Universidade Federal de São Paulo

Instituto De Ciências Ambientais,

Químicas E Farmacêuticas

Campus Diadema

Mestrado Profissional em Matemática

em Rede Nacional - PROFMAT

Trigonometria esférica e seu estudo no software Geogebra 3D

Luciano Pedro da Silva

Orientador: Prof. Dr. Anderson Augusto Ferreira

Diadema

Dezembro, 2021

Título: *Trigonometria esférica e seu estudo no software Geogebra 3D*

Dissertação apresentada ao Instituto De Ciências Ambientais, Químicas E Farmacêuticas da UNIFESP, campus Diadema/SP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Diadema

Dezembro, 2021

Silva, Luciano Pedro da

Trigonometria esférica e seu estudo no software Geogebra 3D, Luciano Pedro da Silva – Diadema, 2021.

ix, 59f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Paulo. Instituto De Ciências Ambientais, Químicas E Farmacêuticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Spherical trigonometry and its study in Geogebra 3D software

1. Trigonometria Plana. 2. Trigonometria Esférica. 3. Triângulos esféricos. 4. Globo Terrestre. 5. Geogebra.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO

Instituto De Ciências Ambientais, Químicas E Farmacêuticas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Chefe de departamento:
Prof^{a}. Dr^{a} Renato Marcone José de Souza

Coordenador do Programa de Pós-Graduação:
Prof. Dr. Renato de Sá Teles

LUCIANO PEDRO DA SILVA

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA E SEU ESTUDO NO SOFTWARE GEOGEBRA 3D

Presidente da banca: Prof. Dr. Anderson Augusto Ferreira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo

Prof. Dr. Rodolfo Valentim da Costa Lima

Prof. Dr. Evaldo Araújo de Oliveira Filho

Data da Defesa: 16 de Dezembro de 2021

O seu legado é imenso, foram muitos os ensinamentos que me passou e pelos quais lhe estarei eternamente grato. Se hoje sou alguém na vida, é porque tive o exemplo de um pai batalhador.

Autor desconhecido.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por sempre me dar forças para não desistir, iluminando meu caminho em todos os momentos da minha vida.

Agradeço à minha esposa Janaína, e minha filha Júlia por serem meu porto seguro, minhas razões de seguir em frente.

Agradeço a minha mãe Maria por sempre me apoiar e me ensinar a ser ético em todos os momentos da vida.

Agradeço aos meus sogros, José e Elenita, por me acolherem como filho e sempre me ajudar.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Anderson, pela grande contribuição na realização deste trabalho.

Agradeço a meus irmãos e irmãs, cunhados e cunhadas, pelo apoio sempre que precisei.

Agradeço aos amigos do curso que me ajudaram durante todo o percurso, nos momentos de estudos para o exame de qualificação, e no apoio para não desistir deste trabalho.

Agradeço a todos os professores do Profmat pelo ensinamentos valiosos, e manhãs de grande troca de saberes.

Agradeço ao meu grande amigo Prof. Adilson, por todo o apoio, sempre incentivando e elogiando meu trabalho.

Agradeço aos amigos e alunos da Escola Estatual Pei Prof. Riolando Canno por todo carinho e apoio no inicio de minha profissão e que me mostraram o prazer de estar a serviço da educação.

Agradeço aos amigos e alunos do Centro Educacional Piaso, que me deram oportunidade de mostrar meu trabalho, onde ao ensinar consegui cada vez mais aprimorar meus conceitos matemáticos.

Agradeço a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho fazemos uma introdução da geometria e da trigonometria na superfície esférica utilizando o aplicativo Geogebra $3D$. Nosso objetivo central é mostrar como determinadas relações trigonométricas da geometria euclidiana (plana) são modificadas quando a métrica do espaço é modificada para medir distâncias entre dois pontos numa superfície esférica. As atividades apresentadas no Geogebra mostram que é possível o professor do ensino médio introduzir a trigonometria esférica de forma clara e lúdica.

Palavras-chave: 1. Trigonometria Plana. 2. Trigonometria Esférica. 3. Triângulos esféricos. 4. Globo Terrestre. 5. Geogebra.

ABSTRACT

In this work we introduce geometry and trigonometry on the spherical surface using the Geogebra $3D$ application. Our main objective is to show how trigonometric relations of Euclidean (plane) geometry are modified when the space metric is modified to measure distances between two points on a spherical surface. Physical activities in Geogebra show that it is possible for a high school teacher to introduce spherical trigonometry in a clear and playful way.

Keywords: 1. Plane trigonometry. 2. Spherical trigonometry. 3. Spherical triangles. 4. Terrestrial globe. 5. Geogebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante muito tempo as civilizações procuraram soluções para problemas envolvendo localizações, distâncias e medidas, e os postulados e axiomas de Euclides foram a base desse estudo. Mas foi em seu V postulado onde muitos geômetras se debruçaram tentando prová-lo, esse postulado comentava sobre o conceito de retas paralelas: "retas pertencentes ao mesmo plano, que estendidas indefinidamente não apresentam ponto em comum". Embora não tivessem dúvidas sobre sua validade, existia certa insatisfação por não poder prová-lo.

A não aceitação desse postulado nortearam as primeiras ideias das geometria não Euclidianas, geometrias onde o espaço estudado não seria mais plano como o de Euclides, mas sim, superfícies curvas, como nosso Globo Terrestre.

Assim surge outras geometrias e se dá o estudo da trigonometria esférica para auxiliar na resolução dos problemas relacionados com o espaço curvo, resolvendo problemas relacionados com navegação e localização no globo terrestre. No estudo dos triângulos esféricos iremos perceber que alguns postulados relacionadas a geometria Euclidiana não é válido, sendo necessário novos teoremas e definições.

Na educação básica, percebemos a falta de inspiração dos alunos quando trabalhamos com geometria plana, muitos alunos perguntam sobre sua utilização, e somente com os conceitos da geometria Euclidiana fica difícil convencê-los a se interessar pelos estudos, e hoje com a tecnologia cada vez mais presente na vida de todos, podemos utilizar essa tecnologia para motivar os alunos a se interessar por softwares de desenho, no campo da geometria temos o software "Geogebra", disponível para computadores, celulares e tablets.

A ferramenta Geogebra consegue alinhar construções geométricas, com conhecimentos teóricos da geometria, fazendo o estudante mergulhar em construções que utilizadas da forma correta despertará o conhecimento dos alunos.

No Geogebra $3D$ há a possibilidade de trabalhar sólidos geométricos, inclusive esferas, e desenvolver o estudo da trigonometria esférica, com construções alinhadas as definições e teoremas, dando a oportunidade do aluno presenciar de forma mais visual as distâncias entre pontos sobre uma esfera e compreendendo os cálculos envolvidos na resolução dos problemas.

Esta dissertação está apresentada da seguinte forma:

No capítulo 1 é apresentado os principais conceitos e definições da trigonometria plana, com um aprofundamento nas relações trigonométricas dos triângulos planos.

No capítulo 2 é apresentado os elementos da trigonometria esférica desde o conceito de esferas, passando pela construção dos elementos da geometria esférica, e as relações trigonométricas dos triângulos esféricos.

No capítulo 3 vemos os elementos do globo terrestre, as coordenadas de localização latitude e longitude.

No Capítulo 4 fazemos aplicações da trigonometria esférica no globo terrestre no calculo de distância entre pontos, importantes para a navegação e localizações.

No capítulo 5 trabalhamos o sistema de coordenadas, podendo transformar as coordenadas geográficas, em coordenadas no espaço que será útil na aplicação dos conceitos no Geogebra.

No capítulo 6 vemos as construções dos elementos da trigonometria esférica no software Geogebra, passando pela construção de triângulos esféricos e o uso do software para calculo de distância entre pontos na esfera, fazendo sua aplicação com distâncias do globo terrestre.

No capítulo 7 apresento uma série de problemas envolvendo a trigonometria esférica e o uso do Geogebra para aprimorar o conhecimento sobre o tema.

1

CAPÍTULO 1. TRIGONOMETRIA PLANA

Ponto, reta e plano são os três elementos primitivos da geometria postulados por Euclides [1]. São na realidade juízos sintéticos a priori no sentido kantiano [2]. Entretanto, é possível intuí-los mediante exemplos tácitos do nosso cotidiano:

- *Ponto* : Uma estrela no céu, ou mesmo um grão de areia podem representar a ideia de um ponto material. Na linguagem matemática costuma-se utilizar letras maiúsculas do alfabeto latino. Por exemplo: Pontos P, Q,....

- *Reta*: Uma corda esticada ou um fio condutor são exemplos físicos de retas (semirretas). Simbolicamente, utilizamos letras minúsculas do alfabeto latino para se gravar este tipo de objeto. Por exemplo: retas r, s,....

- *Plano*: Uma superfície de uma mesa ou ao um campo de futebol são representações grosseiras de planos (semiplanos). Costuma-se designar esses objetos por letras do alfabeto grego. Por exemplo: Planos π, μ,....

No universo da geometria estaremos interessados, nesta presente monografia, nos objetos denominados por triângulos. Para estudarmos essas figuras, precisaremos inicialmente entender os conceitos de semirreta e segmento de reta.

- *Semirreta*: É parte se uma reta que foi seccionada por um ponto denominado por origem (O). As semirretas costumam-se denominadas pelo símbolo $\overrightarrow{OA}$, onde A é qualquer ponto que pertence a semirreta.

- *Segmento de reta*: Dado dois pontos distintos A e B, chamamos de segmento $\overline{AB}$ a união de todos os pontos que pertence ao segmento $\overline{AB}$.

Quando tivermos duas semirretas com a origem em comum, a abertura existente entre elas será denominada ângulo. Desta forma a abertura entre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ formará o ângulo $\widehat{AOB}$.

Os ângulos são classificados como:

- Agudo: ângulos cuja medida é menor que 90°.

- Obtuso: ângulos cuja medida é maior que 90°.

- Reto: ângulos cuja medida é igual a 90°.

1.1 TRIÂNGULOS

Os triângulos são figuras geométricas formadas por três segmentos de reta que, dois a dois, interceptam-se produzindo um domínio fechado. Essas figuras possuem as seguintes propriedades:

- *Lados*: são segmentos de retas unidos dois a dois por suas extremidades.
- *Vértice*: é o ponto de intersecção entre dois lados.
- *Ângulo interno*: é o ângulo formado pela intersecção de dois lados concorrentes situado na região interna do triângulo.

1.1.1 *Classificação dos triângulos*

Podemos classificar os triângulos de acordo com as medidas de seus ângulos ou de seus lados.

Classificação em relação as medidas de seus lados

- Equilátero: Quando todos os lados possui a mesma medida.
- Isósceles: Quando o triângulo possui dois lados de mesma medida.
- Escaleno: Quantos todos os lados tem medidas diferentes.

Classificação em relação as medidas de seus ângulos

- Acutângulo: Quando os três ângulos internos são agudos, ou seja, menores que 90°.
- Obtusângulo: Quando um dos ângulos internos é obtuso, ou seja, maior que 90°.
- Retângulo: Quando um dos ângulos internos é reto, ou seja, tem medida igual a 90°.

Teorema 1.1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo plano é igual a* 180°.

1.1.2 *Congruência de triângulos*

Dizemos que dois triângulos são congruentes quando ambos tem lados e ângulos correspondentes congruentes, isso pode ser verificado aplicando as técnicas chamadas de transformações isométricas (reflexão, translação e rotação). Da mesma forma, a congruência pode ser verificada através da análise das proporções entre seus lados.

Os casos de congruência de triângulos são caracterizados de quatro formas distintas:

- **Caso** LAL: Quando os triângulos tem dois lados e o ângulo compreendido entre eles congruentes.

- **Caso** ALA: Quando os triângulos tem dois ângulos e o lado em comum aos ângulos congruentes.
- **Caso** LLL: Quando os triângulos tem os três lados congruentes.
- **Caso** LAA_O: Quando os triângulos tem os dois ângulos e o lado oposto a um desses ângulos congruentes.

1.2 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIANGULO RETÂNGULO

Dado um ângulo $\widehat{A}$, marcamos sobre um de seus lados os pontos B, D e F, e por estes pontos traçamos perpendiculares a esse lado, encontrando no cruzamento com o outro lado os pontos C, E e G, respectivamente.

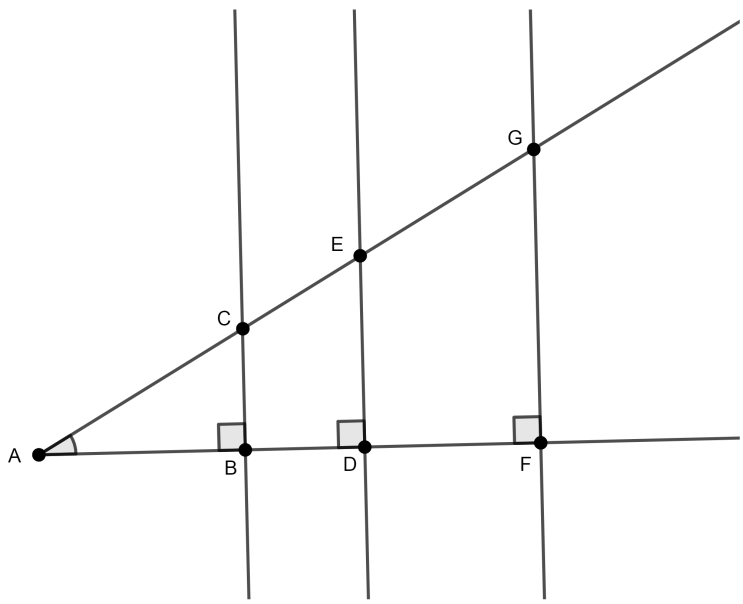

Figura 1: Ângulo $\widehat{A}$ cortado por perpendiculares

Pelo caso de semelhança AA (ângulo ângulo) os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ e $\triangle AFG$ são semelhantes, assim podemos estabelecer as seguintes razões:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{AG}} = k_1, com\ k_1 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = k_2, com\ k_2 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{AF}} = k_3, com\ k_3 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

As razões acima não depende do tamanho do triângulo, mas sim exclusivamente da medida do ângulo $\widehat{A}$. Desta forma, considerando o triângulo retângulo abaixo (ver figura 2) podemos estabelecer as seguintes definições.

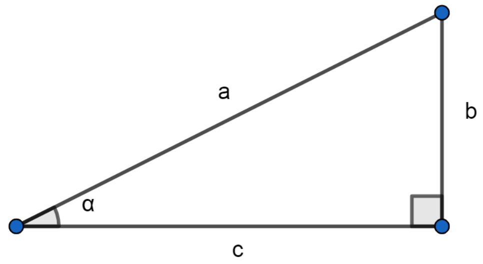

Figura 2: Triângulo retângulo

Definição 1.2 (Seno)**.** *Chamamos de seno de um ângulo α a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um triângulo retângulo.*

$$\sin\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}. \tag{4}$$

Definição 1.3 (Cosseno)**.** *Chamamos de cosseno de um ângulo α a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa de um triângulo retângulo.*

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}. \tag{5}$$

Definição 1.4 (Tangente)**.** *Chamamos de tangente de um ângulo α a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente de um triângulo retângulo.*

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{b}{c}. \tag{6}$$

1.3 RELAÇÕES INVERSAS DE SENO, COSSENO E TANGENTE

Considerando o triangulo retângulo da figura 2, podemos encontrar novas relações trigonométricas, são elas:

Definição 1.5 (Cossecante)**.** *Chamamos de cossecante de um ângulo α a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto de um triângulo retângulo.*

$$\csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ oposto} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\sin\alpha}. \tag{7}$$

Definição 1.6 (Secante)**.** *Chamamos de secante de um ângulo α a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente de um triângulo retângulo.*

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\cos\alpha}. \tag{8}$$

Definição 1.7 (Cotangente)**.** *Chamamos de cotangente de um ângulo α a razão entre a cateto adjacente e o cateto oposto de um triângulo retângulo.*

$$\cot\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\tan\alpha}. \tag{9}$$

Assim, definimos que cossecante, secante e cotangente são as relações inversas de seno, cosseno e tangente, respectivamente.

1.4 ALGUMAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema 1.8. *A soma do quadrado do seno de um ângulo com o cosseno desse mesmo ângulo é igual a um.*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{10}$$

Demonstração. Seja o triângulo $\triangle ABC$ (ver figura 3), retângulo em **A** e com $\widehat{ABC} = \alpha$, de catetos b, c, e hipotenusa a.

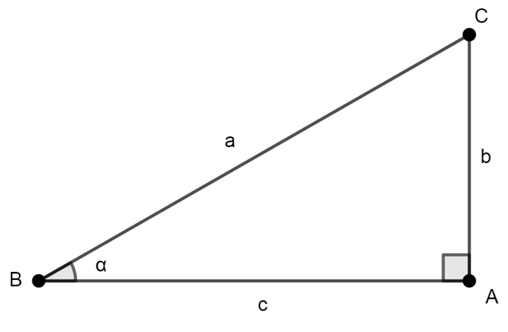

Figura 3: Triângulo ABC

Pelo teorema de Pitágoras temos que

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{11}$$

Além disso, sabemos que para um triângulo retângulo qualquer

$$\sin\alpha = \frac{b}{a} \iff b = \sin\alpha \cdot a, \qquad \text{e} \tag{12}$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \iff c = \cos\alpha \cdot a. \tag{13}$$

Se substituirmos as relações (12) e (13) em (11) obtemos

$$a^2 = \sin^2\alpha \cdot a^2 + \cos^2\alpha \cdot a^2. \tag{14}$$

Uma vez que $a \neq 0$, concluímos que:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{15}$$

Teorema 1.9. *A tangente de um ângulo é igual a razão do seno e cosseno desse mesmo ângulo, bem como a cotangente é a razão do cosseno pelo seno.*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{16}$$

Demonstração. Seja o triângulo $\triangle ABC$, retângulo em **A** e com $\widehat{ABC} = \alpha$, de catetos b, c, e hipotenusa a, temos:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \tan\alpha. \tag{17}$$

De forma análoga, prova-se que

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{18}$$

Teorema 1.10.

$$\sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1. \tag{19}$$

Demonstração. Se dividirmos a relação fundamental $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\cos^2\alpha$, obtemos

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2. \tag{20}$$

Como $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ e $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, concluímos que

$$\sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1. \tag{21}$$

Teorema 1.11.

$$\csc^2\alpha = \cot^2\alpha + 1. \tag{22}$$

Demonstração. Se dividirmos a relação fundamental $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ por $\sin^2\alpha$, obtemos:

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2. \tag{23}$$

Como $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ e $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, concluímos que

$$\csc^2\alpha = \cot^2\alpha + 1.$$

1.5 LEIS DOS COSSENOS

Teorema 1.12. *Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado desse triângulo é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto destes dois lados e do cosseno do ângulo interno formado por eles.*

Dado um triângulo $\triangle ABC$ (ver figura 4) de lados a, b e c, e ângulo $\widehat{BAC} = \alpha$, então vale a relação :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha. \tag{24}$$

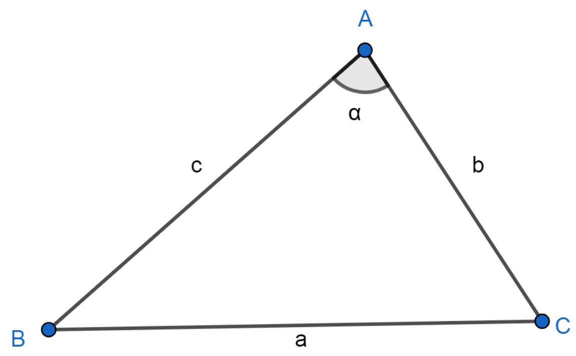

Figura 4: Triângulo ABC

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em três casos.

- **1º Caso: α é ÁgAgudo**

Seja um triângulo $\triangle ABC$ de lados a, b e c, e ângulo agudo α formado pelos lados b e c. Traçamos a altura h em relação ao lado b para encontrarmos o ponto H. Desta forma podemos construir o triângulo retângulo $\triangle ABH$ de catetos h, b, e hipotenusa c, e o triângulo retângulo $\triangle BCH$ de catetos $h, b-m$ e hipotenusa a (ver figura 5) .

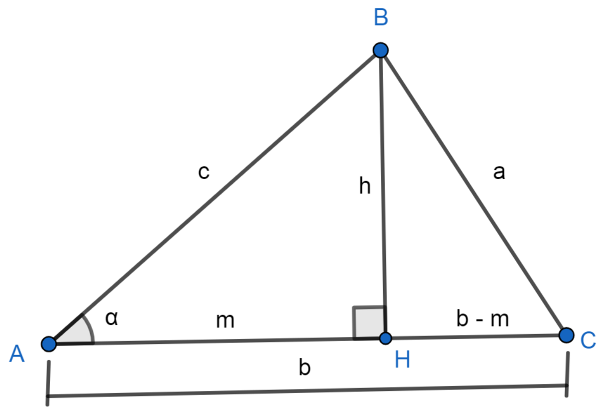

Figura 5: Triângulos retângulos ABH e BCH

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle ABH$ e $\triangle BCH$, obtemos:

$$h^2 = c^2 - m^2, \tag{25}$$

e

$$a^2 = h^2 + (b-m)^2. \tag{26}$$

Substituindo (25) em (26) e desenvolvendo o produto notável $(b-m)^2$, obtemos:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot m. \tag{27}$$

Como $m = c \cdot \cos\alpha$, concluímos que

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha. \tag{28}$$

- **2º Caso - α é obtuso**

Seja um triângulo $\triangle ABC$, de lados a, b e c, e ângulo obtuso α formado pelos lados b e c. Traçamos a altura h em relação ao lado c, e encontrando o ponto H, interseção da altura h com o extensão do lado b. Desta forma podemos formar o triângulo retângulos $\triangle ABH$ de catetos h, $b+m$ e hipotenusa a, e o triângulo $\triangle BCH$ de catetos h, m e hipotenusa c (ver figura 6).

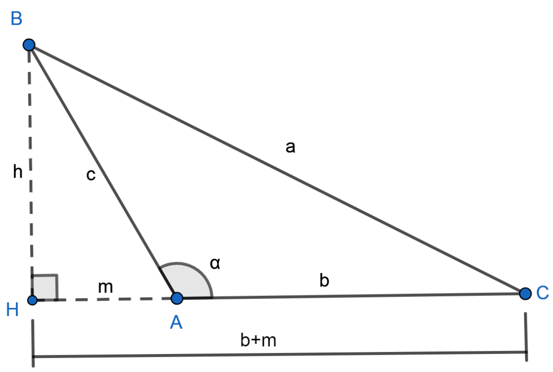

Figura 6: Triângulo obtusângulo ABC

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos $\triangle ABH$ e $\triangle BCH$, temos:

$$h^2 = c^2 - m^2, \tag{29}$$

e

$$a^2 = h^2 + (b+m)^2. \tag{30}$$

Substituindo (29) em (30) obtemos:

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot m. \tag{31}$$

Como $\cos(180-\alpha) = \frac{m}{c} \Longrightarrow m = c \cdot \cos(180-\alpha)$ e que $\cos(180-\alpha) = -cos\alpha$, concluímos que:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha. \tag{32}$$

- **3º Caso - α é reto**

Seja um triângulo retângulo $\triangle ABC$ de catetos b, c e hipotenusa a, e ângulo reto α formado pelos catetos b e c.

Como $\triangle ABC$ é reto, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{33}$$

Uma vez que $cos(90°) = 0$, então podemos escrever

$$0 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha. \tag{34}$$

Somando (33) e (34), concluímos que

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha. \tag{35}$$

1.6 LEIS DOS SENOS

Teorema 1.13. *Em qualquer triângulo, a razão entre o lado de um triângulo e o seno oposto a este lado é constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita no triângulo.*

Dado um triângulo $\triangle ABC$ inscrito a uma circunferência (ver figura 7) de lados a, b e c, e ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ opostos a cada um desses lados respectivamente, temos:

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2 \cdot R. \tag{36}$$

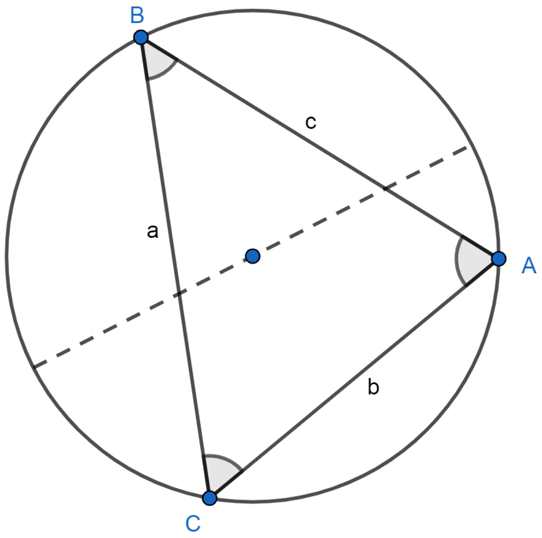

Figura 7: Triângulo ABC inscrito na circunferência

Demonstração. Demonstraremos esse teorema, para triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo.

- **1º Caso - Triângulo Acutângulo**

Dado um triângulo acutângulo $\triangle ABC$ e uma circunferência de centro O circunscrita a este (ver figura 8).

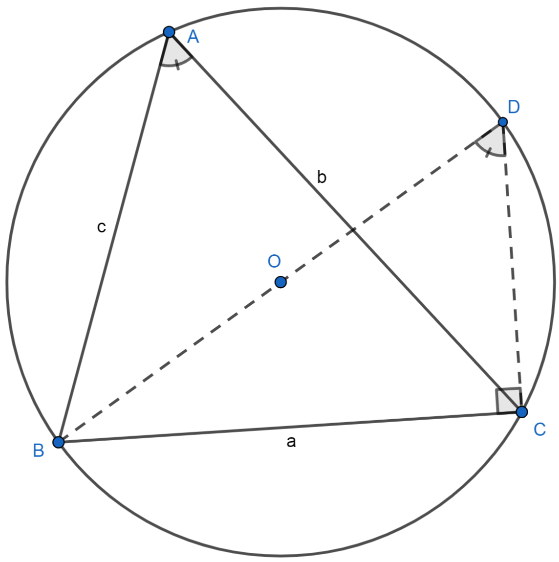

Figura 8: Triângulo acutângulo ABC

Demonstração. Provaremos que a razão $\frac{a}{sin\widehat{A}}$ é igual a $2 \cdot r$. Para isso traçamos o segmento $\overline{BD}$ passando por O de comprimento $2 \cdot r$ e o segmento $\overline{DC}$, obtemos o triângulo retângulo $\triangle DBC$, $\widehat{BCD} = 90$ (ângulo inscrito a circunferência que mede metade do arco $\widehat{BD}$), com isso temos que $\sin \widehat{D} = \frac{a}{2 \cdot r} \iff 2 \cdot r = \frac{a}{\sin \widehat{D}}$. Desta forma podemos observar também que med($\widehat{A}$)=med($\widehat{D}$), pois ambos medem metade do arco $\widehat{BC}$ e por consequência $\sin\widehat{D} = \sin\widehat{A}$, portanto $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = 2 \cdot r$.

A prova é análoga para os lados b e c.

- **2º Caso - Triângulo Obtusângulo**

Dado um triângulo obtusângulo $\triangle ABC$ e uma circunferência de centro O circunscrita a este (ver figura 9).

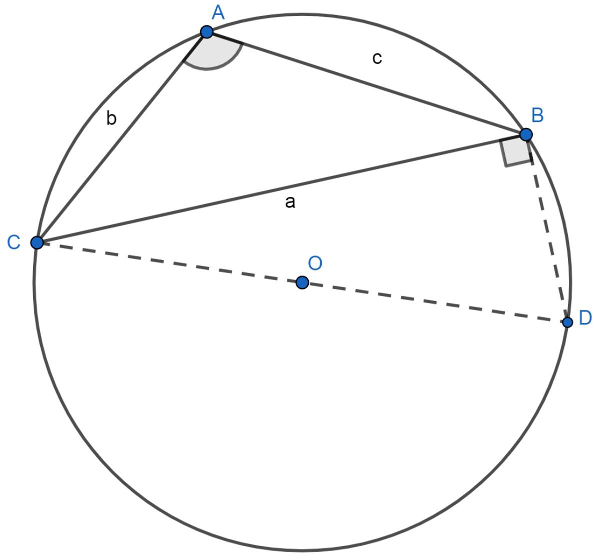

Figura 9: Triângulo obtusângulo ABC

Demonstração. Pelo primeiro caso, sabemos que $\frac{b}{\sin\widehat{B}} = 2 \cdot r$ e $\frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2 \cdot r$, pois ambos são ângulos agudos, restando provarmos $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = 2 \cdot r$, sendo $\widehat{A}$ um ângulo obtuso. Por C, traçamos o diâmetro $\overline{CD}$, posteriormente $\overline{DB}$, obtendo o triângulo retângulo $\triangle BCD$, retângulo em B. Com isso temos a relação $\sin\widehat{D} = \frac{a}{2 \cdot r} \iff 2 \cdot r = \frac{a}{\sin\widehat{D}}$. Como o quadrilátero $ABDC$ é inscrito a circunferência, temos que $med(\widehat{A}) + med(\widehat{D}) = 180° \iff med(\widehat{D}) = 180° - med(\widehat{A}) \iff \sin(\widehat{D}) = \sin(\widehat{A} - 180)$, assim temos que $\frac{a}{\sin(\widehat{A} - 180°)} = 2 \cdot r$, sabendo que $\sin(\widehat{A} - 180) = \sin\widehat{A}$, concluímos que: $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = 2 \cdot r$.

- **2º Caso - Triângulo Retângulo**

Dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$ e uma circunferência de centro O circunscrita a este (ver figura 10).

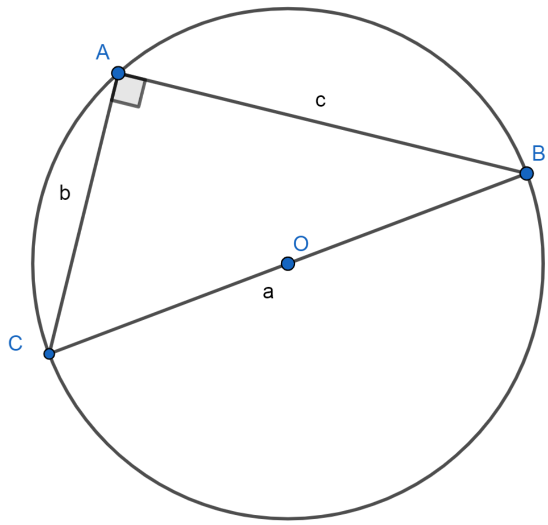

Figura 10: Triângulo retângulo ABC

Demonstração. De acordo com a figura acima, temos que: $a = 2 \cdot r$ e como $sin\widehat{A} = 1$, podemos concluir que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2 \cdot r$. Como ABC é retângulo em $\widehat{A}$, podemos estabelecer as seguintes relações: $\sin \widehat{B} = \frac{b}{a} \iff \frac{b}{\sin \widehat{B}} = 2 \cdot r$ e $\sin \widehat{C} = \frac{c}{a} \iff \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2 \cdot r$.

2

CAPITULO 2. TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

A trigonometria esférica é a área da matemática que estuda os polígonos formados na superfície de uma esfera, em particular, os objetos denominados por *Triângulos Esféricos*.

2.1 ESFERA

Dado um ponto O no espaço e um segmento r denominado raio, chama-se esfera a superfície formada por todos os pontos P distante de O, onde $\overline{OP} = r$ (ver figura 11).

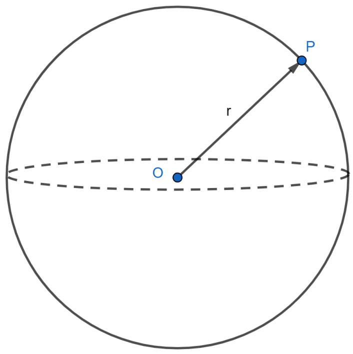

Figura 11: Esfera de centro O

Teorema 2.1. *A interseção de um plano com um esfera, forma sempre um círculo.*

Demonstração. Seja π um plano qualquer que intercepta uma esfera de cento O (ver figura 12). E A e B pontos quaisquer formados pela intersecção desse plano com a esfera.

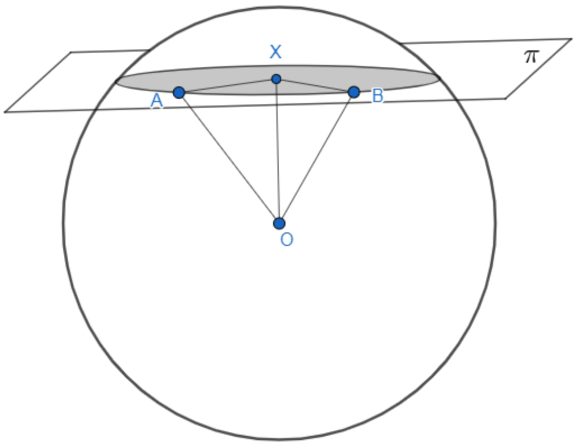

Figura 12: Esfera de centro O interceptado pelo plano π

Sendo X a projeção de O sobre o plano π, teremos os triângulos retângulos $\triangle OXA$ e $\triangle OXB$ congruentes, pois, $\overline{OX}$ é comum e $\overline{OA} = \overline{OB}$ raios da esfera, assim concluímos que para qualquer A e B que pertença a interseção do plano e esfera, teremos $\overline{XA} = \overline{XB}$ formando assim um círculo de centro X.

Quando esse plano de corte interceptar o centro da esfera dizemos que o circulo formado é **máximo**, caso contrário, ou seja, o centro da esfera não pertença o plano, o círculo é dito **mínimo**.

2.2 TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Definição 2.2. *Ângulos esféricos: Quando dois círculos máximos se interceptam em um ponto P, formam entre eles um ângulo esférico de vértice P (ver figura 13), e sua medida é encontrada através de retas tangentes aos círculos máximos que passam por P.*

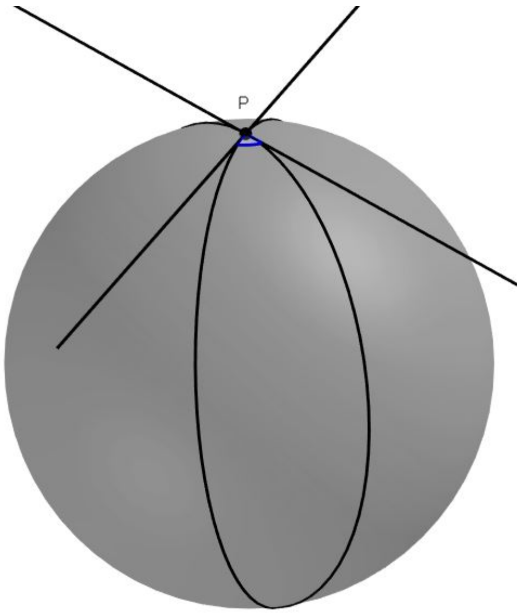

Figura 13: Ângulo esférico $\widehat{P}$

Definição 2.3. *Triângulos esféricos: Dados três pontos A, B e C sobre uma esfera, denominá-se triângulo esférico a figura formada pelos arcos de círculos máximos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{BC}$ (ver figura 14).*

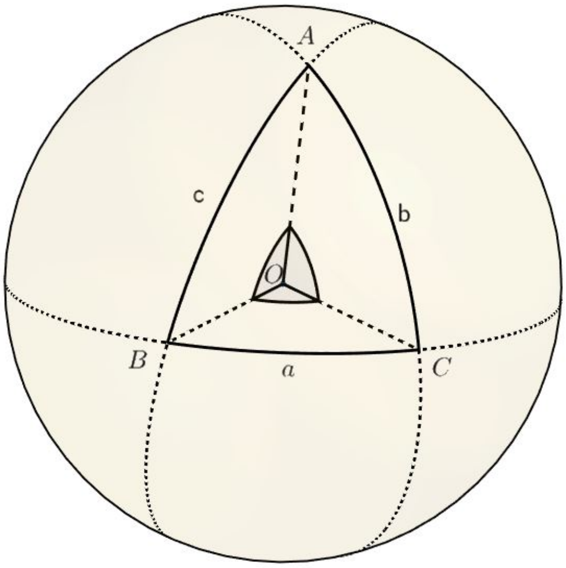

Figura 14: Triângulo esférico $\triangle ABC$

Elementos dos triângulos esféricos

- **Vértices**: Pontos formados pelo cruzamento de dois círculos máximos, são os pontos A, B e C do triângulo esférico $\triangle ABC$ (ver figura 14).
- **Lados**: Arcos de círculo máximo com extremidades nos vértices, são os lados a, b e c, formados pelos arcos $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$ e $\widehat{AB}$, e suas medidas são encontradas através dos ângulos $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOC}$ e $\widehat{AOB}$, respectivamente (ver figura 14), podendo ser dado em graus ou radianos e a soma dos lados de um triângulo esférico é maior que 0° e menor que 360°, ou seja, $0° < a+b+c < 360°$.
- **Ângulos internos**: São os ângulos esféricos formados pelos lados do triângulos, são os ângulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$ e $\widehat{ACB}$ (ver figura 14) podendo ser dado em graus ou radianos e a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° e menor que 540°, ou seja, $180° < \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} < 540°$.

Classificação dos triângulos esféricos

. Podemos classificar os triângulos esféricos em relação a seus lados e em relação a seus ângulos:

Em relação aos ângulos

-*retângulo:* triângulo que possui um ângulo igual a 90º.
- *birretângulo:* triângulo que possui dois ângulos iguais a 90º.
- *trirretângulo:* triângulo que possui os três ângulos iguai a 90º.
- *obliquângulo:* triângulo que possui os três ângulos diferentes de 90º.

- Em relação aos lados

-*retilátero:* triângulo que possui um lado medindo 90º.
- *birretilátero:* triângulo que possui dois lados medindo 90º.
- *trirretilátero:* triângulo que possui os três lados medindo 90º.
- *equilátero:* triângulo que possui os três lados com medidas iguais.
- *isósceles:* triângulo que possui dois lados e dois ângulos com medidas iguais.
- *escaleno:* triângulo que possui os três lados de medidas diferentes.

2.3 LEI DOS COSSENOS NOS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Teorema 2.4. *Seja um triângulo esférico de lados a, b, e c, respectivamente opostos aos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ (ver figura 15), então vale a relação*

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{A} \tag{37}$$

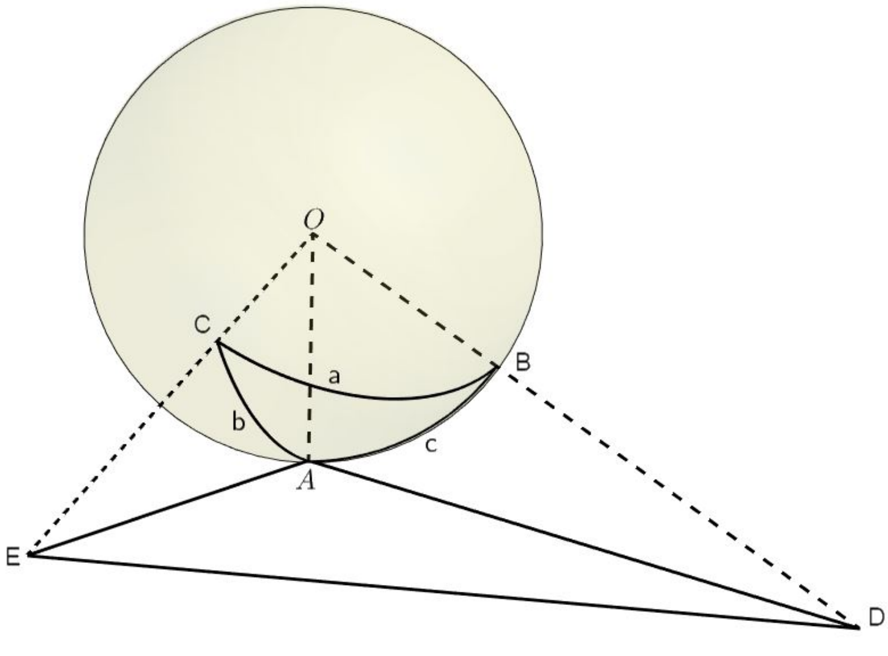

Figura 15: Triângulo esférico $\triangle ABC$

Demonstração. Seja um triângulo esférico $\triangle ABC$ de lados a, b e c, com ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente opostos aos lados, sobre uma esfera de centro O e raio unitário, ou seja $\overline{OA} = 1$. Traçando as semirretas $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AD}$ tangentes aos lados b e c com origem no vértice **A**, temos que o ângulo $\widehat{DAE} = \widehat{A}$. E traçando os segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$ de forma que estes segmentos passe pelos vértices B e C, respectivamente, do triângulo esférico $\triangle ABC$. Como $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ são tangentes aos lados b e c, respectivamente, conclui-se que os triângulos planos

$\triangle OAE$ e $\triangle OAD$ são retângulos em $\widehat{A}$. Admitindo estas hipóteses iniciais, iremos utilizar a Lei dos cossenos dos triângulos planos ($a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$) nos triângulos $\triangle ODE$ e $\triangle ADE$, assim para o triângulo $\triangle ODE$ temos que

$$\overline{DE}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 - 2 \cdot \overline{OE} \cdot \overline{OD} \cdot \cos a \tag{38}$$

e para o triângulo $\triangle ADE$ temos

$$\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \widehat{A} \tag{39}$$

Como em ambos os triângulos tem-se o lado $\overline{DE}$ em comum, podemos igualar as equações, e desta forma obtemos que

$$\overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 - 2 \cdot \overline{OE} \cdot \overline{OD} \cdot \cos a = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \widehat{A} \tag{40}$$

E como os triângulos $\triangle OAE$ e $\triangle OAD$ são retângulos, temos que:

No triângulo $\triangle OAE$ $\sec \widehat{AOE} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}$ e $\tan \widehat{AOE} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OA}}$. Como $\overline{OA} = 1$ e $\widehat{AOE} = b$, e elevando ambas equações ao quadrado obtemos:

$$\sec^2 b = \overline{OE}^2, \quad \text{e} \tag{41}$$
$$\tan^2 b = \overline{AE}^2 \tag{42}$$

Já para o triângulo $\triangle OAD$ temos que $\sec \widehat{AOD} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}$ e $\tan \widehat{AOD} = \frac{\overline{AD}}{\overline{OA}}$. Como $\overline{OA} = 1$ e $\widehat{AOD} = c$, e elevando ambas equações ao quadrado obtemos que:

$$\sec^2 c = \overline{OD}^2, \quad \text{e} \tag{43}$$
$$\tan^2 c = \overline{AD}^2 \tag{44}$$

Substituindo as relações (41), (42), (43) e (44) em (40), obtemos

$$\sec^2 b + \sec^2 c - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a = \tan^2 b + \tan^2 c - 2 \cdot \tan b \cdot \tan c \cdot \cos \widehat{A}. \tag{45}$$

E, uma vez que $1 + \tan^2 b = \sec^2 b$ e $1 + \tan^2 c = \sec^2 c$, obtemos

$$2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a = 2 + 2 \cdot \tan b \cdot \tan c \cdot \cos \widehat{A}. \tag{46}$$

Dividindo ambos os lados por $2 \cdot \sec b \cdot \sec c$, e uma vez que $\cos b = \frac{1}{\sec b}$, $\cos c = \frac{1}{\sec c}$, $\sin b = \frac{\tan b}{\sec b}$ e $\sin c = \frac{\tan c}{\sec c}$, concluímos que:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{A}. \tag{47}$$

A prova é análoga para os lados b e c, assim sendo válido:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{B}, \quad \text{e} \tag{48}$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \widehat{C}. \tag{49}$$

2.4 LEI DOS SENOS NOS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Teorema 2.5. *Seja um triângulo esférico de lados a, b, e c, respectivamente opostos aos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, temos que:*

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}. \tag{50}$$

Demonstração. Seja um triângulo esférico $\triangle ABC$ de lados a, b e c, com ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente opostos aos lados. Do teorema 1.8, temos que:

$$\sin^2 \widehat{A} = 1 - \cos^2 \widehat{A}, \ \sin^2 \widehat{B} = 1 - \cos^2 \widehat{B} \ \text{ e } \ \sin^2 \widehat{C} = 1 - \cos^2 \widehat{C}. \tag{51}$$

Aplicando a lei dos cossenos para triângulos esféricos $\cos \widehat{A} = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$ em cada uma das expressões acima, obtemos :

$$\sin^2 \widehat{A} = 1 - (\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c})^2, \tag{52}$$

$$\sin^2 \widehat{B} = 1 - (\frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c})^2, \tag{53}$$

e

$$\sin^2 \widehat{C} = 1 - (\frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b})^2. \tag{54}$$

Desenvolvendo os quadrados do 2º membro das equações, obtemos.

$$\sin^2 \widehat{A} = 1 - (\frac{\cos^2 a + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}), \tag{55}$$

$$\sin^2 \widehat{B} = 1 - (\frac{\cos^2 b + \cos^2 a \cdot \cos^2 c - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 c}), \tag{56}$$

$$\sin^2\widehat{C} = 1 - (\frac{\cos^2 c + \cos^2 a \cdot \cos^2 b - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}). \tag{57}$$

Multiplicando (55), (56) e (57) por $\frac{1}{\sin^2 a}$, $\frac{1}{\sin^2 b}$ e $\frac{1}{\sin^2 c}$, respectivamente, obtemos:

$$\frac{\sin^2\widehat{A}}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cdot \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \cdot \sin^2 c}, \tag{58}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{B}}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 a \cdot \sin^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \cdot \sin^2 c}, \tag{59}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{C}}{\sin^2 c} = \frac{\sin^2 a \cdot \sin^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a \cdot \cos^2 b + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \cdot \sin^2 c}. \tag{60}$$

Substituindo nos numeradores do 2º membro $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b$ e $\sin^2 c = 1 - \cos^2 c$, em (58), (59) e (60), obtemos:

$$\frac{\sin^2\widehat{A}}{\sin^2 a} = \frac{(1 - \cos^2 b) \cdot (1 - \cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b \cdot \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \cdot \sin^2 c}, \tag{61}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{B}}{\sin^2 b} = \frac{(1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 c) - \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \cdot \sin^2 c}, \tag{62}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{C}}{\sin^2 c} = \frac{(1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b) - \cos^2 c - \cos^2 a \cdot \cos^2 b + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \cdot \sin^2 c}. \tag{63}$$

Desenvolvendo os produtos, encontramos:

$$\frac{\sin^2\widehat{A}}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cdot \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \cdot \sin^2 c}, \tag{64}$$

$$\frac{\sin^2\widehat{B}}{\sin^2 b} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 c + \cos^2 a \cdot \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \cdot \sin^2 c}, \tag{65}$$

$$\frac{\sin^2 \widehat{C}}{\sin^2 c} = \frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b+\cos^2 a\cdot\cos^2 b-\cos^2 c-\cos^2 a\cdot\cos^2 b+2\cdot\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\cdot\sin^2 c}. \tag{66}$$

Simplificando as equações e extraindo a raiz quadrada de ambos obteremos:

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cdot\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\cdot\sin^2 c}}, \tag{67}$$

$$\frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cdot\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\cdot\sin^2 c}}, \tag{68}$$

$$\frac{\sin \widehat{C}}{\sin c} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cdot\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\cdot\sin^2 c}}. \tag{69}$$

Assim, concluímos que:

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}. \tag{70}$$

2.5 TRIÂNGULOS ESFÉRICOS RETÂNGULOS

Teorema 2.6. *Seja um triângulo ABC com o ângulo $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, então são válidas as seguintes relações:*

$$\sin c = \sin a\cdot\sin \widehat{C}, \tag{71}$$
$$\sin b = \sin a\cdot\sin \widehat{B}, \tag{72}$$
$$\cos a = \cos b\cdot\cos c, \tag{73}$$
$$\tan b = \tan a\cdot\cos \widehat{C}, \tag{74}$$
$$\tan c = \tan a\cdot\cos \widehat{B}, \tag{75}$$
$$\tan c = \sin b\cdot\tan \widehat{C}, \tag{76}$$
$$\tan b = \sin c\cdot\tan \widehat{B}, \tag{77}$$
$$\cos a = \cot C\cdot\cot \widehat{B}, \tag{78}$$
$$\cos \widehat{C} = \cos c\cdot\sin \widehat{B}, \tag{79}$$
$$\cos \widehat{B} = \cos b\cdot\sin \widehat{C}. \tag{80}$$

Demonstração:

As expressões (71) e (72) são obtidas usando a lei dos senos, pois como $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ ($\sin \widehat{A} = 1$) isso implica que:

$$\frac{\sin\widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin\widehat{C}}{\sin c} \Longleftrightarrow \sin c = \sin a \sin\widehat{C} \tag{81}$$

analogamente

$$\frac{\sin\widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin\widehat{B}}{\sin b} \Longleftrightarrow \sin b = \sin a \sin\widehat{B} \tag{82}$$

Enquanto que a expressão (73), é obtida pela lei dos cossenos para triângulos esféricos tomando $\cos\widehat{A} = 0$, ou seja,

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\widehat{A} \Longleftrightarrow \cos a = \cos b \cdot \cos c. \tag{83}$$

O restante das expressões nós deixamos como exercício que encontra-se na sessão (7).

3

Desde a antiguidade que muitos homens tentam demonstrar a esfericidade da Terra, a seguir iremos apresentar duas experiências realizadas com exito que nos garante tal fato.

- **Erastóstenes de Cirene (276 - 194 a.C.)**

Desde o século V a.c. os gregos já acreditam que a Terra tinha o formato esférico, mas foi aproximadamente no ano de 200 a.c, que o filósofo Erastóstenes de Cirene conseguiu a proeza de estimar a circunferência da Terra. Ele usou o fato que ao meio dia do solstício de verão em Siene o Sol estava no zênite, ou seja os raios solares estavam perpendiculares a superfície, pois Siene fica situada no hemisfério norte, mas precisamente sobre o Trópico de Câncer. Nesse mesmo instante, uma estaca fincada perpendicularmente em Alexandria projetava uma sombra de aproximadamente $\frac{1}{8}$ da altura da estaca.

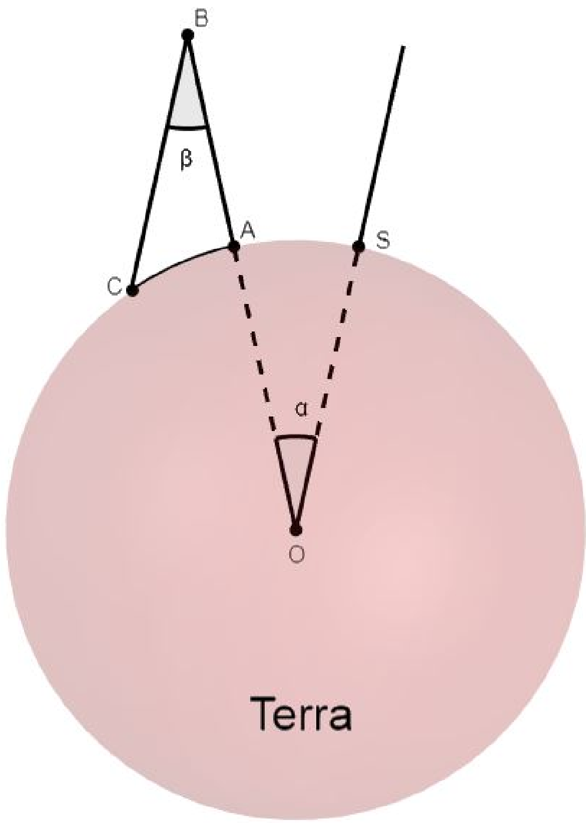

Figura 16: Modelo da experiência de Erastóstenes

De acordo com a figura (16), os pontos A e S indicam as localizações de Alexandria e Siene respectivamente. Uma vez que os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{OS}$ são paralelos, e o segmento $\overline{AB}$ representa a estaca colocada perpendicularmente em Alexandria, temos então que o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em $\hat{A}$, ou seja

$$\tan\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \tag{84}$$

Se $\overline{AB} = h$, então $\overline{AC} = \frac{1}{8} \cdot h$, então:

$$\tan \beta = \frac{\frac{1}{8} \cdot h}{h} \Longleftrightarrow \tan \beta = \frac{1}{8} \Longleftrightarrow \arctan \frac{1}{8} = \beta \approx \frac{14,4\pi}{360}. \tag{85}$$

Como o segmento $\overline{BO}$ é transversal entre as paralelas, então α e β são ângulos alternos internos, portanto $\alpha = \beta$. Com isso, sendo C o comprimento da circunferência da Terra, Erastóstenes concluiu que

$$C = \frac{2\pi}{\beta} \cdot \widehat{AS} \longrightarrow C = 50 \cdot \widehat{AS}. \tag{86}$$

O arco $\widehat{AS}$ é a distância entre as cidades de Alexandria e Siene, Na época Erastóstenes sabia que a distância entre as cidades era de aproximadamente 5000 estádios (1 estádio correspondia aproximadamente a $0,16\ km$), com isso ele calculou que o raio R da Terra era aproximadamente $R = 6,369\ km$, bem próximo do valor utilizado nos dias de hoje (6371 Km).

- **Alfred Russel Wallace (1823 - 1913 d.C.)**

Alfred Russel cientista britânico considerado o fundador da Bio-geografia, em uma de suas viagens entrou em conflito com adeptos de uma seita que acreditava na Terra Plana e estes prometiam uma quantia em dinheiro para quem provasse o contrário. Russel aceitou o desafio e utilizando um canal de navegação de alguns quilômetros de extensão realizou o seguinte experimento.

Duas estacas de mesma altura h foram fincadas perpendicularmente ao solo acima da superfície da água, a uma certa distância entre elas. Uma outra de altura h' é fincada perpendicularmente no meio do caminho, de forma que fique equidistantes das outras estacas. Abaixo segue uma figura de como ficou o projeto.

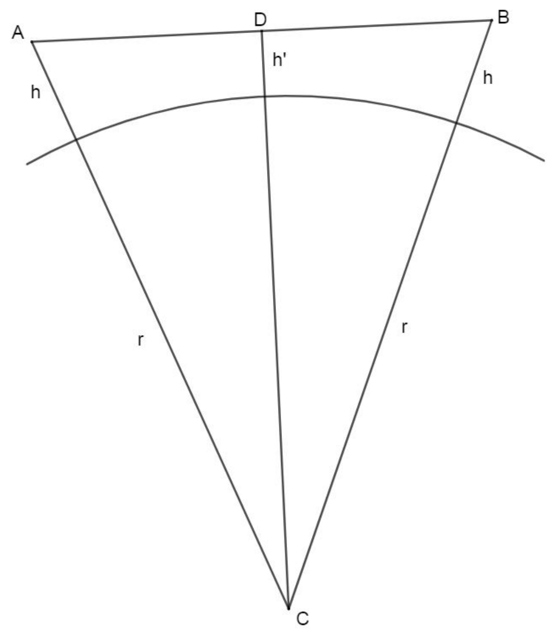

Figura 17: Equema do experimento de Russel

De acordo com a figura, e utilizando medidas do sistema métrico decimal, temos o seguinte:

- O Ponto A e B, são topos das estacas h, cujo tamanho são de 10 metros.
- O ponto D, é o topo da estaca h' e sua altura foi estabelecida de modo que o topo está situado na linha de visada de A para B, sua altura ficou em $9,3$ metros.

- Como a superfície da Terra é curva, e com isso a água do canal acompanha sua curvatura, temos que $h' < h$.

- A distância de A até B é de $6 \quad Km$.
- Sendo C o centro da terra e r o seu raio.

Assim, podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\overline{AC} = r + h = \overline{BC}, \tag{87}$$
$$\overline{DC} = r + h'. \tag{88}$$

Como o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ é altura deste triângulo, os triângulos ACD e BCD são retângulos, logo podemos aplicar o teorema de Pitágoras em um dos triângulos, portanto:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 \Longleftrightarrow \overline{AD}^2 + (r + h')^2 = (r + h)^2. \tag{89}$$

Efetuando os produtos notáveis e isolando o raio r, temos:

$$r = \frac{\overline{AD}^2 + h'^2 - h^2}{2 \cdot (h - h')}. \tag{90}$$

Substituindo os valores determinados acima, concluímos que:

$$r = \frac{3000^2 + 9,3^2 - 10^2}{2 \cdot (10 - 9,3)} = 6.428,56 \text{ km}. \tag{91}$$

3.1 PRINCIPAIS REFERENCIAIS

Não podemos dizer que a Terra tem o formato de esfera, devido ao achatamento nos polos e a sua superfície irregular, a Terra tem a forma de Geoide, mas levando em conta a proporção do seu raio em relação a essas deformidades, podemos para efeitos de cálculos considerar a Terra com uma esfera, e assim utilizarmos a trigonometria esférica para traçar rotas aéreas e de navegação, para tal iremos definir alguns referenciais básicos.

- **Polos**: Dado um eixo vertical sobre a superfície da Terra, cuja medida seja o diâmetro da esfera celeste, chamaremos de P e P' os pontos de interseção entre o eixo e a superfície terrestre, onde P é o ponto superior e denominado polo Norte, e P' o ponto inferior e denominado polo Sul.

- **Meridianos**: Por P e P', podemos traçar infinitos círculos máximos, chamaremos de meridianos todos os semicírculos que ligam P a P'. Tomaremos como referencia principal o meridiano de Greenwich, cidade próxima a Londres, falaremos dele mais a frente.

- **Linha do Equador**: Ao traçarmos um plano perpendicular ao eixo vertical, passando pelo ponto médio de P e P' a interseção do plano com a superfície esférica formará um circulo máximo que chamaremos de linha do Equador, e essa linha irá dividir nossa superfície terrestre, em duas semiesfera, que denominaremos de hemisfério Norte e Sul.

- **Paralelos**: Além do plano que forma a linha do equador, podemos traçar infinitos planos perpendiculares ao eixo $\overline{PP'}$, e cada um desses planos formam círculos menores, a esses denominaremos de paralelos.

- **Leste e oeste**: A Terra realiza um movimento de rotação sobre o eixo vertical, a direção a qual a Terra gira é chamada de leste e a direção oposta oeste, uma pessoa ao ficar com o lado direito voltado para o leste terá a sua frente o Polo Norte.

- **Geodésia**: Também conhecida como ortodromia, é o arco de círculo máximo que mede a menor distância entre dois pontos em uma superfície esférica.

- **Milha náutica**: Unidade utilizada na navegação marítima, corresponde a $1'$ de meridiano, devido ao achatamento da Terra nos polos, tomamos essa medida na latitude de $45°$, e a Conferência Hidrográfica Internacional Extraordinária de 1929, fixou o valor da milha marítima a 1852 metros.

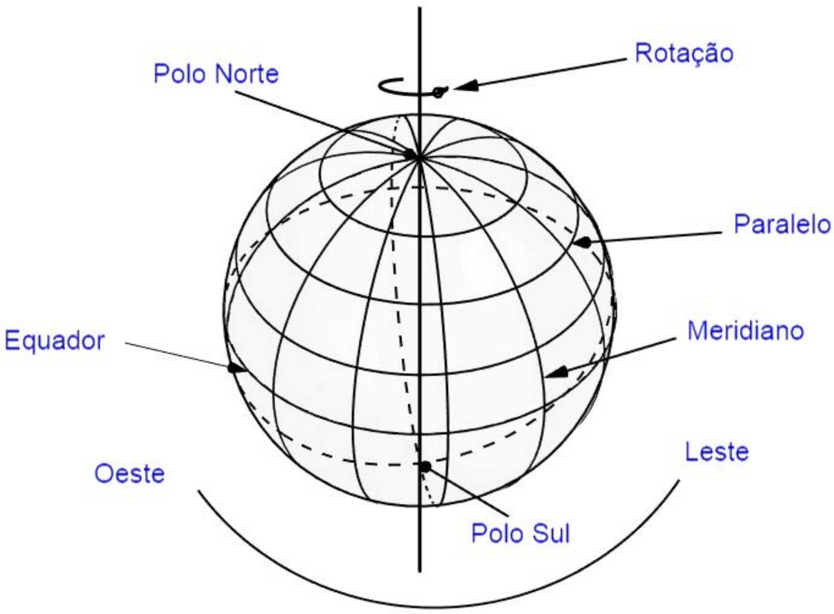

Figura 18: Referenciais do Globo Terrestre

3.2 COORDENADAS GEOGRÁFICAS

A localização de um ponto na superfície terrestre é realizada por meio de duas coordenadas chamadas latitude e longitude, usualmente representada pelas letras gregas ϕ e λ, respectivamente, utilizando como referenciais a linha do Equador e o meridiano de Greenwich.

- **Latitude**

Como vimos anteriormente, a linha do equador divide o globo terrestre em dois hemisférios Norte (N) e Sul (S). Dado um ponto A na superfície da Terra, sua latitude será a medida referente ao menor arco de Meridiano de extremidades no ponto A e a interseção deste meridiano com a linha do Equador.

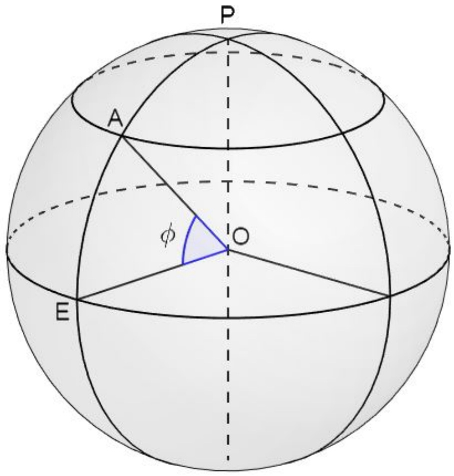

Figura 19: Latitude ϕ

A latitude de um coordenada é usualmente medida em graus, minutos e segundos e sua medida pode variar de 0 a $\frac{\pi}{2}$ Norte (N) ou Sul (S).

- **Longitude**

Dado um ponto A em uma superfície esférica, sua longitude será a medida referente ao menor arco de paralelo de extremidades no ponto A e a interseção deste paralelo com o meridiano de Greenwich, e a medida em graus será também igual ao menor arco de equador compreendido entre o meridiano de Greenwich e o meridiano que contém o ponto A.

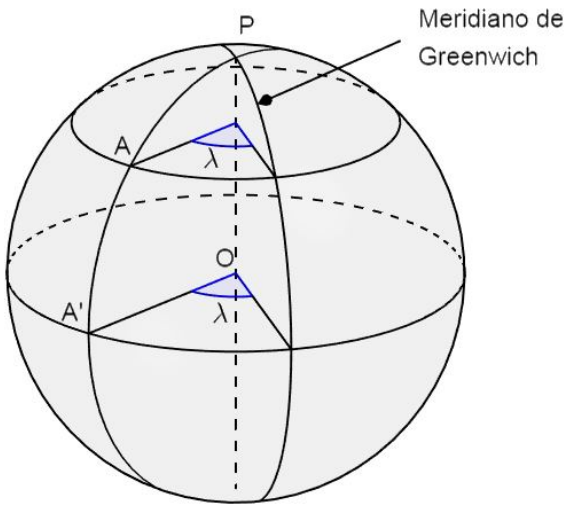

Figura 20: Longitude λ

A longitude de uma coordenada também é usualmente medida em graus, minutos e segundos e sua medida pode variar de 0° a π Leste (L) ou Oeste (E).

A anotação de uma coordenada no globo terrestre obedece a seguinte regra: primeiro se escreve a latitude e depois a longitude, indicando para cada coordenada o hemisfério. Exemplo: $A = 13°N/112°L$.

Em alguns problemas é necessário descobrir a diferença entre as latitudes e longitudes de dois pontos distintos, iremos simbolizar essas diferenças por $\Delta\phi$ e $\Delta\lambda$, para isso iremos dividir em dois casos particulares.

- 1º Caso - Quando os dois pontos estão no mesmo hemisfério (Norte ou Sul / Leste ou Oeste.

Dado dois pontos A e B, ambos situados no mesmo hemisfério, a diferença de latitude e longitude será dada pelas seguintes expressões.

$$\text{Latitudes}: \quad \Delta\phi = |\phi_A - \phi_B|, \tag{92}$$

$$\text{Longitudes}: \quad \Delta\lambda = |\lambda_A - \lambda_B|. \tag{93}$$

Exemplo: Dados dois pontos de coordenadas $A = 75°N; 131°L$ e $B = 23°N; 72°L$. Determine $\Delta\phi$ e $\Delta\lambda$.

Solução:

$$\text{Latitude} \;\; \Delta\phi = |75° - 23°| = 52°, \tag{94}$$

$$\text{Longitude} \;\; \Delta\lambda = |131° - 72°| = 59°. \tag{95}$$

- 2º Caso - Quando os dois pontos estão em hemisfério distintos (Norte e Sul / Leste e Oeste).

Dado dois pontos A e B, ambos situados em hemisférios opostos, a diferença de latitude e longitude será dada pelas seguintes expressões.

$$\text{Latitudes}: \quad \Delta\phi = |\phi_A + \phi_B|, \tag{96}$$

$$\text{Longitudes}: \quad \Delta\lambda = |\lambda_A + \lambda_B|. \tag{97}$$

Exemplo: Dados dois pontos de coordenadas $A = 75°N; 51°L$ e $B = 23°S; 72°E$. Determine $\Delta\phi$ e $\Delta\lambda$.

Solução:

$$\text{Latitude} \;\; \Delta\phi = |75° + 23°| = 98°, \tag{98}$$

$$\text{Longitude} \;\; \Delta\lambda = |51° + 72°| = 123°. \tag{99}$$

3.3 FUSO HORÁRIO

Fuso: Fuso é a superfície esférica delimitada por dois meridianos.

Para estabelecer um horário em cada localidade do globo terrestre divide-se a superfície da Terra em 24 fusos horários. Cada um desses fusos é limitada por dois meridianos afastados 15° um do outro. Assim, de modo geral, cada fuso horário possui uma mesma hora. Por exemplo, quando é meio-dia em Diadema-SP, que está localizada na longitude $46°37'24''$ Oeste, também será meio-dia em todas as regiões que estiverem no mesmo.

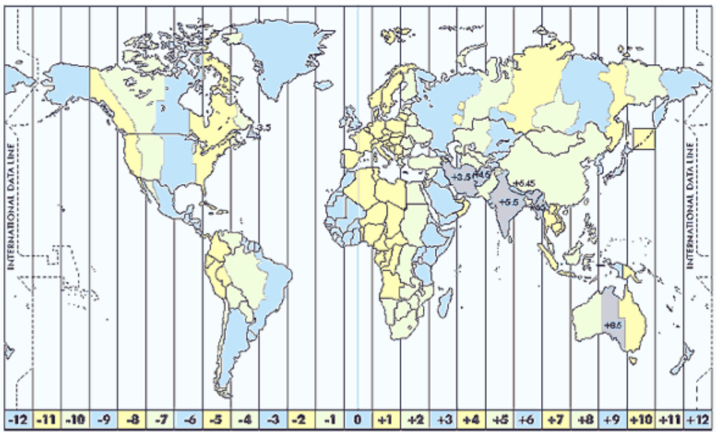

Figura 21: Fusos horários. Extraída de https://brasilescola.uol.com.br

O meridiano de 180°, é chamado de antimeridiano de Greenwich, devido a ele ser fronteira dos hemisférios Leste e Oeste, além disso, ele define a Linha Internacional de Mudança de Data. Esta linha tem a função de disciplinar as aeronaves e navios que o cruzam. Ao atravessar essa linha se faz necessário a mudança de um dia no calendário de bordo, utilizando-se da seguinte regra: Do leste para o oeste diminui-se um dia no calendário, do oeste para o leste acrescenta-se um dia no calendário. Como o meridiano de 180° não passa totalmente pelo oceano, ele também cruza algumas ilhas habitadas, foi feito alguns ajustes na Linha Internacional de Mudança de Data, justamente para administrar as atividades socieconômicas dos habitantes desses locais.

Figura 22: Linha internacional de mudança de data.
Extraída de https://nascidosparavoar.files.wordpress.com

4

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO GLOBO TERRESTRE

Devido a semelhança do globo terrestre com uma esfera, podemos utilizar a trigonometria esférica para o cálculo da distância entre dois pontos, o calculo dependerá da localização destes pontos, iremos ver duas posições, quando ambos os pontos estão situados num mesmo meridiano ou sobre a linha do Equador, ou quando os mesmos estão em meridianos e paralelos distintos.

4.1 PONTOS LOCALIZADOS NO MESMO MERIDIANO OU EQUADOR

Vimos que a menor distância entre dois pontos na esfera se dá sobre o circulo máximo que contém esses dois pontos, essa distância é chamada de geodésia, com isso podemos ter as seguintes situações:

1: Os pontos estarem situados no mesmo meridiano e ou na linha do Equador, a distância entre esses pontos será dada por:

$$\text{Med}(\widehat{AB}) = \frac{\alpha}{360°} \cdot 40075. \tag{100}$$

Exemplo 1: A cidade de Florianópolis-SC está localizada na latitude 27°35′49" Sul e longitude 48°32′58" Oeste, e a cidade de Belém-PA está localizada na latitude 1°27′18" Sul e longitude 48°30′9" Oeste, qual a distância aproximada entre essas duas cidades?

Solução: Considerando que Florianópolis e Belém estejam situados no mesmo meridiano, e desconsiderando a diferença de longitudes entre as cidades, teremos então que ambas cidades estão localizadas no mesmo circulo máximo (ver figura 23), bastando calcular a medida do arco em graus que distam as cidades, assim:

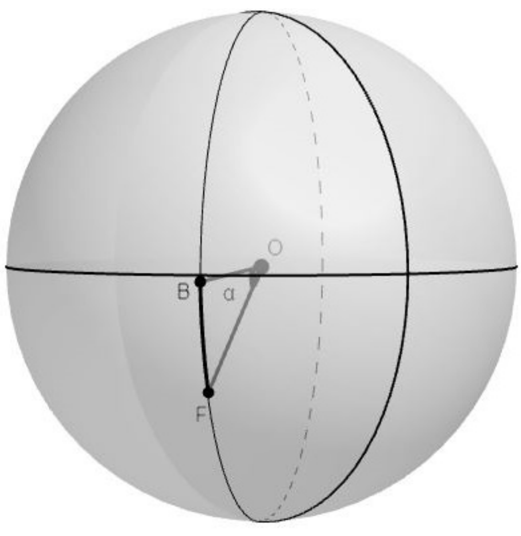

Figura 23: Distância de Belém e Florianópolis

Sendo α o arco de meridiano entre as cidades, e ambas situadas no hemisfério sul, temos que:

$$\alpha = 27°35'49 - 1°27'18" = 26°8'31" = 26,1419°.$$

Então a medida em quilômetros entre as cidades é dada por:

$$Med(26°8'31") = \frac{26,1419°}{360°} \cdot 40075 = 2910,10 \text{ Km}.$$

OBS.: Segundo o site https://pt/distance.to a distância entre Florianópolis e Belém em linha reta é de aproximadamente 2908,31 Km, bem próximo do que encontramos.

Exemplo 2: As cidades de Macapá no Brasil e Pontianak na Indonésia estão localizadas a uma latitude de $0°2'4''$ Norte e $0°1'54"$ Sul, respectivamente, e a uma longitude $51°4'$ Oeste e $109°19'30"$ Leste, respectivamente. Calcule a distância entre as duas cidades.

Solução: Podemos observar que ambas as cidades se localizam próximas a linha do Equador, então tomaremos por base que as cidades estejam localizadas sobre a linha do Equador, e β a medida do arco de Equador (ver figura 24), como as cidades estão localizadas em hemisférios diferentes, temos que:

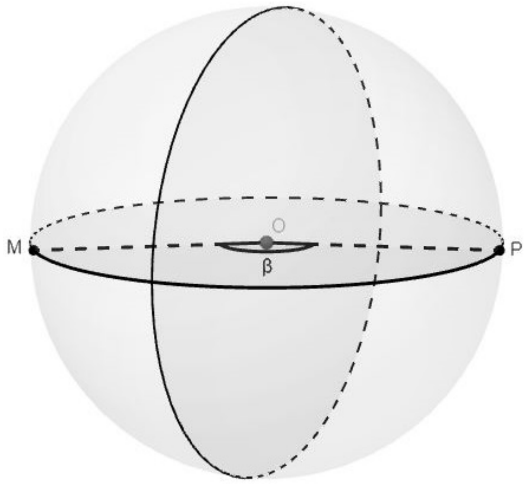

Figura 24: Distância entre Macapá e Pontianak

$$\beta = 51°4' + 109°19'30" = 160°23'30" = 160,39°.$$

Portanto, a medida em km, entre as cidades resulta em:

$$Med(160°23'30") = \frac{160,39°}{360°} \cdot 40075 = 17.854,53 \text{ Km}.$$

OBS.: De acordo com o site https://pt/distance.to a distância entre as cidades citadas em linha reta é de aproximadamente 17.842,83 Km, diferença aceitável devido a pequena diferença das latitudes.

Dados dois pontos quaisquer A e B no globo terrestre a menor distância entre eles será a geodésia que contém ambos os pontos. Para encontramos a distância entre esses dois pontos, formaremos um triângulo esférico $\triangle ABP$ com um dos polos, por exemplo o Polo Norte, e de lados a, b, p (ver figura 25).

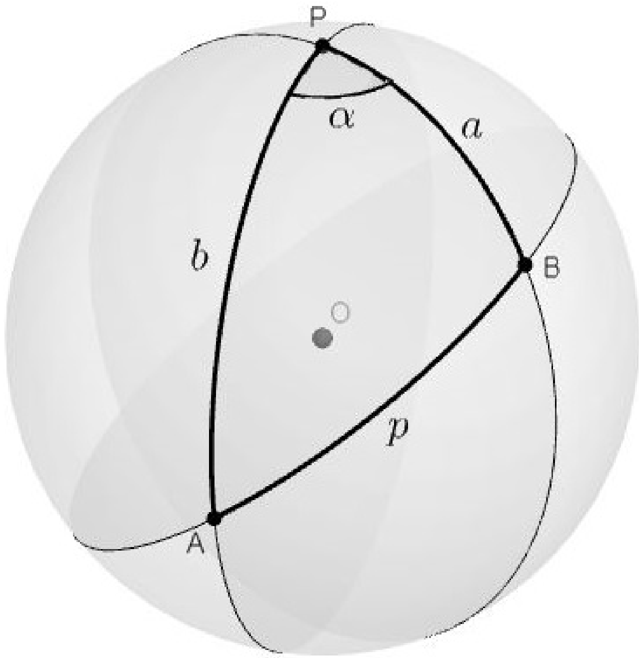

Figura 25: Triângulo esférico $\triangle ABP$

Solução:

- a é o arco de meridiano que contém os pontos P e B.
  $a = 90° -$ latitude de B, se B pertence ao Hemisfério Norte.
  $a = 90° +$ latitude de B, se B pertence ao Hemisfério Sul.

- b é o arco de meridiano que contém os pontos P e A.
  $b = 90° -$ latitude de A, se A pertence ao Hemisfério Norte.
  $b = 90° +$ latitude de A, se A pertence ao Hemisfério Sul.

- α é o ângulo formado pelos lados a e b.
  $\alpha =$ longitude de A + longitude de B, se A e B pertencem ao mesmo hemisfério leste ou oeste.
  $\alpha = |$longitude de A − longitude de B$|$, se A e B não pertencerem ao mesmo hemisfério leste ou oeste.

- $p =$ distância entre A e B.

Para encontrarmos o valor de p utilizaremos a lei dos cossenos para triângulos esféricos.

Exemplo 1: Calcular a distância entre as cidades de São Paulo-BRA e Paris-FRA, sabendo que:

- São Paulo - Brasil
  Latitude: $23°32'56'' \ S$
  Longitude: $46°38'20'' \ O$

- Paris - França
  Latitude $48°51'24'' \ N$
  Longitude $2°21'3'' \ E$.

Solução: De acordo com os dados das cidades acima e considerando o ponto A como São paulo e B como Paris (ver figura 26), temos :

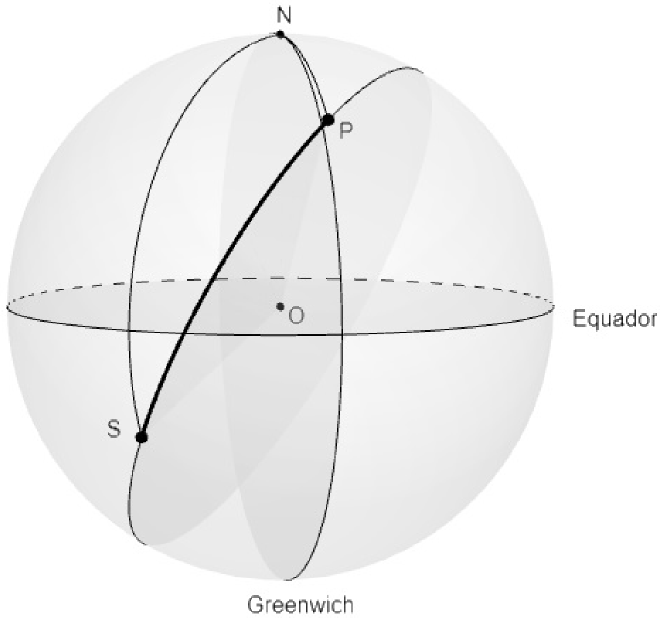

Figura 26: Distância entre São Paulo e Paris

- $a = 90° + 23°32'56'' = 113°32'56''$
- $b = 90° - 48°51'24'' = 41°8'36''$
- $\alpha = 46°38'20'' + 2°21'3'' = 48°59'23''$

Assim, aplicando os dados abaixo na forma da lei dos cossenos temos:

$$\cos p = \cos 113,5489° \cdot \cos 41,1433° + \sin 113,5489° \cdot \sin 41,1433° \cdot \cos 48,9897°$$

$$\cos p = 0,0949$$

$$p = \arccos 0,0949 = 84,5538°$$

Desta forma a medida de p em quilômetros é igual a

$$Med(84,5538) = \frac{84,5538°}{360°} \cdot 40075 = 9.412,49 \text{ Km}.$$

OBS.: De acordo com o site https://pt/distance.to a distância entre as cidades citadas em linha reta é de aproximadamente $9.404,66 \ Km$.

Exemplo 2: Calcular a distância entre as cidades de Roma-ITA e Tokyo-JPN, sabendo que:

- Roma - Itália
  Latitude: $41°53'31'' \ N$
  Longitude: $12°30'41'' \ E$.

- Tokyo - Japão
  Latitude $35°41'22'' \ N$
  Longitude $139°41'30'' \ E$.

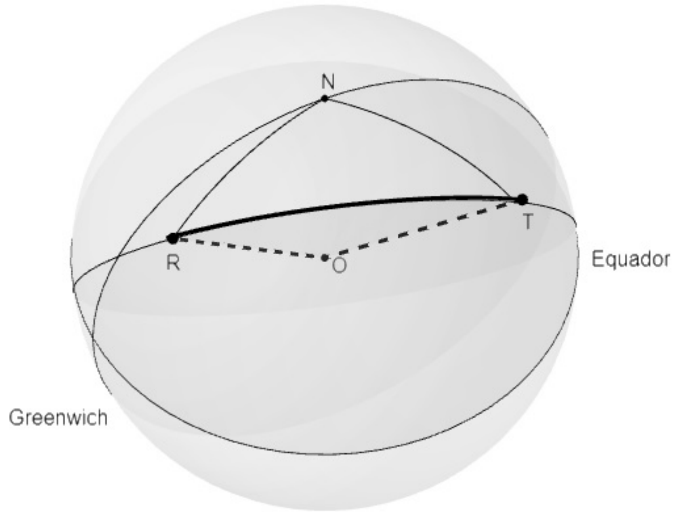

Figura 27: Distância entre Roma e Tokyo

Solução:
De acordo, com os dados acima, temos que:

- $a = 90° - 41°53'31'' = 48°6'36''$,
- $b = 90° - 35°41'22'' = 54°18'38''$,
- $\alpha = 139°41'30'' - 12°30'41'' = 127°10'49''$.

Assim, aplicando os dados abaixo na lei dos cossenos temos:

$$\cos p = \cos 48,11° \cdot \cos 54,3106° + \sin 48,11° \cdot \sin 54,3106° \cdot \cos 127,1803°$$

$$\cos p = 0,0242$$

$$p = \arccos 0,0242 = 88,6164°$$

.

E a medida de p em quilômetros é igual a:

$$Med(84,5538°) = \frac{88,6164°}{360°} \cdot 40075 = 9.864,73 \ \text{Km}$$

OBS.: De acordo com o site https://pt/distance.to a distância entre as cidades citadas em linha reta é de aproximadamente 9.853,54 Km.

5 SISTEMA DE COORDENADAS

Neste capitulo, iremos relacionar uma coordenada cartesiana no espaço $(x; y; z)$, com a sua respectiva coordenada polar, utilizando para tal as medidas dos ângulos de latitudes e longitudes do globo terrestre.

5.1 COORDENADAS NO PLANO

Seja (x, y), coordenadas de um ponto A em um plano π, e (d, α) a coordenada polar do ponto A, com isso temos as seguintes relações:

$$\cos\alpha = \frac{x}{d} \Longleftrightarrow x = \cos\alpha \cdot d, \tag{101}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{d} \Longleftrightarrow y = \sin\alpha \cdot d. \tag{102}$$

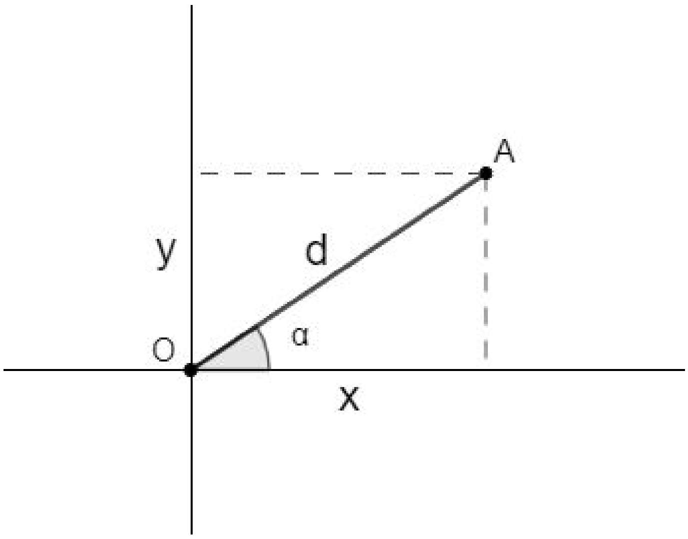

Figura 28: Ponto A de coordenadas (π,α)

Com base nas relações (101) e (102) podemos estender o estudo para as coordenadas no espaço, e assim fazer a relação com as coordenadas esféricas no Globo Terrestre.

5.2 COORDENADAS NO ESPAÇO

Seja um ponto A no espaço de coordenadas (x, y, z) e coordenadas esféricas (r,α, β), ver figura (29), ao observar os triângulos retângulos $\triangle AOB$ e o $\triangle AOA'$, podemos estabelecer as seguintes relações entre as coordenadas:

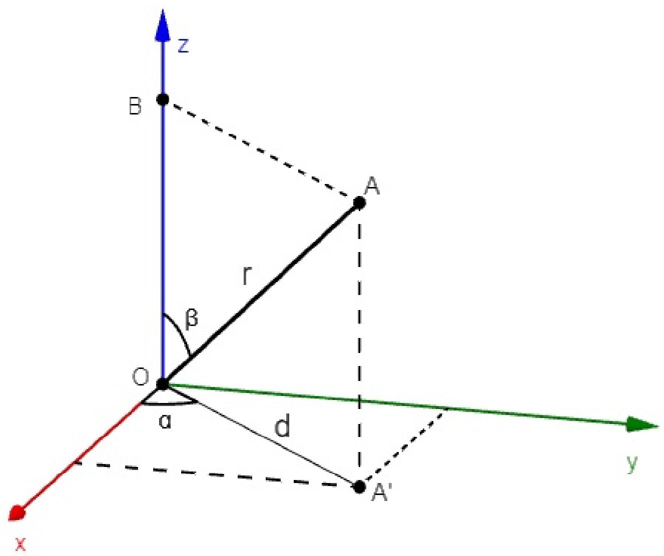

Figura 29: Ponto A de coordenadas $(r,\ \alpha,\ \beta)$

- Coordenada z - Aplicando a relação dos cossenos no triângulo retângulo $\triangle AOB$:

$$\cos\beta = \frac{z}{r} \iff z = \cos\beta \cdot r.$$

- Coordenada x: Aplicando a relação dos cossenos no triângulo retângulo $\triangle AOA'$:

$$\sin\beta = \frac{d}{r} \iff d = \sin\beta \cdot r.$$

Como $x = \cos\alpha \cdot d$, então:

$$x = \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot r.$$

- Coordenada y: Aplicando a relação dos cossenos no triângulo retângulo $\triangle AOA'$:

$$\sin\beta = \frac{d}{r} \iff d = \sin\beta \cdot r.$$

Como $y = \sin\alpha \cdot d$, então:

$$y = \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot r.$$

Concluímos assim que

$$(x, y, z) = (\cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot r, \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot r, \cos\beta \cdot r)$$

5.3 A RELAÇÃO DAS COORDENADAS ESFÉRICAS E GEOGRÁFICAS

Localizamos um ponto no globo terrestre através de sua latitude ϕ e sua longitude λ, essas coordenadas estão associadas as coordenadas esféricas (x, y, z). Para isso, tomemos como referência o centro da Terra com origem $(0, 0, 0)$ no sistema cartesiano, o eixo z seria a reta que contém os Polos Norte e Sul, o plano x, y o que divide os hemisfério Norte e Sul e sua interseção com o globo terrestre a linha do Equador, o plano x, z dividirá os hemisférios Leste e Oeste e sua interseção com o globo terrestre o meridiano e o antimeridiano de Greenwich.

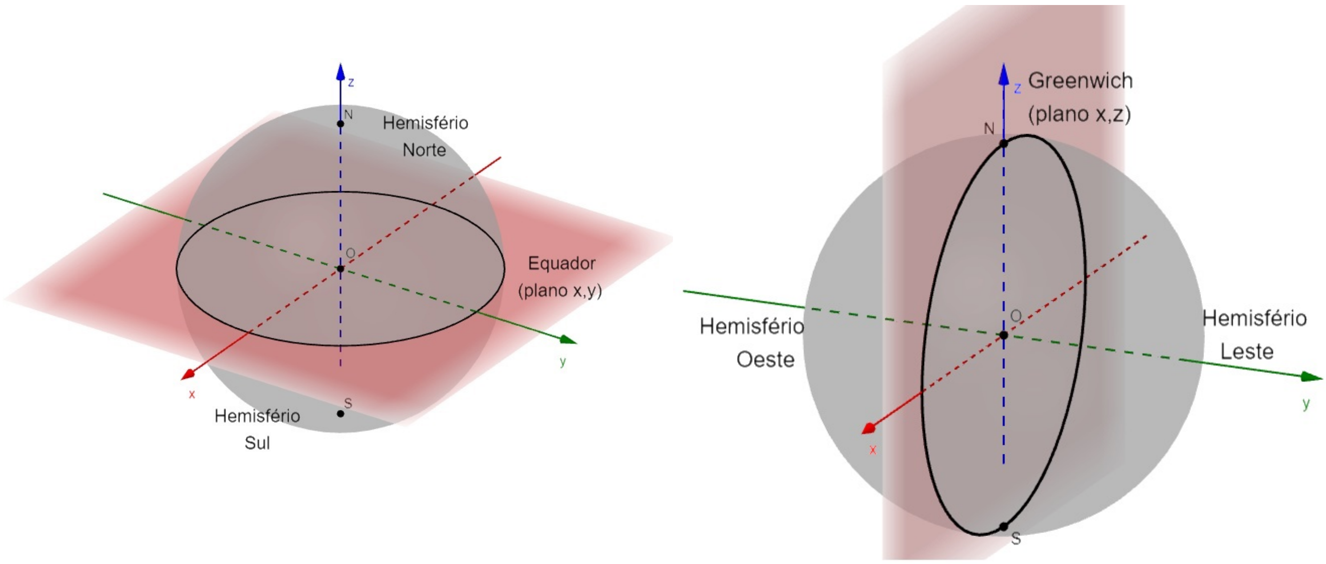

Figura 30: Hemisférios Norte/Sul - Leste/Oeste

Vimos que a latitude ϕ é medida a partir da linha do equador e sua medida varia de $-90° < \phi < 90°$ e sua longitude λ é medida a partir do meridiano de Greenwich variando sua medida em $-180° < \lambda < 180°$. Ao compararmos os ângulos α e λ vemos que ambos os ângulos estão medindo a partir do mesmo ponto de referência, mas ao compararmos os ângulos β e ϕ verificamos que o ângulo β mede a a partir do eixo y, enquanto o ângulo ϕ mede a partir da linha do equador, então concluímos que os ângulos β e ϕ são complementares, assim chegamos a seguinte definição:

Definição 5.1. *Em uma esfera de raio r, dado um ponto P pertencente a esfera de latitude ϕ e longitude λ suas coordenadas cartesianas é dado pela expressão:*

$$(x, y, z) = (\cos\lambda \cdot \cos\phi \cdot r, \sin\lambda \cdot \cos\phi \cdot r, \sin\phi \cdot r) \tag{103}$$

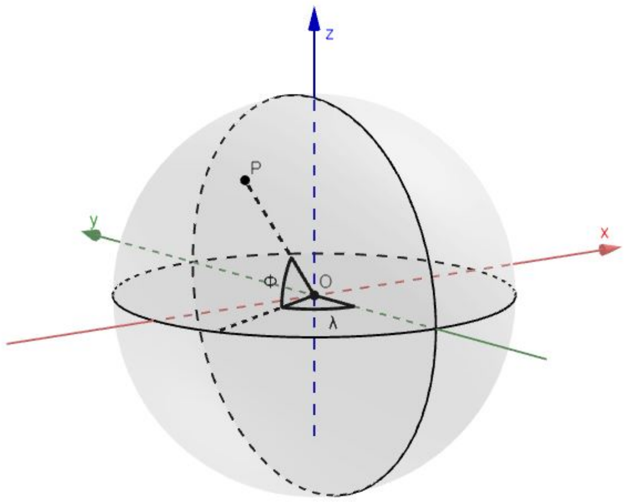

Figura 31: Ponto P na esfera de raio r

6 GEOMETRIA ESFÉRICA NO SOFTWARE GEOGEBRA 3D

O Geogebra $3D$ é uma ferramenta computacional de geometria dinâmica $3D$ que permite a construção de objetos em terceira dimensão, assim valorizando o aprendizado de conceitos matemáticos, por ser de livre acesso, pode ser usado em qualquer computador com acesso a internet bastando para isso acessar o link https://www.geogebra.org/3d, ou efetuando o download do aplicativo em qualquer smartfone, para isso procure na loja de aplicativos pelo nome calculadora Geogebra $3D$, nesta secção iremos realizar algumas atividades que poderão ser utilizados no ensino da geometria esférica, bem como encontrar distâncias no globo terrestre, através das latitudes e longitudes.

- **Conhecendo o Geogebra**

O Geogebra possui uma interface bem fácil de trabalhar, ao acessar a página observamos que o programa se divide em duas partes, a direita temos os 3 eixos x, y, z, onde iremos fazer as construções, e na esquerda temos as ferramentas básicas, podendo ser trocada pela escrita algébrica da expressão do elemento geométrico, para todas construções que iremos realizar, tomaremos o centro da esfera no centro do plano cartesiano $(0,0,0)$.

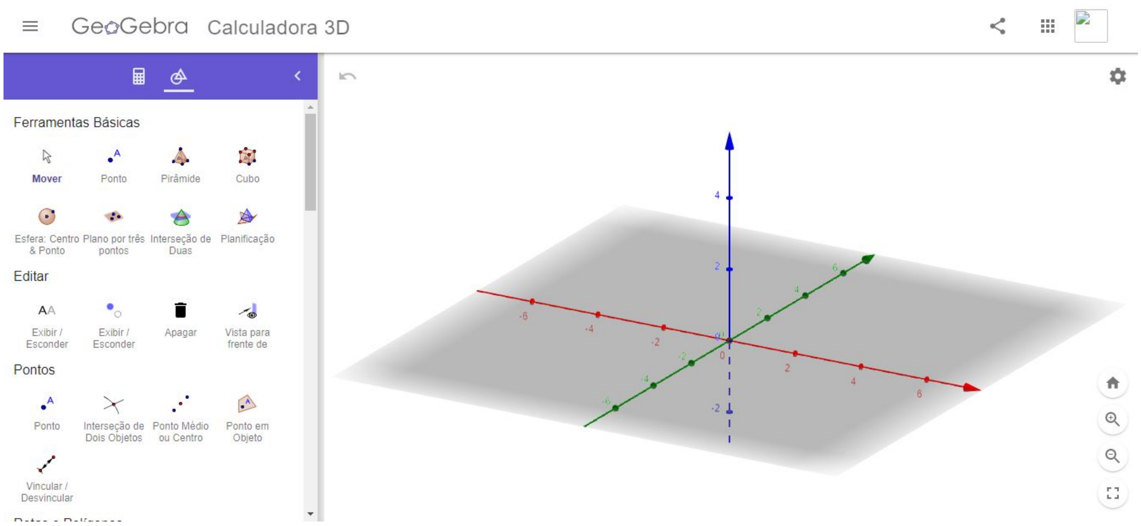

Figura 32: Ambiente Geogebra $3D$

6.1 ESFERAS E SEUS ELEMENTOS

- **Esferas**

Podemos construir esferas no Geogebra utilizando dois procedimentos diferentes:

1° **Procedimento**

Clique no ícone ponto, e clique no centro dos eixos, criando o ponto A que será o centro de nossa esfera, repita a operação, clicando em outro espaço e criando o ponto B, clique no ícone "Esfera: centro & ponto", e clique no ponto A e B nessa ordem formando a esfera de raio AB (ver figura 33).

2° **Procedimento**

Repita a operação do 1° procedimento para a criar o ponto A (centro da esfera). Em seguida clique no ícone "Esfera: Centro & Raio", e ao clicar no ponto A abrirá uma caixa para digitar o valor do raio. Desta maneira será criado uma esfera de centro A, e raio r (em unidades de cm).

Observação : Clicando com o botão direito sobre a esfera, irá abrir uma janela com algumas opções, onde você pode configurar alguns estilos da esfera, como cor, transparência, entre outros (ver figura 33).

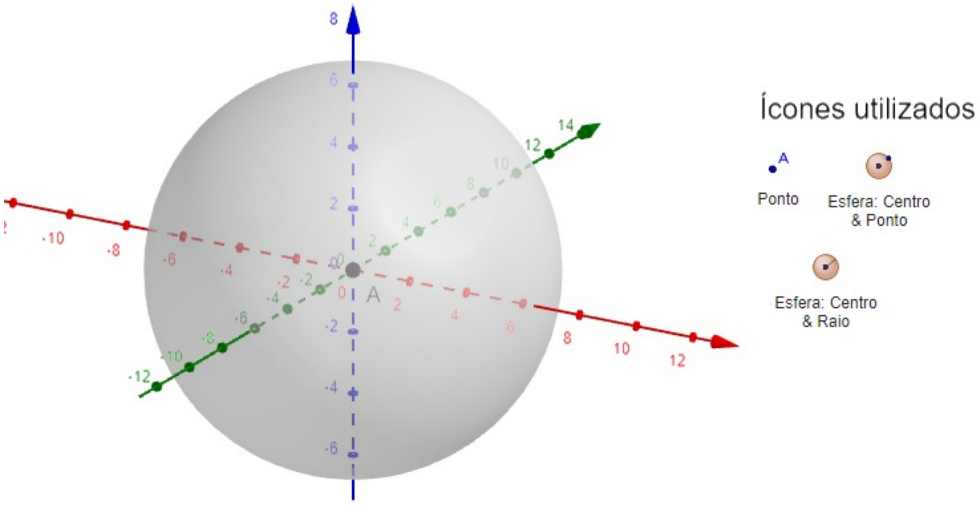

Figura 33: Esfera de centro A e raio r

- **Construindo círculos máximos e mínimos**

A interseção de um plano com uma esfera formam-se círculos, que será máximo quando esse plano contém o centro da esfera, e mínimo quando o plano não contém o centro da esfera.

Círculo mínimo

Construa três pontos usando a ferramenta "pontos"sobre a esfera, de forma que ao escolher dois pontos criados estes sejam não colineares com o centro da esfera. Clique no ícone "Plano por três pontos"e clique nos três pontos criados, construindo assim o plano que passa por esses três pontos. Clique no ícone "Interseção de Duas"e clique sobre a esfera e depois sobre o plano, ou vice-versa, assim criando o círculo mínimo na esfera (ver figura 34).

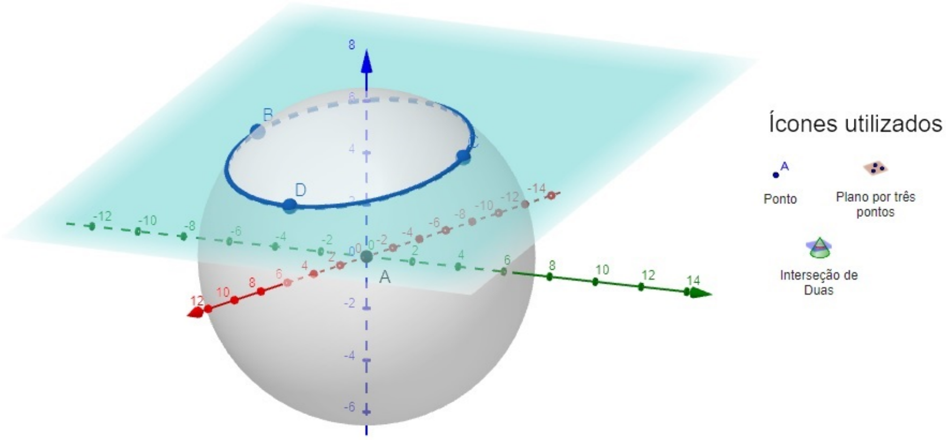

Figura 34: Círculo mínimo

Círculo máximo

Para criar um circulo máximo, crie dois pontos quaisquer sobre a esfera com a ferramenta "pontos"de forma que esses pontos sejam não colineares com o centro da esfera, usando a ferramenta (plano por três pontos", clique nos dois pontos criados e no ponto que é o centro da esfera. Após, clique na ferramenta "Interseção de duas", e clique sobre a esfera e plano criando um circulo que é máximo da esfera (ver figura 35).

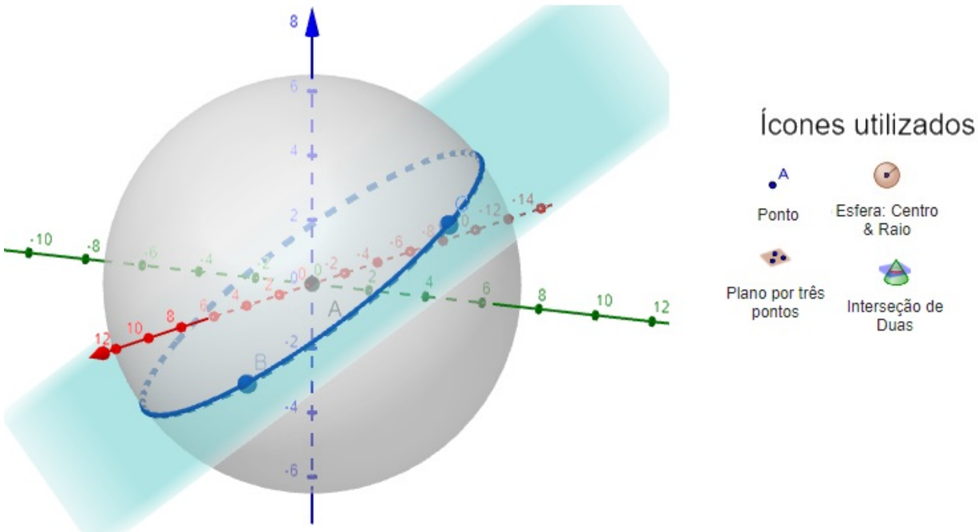

Figura 35: Círculo máximo

Ângulo esférico

Construa uma esfera e dois círculos máximos sobre essa esfera, com a ferramenta "reta tangente"e a interseção dos círculos máximo iremos construir duas retas tangentes clicando no ponto de interseção e nos círculos máximo, um de cada vez, e com a ferramenta "ângulos"clique sobre as duas retas tangentes, assim, você terá a medida do ângulo esférico formado pelos dois círculos máximos (ver figura 36).

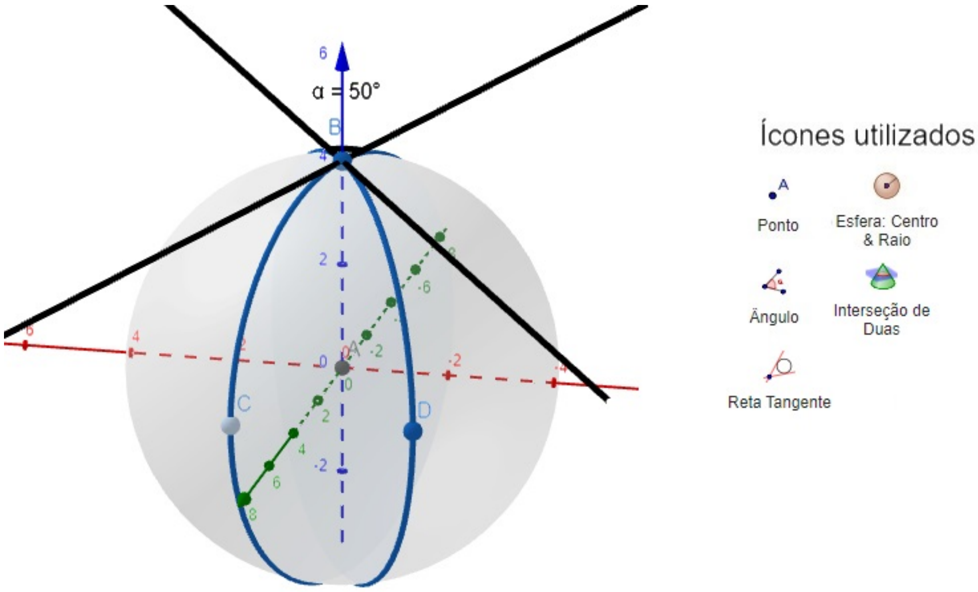

Figura 36: Ângulo esférico α

Construindo triângulos esféricos

Crie três pontos não colineares sobre uma esfera de centro A e raio qualquer, construa três pontos B, C e D, clique sobre a ferramenta "arco circular", e clique nessa sequência $A-B-C$, repita com os outros pares de pontos, BD e BC, assim, criando o triângulo esférico BCD (ver figura 37).

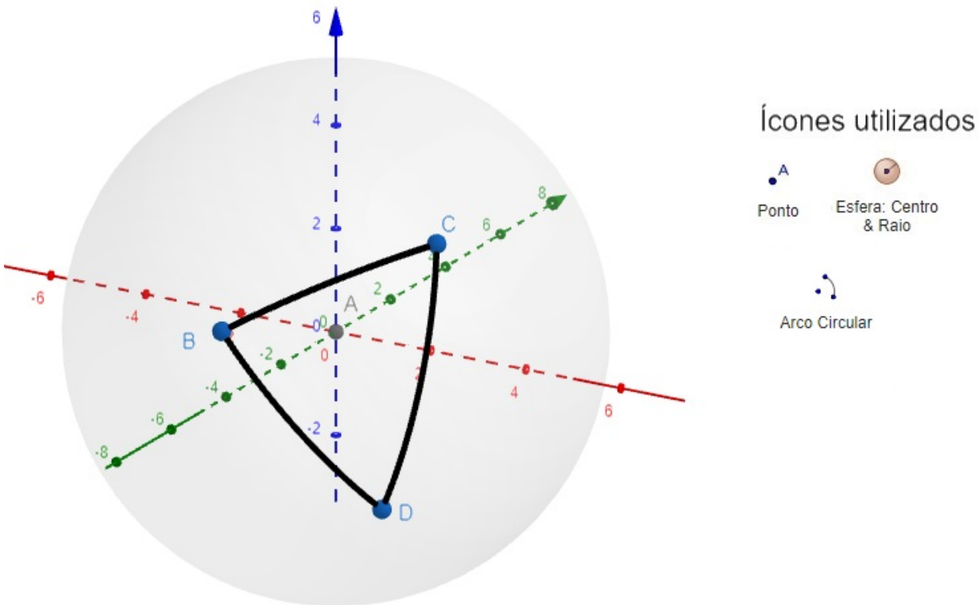

Figura 37: Triângulo esférico $\triangle BCD$

Ângulos internos dos triângulos esféricos

Utilizando a figura construída na atividade anterior, com a ferramenta "reta tangente", clique em um dos vértices do triângulo e em um dos lados que o compõem, repita o processo para o outro lado do mesmo vértice, faça o processo com os demais vértices, meça os ângulos, com a ferramenta "ângulo", entre as retas que concorrem cada vértice (para melhor visualização, pode-se ocultar as retas tangentes na aba álgebra) e assim pode ser verificado que a soma dos ângulos internos de um triângulo não resultam 180º (ver figura 38), ainda pode-se fazer a experiência de movimentar os vértices para ver como se comportam os ângulos internos.

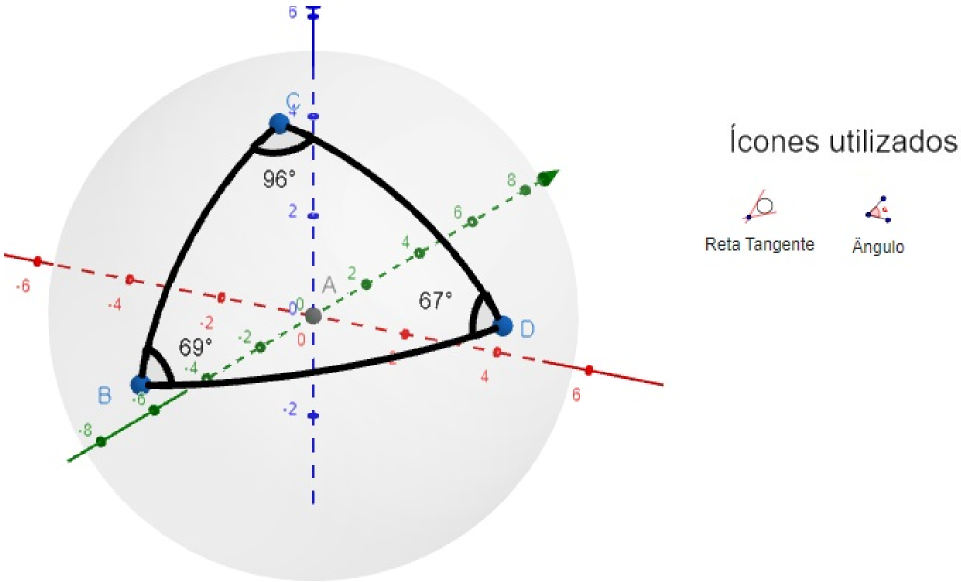

Figura 38: Ângulo internos do triângulo $\triangle BCD$

Distância entre dois pontos - geodésia

Vimos que a menor distância entre dois pontos sobre uma esfera é dada pelo menor arco de círculo máximo que contém os pontos. Por exemplo: Seja dois pontos pertencente a uma esfera de raio 6cm, e distantes entre si 70° de arco de círculo máximo, sua medida, em centímetros, será:

$$d(AB) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 70^\circ}{360^\circ} \approx 7,33038cm$$

.

No Geogebra, usando a ferramenta "Arco circular"conseguimos encontrar a geodésia desses dois pontos, para isso, crie dois pontos A e B sobre uma circunferência de raio 6 cm e centro O, após isso com a ferramenta medir ângulo, clique sobre os pontos A, O e B, mostrando assim o ângulo entre os pontos A e B, se necessário ajuste com a ferramenta mover os pontos A ou B, de forma que o ângulo entre eles seja de 70°. Clique sobre a ferramenta "arco circular", e clique no ponto O, A e B, traçando assim o arco circular $\widehat{AB}$, mude o comando a direita para mostrar a parte algébrica, e vá até a informação da medida do arco circular, que indicará a medida do arco $\widehat{AB}$ (ver figura 39).

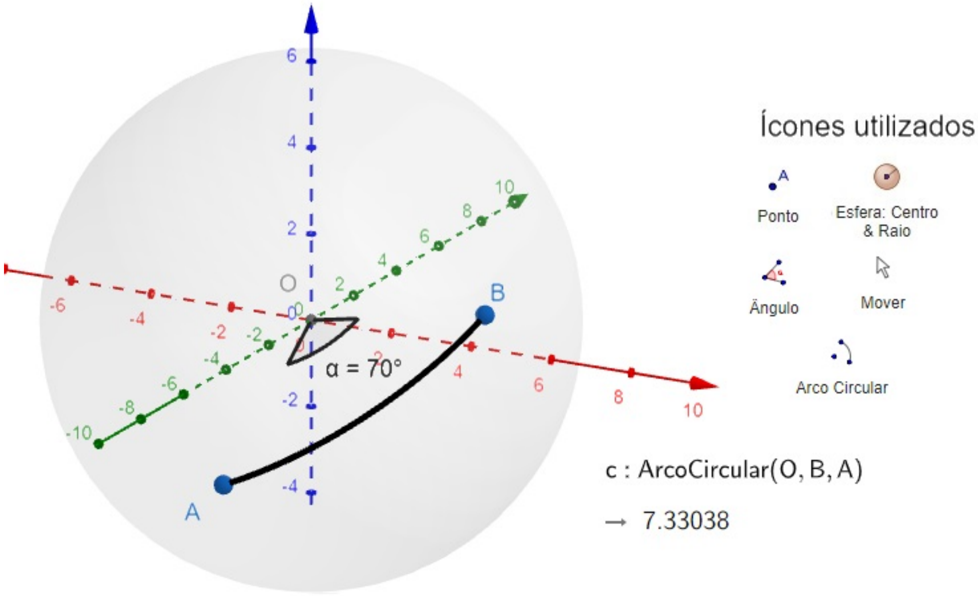

Figura 39: Arco circular (O, B, A)

6.2 O ESTUDO DO GLOBO TERRESTRE NO GEOGEBRA

Para o estudo do Globo Terrestre no Geogebra iremos padronizar as seguintes relações:

- Esfera de centro no ponto $A(0,0,0)$ e raio 6.4 unidades, para compararmos com o raio da Terra de 6400 Km.
- O círculo máximo pertencente ao plano zx formará o meridiano e anti-meridiano de Greenwich.
- O círculo máximo pertencente ao plano xy será a linha do equador.
- O Polo Norte será dado pelo ponto $(0,0,6.4)$.
- O Polo Sul pelo ponto $(0,0,-6.4)$.

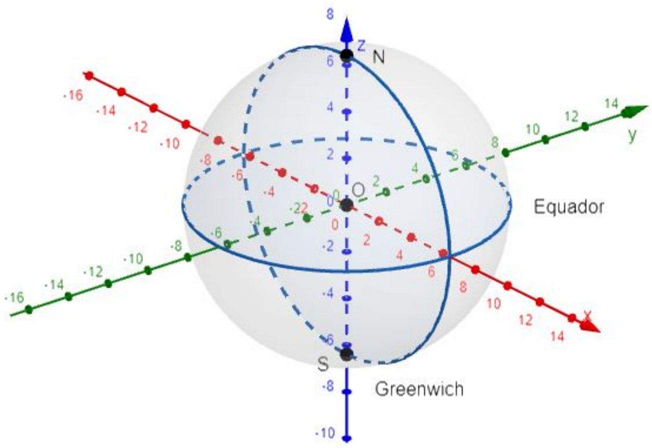

Figura 40: Globo Terrestre no Geogebra

Latitude

Construa uma esfera com os elementos listados, crie um ponto P qualquer sobre a esfera, com a ferramenta "plano paralelo"clique sobre o ponto P e sobre o plano que contém a linha do Equador, crie o circulo mínimo interseção do plano criado com a esfera. Para nos auxiliar, iremos criar o circulo máximo (meridiano que contém P) que passa por P e pelos polos da esfera. Crie o ponto de interseção E do meridiano que contém P e a linha do Equador, Com a ferramenta "ângulo", meça o ângulo $\widehat{PAE}$, esse ângulo será a medida da latitude de P ou de qualquer ponto que esteja no círculo mínimo que o contém, com a ferramenta "mover", você poderá clicar no ponto P, e movimentá-lo observando a medida de latitude.

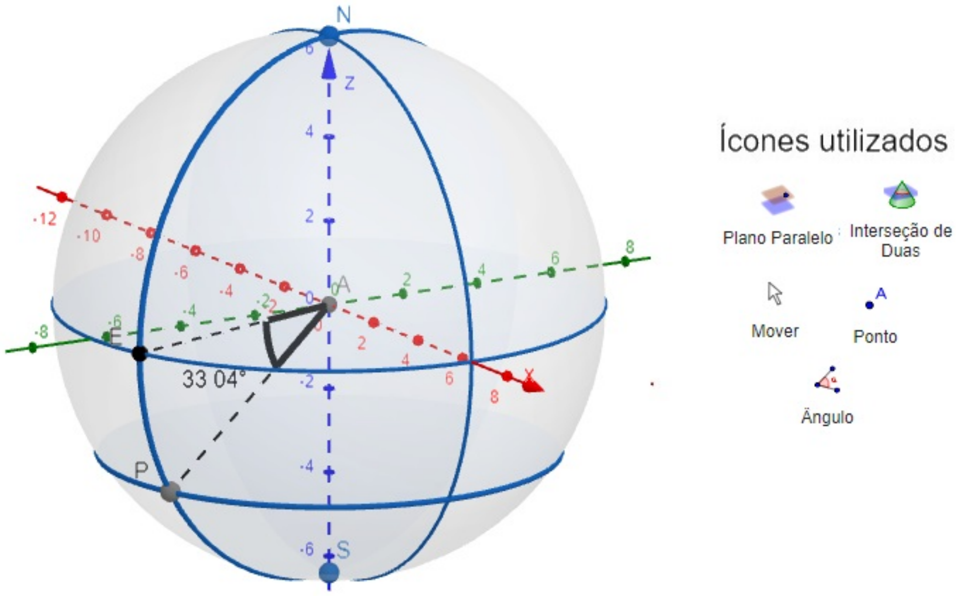

Figura 41: Latitude

Longitude

Construa uma esfera com os elementos listados, crie o ponto M, interseção do meridiano de Greenwich e a linha do Equador. Crie um ponto P sobre a linha do Equador e meça o ângulo $\widehat{MAP}$. O ângulo formado será a longitude do ponto P, ou de qualquer ponto que esteja sobre o meridiano que contém P, este meridiano pode ser criado construindo o círculo máximo que passa por P e os pontos N e S, polos da esfera.

Observação: Utilizando-se das duas últimas atividades, pode-se verificar as medidas de latitude e longitude de um ponto e medir as distâncias utilizando-se da atividade distância entre pontos.

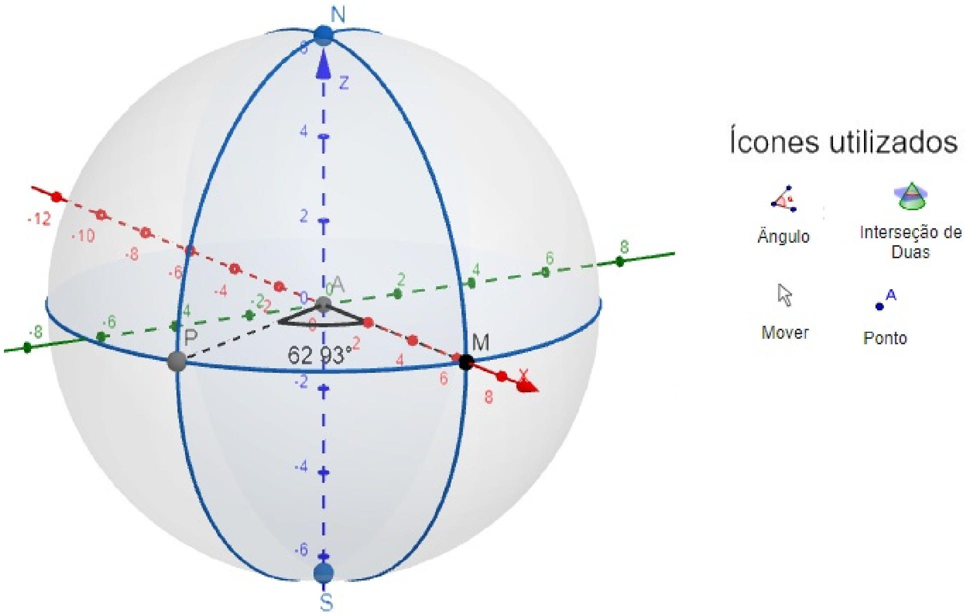

Figura 42: Longitude

Coordenadas cartesianas

Podemos utilizar a relação $(x, y, z) = (\cos\lambda \cdot \cos\phi \cdot r, \sin\lambda \cdot \cos\phi \cdot r, \sin\phi \cdot r)$, mostrada nos capítulos anteriores para encontrar um ponto no Geogebra.

Como exemplo, usaremos a latitude e longitude da capital de São Paulo ($\phi = -23.5489°$ e $\lambda = -46.6388°$). Em uma esfera de raio 6,4 unidades no Geogebra, na aba de "álgebra"digite em uma nova linha de entrada : $P = (\cos(-46.6388°)\cos(-23.5489°)6.4\sin(-46.6388°)\cos(-23.5489°)6.4$

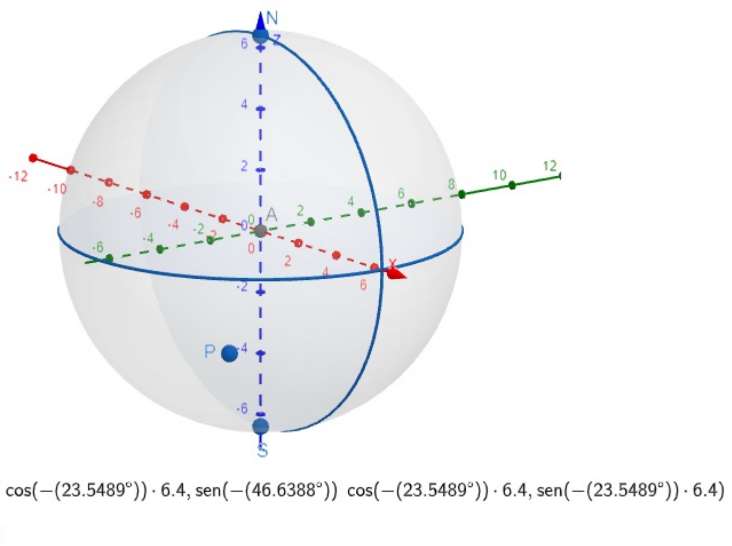

Figura 43: Coordenada cartesiana do ponto P

PROPOSTA DIDÁTICA

Os exercícios abaixo foram desenvolvidos a fim de aprimorar o conhecimento da trigonometria esférica e sua aplicação no Globo Terrestre para o cálculo de distâncias.

Exercício 1

Os lados AB e AC de um triângulo esférico $\triangle ABC$ medem $79°54'$ e $73°12'$ respectivamente, e o ângulo formado por esses lados mede $98°12'$. Calcule, em graus, o lado BC desse triângulo.

Solução:

Traçando um esboço do triângulo esférico $\triangle ABC$, temos:

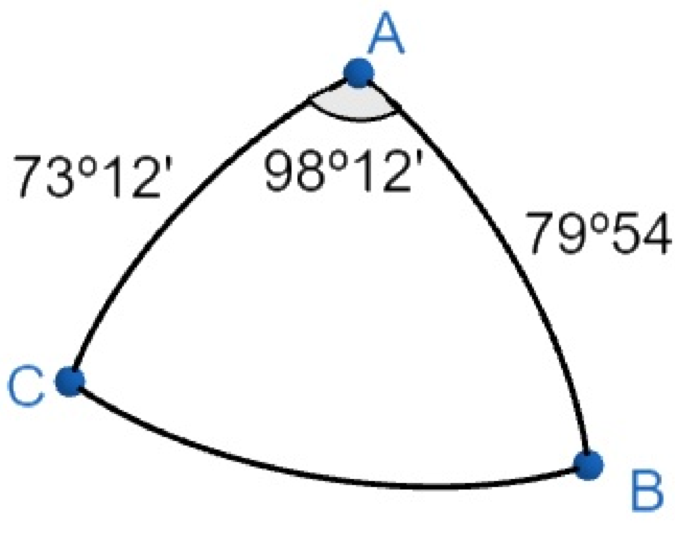

Figura 44: Triângulo esférico $\triangle ABC$

Chamando o lado BC de a e aplicando a lei dos cossenos para triângulo esférico:

$$\cos a = \cos 73°12' \cdot \cos 79°54' + \sin 73°12' \cdot \sin 79°54' \cdot \cos 98°12'$$

$$\cos a = -0,08373$$

$$a = 94°48'$$

Exercício 2

Usando o Geogebra, desenhe o triângulo $\triangle ABC$ do exercício 1 com as medidas dadas, e no final meça o lado BC, e mostre que o lado BC tem medida $94°48'$.

Solução:

No Geogebra, desenhe uma esfera de centro O e raio r qualquer. Crie os pontos A, B e C sobre a esfera, com a ferramenta arco circular desenhe os arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, e $\widehat{BC}$, formando assim o triângulo esférico ABC. Em seguida faça duas retas tangentes aos lados $\widehat{AB}$ e $\widehat{AC}$ passando pelo vértice A. Após isso, meça os ângulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOC}$ e o ângulo entre as retas tangentes. Então, mova os vértices A, B e C de forma que $\widehat{AOB} = 79{,}9°$, $\widehat{AOC} = 73{,}2°$ e o ângulo entre as retas tangentes $98{,}2°$. Desta forma, verificamos que o ângulo $\widehat{BOC} = 94{,}8°$.

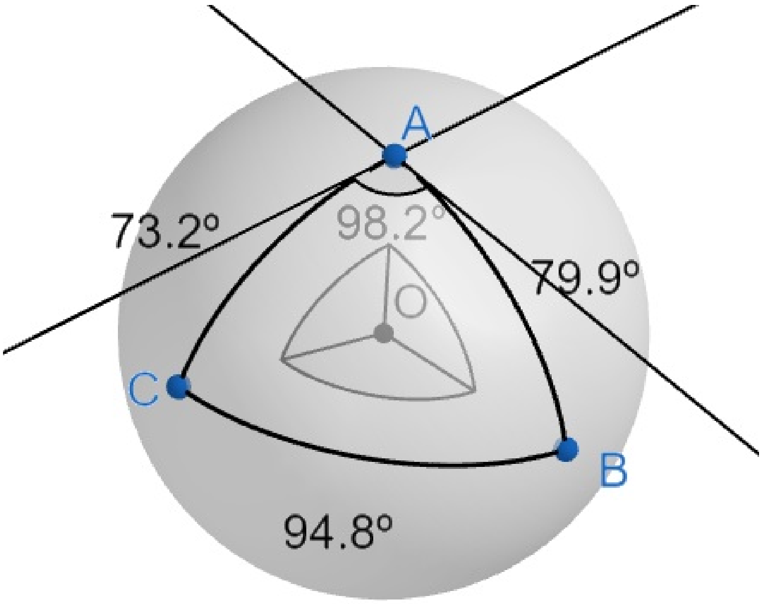

Figura 45: Triângulo esférico $\triangle ABC$

Exercício 3

Calcule a distância entre as cidades de São Paulo e Londres, sabendo-se que São Paulo está localizada nas coordenadas de latitudes $23°32'51"$ Sul e longitude $46°38'10"$ Leste, e Londres se localiza na latitude $51°30'1''$ Norte e longitude $0°7'34"$ Leste.

Solução:

Vamos utilizar o Polo Norte como referencia para formar um triângulo esférico de vértices situados no Polo norte, São Paulo e Londres que denominaremos por SPL. *Sabe-se que*

- *Lado* $\widehat{SP} = 90° + 23°32'51" = 113°32'51"$.
- *Lado* $\widehat{LP} = 90° - 51°30'1" = 38°8'59"$.

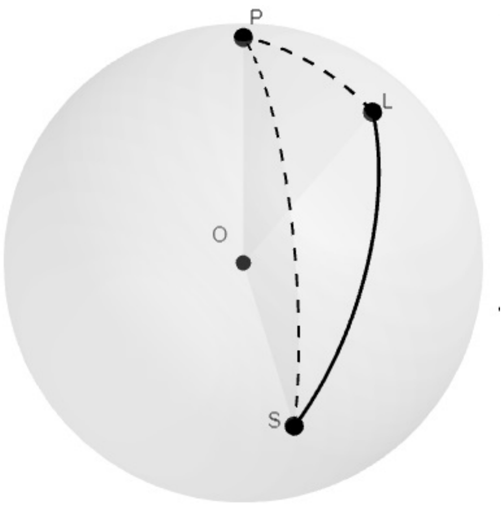

Figura 46: Triângulo esférico $\triangle SPL$

Aplicando a fórmula fundamental da trigonometria esférica, obtemos:

$$\cos\widehat{SL} = \cos 113°32'51'' \cdot \cos 38°8'5'' + \sin 113°32'51'' \cdot \sin 8°8'59'' \cdot \cos 46°30'36''$$

$$\cos\widehat{SL} = 0,080095.$$

$$\widehat{SL} = 85°24'21''$$

Logo, a distância de São paulo a Londres é dada por:

$$Med(85°24'21'') = \frac{85°24'21''}{360°} \cdot 40030 \approx 9496.66Km.$$

Exercício 4

Utilizando os dados do exercício anterior e o software Geogebra, encontre a distância entre as cidades de São Paulo à Londres.

Solução:

Uma das soluções para resolver esse problema utilizando-se do Geogebra, é transformar as coordenadas esféricas em coordenadas (x, y, z), assim considerando o raio da Terra igual a 6371 km, e o centro da Terra coincidindo com a origem do nosso plano cartesiano, teremos:

Coordenadas de São Paulo

$$x = \cos(-46°30'36'') \cdot \cos(-23°32'51") \cdot 6.371 \approx 4,01$$

$$y = \sin(-46°30'36'') \cdot \cos(-23°32'51") \cdot 6.371 \approx -4,25$$

$$z = \sin(-23°32'51") \cdot 6.371 \approx -2,55$$

Coordenadas de Londres

$$x = \cos(-0°7'34") \cdot \cos(51°30'1") \cdot 6.371 \approx 3,97$$

$$y = \sin(-0°7'34") \cdot \cos(51°30'1") \cdot 6.371 \approx -0,01$$

$$z = \sin(51°30'1") \cdot 6.371 \approx 4,99$$

Com as coordenadas acima, construa no Geogebra uma esfera de centro O e raio de 6.371 unidades (reduzimos o raio da Terra por um fator $\frac{1}{1000}$ apenas para melhor visualização ao desenho). Crie os pontos de coordenadas acima digitando na guia de álgebra as coordenadas dos pontos $S(4.01, -4.25, -2.55)$ e $L(3.97, 0.01, 4.99)$ (pode-se digitar as fórmulas no campo das coordenadas). Construa o arco circular (O, S, L), e na parte algébrica do Geogebra aparecerá a medida desse arco igual a 9.49671 nos fornecendo a distância entre as cidades de aproximadamente 9496.71 km (ver figura 47.

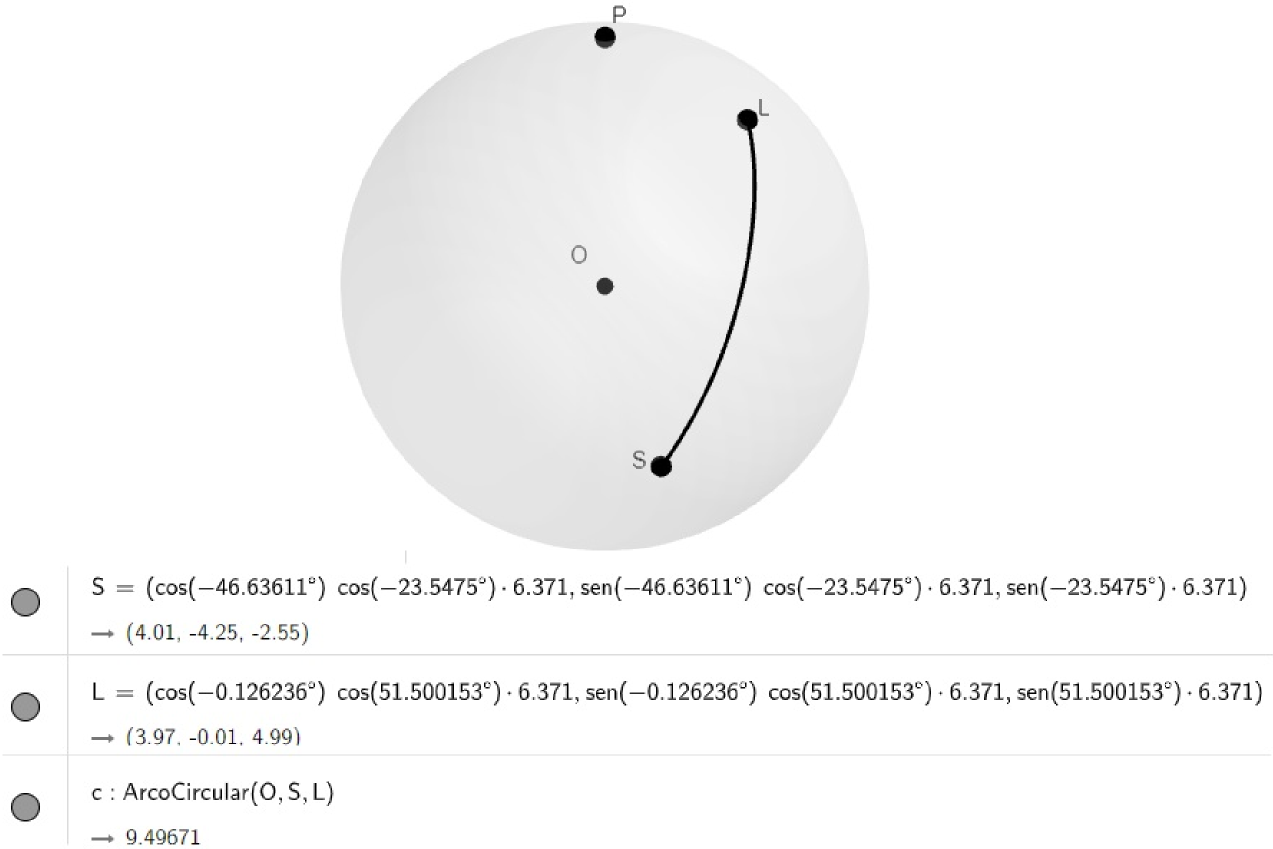

Figura 47: Distância São Paulo - Londres

Exercício 5
Demonstre que para qualquer triângulo esférico $\triangle ABC$ são validas as relações:

$$\tan\widehat{A} = \frac{\sin\widehat{B}}{\frac{\sin c}{\tan a} - \cos c\cdot\cos\widehat{B}} = \frac{\sin\widehat{C}}{\frac{\sin b}{\tan a} - \cos b\cdot\cos\widehat{C}}$$

$$\tan\widehat{B} = \frac{\sin\widehat{A}}{\frac{\sin c}{\tan b} - \cos c\cdot\cos\widehat{A}} = \frac{\sin\widehat{C}}{\frac{\sin a}{\tan b} - \cos a\cdot\cos\widehat{C}}$$

$$\tan\widehat{C} = \frac{\sin\widehat{A}}{\frac{\sin b}{\tan c} - \cos b\cdot\cos\widehat{A}} = \frac{\sin\widehat{B}}{\frac{\sin a}{\tan c} - \cos a\cdot\cos\widehat{B}}$$

Solução:
Seja o triângulo esférico $\triangle ABC$, de lados a, b e c, podemos escrever:

$$\cos a = \cos b\cdot\cos c + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{A} \quad (I)$$

$$\cos b = \cos a\cdot\cos c + \sin a\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{B} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), temos

$$\cos a = \cos c\cdot(\cos a\cdot\cos c + \sin a\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{B}) + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{A}$$

$$\cos a = \cos^2 c\cdot\cos a + \cos c\cdot\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{B}) + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{A}$$

Como $\cos^2 c = 1 - \sin^2 c$, então

$$\cos a = (1-\sin^2 c)\cdot\cos a + \cos c\cdot\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{B} + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{A}$$

$$\cos a = \cos a - \sin^2 c\cdot\cos a + \cos c\cdot\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{B} + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{A}$$

$$\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{A} = \sin^2 c\cdot\cos a - \cos c\cdot\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\widehat{B}$$

Dividindo a expressão por $\sin a\cdot\sin c$

$$\frac{\sin b\cdot\cos\widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin c\cdot\cos a}{\sin a} - \cos c\cdot\cos\widehat{B}.$$

Pela lei dos senos $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}}$,

$$\frac{\sin\widehat{B}\cdot\cos\widehat{A}}{\sin\widehat{A}} = \frac{\sin c\cdot\cos a}{\sin a} - \cos c\cdot\cos\widehat{B}.$$

Como $\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\tan a}$, então

$$\frac{\sin\widehat{B}}{\tan\widehat{A}} = \frac{\sin c}{\tan a} - \cos c\cdot\cos\widehat{B}.$$

$$\tan\widehat{A} = \frac{\sin\widehat{B}}{\frac{\sin c}{\tan a} - \cos c\cdot\cos\widehat{B}}.$$

A prova é análoga para as demais relações.

OBS.: As relações acima pode ser usada para o cálculo de dois ângulos de um triângulo esférico, quando é dado o terceiro ângulo e os lados que o formam.

Exercício 6

Dois lados de um triângulo esférico $\triangle ABC$ medem $b = 62°, c = 70°$ e o ângulo $\widehat{A} = 91°$. Calcule os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

Solução 1

Usando a relação do exercício anterior temos:

$$\tan\widehat{B} = \frac{\sin 91°}{\frac{\sin 70°}{\tan 62°} - \cos 70°\cdot\cos 91°} = 1,977,$$

$$\widehat{B} \approx 63°.$$

$$\tan\widehat{C} = \frac{\sin 91°}{\frac{\sin 62°}{\tan 70°} - \cos 62°\cdot\cos 91°} = 3,034,$$

$$\widehat{B} \approx 72°.$$

Solução 2

Pode-se construir o triângulo esférico ABC no Geogebra, utilizando-se os passos do exercício 2 produzindo a figura 48.

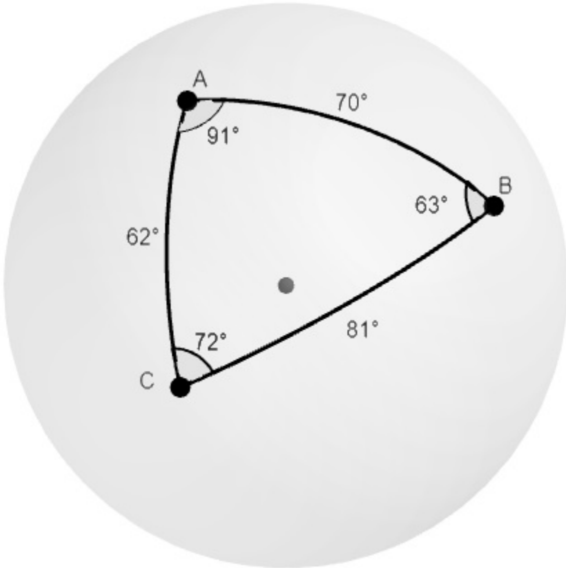

Figura 48: Ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$

Exercício 7

Prove as expressões (74), (75), (76), (77), (78), ((79) e (80) referente ao Teorema 2.6 da seção (2).

Solução (74) - $\tan b = \tan a \cdot \cos\widehat{C}$.

Multiplicando a equação (10) - $\sin^2 b = 1 - \cos^2(b)$ por $\frac{\cos a}{\cos b}$.

$$\frac{\sin^2 b \cdot \cos a}{\cos b} = \frac{\cos a}{\cos b} - \cos a \cdot \cos b.$$

Substituindo $\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c$ de (73) do 2° membro, e dividindo ambos os lados por $\sin a \cdot \sin b$, temos:

$$\frac{\sin b \cdot \cos a}{\cos b \cdot \sin a} = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}.$$

Pela lei dos cossenos (37) $\cos\hat{C} = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$, e multiplicando ambos os lados por $\frac{\sin a}{\cos a}$, temos:

$$\frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \cos\widehat{C}.$$

Como $\frac{\sin b}{\cos b} = \tan b$ e $\frac{\sin a}{\cos a} = \tan a$, concluímos que:

$$\tan b = \tan a \cdot \cos\widehat{C}.$$

Solução (75) - $\tan c = \tan a \cdot \cos\widehat{B}$.

A prova é análoga a (74), utilizando $\sin^2 c = 1 - \cos^2(c)$ e seguir os passos semelhantes e concluir que:

$$\tan c = \tan a \cdot \cos\widehat{B}.$$

Solução (76) - $\tan c = \sin b \cdot \tan\widehat{C}$.

Multiplicando (74) $1-\cos^2(b)=\sin^2 b$ por $\frac{\cos a}{\cos b}$.

$$\frac{\cos a}{\cos b}-\cos a\cdot\cos b=\frac{\cos a}{\cos b}\cdot\sin^2 b.$$

Substituímos a equação usando (73) $\cos c=\frac{\cos a}{\cos b}$.

$$\cos c-\cos a\cdot\cos b=\cos c\cdot\sin^2 b \Longleftrightarrow \frac{1}{\cos c}=\frac{\sin^2 b}{\cos c-\cos a\cdot\cos b}).$$

Multiplicamos o segundo membro por $\frac{\sin a}{\sin a}$.

$$\frac{1}{\cos c}=\frac{\sin b}{\sin a}\cdot\frac{\sin b\cdot\sin a}{(\cos c-\cos a\cdot\cos b)}.$$

Utilizando a lei dos cossenos (37), substituímos $\frac{\sin b\cdot\sin a}{\cos c-\cos a\cdot\cos b}=\frac{1}{\cos\widehat{C}}$.

$$\frac{1}{\cos c}=\frac{\sin b}{\sin a}\cdot\frac{1}{\cos\widehat{C}}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\sin c$.

$$\frac{\sin c}{\cos c}=\sin b\cdot\frac{\sin c}{\sin a}\cdot\frac{1}{\cos\widehat{C}}.$$

Utilizando (71), substituímos $\frac{\sin c}{\sin a}=\sin\hat{\mathrm{C}}$.

$$\frac{\sin c}{\cos c}=\sin b\cdot\frac{\sin\hat{\mathrm{C}}}{\cos\hat{\mathrm{C}}}.$$

Finalmente, substituindo $\frac{\sin c}{\cos c}=\tan c$ e $\frac{\sin\hat{\mathrm{C}}}{\cos\hat{\mathrm{C}}}=\tan\widehat{C}$, concluímos que:

$$\tan c=\sin b\cdot\tan\widehat{C}.$$

Solução (77) - $\tan b=\sin c\cdot\tan\widehat{B}$.

A prova é análoga a (76), utilizando $1-\cos^2(c)=\sin^2 c$ e seguindo os passos semelhantes para concluir que:

$$\tan b=\sin c\cdot\tan\widehat{B}.$$

Solução (78) - $\cos a=\cot\widehat{C}\cdot\cot\widehat{B}$.

Multiplicando (76) e (77), temos:

$$\tan b\cdot\tan c=\sin b\cdot\sin c\cdot\tan\widehat{B}\cdot\tan\widehat{C}.$$

Substituindo $\tan b=\frac{\sin b}{\cos b}$ e $\tan c=\frac{\sin c}{\cos c}$ e dividindo ambos os membros por $\sin b\cdot\sin c$, teremos:

$$\frac{1}{\cos b\cdot\cos c}=\tan\widehat{B}\cdot\tan\widehat{C}.$$

Substituindo por (73) $\cos a=\cos b\cdot\cos c$.

$$\frac{1}{\cos a}=\tan\widehat{B}\cdot\tan\widehat{C}\Longleftrightarrow\cos a=\frac{1}{\tan\widehat{B}\cdot\tan\widehat{C}}.$$

Como $\frac{1}{\tan\widehat{B}\cdot\tan\widehat{C}}=\cot\widehat{B}\cdot\cot\widehat{C}$, concluímos que:

$$\cos a = \cot \widehat{C} \cdot \cot \widehat{B}.$$

Solução (79) - $\cos \widehat{C} = \cos c \cdot \sin \widehat{B}$.

Multiplicando (72) e (74),

$$\sin b \cdot \cos \widehat{C} \cdot \tan a = \tan b \cdot \sin \widehat{B} \cdot \sin a \Longleftrightarrow \cos \widehat{C} = \frac{\tan b \cdot \sin \widehat{B} \cdot \sin a}{\sin b \cdot \tan a}.$$

Substituindo $\tan b = \frac{\sin b}{\cos b}$ e $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$, e fazendo algumas simplificações, obtemos:

$$\cos \widehat{C} = \frac{\cos a}{\cos b} \cdot \sin \widehat{B}.$$

Usando (73), concluímos que:

$$\cos \widehat{C} = \cos c \cdot \sin \widehat{B}.$$

Solução (80) - $\cos \widehat{B} = \cos b \cdot \sin \widehat{C}$.

A prova é análoga a (79), bastando multiplicar (71) e (75), e concluir que:

$$\cos \widehat{B} = \cos b \cdot \sin \widehat{C}.$$

8 CONCLUSÕES

Neste trabalho fizemos um estudo introdutório sobre trigonometria na superfície de uma esfera de raio qualquer. Deduzimos a lei dos cossenos e dos senos para triângulos esféricos. Em particular, analisamos as propriedades de triângulos esféricos retângulos.

Além disso, fizemos uma conexão com problemas de navegação, fuso horário e localização terrestre.

Por fim, utilizamos o software Geogebra para construir triângulos esféricos, bem como estudar e visualizar com mais clareza as propriedades desses objetos com mais facilidade.

Acreditamos que esse estudo pode ser incorporado no aprendizado dos alunos de ensino médio, uma que nessa nova era da pós-verdade exista muita gente que acredita que a Terra é de fato plana.

Além disso, durante a construção do trabalho, pude ter uma experiencia didática quando leciono geometria, uma vez que antes eu só tinha o conhecimento dos triângulos planos, assim sempre afirmando quando perguntando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180◦, e durante o andamento do trabalho pude mudar minhas perspectivas, podendo já no ensino fundamental básico aguçar a curiosidade dos alunos quando perguntado sobre a soma dos ângulos internos, comentando sobre outros triângulos, que quando construído em outras superfícies, observamos que o resultado da soma não é um valor fixo, podendo variar.

E, pensando no futuro, podemos usar este trabalho para um projeto interdisciplinar, juntamente com as áreas de geografia e física, construirmos com os alunos uma pesquisa sobre o estudo do globo terrestre, podendo expandir esse estudos para as esferas celestes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] EUCLIDES. Os elementos; tradução e introdução de Irineu Bicudo, São Paulo, Editora UNESP, 2009.

[2] COUTINHO, Lázaro. Trigonometria Esférica. A Matemática de Um Espaço Curvo, 1ª edição, Rio de Janeiro, Editora Interciência, 2015.

[3] AYRES JR., Frank. Trigonometria plana e esférica/ Frank Ayres Jr.; tradução: Mário Pinto Guedes. Coleção Shaum, LT Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, RJ,1962.

[4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO,José Nicolau. Fundamentos da Matemática Elementar 9:geometria plana, 8ª edição, São Paulo, Atual Editora, 2005.

[5] DOLCE, Osvaldo; POMPEO,José Nicolau. Fundamentos da Matemática Elementar 3:trigonometria, 8ª edição, São Paulo, Atual Editora, 2005.

[6] DOLCE, Osvaldo; POMPEO,José Nicolau. Fundamentos da Matemática Elementar 10:geometria espacial, 8ª edição, São Paulo, Atual Editora, 2005.

[7] GEOGEBRA. O que é o geogebra. [S.L]: [2009.a], Disponível em <http://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 10 dez .2021

[8] REVISTA BRASILEIRA DE ENSINO DE FÍSICA, vol. 23, nº2. Junho, 2001.

[9] DERIVANDO A MATEMÁTICA. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/ apmat/a-primeira-medicao-do-raio-da-terra/>. Acesso em: 10 de jul. de 2021.