lado, ambos são retângulos com hipotenusas de tamanhos iguais. Segue, pelo caso AA, que $N'PO$ e MQO são semelhantes com hipotenusas de tamanhos iguais. Logo, são congruentes.

Segue que

$$-cos\, c = sen\left(c - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad sen\, c = cos\left(c - \frac{\pi}{2}\right)$$

□

3.7 Seno da soma

Agora, a partir das demonstrações anteriores (os Lemas anteriores), demonstraremos o seno da soma de dois arcos.

Procedimento algébrico

Proposição 6. *Para* a, $b \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$sen(a+b) = sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a\,.$$

Demonstração. Pelo Lema 2, temos que,

$$\begin{aligned} sen(a+b) &= cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] \\ &= cos\left[\frac{\pi}{2} - a\ - b\right] \\ &= cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] \\ &= cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot cos\,b + sen\,b \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \\ &= sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a \end{aligned}$$

□

Seno da soma com auxílio da geometria

Proposição 7. *Para* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *e* $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ *segue que*

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha\,.$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura ao lado. Seja P um ponto sobre a circunferência tal que $P(cos(\alpha + \beta), sen(\alpha + \beta))$. Traçando uma reta t paralela a reta suporte de $\overline{OA}$ (reta que contém o segmento) e passando por D, temos que, o ângulo formado por $ODt = \alpha$ (alternos internos) e consequentemente o ângulo $\angle FDP = \alpha$, pois esse é complementar, uma vez que os pontos FDE são colineares. Sendo assim, teremos o triângulo ODE semelhante ao triângulo DPF (caso AA).

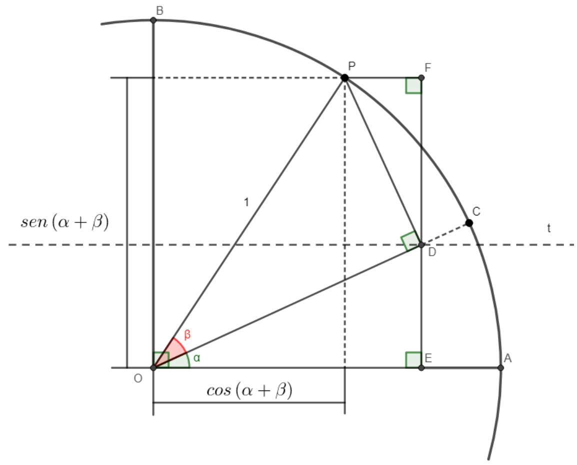

Figura 30: Seno da soma.

O triângulo ODP é retângulo em D, logo:

$$\overline{OP} = 1$$
$$\overline{OD} = cos\,\beta$$
$$\overline{DP} = sen\,\beta$$

O triângulo OED é retângulo em E, logo:

$$\overline{OD} = cos\,\beta$$
$$\overline{OE} = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta$$
$$\overline{ED} = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta$$

Faremos procedimento análogo para o triângulo DPF.

$$\overline{DP} = sen\,\beta$$
$$\overline{DF} = cos\,\alpha \cdot sen\,\beta$$
$$\overline{FP} = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$$

Uma vez que conhecemos os valores respectivos de cada segmento e as coordenadas do ponto P, segue que

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$$

□

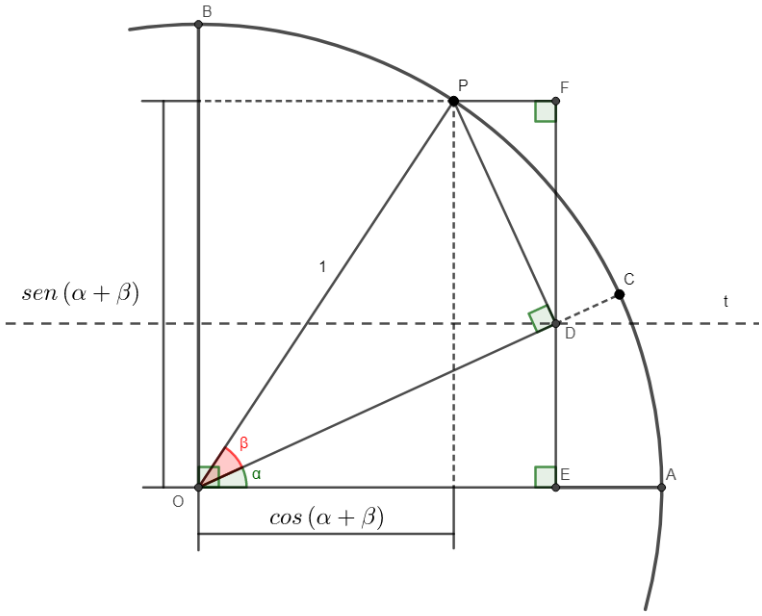

Figura 31: Seno da soma.

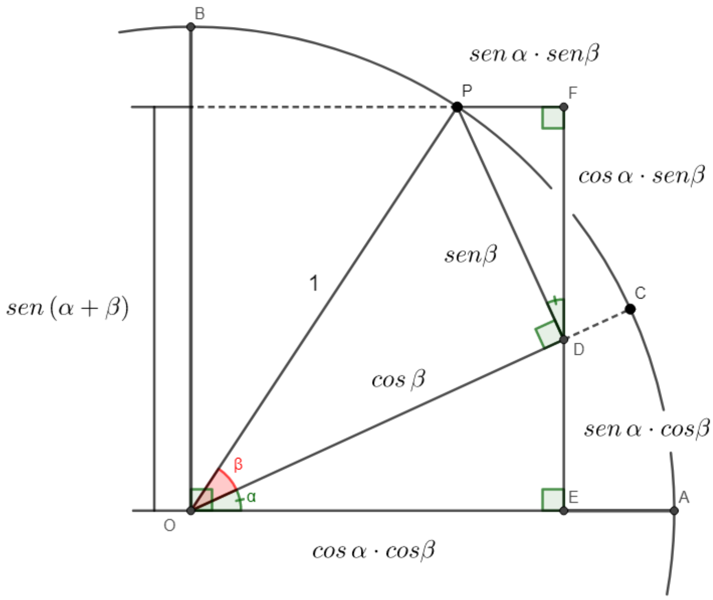

Figura 32: Seno da soma - medidas.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto P	Marque o ponto P sobre a circunferência Γ no primeiro quadrante
Ponto C	Marque o ponto C sobre a circunferência Γ entre A e P
Segmento $\overline{OC}$	Trace o segmento OC
Ângulo AOC	Denote por α o ângulo AOC de vértice O
Coordenadas de C	$C(cos\,\alpha,\ sen\,\alpha)$
Segmento $\overline{OP}$	Trace o segmento OP
Ângulo COP	Denote por β o ângulo COP de vértice O
Coordenadas de P	$P(cos\,(\alpha+\beta), sen\,(\alpha+\beta))$
Reta suporte	Trace uma reta perpendicular ao segmento OC passando por P
Ponto D	Marque o ponto D na intersecção da reta com o segmento OC
Segmento PD	Trace o segmento PD
Ponto E	Faça a projeção ortogonal de D sobre o eixo x e denote E
Segmento DE	Trace o segmento DE
Reta suporte	Trace uma reta suporte sobre DE
Reta suporte	Trace uma reta suporte paralela ao segmento OA passando por P
Ponto F	Marque o ponto F na intersecção das duas retas suporte
Segmento PF	Construa o segmento PF
Segmento FD	Construa o segmento FD
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo ODP	Temos o triângulo ODP retângulo em D
Triângulo OED	Temos o triângulo OED retângulo em E
Triângulo DFP	Temos o triângulo DFP retângulo em F
Semelhança	$ODE \sim DPF$
Medidas de ODP	$\overline{OP} = 1$, $\overline{OD} = cos\,\beta$ e $\overline{DP} = sen\,\beta$
Medidas de OED	$\overline{OD} = cos\,\beta$, $\overline{OE} = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta$ e $\overline{DE} = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta$
Medidas de DFP	$\overline{DP} = sen\,\beta$, $\overline{DF} = cos\,\alpha \cdot sen\,\beta$ e $\overline{FP} = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$
$sen\,(\alpha+\beta)$	$\overline{ED} + \overline{DF}$
$sen\,(\alpha+\beta)$	$sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$
Demonstração	$sen\,(\alpha+\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$

3.8 Seno da diferença

O seno da diferença pode ser representado a partir do seno da soma, ou seja, a soma do oposto, como segue:

Procedimento algébrico

Proposição 8. *Para* a, $b \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$sen(a-b) = sen\, a \cdot cos\, b - sen\, b \cdot cos\, a\,.$$

Demonstração. Operando a diferença como a soma do oposto, segue que,

$$\begin{aligned} sen(a-b) &= sen(a+(-\,b)) \\ &= sen\, a \cdot cos(-\,b) + sen(-\,b) \cdot cos\, a \\ &= sen\, a \cdot cos\, b + (-\,sen\, b) \cdot cos\, a \\ &= sen\, a \cdot cos\, b - sen\, b \cdot cos\, a \end{aligned}$$

□

Seno da diferença com auxilio da geometria

Proposição 9. *Para* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *e* $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

segue

$$sen(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha\,.$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura ao lado. Denotemos a medida do ângulo $\angle FOD$ de α. Podemos também afirmar que $\angle OEH = \alpha$ (ângulos alternos internos). Temos ainda que $\angle ECG = \alpha$ (complementar). Assim os triângulos OEH e ECG são semelhantes (caso AA).

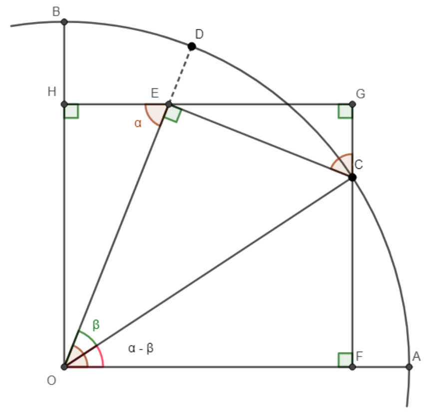

Figura 33: Seno da diferença.

Temos, por construção que

$$\overline{OH} = \overline{FG}$$

e ainda

$$\overline{FG} = \overline{FC} + \overline{CG}$$

Realizando as devidas substituições (figura 35), temos

$$\begin{aligned} \overline{FG} &= \overline{FC} + \overline{CG} \\ sen\,\alpha \cdot cos\,\beta &= sen\,(\alpha - \beta) + cos\,\alpha \cdot sen\,\beta \\ sen\,(\alpha - \beta) &= sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha \end{aligned}$$

□

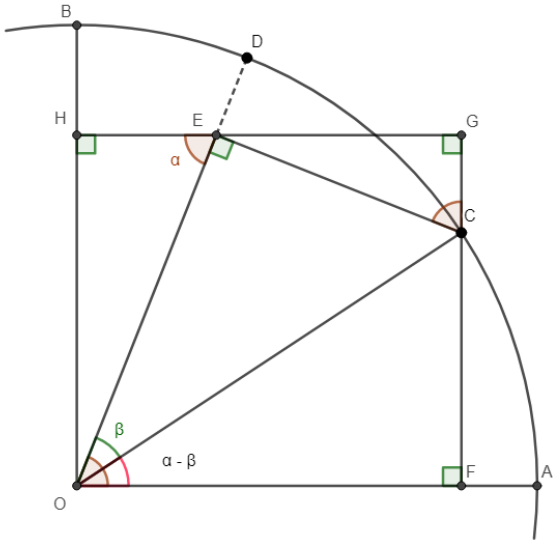

Figura 34: Seno da diferença.

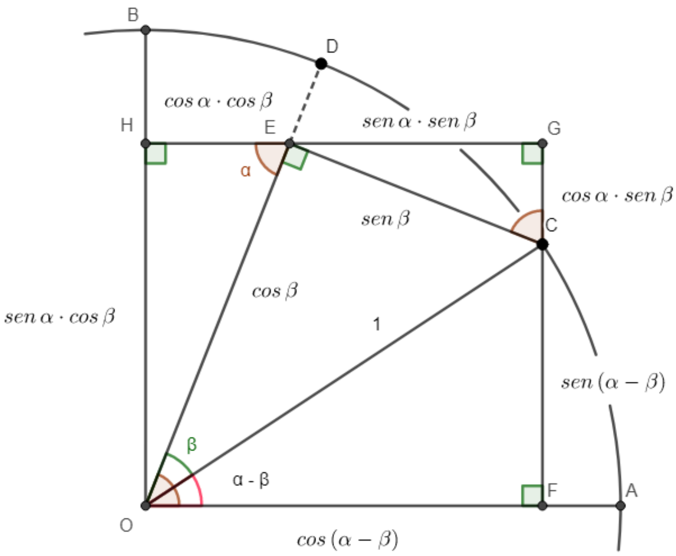

Figura 35: Seno da diferença - medidas.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto D	Marque o ponto D sobre a circunferência Γ no primeiro quadrante
Ponto C	Marque o ponto C sobre a circunferência Γ entre A e D
Segmento $\overline{OD}$	Trace o segmento OD
Ângulo AOD	Denote por α o ângulo AOD de vértice O
Coordenadas de D	$D(cos\,\alpha,\, sen\,\alpha)$
Segmento $\overline{OC}$	Trace o segmento OC
Ângulo COD	Denote por β o ângulo COD de vértice O
Ângulo AOC	Denote por $(\alpha - \beta)$ o ângulo AOC de vértice O
Coordenadas de C	$C(cos(\alpha - \beta), sen(\alpha - \beta))$
Reta suporte	Trace uma reta perpendicular ao segmento OD passando por C
Ponto E	Marque o ponto E na intersecção da reta com o segmento OD
Ponto F	Pé da perpendicular baixada de C sobre a reta por OA
Reta suporte	Trace uma reta perpendicular ao segmento OA passando por C
Reta suporte	Trace uma reta suporte paralela ao segmento OA passando por E
Ponto G	Marque o ponto G na intersecção das duas retas suportes
Ponto H	Marque o ponto H em OB e colinear aos pontos E e G
Segmentos	Trace os segmentos HE e EO
Triângulo OHE	Temos o triângulo OHE retângulo em H
Segmentos	Trace os segmentos EG, GC e CE
Triângulo EGC	Temos o triângulo EGC retângulo em G
Segmento CF	Trace o segmento CF
Triângulo OFC	Temos o triângulo OFC retângulo em F
Triângulo OEC	Temos o triângulo OEC retângulo em E
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Semelhança	$OHE \sim EGC$
Medidas de OEC	$\overline{OE} = cos\,\beta$, $\overline{EC} = sen\,\beta$ e $\overline{CO} = 1$
Medidas de OFC	$\overline{OC} = 1$, $\overline{OF} = cos\,(\alpha - \beta)$ e $\overline{FC} = sen\,(\alpha - \beta)$
Medias de OHE	$\overline{OE} = cos\beta$, $\overline{OH} = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta$ e $\overline{HE} = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta$
Medidas de EGC	$\overline{EC} = sen\beta$, $\overline{EG} = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$ e $\overline{GC} = cos\,\alpha \cdot sen\,\beta$
Medidas	$\overline{OH} = \overline{FG}$
Medidas	$\overline{FC} = \overline{OH} - \overline{CG}$
Demonstração	$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$

3.9 Seno do dobro de um arco

Procedimento algébrico

Proposição 10. *Para $a \in \mathbb{R}$, temos:*

$$sen\,2a = 2sen\,a \cdot cos\,a\,.$$

Para o seno do dobro de um arco, utilizaremos o seno da soma com ângulos iguais.

Demonstração. Basta notar

$$\begin{aligned} sen(a+a) &= sen\,a \cdot cos\,a + sen\,a \cdot cos\,a \\ sen\,2a &= 2sen\,a \cdot cos\,a \end{aligned}$$

□

Seno do dobro de um arco com auxilio da geometria

A fim de ter uma representação geométrica para o dobro do seno de um arco, faremos uma relação entre um arco duplo e a razão trigonométrica citada.

Demonstração. Dada a construção do arco trigonométrico ou da circunferência trigonométrica e considerando o primeiro quadrante, segue que, ao analisarmos os triângulos CEA e OFD é possível observar que esses são semelhantes (caso AA). Vejamos a razão desta afirmação: Por construção a reta r é bissetriz de $\angle COA$, segue que D é ponto médio de $\overset{\frown}{AC}$ (arco menor), sendo assim a corda $\overline{AC}$ é perpendicular a reta r.

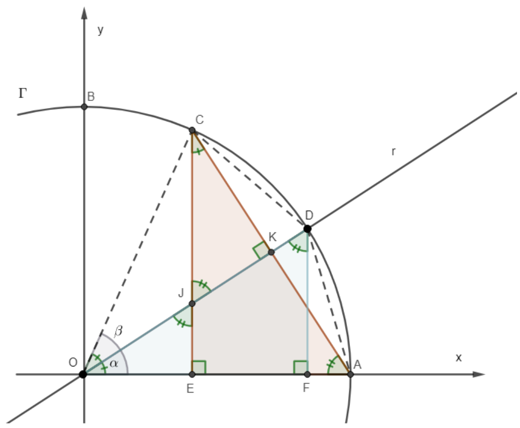

Figura 36: Arco duplo - Seno.

Denotaremos ainda a intersecção desta reta com a referida corda pelo ponto K e ainda os pontos E e F, as projeções ortogonais de C e D respectivamente, sobre o eixo x.

Temos, portanto, que o triângulo OCK é congruente ao triângulo OAK (caso LLL), uma vez que K é ponto médio de $\overline{AC}$, $\overline{OC} = \overline{OA}$ e OK é comum.

O ângulo $\angle OJE$ é congruente ao ângulo $\angle CJK$ (opostos pelo vértice) e os triângulo JEO e JKC são retângulos, logo são semelhantes (caso AA). Segue que $E\hat{C}A = A\hat{O}D$. Como os triângulos OFD e CEA são retângulos, são semelhantes (caso AA).

De tal semelhança podemos ter as seguintes razões:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CA}}{\overline{OD}} &= \frac{\overline{EC}}{\overline{FO}}\\ \overline{CA}\cdot\overline{FO} &= \overline{OD}\cdot\overline{EC}\\ (sen\,\alpha + sen\,\alpha)\cdot cos\,\alpha &= 1\cdot sen\,\beta\end{aligned}$$

Temos portanto:

$$2sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha = sen\,\beta$$

Como $\beta = 2\alpha$

$$sen\,2\alpha = 2sen\,\alpha\cdot cos\,\alpha$$

$\square$

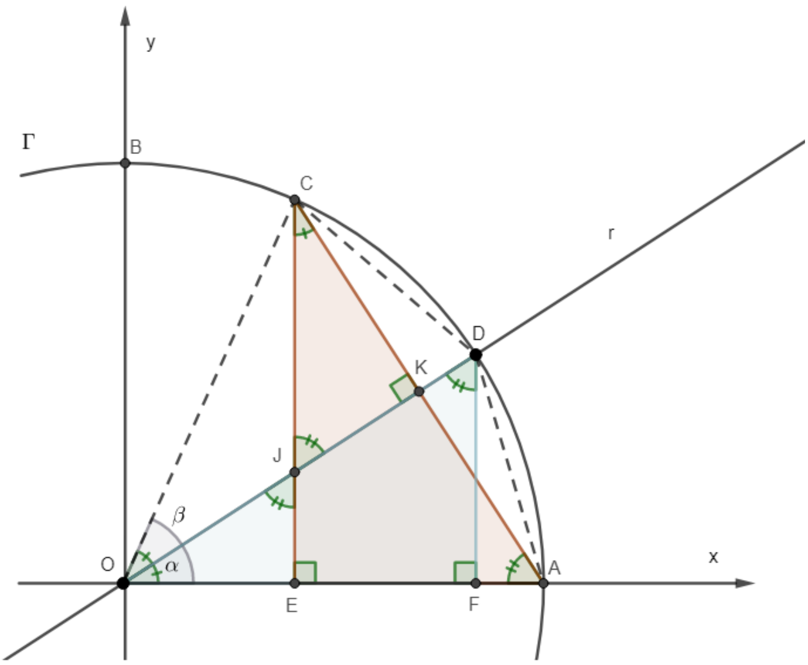

Figura 37: Arco duplo - Seno.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto D	Marque o ponto D sobre a circunferência Γ no primeiro quadrante
Reta (r)	Trace a reta r passando por O e D
Ponto C	Marque o ponto C através da reflexão de A em relação a r
Ponto E	Pé da perpendicular baixada de C sobre a reta por OA
Ponto F	Pé da perpendicular baixada de D sobre a reta por OA
Triângulo ODF	Construa o triângulo ODF de vértices O, D e F
Triângulo CAE	Construa o triângulo CAE de vértices C, A e E
Ponto J	Marque o ponto J na interseção do segmento CE com a reta r
Ponto K	Marque o ponto K na interseção do segmento CA com a reta r
Segmento OC	Construa o segmento OC
Segmento CD	Construa o segmento CD
Segmento DA	Construa o segmento DA
Ângulo (α)	Denote por α o ângulo de vértice em O e de lados $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Or}$
Ângulo (β)	Denote por β o ângulo de vértice em O e de lados $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{OC}$
Ângulos	$\angle$ OJE é congruente a $\angle$ CJD (opostos pelo vértice)
Ângulos	$\angle$ OJE é congruente a $\angle$ ODF (correspondentes)
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo OFD	Temos o triângulo OFD retângulo em F
Triângulo OEJ	Temos o triângulo OEJ retângulo em E
Triângulo CEA	Temos o triângulo CEA retângulo em E
Triângulo CKJ	Temos o triângulo CKJ retângulo em K
Semelhança	$OFD \sim CEA$
Medidas de OFD	$\overline{OF} = cos\,\alpha$, $\overline{FD} = sen\,\alpha$ e $\overline{OD} = 1$
Medidas de CEA	$\overline{CE} = sen\,\beta$, $\overline{EA} = 1 - cos\,\beta$ e $\overline{AC} = 2 \cdot sen\,\alpha$
Proporção	$\overline{CA} \cdot \overline{FO} = \overline{OD} \cdot \overline{EC}$
Demonstração	$sen\,2\alpha = 2sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha$

3.10 Tangente da soma

Procedimento algébrico

Proposição 11. *Para a, $b \in \mathbb{R}$, temos:*

$$tg(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}\ ,$$

sempre que e $tg(a+b)$ estiver definida.

Para a demonstração da tangente da soma, utilizaremos a relação dada pela proposição 2:

$$tg\,c = \frac{sen\,c}{cos\,c}\,.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
tg(a+b) &= \frac{sen(a+b)}{cos(a+b)} \\
&= \frac{sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a}{cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b} \\
&= \frac{\dfrac{sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a}{cos\,a \cdot cos\,b}}{\dfrac{cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b}{cos\,a \cdot cos\,b}} \\
&= \frac{\dfrac{sen\,a \cdot \cancel{cos\,b}}{cos\,a \cdot \cancel{cos\,b}} + \dfrac{sen\,b \cdot \cancel{cos\,a}}{\cancel{cos\,a} \cdot cos\,b}}{\dfrac{\cancel{cos\,a \cdot cos\,b}}{\cancel{cos\,a \cdot cos\,b}} - \dfrac{sen\,a \cdot sen\,b}{cos\,a \cdot cos\,b}} \\
&= \frac{\dfrac{sen\,a}{cos\,a} + \dfrac{sen\,b}{cos\,b}}{1 - \dfrac{sen\,a \cdot sen\,b}{cos\,a \cdot cos\,b}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$tg(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a \cdot tg\,b}$$

□

Tangente da soma com auxilio da geometria

Proposição 12. *Para* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *e* $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$*, temos que*

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}\ .$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura ao lado. Suponha $\alpha > \beta$.

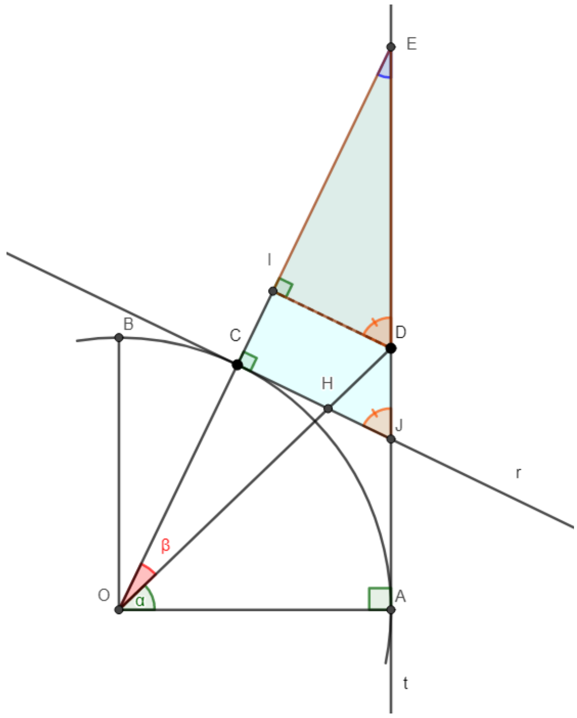

Figura 38: Tangente da soma.

Os triângulos AOE, CJE e IDE são semelhantes (caso AA), pois têm um ângulo em comum, a saber $\hat{E}$ e ângulos retos.

Sobre o triângulo AOE podemos observar as medidas dos lados

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= 1 \\ \overline{AE} &= tg\,(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Para determinar o segmento $\overline{OE}$, usamos o Teorema de Pitágoras como segue:

$$\begin{aligned} (\overline{OE})^2 &= (\overline{OA})^2 + (\overline{AE})^2 \\ (\overline{OE})^2 &= 1^2 + tg^2\,(\alpha+\beta) \\ \overline{OE} &= \pm\sqrt{1^2 + tg^2\,(\alpha+\beta)} \\ \overline{OE} &= \sqrt{1 + tg^2\,(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Agora vamos determinar os tamanhos dos lados dos triângulos CJE e IDE usando outra semelhança. Os triângulos IOD e COH são semelhantes (caso AA), pois tem ângulo em comum, a saber β, e ângulos retos.

Sendo assim, temos a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{ID}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{IO}}{\overline{CO}}$$

Como $\overline{CO} = 1$, segue que $\overline{CH} = tg\,\beta$. Temos assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{ID}}{tg\,\beta} &= \frac{\overline{IO}}{1} \\
\overline{ID} &= tg\,\beta \cdot \overline{IO}
\end{aligned}$$

Como $\overline{IO} = \overline{EO} - \overline{EI}$ e $\overline{EO} = \sqrt{1 + tg^2(\alpha + \beta)}$, devemos ainda determinar o valor de $\overline{EI}$.

Temos a semelhança dos triângulos IDE e AOE (caso AA), fornecendo a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{EI}}{\overline{AE}}$$

Como $\overline{AE} = tg\,(\alpha + \beta)$ e $\overline{DE} = tg\,(\alpha + \beta) - tg\,\alpha$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{tg\,(\alpha + \beta) - tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\,(\alpha + \beta)}} &= \frac{\overline{EI}}{tg\,(\alpha + \beta)} \\
\overline{EI} &= [tg\,(\alpha + \beta)] \cdot \frac{tg\,(\alpha + \beta) - tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\,(\alpha + \beta)}} \\
\overline{EI} &= \frac{tg^2\,(\alpha + \beta) - tg\,(\alpha + \beta) \cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\,(\alpha + \beta)}}
\end{aligned}$$

Retornando na relação $\overline{IO} = \overline{EO} - \overline{EI}$, segue que

$$
\begin{aligned}
\overline{IO} &= \overline{EO} - \overline{EI} \\
&= \sqrt{1 + tg^2(\alpha+\beta)} - \frac{tg^2\,(\alpha+\beta) - tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}} \\
&= \frac{1 + tg^2(\alpha+\beta) - tg^2\,(\alpha+\beta) + tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}} \\
&= \frac{1 \cancel{+tg^2(\alpha+\beta)} \cancel{-tg^2\,(\alpha+\beta)} + tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}} \\
\overline{IO} &= \frac{1\ + tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}}
\end{aligned}
$$

Retornando ainda em, $\overline{ID} = tg\,\beta \cdot \overline{IO}$, segue que

$$
\begin{aligned}
\overline{ID} &= tg\,\beta \cdot \frac{1\ + tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}} \\
\overline{ID} &= \frac{tg\,\beta\ + tg\,\beta \cdot tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}}
\end{aligned}
$$

Pelos ângulos correspondentes temos que $E\hat{D}I = \alpha + \beta$. Determinaremos a tangente da soma observando o triângulo IDE.

$$
\begin{aligned}
tg\,(\alpha+\beta) &= \frac{\overline{IE}}{\overline{ID}} \\
&= \frac{\dfrac{tg^2\,(\alpha+\beta) - tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}}}{\dfrac{tg\,\beta\ + tg\,\beta \cdot tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}}} \\
&= \frac{\dfrac{tg^2\,(\alpha+\beta) - tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\cancel{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}}}}{\dfrac{tg\,\beta\ + tg\,\beta \cdot tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{\cancel{\sqrt{1+tg^2\,(\alpha+\beta)}}}} \\
tg\,(\alpha+\beta) &= \frac{tg^2\,(\alpha+\beta) - tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}{tg\,\beta\ + tg\,\beta \cdot tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(tg\,\beta\ + tg\,\beta\cdot tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha)\cdot tg\,(\alpha+\beta) &= tg^2\,(\alpha+\beta) - tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha \\
(tg\,\beta\ + tg\,\beta\cdot tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha)\cdot \cancel{tg\,(\alpha+\beta)} &= \cancel{tg\,(\alpha+\beta)}\cdot (tg\,(\alpha+\beta) - tg\,\alpha) \\
tg\,\beta\ + tg\,\beta\cdot tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha &= tg\,(\alpha+\beta) - tg\,\alpha \\
tg\,\beta\ + tg\,\alpha &= tg\,(\alpha+\beta) - tg\,\beta\cdot tg\,(\alpha+\beta)\cdot tg\,\alpha \\
tg\,\beta\ + tg\,\alpha &= tg\,(\alpha+\beta)\cdot(1 - tg\,\beta\cdot tg\,\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
tg\,(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\beta\ + tg\,\alpha}{1 - tg\,\beta\cdot tg\,\alpha}
$$

$\square$

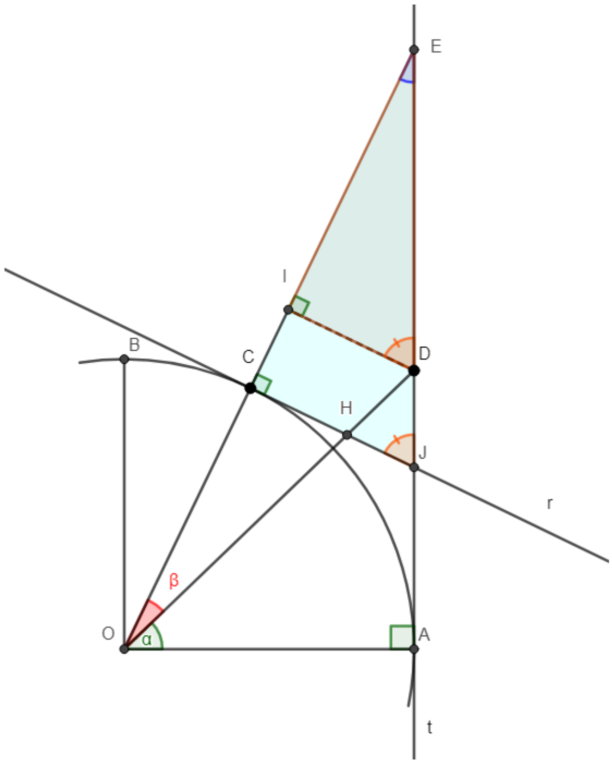

Figura 39: Tangente da soma.

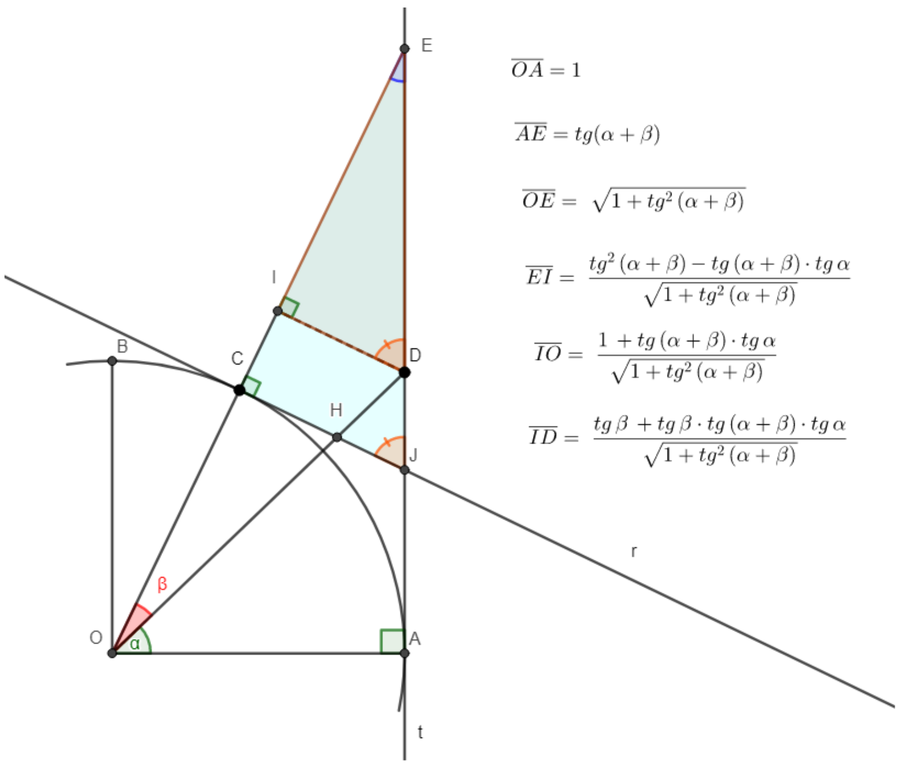

Figura 40: Tangente da soma - medidas.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto C	Marque o ponto C sobre a circunferência Γ no primeiro quadrante
Reta (t)	Trace a reta t perpendicular ao eixo x em A
Segmento OC	Construa o segmento OC
Reta suporte	Trace a reta suporte OC
Ponto E	Marque o ponto E na intersecção das reta suporte e da reta t
Reta (r)	Trace a reta r tangente a circunferência Γ no ponto C
Ponto J	Marque o ponto J na intersecção das retas r e t
Ponto D	Marque o ponto D na reta t e entre os pontos J e E
Segmento OD	Construa o segmento OD
Ponto H	Marque o ponto H na intersecção da reta r e o segmento OD
Segmento CE	Construa o segmento CE
Reta suporte	Trace a reta suporte paralela a r passando por D
Ponto I	Marque o ponto I na Intersecção da reta suporte com o segmento CE
Segmento DI	Construa o segmento DI
Ângulo (α)	Denote por α o ângulo de vértice em O e de lados OA e OD
Ângulo (β)	Denote por β o ângulo de vértice em O e de lados OI e OD
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo ECJ	Temos o triângulo ECJ retângulo em C
Triângulo EAO	Temos o triângulo EAO retângulo em A
Semelhança	$ECJ \sim EAO \sim EID$
Ângulo	Denote por $(\alpha + \beta)$ o ângulo de vértice em O e de lados OA e OC
Semelhança	$OID \sim OCH$
Medidas	Medidas dos segmentos na figura 40
Por proporção	Utilizando proporcionalidade nos triângulos semelhantes, segue que
Demonstração	$tg\,(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\,\beta\, + tg\,\alpha}{1 - tg\,\beta \cdot tg\,\alpha}$

3.11 Tangente da diferença

A tangente da diferença pode ser representada a partir da tangente da soma, ou seja, a soma do oposto.

Procedimento algébrico

Proposição 13. *Para* $a, b \in \mathbb{R}$*, temos*

$$tg(a-b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \cdot tg\, b}\ ,$$

sempre que $tg(a-b)$ estiver definida.

Demonstração. Entendendo a diferença como a soma do oposto, segue que

$$\begin{aligned} tg(a-b) &= tg(\,a + (-b)) \\ &= \frac{tg\, a + tg\,(-b)}{1 - tg\, a \cdot tg\,(-b)} \\ &= \frac{tg\, a + (-tg\, b)}{1 - tg\, a \cdot (-tg\, b)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$tg(a-b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \cdot tg\, b}$$

□

Tangente da diferença com auxilio da geometria

Proposição 14. *Para* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *e* $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, *temos que,*

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}\ .$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura abaixo. Suponha $\alpha > \beta$. Os triângulos OAD, OAC, OEF e OEC são triângulos retângulos. Sendo assim podemos aplicar sobre estes relações métricas e trigonométricas.

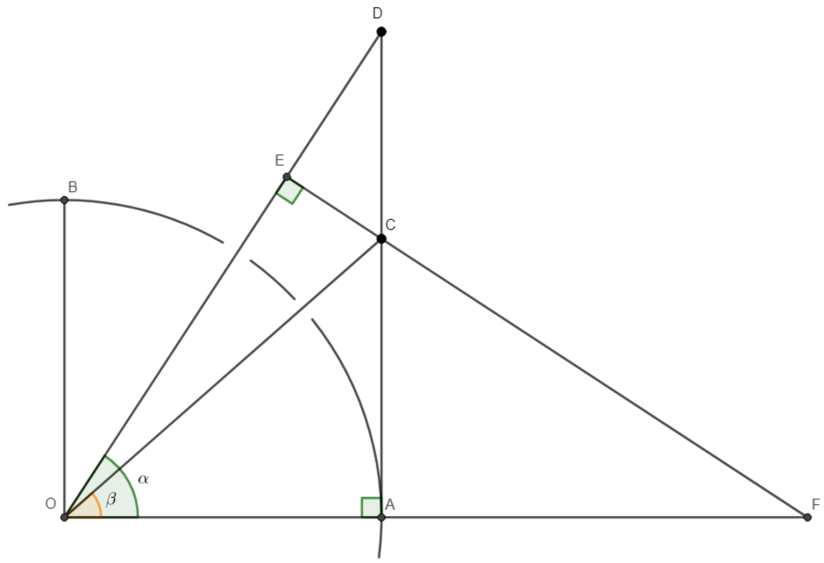

Figura 41: Tangente da diferença.

Sobre o triângulo OAC temos que

$$tg\,\beta \;=\; \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}$$

Segue que

$$\overline{AC} \;=\; tg\,\beta$$

Pelo mesmo raciocínio podemos concluir que,

$$\overline{AD} \;=\; tg\,\alpha$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \overline{AD} - \overline{AC}\\ &= tg\,\alpha - tg\,\beta\end{aligned}$$

Como os triângulos OEF e CAF são semelhantes (caso AA), pois tem ângulo comum $\hat{F}$ e ambos ângulos retos. Sendo assim o ângulo $A\hat{C}F = \alpha$, o que nos permite aplicar a relação da tangente:

$$\begin{aligned} tg\,\alpha &= \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} \\ tg\,\alpha &= \frac{\overline{AF}}{tg\,\beta} \\ \overline{AF} &= tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \end{aligned}$$

Sobre o triângulo OEF, temos que

$$\begin{aligned} cos\,\alpha &= \frac{\overline{OE}}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} \\ \overline{OE} &= cos\,\alpha \cdot (1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta) \end{aligned}$$

Por "OPV", segue que o ângulo $D\hat{C}E = \alpha$, assim podemos aplicar sobre o triângulo retângulo CED a seguinte relação:

$$\begin{aligned} cos\,\alpha &= \frac{\overline{EC}}{\overline{CD}} \\ cos\,\alpha &= \frac{\overline{EC}}{tg\,\alpha - tg\,\beta} \\ \overline{EC} &= cos\,\alpha \cdot (tg\,\alpha - tg\,\beta) \end{aligned}$$

Desta forma denotamos as medidas fundamentais apresentadas na figura 43. O que nos permite concluir que,

$$
\begin{aligned}
tg\,(\alpha - \beta) &= \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}} \\
&= \frac{cos\,\alpha \cdot (tg\,\alpha - tg\,\beta)}{cos\,\alpha \cdot (1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta)} \\
&= \frac{\cancel{cos\,\alpha} \cdot (tg\,\alpha - tg\,\beta)}{\cancel{cos\,\alpha} \cdot (1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta)} \\
&= \frac{(tg\,\alpha - tg\,\beta)}{(1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta)}
\end{aligned}
$$

$\square$

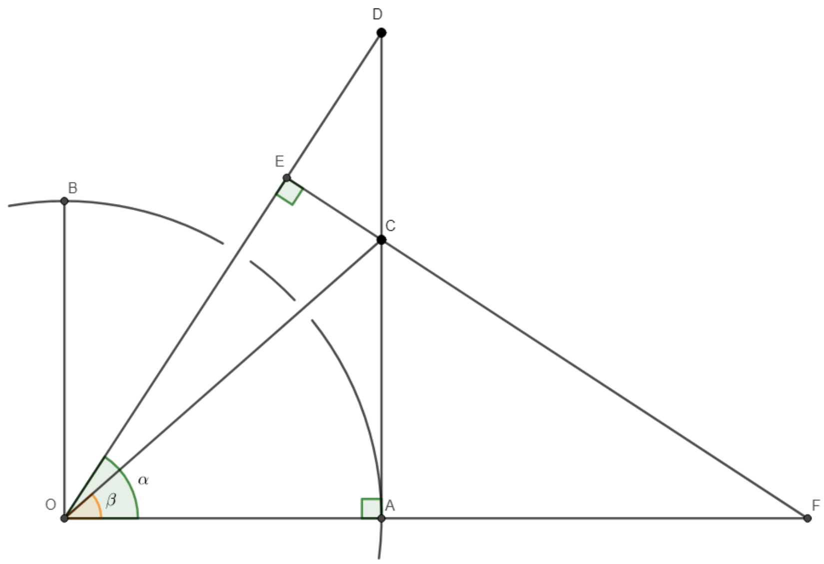

Figura 42: Tangente da diferença.

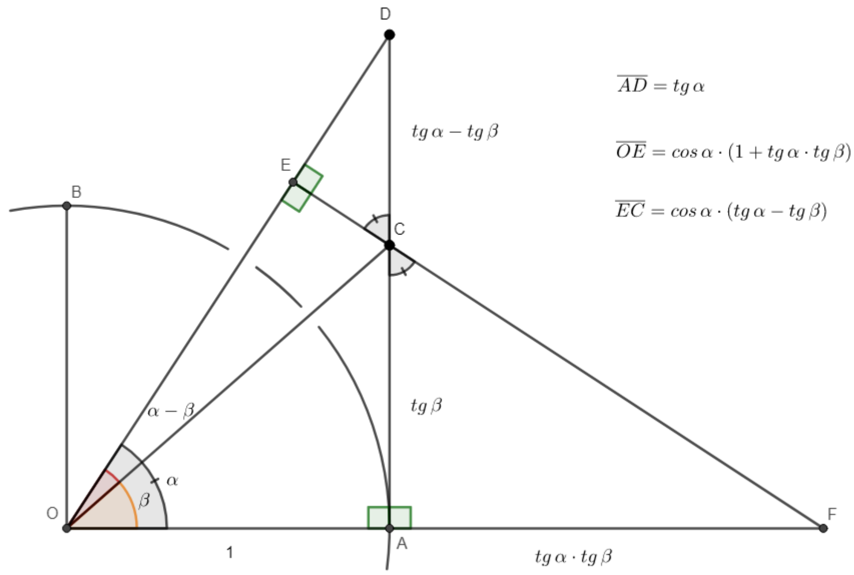

Figura 43: Tangente da diferença - medidas.

Protocolo	Descrição protocolar do procedimento geométrico
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Reta (t)	Trace a reta t perpendicular ao eixo x em A
Ponto D	Marque o ponto D sobre a reta t com $\overline{AD} > 1$
Segmento OD	Trace o segmento $\overline{OD}$
Ângulo (α)	Denote por α o ângulo de vértice em O e de lados OA e OD
Ponto C	Marque o ponto C sobre a reta t e entre os pontos A e D
Segmento OC	Trace o segmento $\overline{OC}$
Ângulo (β)	Denote por β o ângulo de vértice em O e de lados OA e OC
Ângulo $(\alpha - \beta)$	Assim, $\alpha - \beta$ é o ângulo de vértice em O e de lados OC e OD
Reta suporte	Trace a reta suporte perpendicular a OD passando por C
Ponto E	Marque o ponto E na intersecção da reta suporte com OD
Ponto F	Marque o ponto F na intersecção da reta suporte com o eixo x
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo OAD	Temos o triângulo OAD retângulo em A
Triângulo CAF	Temos o triângulo CAF retângulo em A
Triângulo CED	Temos o triângulo CED retângulo em E
Triângulo OEC	Temos o triângulo OEC retângulo em E
Triângulo OAC	Temos o triângulo OAC retângulo em A
Triângulo OEF	Temos o triângulo OEF retângulo em E
Semelhança	$OAD \sim CAF \sim OEF \sim CED$
Medida de OA	$\overline{OA} = 1$
Medidas	Demais medidas conforme figura 43
Tangente de $(\alpha - \beta)$	$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}}$
Tangente de $(\alpha - \beta)$	$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{cos\,\alpha \cdot (tg\,\alpha - tg\,\beta)}{cos\,\alpha \cdot (1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta)}$
Demonstração	$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{(tg\,\alpha - tg\,\beta)}{(1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta)}$

3.12 Tangente do dobro de um arco

Procedimento algébrico

Proposição 15. *Para $a \in \mathbb{R}$, temos:*

$$tg\,2a = \frac{2 \cdot tg\,a}{1 - tg^{\,2}\,a}\ .$$

Para a tangente do dobro de um arco, utilizaremos a tangente da soma com ângulos iguais.

Demonstração. Basta notar

$$\begin{aligned} tg(a+a) &= \frac{tg\,a + tg\,a}{1 - tg\,a \cdot tg\,a} \\ tg\,2a &= \frac{2 \cdot tg\,a}{1 - tg^{\,2}\,a} \end{aligned}$$

□

Tangente do dobro de um arco com auxilio da geometria

Proposição 16. *Para* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *e* $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

$$tg\,(2\alpha) = \frac{2 \cdot tg\,\alpha}{1 - tg^{\,2}\,\alpha}\ .$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura ao lado. Por construção $\beta = 2\alpha$, assim os triângulos OAE e DCE são semelhantes (caso AA), pois tem ângulo em comum $\widehat{E}$ e ângulos retos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ respectivamente.

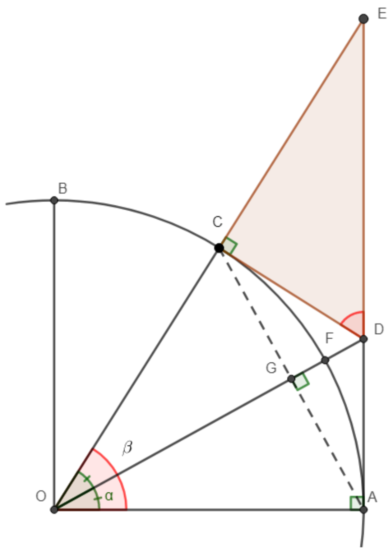

Figura 44: Arco duplo - Tangente.

Temos, pela definição de tangente, que:

$$\overline{AD} = tg\,\alpha$$

e

$$\overline{AE} = tg\,\beta$$

Consequentemente

$$\overline{DE} = tg\,\beta - tg\,\alpha$$

Como AOD e COD são congruentes (caso LAL), temos:

$$\overline{CD} = tg\,\alpha$$

Logo, aplicando a relação trigonométrica tangente no triângulo retângulo DCE, temos:

$$tg\,\beta = \frac{\overline{CE}}{tg\,\alpha}$$

Temos que

$$\overline{CE} = tg\,\beta \cdot tg\,\alpha$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos que

$$(\overline{CE})^2 = tg^2\,\beta \cdot tg^2\,\alpha$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triangulo retângulo DCE, figura 46.

Segue que

$$(\overline{DE})^2 = (\overline{CD})^2 + (\overline{CE})^2,$$

logo

$$
\begin{aligned}
(\overline{CE})^2 &= (\overline{DE})^2 - (\overline{CD})^2 \\
&= (tg\,\beta - tg\,\alpha)^2 - tg^2\,\alpha \\
&= tg^2\,\beta - 2 \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\alpha + \cancel{tg^2\,\alpha} - \cancel{tg^2\,\alpha} \\
&= tg^2\,\beta - 2 \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\alpha
\end{aligned}
$$

Por transitividade, temos que

$$
tg^2\,\beta \cdot tg^2\,\alpha \;=\; tg^2\,\beta - 2 \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\alpha
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
tg^2\,\beta &= tg^2\,\beta \cdot tg^2\,\alpha + 2 \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\alpha \\
&= tg\,\beta\,(tg\,\beta\ \cdot tg^2\,\alpha + 2 \cdot tg\,\alpha)
\end{aligned}
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
tg\,\beta &= tg\,\beta\ \cdot tg^2\,\alpha + 2 \cdot tg\,\alpha \\
2 \cdot tg\,\alpha &= tg\,\beta - tg\,\beta\ \cdot tg^2\,\alpha \\
2 \cdot tg\,\alpha &= tg\,\beta\,(1 - tg^2\,\alpha) \\
\\
tg\,\beta &= \frac{2 \cdot tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}
\end{aligned}
$$

Portanto, como $\beta = 2\alpha$, temos

$$
tg\,(2\dot{\alpha}) = \frac{2 \cdot tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}
$$

$\square$

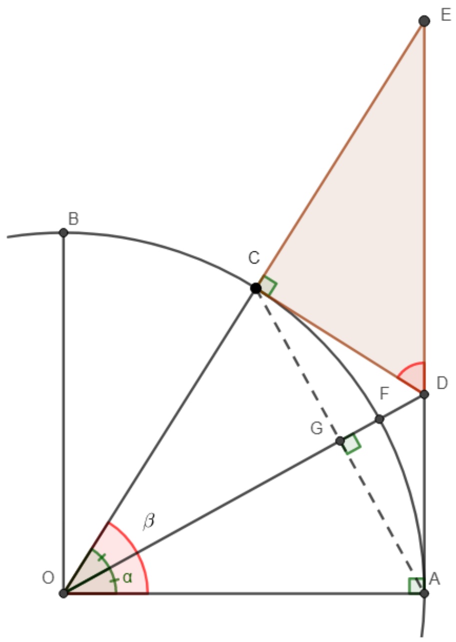

Figura 45: Arco duplo - Tangente.

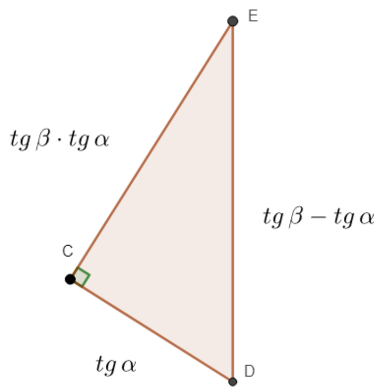

Figura 46: Triângulo DCE.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto C	Marque o ponto C sobre a circunferência Γ no primeiro quadrante
Reta (t)	Trace a reta t perpendicular ao eixo x em A
Segmento OC	Construa o segmento OC
Ângulo (β)	Denote por β o ângulo de vértice em O e de lados OA e OC
Bissetriz	Trace a bissetriz interna do ângulo β
Ponto F	Marque o ponto F na intersecção da bissetriz com Γ
Ponto D	Marque o ponto D na intersecção da bissetriz com a reta t
Segmento OD	Construa o segmento OD
Ângulo (α)	Denote por α o ângulo de vértice em O e de lados OA e OD
Reta suporte	Trace a reta suporte OC
Ponto E	Marque o ponto E na intersecção das reta suporte e da reta t
Segmento CA	Construa o segmento CA
Ponto G	Marque o ponto G na intersecção dos segmentos CA e OD
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo OAE	Temos o triângulo OAE retângulo em A
Triângulo OAD	Temos o triângulo OAD retângulo em A
Triângulo DCE	Temos o triângulo DCE retângulo em C
Semelhança	$OAE \sim DCE$
Medidas de OAE	$\overline{OA} = 1$; $\overline{AE} = tg\,\beta$ e $\overline{OE} = \sqrt{1 + tg^2\,\beta}$
Medidas de DCE	$\overline{DC} = tg\,\alpha$; $\overline{CE} = tg\,\beta \cdot tg\,\alpha$ e $\overline{DE} = tg\,\beta - tg\,\alpha$
Pitágoras	Aplicando o teorema de Pitágoras em DCE, temos
Pitágoras	$tg^2\,\beta \cdot tg^2\,\alpha = tg^2\,\beta - 2 \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\alpha$
Isolando $tg\,\beta$	$tg\,\beta = \dfrac{2 \cdot tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$
Por construção	Como $\beta = 2 \cdot \alpha$, segue que
Demonstração	$tg\,(2\dot{\alpha}) = \dfrac{2 \cdot tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$

3.13 Cotangente de um arco

Proposição 17. *Para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, temos:*

$$cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}\ .$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura 47. Seja o segmento OP de tamanho $\overline{OP} = 1$ e o segmento CP paralelo à reta $\overleftrightarrow{OA}$. Os triângulos OCP e OBD são semelhantes (caso AA) e consequentemente seus lados correspondentes são proporcionais. Temos assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} &= \frac{\overline{CP}}{\overline{BD}} \\
\frac{sen\,\alpha}{1} &= \frac{cos\,\alpha}{cotg\,\alpha} \\
\frac{cotg\,\alpha}{1} &= \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} \\
cotg\,\alpha &= \frac{1}{tg\,\alpha}
\end{aligned}$$

□

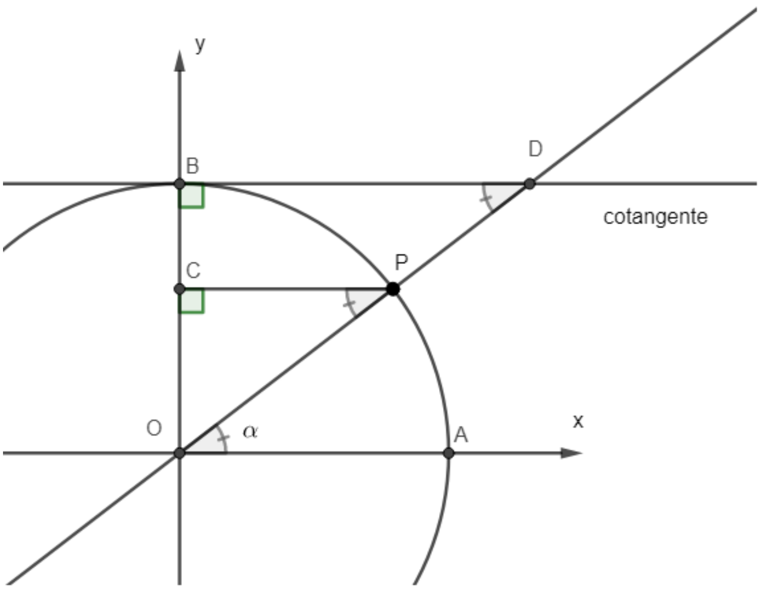

Figura 47: Cotangente.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto P	Marque o ponto P sobre a circunferência Γ no primeiro quadrante
Reta	Trace uma reta paralela ao eixo x em B e denote por cotangente
Ponto C	Pé da perpendicular baixada de P sobre a reta por OB
Reta $\overleftrightarrow{OP}$	Trace uma reta passando pelos pontos O e P
Ponto D	Marque D na intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo cotangente
Ângulo (α)	Denote por α o ângulo de vértice em O e de lados OA e OD
Segmento BD	Trace o segmento BD de comprimento $\overline{BD} = cotg\,\alpha$
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo OBD	Temos o triângulo OBD retângulo em B
Triângulo OCP	Temos o triângulo OCP retângulo em C
Semelhança	Pelo caso AA, temos $OBD \sim OCP$
Medidas de OBD	Medidas dos catetos OB e BD, $\overline{OB} = 1$ e $\overline{BD} = cotg\,\alpha$
Medidas de OCP	Medidas dos catetos OC e CP, $\overline{OC} = sen\,\alpha$ e $\overline{CP} = cos\,\alpha$
Proporção	Aplicando uma propriedade da proporção, a saber
Proporção	$\overline{OC} \cdot \overline{BD} = \overline{OB} \cdot \overline{CP}$
Demonstração	$cotg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$

3.14 Secante de um arco

Proposição 18. *Para* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, *temos:*

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}\ .$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura 48. Sejam o segmento OP de comprimento $\overline{OP} = 1$ e o ponto C é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta por OA. Temos o segmento CP perpendicular a reta $\overleftrightarrow{OA}$, consequentemente, os triângulos OCP e OPS são semelhantes (caso AA) e seus lados correspondentes proporcionais. Temos assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OP}}{\overline{OS}} &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} \\
\frac{1}{sec\,\alpha} &= \frac{cos\,\alpha}{1} \\
\frac{1}{cos\,\alpha} &= \frac{sec\,\alpha}{1} \\
sec\,\alpha &= \frac{1}{cos\,\alpha}
\end{aligned}$$

□

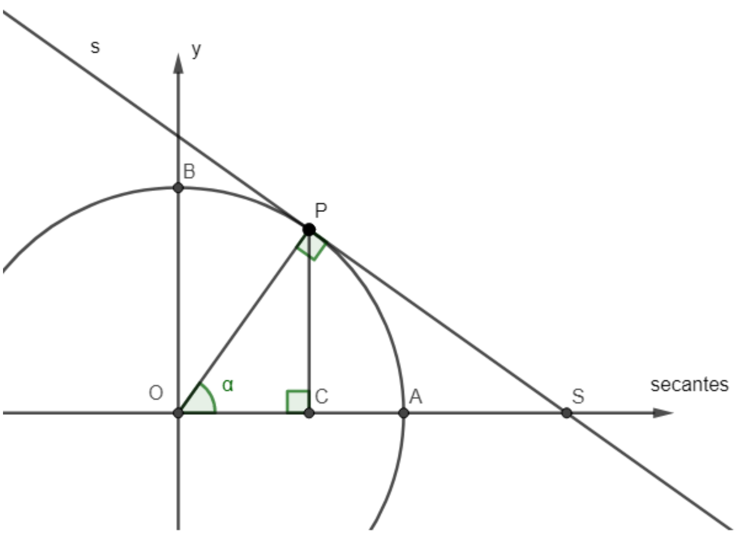

Figura 48: Secante.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto P	Marque o ponto P sobre a circunferência Γ no primeiro quadrante
Ponto C	Pé da perpendicular baixada de P sobre a reta por OA
Reta s	Trace uma reta tangente a Γ em P e denote por s
Eixo x	Denote por eixo das secantes o eixo x
Ponto S	Marque o ponto S na intersecção da reta s com o eixo das secantes
Segmento OP	Trace o segmento OP
Segmento PC	Trace o segmento PC
Ângulo (α)	Denote por α o ângulo de vértice em O e de lados OS e OP
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo OPS	Temos o triângulo OPS retângulo em P
Triângulo OCP	Temos o triângulo OCP retângulo em C
Semelhança	Pelo caso AA, temos $OPS \sim OCP$
Medidas de OPS	Medidas dos lados OP e OS, $\overline{OP} = 1$ e $\overline{OS} = sec\,\alpha$
Medidas de OCP	Medidas dos lados OC e OP, $\overline{OC} = cos\,\alpha$ e $\overline{OP} = 1$
Proporção	Aplicando uma propriedade da proporção, a saber
Proporção	$\overline{OP} \cdot \overline{OP} = \overline{OS} \cdot \overline{OC}$
Demonstração	$sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha}$

3.15 Cossecante de um arco

Proposição 19. *Para* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, *temos:*

$$cossec\, \alpha = \frac{1}{sen\, \alpha} \ .$$

Demonstração. Considere as notações tais como na figura 49. Sejam o segmento OP de comprimento $\overline{OP} = 1$ e o ponto D o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta por OB. Temos o segmento DP perpendicular a reta $\overleftrightarrow{OB}$, consequentemente, os triângulos ODP e OPC são semelhantes (caso AA) e seus lados correspondentes proporcionais. Temos assim,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} &= \frac{\overline{OD}}{\overline{OP}} \\ \frac{1}{cossec\, \alpha} &= \frac{sen\, \alpha}{1} \\ \frac{1}{sen\, \alpha} &= \frac{cossec\, \alpha}{1} \\ cossec\, \alpha &= \frac{1}{sen\, \alpha} \end{aligned}$$

□

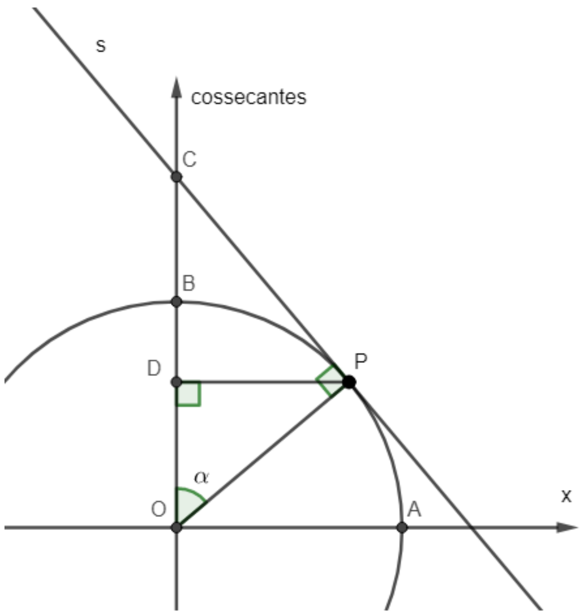

Figura 49: Cossecante.

Protocolo	**Descrição protocolar do procedimento geométrico**
Ponto O	Marque o ponto O na interseção dos eixos coordenados x e y
Circunferência Γ	Construa a circunferência Γ com centro em O e raio 1
Ponto A	Marque o ponto A na interseção da circunferência Γ com o eixo x
Ponto B	Marque o ponto B na interseção da circunferência Γ com o eixo y
Ponto P	Marque o ponto P sobre a circunferência Γ no primeiro quadrante
Ponto D	Pé da perpendicular baixada de P sobre a reta por OB
Reta s	Trace uma reta tangente a Γ em P e denote por s
Eixo y	Denote por eixo das cossecantes o eixo y
Ponto C	Marque o ponto C na intersecção da reta s com o eixo das cossecantes
Segmento OP	Trace o segmento OP
Segmento PD	Trace o segmento PD
Ângulo (α)	Denote por α o ângulo de vértice em O e de lados OC e OP
Protocolo	**Elementos e orientações para o processo de demonstração**
Triângulo OPC	Temos o triângulo OPC retângulo em P
Triângulo ODP	Temos o triângulo ODP retângulo em D
Semelhança	Pelo caso AA, temos $OPC \sim ODP$
Medidas de OPC	Medidas dos lados OP e OC, $\overline{OP} = 1$ e $\overline{OC} = cossec\,\alpha$
Medidas de ODP	Medidas dos lados OD e OP, $\overline{OD} = sen\,\alpha$ e $\overline{OP} = 1$
Proporção	Aplicando uma propriedade da proporção, a saber
Proporção	$\overline{OP} \cdot \overline{OP} = \overline{OC} \cdot \overline{OD}$
Demonstração	$cossec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha}$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento da nossa dissertação, como já mencionado, foi pautado no que tange a formação do programa PROFMAT, observando pressupostos teóricos elencados no capítulo 1.

Buscamos apresentar uma proposta de ensino de algumas *Identidades Trigonométricas* utilizando de demonstrações que tiveram como estrutura sequencial, uma abordagem algébrica, seguida de uma abordagem geométrica e ainda de uma protocolar, essa última se deu por meio de tabela.

Recorremos e decidimos pelas demonstrações atendendo as demandas que o próprio programa (PROFMAT) nos leva a desenvolver. Nesse momento refletimos sobre a presença das demonstrações na educação básica em especial no Ensino Médio. Obtivemos respostas na leitura de Villiers (2001), pressuposto que nos deu indícios sobre alguns problemas acerca do ensino e da aprendizagem das demonstrações e conhecimento sobre seu papel e suas funções no referido período.

Subsidiando nossa hipótese de que as representações geométricas e as representações algébricas são ambas essenciais no processo de apreensão do objeto de estudo *Identidades Trigonométricas*, o artigo da Damm (2012) nos resgatou elementos da teoria de Duval, segundo o qual a apreensão conceitual na Matemática se dá por meio de variadas representações. Nesse sentido fizemos uso de distintas representações no processo de demonstração. Primeiramente uma demonstração algébrica de cada identidade trigonométrica. Observando o *tratamento* que requer essa representação e, por vezes, refletindo sobre o custo que esse tratamento pode ter em especial para o aluno, seguimos com uma segunda proposta, apresentando uma demonstração com auxilio da geometria.

A proposta geométrica tem origem em certos processos cognitivos no entorno de uma representação semiótica: a *formação*, o *tratamento* e a *conversão*. A *formação* é a construção de uma representação com uso de imagem que atenda as demandas da referida identidade trigonométrica que será desenvolvida. O *tratamento* é um desenvolvimento procedimental que obedece a regras próprias e internas de uma representação. Aqui por vezes nos levou a caminhos do uso das relações métricas como o Teorema de Pitágoras, ou da semelhança de triângulos. A *conversão* se estabelece a partir de um processo de complementaridade entre as representações geométricas e algébricas. Essas conversões ocorreram por muitas vezes ao longo das demonstrações neste trabalho, o que nos permitiu refletir sobre o custo e as limitações dos processos geométricos e algébricos.

O uso do protocolo em forma de tabela, presente neste trabalho, tem por finalidade subsidiar as construções em software de geometria dinâmica, possibilitando sua reconstrução e ressignificando a relação da imagem com as demonstrações. Todas as representações geométricas foram feitas no GeoGebra.

5 CONCLUSÃO

Nosso trabalho, que faz parte da conclusão do curso PROFMAT, teve como objetivo compreender as *Identidades Trigonométricas* por meio de demonstrações geométricas e aritméticas no intuito de pensar estratégias e métodos para tratar desse tema no contexto de sala de aula no nível do ensino básico. A fim de sustentar seu desenvolvimento, recorremos a estudo de artigos, materiais e documentos que deram suporte teórico.

As hipóteses iniciais dizem respeito a tratar de um mesmo objeto de estudo com mais de uma representação. Desenvolvemos assim, uma proposta que apresentasse nosso objeto de estudo através de representações aritméticas e geométricas, respeitando o *tratamento* que cada representação requer e possibilita, realizando *conversões* quando necessário e utilizando do processo de *complementaridade* que julgamos por vezes indispensável para uma melhor apreensão da identidade trigonométrica que estava sendo estudada.

Buscamos, assim, desenvolver demonstrações de algumas *identidades trigonométricas* com o apoio das linguagens geométricas e aritméticas e, ainda, procurando esclarecer o dinamismo no processo das demonstrações, elaboramos um protocolo de construção das figuras geométricas e do desenvolvimento das demonstrações. Recorremos as demonstrações a fim de trazer mais significado ao *objeto de estudo*. Para isso, utilizamos da complementaridade entre as representações geométrica e aritmética, utilizamos ainda de tecnologia, com o uso de software de geometria dinâmica (GeoGebra) e criamos um protocolo com orientações procedimentais quanto à construção das figuras e à percepção dos elementos geométricos utilizados na demonstração.

Nossas demonstrações buscaram através de representações diferentes, levar ao aluno e aos professores do ensino básico, um ressignificado das identidades trigonométricas, explorando um processo de explicação e sistematização dessas demonstrações, não deixando de considerar os demais papéis e funções que elas podem assumir.

Esperamos que cada demonstração desenvolvida aqui, possa contribuir também para que docentes venham a aplicá-las em sala de aula, seja de maneira direta ou através de uma sequência didática investigativa por parte do educando, como elemento de melhor compreensão do objeto de estudo. Ainda mais, esperamos que esse trabalho venha a proporcionar possibilidades e interesses de futuras pesquisas.

Referências

[BNCC 2018] BNCC: *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018

[Damm 2012. p. 177 – 182] DAMM, R.: *Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Educação Matemática: Uma (nova) Introdução. 3 ed.* São Paulo, 2012. p. 177 - 182

[Mendes 2014] MENDES, C.: *Demonstrações Trigonométricas Via Geometria Plana*. Goiás: PROFMAT - UFG, 2014

[Muniz Neto 2013] MUNIZ NETO, Antônio C.: *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013

[Villiers 2001] VILLIERS, M. D.: *Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. Educação e Matemática - APM, Portugal, n. 62, p. 31-36*. Portugal, 2001