Universidade Federal de São Paulo
Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas
Campus Diadema

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE ENSINO CONTEXTUALIZADA, UTILIZANDO PLANILHAS ELETRÔNICAS

Simone Tanaka de Almeida Prado Campos

Orientadora: Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão

DIADEMA
2021

SIMONE TANAKA DE ALMEIDA PRADO CAMPOS

MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE ENSINO CONTEXTUALIZADA, UTILIZANDO PLANILHAS ELETRÔNICAS

Dissertação apresentada, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas da Universidade Federal de São Paulo – Campus Diadema.

DIADEMA

2021

Dados Internacionais da Catalogação na Publicação (CIP)

Campos, Simone Tanaka de Almeida Prado
Matemática financeira no ensino médio: uma proposta de ensino contextualizada, utilizando planilhas eletrônicas / Simone Tanaka de Almeida Prado Campos. – – Diadema, 2021.
128 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São Paulo - Campus Diadema, 2021.

Orientadora: Gleiciane da Silva Aragão

1. Matemática financeira. 2. Ensino médio. 3. Atividades contextualizadas. 4. Planilhas eletrônicas. 5. Aluno protagonista. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas, Campus Diadema da Universidade Federal de São Paulo, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Universidade Federal de São Paulo

Instituto de Ciências Ambientais, Químicas e Farmacêuticas

Campus Diadema

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Chefe de Departamento:
Prof. Dr. Renato Marcone José de Souza

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Renato de Sá Teles

Simone Tanaka de Almeida Prado Campos

Matemática financeira no ensino médio: uma proposta de ensino contextualizada, utilizando planilhas eletrônicas

Presidente da Banca:

____

Profa. Dra. Gleiciane da Silva Aragão – UNIFESP

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra – UFPB

____

Profa. Dra. Pricila da Silva Barbosa – UTFPR

____

Prof. Dr. Leonardo Sioufi Fagundes dos Santos – UNIFESP

Discente do Mestrado:

____

Simone Tanaka de Almeida Prado Campos

Data da Defesa: 22/12/2021

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente ao João, que neste semestre deixou os seus próprios projetos de lado para se dedicar a nossa filha e me dar tempo para que eu pudesse concluir esse trabalho.

A minha mãe, que sempre acreditou em mim e esteve comigo para o que fosse necessário.

A Pilar, cuja a simples existência me fez querer ser uma pessoa melhor e começar esse curso.

Ao professor Denis, meu companheiro de trabalho, cujo curso me inspirou a escolher esse tema, a quem sou muito grata por toda ajuda.

Aos meus professores e colegas do PROFMAT, que estiveram ao meu lado e me ensinaram tanto ao longo dos últimos 4 anos. Principalmente a professora Gleiciane, que me incentivou e que mesmo nos momentos mais difíceis não me deixou desistir.

Meus sinceros agradecimentos a todos que me ajudaram a realizar esse sonho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

A complexa situação financeira em que se encontra grande parte das pessoas no nosso país nos faz refletir sobre a necessidade de instruir melhor os nossos jovens para que eles tenham uma vida econômica mais saudável e equilibrada. Por sua vez, a docência desafia o professor a utilizar práticas pedagógicas que contribuam para o alcance da aprendizagem dos alunos. Dessa forma, os objetivos deste trabalho são: conscientizar os professores da necessidade de ensinar matemática financeira com foco na realidade do aluno; incentivar a inserção de novas tecnologias no ensino da matemática financeira; e fornecer material teórico e prático, com o intuito de ajudar o professor a alcançar a meta de ministrar esse conteúdo de forma que faça sentido no universo do estudante. Com o intuito de fornecer para os professores do ensino médio uma fonte de material teórico sobre cálculo financeiro, iniciamos o trabalho com um estudo sobre a origem e a evolução do dinheiro, depois fazemos algumas considerações sobre os principais pré-requisitos da matemática financeira, e em seguida apresentamos os conceitos específicos da área. Por fim, apresentamos uma sequência didática de quatro atividades voltadas para o cotidiano do aluno, tais como conversão de moeda, cálculo de impostos, cálculo de salário, e inflação e poupança, utilizando planilhas eletrônicas e metodologias ativas. Tais ferramentas colocam o aluno como protagonista do processo de ensino aprendizagem, visando proporcionar uma visão nova sobre a matemática financeira, que contribua para despertar o interesse em aprender e avançar nos estudos desse tópico da matemática que está tão presente no nosso dia a dia

Palavras chaves: Matemática financeira. Ensino médio. Atividades contextualizadas. Planilhas eletrônicas. Aluno protagonista.

ABSTRACT

The complex financial situation in which most people in our country find themselves makes us reflect on the need to better instruct our young people so that they have a healthier and more balanced economic life. In turn, teaching challenges the teacher to use pedagogical practices that contribute to the achievement of student learning. Thus, the objectives of this work are: make teachers aware of the need to teach financial mathematics focusing on the student's reality; encourage the inclusion of new technologies in the teaching of financial mathematics; and provide theoretical and practical material in order to help the teacher achieve the goal of teaching this content in a way that makes sense in the student's universe. In order to provide for high school teachers a source of theoretical material on financial calculus, we start the work with a study of the origin and evolution of money, later we make some considerations about the main prerequisites of financial mathematics, and then we present the specific concepts of the area. Finally, we present a didactic sequence of four activities, focused on the student's daily life, such as currency conversion, tax calculation, salary calculation, and inflation and savings, using electronic spreadsheets and active methodologies. Such tools put the student as the protagonist of the teaching-learning process, aiming to provide a new view on financial mathematics, that contributes to awaken interest in learning and advance in the studies of this topic of mathematics which is so present in our day to day.

Keywords: Financial math. High school. Contextualized activities. Electronic spreadsheets. Protagonist student.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Percentual de famílias endividadas. 15
Figura 2 – Sistemas de coordenadas cartesianas. 34
Figura 3 – Localização de pontos no sistema de coordenadas cartesianas. 35
Figura 4 – Representação do gráfico de uma função. 37
Figura 5 – Representação de uma relação que não é função. 38
Figura 6 – Três pontos colineares no gráfico de uma função afim. 41
Figura 7 – Gráficos de quatro funções afins. 42
Figura 8 – Representação geométrica de uma PA na reta real. 48
Figura 9 – Gráfico da função exponencial (crescente ou decrescente). 54
Figura 10 – Gráfico de duas funções inversas. 60
Figura 11 – Gráfico de duas funções logarítmicas. 62
Figura 12 – Montante: juros simples. 70
Figura 13 – Montante: juros compostos. 72
Figura 14 – Montante: formas de pagamentos equivalentes. 73
Figura 15 – Esquema de série uniforme de pagamento postecipado. 80
Figura 16 – Série de pagamento postecipado antes do primeiro pagamento. 81
Figura 17 – Série de pagamento postecipado no último pagamento. 82
Figura 18 – Esquema de série uniforme de pagamento antecipado. 83
Figura 19 – Série de pagamento antecipado antes do primeiro pagamento. 84
Figura 20 – Série de pagamento antecipado no último pagamento. 85
Figura 21 – Esquema de série uniforme diferida. 86
Figura 22 – Esquema de série uniforme infinita. 88
Figura 23 – Sistema de amortização SAC do Exemplo 4.27. 92
Figura 24 – Sistema de amortização PRICE do Exemplo 4.30. 95
Figura 25 – Maior e menor lucro percentual e média do lucro percentual. 101
Figura 26 – Preço real de custo e lucro percentual bruto. 101
Figura 27 – Lucro percentual do produto nacional e do produto importado. 102
Figura 28 – Valor pago de IPTU. 106
Figura 29 – Valor pago de IPVA. 107

Figura 30 – Financiamento. 108
Figura 31 – Custo da empresa. 113
Figura 32 – Salário líquido. 115
Figura 33 – A perda do poder de compra do dinheiro: perspectiva 1. 122
Figura 34 – A perda do poder de compra do dinheiro: perspectiva 2. 123
Figura 35 – Investimento na caderneta de poupança. 123
Figura 36 – Análise do investimento na caderneta de poupança. 124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sistema de amortização SAC do Exemplo 4.27. 91
Tabela 2 – Sistema de amortização PRICE do Exemplo 4.30. 94
Tabela 3 – Porcentagem de desconto do INSS a partir de janeiro de 2021. 113
Tabela 4 – Desconto do Imposto de Renda. 114
Tabela 5 – Classificação em função do ganho real. 116
Tabela 6 – Cálculo do imposto de renda sobre os salários. 117
Tabela 7 – Imposto de renda ano-calendário de 2015. 117
Tabela 8 – Preços médios por unidade. 125

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 CONTEXTO HISTÓRICO E ATUAL 21

2.1 A origem da moeda 22

2.2 A origem dos bancos 23

2.3 Alguns conceitos contemporâneos da matemática financeira 25

2.3.1 Mercado financeiro 25

2.3.2 Inflação, correção monetária e indexadores 26

2.3.3 Políticas econômicas 27

2.3.4 Tipos de investimento 28

2.3.5 Carga tributária 30

3 FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA 32

3.1 Noções sobre conjuntos 32

3.2 Coordenadas cartesianas 33

3.3 Produto cartesiano 35

3.4 Função e gráfico de uma função 36

3.5 A função afim 38

3.5.1 O gráfico de função afim 40

3.5.2 Função linear 43

3.5.3 Caracterização de uma função afim 45

3.5.4 Funções afins e progressões aritméticas 47

3.6 Função exponencial 50

3.6.1 Potências de expoente racional 50

3.6.2 A função exponencial e o seu gráfico 51

3.6.3 Caracterização da função exponencial 54

3.6.4 Funções exponenciais e progressões geométricas 57

3.7 Função logarítmica 59

3.7.1 Função inversa 59

3.7.2 A função logarítmica e o seu gráfico 60

3.7.3 Caracterização das funções logarítmicas 63

4 TÓPICOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA 66

4.1 Juros 66

4.1.1 Juros simples 68

4.1.2 Juros compostos 71

4.2 Taxa de juros 74

4.2.1 Taxas proporcionais 74

4.2.2 Taxas equivalentes 75

4.2.3 Taxas efetivas 76

4.2.4 Taxas nominais 76

4.2.5 Taxas aparente e real 77

4.3 Séries uniformes 78

4.3.1 Séries uniformes de pagamentos postecipados 79

4.3.2 Séries uniformes de pagamentos antecipadas 82

4.3.3 Séries uniformes de pagamentos diferidas 85

4.3.4 Séries uniformes infinitas – Perpetuidades 88

4.4 Sistemas de amortização 89

4.4.1 Sistemas de Amortização Constante (SAC) 89

4.4.2 Sistemas de Amortização Francês (Sistema PRICE) 93

5 PROPOSTAS DIDÁTICAS 97

5.1 Plano de Aula 1 – Conversão de moeda 98

5.1.1 Informações iniciais da Aula 1 98

5.1.2 Descrição da Aula 1 99

5.1.3 Roteiro da Aula 1 100

5.2 Plano de Aula 2 – Cálculo de impostos 103

5.2.1 Informações iniciais da Aula 2 103

5.2.2 Descrição da Aula 2 104

5.2.3 Roteiro da Aula 2 105

5.3 Plano de Aula 3 – Cálculo de salário 109

5.3.1 Informações iniciais da Aula 3 109

5.3.2 Descrição da Aula 3 110

5.3.3 Roteiro da Aula 3 110

5.4 Plano de Aula 4 – Inflação e poupança 118

5.4.1 Informações iniciais da Aula 4 118

5.4.2 Descrição da Aula 4 119

5.4.3 Roteiro da Aula 4 119

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 126

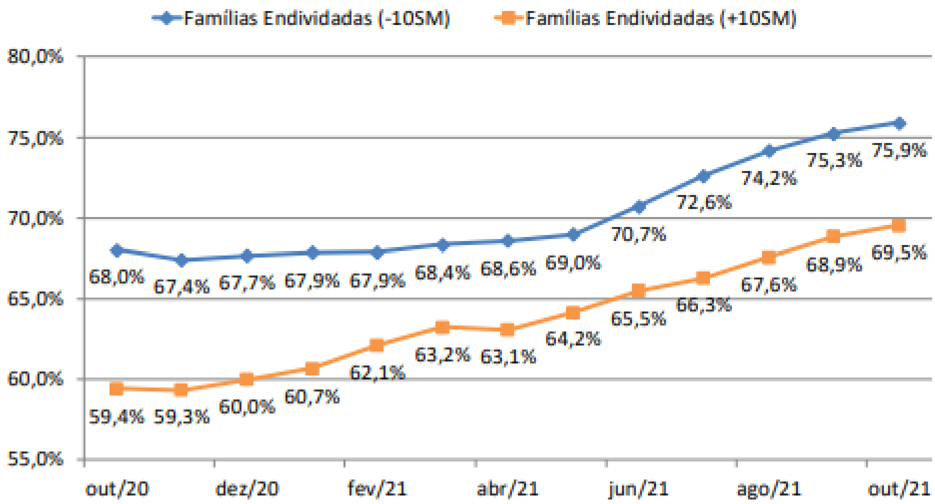
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 129

1 INTRODUÇÃO

É indiscutível a importância de se aprender como lidar de uma forma mais responsável com o dinheiro e conhecer de forma mais aprofundada as operações financeiras básicas, para que os cidadãos possam otimizar o orçamento familiar e construir uma estabilidade econômica.

De acordo com a pesquisa sobre Endividamento e Inadimplência do Consumidor (Peic) de outubro de 2021, realizada pela Confederação Nacional do Comércio, 74,6% das famílias brasileiras relatam ter dívidas a vencer (cartão de crédito, cheque pré-datado, crédito consignado, cheque especial, prestação de casa e carro, empréstimo pessoal, carnê de loja), 25,6% relatam ter dívidas em atraso e 10,1% dizem não ter condições de pagar suas dívidas. A recente alta nos juros fez com que esse número de inadimplentes crescesse muito nos últimos tempos, conforme podemos ver na Figura 1, que mostra o percentual de famílias endividadas que ganham acima de 10 salários mínimos e abaixo de 10 salários mínimos.

Figura 1 – Percentual de famílias endividadas.



Fonte: Portal do Comércio (2021), p. 2.

A pesquisa aponta que as famílias têm em média 27,3% da renda familiar comprometida para o pagamento de dívidas, que 38,8% das famílias têm dívidas para os próximos 12 meses e que 41,3% das famílias pesquisadas estão com dívidas atrasadas há mais de 90 dias. Diante deste contexto nacional, vemos que é emergencial falar sobre educação financeira, fiscal e previdenciária nas escolas de educação básica, para ajudar a desenvolver nas futuras gerações uma cultura de prevenção de dívidas, planejamento familiar, investimentos, e de consumo consciente.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017 para o ensino fundamental e em 2018 para o ensino médio, coloca a educação financeira como um tema contemporâneo transversal que deve ser trabalhado nas diferentes disciplinas em toda a educação básica. A BNCC, Brasil (2018) (ver referência 2), sugere o estudo de conceitos básicos de finanças e economia, como inflação, taxa de juros, impostos e aplicações financeiras. Com o objetivo de ajudar no desenvolvimento da cidadania, formando um cidadão mais crítico, consciente e autônomo, capaz de tomar boas decisões nos campos financeiro e econômico. Ainda de acordo com Brasil (2018) (ver referência 2):

> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. (BRASIL, 2018, p. 299)

Neste sentido, é necessário criar um projeto pedagógico que viabilize a sistematização dos conceitos estudados em matemática financeira para que tenham um real significado para os alunos, com aplicações no cotidiano dos estudantes e da sua família. Buscamos despertar no aluno mais do que conhecimento de cálculo financeiro, mas também uma visão questionadora, para que ele seja capaz de analisar corretamente os problemas relacionados ao dinheiro, que venham a se apresentar ao longo da vida.

O ensino tradicional é aquele em que o professor é tido como único detentor de conhecimento e transmite os seus conhecimentos para os alunos, normalmente através de aulas expositivas. Segundo Paiva (2016) (ver referências 15 e 16), na sociedade atual os procedimentos de ensino se colocam no mesmo patamar de importância que os conteúdos a serem ensinados, pois estes conteúdos têm a função de informar, enquanto a metodologia tem a missão de formar o estudante. Ela é capaz de transformar o aluno em uma pessoa mais livre, confiante, crítica, disciplinada, responsável e cooperativa, quando bem aplicada. As *metodologias ativas* são um conjunto de práticas pedagógicas que têm o aluno como centro, que através de pesquisa, investigação e interação com os pares, constroem o conhecimento e o pensamento crítico. Nesse contexto, o professor deve propor problemas que façam parte da realidade do aluno e incentivá-lo a “pensar, refletir, formar e expressar sua própria opinião, sem precisar abandonar os conhecimentos particulares da disciplina” (PAIVA, 2016, p. 16).

Neste trabalho, vamos elencar brevemente algumas dessas metodologias, com o intuito de sugerir algumas alternativas que possam complementar o ensino tradicional. Essas metodologias são uma forma de ensino que incentivam o aluno a ter um papel mais ativo na própria aprendizagem, ao invés de ficar sentado passivamente em uma cadeira enquanto o professor fala coisas sobre um assunto qualquer. Nela, o estudante realizará ativamente uma tarefa com o intuito de estimulá-lo a pensar, debater e a ter iniciativa de aprender.

Existem várias metodologias ativas, mas neste trabalho, vamos focar no método de problematização (MP), na aprendizagem baseada em problemas (*problem-based learning* – PBL) e na aprendizagem baseada em equipe (*team-based learning* – TBL).

Tanto na PBL quanto no MP a aprendizagem se dá através da realização de problemas. No MP, os problemas são tirados da realidade pela observação dos alunos, e na PBL eles são elaborados pelo professor com o intuito de chegar a um conhecimento curricular específico.

De acordo com Vieira e Panúncio-Pinto (2015) (ver referência 23), o método da problematização tem como principal objetivo desenvolver o pensamento reflexivo. Ele se desenvolve em 5 etapas:

1- Observar a realidade a partir de um conteúdo e elencar um ou mais problemas a serem resolvidos;
2- Determinar os pontos-chave e quais as possíveis alternativas para solução;
3- Busca de informações e conhecimentos que possam ajudar a esclarecer o problema;
4- Levantamento de hipóteses críticas e criativas para a situação, com vista em todos os ângulos possíveis para a questão;
5- Aplicação à realidade, formalização e discussão dos resultados obtidos.

Nesse método, o professor assume um papel de orientador, ajudando o aluno a chegar ao lugar esperado. Ainda de acordo com Vieira e Panúncio-Pinto (2015) (ver referência 23):

> A MP requer a dedicação de mais tempo para o ensino e para as atividades extramuros, exigindo a disponibilidade do professor para pesquisar, acompanhar e cooperar no aprendizado crítico do estudante, num processo compartilhado de construção do conhecimento. Tudo isso vai exigir do professor disponibilidade para lidar com situações imprevistas, habilidade para promover e participar do diálogo, paciência e segurança emocional para trabalhar com os estudantes, capacidade de sistematizar as informações e cuidado para dar um feedback imediato para a solução do problema. (VIEIRA; PANÚNCIO-PINTO, 2015, p. 244)

Segundo Rodrigues e Figueiredo (1996) (ver referência 20), o PBL é uma metodologia de ensino em que o assunto é apresentado a partir de um problema simulado ou real. Diante da questão proposta, o estudante desenvolve meios para resolvê-lo, e neste processo identifica e tenta preencher as lacunas no seu conhecimento. A sua principal característica é desenvolver no estudante as habilidades de administrar o próprio aprendizado, integrando, identificando e explorando novas áreas. Neste processo, o aluno desenvolve a habilidade de pensar criticamente e aplicar os conhecimentos no seu cotidiano.

Na aprendizagem baseada em equipes, o aluno tem um papel central, pois precisa pesquisar e discutir seus resultados com os colegas. Nesse processo ocorre uma ajuda mútua e o aprendizado e o ensino ocorrem simultaneamente. O professor deve formar os grupos heterogêneos, em que as habilidades dos alunos se complementem. O professor deve supervisionar o trabalho e garantir que todos possam expressar as suas ideias e, eventualmente, intervir para ajudar o grupo a alcançar o objetivo. Além do conteúdo, esse método busca desenvolver a oratória, colaboração, empatia e autoconfiança dos estudantes.

A BNCC também destaca a importância de se incorporar as tecnologias digitais da informação e comunicação, que são conhecidas por TDICs, aos planos de ensino, com o intuito de incentivar aprendizagens mais significativas e promover metodologias de ensino ativas, onde o aluno possa ser protagonista da construção do próprio conhecimento e, assim, despertar um maior engajamento e interesse dos mesmos.

> [...] a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. [..] (BRASIL, 2018, p. 528)

Neste trabalho, a tecnologia adotada será as planilhas eletrônicas. O uso de planilhas eletrônicas na resolução de problemas que envolvam a matemática financeira tem a intenção de torná-la mais clara e menos trabalhosa, dadas as inúmeras funções oferecidas pelo software, além de tornar as aulas mais criativas e dinâmicas, colocando o professor no papel de mediador e o aluno no centro da construção do saber. Desse modo, espera-se preparar melhor o estudante para a vida em sociedade e para o mercado de trabalho.

Com base nas considerações acima e de acordo com a experiência que adquiri ao longo dos meus 20 anos de magistério, e de relatos dos meus colegas de trabalho, pude perceber que a matemática financeira é abordada nas escolas de forma muito superficial e descontextualizada, focando apenas na memorização e aplicação de fórmulas. Diante disso, os objetivos deste trabalho são: conscientizar os professores da necessidade de se ensinar esse assunto com foco na realidade do aluno; incentivar a inserção de novas tecnologias no ensino da matemática financeira; e fornecer material teórico e prático com o intuito de ajudar o professor a alcançar a meta de ministrar esse conteúdo de forma que faça sentido no universo do estudante.

Esta dissertação de mestrado trata-se de uma pesquisa teórica e foi desenvolvida por meio de pesquisa bibliográfica em livros, artigos científicos, revistas, dissertações e teses sobre matemática financeira, educação financeira e ensino de matemática e o uso de tecnologias aplicadas à área, além de consulta na BNCC. Como é um assunto muito explorado, foi possível ter acesso a uma diversidade de referenciais teóricos, dessa forma podemos compará-los, revisar e sintetizar o que achamos mais relevante.

A estrutura deste trabalho de dissertação é a seguinte:

- Capítulo 1: este é o primeiro capítulo, a introdução, onde mostramos as motivações, objetivos, metodologia e justificativas pela escolha do assunto;

- Capítulo 2: apresentaremos a história da matemática financeira, contando a evolução história de como a sociedade lida com o dinheiro;

- Capítulo 3: abordaremos os pré-requisitos matemáticos básicos para o estudo de matemática financeira, são eles: função afim, função exponencial, função logarítmica, progressões aritméticas e geométricas;

- Capítulo 4: estudaremos os principais conceitos da matemática financeira, são eles: juros simples, juros compostos, taxas de juros, séries uniformes e sistema de amortização;

- Capítulo 5: apresentaremos sugestões de propostas didáticas para o professor do ensino médio. Mais precisamente, serão elaborados quatro planos de ensino, utilizando planilhas eletrônicas e metodologias ativas, sobre os seguintes temas: conversão de moeda, cálculo de impostos, cálculo de salário e inflação e poupança;

- Capítulo 6: veremos as considerações finais deste trabalho.

2 CONTEXTO HISTÓRICO E ATUAL

Neste capítulo, iremos apresentar um breve resumo sobre o surgimento e a evolução do dinheiro e das relações comerciais e financeiras. Para mais detalhes dos conteúdos apresentados neste capítulo, consultar Gonçalves (2005), Grando e Scheneider (2010), Ifrah (1997), Miguel e Miorim (2004) e Robert (1989) (ver referências 4, 5, 6, 13 e 19, respectivamente).

Estudar a história é de considerável importância, não só para o aluno conhecer os acontecimentos do passado, mas para entender como esses fatos influenciaram na construção do conhecimento que temos hoje, e assim poder se posicionar diante dele de maneira crítica. Ao estudar a história da matemática, mostramos ao aluno que ela é uma criação humana, observando que ela vai se construindo de acordo com as necessidades de cada cultura, modificando-se através dos tempos. Segundo Miguel e Miorim (2004) (ver referência 13):

> A história deve ser o fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática. Assim, pode promover uma aprendizagem significativa, pois propicia ao estudante entender que o conhecimento matemático é construído historicamente a partir de situações concretas e necessidades reais. (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 12)

Um dos objetivos do estudo da história é dar subsídios ao professor para desenvolver os conteúdos matemáticos de forma menos abstrata e mais atraente aos alunos, enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem. Segundo Brasil (2018) (ver referência 2):

> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da matemática. (BRASIL, 2018, p. 295)

Tendo isso em vista, vamos estudar a origem da matemática financeira, desde as primeiras trocas comerciais, passando pelo uso de troca de equivalências, o surgimento da moeda e dos bancos, até os conceitos mais atuais, a exemplo dos juros.

2.1 A origem da moeda

Segundo Grando e Scheneider (2010) (ver referência 5), a história da matemática financeira está intrinsicamente ligada ao comércio. Nas civilizações mais primitivas, o homem se deslocava muito em busca de alimento e em resposta às mudanças climáticas, e retiravam da natureza apenas o que podiam carregar, o que demonstra que o comércio praticamente não existia. À medida que o homem se fixou a terra e passou a produzir mais do que consumia de um determinado produto, surgiu a necessidade de tocar mercadorias, que foi denominada por escambo. Nele, não existia uma “moeda” e nem uma grande preocupação com a equivalência de valores, pois cada um dava o que possuía em excesso.

Com o aumento da comunicação entre os povos e uma maior necessidade de trocas de mercadorias, o escambo se tornou uma prática problemática, pois nem sempre era fácil chegar a um acordo conveniente para ambas as partes. As discussões poderiam levar dias, finalizando sem acordo algum. Sentiu-se, então, a necessidade se estabelecer um sistema estável de equivalências, com unidades chamadas de “moedas-mercadorias” ou “padrões fixos”.

A primeira “moeda-mercadoria” utilizada foi o boi, pois apresentava vários pontos positivos, tais como: locomoção própria, reprodução e prestação de serviços. Segundo Ifrah (1997) (ver referência 6):

> A primeira unidade de escambo admitida na Grécia pré-helênica foi o boi. No século VIII a. C., na Ilíada de Homero (XXIII, 705, 749-751 e VI, 236), uma mulher hábil para mil trabalhos é assim avaliada em 4 bois, a armadura de bronze de Glauco em 9 bois e a de Diomedes (que era de ouro) em 100 bois; ademais numa lista de recompensas, veem-se suceder-se, na ordem dos valores decrescentes, uma copa de prata cinzelada, um boi e meio talento de ouro. (IFRAH, 1997, p. 146)

Outros produtos também foram usados como moeda, a exemplo do sal, devido ao seu uso na conservação dos alimentos. Em algumas ilhas do pacífico foram usados conchas e colares de pérolas. Na América Central, algodão, cacau e cerâmica. À medida que o comércio se desenvolvia, esse método começou a apresentar dificuldades, devido às distâncias e ao estado perecível de alguns materiais. O desenvolvimento do metal e sua utilização na fabricação de utensílios rapidamente o tornou a “moeda de troca” preferida dos mercadores. As mercadorias passaram a ser avaliadas pelo peso, cada uma se referindo a um peso-padrão relativo a algum metal (ouro, prata, cobre, bronze, etc.). Segundo Gonçalves (2005) (ver referência 4):

> Até aquele momento não somente tratava-se de um simples escambo, mas também um verdadeiro sistema econômico. A partir de então, graças ao padrão de metal, as mercadorias passaram a não mais ser trocadas ao simples prazer dos contratantes ou segundo usos consagrados frequentemente arbitrários, mas em função de seu justo preço. Em suma, tratava-se somente de introduzir nas transações e nos atos jurídicos uma espécie de peso-padrão, unidade de valor à qual o preço de cada uma das mercadorias ou ações consideradas era referido. Partindo desse princípio, tal metal ou outro poderia servir em toda ocasião, tais como salário, multa ou como valor de troca. No caso da multa, por exemplo, era exercido algum tipo de cálculo de juro primário, para se obter um novo valor para a mesma. (GONÇALVES, 2005, p. 04)

De acordo com Ifrah (1997) (ver referência 6):

> No final das contas, a moeda de troca (no sentido moderno do termo) fez sua aparição quando o metal foi fundido em pequenos lingotes ou peças, facilmente manejáveis, de um peso igual e selados com a marca oficial de uma autoridade pública, a única habilitada a certificar “o bom peso e o bom quilate”. (IFRAH, 1997, p. 151)

2.2 A origem dos bancos

Com as navegações o comércio chegou ao seu auge, e neste momento a figura do mercador assumiu um novo papel: o comércio do próprio dinheiro. Como o comércio era feito entre países diferentes, muitas vezes as moedas precisavam ser cambiadas, pois a quantidade de ouro que havia na moeda de um país era diferente da quantidade de ouro que havia na moeda de outro país, e quando um viajante estava em outro país precisava da moeda nacional. Com o passar do tempo, alguns comerciantes adquiriram muito conhecimento sobre as moedas e passaram a acumulá-las em grandes quantidades, fazendo surgir a figura do cambista, que era responsável, exclusivamente, pelo comércio do dinheiro.

Como naquela época as instituições responsáveis pela segurança social do indivíduo eram escassas, as pessoas não se sentiam seguras para guardar seu dinheiro em casa e então recorriam aos cambistas, que possuíam grandes cofres, para guardar as suas moedas e devolvê-las quando precisassem. Os cambistas, tendo em mãos grandes quantidades de dinheiro, pensaram que poderiam emprestar esse dinheiro por um tempo, desde que a pessoa devolvesse num prazo determinado o valor adicionado de um bônus adicional, que chamamos de juros. Como os primeiros mercadores de dinheiro exerciam sua atividade sentados em bancos de madeira nos mercados, surgiram os nomes “banqueiro” e “banco”.

Os sacerdotes criaram os primeiros bancos, pois era de costume as pessoas confiarem seu dinheiro à Igreja. Ela, ambicionando o monopólio dos lucros através de empréstimos, proibiu seus fiéis a emprestar dinheiro a juros. Mas a Igreja não conseguiu conter a vontade das pessoas de obter ganhos, mesmo com as ameaças e maldições, e o desenvolvimento do comércio requeria uma ampla rede bancária. Segundo Gonçalves (2005) (ver referência 4):

> A História relata que os primeiros bancos (figurados enquanto instituições financeiras) foram criados pelos sacerdotes. No mundo antigo, entre os egípcios, babilônios e mais tarde entre os gregos e romanos, era amplamente difundido o costume de que os cidadãos mais abastados deveriam confiar a custódia de seu ouro aos sacerdotes. A Igreja Católica criou o Banco do Espírito Santo, que tinha como propósito tornar-se mais expedita a exação (exigência) aos fiéis (dos chamados denários de São Pedro) satisfazerem as frugalidades do Papa. Também facilitava o pagamento de dízimos e indulgências, assim como para a realização de transações relacionadas com os empréstimos. Em outras palavras, a usura. (GONÇALVES, 2005, p. 07)

O descobrimento das Américas trouxe à Europa um enorme crescimento do comércio, e isso fomentou o surgimento de poderosas casas bancárias, e uma nova forma de transação, a conta corrente. Robert (1989) (ver referência 19) explica como essa nova movimentação funcionava:

> Sua essência é a seguinte: os possuidores de dinheiro, tendo à frente o comerciante, depositam no banco uma determinada quantia de dinheiro sob a denominação de conta corrente. Mais tarde, se o comerciante necessita efetuar um pagamento, preenche um formulário impresso pelo próprio banco, chamado de cheque. Assim, o cheque nada mais é que uma ordem que o depositante dá ao banco para que este pague ao portador a soma estipulada no cheque, deduzindo-a de sua conta corrente ou transferindo-a para a conta corrente de um outro depositante. (ROBERT, 1989, p. 58)

Dessa forma, o cheque pode ser considerado a primeira forma de uso do papel moeda.

2.3 Alguns conceitos contemporâneos da matemática financeira

A matemática financeira estuda o comportamento do dinheiro ao longo do tempo, e estudá-la é de fundamental importância para compreender as relações econômicas e financeiras atuais. Laureano e Leite (1987) (ver referência 8) entendem que a matemática financeira se desenvolveu como o

> "sistema econômico conhecido por Economia de Mercado e dominá-la tornou-se como que impositivo, quer pelas implicações do trabalho assalariado, quer pelas operações de compra e venda, quer pelos investimentos de capital". (LAUREANO; LEITE, 1987, p. 3)

Muitos termos usados na atualidade são desconhecidos pela maioria dos alunos e por uma parte dos professores. É positivo que o docente compreenda o funcionamento dos sistemas financeiros, cobranças de impostos, entre outros assuntos, para assim poder inseri-los no seu cotidiano escolar. Nesta seção faremos uma breve apresentação dos principais temas.

2.3.1 Mercado financeiro

O mercado financeiro é um lugar onde pode-se comprar e vender produtos financeiros, a exemplo de títulos, ações, moedas, derivativos, mercadorias, *commodities*, entre outros. O seu objetivo é facilitar o encontro entre investidores, que são pessoas que possuem recursos poupados e têm interesse de emprestá-los em troca de rentabilidade; e tomadores, que são pessoas que precisam de dinheiro para poder investir em seus negócios. O mercado financeiro visa ser um ambiente controlado, seguro e regulado por leis. Ele pode ser subdividido em 4 partes:

Mercado de capitais: o seu objetivo é direcionar os recursos financeiros da sociedade para o comércio, para a indústria e para outras atividades econômicas. Ele engloba títulos, derivativos na bolsa de valores, ações, corretoras ou outras instituições financeiras. Quando alguém compra ações de uma empresa, está investindo no mercado de capitais.

Mercado de câmbio: é o lugar onde são negociadas e trocadas as moedas.

Mercado de crédito: nele, instituições financeiras e não financeiras fazem a intermediação de recursos de curto, médio e longo prazo para pessoas físicas ou jurídicas que precisam de capital de giro ou de consumo.

Mercado monetário: esse mercado é responsável pelas operações de curto e curtíssimo prazo, com alta liquidez. O seu maior objetivo é controlar a liquidez monetária do país e ser um instrumento de atuação do governo através da implementação de políticas monetárias e emissão de títulos, além do controle inflacionário.

O primeiro registro de algo parecido com um mercado financeiro se deu em Bruges, na Bélgica, no período medieval. Por volta de 1300, nesta cidade ocorria um grande trânsito de navios mercantes e isso a tornava o epicentro do comércio europeu, onde estabeleceu-se um mercado de hipotecas e letras de câmbio, muito similar ao que vemos em um mercado de ações hoje em dia. Em 1487, criou-se a primeira bolsa de valores, e o local onde ela funcionava pertencia a família Van de Burse, que significa bolsa. Em 1531, foi criada a bolsa de Antuérpia, também na Bélgica, baseada na negociação de empréstimos, sendo, para muitos, considerada a primeira bolsa oficial. Por volta de 1600, a Companhia Holandesa das Índias lançou na bolsa de Amsterdã as primeiras ações que se tem conhecimento. Dividiu seu capital em partes iguais, vendeu e investiu na sua expansão e, com isso, tornou-se a companhia privada mais rica do mundo na época. As outras empresas logo começaram a copiar a ideia. No Brasil, a primeira bolsa de valores surgiu em 1845, no Rio de Janeiro. Alguns anos depois, em 1890, Emílio Rangel Pestana fundou a Bolsa de Valores de São Paulo.

2.3.2 Inflação, correção monetária e indexadores

A Inflação é o aumento dos preços de bens e serviços, implicando na desvalorização da moeda e em um aumento do custo de vida. Ela é medida pelos índices de preços. O Brasil tem alguns índices de preços, a exemplo do Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), que é o índice utilizado no sistema de metas para a inflação. Esta, por sua vez, pode ocorrer por alguns motivos principais, e o primeiro deles é quando a procura de um produto é muito maior que sua oferta, e como resultado desse movimento, seu preço tende a subir. O segundo diz respeito a quando uma empresa assume o monopólio de um produto ou de um setor, expondo, como em todo sistema capitalista, que seu foco é o lucro, o que resulta na alta dos preços. O terceiro ocorre quando há um aumento repentino nos custos da produção de um determinado produto, a exemplo do aumento de uma matéria prima. Uma inflação muito alta é um sinal de instabilidade na economia, o que acaba desestimulando os investimentos, prejudicando o crescimento econômico. Para tentar minimizar os efeitos da inflação, criou-se a correção monetária. Segundo Karam (2004) (ver referência 7):

> Em regime inflacionário, não há como fugir, o dinheiro perde o seu valor no tempo. Se numa determinada época x dinheiros são suficientes para se comprar y produtos, no decorrer do tempo isso deixa de ser verdade. A correção monetária foi criada justamente para que esse poder de compra não seja perdido, ou seja, para se determinar qual a quantidade de dinheiros será suficiente para que num momento posterior se adquira os mesmos y produtos. (KARAM, 2004, p. 05)

Os reajustes da correção monetária são realizados através de indexadores, que levam em conta a inflação acumulada no período anterior. Além do IPCA, há outros índices de correção monetária muito comuns, como a Taxa Referencial (TR), que corrige a poupança, a taxa Selic (SELIC), que representa os juros básicos da economia brasileira, e o Índice Geral de Preços de Mercado (IGP-M), que foi criado para ser uma medida abrangente no movimento de preços.

2.3.3 Políticas econômicas

Segundo Liedtke (2010) (ver referência 9), política econômica é um conjunto de ações planejadas e executadas pelo governo, com o objetivo de produzir um certo impacto na situação econômica local e também cumprir propósitos sociais. Seus principais objetivos são a estabilização dos preços, o crescimento econômico, a criação de empregos e distribuição de riquezas. As políticas econômicas podem ser divididas em: monetária, fiscal, cambial e de rendas.

Política monetária: controla a quantidade de moeda na economia e seu principal objetivo é controlar a inflação e a taxa de juros.

Política fiscal: tem o objetivo de manter o equilíbrio entre a arrecadação e os gastos do estado.

Política cambial: tem como objetivo tomar medidas para controlar o câmbio e tornar a balança comercial mais favorável.
Política de rendas: promove uma melhor distribuição de renda entre a população. Um exemplo dessa política é a fixação do salário mínimo.

O que vemos no Brasil é quando muda o governo, muda a política econômica, pois não existe um compromisso de continuidade, o que torna difícil implementar uma política consistente em longo prazo. Algumas políticas econômicas ficaram famosas, a exemplo do Plano de Metas, do presidente Juscelino Kubitschek, executado entre 1956 e 1960, que criou Brasília, incentivou a indústria automobilística e a construção de estradas. No governo do Itamar Franco, o Plano Real conseguiu controlar a inflação. No governo do Lula, em 2007, o Programa de Aceleração do Crescimento (PAC) com uma série de medidas, buscou aumentar o desenvolvimento do país.

2.3.4 Tipos de investimento

A educação financeira nas escolas é de fundamental importância, pois conhecer a melhor forma de gerir o dinheiro aumenta muito as possibilidades de o aluno alcançar a independência financeira no futuro. Segundo a Revista Isto é (2020) (ver referência 21):

> O endividamento dos brasileiros subiu ligeiramente em agosto (2020), para 67,5%, resultado 0,1 ponto porcentual acima do mês anterior, atingindo o maior índice da série história da Confederação Nacional do Comércio (CNC), iniciada em janeiro de 2010. Segundo a CNC, na comparação anual a Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (Peic), o endividamento no mês de agosto também se mostrou acima do mesmo mês de 2019 em 2,7 pontos porcentuais. (ISTO É, 02/10/2020, p. 24)

Uma das formas das pessoas evitarem o endividamento é aprendendo a planejar e organizar as finanças, tentando separar uma parte do orçamento familiar para investir e, assim, possuir uma reserva em casos de emergências. Ao ensinar os tipos de investimentos, a escola colabora para a formação de cidadãos mais capazes de tomar decisões mais sadias para sua vida financeira.

Durante muito tempo as pessoas acreditavam que deixar o dinheiro na poupança bastava para que ele rendesse bem. Hoje sabemos que isso não é verdade, pois os juros da poupança não conseguem acompanhar a inflação, logo ela não pode ser considerada uma forma de investir seu dinheiro, e sim uma conta para poupar e evitar que você gaste tudo que tem. Existem basicamente dois tipos de investimentos, os de renda fixa e de renda variável.

Os investimentos de renda fixa são como um empréstimo da sua verba ao emissor, como empresas, instituições financeiras ou o governo. No momento do empréstimo, você já sabe qual a taxa de rentabilidade que o dinheiro vai ter em um prazo determinado, por isso ela é considerada mais previsível e segura.

A renda variável representa a compra de parte de um empreendimento, como uma empresa ou negócio imobiliário, e ela não possui previsibilidade nos rendimentos e sua cotação muda diariamente. As ações são o tipo de renda variável mais conhecido. Como a taxa de ganho é maior, o risco é maior também, pois não tem como prever se uma ação vai valorizar ou não.

As aplicações de renda fixa normalmente oferecem maior estabilidade ao investidor, pois, para valores até R$ 250 mil, existe uma garantia do Fundo Garantidor de Crédito (FGC), que mesmo que a empresa entre em falência, ela garante o valor ao investidor, ação essa inexistente para os fundos de renda variável. Os rendimentos de renda fixa podem ser fracionados em 3 tipos:

Pré-fixados: a taxa prefixada traduz-se em um rendimento fixo, por exemplo, 6% ao ano. Essa taxa continuará a mesma até o final do prazo da aplicação. Os investimentos desse tipo costumam ser indicados quando há estimativa de queda nas taxas de juros. Exemplos de aplicações desse tipo são o Tesouro Direto, que é um programa criado pelo governo federal que possibilita que as pessoas físicas possam comprar títulos públicos. Ele é considerado um investimento seguro, pois é improvável que o governo quebre. O Certificado de Depósito Bancário (CDB) é muito parecido com o Tesouro Direto, mas é como se o investidor tivesse emprestado dinheiro para o banco, enquanto que as Letras de Câmbio (LC), você empresta para instituições financeiras.

Pós fixados: eles têm a rentabilidade associada a um indexador, a exemplo da Taxa Selic ou o CDI. Ou seja, se os indexadores sobem, a rentabilidade aumenta. Mas se eles descem, a rentabilidade diminui. Alguns exemplos são o Tesouro Direto Selic, a Letra de Crédito Imobiliário (LCI) e a Letra de Crédito do Agronegócio (LCA), que se dá quando você empresta para o ramo imobiliário ou para o agronegócio. A grande vantagem desses dois investimentos é que são isentos de Imposto de Renda e IOF para pessoas físicas.

Híbridos: a rentabilidade híbrida apresenta uma parte fixa e uma variável, tal como, 6% mais o IPCA. Os investimentos desta espécie geralmente possuem como indexadores de inflação o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) ou o Índice Geral de Preços do Mercado (IGP-M). Alguns exemplos são o Tesouro Direto IPCA; o Debênture, quando você empresta dinheiro para uma empresa; e a Letra de Crédito do Agronegócio (LCA), que é quando você investe no agronegócio. Este também é livre de imposto de renda.

2.3.5 Carga tributária

Carga tributária é a relação entre o total dos tributos arrecadados pelo governo e o Produto Interno Bruto (PIB), que é o total de riqueza produzida na nação. Os tributos são tudo aquilo que o governo arrecada para que possa prestar serviços públicos aos seus habitantes, a exemplo da educação, saúde, segurança, entre outros. Essas cobranças podem ser fragmentadas em três tipos: taxas, impostos e contribuições.

O imposto mais conhecido é o Imposto de Renda (IR), em que todo contribuinte, seja pessoa física ou jurídica, paga uma porcentagem dos seus rendimentos para o governo. Outros impostos são Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI), Imposto Territorial Rural (ITR), Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores (IPVA), Imposto sobre a Propriedade Predial e Territorial Urbana (IPTU), Imposto sobre a Importação de Produtos Estrangeiros (II), o Imposto sobre Operações de Crédito, Câmbio e Seguro ou relativas a Títulos ou Valores Mobiliários (IOF), Imposto sobre Transmissões Causa Mortis e Doações de Qualquer Bem ou Direito (ITCMD) e Imposto sobre Transmissão inter vivos de Bens e Imóveis e de direitos reais a eles relativos (ITBI).

Fora os impostos, o governo também arrecada através de taxas, algumas delas são Taxa de Coleta de Lixo, Taxa de Conservação e Limpeza Pública, Taxa de Emissão de Documentos e Taxa de Licenciamento Anual de Veículo.

As contribuições mais comuns são o Instituto Nacional do Seguro Social (INSS), que é responsável pelo pagamento de aposentadorias, salário-maternidade, pensão por morte, auxílio-doença, auxílio-acidente, auxílio-reclusão e outros benefícios; o Programa de Integração Social (PIS); Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (COFINS), que tem como objetivo financiar projetos como a previdência pública, serviços de saúde e outros, e a Contribuição Sindical Patronal.

3 FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo, iremos apresentar os principais elementos necessários para o estudo da matemática financeira. São eles: função afim, função exponencial, função logarítmica, progressões aritméticas e geométricas. Para tanto, inicialmente revisaremos noções sobre conjuntos, coordenadas cartesianas, produto cartesiano, função e gráfico de uma função. É importante salientar que os resultados apresentados neste capítulo não são originais e podem ser encontrados com mais detalhes em Lima (2013) (ver referência 10). No entanto, as figuras e exemplos são de autoria da própria autora, bem como alguns detalhes nas demonstrações dos resultados.

Iremos representar por $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ o conjunto dos números naturais sem o zero e por $\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ o conjunto dos números reais positivos.

3.1 Noções sobre conjuntos

Um conjunto é constituído de objetos que chamamos de *elementos*. A relação entre um objeto e um conjunto é chamada de relação de pertinência. Desse modo, se um objeto x é um elemento do conjunto A, dizemos que x *pertence* ao conjunto A e escrevemos $x \in A$, e caso contrário, dizemos que o elemento x *não pertence* ao conjunto A e escrevemos $x \notin A$.

Exemplo 3.1 Seja A o conjunto dos números naturais ímpares menores que 10. Podemos representar um conjunto através de:

a) **Forma tabular**: Notação: $A = \{a, b, c, \ldots\}$.

$A = \{1,3,5,7,9\}$.

b) **Propriedade**: Notação: $A = \{x$: x goza da propriedade $P\}$.

$A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é ímpar e } x < 10\}$.

Dados A e B dois conjuntos, e denotemos por U o conjunto universo, podemos realizar as seguintes operações:

a) **União**: representada por $A \cup B = \{x \in U: x \in A \text{ ou } x \in B\}$;

b) **Interseção:** representada por $A \cap B = \{x \in U: x \in A \text{ e } x \in B\}$;

c) **Diferença**: representada por $A - B = \{x \in U: x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Definição 3.2 Sejam A e B dois conjuntos. Se todo elemento de A também é elemento de B, então diz-se que A é um subconjunto de B ou A está contido em B.

Notação: $A \subset B$. A relação $A \subset B$ é chamada de relação de inclusão.

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais e escrevemos $A = B$, quando todos os elementos de A são também elementos de B e vice-versa. Usando propriedade antissimétrica da relação de inclusão, temos: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

Outra operação que podemos realizar com conjuntos, e que é bastante útil na análise de funções, é o produto cartesiano, que possui ideia central no conceito de par ordenado.

3.2 Coordenadas cartesianas

Em 1637, em sua obra "*La Géometrie*", o filósofo e matemático René Descartes formalizou o sistema de coordenadas cartesianas, como principal objetivo de representar pontos ou posições no plano cartesiano, utilizando duas retas numeradas e perpendiculares entre si, intersectando em um ponto chamado de origem. Assim, cada ponto do plano fica associado a um conjunto de coordenadas, formando um par ordenado que pode ser assim definido.

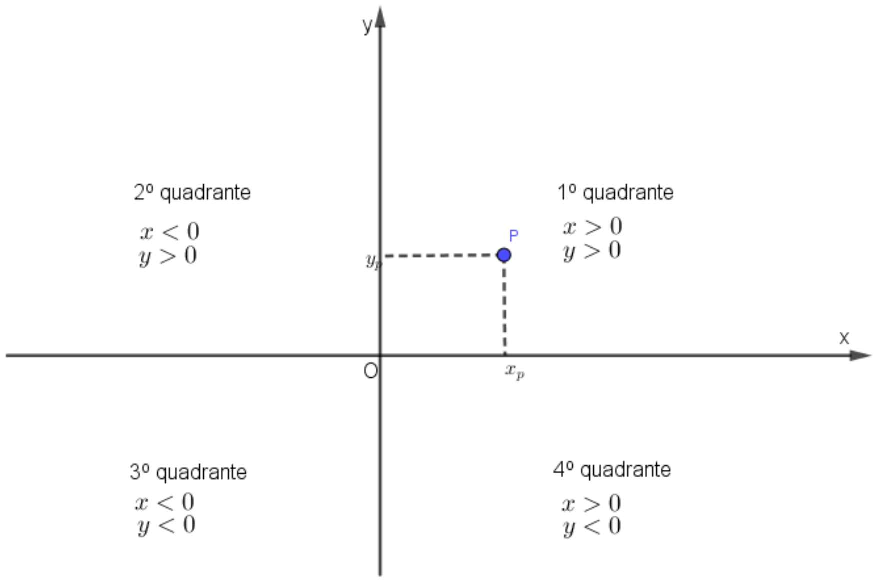
Um par ordenado $P = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado de primeira coordenada de P, e um objeto y , chamado de segunda coordenada de P. O eixo x

também é chamado de eixo das abscissas, e o eixo y também é chamado de eixo das ordenadas.

Estabelecemos ainda que dois pares ordenados $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Ao introduzir o conceito de coordenadas cartesianas no plano Euclidiano, passa-se a reapresentar cada ponto desse plano por um par ordenado (x, y). Os seus elementos podem ser representados quando se toma, nesse plano, um par de eixos ortogonais OX e OY que se intersectam no ponto O, que é a origem do sistema cartesiano e possui coordenadas $(0,0)$, como se pode ver na Figura 2:

Figura 2 – Sistemas de coordenadas cartesianas.

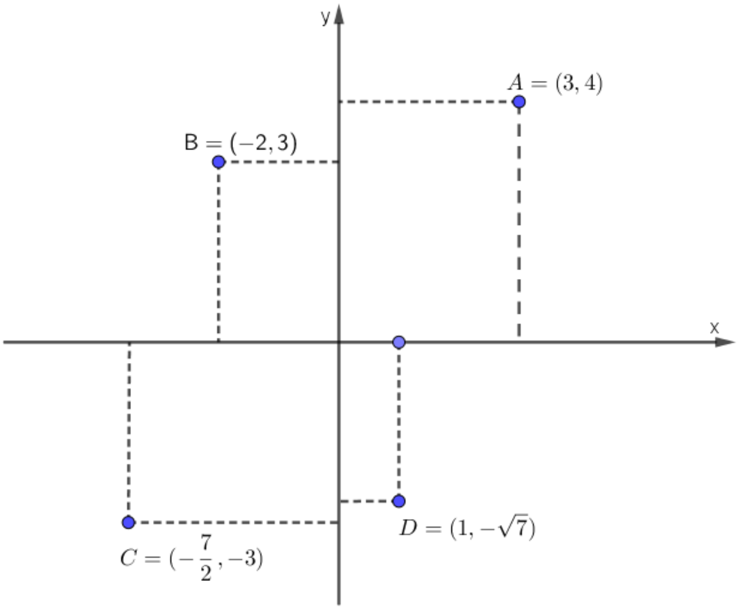


Fonte: Autor.

Conforme a Figura 3, note que os eixos OX e OY dividem o plano cartesiano em quatro regiões, que são chamadas de quadrantes. Podemos verificar que em cada quadrante o sinal das abscissas e das ordenadas variam conforme mostra a mesma figura. Nesse caso, a abscissa do ponto P é o número real x_p, que é a projeção ortogonal de P sobre o eixo OX, e a ordenada de P é o número real y_p, que é a projeção ortogonal de P sobre o eixo OY. No par ordenado (x_p, y_p), x_p é chamado de abscissa e y_p é chamado de ordenada.

Exemplo 3.3 Representação gráfica dos pontos $A = (3,4)$, $B = (-2,3)$, $C = (-\frac{7}{2}, -3)$ e $D = (1, -\sqrt{7})$ no plano cartesiano (ver Figura 3).

Figura 3 – Localização de pontos no sistema de coordenadas cartesianas.



Fonte: Autor.

3.3 Produto cartesiano

Definição 3.4 Sejam A e B dois conjuntos, chamamos de produto cartesiano e representamos por $A \times B$ o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), cuja primeira coordenada pertence a A e segunda coordenada pertence a B. Simbolicamente:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Se $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $B = \{y_1, \ldots, y_p\}$ são conjuntos finitos com m e p elementos, respectivamente, então o produto cartesiano $A \times B$ é finito e possui mp elementos.

Exemplo 3.5 Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5,6\}$, determinar:

a) $A \times B$

Para determinar o conjunto $A \times B$, basta tomar todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$. Desse modo:

$A \times B = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$.

b) $A \times A$ ou A^2

Para descrever o conjunto $A \times A$, é suficiente listar todos os pares ordenados (x, y), onde $x \in A$ e $y \in A$. Desse modo:

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.

Dessa forma, podemos entender o produto cartesiano de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$, como sendo uma representação algébrica do plano cartesiano. Trata-se de um dos exemplos mais importante de produto cartesiano, visto que a partir desse caso particular deu-se origem a ideia geral.

3.4 Função e gráfico de uma função

Uma forma importante de se representar uma função é através de seu gráfico. A vantagem de se representar usando gráfico é que fica mais fácil de perceber seus atributos e seu comportamento geral, como por exemplo: estudo sobre crescimento ou decrescimento, pontos de máximo ou mínimo, raízes, continuidade, dentre outros. Desse modo, o gráfico de uma função apresenta informações importantíssimas sobre o comportamento geral da função para possíveis análises e previsões futuras.

Inicialmente, define-se função da seguinte forma.

Definição 3.6 Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma função $f: A \to B$ (*lê-se uma função de A em B*) é uma relação (ou regra ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$. Os conjuntos A e B são chamados de domínio e contradomínio da função f, respectivamente. Para cada $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ chama-se a imagem de x pela função f.

Define-se gráfico de uma função da seguinte forma.

Definição 3.7 Sejam A e B dois conjuntos. O gráfico de uma função $f: A \to B$ é o subconjunto G_f do produto cartesiano $A \times B$, constituído pelos pares ordenados (x, y) com $y = f(x)$, onde $x \in A$ e $y \in B$. Em linguagem de conjunto:

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B: \ y = f(x)\} = \{(x, f(x)): \ x \in A\}.$$

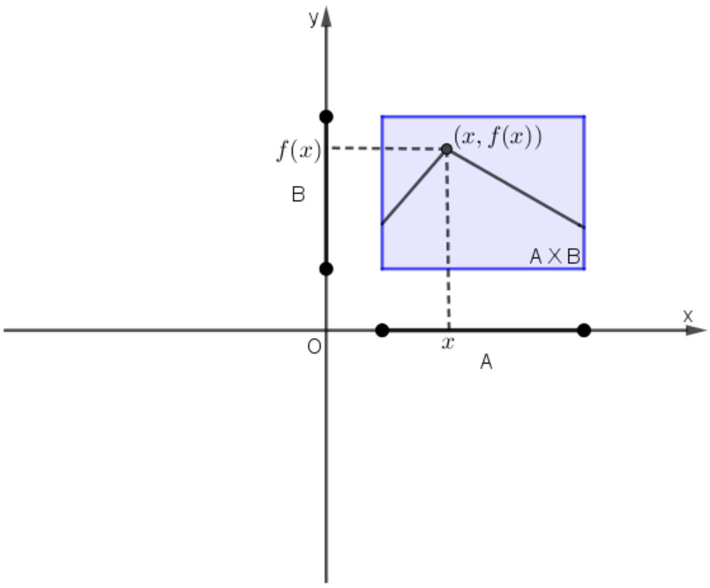
Para que um subconjunto $G \subset A \times B$ represente o gráfico de uma função $f: A \to B$, é necessário e suficiente que G atenda as seguintes condições:

(i) Para cada $x \in A$ exista um único ponto representado pelo par ordenado $(x, y) \in G$, onde a primeira coordenada seja x e $y = f(x)$;

(ii) Se $P = (x, y)$ e $Q = (x, y_1)$ são pares ordenados que pertencem a G com a primeira coordenada igual a x, então $y = y_1$, ou seja, os pontos são iguais.

Na Figura 4, o retângulo representa o produto cartesiano de $A \times B$, a curva representa uma função, pois para todo $x \in A$ tem-se um único elemento $f(x) \in B$. Temos, nesse caso, que o domínio da função é o conjunto A e o contradomínio da função é o conjunto B.

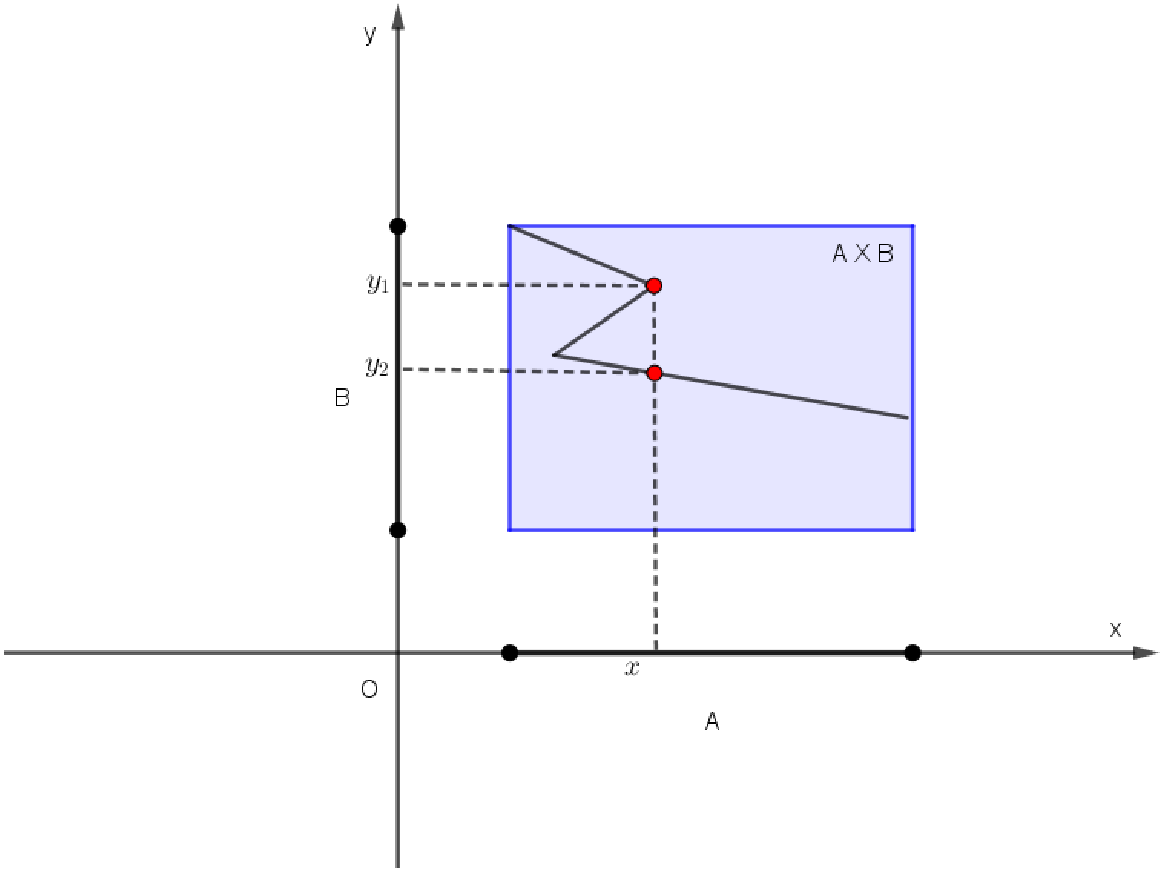
Figura 4 – Representação do gráfico de uma função.



Fonte: Autor.

Na Figura 5, o elemento $x \in A$ está associado a dois elementos de B, y_1 e y_2, nesse caso está ocorrendo uma ambiguidade e, portanto, a relação não representa uma função $f: A \to B$.

Figura 5 – Representação de uma relação que não é função.



Fonte: Autor.

3.5 A função afim

Em muitas situações do cotidiano observamos que o conceito de função está presente, na matemática financeira não é diferente. Nesta seção, faremos um estudo da função afim.

Definição 3.8 Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.9 São exemplos de função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) Função identidade: $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
b) Translações: $f(x) = x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
c) Funções lineares: $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
d) Funções constantes: $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

É possível determinar se uma certa função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. O valor de b é dado por $b = f(0)$. Quanto ao coeficiente a, ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos arbitrários x_1 e x_2, com $x_1 \neq x_2$. De fato, conhecidos $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Dados x, $x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}$ chama-se a *taxa de crescimento* (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos x e $x + h$.

Exemplo 3.10 Se um buffet cobra b reais fixos por uma festa, mais a reais por cada convidado, o preço total da festa será dado pela função afim $f(x) = ax + b$, com x sendo o número de convidados e $f(x)$ o preço total a ser pago.

Definição 3.11 Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função, onde $X \subset \mathbb{R}$, f é dita:

- **Crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em X, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.
- **Decrescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em X, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.
- **Não crescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em X, tivermos $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **Não decrescente** se, para todos $x_1 < x_2$ em X, tivermos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Em todos os casos acima dizemos que a função é *monótona*, mas nos dois primeiros casos podemos dizer que elas são *estritamente monótonas*.

Teorema 3.12 A função afim $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é crescente se $a > 0$ e decrescente se $a < 0$.

Demonstração: De fato, tomando $a > 0$, para quaisquer números $x_1 < x_2$, temos

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 - b) - (ax_1 - b) = a(x_2 - x_1),$$

como $(x_2 - x_1) > 0$ e $a > 0$, temos que $a(x_2 - x_1) > 0$ e f é crescente. Analogamente, segue que se $a < 0$, teremos que $a(x_2 - x_1) < 0$ e f será decrescente. ■

3.5.1 O gráfico de função afim

Teorema 3.13 O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma linha reta.

Demonstração: Para provarmos o teorema, basta mostrarmos que dados três pontos distintos no gráfico, que esses pontos serão colineares. Para isso, pegaremos três pontos $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ sobre o gráfico de f. Sem perda de generalidade, suponhamos que $x_1 < x_2 < x_3$. Para que eles sejam colineares, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_3)$, $d(P_1, P_2)$ e $d(P_2, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois, ou seja, que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Usando a fórmula da distância entre dois pontos, temos

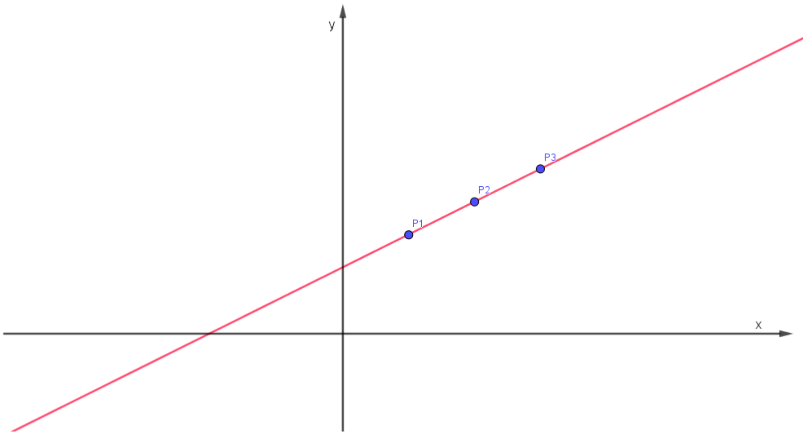
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - ax_1 - b)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2}$$
$$= \sqrt{(1 + a^2)(x_2 - x_1)^2}$$
$$= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Analogamente, $d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$ e $d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$. Logo,

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} + (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$
$$= (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$
$$= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} = d(P_1, P_3).$$

Daí segue que $d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$, logo P_1, P_2 e P_3 são colineares (ver Figura 6). ■

Figura 6 – Três pontos colineares no gráfico de uma função afim.



Fonte: Autor.

Proposição 3.14 Dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2) \ \epsilon\ \mathbb{R}^2$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

Demonstração: Para demonstrarmos, basta resolver o sistema

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$ nas variáveis a e b.

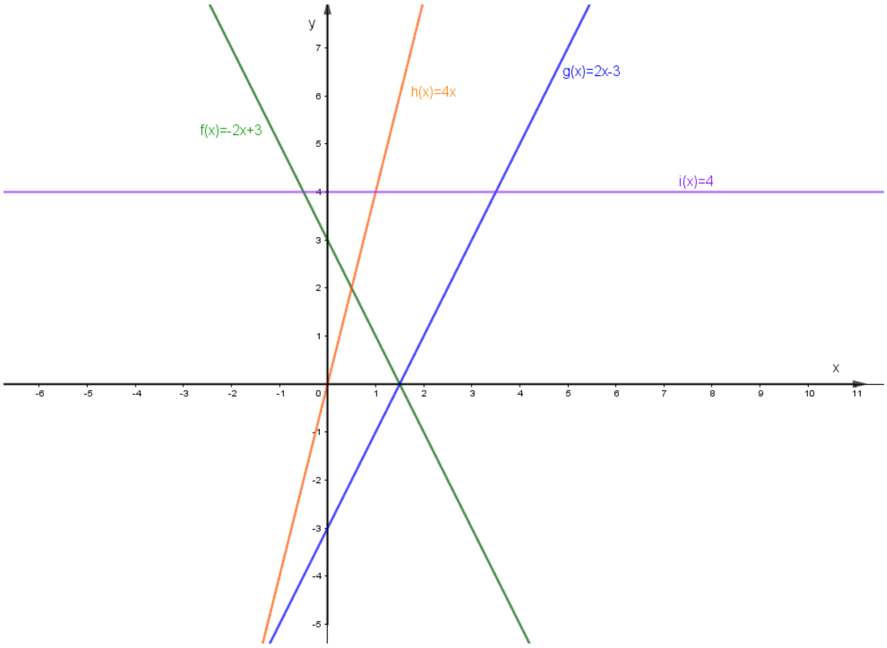
Teremos que $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$. Tomando $f(x) = ax + b$, obtemos que esta é a única função afim cujo gráfico contém os pontos P_1 e P_2. ■

Portanto, podemos dizer que o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical e, reciprocamente, toda reta não vertical é o gráfico de uma função afim.

Dada a função afim $f(x) = ax + b$, onde b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função f, intercepta o eixo OY. O valor b é conhecido como *coeficiente linear*. O *coeficiente angular* da reta em relação ao eixo OX, que representa a inclinação dessa reta, é representado pelo valor a. Quanto maior o valor de a, mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente.

Para construirmos o gráfico de uma função afim, ou seja, uma reta, basta tomarmos dois pontos distintos. Por exemplo, sendo $a, b \neq 0$, podemos tomar o ponto $(0, b)$, que é o ponto onde o gráfico de f intercepta o eixo OY. Fazendo $ax + b = 0$, temos que $x = -\frac{b}{a}$, achando assim o segundo ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, que é onde o gráfico de f intercepta o eixo OX, que é chamado de *raiz ou zero da função*, ou seja, quando $f(x) = 0$. Se $a = 0$, teremos uma reta paralela ao eixo OX, passando pelo ponto $(0, b)$. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, teremos uma reta passando pela origem $(0,0)$. Exemplos de gráficos de funções afins são dados na Figura 7.

Figura 7 – Gráficos de quatro funções afins.



Fonte: Autor.

3.5.2 Função linear

A função linear $f(x) = ax$ é o modelo matemático para o estudo de problemas que envolvem proporcionalidade. Lima (2013) (ver referência 10), em seu livro, cita um trecho da Aritmética Progressiva de Antônio Trajano, que diz:

> Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. (LIMA, 2013, p. 84)

Uma proporcionalidade é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(cx) = c.f(x)$, para quaisquer números reais c e x (*proporcionalidade direta*) ou $f(cx) = \frac{1}{c}.f(x)$, se $c \neq 0$ (*proporcionalidade inversa*).

Teorema 3.15 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
(2) Tomando $a = f(1)$, tem-se que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos provar as implicações $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$. A implicação $(1) \Rightarrow (2)$ será demonstrada em duas etapas.

1°) Mostraremos que $f(rx) = rf(x)$ para todo $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$nf(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x),$$

portanto

$f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = rf(x)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Tomando $a = f(1)$, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Temos também que $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$. Como a função f é crescente, então $0 = f(0) < f(1) = a$, logo $a > 0$.

2º) Mostraremos agora que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos supor, por absurdo, que existe um número $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ tal que $f(x) \neq ax$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $f(x) < ax$, isto é, $\frac{f(x)}{a} < x$. Logo, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x \;\Rightarrow\; f(x) < ar < ax \;\Rightarrow\; f(x) < f(r),$$

que é uma contradição, pois estamos supondo que f é crescente e temos $r < x$. Logo, podemos concluir que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e que $(1) \Rightarrow (2)$.

O caso $(2) \Rightarrow (3)$ é obtido da seguinte forma:

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y), \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Falta mostrarmos que $(3) \Rightarrow (1)$. Inicialmente, de (3) temos que $f(0) = 0$. Agora, para n um inteiro positivo, temos

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x + x}_{n\ termos}) = f(x + \underbrace{x + \cdots + x + x}_{n-1\ termos}),$$

chamaremos a soma de $n - 1$ termos x de y. Usando (3) obtemos

$$f(nx) = f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Como $f(y) = f(\underbrace{x + \cdots + x + x}_{n-1\ termos})$, usando novamente (3), obtemos

$$f(nx) = f(x) + f(y) = f(x) + f(x) + f(\underbrace{x + \cdots + x + x}_{n-2\ termos}).$$

Assim, sucessivamente, fazendo essa decomposição dos x e aplicando a propriedade (3), decorre que

$$f(nx) = f(x) + f(y) = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\ termos} = nf(x), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Devemos mostrar que vale também para inteiros negativos. De (3) temos

$$0 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x).$$

Equivalentemente, $f(-x) = -f(x)$. Portanto, para $n > 0$,

$$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x),$$

mostrando que (3) ⇒ (1) para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. ■

Observação 3.16 Do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, podemos notar que a função f é crescente, com $a = f(1) > 0$. No caso de se supor f decrescente, vale um resultado análogo, com $a = f(1) < 0$. Além disso, em particular, de (2) obtemos que $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$.

Esse teorema é de muita importância, pois se quisermos descobrir se uma dada função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função linear, basta verificar se ela é crescente ou decrescente, e depois se $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. No caso de $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, basta verificar esta última condição para $n \in \mathbb{N}$.

3.5.3 Caracterização de uma função afim

O teorema a seguir estabelece uma condição para determinarmos se uma função é afim, sua demonstração é uma aplicação do Teorema 3.15 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade).

Teorema 3.17 (Caracterização da função afim). Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona e injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h e não depender de x, então f é uma função afim.

Demonstração: Vamos supor, sem perda de generalidade, que f é uma função crescente, o caso em que f é decrescente é análogo.

Se f é crescente, mostraremos que a função $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$ para todo $h \in \mathbb{R}$, também é crescente. Calcularemos inicialmente $\varphi(0)$:

$$\varphi(0) = f(x+0) - f(x) \Rightarrow \varphi(0) = f(x) - f(x) = 0.$$

Note que $\varphi(h_1) = f(x+h_1) - f(x)$ e $\varphi(h_2) = f(x+h_2) - f(x)$. Agora, tomando $h_1 < h_2$, temos

$$\varphi(h_2) - \varphi(h_1) = f(x+h_2) - f(x) - f(x+h_1) + f(x) = f(x+h_2) - f(x+h_1) > 0,$$

pois $x + h_2 > x + h_1$ e f é crescente. Portanto, φ também é crescente.

Calculemos agora $\varphi(h+t)$ para todo $h, t \in \mathbb{R}$. Como $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$ então

$$\varphi(h+t) = f(x+(h+t)) - f(x) \Rightarrow \varphi(h+t) = f\big((x+t)+h\big) - f(x).$$

Somando e subtraindo $f(x+t)$ no segundo membro da equação acima, temos

$$\varphi(h+t) = f\big((x+t)+h\big) - f(x) + f(x+t) - f(x+t)$$
$$\Rightarrow \varphi(h+t) = f\big((x+t)+h\big) - f(x+t) + f(x+t) - f(x)$$
$$\Rightarrow \varphi(h+t) = \big[f\big((x+t)+h\big) - f(x+t)\big] + [f(x+t) - f(x)]$$
$$\Rightarrow \varphi(h+t) = \varphi(h) + \varphi(t).$$

Então, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, φ é linear. Fazendo $a = \varphi(1)$ obtemos $\varphi(h) = ah$, para todo $h \in \mathbb{R}$. Assim,

$f(x+h) - f(x) = ah.$

Tomando $x = 0$ na equação acima, temos

$f(0+h) - f(0) = ah \Rightarrow f(h) - f(0) = ah \Rightarrow f(h) = ah + f(0).$

Fazendo $b = f(0)$ na equação acima, obtemos

$f(h) = ah + b$, para todo $h \in \mathbb{R}$.

Substituindo x por h, segue que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f é uma função afim. ■

Observação 3.18 A recíproca do Teorema 3.17 também é verdadeira, isto é, se $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f(x+h) - f(x)$ não depende de x. De fato,

$f(x+h) - f(x) = a(x+h) + b - ax - b = ax + ah + b - ax - b = ah.$

Além disso, a hipótese de que $f(x+h) - f(x)$ não depende de x pode ser traduzida dizendo que os acréscimos iguais de x correspondem a acréscimos iguais para $f(x)$.

3.5.4 Funções afins e progressões aritméticas

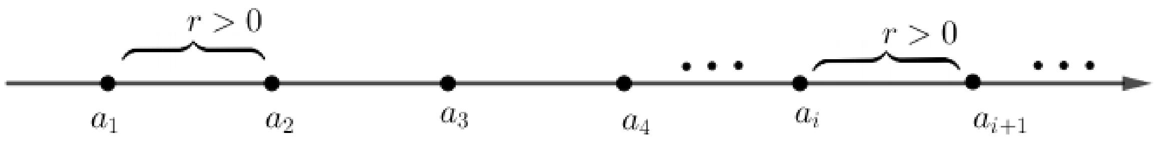
Progressões aritméticas são sequências em que o aumento de um termo para o seguinte é constante. Esse aumento é chamado de razão da progressão. Assim, uma progressão aritmética descreve o comportamento de uma grandeza que, em intervalos de tempos iguais, sofre aumentos (ou diminuições) constantes. Mais precisamente,

Definição 3.19 Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica (a_1, a_2, ..., a_i, ...), com $i \in \mathbb{N}$, em que a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é um valor constante r, denominado razão da PA.

Exemplo 3.20 A sequência de números reais (2, 5, 8, 11, ...) forma uma progressão aritmética cuja razão é 3.

Vejamos na Figura 8, onde cada ponto da sequência $(a_1, a_2, ..., a_i, ...)$ estão igualmente espaçados na reta.

Figura 8 – Representação geométrica de uma PA na reta real.



Fonte: Autor.

Portanto, a diferença entre um termo e o seu anterior não depende da posição i em que o mesmo se encontra, ou seja,

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_{i+1} - a_i = \cdots.$$

Existe uma relação entre funções afins e progressões aritméticas. Inicialmente, dada uma progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ de razão r, podemos encontrar uma função afim que associa a posição $n \in \mathbb{N}$ do termo a_n com o seu respectivo valor $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$, onde $f(n)$ será dada pela fórmula do termo geral da PA, isto é, $f(n) = a_1 + (n-1)r$. De fato, tomando $f(n) = an + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$, obtemos

$$f(n+1) = a(n+1) + b.$$

Assim,

$$f(n+1) - f(n) = an + a + b - an - b = a.$$

Mas $f(n+1) - f(n) = a_{n+1} - a_n = r$. Logo, $r = a$.

Portanto, substituindo o valor de $a = r$ na equação $f(n) = an + b$, teremos $f(n) = rn + b$. Vale salientar que, para encontramos o valor de b é preciso ter informações sobre o primeiro termo da sequência. Assim,

$$f(1) = a + b \Rightarrow b = f(1) - a \Rightarrow \ b = f(1) - r,$$

onde $f(1) = a_1$ representa o primeiro termo da sequência. Logo,

$$f(n) = an + b = \ rn + a_1 - r = a_1 + (n-1)r.$$

Por outro lado, dada uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ e uma progressão aritmética $(x_1\,, x_2\,, \dots, x_i\,, \dots)$ de razão r, temos que os pontos $y_i = f(x_i)$, com $i = 1,2,3, \dots$, estão igualmente espaçados, formando uma progressão aritmética $(y_1\,, y_2\,, \dots, y_i\,, \dots)$ de razão dada por

$$y_{i+1} - y_i \ = f(x_{i+1}) - f(x_i) = ax_{i+1} + b - ax_i - b = ax_{i+1} - ax_i = a(x_{i+1} - x_i) = ar.$$

Isso mostra que se tivermos o gráfico de uma função afim em $\mathbb{R}$ e tomarmos no gráfico os pares $(1, f(x_1)), (2, f(x_2)), (3, f(x_3)), \dots, (i, f(x_i)), \dots$, onde as abscissas são números naturais, então as ordenadas $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i), \dots$ formam uma PA. Reciprocamente, se uma função monótona $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transforma qualquer PA $(x_1\,, x_2\,, \dots, x_i\,, \dots)$ em outra PA $(y_1\,, y_2\,, \dots, y_i\,, \dots)$, onde $y_i = f(x_i)$, então f é uma função afim.

Exemplo 3.21 Considere a PA $(-2,1,4,7)$, de razão $r = 3$, e a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 2$. Verifica-se que $(f(-2), f(1), f(4), f(7))$ também é uma PA. De fato,

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 2 = -8;$$
$$f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1;$$
$$f(4) = 3 \cdot 4 - 2 = 10;$$
$$f(7) = 3 \cdot 7 - 2 = 19.$$

Note que a sequência $(-8,1,10,19)$ de fato é uma PA e possui razão $r = 9$. Dessa forma, fazer a correspondência de função afim com progressões aritméticas torna o ensino dessas funções mais dinâmico e permite ao aluno visualizar esses "links" entre os conteúdos ensinados.

3.6 Função exponencial

Antes de definirmos a função exponencial, vamos definir potências de expoente racional.

3.6.1 Potências de expoente racional

Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n, de base a e expoente n, é definida da seguinte forma:

$a^1 = a;$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ vezes}$, para $n = 2,3,\ldots$ (produto de n fatores iguais a a).

Note que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, pois em ambos os membros da igualdade temos o produto de $m + n$ fatores iguais a a. Daí, podemos obter que $(a^m)^k = a^{mk}$ para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$.

Vamos definir a^n para $n \in \mathbb{Z}$ de tal forma que seja mantida a regra fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Primeiramente, usando esta regra, definimos a^0 da seguinte forma:

$$a^1 = a^{0+1} = a^0 \cdot a^1 \Rightarrow a^0 = 1.$$

Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Sendo $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, vejamos como definir a^r de tal forma que seja mantida a regra fundamental $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Usando esta regra, note que

$$(a^r)^n = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r}_{n\ vezes} = a^{\overbrace{r+r+\cdots+r}^{}_{n\ termos}} = a^{nr} = a^m.$$

Logo, a^r é um número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Assim, pela definição de raiz, podemos a seguinte definição:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

Tal definição não é ambígua pois, como $r = \frac{m}{n} = \frac{pm}{pn}$ para todo $p \in \mathbb{N}$, temos que $\sqrt[n]{a^m} = a^r = a^{\frac{pm}{pn}} = \sqrt[pn]{a^{pm}}$.

Além disso, essa definição garante que a regra fundamental $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ é válida para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$. De fato, sejam $r = \frac{\alpha}{\beta}$ e $s = \frac{\gamma}{\delta}$ com $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}$ e $\beta, \delta \in \mathbb{N}$. Note que $a^r = a^{\frac{\alpha}{\beta}} = a^{\frac{\alpha\delta}{\beta\delta}} = a^{\alpha\delta\frac{1}{\beta\delta}}$ e, analogamente, $a^s = a^{\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\gamma\beta}{\delta\beta}} = a^{\gamma\beta\frac{1}{\delta\beta}}$. Assim,

$$a^{r+s} = a^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}}$$

e

$$a^r \cdot a^s = a^{\alpha\delta\frac{1}{\beta\delta}} \cdot a^{\gamma\beta\frac{1}{\delta\beta}} = \left(a^{\alpha\delta}\right)^{\frac{1}{\beta\delta}} \cdot \left(a^{\gamma\beta}\right)^{\frac{1}{\delta\beta}} = \left(a^{\alpha\delta} \cdot a^{\gamma\beta}\right)^{\frac{1}{\delta\beta}} = \left(a^{\alpha\delta+\gamma\beta}\right)^{\frac{1}{\delta\beta}} = a^{\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}},$$

de onde concluímos o fato desejado.

3.6.2 A função exponencial e o seu gráfico

Definição 3.22 Seja a um número real tal que $0 < a \neq 1$. A função exponencial de base a, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(2) $a^1 = a$;

(3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$;

$x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

Note que se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade (1) acima, isto é, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. De fato, se existir algum x_0 tal que $f(x_0) = 0$, teremos

$$f(x) = f\big(x_0 + (x - x_0)\big) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, f será identicamente nula.

Além disso, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade (1) e não é identicamente nula, então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, diante das propriedades (1) e (2), tanto faz dizer que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$, mas tomando o contradomínio $\mathbb{R}^+$ teremos que f será sobrejetiva.

Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ possui as propriedades (1) e (2) então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = f(1 + 1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(1) = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n.$$

Daí, usando a propriedade (1) e procedendo de maneira análoga a Subseção 3.6.1, podemos obter que se $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Portanto, $f(r) = a^r$ é a única função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r) + f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

Pela propriedade (3), temos que a função exponencial é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Esse fato é o que fará com que haja uma única maneira de definir o valor de $f(x) = a^x$ para x irracional.

Com efeito, inicialmente afirmamos um resultado, cuja demonstração pode ser encontrada no Lema 8.2 de Lima (2013) (ver referência 10).

Lema 3.23 Se a é um número real e $0 < a \neq 1$, então as potências a^r são densas em $\mathbb{R}^+$, isto é, todo intervalo (α, β), com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha < \beta$, contém alguma potência a^r com $r \in \mathbb{Q}$.

Agora, suponha que $a > 1$, o caso $0 < a < 1$ é similar. Então, a^x tem a seguinte propriedade:

$r < x < s$, com $r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s$.

Se existissem dois números reais diferentes, digamos $A < B$, para assumir o valor a^x, com a propriedade acima, teríamos

$r < x < s$, com $r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < A < B < a^s$,

e daí o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando assim a densidade mencionada no Lema 3.23.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x.

Dessa forma, se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades (1), (2) e (3) exigidas acima para ser uma função exponencial, então o valor $f(x)$ com x irracional é dado por $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n)$, onde (r_n) é uma sequência (crescente ou decrescente) de números racionais tais que $\lim_{n \to +\infty} r_n = x$.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, verifica-se que, de fato, são válidas as propriedades (1), (2) e (3). Além disso, a função exponencial possui as seguintes propriedades:

(4) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente. Com efeito, conforme o Lema 3.23, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ possui valores $f(r) = a^r$. Mais precisamente, temos que $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, quando $a > 1$, e $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, quando $0 < a < 1$.

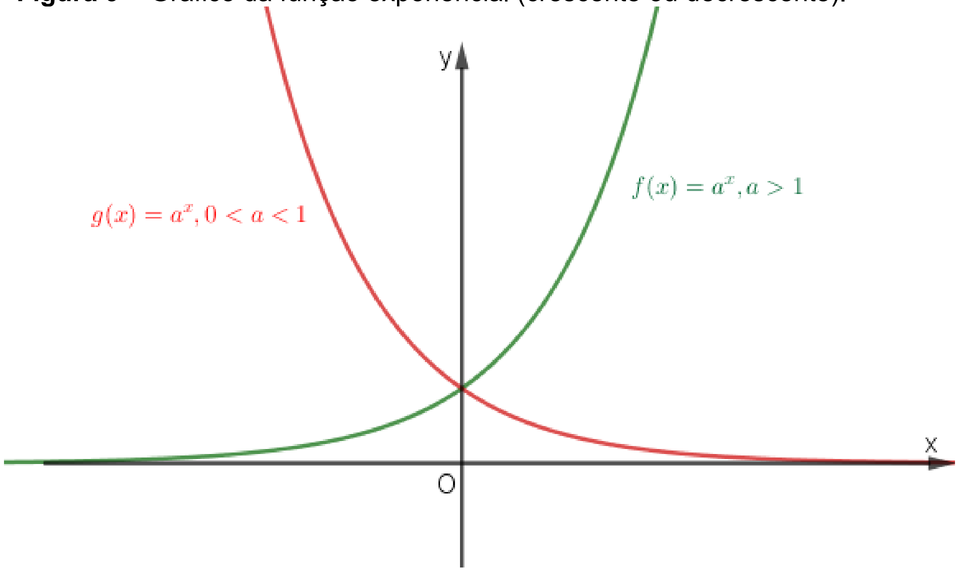
(5) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$ é contínua. Para provarmos essa afirmação, basta verificar que $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$, com $x_0 \in \mathbb{R}$. Escrevendo $x = x_0 + h$, onde $h > 0$, temos $x - x_0 = h$. Logo, $|a^x - a^{x_0}| =$

$a^{x_0}|a^h - 1|$. Sabemos que a^h pode ser tomado tão próximo de 1 quanto desejamos, desde que tomemos h suficientemente pequeno, isto é, $\lim_{h\to 0} a^h = 1$. Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto queiramos, isto é, $\lim_{h\to 0} a^{x_0}|a^h - 1| = 0$. Assim, $\lim_{x\to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$.

(6) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$ é sobrejetiva.

Isto é, para todo $y \in \mathbb{R}^+$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a^x = y$. A demonstração dessa afirmação segue do Lema 3.23 e pode ser encontrada em Lima (2013) (referência 10). Além disso, a função f é positiva ($a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$) e seu gráfico não intercepta o eixo OX, como pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Gráfico da função exponencial (crescente ou decrescente).



Fonte: Autor.

3.6.3 Caracterização da função exponencial

Na Subseção 3.5.3 vimos como caracterizar as funções afins. Agora, veremos como caracterizar as funções exponenciais.

Teorema 3.24 (Caracterização de função exponencial). Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $f(a) = 1$;
(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos provar que $(1) \Rightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1)$. Para mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$, inicialmente, note que a hipótese (1) implica que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(rx) = f(x)^r$. De fato,

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m \Rightarrow f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r.$$

Supondo que $f(1) = a,$ temos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Agora, sem perda de generalidade, suponha que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos, por absurdo, que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Suponhamos também que $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é análogo). Então, pelo Lema 3.23, existe um número $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente e $f(x) < f(r)$, devemos ter $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$, o que é uma contradição e, consequentemente, completamos a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$.

Mostremos que $(2) \Rightarrow (3)$. De fato, usando (2), obtemos

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Falta mostrarmos que $(3) \Rightarrow (1)$. Temos por hipótese, que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$ temos

$$f(nx) = f\left(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\ termos}\right) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)}_{n\ vezes} = f(x)^n.$$

Para mostrar que $f(-nx) = f(x)^{-n}$ quando $n \in \mathbb{N}$, notemos que

$$f(-x)\cdot f(x) = f(-x+x) = f(0) = 1 \ \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Agora, para $n \in \mathbb{N}$ temos

$$f(-nx) = f\left(\underbrace{-x-x-\cdots-x}_{n\ termos}\right) = \underbrace{f(-x)\cdot f(-x)\cdot \ldots \cdot f(-x)}_{n\ vezes} = \frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot \ldots \cdot \frac{1}{f(x)}$$

$$\Rightarrow f(-nx) = f(x)^{-n},$$

e concluímos a demonstração do teorema. ■

Teorema 3.25 (Caracterização das funções de tipo exponencial). Seja $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, o acréscimo relativo $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ depende apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = ba^{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ é uma função tipo exponencial, então $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$ e $\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^{h}$ dependem apenas de h, mas não de x.

Demonstração: Por hipótese, a função $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, onde $b = f(0)$, obtemos que $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ é monótona injetiva, com $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ independente de x e com $f(0) = 1$. Então, tomando $x = 0$ na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Logo, a função monótona injetiva f satisfaz $f(x+h) = f(x)\cdot f(h)$, ou ainda, $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Do Teorema 3.24 segue que $f(x) = a^{x}$, logo $g(x) = b\cdot f(x) = ba^{x}$.

Reciprocamente, se a função $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ é do tipo exponencial, isto é, $g(x) = ba^{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então os quocientes

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = \frac{ba^{x+h}-ba^{x}}{ba^{x}} = \frac{ba^{x}(a^{h}-1)}{ba^{x}} = a^{h}-1 \quad \text{e} \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{ba^{x+h}}{ba^{x}} = a^{h}$$

dependem apenas de h, mas não de x, como queríamos demonstrar. ■

3.6.4 Funções exponenciais e progressões geométricas

Assim como vimos que existe uma relação entre funções afins e progressões aritméticas, veremos agora entre funções exponenciais e progressões geométricas.

Definição 3.26 Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica (a_1, a_2, ..., a_n, ...) em que o quociente entre cada termo, a partir do segundo, e o termo anterior é um valor constante q, denominado razão da PG, isto é,

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots.$$

Exemplo 3.27 A sequência de números reais (2, 4, 8, 16, ...) forma uma progressão geométrica cuja razão é 2.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ba^x$, uma função do tipo exponencial. Se $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ é uma progressão aritmética de razão h, ou seja, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1},\ f(x_2) = ba^{x_2}, \dots,\ f(x_n) = ba^{x_n}, \dots,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h. Com efeito,

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h \Rightarrow \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = a^h.$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da PA $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ é $x_{n+1} = x_1 + nh$, então

$$f(x_{n+1}) = f(x_1 + nh) = f(x_1) \cdot A^n, \quad \text{onde } A = a^h.$$

Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$. Portanto, o $(n+1)$-ésimo termo da PG $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots)$ é $f(x_{n+1}) = b \cdot A^n$.

No Capítulo 4, estudaremos o conteúdo de juros. Dessa forma, por enquanto, apresentamos o seguinte exemplo: se um capital inicial c_0 é aplicado a juros fixos então, depois de decorrido um tempo t, o capital existente é dado por $c(t) = c_0 \cdot a^t$. Se tirarmos extratos das contas nos tempos $0, h, 2h, 3h, \dots$ teremos $c(0) = c_0$, $c(h) = c_0 \cdot A$, $c(2h) = c_0 \cdot A^2$, $c(3h) = c_0 \cdot A^3$, ..., onde $A = a^h$. Portanto, a evolução do saldo, quando calculado em intervalos iguais de h unidades de tempo, é dada pela progressão geométrica: $(c_0, c_0 \cdot A, c_0 \cdot A^2, c_0 \cdot A^3, \dots.)$.

Por fim, o teorema a seguir assegura que a propriedade de transformar toda progressão aritmética em progressão geométrica é característica das funções de tipo exponencial.

Teorema 3.28 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ numa progressão geométrica $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$, onde $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ teremos $f(x) = ba^x$ pra todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $b = f(0)$ e considere a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{f(x)}{b}$. Esta função é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas, e agora tem-se $g(0) = 1$.

Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, note que a sequência $(x, 0, -x)$ é uma progressão aritmética. Daí, a sequência $(g(x), 1, g(-x))$ é uma progressão geométrica, cuja razão é $g(-x)$. Logo $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$.

Agora, dados $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, a sequência $(0, x, 2x, \dots, nx)$ é uma progressão aritmética de razão x. Daí, a sequência $(1, g(x), g(2x), \dots, g(nx))$ é uma progressão geométrica de razão $g(x)$. Assim, seu $(n+1)$-ésimo termo é dado por $g(nx) = g(x)^n$. Para $n \in \mathbb{N}$ temos

$g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}.$

Logo, $g(nx) = g(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Tomando $a = g(1) = \frac{f(1)}{f(0)}$ e usando o Teorema 3.24, obtemos que $g(x) = a^x$. Portanto, $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

3.7 Função logarítmica

Antes de definirmos a função logarítmica, vamos revisar o conceito de função inversa.

3.7.1 Função inversa

Dizemos que a função $g: Y \to X$ é a *inversa* da função $f: X \to Y$ quando

$$g\big(f(x)\big) = x \quad \text{e} \quad f\big(g(y)\big) = y, \quad \text{para quaisquer } x \in X \text{ e } y \in Y.$$

Consequentemente, g é a inversa de f se, e somente se, f é a inversa de g.

Se g é a inversa de f, então $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

Se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então a função f é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Por outro lado, se $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$, então a função f é sobrejetiva. De fato, dado $y \in Y$ arbitrário e tomando $x = g(y) \in X$, obtemos $f(x) = y$.

Dessa forma, se a função $f: X \to Y$ possui inversa, então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre X e Y.

Reciprocamente, se $f: X \to Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y, então f possui uma inversa $g: Y \to X$. Para definirmos a inversa g, note que como f é sobrejetiva, então para todo $y \in Y$ existe algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. E ainda, este x é único, uma vez que f é injetiva. Definimos então $g(y) = x$. Assim, $g: Y \to X$ é a função que associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Além disso, temos que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Se $g: Y \to X$ é a função inversa de $f: X \to Y$, então denotamos por $g = f^{-1}$.

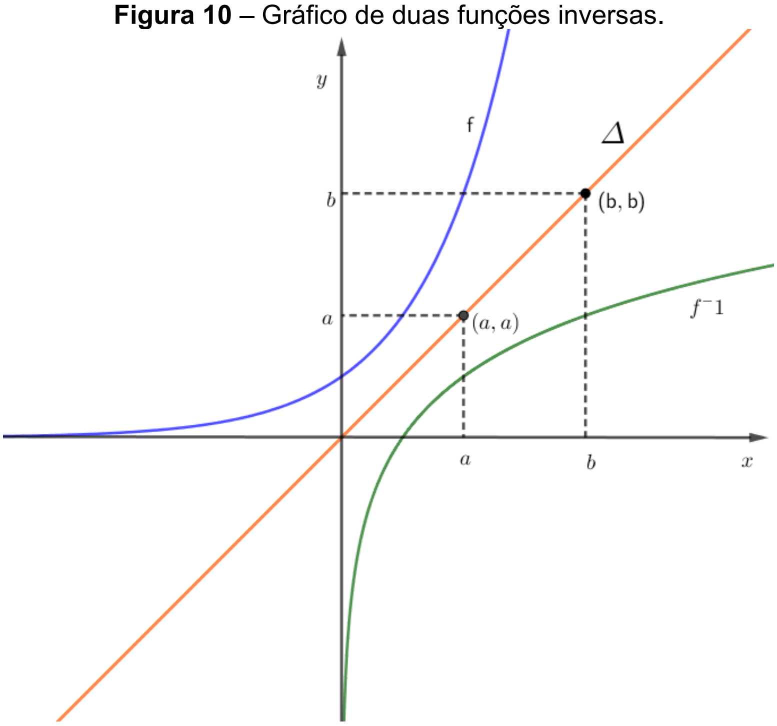
É possível provar que uma função contínua $f: I \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, só pode ser injetiva se for monótona (crescente ou decrescente). Portanto, para que uma função contínua $f: I \to J$, onde I e J são intervalos, possua inversa, é necessário que f seja crescente ou decrescente, além de sobrejetiva

E ainda, a inversa de uma função crescente é crescente e a inversa de uma função decrescente é decrescente.

Se X e Y são conjuntos de números reais e $f^{-1}: Y \to X$ é a função inversa da função $f: X \to Y$, então o gráfico $G^{'}$ da função f^{-1} é o simétrico do gráfico G da função f em relação à diagonal $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, onde Δ é o conjunto dos pontos que possuem abcissas e ordenadas iguais, como pode ser visto na Figura 10. De fato,

$$(x, y) \in G \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in G^{'}.$$

Figura 10 – Gráfico de duas funções inversas.



Fonte: Autor.

3.7.2 A função logarítmica e o seu gráfico

Na Subseção 3.6.2 vimos que, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$, definida por $f(x) = a^x$, é injetiva e sobrejetiva, crescente quando $a > 1$, decrescente quando $0 < a < 1$, e possui a propriedade $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Conforme a Subseção 3.7.1, segue que f possui uma função inversa.

Definição 3.29 A inversa da função exponencial de base a é a função $log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x o número real $log_a x$, chamando o logaritmo de x na base a. Por definição de função inversa, temos

$$a^{log_a x} = x \quad \text{e} \quad log_a(a^x) = x.$$

Portanto, $log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para se obter o número x, isto é,

$$y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ segue que $log_a(xy) = log_a x + log_a y$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. De fato, se $u = log_a x$ e $v = log_a y$ então $a^u = x$ e $a^v = y$. Logo,

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v},$$

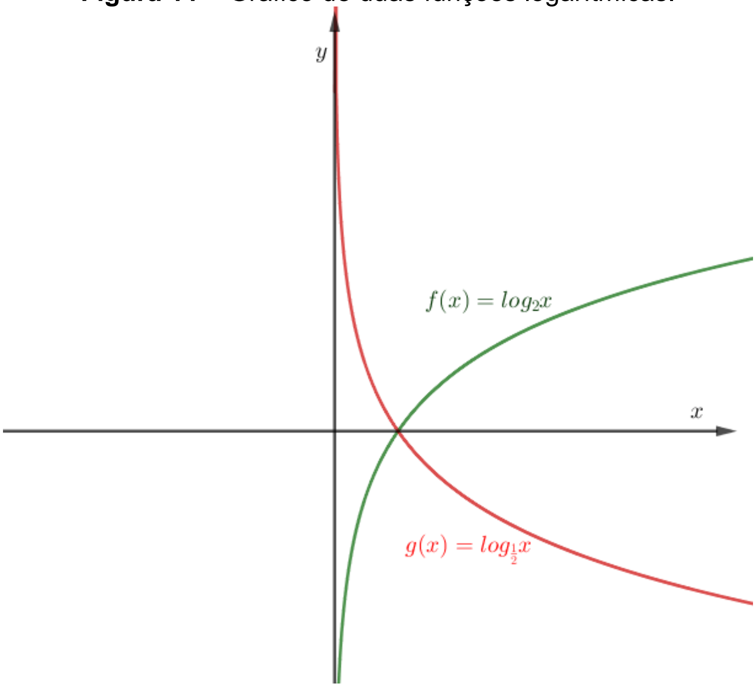
isto é,

$$log_a(xy) = u + v = log_a x + log_a y.$$

A função logarítmica $log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Note que $log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$. É importante ressaltar que somente números positivos possuem logaritmo real, uma vez que a função $x \mapsto a^x$ assume apenas valores positivos.

Para $a > 1$, como $log_a x$ é uma função crescente de x e $log_a 1 = 0$, segue que os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores do que 1 têm logaritmo positivo. Por outro lado, para $0 < a < 1$, $log_a x$ é uma função decrescente de x, então $log_a x$ é positivo quando $0 < x < 1$ e negativo quando $x > 1$. A Figura 11 mostra os gráficos das funções $f(x) = log_2 x$ e $g(x) = log_{\frac{1}{2}} x$.

Figura 11 – Gráfico de duas funções logarítmicas.



Fonte: Autor.

Se tivéssemos traçado os gráficos das funções $y = log_a x$ e $y = log_b x$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer, esses gráficos teriam o mesmo aspecto. Mais precisamente, existiriam constantes c, $d > 0$ tais que $log_a x = c \cdot log_2 x$ e $log_b x = d \cdot log_{\frac{1}{2}} x$ para todo $x > 0$, isto é, duas funções logarítmicas quaisquer diferem por um fator constante. Isso pode ser generalizado através da *Fórmula de Mudança de Base*:

$$log_a x = log_a b \cdot log_b x,$$

que pode ser provada da seguinte forma: se $u = log_a x$ e $v = log_b x$, então $a^u = x$ e $b^v = x$. Logo, se escrevermos $c = log_a b$, teremos $a^c = b$. Assim,

$$a^u = x = b^v = (a^c)^v = a^{cv}.$$

Daí, $u = cv$, isto é, $log_a x = c \cdot log_b x$ para todo $x > 0$, onde $c = log_a b$.

Quando a e b são ambos maiores ou ambos menores do que 1, então $log_a b > 0$. Se um dos números a e b é maior e o outro é menor do que 1, então $log_a b < 0$.

Como $log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca, consequentemente sobrejetiva, então $y = log_a x$ é uma função ilimitada, tanto superiormente quanto inferiormente. Mais precisamente, para $a > 1$ temos

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} log_a x = -\infty.$$

A primeira destas igualdades significa que se pode dar a $log_a x$ um valor tão grande quanto se queira, desde que x seja tomado suficientemente grande. A segunda significa que, dado arbitrariamente $M > 0$, temos que $log_a x < -M$, desde que x seja um número positivo suficientemente pequeno.

Ao contrário da função exponencial, que cresce rapidamente, a função logarítmica $log_a x$ tende $a + \infty$ muito lentamente quando $x \to +\infty$. De fato, dado um número $M > 0$, obtemos que

$$log_a x > M \Leftrightarrow x > a^M.$$

Por exemplo, se quisermos que $log_{10} x$ seja maior do que 10, será preciso tomar $x > 10^{10}$, ou seja, tomar o logaritmo maior do que 10 é necessário um valor de x superior a 10 bilhões. Por outro lado, para ocorrer $10^x > 10$, basta tomar $x > 1$.

O crescimento lento do logaritmo, que contrasta com o crescimento rápido da exponencial, pode ser ilustrado pelos gráficos das funções $y = a^x$ e $y = log_a x$, que, como sabemos, são simétricos em relação à diagonal de $\mathbb{R}^2$, pois uma função é a inversa da outra, como pode ser visto na Figura 10.

3.7.3 Caracterização das funções logarítmicas

Veremos que, entre as funções monótonas injetivas de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$, somente as funções logarítmicas possuem a propriedade de transformar produtos em somas.

Teorema 3.30 (Caracterização das funções logarítmicas). Seja $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então, existe $a > 0$ tal que $f(x) = log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que f é crescente, o outro caso é análogo. Inicialmente, note que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Provaremos o teorema inicialmente supondo que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$. Depois mostraremos que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, temos $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ obtemos

$$f(a^m) = f\left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ vezes}\right) = \underbrace{f(a) + f(a) + \cdots + f(a)}_{m\ termos} = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{m\ termos} = m.$$

Assim,

$$0 = f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}) \Rightarrow f(a^{-m}) = -m.$$

Se $r = \frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = f\left(\underbrace{a^r \cdot a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r}_{n\ vezes}\right)$$

$$= \underbrace{f(a^r) + f(a^r) + \cdots + f(a^r)}_{n\ termos} \Rightarrow m = nf(a^r) \Rightarrow f(a^r) = \frac{m}{n} = r.$$

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para r, s racionais, obtemos

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Portanto, todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x, é também maior do que $f(a^x)$. Logo, $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Caso contrário, $f(a^x) < x$ ou $x < f(a^x)$. Se $f(a^x) < x$, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, existiria $r \in \mathbb{Q}$ com $f(a^x) < r < x$. Com todo racional menor que x é também menor do que $f(a^x)$, isto não pode ocorrer. Analogamente, não pode ocorrer $x < f(a^x)$. Portanto, $f(y) = log_a y$ para todo $y > 0$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, sem mais nenhuma hipótese. Note que $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, é crescente, transforma somas em produtos e satisfaz $f(2) = 1$. Logo, usando a primeira parte da demonstração, temos $f(x) = log_2 x$ para todo $x > 0$. Assim, para todo $x > 0$,

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = \left(2^{\frac{1}{b}}\right)^{g(x)} = a^{g(x)},$$

com $a = 2^{\frac{1}{b}}$. Tomando log_a de ambos os membros da igualdade acima, obtemos $g(x) = log_a x$. ■

4 TÓPICOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo, iremos apresentar os principais tópicos da matemática financeira. São eles: juros simples, juros compostos, taxas de juros, séries uniformes e sistema de amortização. É importante salientar que os conteúdos apresentados neste capítulo foram adaptados de Assaf (2012), Lima (2016), Morgado (2015) e Puccini (2016) (ver referências 1, 11, 14 e 18, respectivamente). Além disso, as figuras e exemplos são de autoria da própria autora, bem como alguns detalhes nas demonstrações dos resultados.

Uma das muitas aplicações da matemática em situações cotidianas é a resolução de problemas financeiros. Para um exercício pleno da cidadania é fundamental que o aluno adquira conhecimentos sobres operações financeiras simples, como cálculo de empréstimos, financiamentos, pagamentos de impostos, taxas de juros, descontos, análise de investimentos. A aquisição desses conhecimentos possibilita um melhor controle do orçamento pessoal, um melhor planejamento familiar e fundamenta a tomada de decisões de consumo mais conscientes, buscando, assim, uma maior estabilidade financeira. Para Puccini (2016) (ver referência 18):

> A Matemática Financeira é um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo; para isso, cria modelos que permitem avaliar e comparar o valor do dinheiro em diversos pontos do tempo. (PUCCINI, 2016, p. 11)

4.1 Juros

Inicialmente, apresentaremos a definição de matemática financeira.

Definição 4.1 A matemática financeira é o estudo da aplicação do dinheiro ao longo do tempo, considerando o fenômeno dos juros.

De uma forma simplificada, a taxa de juros pode ser vista como o valor da mercadoria dinheiro. Quando uma pessoa quer comprar algo e não possui o dinheiro para pagar à vista, ela pode efetuar o pagamento a prazo ou através de um empréstimo, porém, em ambos os casos, pagará um valor além do bem adquirido, referente ao “aluguel” do dinheiro emprestado. Segundo Assaf (2012) (ver referência 1):

> Receber uma quantia hoje ou no futuro não são evidentemente a mesma coisa. Em princípio, uma unidade monetária hoje é preferível à mesma unidade monetária disponível amanhã. Postergar uma entrada de caixa (recebimento) por certo tempo envolve um sacrifício, o qual deve ser pago mediante uma recompensa, definida pelos juros. Desta forma, são os juros que efetivamente induzem o adiamento do consumo, permitindo a formação de poupanças e de novos investimentos na economia. (ASSAF, 2012, p. 1)

Definição 4.2 Juros é a remuneração ou a recompensa paga pelo uso do dinheiro de outrem.

Os fatores fundamentais que afetam os valores das taxas de juros são:

- **Inflação**: A perda do poder de compra causado pela inflação.
- **Risco**: A chance de quem pegou o empréstimo não devolver o dinheiro, as incertezas com relação ao futuro e a confiabilidade do agente tomador do dinheiro.
- **Ganho**: Os juros devem gerar um lucro ao proprietário do capital, como forma de compensar a privação do seu dinheiro por um determinado tempo.
- **Despesas**: Os juros devem cobrir os custos operacionais, contratuais e tributários para a formalização do empréstimo e a efetivação da cobrança.

No mercado financeiro existem algumas modalidades de juros, dentre as quais podemos destacar:

- **Juros de mora**: Os juros de mora aparecem exatamente quando existe atraso no pagamento de alguma conta. Eles são cobrados sobre o valor em aberto e aumentam conforme o atraso no pagamento – em outras palavras, quanto mais tempo uma conta ficar em aberto depois de seu vencimento, mais a pessoa pagará de juros.
- **Juros nominais**: Consistem na taxa de juros indicada na hora da adesão a uma transação financeira. Seja em empréstimos, seja em aplicações, o valor dado é o total, sem abatimento da inflação. Por exemplo, se um investimento

especifica que a rentabilidade é de 10% ao ano, saiba que esses são os juros nominais. No entanto, essa porcentagem não representa o ganho real da sua aplicação.

- **Juros reais**: Nada mais são do que os juros nominais com o desconto do valor da inflação acumulada no intervalo. O nome real, inclusive, não é por acaso, uma vez que as tarifas equivalem fielmente o saldo da operação. Por exemplo, se determinada aplicação indica que a rentabilidade do fundo é de 10% ao ano, mas a inflação nesse intervalo de tempo se conserva na casa dos 4,5%, os juros reais, na verdade, são de 5,5%.
- **Juros rotativos**: São chamados de juros rotativos aqueles cobrados pelo atraso no pagamento da fatura de cartão de crédito, sobre limite de contas correntes ou sobre a diferença financiada.
- **Juros simples**: Ao contrário dos juros compostos, nessa situação o juro é pago apenas sobre o valor do principal (ou montante) do empréstimo ou aplicação, não incidindo juros sobre juros.
- **Juros sobre capital próprio**: Estes são pagos sempre com base no lucro retido pela instituição em anos anteriores. Trata-se de uma das formas de retribuição que uma empresa pode dar aos seus sócios; a outra seria o pagamento de dividendos.
- **Juros compostos**: São juros sobre juros, apurados não apenas sobre o valor do principal, mas também sobre os juros obtidos em relação ao principal nos períodos anteriores.

4.1.1 Juros simples

Segundo Morgado (2015) (ver referência 14), a operação básica da matemática financeira é o empréstimo.

> Alguém que dispõe de um capital *C* (chamado de principal), empresta-o a outrem por um certo período de tempo e após esse período, ele recebe o seu capital *C* de volta, acrescido de uma remuneração *J* pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. (MORGADO *et al*, 2015, p. 86)

Sejam C o capital principal e J o juro. Chamaremos de montante M o valor acumulado após determinado período, logo

$$M = C + J.$$

A razão $i = \frac{J}{C}$ é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período de tempo da operação e chamada de *taxa de juros*. Para obtermos os juros de um determinado capital, decorre da fórmula anterior que

$$J = C \cdot i.$$

No regime de juros simples, os juros de cada intervalo são calculados sempre sobre o mesmo capital principal, uma vez que não existe capitalização de juros nesse regime. Consequentemente, o capital aumentará a uma taxa linear e a taxa de juros terá um comportamento linear em relação ao tempo, podendo ser visto como uma função afim ou como uma PA. Portanto, no regime de juros simples, o rendimento mensal é sempre calculado pelo produto da taxa pelo capital inicial, da seguinte forma:

Passada uma unidade de tempo $\rightarrow\ J = C \cdot i.$
Passadas duas unidades de tempo $\rightarrow\ J = C \cdot i + C \cdot i = 2 \cdot C \cdot i.$
Passadas três unidades de tempo $\rightarrow\ J = C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i = 3 \cdot C \cdot i.$

$$\vdots$$

Passadas n unidades de tempo $\rightarrow\ J = C \cdot i + \cdots + C \cdot i + C \cdot i = C \cdot i \cdot n.$

Como o montante é $M = C + J$, então passada n unidades de tempo, temos

$$M = C + C \cdot i \cdot n \ \Rightarrow\ M = C(1 + i \cdot n).$$

Exemplo 4.3 Maria contraiu de uma amiga um empréstimo de R$ 1.000,00, em regime de juros simples, à taxa de 5% ao mês, sem prazo determinado para pagar. Vamos calcular os montantes mês a mês.

Como a taxa é de 5% ao mês, temos que o juro mensal será

$J = C \cdot i \Rightarrow J = 1000 \cdot 0{,}05 = 50.$

Logo, após:

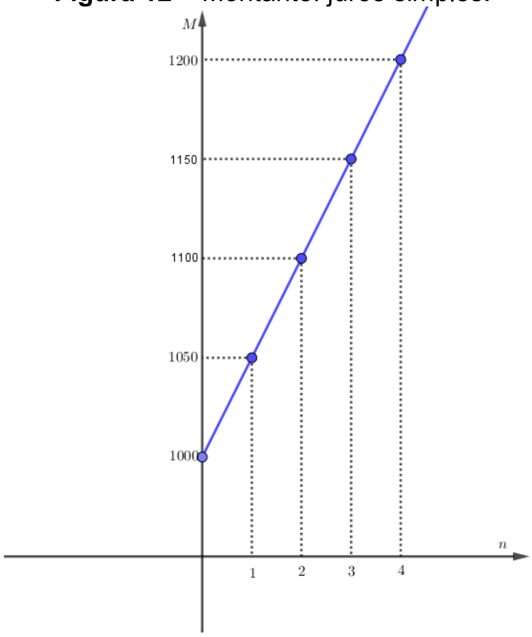
1 mês o montante a ser pago será: $M_1 = 1.000 + 50 = 1.050.$
2 meses o montante a ser pago será: $M_2 = 1.100.$
3 meses o montante a ser pago será: $M_3 = 1.150.$
4 meses o montante a ser pago será: $M_4 = 1.200.$

$\vdots$

n meses o montante será: $M_n = 1.000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot n)$ ou $M_n = 1.000 + 50 \cdot n.$

Podemos perceber que o montante pode ser visto como uma progressão aritmética de primeiro termo 1.000 e razão 50 ou como uma função afim $f(x) = ax + b$, onde o $a = 50$ e $b = 1.000$. Podemos ver a representação gráfica do montante na Figura 12.

Figura 12 – Montante: juros simples.



Fonte: Autor.

Maria decide que irá pagar o que deve à amiga após 12 meses de ter adquirido o empréstimo, decidiu então fazer os cálculos para determinar o valor a ser pago:

$M_{12} = 1.000 \cdot (1 + 0,05 \cdot 12) \Rightarrow M_{12} = 1.000 \cdot (1,6) \Rightarrow M_{12} = 1.600.$

4.1.2 Juros compostos

O regime de juros compostos é o mais empregado no sistema financeiro. Nele o lucro gerado em cada período é adicionado ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte, ou seja, os juros também passam a render juros. Os juros são calculados sobre o valor total existente no final do período anterior e não sobre o capital inicial.

Exemplo 4.4 Maria contraiu de uma amiga um empréstimo de R$ 1.000,00, mas agora em regime de juros compostos, com taxa de 5% ao mês, para pagar após 4 meses.

Vamos calcular os montantes mês a mês. Logo, após:

1 mês o montante a ser pago será:
$M_1 = 1.000 + 1.000 \cdot 0,05 = 1.000 + 50 = 1.050.$
2 meses o montante a ser pago será:
$M_2 = 1.050 + 1.050 \cdot 0,05 = 1.050 + 52,50 = 1.102,50.$
3 meses o montante a ser pago será:
$M_3 = 1.102,50 + 1.102,50 \cdot 0,05 = 1.102,50 + 55,125 = 1.157,625.$
4 meses o montante a ser pago será:
$M_4 = 1.157,625 + 1.157,625 \cdot 0,05 = 1.157,625 + 57,88125 = 1.215,50625.$

Logo, após 4 meses Maria deverá devolver a amiga aproximadamente R$ 1.215,51.

Comparando os Exemplos 4.3 e 4.4, podemos perceber que o mesmo capital aplicado à mesma taxa de juros, e pelo mesmo período, rende valores diferentes no sistema de capitalização simples e composta. Em 4 meses no sistema de juros simples a dívida chegou a R$1.200,00, e no sistema de juros compostos chegou a R$ 1.215,51. No sistema de juros compostos o montante cresce muito mais rápido.

Teorema 4.5 Considerando o regime de juros compostos de taxa i, então um capital principal C_0 converte-se, depois de n períodos de tempos, em um montante dado por

$M = C_0(1+i)^n$.

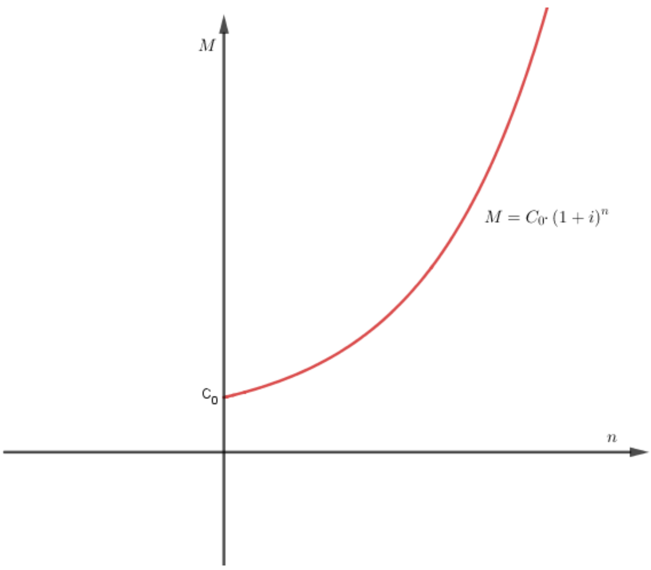
Demonstração: Calculando o montante M produzido por um capital C_0, aplicado à taxa i ao período de tempos, no fim de n períodos de tempos, temos

1º período: $C_1 = C_0 + i \cdot C_0 = C_0(1+i)$.
2º período: $C_2 = C_1 + i \cdot C_1 = C_1(1+i) = C_0(1+i) \cdot (1+i) = C_0(1+i)^2$.
3º período: $C_3 = C_2 + i \cdot C_2 = C_2(1+i) = C_0(1+i)^2 \cdot (1+i) = C_0(1+i)^3$.

Note que a sequência $(C_o, C_1, C_2, C_3, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão $1+i$. Logo, para n períodos de tempos, teremos $M = C_0(1+i)^n$. ■

Além disso, o gráfico que representa o montante no sistema de capitalização composto é uma função do tipo exponencial, como pode ser visto na Figura 13.

Figura 13 – Montante: juros compostos.



Fonte: Autor.

Corolário 4.6 Considerando o regime de juros compostos de taxa i e C_0 o capital principal, então os juros obtidos no final de n períodos de tempos é dado por

$J = C_0[(1+i)^n - 1]$.

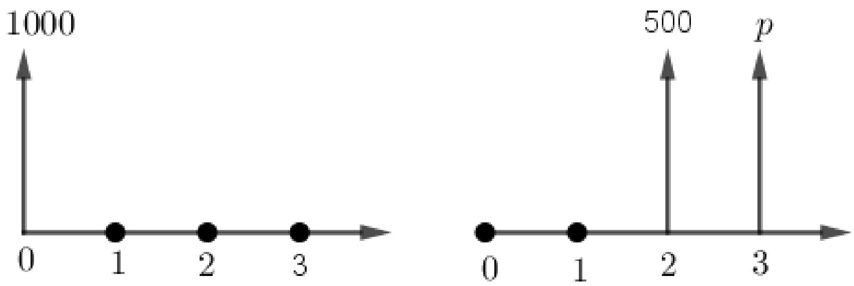
Demonstração: Usando o Teorema 4.5, os juros ao final de n períodos de tempos em regime de capitalização composta é dado por

$$M = C_0 + J \Rightarrow J = M - C_0 \Rightarrow J = C_0(1+i)^n - C_0 \Rightarrow J = C_0[(1+i)^n - 1]. \blacksquare$$

Observação 4.7 O Teorema 4.5 nos mostra que para obter o valor futuro de uma quantia, basta multiplicá-la por $(1+i)^n$, e para obter o valor presente de uma quantia futura, basta dividi-la por $(1+i)^n$.

Exemplo 4.8 Tomou-se um empréstimo de R$ 1.000,00 a juros compostos mensais de 5%. Após dois meses, pagou-se R$ 500,00 e, um mês após esse pagamento, finalizou sua dívida (ver Figura 14). De quanto foi o último pagamento?

Figura 14 – Montante: formas de pagamentos equivalentes.



Fonte: Autor.

Para resolver a situação, é preciso igualar os valores pagos e recebidos em uma mesma data (data inicial, por exemplo). Lembrando que só é possível comparar quantias quando elas estiverem se referindo a uma mesma data, temos:

i) O valor R$ 1.000,00 já está se referindo ao período inicial (0).
ii) O valor R$ 500,00 deverá retroceder dois meses, isto é, deverá ser transformado do futuro para o atual em dois meses; para isso devemos dividi-lo por $(1+i)^2$.

iii) Denotando por P a última parcela, o valor P deverá ser transformado do futuro para o atual, isto é, retroceder três meses, logo, deverá ser dividido por $(1+i)^3$.

Portanto, para encontrar o valor da prestação P, fazemos

$$1.000 = \frac{500}{(1+0{,}05)^2} + \frac{P}{(1+0{,}05)^3}.$$

Efetuando os cálculos, obtemos $P =$ R$ 632,625.

4.2 Taxa de juros

Segundo Silva (2015) (ver referência 22), a *taxa de juros* é a razão entre o valor que se pagou ou recebeu de juros e o capital, ela é combinada entre as partes envolvidas na transação e leva em consideração os riscos e o tempo de duração do negócio.

4.2.1 Taxas proporcionais

Duas taxas i_1 e i_2 são denominadas *proporcionais* quando seus valores formam uma proporção com os seus respectivos períodos de tempo n_1 e n_2, reduzidos numa mesma unidade, isto é,

$$\frac{i_1}{n_1} = \frac{i_2}{n_2}.$$

É uma característica da capitalização simples. O conceito de taxas proporcionais é empregado somente para capitalização simples, no sentido de que o valor dos juros é linearmente proporcional ao tempo. Assim, as taxas de 48% ao ano, 24% ao semestre, 12% ao trimestre e 4% ao mês são proporcionais, pois, se tomarmos meses como unidade de tempo, teremos

$$\frac{48\%}{12} = \frac{24\%}{6} = \frac{12\%}{3} = \frac{4\%}{1} = 4\%.$$

4.2.2 Taxas equivalentes

Duas taxas são denominadas *equivalentes* quando são dadas em referências temporais diferentes, mas geram o mesmo montante se aplicadas ao mesmo capital, em um mesmo período.

Teorema 4.9 Considerando o regime de juros simples, então duas taxas são equivalentes se, e somente se, elas são proporcionais.

Demonstração: Sejam m_1 e m_2 as unidades distintas de tempo referidas às taxas i_1 e i_2, respectivamente. Existe um k real tal que $\frac{1}{k} \cdot m_2 = m_1$, ou seja, $\frac{1}{k}$ é a fração que a unidade de tempo m_2 é de m_1. Assim, reduzindo as duas taxas à unidade de tempo comum m_2, os valores $\frac{1}{k}$ e 1 são os períodos das taxas i_1 e i_2 na unidade de tempo m_2, respectivamente. Agora, seja t o tempo de uma aplicação de um capital C. Escrevendo t nas unidades m_1 e m_2, obtemos $t = k_1 \cdot m_1 = k_2 \cdot m_2$, onde $k_1 \neq k_2$. Logo, $k_1 \cdot \frac{1}{k} \cdot m_2 = k_2 \cdot m_2$, o que implica que $k_1 = k \cdot k_2$.

Com essas considerações, obtemos que i_1 e i_2 são proporcionais se, e somente se,

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\frac{1}{k}}{1} \Leftrightarrow i_2 = k \cdot i_1 \Leftrightarrow (C \cdot k_2) \cdot i_2 = (C \cdot k_2) \cdot k \cdot i_1 \Leftrightarrow C \cdot k_2 \cdot i_2 = C \cdot (k_2 \cdot k) \cdot i_1$$

$$\Leftrightarrow C \cdot k_2 \cdot i_2 = C \cdot k_1 \cdot i_1 \Leftrightarrow j_1 = j_2,$$

isto é, i_1 e i_2 são equivalentes.■

A seguir, em capitalização composta, o teorema nos mostra quando duas taxas são equivalentes.

Teorema 4.10 Sejam i e j taxas referidas às unidades de tempos u_i e u_j, respectivamente. Se $u_j = n \cdot u_i$ então i e j são equivalentes se, somente se,

$$1 + i = (1 + j)^n. \qquad (4.1)$$

Demonstração: Seja C um capital aplicado por um tempo k. Logo, i e j são equivalentes se, e somente se,

$$C \cdot (1+i)^{u_i} = C \cdot (1+j)^{u_j} \Leftrightarrow C \cdot (1+i)^{u_i} = C \cdot (1+j)^{n \cdot u_i} \Leftrightarrow 1+i = (1+j)^n. \blacksquare$$

4.2.3 Taxas efetivas

Taxa efetiva é aquela na qual a unidade referencial de tempo de capitalização coincide com a que ela se refere. Por exemplo:

- 10% ao mês, capitalizados mensalmente.
- 5% ao trimestre, capitalizados trimestralmente.
- 30% ao ano, capitalizados anualmente.

4.2.4 Taxas nominais

A *taxa nominal* é quando o período de formação e incorporação dos juros ao capital não é igual com aquele a que a taxa está referida. A taxa nominal é sempre fornecida em termos anuais, e os períodos de capitalização podem ser semestrais, trimestrais, mensais ou diários. A taxa efetiva por período de capitalização é proporcional à taxa nominal. Logo, ao nos depararmos com uma taxa nominal em uma negociação, devemos primeiro determinar a taxa proporcional no regime de juros simples, e daí, se necessário, calcular as taxas equivalentes no período de juros compostos.

Exemplo 4.11 Admita que um valor qualquer é emprestado e pago a juros compostos de 12% ao ano, capitalizados mensalmente, e 12% é a taxa nominal, ela é proporcional a taxa efetiva por período de capitalização, no caso mensal. Logo, 12% ao ano equivale a 1% ao mês e 1% é a taxa efetiva mensal. Para calcular a taxa efetiva anual, temos que usar a fórmula (4.1). Sendo i a taxa efetiva anual e j a taxa efetiva mensal, temos

$$1+i = (1+j)^n \Leftrightarrow 1+i = (1+0{,}01)^{12} \Leftrightarrow i = (1{,}01)^{12} - 1 \Leftrightarrow i = 0{,}126825$$

$\Leftrightarrow\ i = 12{,}68\%$ ao ano.

Portanto, 12,68% é a taxa efetiva anual.

4.2.5 Taxas aparente e real

A *taxa de juros real* nomeia-se dessa forma justamente por ser um indicador que apresenta, por exemplo, a rentabilidade de um investimento, descontado o impacto da inflação. Quando se tem um empréstimo, ela mostra o quanto a instituição bancária lucrou realmente com a quantia envolvida na transação – porque, novamente, a porcentagem de juros expressa não considera o fator inflacionário.

Exemplo 4.12 Considere que uma pessoa aplicou um capital de R$ 1.000,00 a 20% ao ano. No mesmo período, a inflação foi de 5%. Qual é a taxa de juros real?

i) Montante da aplicação a juros de 20% ao ano:
$M_A = 1000 \cdot (1 + 0{,}20)^1 = 1000 \cdot (1{,}2)^1 = 1.200.$

ii) Montante da aplicação a juros de 5% ao ano:
$M_A = 1000 \cdot (1 + 0{,}05)^1 = 1000 \cdot (1{,}05)^1 = 1.050.$

Logo, se a pessoa tivesse recebido R$ 1.050,00, não haveria ganhado nada, apenas teria ocorrido uma correção monetária do capital aplicado. Mas como ela recebeu R$ 1.200,00, logo ela teve um ganho real R$ 150,00.

Sendo assim,

$$taxa\ real = \frac{ganho\ real}{capital\ corrigido} = \frac{1200 - 1050}{1050} = \frac{150}{1050} = 0{,}142857 \quad \text{ou} \quad 14{,}29\%.$$

Logo, se um valor C é aplicado durante um certo prazo, a uma taxa i_a, o capital acumulado será $M_1 = C(1 + i_a)$. A taxa i_a é chamada de *taxa de juros aparente*. Se no mesmo período a taxa de inflação for de i_i, o capital corrigido pela inflação será $M_2 = C(1 + i_i)$. Note que se $M_1 = M_2$, a taxa de juros apenas recompôs o poder aquisitivo do capital C. Se $M_1 > M_2$, houve um ganho real e se $M_1 < M_2$, ocorreu uma perda real. É chamado *de valor real* a diferença $M_1 - M_2$. A taxa de variação de C em relação ao reajuste inflacionário é denominada *de taxa real*, i_r.

Teorema 4.13 Se i_a é a taxa aparente de juros, i_r é a taxa real de juros e i_i é a taxa de inflação, todas referidas no mesmo período, então

$$(1 + i_a) = (1 + i_i)(1 + i_r).$$

Demonstração:

$$i_r = \frac{ganho\ real}{capital\ corrigido} \Leftrightarrow i_r = \frac{C(1 + i_a) - C(1 + i_i)}{C(1 + i_i)} \Leftrightarrow i_r = \frac{(1 + i_a) - (1 + i_i)}{(1 + i_i)}$$

$$\Leftrightarrow i_r = \frac{(1 + i_a)}{(1 + i_i)} - \frac{(1 + i_i)}{(1 + i_i)} \Leftrightarrow i_r = \frac{(1 + i_a)}{(1 + i_i)} - 1 \Leftrightarrow 1 + i_r = \frac{(1 + i_a)}{(1 + i_i)}$$

$$\Leftrightarrow (1 + i_a) = (1 + i_r)(1 + i_i).\blacksquare$$

4.3 Séries uniformes

Nas operações financeiras o pagamento ou recebimento do capital pode ser feito de única vez ou através de uma série de recebimentos ou pagamentos. Quando o intuito é formar um capital em uma data posterior, temos um processo de capitalização. No entanto, quando o objetivo é pagar uma dívida, temos um processo de amortização. Também acontece o caso em que tenhamos feito o pagamento pelo uso, sem que tenhamos amortização, como é o caso dos aluguéis.

Essas séries podem ser classificadas da seguinte forma:

- **Quanto à periodicidade:**
  - Periódica: quando todos os períodos são idênticos;
  - Não periódica: quando os períodos não são idênticos entre si.
- **Quanto ao prazo:**
  - Temporárias: caso o prazo for limitado;
  - Perpétuas: quando o prazo for ilimitado.
- **Quanto ao valor dos pagamentos:**
  - Uniforme ou constante: caso todos os pagamentos forem idênticos;

- Variável: caso os pagamentos não forem idênticos entre si.

- **Quanto à forma de pagamento ou recebimento:**

  - Imediatas: quando os pagamentos são exigíveis a partir do primeiro período.

    i- Postecipadas: caso os pagamentos acontecerem ao final de cada período;

    ii- Antecipadas: caso os pagamentos acontecerem no início de cada período;

  - Diferidas: se os pagamentos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período, e nomeamos esse prazo de prazo de diferimento ou prazo de carência.

Para calcular o valor presente ou valor futuro de uma série, é necessário determinar uma data base, para comparar os valores, usamos a fórmula (4.1), multiplicando ou dividindo um valor C por $(1+i)^n$ para levar a quantia C para n períodos para frente ou para trás.

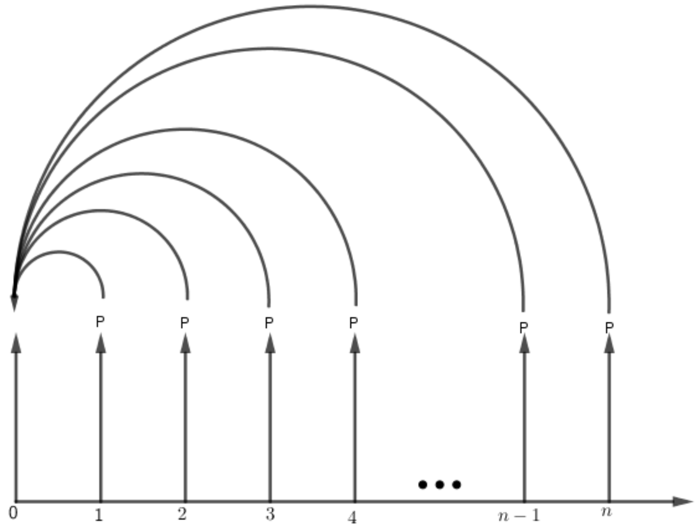
4.3.1 Séries uniformes de pagamentos postecipados

Nas séries uniformes com termos postecipados, os recebimentos ou pagamentos são feitos ao final de cada período de tempo a que se refere a taxa de juros considerada, ou seja, são aquelas em que o primeiro pagamento ocorre no momento 1, também denominado sistema sem entrada. A demonstração do conceito de valor presente A, em uma série uniforme postecipada, consiste em trazer cada um dos termos para a data base e, na sequência, somá-los, obtendo o valor presente.

Teorema 4.14 Seja i a taxa de juros. Então o valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é dado por

$$A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{4.2}$$

Figura 15 – Esquema de série uniforme de pagamento postecipado.



Fonte: Autor.

Demonstração: Deslocando todos os pagamentos para data base zero (ver Figura 15), resulta o primeiro pagamento $\frac{P}{(1+i)}$, o segundo $\frac{P}{(1+i)^2}$, e o n-ésimo $\frac{P}{(1+i)^n}$. Então,

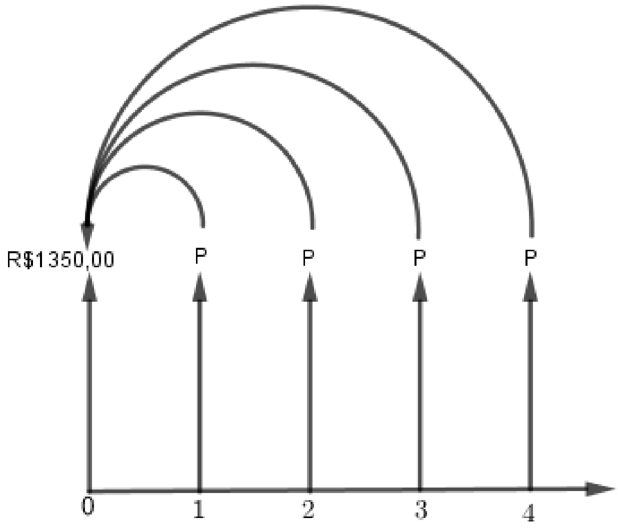
$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n} \Rightarrow A = P\left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

O termo que está dentro do colchete é uma PG cujo o primeiro termo é $a_1 = \frac{1}{(1+i)}$ e a razão é $q = \frac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1}$, como a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG é $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, temos

$$A = P\left[\frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}\right] \Rightarrow A = P\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)-1}\right] \Rightarrow A = P\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \blacksquare$$

Exemplo 4.15 Uma pessoa quer parcelar sua dívida no valor à vista de R$ 1.350,00 em quatro parcelas, mensais, iguais e sucessivas, com o primeiro pagamento ocorrendo depois de decorridos 30 dias do ajuste. Qual o valor das prestações mensais devidas se a taxa de juros for de 5% ao mês?

Figura 16 – Série de pagamento postecipado antes do primeiro pagamento.



Fonte: Autor.

Sendo o valor atual $A = 1.350$, a taxa de juros $i = 0{,}05$ e o número de pagamentos $n = 4$ (ver Figura 16), utilizando a fórmula (4.2), temos

$$1350 = P\left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-4}}{0{,}05}\right].$$

Efetuando os cálculos, teremos $P = 380{,}72$. Logo, o valor de cada prestação deverá ser R$ 380,72.

Corolário 4.16 Sejam i a taxa de juros e n o número de pagamentos iguais a P**.** Então, o valor de uma série uniforme na época do último pagamento é

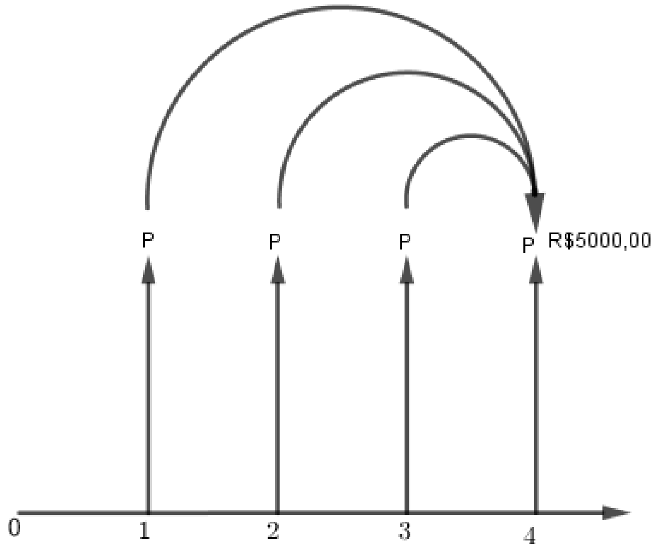
$$F = P\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]. \tag{4.3}$$

Demonstração: Pelo Teorema 4.14, temos que o valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é $A = P\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$. Fazendo $F = A \cdot (1+i)^n$ temos

$$F = P\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot (1+i)^n \Rightarrow F = P\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]. \blacksquare$$

Exemplo 4.17 Um cidadão tem o desejo de constituir uma poupança futura para comprar uma mercadoria cujo valor é R$ 5.000,00. Para isso, ele decide efetuar quatro depósitos mensais iguais e postecipados em uma aplicação remunerada, com taxa de juros de 5% ao mês. Qual o valor desses depósitos mensais? Considere que o preço da mercadoria permaneça constante.

Figura 17 – Série de pagamento postecipado no último pagamento.



Fonte: Autor.

Sendo o valor futuro $F = 5.000$, a taxa de juros $i = 0{,}05$ e o número de pagamentos $n = 4$ (ver Figura 17), utilizando a fórmula (4.3), temos

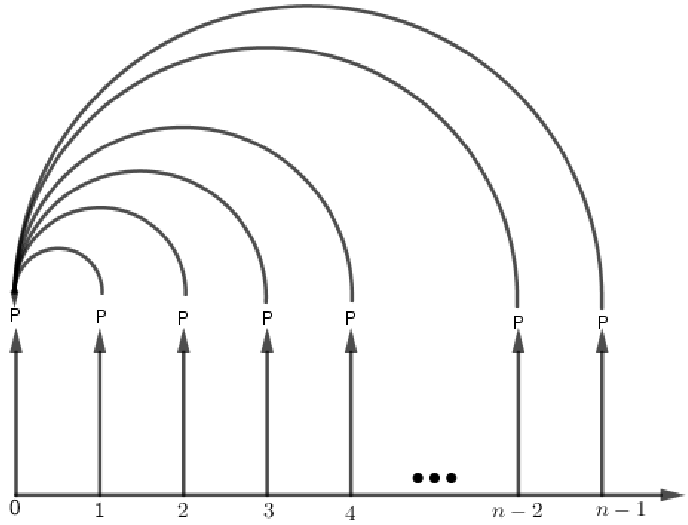
$$5.000 = P\left[\frac{(1 + 0{,}05)^4 - 1}{0{,}05}\right].$$

Efetuando os cálculos teremos $P = 1.160{,}06$. Logo, o valor de cada prestação deverá ser R$ 1.160,06.

4.3.2 Séries uniformes de pagamentos antecipadas

Nas séries uniformes com termos antecipados, os pagamentos ou recebimentos são efetuados no início de cada intervalo de tempo a que se refere a taxa de juros considerada. Assim, a primeira prestação é sempre paga ou recebida no momento “zero”, ou seja, na data do contrato, do empréstimo, do financiamento ou de qualquer outra operação que implique pagamentos ou recebimentos de prestações. Veja o esquema na Figura 18.

Figura 18 – Esquema de série uniforme de pagamento antecipado.



Fonte: Autor.

Teorema 4.18 Sejam i a taxa de juros e n o número de pagamentos iguais a P. Então, para uma série uniforme de n termos antecipados, o valor atual A é dado por

$$A = P \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]. \qquad (4.4)$$

Demonstração: Utilizando o Teorema 4.14, onde é dado o valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, aplicado a série antecipada, decorre que o valor atual A cairá uma data base a menos do que o pretendido, o qual chamamos de “-1.” Daí, dividindo A por $(1+i)$ obtemos a igualdade do valor atual com a série antecipada, isto é,

$$\frac{A}{(1+i)} = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \Rightarrow A = P \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right].$$

em data base zero. ■

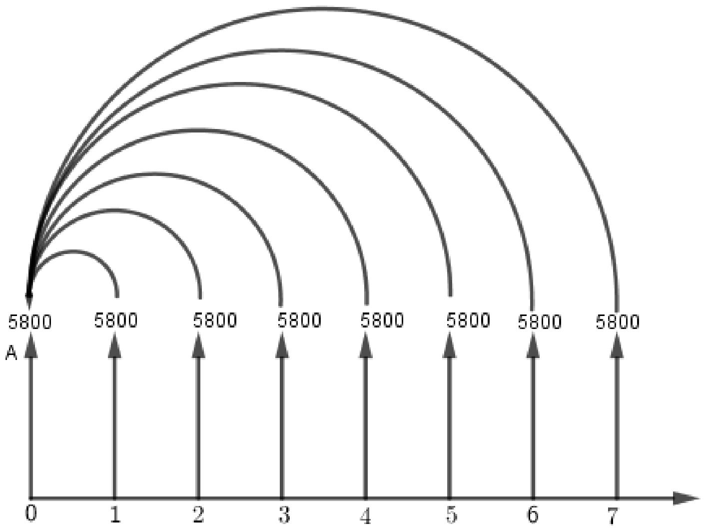
Exemplo 4.19 Uma mercadoria está sendo ofertada, no crediário, para pagamento em oito prestações mensais iguais e consecutivas de R$ 5.800,00. Sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada é de 10% ao mês e que a primeira prestação deve ser paga no momento da compra, determinar o valor à vista dessa mercadoria.

Sendo $P = 5.800$ o valor da parcela, a taxa de juros $i = 0{,}1$ e o número de pagamentos $n = 8$ (ver Figura 19), utilizando a fórmula (4.4), temos

$$A = 5.800 \cdot (1 + 0{,}1) \cdot \left[\frac{1 - (1 + 0{,}1)^{-8}}{0{,}1}\right].$$

Efetuando os cálculos teremos $A = 34.036{,}83$. Logo, o preço à vista da mercadoria é R$ 34.036,83.

Figura 19 – Série de pagamento antecipado antes do primeiro pagamento.



Fonte: Autor.

Corolário 4.20 Sejam i a taxa de juros e n o número de pagamentos iguais a P**.** Então, o valor de uma série antecipada um período após o seu último termo é

$$F = P \cdot (1 + i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]. \tag{4.5}$$

Demonstração: Pelo Teorema 4.18 temos que o valor atual da série é dado por $A = P \cdot (1 + i) \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$ na data base zero. Fazendo $F = A \cdot (1 + i)^n$ temos

$$F = P \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot (1+i)^n \Rightarrow F = P \cdot (1+i) \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]. \blacksquare$$

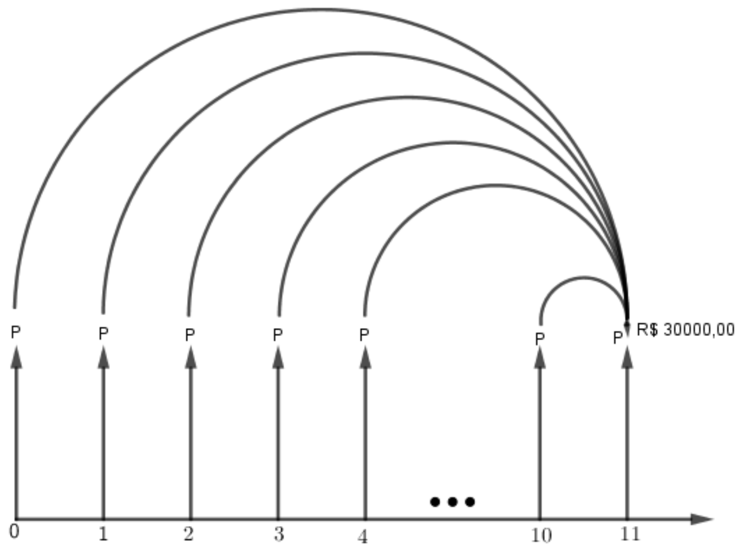
Exemplo 4.21 Quanto terei de aplicar mensalmente, a partir de hoje, para acumular, no final de 12 meses, um montante no valor de R$ 30.000,00, sabendo-se que a taxa de juros compostos a ser firmada é de 3% ao mês e que serão 12 aplicações serão iguais?

Sendo o valor futuro $F = 30.000$, a taxa de juros $i = 0{,}03$ e o número de pagamentos $n = 12$ (ver Figura 20), utilizando a fórmula (4.5), temos

$$30.000 = P \cdot (1 + 0{,}03) \cdot \left[\frac{(1 + 0{,}03)^{12} - 1}{0{,}03}\right].$$

Efetuando os cálculos teremos $P = 2.052{,}29$. Logo, o valor de cada prestação deverá ser R$ $2.052{,}29$.

Figura 20 – Série de pagamento antecipado no último pagamento.



Fonte: Autor.

4.3.3 Séries uniformes de pagamentos diferidas

Uma série é diferida ou com carência quando o primeiro pagamento só ocorre depois de decorridos m períodos de tempo a que se refere a taxa de juros considerada, com $m \geq 2$. O diferimento consiste, portanto, no prazo concedido, antes que se inicie a capitalização dos pagamentos, no qual não existirão pagamentos, havendo, no entanto, neste período, a incidência da taxa de juros. Contudo, essa relativa vantagem ao tomador do empréstimo será compensada com o acréscimo no valor das prestações. Há que se ressaltar ainda que quando o primeiro pagamento ocorre no início do primeiro período após o término da carência, a série é dita diferida antecipada. Quando ocorre no fim, diz-se que a série é diferida postecipada. Vamos generalizar os dois casos citados no seguinte resultado:

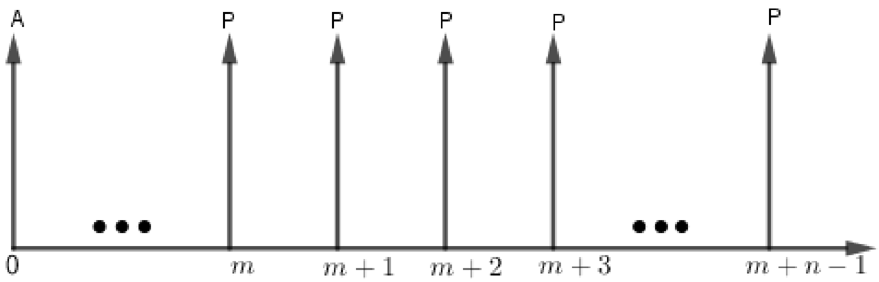
Teorema 4.22 Considerando o primeiro termo da data base m como sendo a carência de uma série uniforme de valor atual A, em n termos iguais a P, com uma taxa de juros i, então:

i) $A = P \cdot (1+i)^{1-m} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. (4.6)

ii) $F = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, na data base $m+n-1$.

iii) $F = P \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, na data base $m+n$.

Figura 21 – Esquema de série uniforme diferida.



Fonte: Autor.

Demonstração: Conforme a Figura 21, temos:

i) Trazendo todos os termos P para data base zero, obtemos

$$A = \frac{P}{(1+i)^m} + \frac{P}{(1+i)^{m+1}} + \frac{P}{(1+i)^{m+2}} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^{m+n-1}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{P}{(1+i)^m} \cdot \left[1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right].$$

O termo que está dentro do colchete é uma PG, cujo o primeiro termo é $a_1 = 1$ e a razão é $q = \frac{1}{(1+i)} = (1+i)^{-1}$, como a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG é $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, temos

$$A = \frac{P}{(1+i)^m} \cdot \left[1 \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}\right] = \frac{P}{(1+i)^m \cdot (1+i)^{-1}} \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)-1}\right]$$

$\Rightarrow A = P \cdot (1+i)^{1-m} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

ii) Levando o valor de A para o tempo a frente $m+n-1$, $F = A \cdot (1+i)^{m+n-1}$, e usando (4.6), obtemos

$$F = \left[P \cdot (1+i)^{1-m} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot (1+i)^{m+n-1} = \left[P \cdot (1+i)^n \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$\Rightarrow F = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$.

iii) Como a data base $m+n$ é um período após $m+n-1$, então levando o resultado obtido em ii) para data base um período posterior, obtemos

$$F = \left[P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \cdot (1+i) \Rightarrow F = P \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \blacksquare$$

Exemplo 4.23 Maria compra uma televisão em 12 parcelas iguais de R$ 200,00 a uma taxa de juros de 1% ao mês. Sabendo que o primeiro pagamento só ocorrerá 3 meses após a compra, qual o preço à vista da televisão?

Usando a fórmula (4.6) e substituindo os valores $P = 200$, $i = 0{,}01$, $n = 12$ e $m = 3$, temos

$$A = 200 \cdot (1+0{,}01)^{1-3} \cdot \frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01} = 200 \cdot (1{,}01)^{-2} \cdot \frac{1-(1{,}01)^{-12}}{0{,}01} \Rightarrow A = 2.206{,}66.$$

Logo, o valor da televisão à vista será R$ 2.206,00.

4.3.4 Séries uniformes infinitas – Perpetuidades

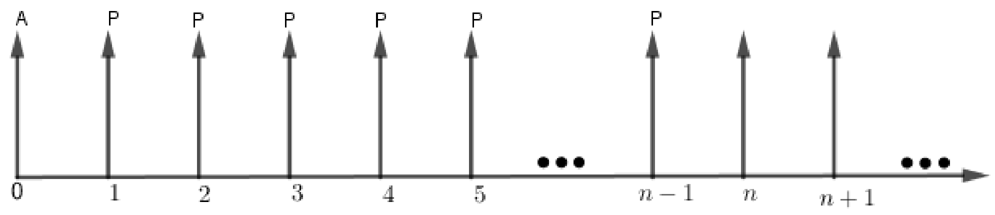
Se um investimento A é feito à taxa i para gerar rendimentos P indefinidamente, temos o que se denomina perpetuidade. Rendas perpétuas normalmente aparecem em locações.

Teorema 4.24 O valor de uma perpetuidade de termos iguais a P, um tempo antes do pagamento e sendo i a taxa de juros, é dado por

$$A = \frac{P}{i}. \tag{4.7}$$

Demonstração: O esquema está ilustrado na Figura 22. Usando o Teorema 4.14, temos que $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Figura 22 – Esquema de série uniforme infinita.



Fonte: Autor.

Logo, $A = \lim\limits_{n\to\infty} P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, como $\lim\limits_{n\to\infty}(1+i)^{-n} = 0$ temos que $A = \frac{P}{i}$.■

Exemplo 4.25 Se o dinheiro vale 0,5% ao mês, quanto deve ser o aluguel de um imóvel que vale 600 mil reais?

O problema consiste na cessão de um imóvel em troca do aluguel, que é uma renda perpétua. Como $A = 600.000$ e $i = 0{,}005$, então o valor do aluguel pode ser obtido pela fórmula (4.7) como segue

$$600.000 = \frac{P}{0{,}005} \Rightarrow P = 3000.$$

Logo, o aluguel deverá ser R$ 3.000,00 mensais.

4.4 Sistemas de amortização

Amortização é equivalente à redução do valor devido. *Amortizar* é quitar uma parte da dívida para que ela diminua de tamanho até a sua eliminação. No entanto, em toda dívida, há cobrança de juros. Assim, para amortizar uma dívida, é essencial que o pagamento seja maior que os juros cobrados no período. Logo, o valor amortizado é o que sobra do pagamento depois de descontados os juros. Nos sistemas de amortização a serem estudados, os juros serão calculados sempre sobre o saldo devedor. Isto significa que consideraremos apenas o regime de capitalização composta.

Os principais e mais utilizados sistemas de amortização de empréstimos são:

- Sistema de Amortização Constante (SAC);
- Sistema de Amortização Francês (Sistema PRICE);
- Sistema de Amortização Misto;
- Sistema Americano de Amortização.

Neste trabalho abordaremos apenas os dois primeiros casos.

4.4.1 Sistemas de Amortização Constante (SAC)

O Sistema de Amortização Constante (SAC), como o próprio nome mostra, tem como característica básica as amortizações do principal serem sempre iguais (ou constantes) ao longo de todo o prazo da operação. O valor da amortização é facilmente determinado mediante a divisão do capital emprestado pelo número de prestações. Os juros, por incidirem sobre o saldo devedor, cujo montante decresce após o pagamento de cada amortização, possuem valores decrescentes nos períodos. O sistema de amortização constante é normalmente adotado por programas de habitação como o Sistema Financeiro de Habitação (SFH), por instituições financeiras na forma de financiamentos imobiliários, empréstimos com recursos do Banco Nacional do Desenvolvimento (BNDES) e o Banco Regional de Desenvolvimento do Extremo Sul (BRDE), além de investimentos agropecuários.

Como no sistema SAC a amortização sobre a dívida principal é sempre a mesma, o valor da dívida e dos juros decrescem de acordo com uma progressão aritmética.

Teorema 4.26 No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

i) $A_k = \frac{D_0}{n}$,

ii) $D_k = \frac{n-k}{n} D_0$,

iii) $J_k = \frac{D_0}{n}(n-k+1)i$,

iv) $P_k = \frac{D_0}{n}[1+(n-k+1)i]$,

onde A_k é a parcela de amortização, J_k é a parcela de juros, P_k é o valor da prestação e D_k é o estado da dívida depois do pagamento da prestação na época k.

Demonstração:

i) Se a dívida D_0 é dividida em n quotas iguais, cada quota será $A_k = \frac{D_0}{n}$.

ii) O estado da dívida, após k amortizações, é $D_k = D_0 - k \cdot \frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n} D_0$.

iii) Como os juros são calculados sobre o saldo devedor, que decresce linearmente após cada amortização temos que o valor periódico da redução (razão da PA) é dado pelo produto da amortização pela taxa. Logo, pela fórmula do termo geral de uma PA, temos

$$J_k = a_1 + (n-1) \cdot r,$$

onde $a_1 = D_0 \cdot i$, $n = k$ e $r = -\frac{D_0}{n} \cdot i$. Logo,

$$J_k = D_0 \cdot i \ + (k-1) \cdot \left(-\frac{D_0}{n} \cdot i\right) = \frac{D_0}{n}[n \cdot i \ + (-k+1) \cdot i] \Rightarrow J_k = \frac{D_0}{n}(n-k+1) \cdot i.$$

iv) As prestações nos períodos são decrescentes em progressão aritmética, conforme o comportamento da amortização e dos juros, e são dadas pela soma da amortização com os juros nos períodos, conforme definição acima, logo

$$P_k = A_k + J_k = \frac{D_0}{n} + \frac{D_0}{n}(n-k+1)i \Rightarrow P_k = \frac{D_0}{n}[1+(n-k+1)i]. \blacksquare$$

Exemplo 4.27 Construir uma tabela de amortização no Sistema SAC para um financiamento de R$ 15.000,00 em 12 prestações mensais a uma taxa de juros de 7,8% ao mês.

Temos que o valor de cada prestação será $A = \frac{15.000}{12} = 1.250.$

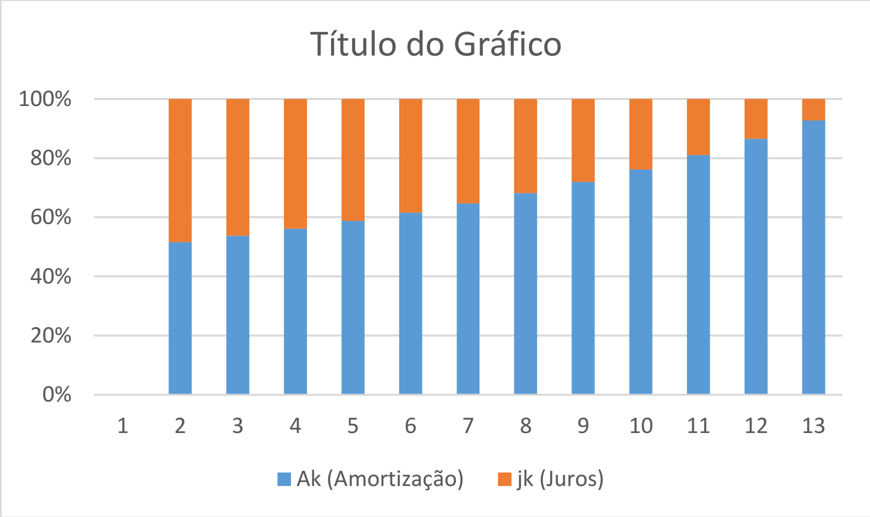
Podemos observar tanto na Tabela 1 quanto no gráfico dado na Figura 23, que a amortização permaneceu constante e o salto devedor e os juros decrescem linearmente, de acordo com uma PA.

Tabela 1 – Sistema de amortização SAC do Exemplo 4.27.

k (Período)	A_k (Amortização)	J_k (Juros)	P_k (Prestação)	D_k (Saldo devedor)
0				R$15.000,00
1	R$1.250,00	R$1.170,00	R$2.420,00	R$13.750,00
2	R$1.250,00	R$1.072,50	R$2.322,50	R$12.500,00
3	R$1.250,00	R$975,00	R$2.225,00	R$11.250,00
4	R$1.250,00	R$877,50	R$2.127,50	R$10.000,00
5	R$1.250,00	R$780,00	R$2.030,00	R$8.750,00
6	R$1.250,00	R$682,50	R$1.932,50	R$7.500,00
7	R$1.250,00	R$585,00	R$1.835,00	R$6.250,00
8	R$1.250,00	R$487,50	R$1.737,50	R$5.000,00
9	R$1.250,00	R$390,00	R$1.640,00	R$3.750,00
10	R$1.250,00	R$292,50	R$1.542,50	R$2.500,00
11	R$1.250,00	R$195,00	R$1.445,00	R$1.250,00
12	R$1.250,00	R$97,50	R$1.347,50	R$0,00
Total	R$15.000,00	R$7.605,00	R$22.605,00	

Fonte: Autor.

Figura 23 – Sistema de amortização SAC do Exemplo 4.27.



Fonte: Autor.

Observação 4.28 No Sistema de Amortização Constante temos que:

i) Os juros formam uma progressão aritmética decrescente, cujo primeiro termo é $J_1 = iD_0$ e a razão é dada por

$$r = J_k - J_{k-1} = iD_k - iD_{k-1} = iD_0\left(\frac{n-k}{n} - \frac{n-k+1}{n}\right) = \frac{-iD_0}{n}.$$

ii) O saldo devedor forma uma progressão aritmética decrescente de razão

$$r = D_k - D_{k-1} = \left(\frac{n-k}{n} - \frac{n-k+1}{n}\right)D_0 = -\frac{D_0}{n}.$$

iii) As prestações também formam uma progressão aritmética decrescente, onde:

- Primeiro termo é

$$P_1 = A_1 + J_1 = \frac{D_0}{n} + iD_0 = \left(\frac{1}{n} + i\right)D_0.$$

- Razão da PA é

$$r = P_k - P_{k-1} = A_k + J_k - (A_{k-1} + J_{k-1}) = J_k - J_{k-1} = \frac{-iD_0}{n}.$$

4.4.2 Sistemas de Amortização Francês (Sistema PRICE)

O Sistema de Amortização Francês (Sistema PRICE), também conhecido como Sistema PRICE, nomeado em homenagem em seu desenvolvedor Richard Price, é muito utilizado no mercado financeiro no financiamento de eletrodomésticos, móveis, automóveis, empréstimos, entre outras aplicações. Sua característica principal é apresentar prestações constantes. A amortização é obtida pela diferença entre os valores da prestação e os juros do período. Os juros decrescem com o tempo. O principal no início de cada período vai se tornando cada vez menor e as amortizações vão crescendo de forma que a soma dessas parcelas permaneça constante ao longo do tempo. A amortização é crescente em progressão geométrica de razão igual a $(1+i)$. Logo, nosso problema se resume a determinar o valor das prestações, que será dado pelo teorema abaixo e cuja demonstração se baseia nas propriedades de uma PG.

Teorema 4.29 No Sistema de Amortização Francês, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos:

i) $P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$,

ii) $D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$,

iii) $J_k = iD_{k-1}$,

iv) $A_k = iD_0 \left[\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n-1}\right]$.

Demonstração:

i) Pelo Teorema 4.14 temos que $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, substituindo $A = D_0$ e $P = P_k$, teremos $D_0 = P_k \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, que é equivalente a $P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$.

ii) No tempo k, a dívida D_k será liquidada por $n-k$ pagamentos sucessivos e postecipados, iguais a P_k, logo aplicando novamente a fórmula (4.2) do Teorema 4.14 com $A = D_k$ e $P = P_k$, e utilizando o resultado em i), temos

$$D_k = P_k \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} \Rightarrow D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

iii) $J_k = iD_{k-1}$ é imediato, pois os juros de um período é a dívida do período anterior multiplicado pela taxa de juros.

iv) Como $A_k = P_k - J_k$ e $J_k = iD_{k-1}$ e utilizando i) e ii), obtemos

$$A_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - iD_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k+1)}}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\Rightarrow A_k = iD_0 \left[\frac{1}{1-(1+i)^{-n}} - \frac{1-(1+i)^{-(n-k+1)}}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$\Rightarrow A_k = iD_0 \left[\frac{(1+i)^{-(n-k+1)}}{1-(1+i)^{-n}}\right]$$

$$\Rightarrow A_k = iD_0 \left[\frac{(1+i)^{-(n-k+1)}}{1-(1+i)^{-n}}\right] \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}$$

$$\Rightarrow A_k = iD_0 \left[\frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}\right]. \blacksquare$$

Exemplo 4.30 Construir uma tabela de amortização no Sistema PRICE para um financiamento de R$ 15.000,00 em 12 prestações mensais a uma taxa de juros de 7,8% ao mês.

Pelo Teorema 4.29, temos que o valor das parcelas será dado por

$$P_k = 15.000 \frac{0{,}078}{1-(1+0{,}078)^{-12}} = 1.969{,}85.$$

Podemos observar tanto na Tabela 2 quanto no gráfico dado na Figura 24, que a parcela se mantem constante e, conforme a amortização cresce, os juros decresce.

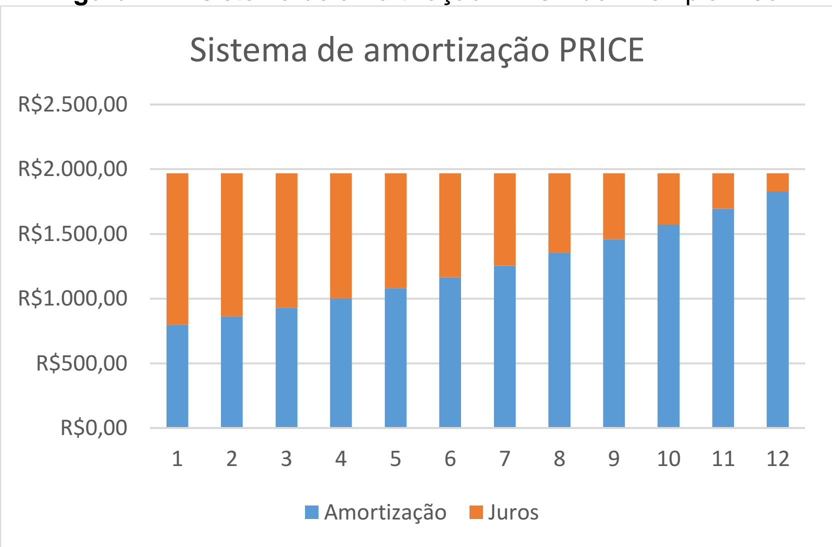
Tabela 2 – Sistema de amortização PRICE do Exemplo 4.30.

k Período	A_k Amortização	J_k Juros	P_k Prestação	D_k Saldo devedor
0				R$15.000,00
1	R$799,85	R$1.170,00	R$1.969,85	R$14.200,15
2	R$862,24	R$1.107,61	R$1.969,85	R$13.337,91

3	R$929,49	R$1.040,36	R$1.969,85	R$12.408,42
4	R$1.001,99	R$967,86	R$1.969,85	R$11.406,43
5	R$1.080,15	R$889,70	R$1.969,85	R$10.326,28
6	R$1.164,40	R$805,45	R$1.969,85	R$9.161,88
7	R$1.255,22	R$714,63	R$1.969,85	R$7.906,65
8	R$1.353,13	R$616,72	R$1.969,85	R$6.553,52
9	R$1.458,68	R$511,17	R$1.969,85	R$5.094,85
10	R$1.572,45	R$397,40	R$1.969,85	R$3.522,39
11	R$1.695,10	R$274,75	R$1.969,85	R$1.827,29
12	R$1.827,32	R$142,53	R$1.969,85	R$0,00
Total	R$15.000,03	R$8.638,17	R$23.638,20	

Fonte: Autor.

Figura 24 – Sistema de amortização PRICE do Exemplo 4.30.



Fonte: Autor.

Observação 4.31 No Sistema de Amortização Francês temos que:

i) As amortizações se comportam como uma progressão geométrica crescente, de maneira geral, cuja razão é dado por

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = \frac{iD_0 \dfrac{(1+i)^{k+1-1}}{(i+i)^n - 1}}{iD_0 \dfrac{(1+i)^{k-1}}{(i+i)^n - 1}} = (1+i).$$

ii) Os juros podem ser analisados através da sua variação como fator proporcional a A_k, com constante de proporcionalidade igual a taxa $-i$, isto é, os juros são decrescentes. Temos,

$$J_{k+1} - J_k = P_{k+1} - A_{k+1} - (P_k - A_k) = A_k - A_{k+1} = A_k - (1+i)A_k = (1-1-i)A_k$$
$$\Rightarrow J_{k+1} - J_k = -iA_k.$$

5 PROPOSTAS DIDÁTICAS

Nos Capítulos 3 e 4 fornecemos um material teórico, com o intuito de auxiliar o professor a ministrar conteúdos de matemática financeira. Neste capítulo, apresentamos uma sequência didática de atividades, utilizando planilhas eletrônicas e metodologias ativas. Conforme descrito no Capítulo 1, as *metodologias ativas* são um conjunto de práticas pedagógicas que têm o aluno como centro, que através de pesquisa, investigação e interação com os pares, constroem o conhecimento e o pensamento crítico. Dessa forma, usamos planilhas eletrônicas na resolução de problemas presentes no cotidiano do aluno, tais como conversão de moeda, cálculo de impostos, cálculo de salário e inflação e poupança, na intenção de tornar as aulas mais criativas e dinâmicas e colocar o professor no papel de mediador e o aluno no centro da construção do saber. Com isso, esperamos preparar melhor o estudante para a vida em sociedade e para o mercado de trabalho.

É importante ressaltar que os planos de aula apresentados neste capítulo são de autoria da própria autora e os links para acesso e download das planilhas eletrônicas serão disponibilizados no plano de aula.

Nos planos de aula apresentados, buscamos explorar competências e habilidades específicas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino de matemática. Como estabelece Brasil (2018) (ver referência 2), habilidades são ideias que os alunos devem aprender para adquirir uma determina competência, que por sua vez

> “é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 8).

A seguir, descreveremos todas as competências e habilidades da BNCC, que serão trabalhadas através da execução dos planos de aula, sendo necessário apenas mencioná-las ao longo do capítulo.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 2 – “Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática” (BRASIL, 2018, p. 534).

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3 – “Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente” (BRASIL, 2018, p. 535).

(EM13MAT203) “Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações, envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões” (BRASIL, 2018, p. 535).

(EF07MA02) “Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros” (BRASIL, 2018, p. 307).

(EF08MA04) “Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 313).

(EF09MA05) “Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira” (BRASIL, 2018, p. 317).

5.1 Plano de Aula 1 – Conversão de moeda

5.1.1 Informações iniciais da Aula 1

Público-alvo: alunos do 2º ano do ensino médio.

Objetivos gerais:
- Revisar conceitos de porcentagem do Ensino Fundamental II;
- Introduzir o conceito de lucro bruto, lucro líquido e lucro porcentual;
- Compreender o cálculo de conversão de moeda dólar x real;
- Perceber as vantagens de utilizar a planilha eletrônica para facilitar os cálculos e a análise das informações.

Justificativas: Apropriar-se das Competências 2 e 3 da BNCC. Além disso, espera-se que os alunos possam desenvolver as seguintes habilidades contidas na BNCC: EM13MAT203, EF07MA02, EF08MA04 e EF09MA05.

Pré-requisitos: noções básicas de porcentagem, conforme estabelece a BNCC para o 8º ano do ensino fundamental (BRASIL, 2018, p. 313).

Duração: 2-3 hora-aulas.

Links para as planilhas da Aula 1:
"AULA 1 - PLANILHA":
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1dLAXW-dmbkWXxPxJ6TwAfJEm3bHixl6F/edit?usp=sharing&ouid=106517865652709328858&rtpof=true&sd=true,

"AULA 1 - PLANILHA - GABARITO":
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1oNiem2Dn5fPCTwumLL4ZTDo2lGCU95nN/edit?usp=sharing&ouid=106517865652709328858&rtpof=true&sd=true

Referências: Consultar Brasil (2018) e Lima (2016) (ver referências 2 e 11, respectivamente).

5.1.2 Descrição da Aula 1

O professor deve entregar o roteiro da aula e as planilhas, contidas em "AULA 1 - PLANILHA", para os alunos. A proposta é que os alunos leiam o roteiro e sigam as orientações para preencher a planilha, e depois de terminar de completá-la, respondam as perguntas do questionário. A ideia da aula é desenvolver a autonomia do aluno, logo o professor deve se posicionar apenas como um orientador e intervir apenas no caso de os alunos apresentarem alguma dificuldade. Depois que os alunos terminarem a atividade, o professor deve conduzir uma discussão sobre os resultados encontrados.

5.1.3 Roteiro da Aula 1

Nesta aula, vamos simular o dia a dia de um funcionário de uma empresa de artigos de papelaria. Essa empresa compra e revende alguns materiais nacionais e internacionais. Percebeu-se que alguns produtos geram lucro maior ao serem comprados de empresas nacionais e outros produtos geram mais lucro sendo comprados de empresas internacionais, ou seja, importando-os.

Para organizar a diferença de custo e lucro entre produtos nacionais e importados, e tomar decisões acerca da origem dos produtos a serem comercializados, você ficou encarregado de elaborar um relatório comparativo. Para isso, você terá de preencher três diferentes planilhas: **Produtos nacionais**; **Produtos internacionais**; **Produtos nacionais X Produtos importados**.

A planilha **"Produtos nacionais"** mostra alguns produtos que foram adquiridos de empresas nacionais e pagos em reais. Para cada produto, calcule o **lucro bruto** (coluna F) e o **lucro percentual** (coluna G) obtidos na venda dessa mercadoria.

Discuta com os seus colegas, se necessário pesquise na internet, o que é lucro bruto, lucro líquido e lucro percentual. Depois mostre as suas conclusões para o seu professor para ver o que acha.

Além dos cálculos, as colunas devem trazer valores formatados de forma coerente com o que é pedido. No caso da coluna "lucro bruto", os valores devem estar na formatação "contábil", e no caso da coluna "lucro percentual", os valores devem estar na formatação "porcentagem" com uma casa após a vírgula. Você pode encontrar um atalho para essas formatações na aba "Página inicial", opção "Número".

Ao final, complete a pequena tabela nas linhas 102 a 104 (ver Figura 25). Para calcular o "maior lucro percentual", use a função MAXIMO, para calcular o "menor lucro percentual", use a função MINIMO, para calcular a "média do lucro percentual" use a função MEDIA. Logo após o preenchimento dessa primeira planilha, ela deve ficar parecida com a Figura 25.

Figura 25 – Maior e menor lucro percentual e média do lucro percentual.

92	90	Suporte p/calendário de mesa cristal	5 702833 678455	R$	22,95	R$	30,60	7,65	33,33%
93	91	tesoura com ponta	5 496236 792076	R$	9,60	R$	12,80	3,20	33,33%
94	92	tesoura sem ponta	3 614207 076009	R$	6,86	R$	9,80	2,94	42,86%
95	93	Tinta guache 20 caixas com 6	4 238540 686369	R$	87,50	R$	125,00	37,50	42,86%
96	94	Tinta para impressora	4 593814 051190	R$	182,00	R$	260,00	78,00	42,86%
97	96	Tonner	4 844508 126895	R$	223,50	R$	298,00	74,50	33,33%
98	97	Transferidor	5 570848 369585	R$	27,60	R$	36,80	9,20	33,33%
99	98	tubo de cola grande 12 unidades	2 821052 784817	R$	41,86	R$	64,40	22,54	53,85%
100	99	tubo de cola para pano 10 um	7 143630 706443	R$	58,34	R$	72,93	14,59	25,00%
101	100	tubo de cola pequeno 12 unidades	3 094920 343040	R$	31,79	R$	48,90	17,12	53,85%
102						**Maior lucro percentual**			66,67%
103						**Menor lucro percentual**			17,65%
104						**Média do lucro percentual**			36,93%
105									

Fonte: Autor.

A planilha “**Produtos internacionais**” mostra os mesmos produtos, os quais, porém, foram adquiridos de empresas internacionais e pagos em dólares. Para cada produto, calcule o **preço real de custo** (coluna F), ou seja, o preço do produto convertido em reais. Para isso, use a cotação do dólar comercial nos dias em que houve aquisição dos produtos (linhas 2 e 3). Calcule também o **lucro percentual bruto** (coluna H) obtido na venda dessa mercadoria. Perceba que nessa planilha não há a coluna “Lucro bruto”. Tente preencher a coluna “Lucro percentual bruto” direto, sem criar a coluna “Lucro bruto”. Assim como na planilha anterior, as colunas devem trazer valores formatados de forma coerente com o que é pedido.

Como na planilha anterior, ao final, complete a pequena tabela nas linhas 106 a 108 (ver Figura 26). Depois do preenchimento dessa segunda planilha, ela deve ficar como consta na Figura 26.

Figura 26 – Preço real de custo e lucro percentual bruto.

90	55	Lápis preto redondo 10 um	1 066369 875746	29/07/2021	USD	5,55	R$	28,17	R$	44,37	57,51%
91	56	Lápis preto sextavado 10 um	4 331966 219912	29/07/2021	USD	2,15	R$	10,93	R$	12,94	18,36%
92	59	Marcador para retroprojetor 10 um	3 569991 928577	29/07/2021	USD	10,48	R$	53,21	R$	90,10	69,32%
93	73	Pincel atômico cx com10	4 242620 404781	29/07/2021	USD	2,31	R$	11,71	R$	20,29	73,26%
94	74	Pincel grande cx com 20	1 902234 337658	29/07/2021	USD	2,80	R$	14,21	R$	16,39	15,30%
95	77	Pranchetas	2 073000 896557	29/07/2021	USD	2,09	R$	10,60	R$	12,11	14,27%
96	79	régua de lousa	1 278544 126705	29/07/2021	USD	1,59	R$	8,06	R$	10,70	32,71%
97	80	Réguas de poliestireno cx com 10	3 341011 799432	29/07/2021	USD	4,53	R$	23,02	R$	28,98	25,89%
98	81	Réguas diversas cx com 10	2 898963 757283	29/07/2021	USD	3,05	R$	15,48	R$	25,00	61,45%
99	82	Rolo de fita adesiva kraft cx com 30	1 936044 638054	29/07/2021	USD	20,36	R$	103,40	R$	111,86	8,19%
100	84	Rolo de fita durex colorida grande cx com 30	4 210905 430758	29/07/2021	USD	19,71	R$	100,12	R$	123,47	23,32%
101	92	tesoura sem ponta	3 614207 076009	29/07/2021	USD	1,21	R$	6,13	R$	10,38	69,32%
102	93	Tinta guache 20 caixas com 6	4 238540 686369	29/07/2021	USD	15,40	R$	78,22	R$	88,52	13,17%
103	98	tubo de cola grande 12 unidades	2 821052 784817	29/07/2021	USD	7,37	R$	37,42	R$	40,41	8,00%
104	100	tubo de cola pequeno 12 unidades	3 094920 343040	29/07/2021	USD	5,59	R$	28,41	R$	29,11	2,45%
105											
106							**Maior lucro percentual**				73,3%
107							**Menor lucro percentual**				2,5%
108							**Média do lucro percentual**				29,8%

Fonte: Autor.

Na planilha “**Produtos nacionais X Produtos importados”**, você concretizará seu relatório. Siga as instruções:

1. preencha as colunas **“lucro percentual do produto nacional”** e **“lucro percentual do produto importado”,** copiando essas informações das duas planilhas anteriores.

2. preencha a coluna **“Decisão”** seguindo os seguintes critérios (utilize a função “SE”):
a) se o lucro percentual do produto nacional for maior, a célula correspondente ao produto deve retornar “Nacional”;
b) se o lucro percentual do produto importado for maior, a célula correspondente ao produto deve retornar “Importado”.

3. preencha a tabela nas linhas 104 e 105 (ver Figura 27). Após o preenchimento dessa terceira planilha, ela deve ficar parecida com a Figura 27.

Figura 27 – Lucro percentual do produto nacional e do produto importado.

87	86	Rolo de fita durex cx com 30	17,6%	35,2%	IMPORTADO
88	87	Rolo de fita gomada	17,6%	26,1%	IMPORTADO
89	88	Rolo de fita scolt	25,0%	40,5%	IMPORTADO
90	89	Sacos de presente com 200 unidades	17,6%	24,9%	IMPORTADO
91	90	Sacos plásticos com 100 unidades	25,0%	57,5%	IMPORTADO
92	91	Suporte p/calendário de mesa cristal	33,3%	18,4%	NACIONAL
93	92	tesoura com ponta	33,3%	23,9%	NACIONAL
94	93	tesoura sem ponta	42,9%	32,1%	NACIONAL
95	94	Tinta guache 20 caixas com 6	42,9%	8,0%	NACIONAL
96	95	Tinta para impressora	42,9%	23,9%	NACIONAL
97	96	Tonner	33,3%	69,3%	IMPORTADO
98	97	Transferidor	33,3%	32,0%	NACIONAL
99	98	tubo de cola grande 12 unidades	53,8%	14,7%	NACIONAL
100	99	tubo de cola para pano 10 um	25,0%	19,3%	NACIONAL
101	100	tubo de cola pequeno 12 unidades	53,8%	2,5%	NACIONAL
102					
103				**Quantidade de produtos**	
104			**Importado**	35	
105			**Nacional**	65	
106					

Fonte: Autor.

Exercícios propostos:

1- Qual a influência do valor do dólar sobre a escolha da origem do produto para o lojista? Explique o que aconteceria com as decisões do lojista caso o dólar sofresse uma queda brusca ou uma grande alta.

2- a) Na Planilha "Produtos Nacionais", compare o lucro bruto dos produtos "Álcool hidrogenado" e "Calculadora". A partir desse dado, podemos decidir qual deles é mais vantajoso para o lojista? Explique.

b) Na Planilha "Produtos Nacionais", compare o lucro percentual dos produtos "Álcool hidrogenado" e "Calculadora". A partir desse dado, podemos decidir qual deles é mais vantajoso para o lojista? Explique.

c) Explique a diferença entre lucro bruto e lucro percentual com base nos resultados encontrados nos itens anteriores.

3- Os vendedores dessa empresa recebem 5% de comissão pelas vendas que fazem.

a) Um cliente dessa empresa fez um orçamento para compra de produtos no total de R$ 6.200,00. Quanto o vendedor receberia de comissão caso o cliente efetuasse a compra?

b) Numa outra situação, o vendedor recebeu R$ 290,00 de comissão. Qual foi o valor total da venda?

Respostas: a) R$ 310,00 b) R$ 5.800,00

4- A empresa possui dois tipos de despesas: uma fixa e uma variável. No mês de março, a fixa foi de R$ 9.000,00, e a variável foi de 30% do total das vendas. Se o lucro neste mês foi de 20% do total de vendas, qual foi o total de vendas e qual foi o lucro?

Respostas: total de vendas R$ 18.000,00 e lucro R$ 3.600,00

5.2 Plano de Aula 2 – Cálculo de impostos

5.2.1 Informações iniciais da Aula 2

Público-alvo: alunos do 2º ano do ensino médio.

Objetivos gerais:

- Revisar conceitos de porcentagem do Ensino Fundamental II;
- Aprender como se faz o cálculo dos impostos IPVA e IPTU;

- Perceber as vantagens de utilizar a planilha eletrônica para facilitar os cálculos e a análise das informações.

Justificativas: Apropriar-se das Competências 2 e 3 da BNCC. Além disso, espera-se que os alunos possam desenvolver as seguintes habilidades contidas na BNCC: EM13MAT203, EF07MA02, EF08MA04 e EF09MA05.

Pré-requisitos: noções básicas de porcentagem, conforme estabelece a BNCC para o 8º ano do ensino fundamental (BRASIL, 2018, p. 313).

Duração: 2-3 hora-aulas.

Links para as planilhas da Aula 2:
"AULA 2 - PLANILHA":
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1MMM9JIb92ksOereIz9dYUo1xb2Ng8a_N/edit?usp=sharing&ouid=106517865652709328858&rtpof=true&sd=true

"AULA 2 - PLANILHA - GABARITO":
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1I-JM65aQL1vyYmBonQIDO41EH_7wvmyI/edit?usp=sharing&ouid=106517865652709328858&rtpof=true&sd=true

Referências: Consultar Brasil (2018) e Lima (2016) (ver referências 2 e 11, respectivamente).

5.2.2 Descrição da Aula 2

O professor deve entregar o roteiro da aula e as planilhas, contidas em "AULA 2 - PLANILHA", para os alunos. A proposta é que os alunos leiam o roteiro e sigam as orientações para preencher a planilha, e depois de terminar de completá-la, respondam as perguntas do questionário. A ideia da aula é desenvolver a autonomia do aluno, logo o professor deve se posicionar apenas como um orientador e intervir apenas no caso de os alunos apresentarem alguma dificuldade. Depois que os alunos terminarem a atividade, o professor deve conduzir uma discussão sobre os resultados encontrados.

5.2.3 Roteiro da Aula 2

Nesta aula, vamos simular o dia a dia de um funcionário da Mega Invest, empresa que presta serviços como carteira de investimentos, financiamentos, consultoria financeira, etc. Um grupo de pessoas percebeu que o governo, após uma atualização do sistema, tinha feito o cálculo de alguns impostos de forma incorreta, entre eles o Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU) e o Imposto Sobre Propriedade de Veículo Motor (IPVA). Diante dessa situação, pediram para que a Mega Invest fizesse os cálculos para saber qual a quantia correta a se pagar.

A planilha **"IPTU"** mostra o valor venal do imóvel e o valor que foi cobrado de imposto de cada cliente.

Siga as orientações:

1- Leia o Texto 1 abaixo.
2- Calcule na coluna E o valor que cada cliente deve pagar de IPTU (use a função SE).
3- Confira se o valor cobrado está correto.
4- Na coluna G, diga se o valor está correto ou qual a diferença a ser paga ou devolvida (use a função SE).

Texto 1

O IPTU para os imóveis construídos e utilizados exclusiva ou predominantemente como residência é calculado à razão de 1% do valor venal, com acréscimos e descontos definidos por faixas de valor venal. A apuração do valor venal é realizada a partir dos dados do imóvel constantes do cadastro da Secretaria da Fazenda (área do terreno, área construída, idade da construção, etc.) utilizando a metodologia e os parâmetros estabelecidos pela Lei 10.235/1986 e suas atualizações.

Estão isentos do IPTU os imóveis construídos utilizados exclusiva ou predominantemente como residência, de tipo horizontal ou vertical e de padrões baixo a médio, cujo valor venal em 2018 seja igual ou inferior a R$ 160.000,00.

Ao final do preenchimento da planilha, ela deve ficar parecida com a Figura 28.

Figura 28 – Valor pago de IPTU.

85	84	Francimário Justos	111.665.996-29	R$	1.170.000,00	11700,00	R$	11.700,00	correto
86	85	Jorge McRoll	887.234.903-22	R$	560.000,00	5600,00	R$	5.600,00	correto
87	86	Jin Carey da Silva	869.965.540-47	R$	330.000,00	3300,00	R$	3.300,00	correto
88	87	Pedro Francis	286.377.554-08	R$	150.000,00	0,00	R$	-	correto
89	88	Ana Nosay	831.275.258-33	R$	860.000,00	8600,00	R$	8.600,00	correto
90	89	Tabata Miyashiro	867.193.502-54	R$	370.000,00	3700,00	R$	4.600,00	R$ 900,00
91	90	Marcela Machini	781.203.106-92	R$	500.000,00	5000,00	R$	5.000,00	correto
92	91	Sandro Negrão	598.023.646-27	R$	1.180.000,00	11800,00	R$	11.800,00	correto
93	92	Ana Maria Tardeli	759.037.829-25	R$	930.000,00	9300,00	R$	9.300,00	correto
94	93	Bárbara Teles	160.224.621-61	R$	670.000,00	6700,00	R$	6.700,00	correto
95	94	Anabele Trabulsi	712.890.647-22	R$	680.000,00	6800,00	R$	6.800,00	correto
96	95	Mayra Figueiredo	385.129.496-43	R$	140.000,00	0,00	R$	1.400,00	R$1.400,00
97	96	Paulo Donald	511.080.143-82	R$	540.000,00	5400,00	R$	5.400,00	correto
98	97	Mateus Giggio	718.259.821-39	R$	270.000,00	2700,00	R$	2.700,00	correto
99	98	Xin Min Kin	375.830.714-49	R$	1.070.000,00	10700,00	R$	10.700,00	correto
100	99	Carlos Pardini	396.774.506-50	R$	980.000,00	9800,00	R$	9.800,00	correto

Fonte: Autor.

Na planilha "**IPVA"** há informações sobre o ano do automóvel, o tipo de combustível utilizado e se o cliente tem algum tipo de isenção. Considere que todos os clientes têm veículos de passeio.

Siga as orientações:

1- Leia o Texto 2 abaixo.
2- Calcule quanto cada cliente deve pagar de IPVA (coluna H).
3- Na coluna J, diga se o valor está correto ou qual a diferença a ser paga ou devolvida (use a função SE).

Texto 2

O valor do Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA) é baseado em uma alíquota que é diferente em cada estado. As taxas variam entre 0,5% a 4% sobre o valor venal do veículo no Brasil, que é determinado pela Fipe (Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas). No estado de São Paulo, o IPVA é um dos mais caros, com alíquota de 4% para veículos de passeio com motor a gasolina ou flex. Veículos que utilizam exclusivamente álcool, eletricidade ou gás têm alíquota de 3%. Picapes com cabine simples, ônibus, micro-ônibus, motocicletas, motonetas, quadriciclos e similares, recolhem 2% sobre o valor venal. Já os caminhões pagam 1,5%. Em alguns estados brasileiros, pessoas com deficiência física, visual, mental e autistas possuem direito à isenção do imposto. Apenas no estado do Amazonas e do

Mato Grosso do Sul que não há isenção total para condutores, só desconto de 50% e 60%, respectivamente. O veículo também pode estar isento de IPVA por conta de seu ano de fabricação. Esse caso de isenção é variável de um estado para outro e pode valer a partir de períodos diferentes. Em São Paulo, carros com mais de 20 anos de fabricação têm isenção total do IPVA.

Ao final do preenchimento da planilha, ela deve ficar parecida com a Figura 29.

Figura 29 – Valor pago de IPVA.

86	85	Jorge McRoll	887.234.903-22	Não	2003	Etanol	R$	16.000,00	480,00	R$	480,00	correto
87	86	Jin Carey da Silva	869.965.540-47	Não	2008	Flex	R$	29.000,00	1160,00	R$	1.160,00	correto
88	87	Pedro Francis	286.377.554-08	Não	2020	Flex	R$	64.000,00	2560,00	R$	2.560,00	correto
89	88	Ana Nosay	831.275.258-33	Não	2009	Gasolina	R$	65.000,00	2600,00	R$	2.600,00	correto
90	89	Tabata Miyashiro	867.193.502-54	Não	2016	Flex	R$	26.000,00	1040,00	R$	1.040,00	correto
91	90	Marcela Machini	781.203.106-92	Autista	2000	Flex	R$	70.000,00	0,00	R$	-	correto
92	91	Sandro Negrão	598.023.646-27	Não	2019	Flex	R$	21.000,00	840,00	R$	840,00	correto
93	92	Ana Maria Tardeli	759.037.829-25	Não	2001	Flex	R$	24.000,00	0,00	R$	-	correto
94	93	Bárbara Teles	160.224.621-61	Não	2019	Flex	R$	64.000,00	2560,00	R$	2.560,00	correto
95	94	Anabele Trabulsi	712.890.647-22	Não	2017	Flex	R$	23.000,00	920,00	R$	920,00	correto
96	95	Mayra Figueiredo	385.129.496-43	Não	2014	Flex	R$	73.000,00	2920,00	R$	2.970,00	50
97	96	Paulo Donald	511.080.143-82	Não	2021	Gasolina	R$	74.000,00	2960,00	R$	2.960,00	correto
98	97	Mateus Giggio	718.259.821-39	Não	2009	Etanol	R$	67.000,00	2010,00	R$	2.010,00	correto
99	98	Xin Min Kin	375.830.714-49	Def. física	2019	Flex	R$	36.000,00	0,00	R$	-	correto
100	99	Carlos Pardini	396.774.506-50	Não	2020	Flex	R$	64.000,00	2560,00	R$	2.560,00	correto
101												

Fonte: Autor.

Alguns clientes também fizeram um pedido de financiamento de imóveis e, por segurança, a Mega Invest financia no máximo 80% do valor avaliado do imóvel, sendo que o restante deve ser pago como entrada, no ato da compra.

Na planilha **"Financiamento"**, há uma tabela com alguns clientes que deram entrada com pedido de financiamento de imóveis. Em cada linha, há o nome do cliente, o CPF, o valor avaliado do imóvel que o cliente gostaria de financiar e o quanto ele disse que está disposto a dar de entrada.

Siga as instruções:

1- Calcule o quanto a entrada dada pelo cliente representa do valor avaliado do imóvel e complete a coluna "% de entrada" (coluna H).

2- Destaque as células referentes aos clientes que não fornecerão uma entrada suficiente para dar início a um financiamento. (DICA: na aba "Página inicial" há uma opção chamada "formatação condicional").

3- Preencha a coluna "Valor financiado" (coluna I) e, caso o cliente não tenha a quantia suficiente, a célula correspondente deve ficar zerada.

Obs.: Após calcular o valor financiado, a coluna "Valor da prestação" (coluna L) será automaticamente atualizada.

4- Calcule a renda mínima que o cliente deve ter para que o financiamento seja aprovado (Coluna M). Para isso, considere que, por lei, o valor da prestação paga por um consumidor não pode ultrapassar 30% da renda mensal por ele comprovada.

Ao final do preenchimento da planilha, ela deve ficar parecida com a Figura 30.

Figura 30 – Financiamento.

29	28	Vicente Hall	623.251.379-70	R$15.134,05	13/03/18	R$ 670.000,00	R$ 134.000,00	20%	536000,00	7,6%	180	R$ 4.925,27	16417,56	REPROVADO
30	29	Vinícius koga	314.551.622-10	R$18.401,59	13/03/18	R$ 950.000,00	R$ 190.000,00	20%	760000,00	10,5%	300	R$ 6.900,60	23001,99	REPROVADO
31	30	Vitor kulay	898.208.334-62	R$9.360,00	13/03/18	R$ 1.190.000,00	R$ 119.000,00	10%	0,00	8,8%	180	R$ -	0,00	REPROVADO
32	31	Yago Abravanel	299.065.499-15	R$20.124,08	13/03/18	R$ 880.000,00	R$ 264.000,00	30%	616000,00	8,5%	120	R$ 7.546,53	25155,10	REPROVADO
33	32	Tabata Miyashiro	867.193.502-54	R$16.565,64	13/03/18	R$ 1.010.000,00	R$ 353.500,00	35%	656500,00	10,2%	240	R$ 6.212,12	20707,05	REPROVADO
34	33	Marcela Machini	781.203.106-92	R$4.028,00	13/03/18	R$ 1.140.000,00	R$ 114.000,00	10%	0,00	7,6%	180	R$ -	0,00	REPROVADO
35	34	Sandro Negrão	598.023.646-27	R$18.381,69	14/03/18	R$ 1.180.000,00	R$ 354.000,00	30%	826000,00	9,8%	360	R$ 6.893,13	22977,11	REPROVADO
36	35	Ana Maria Tardeli	759.037.829-25	R$12.351,64	14/03/18	R$ 430.000,00	R$ 86.000,00	20%	344000,00	7,7%	240	R$ 2.756,86	9189,55	APROVADO
37	36	Bárbara Teles	160.224.621-61	R$3.850,00	14/03/18	R$ 650.000,00	R$ 97.500,00	15%	0,00	8,5%	180	R$ -	0,00	REPROVADO
38	37	Anabele Trabulsi	712.890.647-22	R$4.860,00	14/03/18	R$ 410.000,00	R$ 41.000,00	10%	0,00	8,3%	180	R$ -	0,00	REPROVADO
39	38	Mayra Figueiredo	385.129.496-43	R$6.378,00	14/03/18	R$ 300.000,00	R$ 30.000,00	10%	0,00	7,3%	180	R$ -	0,00	REPROVADO
40	39	Paulo Donald	511.080.143-82	R$17.097,34	14/03/18	R$ 680.000,00	R$ 136.000,00	20%	544000,00	7,6%	120	R$ 6.411,50	21371,67	REPROVADO
41	40	Mateus Giggio	718.259.821-39	R$4.927,00	14/03/18	R$ 480.000,00	R$ 72.000,00	15%	0,00	8,6%	300	R$ -	0,00	REPROVADO
42	41	Xin Min Kin	375.830.714-49	R$6.074,55	14/03/18	R$ 260.000,00	R$ 91.000,00	35%	169000,00	10,4%	300	R$ 1.527,95	5093,18	APROVADO

Fonte: Autor.

Exercícios propostos

1- Indique uma possível justificativa para que a alíquota dos veículos que utilizam exclusivamente álcool, eletricidade ou gás ser menor que a alíquota dos veículos a gasolina.

2- Pesquise sobre o IPTU progressivo e depois escreva pelo menos um aspecto que pode ser considerado positivo e um negativo a respeito dessa medida.

3- Quando o cliente contrata um financiamento imobiliário, quem paga pelo imóvel num primeiro momento é o banco. Com isso, o cliente tem uma dívida com o banco. Quais garantias o banco pode exigir em um financiamento imobiliário? Ou seja, se o cliente não conseguir arcar com as parcelas, qual ação o banco pode tomar para não ter prejuízo financeiro?

4- (ENEM 2013). O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações. Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de

Imposto de Renda à Receita Federal o valor de:
a) R$ 900,00.
b) R$ 1.200,00.
c) R$ 2.100,00.
d) R$ 3.900,00.
e) R$ 5.100,00.
Resposta: b)

5.3 Plano de Aula 3 – Cálculo de salário

5.3.1 Informações iniciais da Aula 3

Público-alvo: alunos do 2º ano do ensino médio.

Objetivos gerais:
- Revisar conceitos de porcentagem do Ensino Fundamental II.
- Aprender como se faz o cálculo do salário de um empregado, entender o funcionamento dos descontos do INSS e do FGTS e como são calculados as férias e o 13º salário.
- Perceber as vantagens de utilizar a planilha eletrônica para facilitar os cálculos e a análise das informações.

Justificativas: Apropriar-se das Competências 2 e 3 da BNCC. Além disso, espera-se que os alunos possam desenvolver as seguintes habilidades contidas na BNCC: EM13MAT203, EF07MA02, EF08MA04 e EF09MA05.

Pré-requisitos: noções básicas de porcentagem, conforme estabelece a BNCC para o 8º ano do ensino fundamental (BRASIL, 2018, p. 313).

Duração: 2-3 hora-aulas.

Links para as planilhas da Aula 3:
"AULA 3 - PLANILHA":

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1N0u4DBDhaJcAUHRoiUAIusN6ngPJpwWc/edit?usp=sharing&ouid=106517865652709328858&rtpof=true&sd=true

“AULA 3 - PLANILHA - GABARITO”:
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1nXHDyPFcQiDTR16vIBTBpC7tmqnUidKX/edit?usp=sharing&ouid=106517865652709328858&rtpof=true&sd=true

Referências: Consultar Brasil (2018) e Lima (2016) (ver referências 2 e 11, respectivamente).

5.3.2 Descrição da Aula 3

O professor deve entregar o roteiro da aula e as planilhas, contidas em “AULA 3 - PLANILHA”, para os alunos. A proposta é que os alunos leiam o roteiro e sigam as orientações para preencher a planilha e, depois de terminar de completá-la, respondam as perguntas do questionário. A ideia da aula é desenvolver a autonomia do aluno, para isso o professor deve se posicionar apenas como um orientador e intervir apenas no caso de os alunos apresentarem alguma dificuldade. Depois que os alunos terminarem a atividade, o professor deve conduzir uma discussão sobre os resultados encontrados.

5.3.3 Roteiro da Aula 3

O Departamento Pessoal de uma empresa é o setor responsável pela parte burocrática de assuntos ligados aos próprios funcionários, como admissão, exame admissional, cálculo, pagamento e negociação de salários, locomoção, férias, benefícios, licenças, apuração do registro de ponto, pagamento de 13º salário, pagamento de comissões, escala de horários, rescisão, dentre outros. Empresas de pequeno porte, geralmente, não possuem um Departamento Pessoal, pois essas atividades podem ser feitas pelo próprio contador da empresa ou por uma empresa terceirizada.

A Mega Pessoal é uma empresa que auxilia microempresas e empresas de pequeno porte a elaborar a folha de pagamento, calcular guias do INSS e FGTS para pagamento, cuidar da parte demissional, etc, ou seja, auxilia a fazer cumprir a legislação trabalhista, o que é de interesse empresarial geral, pois evitam-se problemas com processos trabalhistas e consequentes visitas dos órgãos responsáveis pela fiscalização, como o Ministério do Trabalho e Previdência Social.

A empresa Mega Papel cresceu nos últimos tempos, e com o crescimento de sua folha de pagamento, eles decidiram contratar os serviços da Mega Pessoal para evitar erros no pagamento de impostos e ações trabalhistas.

A contratante enviou à contratada uma planilha com informações sobre os funcionários, incluindo o salário bruto de cada um.

Você é um funcionário da Mega Pessoal e deve elaborar uma planilha detalhando o custo de cada funcionário para a empresa. Esse relatório deve apresentar os principais encargos sociais incidentes sobre a folha de pagamento. Não devem ser considerados benefícios não obrigatórios por lei, tais como assistência médica, previdência privada, refeição, entre outros. A empresa contratante segue as leis trabalhistas contidas na CLT, ou seja, paga 13º salário, férias, entre outros benefícios.

Usando as informações recebidas pela empresa contratante, elabore uma planilha **"Custo da empresa"** que detalhe cada um dos itens listados a seguir e o total gasto com cada um dos funcionários. Crie uma coluna para cada um dos itens listados a seguir e uma para o total gasto com cada funcionário.

Além do salário bruto, todos os meses, são gastos da empresa de lucro real ou presumido:

• 8% (do valor do salário) de FGTS. Contribuição obrigatória ao Fundo de Garantia do Tempo de Serviço, que é considerado pelo governo como um investimento a longo prazo, que no futuro será retornado ao trabalhador.

• 12% (do valor do salário) de INSS Empresa. Valor pago ao governo referente aos benefícios garantidos por lei, como aposentadoria, auxílio-doença ou auxílio-desemprego.

• 5,8% (do valor do salário) de INSS Terceiros. Destinado às entidades SENAI, SESC, SESI, etc., o qual o INSS se incumbe de arrecadar e repassar.

• 1/12 das férias. Ao completar um ano de empresa, o colaborador passa a ter direito a férias. Antes do período de férias, a empresa paga ao empregado o valor integral de um salário. Todo mês a empresa deve guardar 1/12 dessa quantia como provisão.

• 8% (desse 1/12 das férias) de FGTS. A empresa deve pagar o FGTS relativo a essa provisão.

• 1/12 do 1/3 de férias. Além do valor recebido de férias, o trabalhador também tem o direito de receber 1/3 (um terço) em cima do valor pago de férias. Todo mês a empresa deve guardar 1/12 dessa quantia como provisão.

• 8% (desse 1/12 do 1/3 de férias) de FGTS. A empresa deve pagar o FGTS relativo a essa provisão.

• 1/12 do 13º salário. Caso tenha trabalhado o ano todo, o empregado receberá o 13º salário, que é um salário líquido a mais como benefício. Todo mês a empresa deve guardar 1/12 desse valor como provisão.

• 8% (desse 1/12 do 13º) de FGTS. A empresa deve pagar o FGTS relativo a essa provisão.

Exemplo:

Funcionário que recebe de salário R$ 10.000,00.
INSS EMPRESA 12% - R$ 1.200,00.
INSS TERCEIROS 5,8% - R$ 580,00.
FGTS SALÁRIOS 8% - R$ 800,00.
13º SALÁRIO 1/12 - R$ 833,33.
FÉRIAS PROPORCIONAIS 1/12 - R$ 833,33.
1/3 SOBRE FÉRIAS PROPORCIONAIS - R$ 277,77.
FGTS FÉRIAS 8% - R$ 66,66.
FGTS 13º SALÁRIO 8% - R$ 66,66.
FGTS 1/3 FÉRIAS 8% - R$ 22,22.
TOTAL DE GASTOS ALÉM DO SALÁRIO R$ 4.679,97.

Portanto, a empresa gastará R$ 14.679,97 com esse funcionário.

Ao final, a planilha deve ficar como na Figura 31.

Figura 31 – Custo da empresa.

16	15	Samuel Yurrita	R$ 2.800,00	R$ 224,00	R$ 336,00	R$ 162,40	R$ 233,33	R$ 18,67	R$ 233,33	R$ 77,78	R$ 18,67	R$ 6,22	R$ 4.110,40
17	16	Theo Nakabaiashi	R$ 6.580,00	R$ 526,40	R$ 789,60	R$ 381,64	R$ 548,33	R$ 43,87	R$ 548,33	R$ 182,78	R$ 43,87	R$ 14,62	R$ 9.659,44
18	17	Thiago Sismotto	R$ 2.350,00	R$ 188,00	R$ 282,00	R$ 136,30	R$ 195,83	R$ 15,67	R$ 195,83	R$ 65,28	R$ 15,67	R$ 5,22	R$ 3.449,80
19	18	Thomas Justus	R$ 3.200,00	R$ 256,00	R$ 384,00	R$ 185,60	R$ 266,67	R$ 21,33	R$ 266,67	R$ 88,89	R$ 21,33	R$ 7,11	R$ 4.697,60
20	19	Marcela Machini	R$ 2.200,00	R$ 176,00	R$ 264,00	R$ 127,60	R$ 183,33	R$ 14,67	R$ 183,33	R$ 61,11	R$ 14,67	R$ 4,89	R$ 3.229,60
21	20	Sandro Negrão	R$ 4.150,00	R$ 332,00	R$ 498,00	R$ 240,70	R$ 345,83	R$ 27,67	R$ 345,83	R$ 115,28	R$ 27,67	R$ 9,22	R$ 6.092,20
22	21	Ana Maria Tardeli	R$ 5.500,00	R$ 440,00	R$ 660,00	R$ 319,00	R$ 458,33	R$ 36,67	R$ 458,33	R$ 152,78	R$ 36,67	R$ 12,22	R$ 8.074,00
23	22	Bárbara Teles	R$ 4.100,00	R$ 328,00	R$ 492,00	R$ 237,80	R$ 341,67	R$ 27,33	R$ 341,67	R$ 113,89	R$ 27,33	R$ 9,11	R$ 6.018,80
24													

Fonte: Autor.

Além desses encargos sociais cobrados da empresa, existem os encargos sociais cobrados do empregado. O salário que um funcionário realmente recebe em conta, salário líquido, é o valor do salário bruto menos tais encargos sociais cobrados do funcionário.

Usando as informações recebidas pela empresa contratante, elabore uma planilha **"Salário líquido"** que detalhe cada um dos itens listados a seguir (INSS e IRPF) e ao final uma coluna com o salário líquido de cada funcionário. Para calcular o INSS e o IRPF, use a função SE do Excel.

Primeiramente, sobre o salário bruto, é cobrado o INSS. Esse valor varia de acordo com o salário do funcionário, segundo a Tabela 3:

Tabela 3 – Porcentagem de desconto do INSS a partir de janeiro de 2021.

SALÁRIO R$	ALÍQUOTA DE INSS
Até 1.100,00	7,50%
De 1.100,01 até 2.203,48	9%
De 2.203,49 até 3.305,22	12%
De 3.305,23 até 6.433,57	14%

Fonte: Autor.

Para os empregados que tenham remuneração mensal acima de R$ 6.433,57 em 2021, o valor do desconto em folha de pagamento será limitado a R$ 900,69 (14% de R$ 6.433,57).

Após descontado o valor relativo ao INSS, teremos o valor base para cálculo do Imposto de Renda retido na fonte.

Sobre esse valor base para cálculo de Imposto de Renda, é calculado o Imposto de Renda retido na fonte. Esse valor varia de acordo com a Tabela 4:

Tabela 4 – Desconto do Imposto de Renda.

Salário	Desconto	Parcela dedutível
Até R$1.903,98	0%	0
De R$1.903,99 até R$2.826,65	7,50%	R$ 142,80
De R$2.826,66 até R$3.751,05	15%	R$ 354,80
De R$3.751,06 até R$4.664,68	22,50%	R$ 636,13
Acima de R$4.664,68	27,50%	R$ 869,36

Fonte: Autor.

Após os descontos de INSS e IRPF, chegamos ao salário líquido do funcionário.

Usemos como exemplo um funcionário que tem como salário bruto o valor de R$ 4.100,00. Para o cálculo de INSS, este valor se encaixa na quarta linha da Tabela 3. Portanto, de INSS será descontado 14% de seu salário:

Valor descontado de INSS = 14% de R$ 4.100,00 = R$ 574,00.

Com isso, o valor base para cálculo de Imposto de Renda é:

Valor base para cálculo de IR = R$ 4.100,00 − R$ 574,00 = R$ 3.526,00.

Esse valor base se enquadra na terceira linha da Tabela 4 de alíquota de imposto de renda. Portanto, de IR, será descontado 15% do valor base com restituição de R$ 354,80:

Valor descontado de IR = (15% de R$ 3.526,00) − (R$ 354,80)

$= \text{R\$ } 528{,}90 - \text{R\$ } 354{,}80 = \text{R\$ } 174{,}10.$

Por fim, o salário líquido de um funcionário que tem como salário bruto R$ 4.100,00 será:

Salário líquido = Salário bruto − desconto de INSS − desconto de IR
$= \text{R\$ } 4.100{,}00 - \text{R\$ } 574{,}00 - \text{R\$ } 174{,}10 = \text{R\$ } 3.351{,}90.$

Ao final, a planilha deve ficar como na Figura 32.

Figura 32 – Salário líquido.

16	15	Samuel Yurrita	R$2.800,00	R$336,00	R$2.464,00	R$42,00	R$2.422,00	13,50%
17	16	Theo Nakabaiashi	R$6.580,00	R$900,69	R$5.679,31	R$692,45	R$4.986,86	24,21%
18	17	Thiago Sismotto	R$2.350,00	R$282,00	R$2.068,00	R$12,30	R$2.055,70	12,52%
19	18	Thomas Justus	R$3.200,00	R$384,00	R$2.816,00	R$68,40	R$2.747,60	14,14%
20	19	Marcela Machini	R$2.200,00	R$198,00	R$2.002,00	R$7,35	R$1.994,65	9,33%
21	20	Sandro Negrão	R$4.150,00	R$581,00	R$3.569,00	R$180,55	R$3.388,45	18,35%
22	21	Ana Maria Tardeli	R$5.500,00	R$770,00	R$4.730,00	R$431,39	R$4.298,61	21,84%
23	22	Bárbara Teles	R$4.100,00	R$574,00	R$3.526,00	R$174,10	R$3.351,90	18,25%

Fonte: Autor.

Exercícios propostos

1- (Enem/2020 - Digital). O ganho real de um salário r, é a taxa de crescimento do poder de compra desse salário. Ele é calculado a partir do percentual de aumento dos salários e da taxa de inflação, referidos a um mesmo período. Algebricamente, pode-se calcular o ganho real pela fórmula: $1 + r = \frac{1+i}{1+f}$, em que i é o percentual de aumento no valor dos salários e f é a taxa de inflação, ambos referidos a um mesmo período. Considere que uma categoria de trabalhadores recebeu uma proposta de aumento salarial de 10%, e que a taxa de inflação do período correspondente tenha sido 5%. Para avaliar a proposta, os trabalhadores criaram uma classificação em função dos ganhos reais conforme a Tabela 5.

Tabela 5 – Classificação em função do ganho real.

Ganho real	Classificação
Igual ou superior a 5%	Boa
Maior ou igual a 1,5% e menor que 5%	Regular
Maior que 0% e menor do que 1,5%	Ruim
Igual ou menor que 0%	Inaceitável

Fonte: Autor.

Eles classificaram a proposta de aumento e justificaram essa classificação apresentando o valor do ganho real que obteriam. A classificação, com sua respectiva justificativa, foi:

a) inaceitável, porque o ganho real seria mais próximo de – 5%.

b) ruim, porque o ganho real seria mais próximo de 1,05%.

c) regular, porque o ganho real seria mais próximo de 4,7%.

d) boa, porque o ganho real seria mais próximo de 9,5%.

e) boa, porque o ganho real seria mais próximo de 5%.

Resposta: c)

2- (FGV - 2000). No Brasil, quem ganha um salário mensal menor ou igual a R$ 900,00 está isento do pagamento de imposto de renda (IRPF). Quem ganha um salário mensal acima de R$ 900,00 até R$ 1.800,00 paga um IRPF igual a 15% da parte de seu salário que excede R$ 900,00; quem ganha um salário mensal acima de R$ 1.800,00 paga um IRPF igual a R$ 135,00 (correspondente a 15% da parte do salário entre R$ 900,00 e R$ 1.800,00) mais 27,5% da parte do salário que excede R$ 1. 800,00.

a) Qual o valor pago por uma pessoa que recebe um salário mensal de R$ 1.400,00?

b) Uma pessoa pagou um IR de R$ 465,00 num determinado mês. Qual o seu salário nesse mês?

Respostas: a) R$ 75,00   b) R$ 3.000,00

3- Em janeiro de 2021, vigorava no Brasil a Tabela 6 para cálculo do imposto de renda sobre os salários.

Tabela 6 – Cálculo do imposto de renda sobre os salários.

Salário	Desconto	Parcela dedutível
Até R$1.903,98	0%	0
De R$1.903,99 até R$2.826,65	7,50%	R$142,80
De R$2.826,66 até R$3.751,05	15%	R$354,80
De R$3.751,06 até R$4.664,68	22,50%	R$636,13
Acima de R$4.664,68	27,50%	R$869,36

Fonte: Autor.

a) Qual o imposto de renda de quem ganhou um salário mensal de R$ 1.500,00?

b) Qual o imposto de renda de quem ganhou um salário mensal de R$ 2.000,00?

c) Qual o imposto de renda de quem ganhou um salário mensal de R$ 5.000,00?

d) Explique o significado da parcela de R$ 142,80 a deduzir.

Respostas: a) 0 b) R$ 7,2 c) R$ 505,64

4- Tabela Progressiva para o cálculo anual do Imposto sobre a Renda da Pessoa Física a partir do exercício de 2016 (Tabela 7), ano-calendário de 2015.

Tabela 7 – Imposto de renda ano-calendário de 2015.

Base de cálculo anual (Renda)	Alíquota em %	Parcela a deduzir do imposto
Até 22.499,13	0	0
De 22.499,14 até 33.477,72	7,5	1.687,43
De 33.477,73 até 44.476,74	15	4.198,29
De 44.476,75 até 55.373,55	22,5	7.543,05
Acima de 55.373,55	27,5	10.302,69

Fonte: Autor.

O valor do imposto de renda, $I,$ é calculado por: $I = A \cdot R - P$.

Na expressão, A é a alíquota, R é a renda anual (base de cálculo anual) e P é a parcela a deduzir. Considerando o exposto, calcule o valor da renda anual de um contribuinte que pagou R$ 17.197,31 de imposto referente ao ano-calendário 2015.

Resposta: R$ 100.000,00

5.4 Plano de Aula 4 – Inflação e poupança

5.4.1 Informações iniciais da Aula 4

Público-alvo: alunos do 2º ano do ensino médio.

Objetivos gerais:
- Revisar conceitos de porcentagem do Ensino Fundamental II.
- Entender como funciona a inflação.
- Refletir sobre as vantagens e desvantagens de se investir na caderneta de poupança.
- Perceber as vantagens de utilizar a planilha eletrônica para facilitar os cálculos e a análise das informações.

Justificativas: Apropriar-se das Competências 2 e 3 da BNCC. Além disso, espera-se que os alunos possam desenvolver as seguintes habilidades contidas na BNCC: EM13MAT203, EF07MA02, EF08MA04 e EF09MA05.

Pré-requisitos: noções básicas de porcentagem, conforme estabelece a BNCC para o 8º ano do ensino fundamental (BRASIL, 2018, p. 313).

Duração: 2-3 hora-aulas.

Links para as planilhas da Aula 4:
"AULA 4 - PLANILHA":
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1RZvq4Z1quXWUrDk0aB6DbGW8gOH9U5op/edit?usp=sharing&ouid=106517865652709328858&rtpof=true&sd=true

"AULA 4 - PLANILHA - GABARITO":
https://docs.google.com/spreadsheets/d/1S5Txjut4s5olP4X7liWNu91sl-D1IPGc/edit?usp=sharing&ouid=106517865652709328858&rtpof=true&sd=true

Referências: Consultar Brasil (2018) (referência 2) e Seção 4.1 deste trabalho.

5.4.2 Descrição da Aula 4

O professor deve entregar o roteiro da aula e as planilhas, contidas em "AULA 4 - PLANILHA", para os alunos. A proposta é que os alunos leiam o roteiro e sigam as orientações para preencher a planilha, e depois de terminar de completá-la, respondam as perguntas do questionário. A ideia da aula é desenvolver a autonomia do aluno, desse modo, o professor deve se posicionar apenas como um orientador e intervir apenas no caso de os alunos apresentarem alguma dificuldade. Depois que os alunos terminarem a atividade, o professor deve conduzir uma discussão sobre os resultados encontrados.

5.4.3 Roteiro da Aula 4

Maria e João são amigos de infância. Maria passou 1 ano fazendo intercambio fora do Brasil e voltará em breve para cá. Curiosa sobre a situação atual do país, perguntou para João se o custo de vida aumentou muito nesse último ano. João ficou muito intrigado com a pergunta, mas não sabia o que era necessário levar em consideração para responder. Faça uma pesquisa na internet e discuta com seus colegas como ajudar o João responder a pergunta da Maria.

Perguntas que podem nortear a sua pesquisa:

- Como avaliar se o custo de vida em um país aumentou?
- O que é inflação?
- O que é IPCA?
- O que causa a inflação?
- Como se calcula a inflação?
- Como a inflação afeta a vida das pessoas?
- Como controlar a inflação?
- A inflação é sempre ruim?

Depois de pensar nas questões acima, as coisas começam a fazer mais sentido para João. Ele se lembrou de que há um ano, em setembro de 2020, recebeu R$ 1.000,00 de presente de alguns familiares. Seu pai abriu uma conta corrente para

João, e ele decidiu guardar esse dinheiro. Percebeu, então, que apenas guardar esse dinheiro em conta corrente não foi o ideal. Para entender qual foi o tamanho de sua perda e como investir para que isso não se repita, João procurou os serviços da Mega Invest, uma empresa que oferece consultoria financeira, ajudando seus clientes a tomar a melhor decisão de investimento.

Neste caso, você é um funcionário da Mega Invest e deve, primeiramente, ajudar o João a entender o tamanho de sua perda ao não investir seu dinheiro. Nas planilhas **"Prejuízo 1"** e **"Prejuízo 2"**, calcularemos como o dinheiro de João perdeu poder de compra ao longo do tempo.

Para isso, consideraremos que no momento em que João ganhou os R$ 1.000,00, essa quantia comprava produtos que custavam no máximo R$ 1.000,00. Como o dinheiro não foi investido e nem foi retirado, ao longo do ano, essa quantia permaneceu a mesma (coluna D), enquanto os produtos sofreram alteração em seus valores. Considerando essas condições:

- Calcule a inflação acumulada no ano de 2020 (coluna C), na planilha **"Prejuízo 1"**, em que há a taxa de inflação de cada um dos meses de 2020. Para auxiliar seu trabalho, utilize o exemplo abaixo.

Exemplo:

Um produto que custava R$ 320,00 sofreu, por três meses consecutivos, aumentos percentuais. No primeiro mês, o aumento foi de 20% em relação ao valor inicial. No segundo mês, o aumento foi de 30% em relação ao mês anterior e, no terceiro mês, o aumento foi de 10% em relação ao mês anterior.

a) Calcule o valor do produto ao final de cada mês.

No início, o produto custava R$ 320,00. Ao final do primeiro mês, passou a custar:

$$Valor\ final = V_1 = Valor\ anterior + acréscimo\ percentual.$$

Logo,

$$V_1 = 100\% \cdot 320 + 20\% \cdot 320 = (100\% + 20\%) \cdot 320 = \left(\frac{100}{100} + \frac{20}{100}\right) \cdot 320$$
$$\Rightarrow V_1 = (1 + 0{,}2) \cdot 320 = 1{,}2 \cdot 320 = 384.$$

Ao final do segundo mês, passou a custar:

$$V_2 = 1{,}3 \cdot 384 \Rightarrow V_2 = 499{,}20.$$

Ao final do terceiro mês, passou a custar:

$$V_3 = 1{,}1 \cdot 499{,}20 \Rightarrow V_3 = 549{,}12.$$

b) Calcule o aumento total equivalente ao final dos três meses.

Para obter o percentual equivalente após os três aumentos, basta calcular:

$$taxa\ final\ equivalente = t_f = \frac{valor\ total\ do\ aumento}{valor\ inicial} = \frac{valor\ final - valor\ inicial}{valor\ inicial}$$
$$\Rightarrow t_f = \frac{valor\ final}{valor\ inicial} - \frac{valor\ inicial}{valor\ inicial} = \frac{valor\ final}{valor\ inicial} - 1.$$

Logo,

$$t_f = \frac{549{,}12}{320{,}00} - 1 = 1{,}716 - 1 = 1{,}716 - 1 = 0{,}716 = 71{,}6\%.$$

Importante! Há outra forma de calcular a % final equivalente, mas sem usar o valor do produto, dada por:

$$taxa\ final\ equivalente = t_f = (1 + t_1) \cdot (1 + t_2) \cdot \ldots \cdot (1 + t_n) - 1.$$

Logo,

$$t_f = (1 + 0{,}2) \cdot (1 + 0{,}3) \cdot (1 + 0{,}1) - 1 = 1{,}2 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}1 - 1 = 1{,}716 - 1 = 0{,}716$$
$$\Rightarrow t_f = 71{,}6\%.$$

- Calcule o estimado valor dos produtos ao longo do ano (coluna E), supondo que eles sofreram variação de preço de acordo com a inflação. Para auxiliar seu trabalho, utilize o exemplo.
- Construa um gráfico de linha que mostre a perda do poder de compra do dinheiro de João ao longo do ano. Após isso, a planilha deve ficar como na Figura 33.

Figura 33 – A perda do poder de compra do dinheiro: perspectiva 1.

Período	Inflação	Inflação acumulada no ano	Valor em conta corrente	Valor dos produtos corrigidos pela inflação
Início	0%	0,00%	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
set/20	0,64%	0,64%	R$ 1.000,00	R$ 1.006,40
out/20	0,86%	1,51%	R$ 1.000,00	R$ 1.015,06
nov/20	0,89%	2,41%	R$ 1.000,00	R$ 1.024,09
dez/20	1,35%	3,79%	R$ 1.000,00	R$ 1.037,91
jan/21	0,25%	4,05%	R$ 1.000,00	R$ 1.040,51
fev/21	0,86%	4,95%	R$ 1.000,00	R$ 1.049,46
mar/21	0,93%	5,92%	R$ 1.000,00	R$ 1.059,22
abr/21	0,31%	6,25%	R$ 1.000,00	R$ 1.062,50
mai/21	0,83%	7,13%	R$ 1.000,00	R$ 1.071,32
jun/21	0,53%	7,70%	R$ 1.000,00	R$ 1.077,00
jul/21	0,96%	8,73%	R$ 1.000,00	R$ 1.087,34
ago/21	0,87%	9,68%	R$ 1.000,00	R$ 1.096,80

Fonte: Autor.

Na planilha **"Prejuízo 2"**, também vamos mostrar a perda de poder de compra do dinheiro de João, mas com uma visão um pouco diferente. Ao contrário da planilha anterior, em que avançamos no tempo de acordo com a inflação, vamos regredir os preços dos produtos que hoje custam R$ 1.000,00 segundo a inflação. Ou seja, os produtos que hoje custam R$ 1.000,00 custavam menos nos meses anteriores. Para isso:

- Calcule o quanto custavam em cada mês os produtos que hoje custam R$ 1.000,00 (coluna E). Suponha que ao longo dos meses os produtos foram reajustados de acordo com a inflação.
- Construa um gráfico de linha que mostre a perda do poder de compra do dinheiro de João ao longo do ano. Após isso, a planilha deve ficar como na Figura 34.

Figura 34 – A perda do poder de compra do dinheiro: perspectiva 2.

Período	Inflação	Inflação acumulada no ano	Valor em conta corrente	Valor dos produtos corrigidos pela inflação
Início	0%	0,00%	R$ 1.000,00	R$ 911,75
set/20	0,64%	0,64%	R$ 1.000,00	R$ 917,58
out/20	0,86%	1,51%	R$ 1.000,00	R$ 925,47
nov/20	0,89%	2,41%	R$ 1.000,00	R$ 933,71
dez/20	1,35%	3,79%	R$ 1.000,00	R$ 946,31
jan/21	0,25%	4,05%	R$ 1.000,00	R$ 948,68
fev/21	0,86%	4,95%	R$ 1.000,00	R$ 956,84
mar/21	0,93%	5,92%	R$ 1.000,00	R$ 965,74
abr/21	0,31%	6,25%	R$ 1.000,00	R$ 968,73
mai/21	0,83%	7,13%	R$ 1.000,00	R$ 976,77
jun/21	0,53%	7,70%	R$ 1.000,00	R$ 981,95
jul/21	0,96%	8,73%	R$ 1.000,00	R$ 991,38
ago/21	0,87%	9,68%	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00

Fonte: Autor.

Na planilha **"Poupança"**, iremos calcular o quanto esse dinheiro renderia caso estivesse sido investido na caderneta de poupança. Analisaremos se esse investimento valeria a pena. Nessa planilha, é fornecido o rendimento percentual da caderneta de poupança em cada um dos meses. Sabendo disso:

- Calcule a taxa acumulada no período proposto de uma aplicação na caderneta de poupança (coluna C).
- Calcule a evolução da quantia de João, caso ele tivesse investido na caderneta de poupança (coluna E).
- Construa um gráfico de linha que mostre a variação do dinheiro de João caso ele tivesse investido na caderneta de poupança. Após isso, a planilha deve ficar como na Figura 35.

Figura 35 – Investimento na caderneta de poupança.

Período	Taxa	Taxa acumulada	Valor em conta corrente	Valor aplicado na caderneta de poupança
Início	0%	0%	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
set/20	0,12%	0,12%	R$ 1.000,00	R$ 1.001,20
out/20	0,12%	0,24%	R$ 1.000,00	R$ 1.002,40
nov/20	0,12%	0,36%	R$ 1.000,00	R$ 1.003,60
dez/20	0,12%	0,48%	R$ 1.000,00	R$ 1.004,81
jan/21	0,12%	0,60%	R$ 1.000,00	R$ 1.006,01
fev/21	0,12%	0,72%	R$ 1.000,00	R$ 1.007,22
mar/21	0,12%	0,84%	R$ 1.000,00	R$ 1.008,43
abr/21	0,16%	1,00%	R$ 1.000,00	R$ 1.010,04
mai/21	0,16%	1,17%	R$ 1.000,00	R$ 1.011,66
jun/21	0,20%	1,37%	R$ 1.000,00	R$ 1.013,68
jul/21	0,24%	1,61%	R$ 1.000,00	R$ 1.016,12
ago/21	0,24%	1,86%	R$ 1.000,00	R$ 1.018,55

Fonte: Autor.

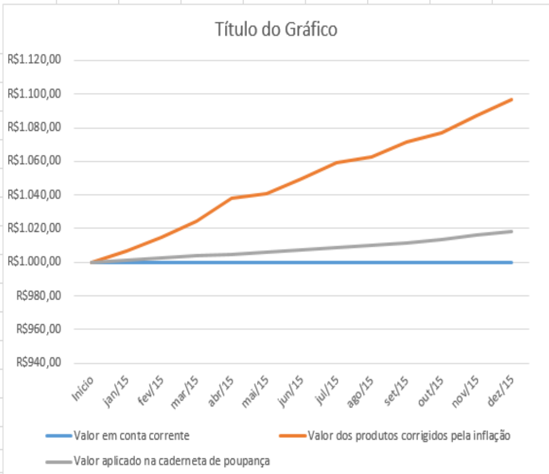
Por último, preenchendo a planilha **“CC x Poup x Inf”**, poderemos analisar se investir na poupança era ou não uma boa opção. Para isso:

• Preencha as colunas B, C e D utilizando os valores calculados nas outras planilhas.

• Construa um gráfico de linha utilizando essas informações. Analisando os valores e o gráfico da planilha “CC x Poup x Inf”, conclua se investir na poupança teria sido uma boa opção ou não? Por quê? (ver Figura 36).

Figura 36 – Análise do investimento na caderneta de poupança.

Período	Valor em conta corrente	Valor dos produtos corrigidos pela inflação	Valor aplicado na caderneta de poupança
Início	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00	R$1.000,00
jan/15	R$ 1.000,00	R$ 1.006,40	R$1.001,20
fev/15	R$ 1.000,00	R$ 1.015,06	R$1.002,40
mar/15	R$ 1.000,00	R$ 1.024,09	R$1.003,60
abr/15	R$ 1.000,00	R$ 1.037,91	R$1.004,81
mai/15	R$ 1.000,00	R$ 1.040,51	R$1.006,01
jun/15	R$ 1.000,00	R$ 1.049,46	R$1.007,22
jul/15	R$ 1.000,00	R$ 1.059,22	R$1.008,43
ago/15	R$ 1.000,00	R$ 1.062,50	R$1.010,04
set/15	R$ 1.000,00	R$ 1.071,32	R$1.011,66
out/15	R$ 1.000,00	R$ 1.077,00	R$1.013,68
nov/15	R$ 1.000,00	R$ 1.087,34	R$1.016,12
dez/15	R$ 1.000,00	R$ 1.096,80	R$1.018,55



Fonte: Autor.

Exercícios propostos

1- Com base na atividade de hoje, como você explicaria muitas lojas apresentarem descontos quando optamos por pagamento à vista em dinheiro quando comparado com compras parceladas? Como que você relacionaria os juros aplicados nas parcelas?

2- Com base nos seus resultados, é vantajoso investir o dinheiro na poupança? Justifique.

3- Uma cesta básica é constituída de três produtos X, Y, e Z nas quantidades 3, 5 e 12, respectivamente. Em janeiro, fevereiro e março os preços médios por unidade desses produtos são dados na Tabela 8:

Tabela 8 – Preços médios por unidade.

	X	Y	Z
Janeiro	R$10,00	R$12,00	R$15,00
Fevereiro	R$10,00	R$12,50	R$15,60
Março	R$11,00	R$12,60	R$15,40

Fonte: Autor.

a) Qual a taxa de inflação de fevereiro, considerando-se essa cesta básica?

b) Qual a taxa de inflação de março, considerando-se a mesma cesta básica?

Respostas: a) 3,5%   b) 0,39%

4- Em julho, agosto e setembro, as taxas de inflação foram, respectivamente, 1,2%, 0,8% e 1,3%.

a) Qual a taxa acumulada de inflação no período?

b) Qual deverá ser a taxa de inflação de outubro para que a taxa acumulada do quadrimestre seja 4%?

Respostas: a) 3,34%   b) 0,64%

5- (UFRGS). Entre julho de 1994 e julho de 2009, a inflação acumulada pela moeda brasileira, o real, foi de 244,15%. Em 1993, o Brasil teve a maior inflação anual de sua história. A revista Veja de 08/07/2009 publicou uma matéria mostrando que, com uma inflação anual como a de 1993, o poder de compra de 2.000 reais se reduziria, em um ano, ao poder de compra de 77 reais. Dos valores abaixo, o mais próximo do percentual que a inflação acumulada entre julho de 1994 e julho de 2009 representa em relação à inflação anual de 1993 é:

a) 5%.

b) 10%.

c) 11%.

d) 13%.

e) 15%.

Resposta: b)

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, abordamos um assunto que é de suma importância não apenas no âmbito escolar, mas para a sociedade como um todo, que é a matemática financeira. Levantamos a discussão sobre como aliar a matemática financeira, a educação financeira e uso de tecnologias, para propiciar ao aluno um aprendizado mais atraente e significativo.

Para mostrar a relevância dessa questão, iniciamos a dissertação com o estudo da história da matemática financeira, e com isso pudemos observar que desde que a sociedade deixou de usar o sistema de trocas e começou a utilizar a moeda como forma de pagamento, a relação com o dinheiro foi se tornando mais complexa, e os juros, empréstimos, aplicações financeiras, impostos e financiamentos se mostram presentes no dia a dia de qualquer cidadão atualmente.

Entendemos que as aulas de matemática são o momento ideal para abordar assuntos que farão parte do cotidiano do jovem ao ingressar no mercado de trabalho e na vida em sociedade. Sendo assim, o modelo de aprendizagem no qual o aluno apenas resolve questões de forma mecânica, aplicando fórmulas, de maneira passiva e pouco reflexiva, não tem mais lugar no mundo contemporâneo.

Acreditamos que o uso de tecnologia pode ter um papel motivador, despertando a imaginação e a curiosidade, além de ser uma ferramenta de análise, e facilitando os cálculos. Isso, aliado às metodologias ativas de aprendizagem, em que o aluno assume um papel central na construção do conhecimento, fazendo pesquisas, levantando hipóteses, testando possibilidades, e chegando as suas próprias conclusões, tanto individualmente quanto em conjunto com seus pares. Nesse processo, o professor tem o papel de facilitador e mediador, orientando e guiando o aluno a alcançar os objetivos planejados, podendo tornar o ensino da matemática financeira mais significativo e atraente. Para tentar auxiliar o professor nessa tarefa, abordamos também os principais fundamentos necessários para o estudo desse conteúdo e os seus tópicos mais importantes, incluindo a demonstração das fórmulas e dos teoremas.

Como produto final dessa pesquisa foi produzida uma sequência didática. Na Aula 1, o aluno simula o cotidiano de um funcionário de uma empresa e precisa analisar o lucro bruto e percentual de cada produto quando comprado no Brasil e no exterior. Além de fazer a conversão do dólar para o real, ele precisa refletir sobre como o câmbio influencia no preço do produto importado e, ao final, decidir qual a melhor forma de comprar cada item. Na Aula 2, o aluno, também simulando ser um trabalhador, precisa conferir se os valores cobrados pelo governo de IPVA e IPTU de seus clientes estão corretos, e, caso estejam incorretos, dizer qual a diferença a ser recebida ou devolvida. Ele precisa pesquisar sobre qual motivo de os carros a álcool terem desconto no IPVA e sobre o que é IPTU progressivo, e emitir uma opinião sobre essas políticas. Em uma segunda parte da aula, sabendo que sua empresa realiza financiamentos de imóveis, e que o cliente tem que dar de entrada pelo menos 20% do valor do imóvel, e que o valor da prestação não pode ultrapassar 30% da renda familiar da pessoa, os alunos precisam decidir quais clientes que pediram o financiamento atendem aos critérios estabelecidos e pesquisar sobre quais garantias o banco pode pedir para que este cliente pague as prestações e quais as punições possíveis caso isso não aconteça. Na Aula 3, o aluno, como funcionário do departamento pessoal, precisa fazer o cálculo do custo de cada colaborador para a empresa, determinando os valores a serem pagos de INSS, FGTS, férias e 13º terceiro salário. Nessa aula o aluno deve entender como funciona o pagamento do salário, quais são seus diretos e quais são os seus deveres fiscais nesse assunto. Na Aula 4, o aluno recebe uma pergunta de uma amiga que mora fora do país: O custo de vida no Brasil aumentou no último ano? Para responder esta pergunta, ele deve pesquisar sobre o que é e como funciona a inflação, e como se calcula o custo de vida de um país. Simulamos uma situação em que um sujeito recebeu de presente R$ 1.000,00 de seu pai há um ano e não aplicou. Ele precisa analisar o que aconteceu com os preços dos produtos nesse período em que ele não aplicou o dinheiro, e depois ver o que teria acontecido se ele tivesse investido na poupança. Ao final refletir se a poupança seria um bom investimento ou se os preços dos produtos aumentaram mais do que o dinheiro teria valorizado na poupança.

Esperamos, através das atividades propostas, incentivar e auxiliar o professor do ensino médio a ir além do que trazem os livros didáticos, e assim, transformar os alunos em cidadãos críticos e capazes de tomar decisões mais conscientes e saudáveis, além de estimular o professor a usar ferramentas tecnológicas para resolver problemas de matemática financeira que possam ser úteis para o aluno em um futuro próximo.

Como sugestão de aprontamento, sugerimos novos tópicos de aula: imóveis como forma de investimento – vantagens e desvantagens, investimentos em ações e renda fixa, aplicar o dinheiro e pagar a prazo ou pagar à vista, sistema de amortizações – financiamento e sistema uniforme de depósitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ASSAF, Alexandre Neto. **Matemática financeira e suas aplicações**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

2. BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 24 set. 2020.

3. ENEF-Estratégia Nacional de Educação Financeira. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/para-criancas-e-jovens/. Acesso em: 24 set. 2020.

4. GONÇALVES, Jean Piton. **A história da matemática comercial e financeira**. 2005. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/profs/jpiton/downloads/artigo_hist_mat_fin_2aed.pdf. Acesso em: 02 out. 2020.

5. GRANDO, Neiva Ignês; SCHNEIDER, Ido José. **Matemática financeira:** alguns elementos históricos e contemporâneos. Zetetiké-Unicamp, v. 18, n. 33, p. 43-62, 2010.

6. IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

7. KARAM, José Alexandre Vieira. **A correção monetária no Brasil, desde o império até o governo Lula.** 2004. Monografia (Especialização em Gestão de Negócios) - Departamento de Contabilidade do Setor de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2004. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/56583/Jose%20Alexandre%20Vieira%20Karam.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 04 out. 2020.

8. LAUREANO, José Luiz; LEITE, Olímpio Vissoto. **Os segredos da matemática financeira.** São Paulo: Ática, 1987.

9. LIEDTKE, Alzira Maria. **Introdução à matemática financeira.** 2010. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/roteiropedagogico/relato/2197_Introducao_a_Matematica_Financeira.PDF. Acesso em: 24 set. 2020.

10. LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

11. LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira; WAGNER, Eduardo. **Temas e problemas elementares**. Rio de janeiro: SBM, 2016.

12. LIMA, Valdineia Rodrigues; SOUSA, Edilene França Pereira; SITKO, Camila Maria. **Active learning methodologies:** flipped classroom, peer instruction and the simulated jury in teaching Mathematics. Research, Society and Development,

v. 10, n. 5, p. 1-13, 2021. Disponível em: https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/14507. Acesso em: 11 nov. 2021

13. MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática:** propostas e desafios. Belo horizonte: Autêntica, 2004.

14. MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

15. PAIVA, Marlla Rúbya Ferreira; PARENTE, José Reginaldo Feijão; BRANDÃO, Israel Rocha; QUEIROZ, Ana Helena Bomfim. **Metodologias ativas de ensino-aprendizagem:** revisão integrativa. SANARE, Sobral, v. 15, n. 02, p.145-153, 2016. Disponível em: https://sanare.emnuvens.com.br/sanare/article/view/1049/595. Acesso em: 13 nov. 2021.

16. PAIVA, Thiago Yamashita. **Aprendizagem ativa e colaborativa:** uma proposta de uso de metodologias ativas no ensino da matemática. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/21707. Acesso em: 13 nov. 2021.

17. Portal do Comércio, **Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (Peic)** – Outubro de 2021. Disponível em: https://www.portaldocomercio.org.br/publicacoes/peuisa-de-endividamento-e-inadimplencia-do-consumidor-peic-outubro-de-2021/382847. Acesso em: 06 nov. 2021.

18. PUCCINI, Ernesto Coutinho. **Matemática financeira e análise de investimentos.** Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração/UFSC, 2016.

19. ROBERT, Jozsef. **A origem do dinheiro**. Rio de Janeiro: Editora Global, 1989.

20. RODRIGUES, Maria de Lourdes Veronese; FIGUEIREDO, José Fernando de Castro. **Aprendizado centrado em problemas.** Medicina (Ribeirão Preto), v. 29, n. 4, p. 396-402, 1996. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/rmrp/article/view/774. Acesso em: 13 nov. 2021.

21. Revista Isto é**,** EDIÇÃO Nº 2647, 02/10. Disponível em: https://istoe.com.br/endividamento-dos-brasileiros-sobe-em-agosto-ao-maior-indice-da-serie-da-cnc/. Acesso em: 06 out. 2020.

22. SILVA, Alex Fabiano Metello. **A importância da matemática financeira no ensino básico.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2015.

23. VIEIRA, Marta Neves Campanelli Marçal; PANÚNCIO-PINTO, Maria Paula. **A Metodologia da Problematização (MP) como estratégia de integração ensino-serviço em cursos de graduação na área da saúde**. Medicina (Ribeirão Preto),

v. 48, n. 3, p. 241-248, 2015. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/rmrp/article/view/104310. Acesso em: 10 nov. 2021