UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GERALDO CAETANO DE SOUZA FILHO

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE DERIVADAS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO

GERALDO CAETANO DE SOUZA FILHO

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE DERIVADAS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito da obtenção do título de Mestre através do Programa Nacional de Mestrado Profissional em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Beto Rober Bautista Saavedra.

JUAZEIRO - BAHIA

JULHO/2013

	Souza Filho, Geraldo C. de
S719p	Uma proposta para o ensino de derivadas de funções polinomiais no ensino médio / Geraldo Caetano de Souza Filho. – Juazeiro, 2013.
	xxiii; 83f. : il. ; 29cm.
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,) – Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2013
	Orientador: Prof. Dr. Beto Rober Bautista Saavedra. Inclui referências
	1. Ensino de derivadas. 2. Funções polinomiais. 3. Ensino Médio. I. Título. II. Saavedra, Beto Rober Bautista. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco
	CDD 515.13

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

PROFMAT

Uma Proposta para o Ensino de Derivada de funções Polinomiais no Ensino Médio

Por

Geraldo Caetano de Souza Filho

Dissertação aprovada em 16 de agosto de 2103

Aníbal Livramento da Silva Netto

Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto
Examinador Interno- UNIVASF

Prof Dr. Vagson Luiz de Carvalho Santos
Examinador Externo- IFBAIANO

Prof. Dr. Beto Rober Bautista Saavedra
Orientador- UNIVASF

Juazeiro 2013

"Não existe testemunha tão terrível, nem acusador tão implacável quanto a consciência que mora no coração de cada homem."

Políbio

Ao meu amado filho, Maurício Eduardo de Souza Soares.

Agradecimentos

A Deus, pela minha existência e permanência em vida com saúde, alegria e entusiasmo para sempre seguir em frente.

A minha mãe, exemplo de vida e de mulher, pelos princípios e valores inseridos em meu ser, e pela vitória obtida diante dos obstáculos encontrados durante essa jornada.

Aos meus irmãos, Aldaisa Barbosa e Gennari Caetano, por compartilhar diversos sentimentos familiares no nosso dia-a-dia.

A Marcos Aurélio, pela compreensão, paciência, incentivo, carinho e amor durante os diversos momentos de divisão entre a minha vida acadêmica e a nossa vida pessoal.

Aos meus amigos pelo incentivo e auxílio durante o período de jornada acadêmica.

Ao professor Beto Rober Bautista Saavedra, cuja orientação foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho. Sua paciência, sabedoria e direcionamento nortearam o meu pensamento inúmeras vezes.

A SBM e IMPA por proporcionar um programa de mestrado voltado para as necessidades da Educação Básica.

A Universidade do Vale do São Francisco por promover o Programa de Mestrado Profissionalizante em Matemática em seu espaço físico.

Aos professores pelos ensinamentos durante o período no qual fizemo-nos presentes.

À coordenação do PROFMAT, em nome do professor Severino Cirino, pelas orientações e incentivos dados.

Aos meus colegas, pela colaboração na minha aquisição de novos conhecimentos, e pelo compartilhamento de experiências.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Resumo

O ensino do Cálculo é proposto atualmente por diversos livros didáticos do Ensino Médio. No entanto é incomum, na maioria das escolas, aulas de matemática abordando conteúdos como limites e derivadas. O presente trabalho consiste numa proposta a ser desenvolvida pelos professores em relação ao ensino de derivadas de funções representadas por polinômios, também denominadas funções polinomiais, na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio, enfatizando ideias como a inclinação de retas tangentes e abordando problemas práticos cuja resolução se faz por meio de derivação.

Abstract

The teaching of calculus is currently proposed by many high school textbooks. However it is unusual, in most schools, math classes covering contents as limits and derivatives. This work is a proposal concerning the teaching of differentiation of polynomial functions in Secondary School, most specifically in High School, emphasizing ideas like slope of tangent lines and addressing practical problems whose solution is through the differentiation.

Introdução

A Educação no Brasil vem mudando, principalmente nas últimas décadas. Podemos demonstrar a existência dessas alterações através da criação das Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei 9394/96), dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), das resoluções e pareceres do Conselho Nacional de Educação (CNE). A L.D.B. disciplina a educação escolar desenvolvida, em sua maioria, por meio do ensino, em instituições peculiares, os PCN estabelecem diretrizes para estruturação e reestruturação dos currículos escolares no Brasil e o CNE, órgão ligado ao Ministério da Educação, aprimora e consolida a Educação Nacional, garantindo a participação da sociedade.

O Ensino Médio, componente da Educação Básica em sua etapa final, tem como duas de suas finalidades “a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores” e “a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina” (LDB, 1996). Nessa etapa de estudo, em que já se pode considerar o aluno com uma maior maturidade, os objetivos educacionais podem atingir uma maior ambição formativa, seja em termos relacionados às informações tratadas, aos procedimentos e atitudes envolvidas, seja em termos das competências, habilidades e dos valores desenvolvidos (PCN, 2000, p.6).

No que tange ao ensino da matemática, conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, ao final desse nível de ensino, espera-se que os alunos compreendam a utilização da Matemática na resolução de problemas práticos do cotidiano; modelem fenômenos em outras áreas do conhecimento; entendam que a Matemática é uma ciência com características peculiares, organizada por teoremas e demonstrações; entendam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam dar apreço a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p.69)

Em se tratando de avanço científico e tecnológico, consideremos de grande importância o ensino do cálculo na Educação Básica. Muitos autores destacam essa importância:

> [...] Ao contrario do que se pensa em geral, pode-se afirmar que parte significativa dos problemas de aprendizagem "do atual" ensino de Cálculo esta "fora" dele e é "anterior" inclusive ao seu tempo de execução. Não se trata apenas da tão propalada "falta de base" dos estudantes, como afirma a grande maioria dos nossos colegas professores. [...] Assim, ao invés de se fazer menção a uma "falta de base" dos estudantes, o que se precisa fazer, de fato, e estabelecer os conceitos básicos e necessários para se aprender as ideias básicas do Cálculo. [...] (Rezende, 2003, p. 31)

> Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básica do cálculo e suas aplicações Ávila (1991, p. 8)

Diante do exposto, e com base nessa última citação, surgiu o interesse em pesquisar sobre o ensino de derivadas de funções no ensino médio. Alguns livros didáticos (por exemplo, Guelli, 2003; Machado, A.S.,1991; Iezzi, G., Murakami, C. & Machado, N.J. 2002), utilizados na terceira série do Ensino Médio, possuem alguns capítulos que tratam do assunto. A sequência de apresentação do conteúdo é iniciada pelo estudo de limite, taxa de variação média e taxa de variação instantânea. Essa é a maneira mais formal para definição de derivada.

Mas estudar derivada requer necessariamente o estudo de funções. No ensino médio diversas funções são estudadas, tais como função afim, quadrática, exponencial, logarítmica, entre outras. E as representações gráficas dessas funções são fundamentais para a compreensão da derivada.

> A capacidade de analisar e interpretar gráficos é muito importante em qualquer domínio científico. E, portanto, necessário levar os estudantes a compreensão desse tema. Esta foi uma das conclusões do grupo que discutiu o ensino de Matemática para as Biociências (Medicina e Biologia, incluindo Física e Química) na 1ª reunião de Didática da matemática do Cone Sul, realizada em Montevidéu, em abril de 1992. Nessa ocasião, os professores do 2º grau presentes reivindicaram de seus colegas, professores universitários, material didático adequado as aplicações da

> Matemática as outras ciências. Estes são analisados com ênfase na identificação e interpretação dos pontos críticos. Seu conteúdo pode ser explorado no 2º grau com o auxílio das noções intuitivas de evolução contínua, velocidade e aceleração, que fazem parte do cotidiano do aluno (Carneiro, 1992, p. 32).

Com base no que foi citado, e na experiência com alunos do ensino médio, interessamo-nos em destacar as funções denominadas polinomiais e, a partir delas, promovermos estudos sobre os processos de derivação, enfatizando a representação gráfica, e utilizando situações do cotidiano imprescindíveis na compreensão da temática abordada.

> Resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da divida externa etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de variações de outras grandezas, interpretações de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamentos domésticos etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade (Rezende, 2003 p.37).

Este trabalho consiste em uma proposta para o ensino de derivadas de funções polinomiais, destinado aos educandos do ensino médio, cujo objetivo principal é promover o cálculo da derivada de uma função polinomial, obtido de maneira diferente do que se apresenta nos livros didáticos. Pretendemos ainda associar a derivada ao estudo de funções denominadas poligonais, caracterizar os valores extremos de uma função e elucidar situações-problemas cuja resolução necessita do conhecimento de derivadas e de valores extremos.

Nessa perspectiva, também buscamos melhorar o desempenho dos alunos em disciplinas iniciais de Cálculo no Ensino Superior, pois compreendemos a importância da apresentação de conteúdos do cálculo no Ensino Médio como embasamento para segmentos de ensino mais avançados, que por sua vez trabalham esses conteúdos com maior aprofundamento e enfoque voltado às áreas em estudo

> De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, alem de ser um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, e, sem duvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Calculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do "esconderijo forcado" a que este esta submetido no ensino básico e, sem duvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo.[...] (Rezende, 2003, p 402.Grifos do autor.)

A sequência de apresentação desse trabalho foi definida a partir da perspectiva de ensinar derivada. Portanto, a primeira etapa consiste da definição de derivada alicerçada por diversos elementos, tais como reta, equação reduzida da reta, função, função afim, função polinomial, função poligonal, valores extremos, reta tangente a uma curva e determinação da derivada. Muitos conceitos e definições serão utilizados nas etapas posteriores. A segunda etapa traz a derivada de funções representadas por polinômios, denominada função polinomial. Funções afim, constante e quadrática são utilizadas como suporte para determinação da derivada, com posterior generalização para quaisquer funções polinomiais. Sequencialmente apresentamos a utilização das funções poligonais para melhor compreensão do estudo da derivada de funções polinomiais e determinamos os valores extremos por processos de derivação. E por fim, na última etapa, utilizamos situações-problema cujas resoluções são desenvolvidas pelos conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores.

Em relação aos conteúdos matemáticos descritos nos capítulos, utilizamos diversos autores, mesclando informações obtidas nos materiais descritos nas referências bibliográficas. Optamos por não citá-los a todo momento no texto, em virtude de uma melhor plasticidade de leitura deste trabalho.

Capítulo 2

Determinação da derivada de uma função.

2.1 Reta

Para representar uma reta no plano cartesiano é necessária e suficiente uma das condições descritas abaixo:

1°) Dois pontos distintos pertencentes a reta devem ser conhecidos (Uma única reta passa por eles).

2°) Um ponto da reta e sua direção devem ser conhecidos (o ângulo (α) formado pela reta e pelo eixo das abscissas).

Veja:

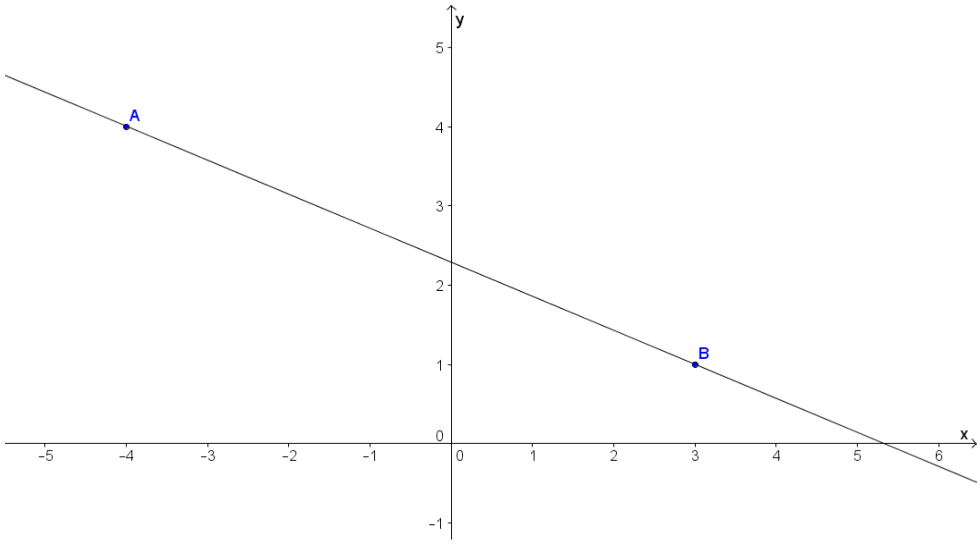

Figura 1 - Representação gráfica da reta r utilizando os pontos A e B.

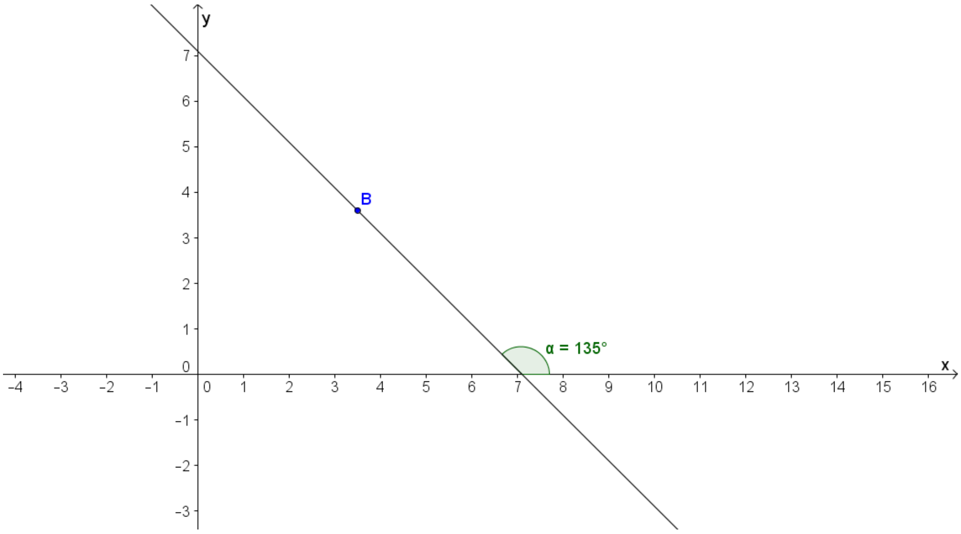

Figura 2 - Representação gráfica da reta r utilizando o ponto B e o ângulo (α) formado pela reta e o eixo das abscissas.

A reta é representada por uma equação com formas distintas de apresentação. Dentre as formas existentes, estamos interessados na forma reduzida da reta para o propósito deste trabalho.

2.2 Equação reduzida da reta

Seja r uma reta que forma o ângulo α com o eixo das abscissas, intersectando o eixo das coordenadas no ponto $B=(0,b)$, e um ponto qualquer $A=(x,y)$ da reta.

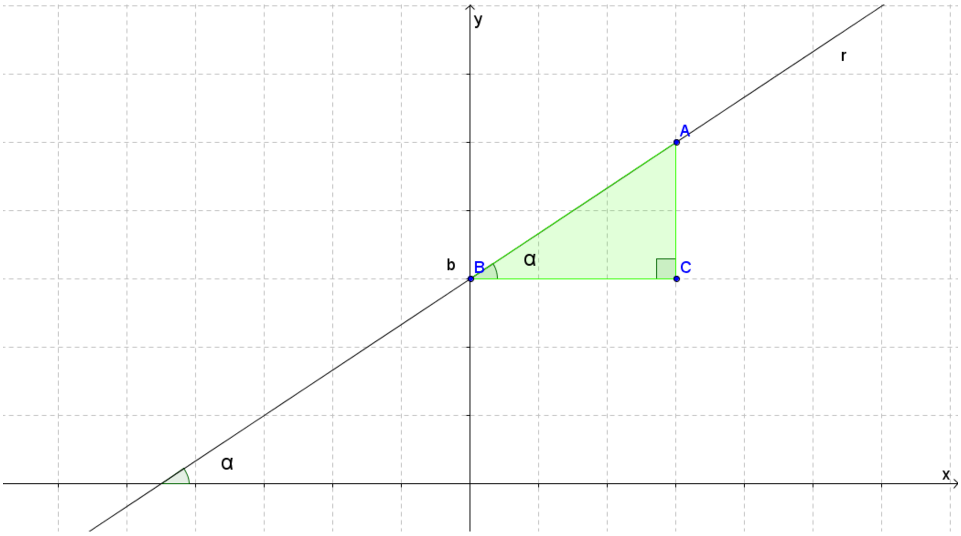

Figura 3 - Representação gráfica de uma reta r determinada pelos pontos A, B e pelo ângulo α.

Vamos determinar a forma reduzida desta reta r. Pelo triângulo ABC, retângulo em C, temos:

$$tg\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

Sendo $\text{tg}\alpha = a$:

$$tg\alpha = a = \frac{y-b}{x} \Rightarrow ax = y-b \Leftrightarrow y = ax+b$$

Segue-se que a equação

$$y = ax+b$$

representa a reta r. Em símbolos, escrevemos:

$$r : y = ax+b$$

Essa expressão é denominada **equação reduzida** da reta r, onde $a, b \in \text{IR}$, considerando que:

- a é a tangente do ângulo α formado entre a reta r e o eixo das abscissas, com sentido positivo, cuja nomenclatura é **o coeficiente angular** da reta r, ou, **a inclinação** da reta, em relação ao eixo x;

- b corresponde a ordenada do ponto de interseção entre o eixo y e a reta r, sendo denominado **coeficiente linear** da reta r.

- x e y são as coordenadas do ponto A pertencente à reta r, sendo A genérico.

Resta analisar o caso em que são dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ distintos e queremos determinar a equação reduzida que passa por esses pontos.

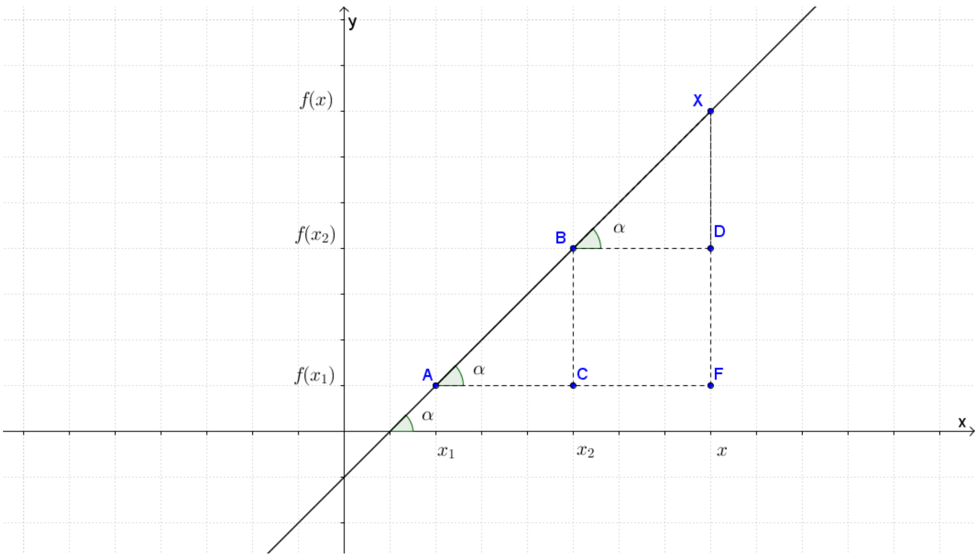

Figura 4 - Representação gráfica da reta r a partir dos pontos A, B, X e do ângulo α.

A semelhança de triângulos nos permite determinar o coeficiente angular que é dado por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Necessitamos também determinar o coeficiente linear (b). De acordo com a equação reduzida da reta temos:

$$r_1 : y_1 = ax_1 + b \text{ e } r_2 : y_2 = ax_2 + b$$

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, obtemos:

$$y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2 \Rightarrow ax_2 - ax_1 = y_2 - y_1 \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

O coeficiente linear (b) é:

$$b = y_1 - ax_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 = \frac{x_2y_1 - x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

2.3 Função

Dados dois conjuntos quaisquer A, B, uma função $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ (lê-se: função de A em B) é uma regra que determina como corresponder a cada elemento $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ um elemento $y = f(x) \in B$.

Uma função $f : A \to B$ é composta de três elementos:

a) *Domínio* – Conjunto onde a função é definida (conjunto A);

b) *Contradomínio* – Conjunto onde a função assume valores (conjunto B);

c) Regra de associação ou lei de correspondência - Sua determinação consiste em associar a cada elemento $x \in \mathrm{A}$ um único elemento $f(x) \in B$, sendo esse elemento denominado *imagem* de x pela função f.

O uso da notação $x \to f(x)$ significa que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

De acordo com a regra estabelecida será obtido $f(x) \in B$ a partir de qualquer $x \in \mathrm{A}$, com duas condições:

1°) Não há exceções: sempre existirá $f(x)$ para todo $x \in \mathrm{A}$;

2°) Não há incerteza: a cada $x \in \mathrm{A}$ sempre haverá um *único* $f(x) \in B$.

2.4 Função crescente e função decrescente.

Sejam f a função $f:A \to IR$, com $A \subset IR$, e $x_1, x_2 \in A$. A função f é:

- crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

- decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

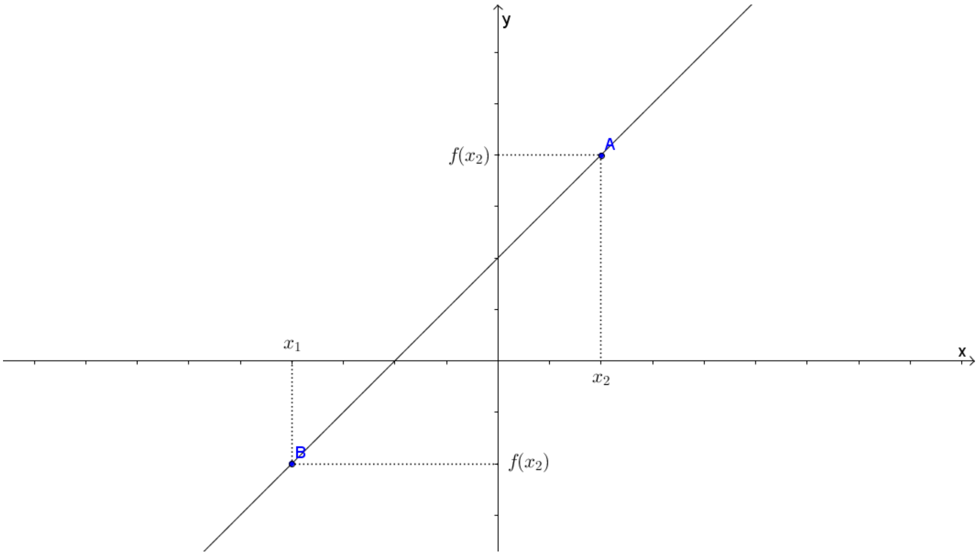

Figura 5 - Representação gráfica de uma função linear crescente.

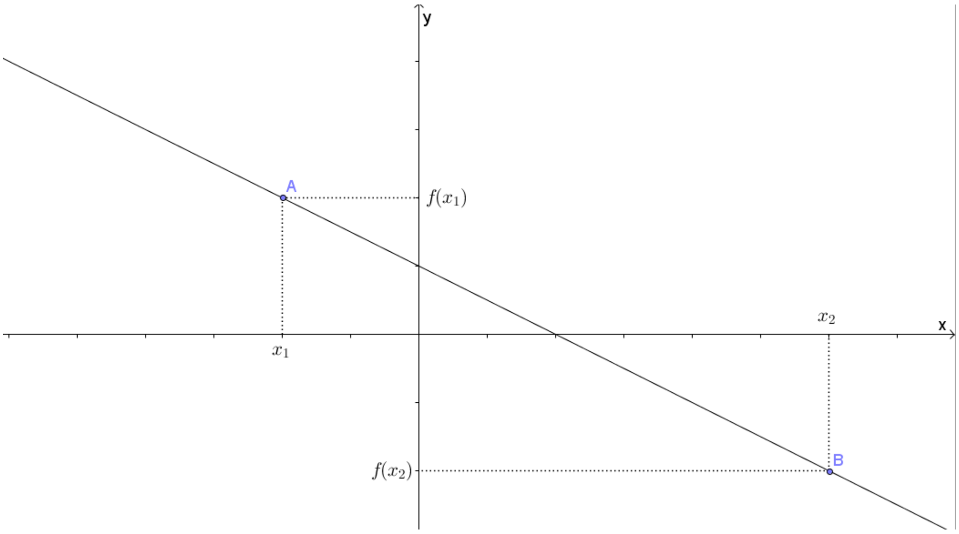

Figura 6 - Representação gráfica de uma função linear decrescente.

- crescente em um intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I.

- decrescente em um intervalo I se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I.

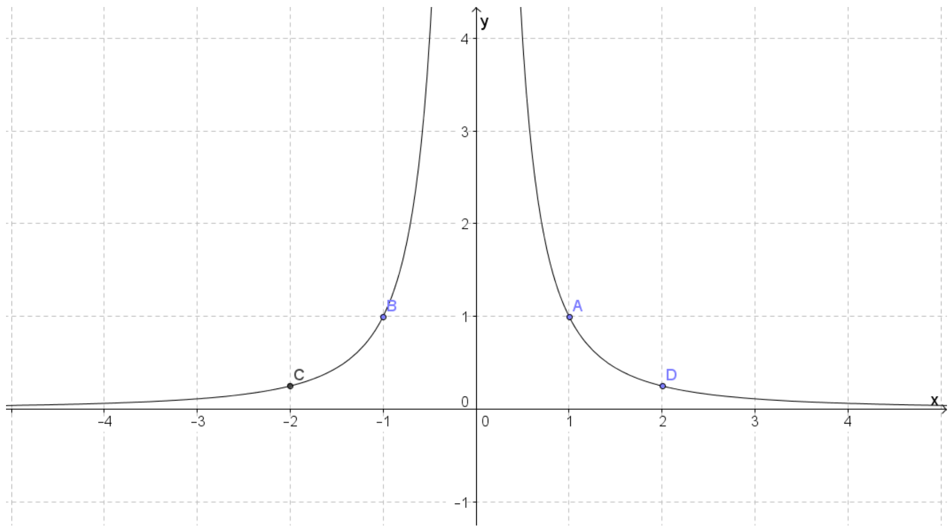

Figura 7 - Representação gráfica de uma função f crescente e decrescente.

A Figura 7 mostra que a função é crescente no intervalo $(-\infty;0]$ e decrescente no intervalo $[0;+\infty)$.

2.5 Valores Máximo e Mínimo de uma função

Uma função f tem:

a) **Máximo absoluto** em um número c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f (D_f), onde $f(c)$ é denominado **valor máximo absoluto** de f em D_f.

b) **Mínimo absoluto** em um número c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D_f, onde $f(c)$ é denominado **valor mínimo absoluto** de f em D_f.

c) **Máximo local** em um número c se $f(c) \geq f(x)$ quando *x* estiver próximo de c, e $f(c)$ é denominado **valor máximo local** de f em D_f.

d) **Mínimo local** em um número c se $f(c) \leq f(x)$ quando *x* estiver próximo de c, e $f(c)$ é denominado **valor mínimo local** de f em D_f.

O valor $f(c)$ dos casos anteriores é denominado **valor extremo**, podendo ser **extremo absoluto** ou **local**.

Ilustremos abaixo estes conceitos.

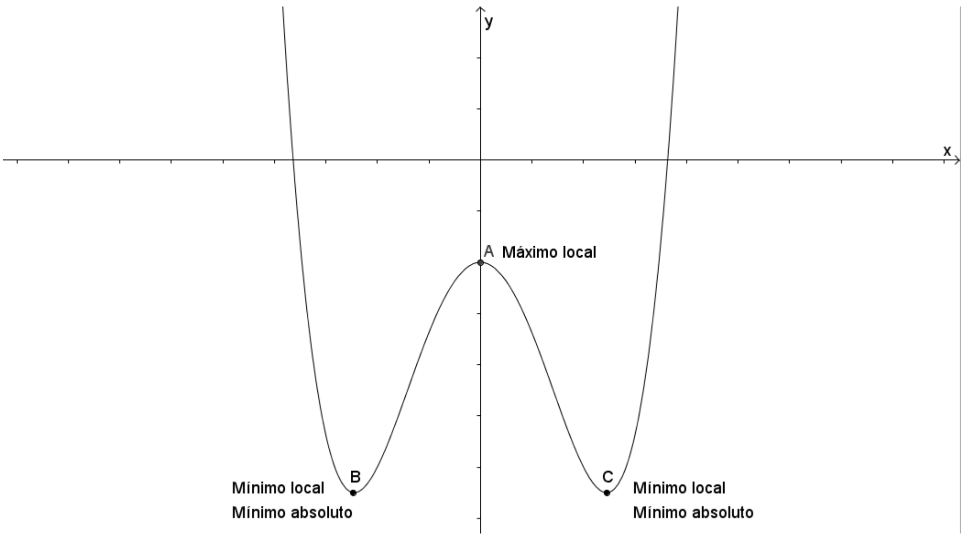

Figura 8 - Gráfico de uma função contendo valores extremos.

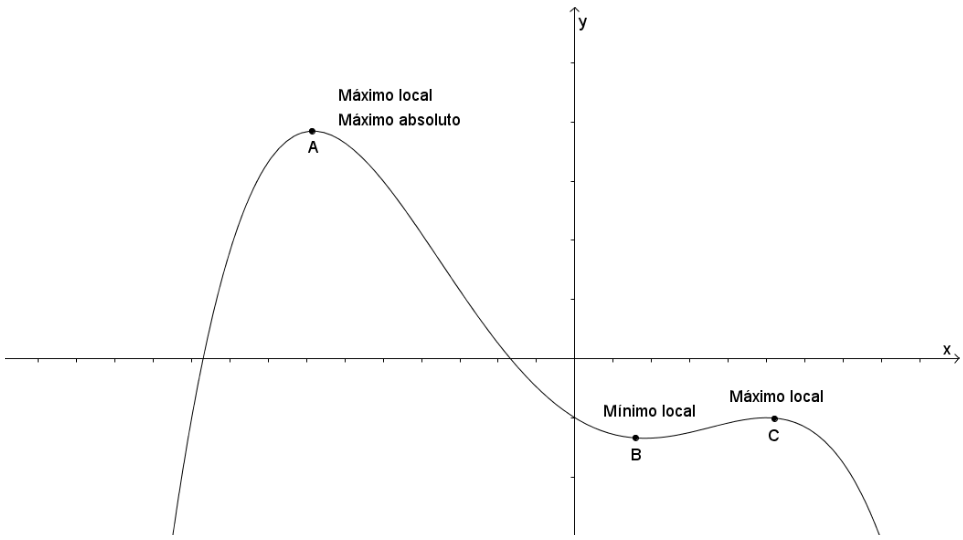

Figura 9 - Gráfico de uma função contendo valores extremos.

Sejam $A=(a,f(a)), B=(b,f(b)), C=(c,f(c))$ pontos referentes aos gráficos das Figuras 8 e 9 os quais contém valores extremos. Na figura 8, o valor $f(a)$ é descrito apenas como máximo local, já que existem outros valores da imagem da função ($f(x)$) maiores que. Os pontos B e C exprimem tanto o mínimo local quanto o mínimo absoluto, representado por $f(b)$ e $f(c)$, que por sua vez são iguais. Na figura 9, $f(a)$ e $f(c)$ são máximos locais, e o primeiro destes também é máximo absoluto, pois corresponde ao maior valor da imagem de f em todo o seu domínio. Já $f(b)$ é mínimo local, apenas, por existir $f(x) < f(b)$.

2.6 Função Afim

Denominamos de função afim toda função $f{:}IR \to IR$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a,b \in \mathrm{IR}$.

Sejam x_1 e x_2 dois valores distintos do domínio da função afim, ou seja, $x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2$. Em consequência teremos:

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

e

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

Ainda podemos escrever:

$$f(x_1) - ax_1 = b$$

e

$$f(x_2) - ax_2 = b$$

Por fim:

$$f(x_1) - ax_1 = f(x_2) - ax_2$$
$$ax_2 - ax_1 = f(x_2) - f(x_1)$$
$$a(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

O número a é denominado taxa de variação, podendo ser representado da seguinte maneira:

$$a = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

A função afim crescente possui uma taxa de variação positiva ($a > 0$), enquanto a função afim decrescente tem taxa de variação negativa ($a < 0$).

A representação geométrica no plano cartesiano da função afim é uma reta. Observe a relação algébrica:

Equação da reta: $y = ax + b$

Função afim: $f(x) = ax + b$

Assim pode-se dizer que o significado geométrico do coeficiente a é o de **coeficiente angular da reta** a qual representa o gráfico da função afim.

2.7 Gráfico da função afim e crescimento/decrescimento de funções.

Uma função afim $f(x) = ax + b$ pode apresentar três representações gráficas distintas.

1ª) Se a função afim é crescente, a reta que a representa graficamente tem coeficiente angular positivo, ou seja, $a > 0$, pois o ângulo de inclinação é menor que 90° (ângulo medido no sentido anti-horário a partir do eixo x). Veja figura:

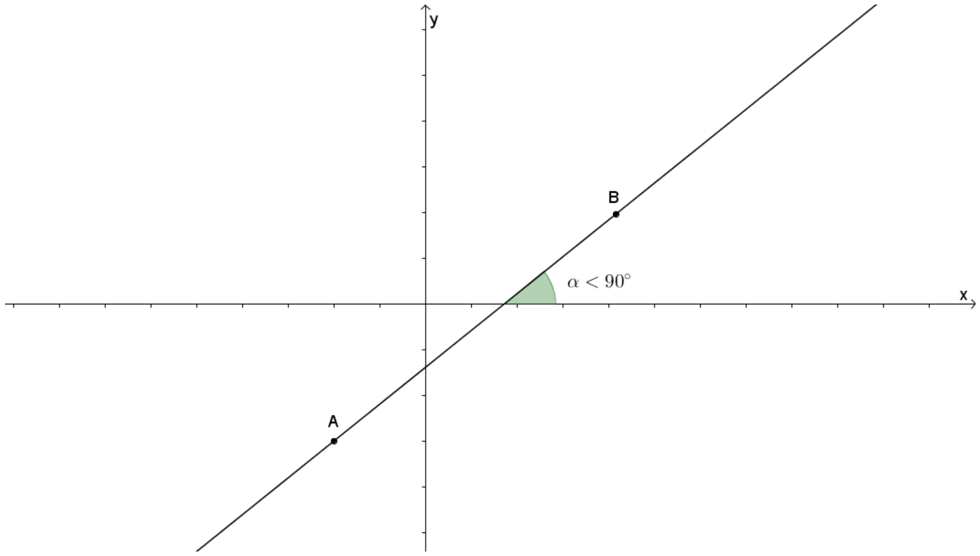

Figura 10 - Gráfico de uma função afim crescente.

2ª) Se a função afim é decrescente, graficamente temos uma reta, que a representa, cujo coeficiente angular será negativo, ou seja, $a < 0$, porque o ângulo de inclinação é maior que 90°. Veja figura:

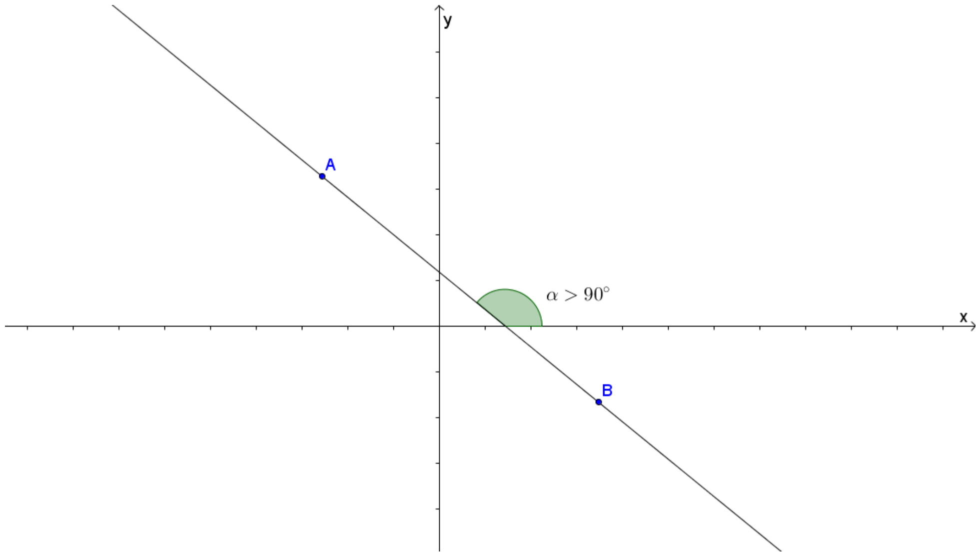

Figura 11 - Gráfico de uma função afim decrescente.

3ª) A função afim que não é crescente, nem decrescente é denominada função constante, pois a imagem da função consiste de um único valor. Neste caso seu gráfico é uma reta com coeficiente angular nulo ($a = 0$), isto é, uma reta paralela ao eixo das abscissas. Veja:

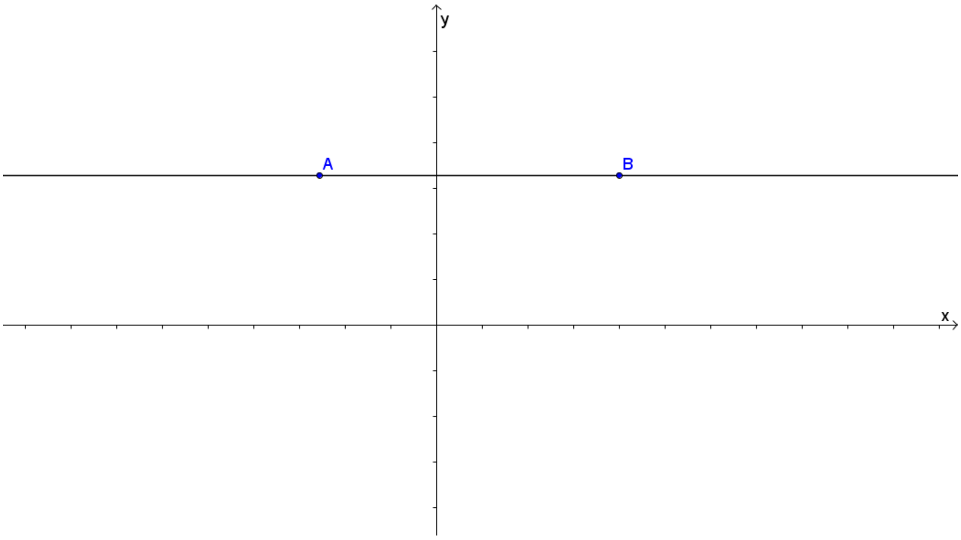

Figura 12 - Gráfico de uma função constante.

2.8 Função definida por polinômios (função polinomial).

Uma função f é denominada função polinomial se

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde n é um número inteiro positivo, e os números $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são constantes chamadas coeficientes do polinômio. Qualquer função determinada por um polinômio possui como domínio o conjunto IR.

Como exemplos podemos citar as funções:

- Afim:

Forma geral: $f(x) = a_1 x + a_0$

Forma particular: $f(x) = 3x + 7$

- Quadrática:

Forma geral: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Forma particular: $f(x) = x^2 - 5x + 6$

- Cúbica:

Forma geral: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Forma particular: $f(x) = -2x^3 - \frac{5}{3}x^2$

2. 9 Funções Poligonais.

Dizemos que $f : IR \to IR$ é uma função poligonal quando existem $t_0 < t_1 < ... < t_n$ tais que para $x \le t_0$, para $x \ge t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, f coincide com uma função afim f_i. Devemos ter $f_i(t_i) = f_{i-1}(t_{i-1})$.

Uma função $f : IR \to IR$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal.

Vamos exemplificar algumas funções poligonais.

Exemplo 1:

Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x \ se \ x \le 0 \\ x \ se \ x > 0 \end{cases}$$

O gráfico de f é:

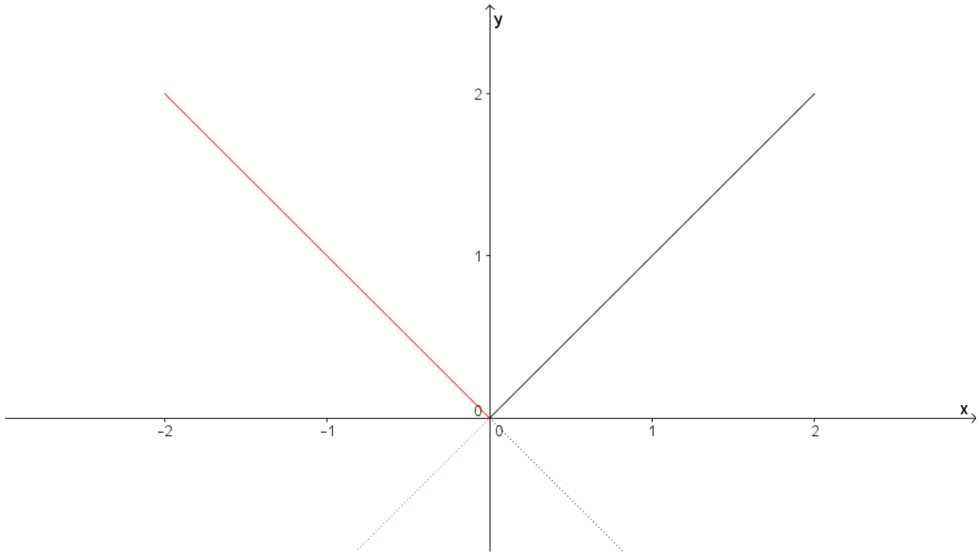

Figura 13 - Gráfico da função poligonal f .

Exemplo 2:

Seja g a função definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -x-1 \; se \; x \leq -1 \\ x+1 \; se \; x > -1 \end{cases}$$

O gráfico de g é:

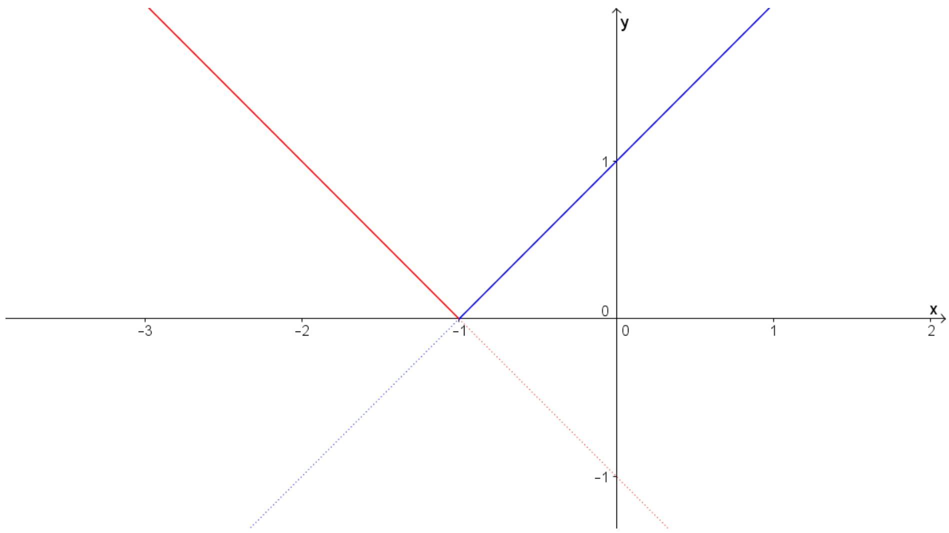

Figura 14 - Gráfico da função polinomial g.

Exemplo 3:

Seja h a função definida por :

$$h(x) = |x-1| + |x+3|$$

O gráfico de h é:

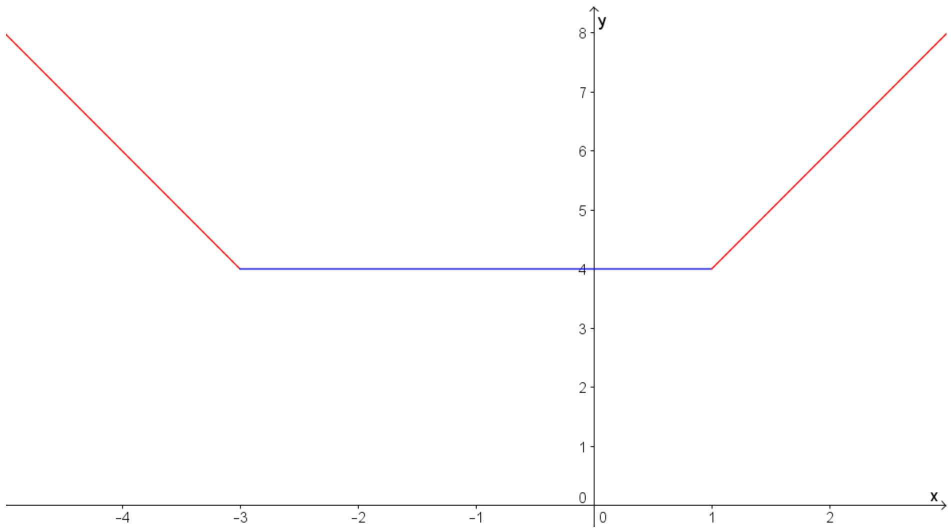

Figura 15 - Gráfico da função polinomial h.

2. 10 Reta Tangente a uma Curva em um Ponto Fixo.

Seja C o gráfico (Figura 16) da função $y = f(x)$. Fixamos em C um ponto $P(x_1, f(x_1))$, consideramos um ponto vizinho $Q(x, f(x))$, onde $x \neq x_1$, e calculamos o coeficiente angular da reta secante PQ, definido pela tangente do ângulo β, representado por m_{PQ}:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (1)$$

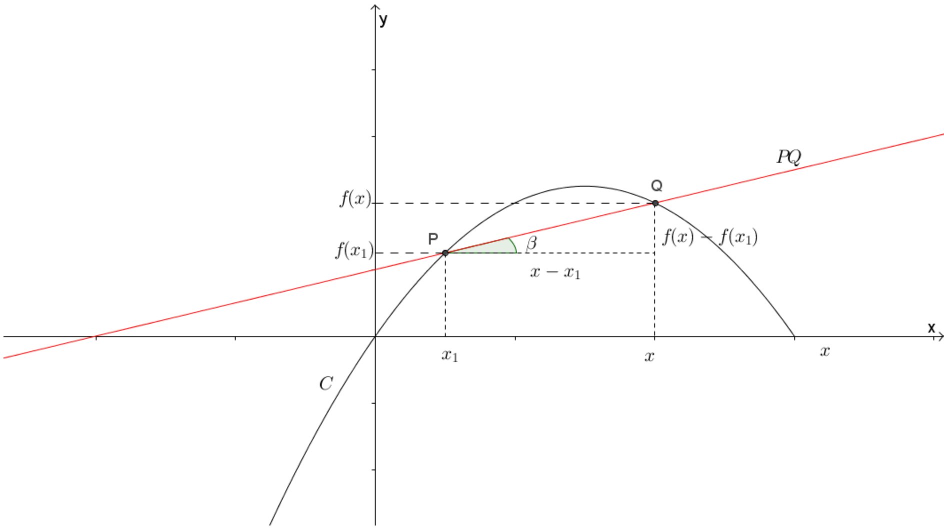

Figura 16 - Gráfico contendo a reta secante PQ e a curva C.

Para aproximar Q ao ponto P ao longo da curva C fazemos x tender à x_1 $(x \to x_1)$. Essa aproximação pode ocorrer tanto à esquerda quanto à direita de P, resultando numa família de retas secantes cujo coeficiente angular é determinado pela equação (1).

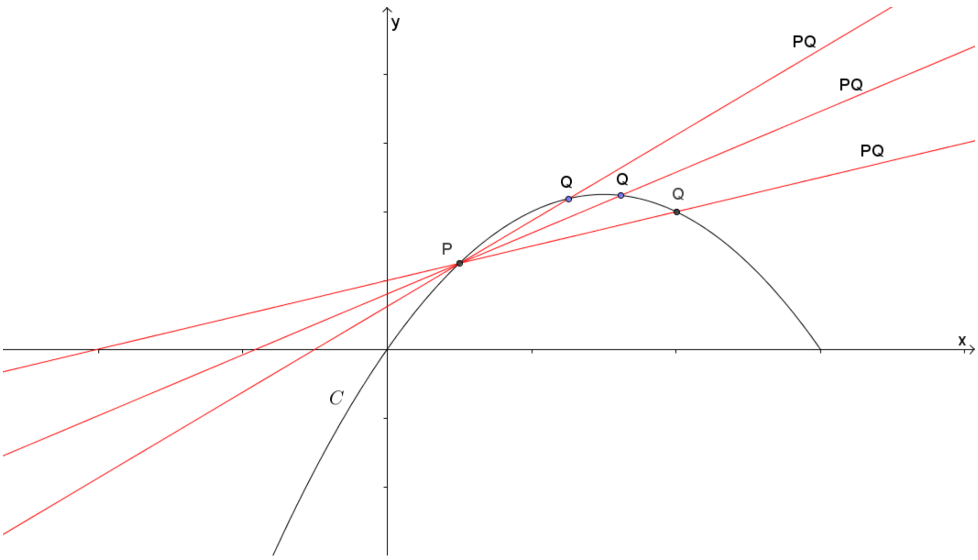

Figura 17 - Gráfico contendo várias retas secantes PQ em relação à curva C; Q aproximando-se pela direita de P.

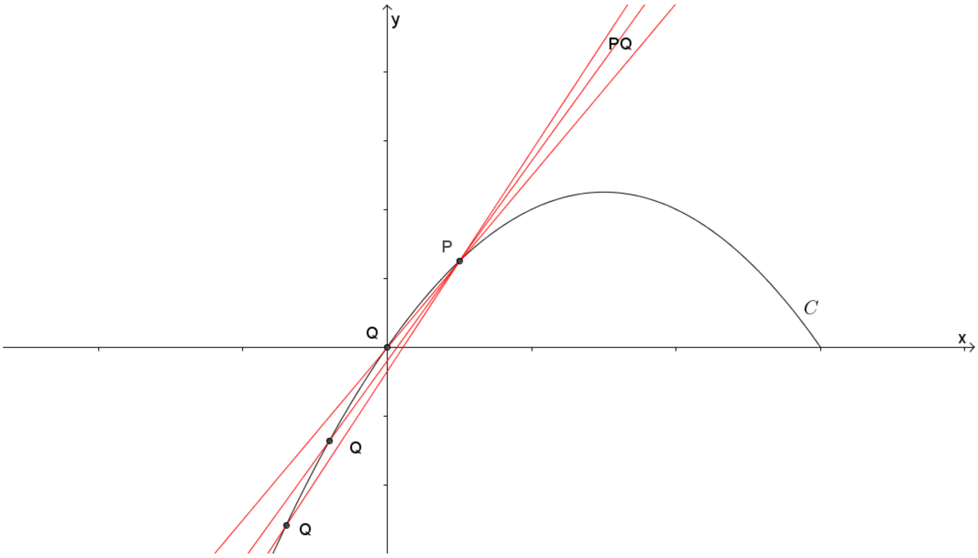

Figura 18 - Gráfico contendo várias retas secantes PQ em relação à curva C; Q aproximando-se pela direita de P.

Todas essas retas secantes se aproximam a única reta. Tal reta chamamos de **reta tangente** t à curva C no ponto P. Nesse caso, os coeficientes angulares m_{PQ} se aproximam a um numero real m. Denotamos isto como:

$$m_{PQ} \to m \text{, se } x \to x_1$$

Assim a reta tangente t à curva C no ponto P terá coeficiente angular m. Em notações:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \to m, \ se \ x \to x_1 \qquad (2)$$

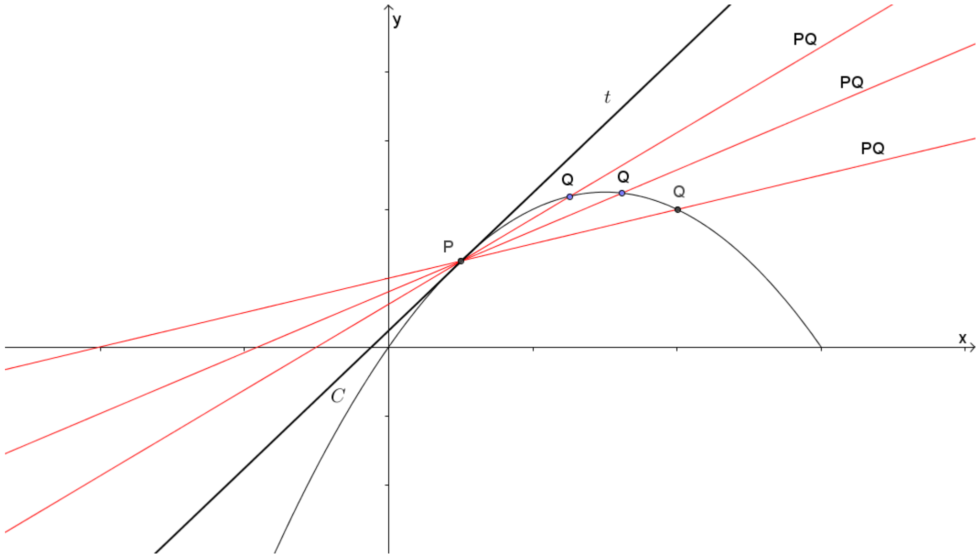

Figura 19 - Gráfico contendo a reta tangente t obtida pelo deslocamento do ponto Q em direção ao ponto P, em relação à curva C.

Denotaremos o coeficiente angular da reta tangente à curva de $y = f(x)$ que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ por $m = f'(x_1)$. O valor $f'(x_1)$ é denominado derivada de f em x_1. A equação reduzida da reta tangente t será:

$$y = f'(x_1)x + [f(x_1) - f'(x_1)x_1]$$

A derivada de f, denotada por f', é a função cujo valor em x é $f'(x)$.

Quando $f'(x)$ existe para todo $x \in D_{f'}$, podemos dizer que a função $f(x)$ é derivável em todo o seu domínio.

A derivada de f em x_1 é única, pois o coeficiente angular da reta que a representa possui um único valor. Como foi dito, a reta é tangente a uma curva em um ponto fixo.

Nem toda função é derivável em todo o seu domínio. Seja r a função definida por $r(x) = |x|$. Essa função, denominada função modular, pode ser definida da seguinte maneira:

$$r(x) = \begin{cases} -x, \ se \ x \leq 0. \\ x, \ se \ x > 0. \end{cases}$$

A função r é uma função poligonal, cujo gráfico corresponde a uma linha poligonal.

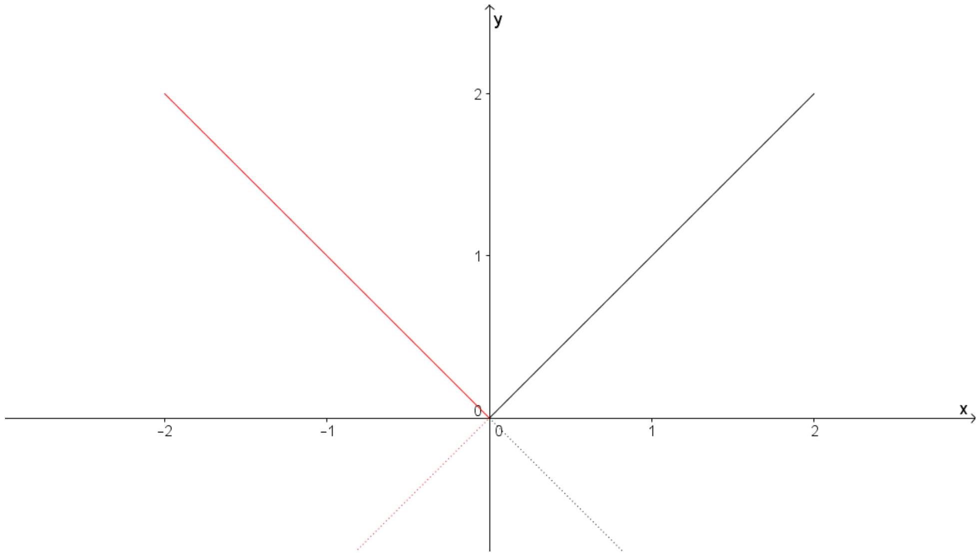

Figura 20 - Gráfico da função |x|.

Se o ponto $X(x, r(x))$ se aproxima à esquerda do ponto $O(0{,}0)$, a reta secante obtida, que passa por esses pontos, terá sempre coeficiente angular igual a -1. Veja:

$$m_{xo} = \frac{r(x) - r(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1.$$

Se o ponto $X(x, r(x))$ se aproxima à direita do ponto $O(0{,}0)$, a reta secante que os contém terá sempre coeficiente angular igual a 1. Veja:

$$m_{xo} = \frac{r(x) - r(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1.$$

Isso significa dizer que a reta tangente ao gráfico de r no ponto $O(0{,}0)$ terá dois coeficientes angulares: -1 e 1. Temos uma incoerência. Portanto, concluímos que não há derivada da função $r(x)$ quando $x = 0$. No entanto, existe derivada para os demais valores de x que fazem parte do domínio de r, pois fazendo $X(x, r(x))$ se aproximar de $P(x_1, r(x_1))$ teremos:

- Para $x_1 < 0$:

$$r'(x_1) = \frac{r(x)-r(x_1)}{x-x_1} = \frac{-x-(-x_1)}{x-x_1} = \frac{-(x-x_1)}{x-x_1} = -1.$$

- Para $x_1 > 0$:

$$r'(x_1) = \frac{r(x)-r(x_1)}{x-x_1} = \frac{x-x_1}{x-x_1} = 1.$$

Capítulo 3

Derivadas de funções polinomiais.

3.1 Derivadas de funções representadas por polinômios.

3.1.1 Função Afim

Seja f a função afim definida por $f(x)=\frac{1}{2}x-1$, de representação gráfica:

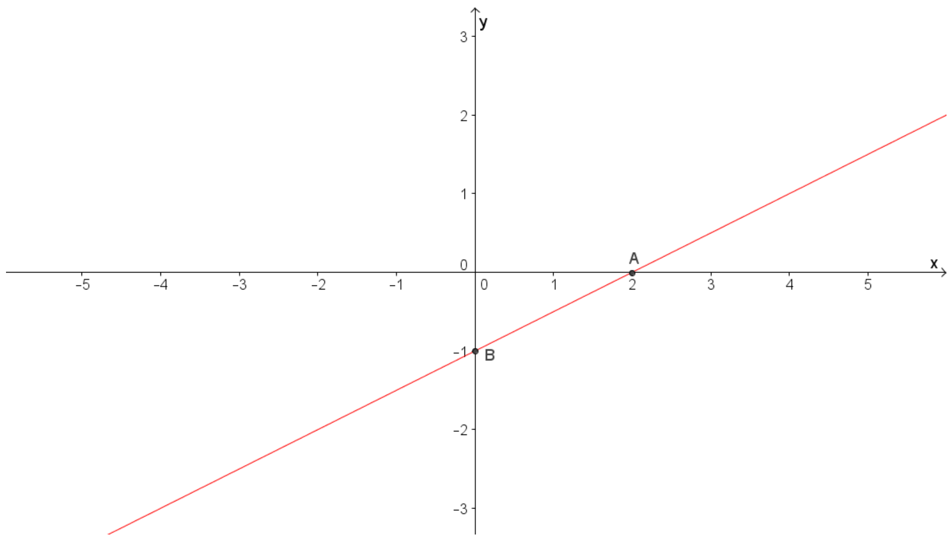

Figura 21 – Gráfico da função afim f(x) = 1/2x -1.

O coeficiente angular da reta que representa f é $\frac{1}{2}$.

O coeficiente angular das retas secantes para pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ distintos no intervalo [-2,2] é:

$$m_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, x_1 \neq x_2$$

Ponto P	Ponto Q	Coeficiente angular da reta secante PQ
(-2;-2)	**(-1;-3/2)**	**½**
(-1;-3/2)	**(0,-1)**	**½**
(0,-1)	**(1;-1/2)**	**½**
(1;-1/2)	**(2,0)**	**½**

Tabela 1 – Pontos P e Q, e coeficiente angular da reta secante PQ.

Fixando o ponto $P(x_1, f(x_1))$, e usando o ponto $Q(x_2, f(x_2))$ próximo a P, temos:

Ponto P	Ponto Q	Coeficiente angular da reta secante PQ
(0;-1)	**(-0,5;-1,25)**	**½**
(0;-1)	**(-0,1;-1,05)**	**½**
(0,-1)	**(0,01;-0,995)**	**½**
(0;-1)	**(0,001;-0,9995)**	**½**

Tabela 2 – Pontos P e Q, P fixo e Q móvel, e coeficiente angular da reta secante PQ.

A função é crescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) e o coeficiente angular da reta secante PQ é positivo ($m_{PQ} > 0$) e constante.

O coeficiente angular da reta secante PQ para quaisquer pontos P e Q distintos é:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2}x_2 - 1 - \left(\frac{1}{2}x_1 - 1\right)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 - 1 + 1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{2}(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}$$

Logo, $m_{PQ} = \frac{1}{2} > 0$.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f em um ponto $P(x_1, f(x_1))$ será $\frac{1}{2}$, pois:

$$m_{PQ} \to m, x \to x_1 \quad ,$$

e m_{PQ} é constante (e único!)

Então, a derivada da função $f(x)=\frac{1}{2}x-1$ no ponto $P(x_1, f(x_1))$ terá valor $\frac{1}{2}$, denotado por $f'(x_1)=\frac{1}{2}$.

Por conseguinte:

$$f'(x)=\frac{1}{2},\ \forall x \in D_f$$

Sejam $f(x)=ax+b, a,b \in IR$ uma função afim, $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x, f(x))$ pontos do plano cartesiano. Temos:

$$m_{PQ}=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{ax+b-(ax_1+b)}{x-x_1}=\frac{ax-ax_1}{x-x_1}=\frac{a(x-x_1)}{x-x_1}=a, x \neq x_1$$

Logo, a é o coeficiente angular da reta secante PQ.

O coeficiente angular da reta tangente à função afim f em qualquer ponto $P(x_1, f(x_1))$ é a, já que:

$$m_{PQ} \to m, \text{ quando } x \to x_1$$

ou seja, $m=a$.

A derivada da função f em $P(x_1, f(x_1))$ é:

$$f'(x_1)=a.$$

Logo, a derivada da função f é:

$$f'(x)=a$$

Conclusão:

O coeficiente da reta que tangencia o gráfico de qualquer função afim é obtido pela a derivada.

Função afim: $f(x) = ax + b$, para todo $x \in D_f$.

Derivada da função afim: $f'(x) = a$, para todo $x \in D_f$.

Coeficiente da reta tangente ao gráfico de f para todo $x \in D_f$ será $m = a$

3.1.2 Função constante.

Seja f a função constante definida por $f(x) = 5$, graficamente representada abaixo:

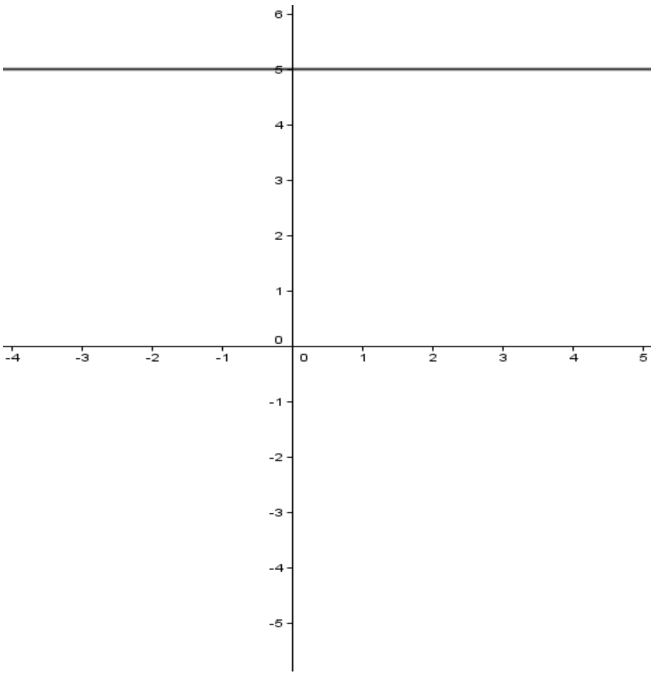

Figura 22 – Gráfico da função constante f(x)=5.

O coeficiente angular da reta que representa f é 0 (zero).

O coeficiente angular das retas secantes para pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ distintos no intervalo [-1,3] é:

$$m_{PQ}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},x_1\neq x_2$$

Ponto P	Ponto Q	Coeficiente angular da reta secante PQ
(-1;5)	(0;5)	0
(0;5)	(1;5)	0
(1;5)	(2;5)	0
(2;5)	(3;5)	0

Tabela 3 – Ponto P e Q, e coeficiente angular da reta secante PQ.

Fixando o ponto P e usando Q próximo a P, obtemos:

Ponto P	Ponto Q	Coeficiente angular da reta secante PQ
(10,5)	(9,99;5)	0
(10,5)	(9,99999;5)	0
(10,5)	(10,0001;5)	0
(10,5)	(10,0000001;5)	0

Tabela 4 - Pontos P e Q, P fixo e Q móvel, e coeficiente angular da reta secante PQ.

Para todo $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$). O coeficiente angular da reta secante PQ é nulo ($m_{PQ} = 0$).

O coeficiente angular da reta secante PQ para quaisquer pontos P e Q distintos é:

$$m_{PQ}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{5-(5)}{x_2-x_1}=\frac{0}{x_2-x_1}=0$$

Logo, $m_{PQ} = 0$.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f em um ponto $P(x_1, f(x_1))$ será 0 (zero), pois $m_{PQ} \to m, x \to x_1$, ou seja, $m = 0$.

Portanto:

- A derivada de f em x_1 é $f'(x_1)=0$;

- A derivada de f em x é $f'(x)=0$

Dados a função constante $f(x)=b, b\in IR$, e os pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x, f(x))$, determinemos m_{PQ}:

$$m_{PQ}=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{b-(b)}{x-x_1}=\frac{0}{x-x_1}=0, x\neq x_1$$

Logo, 0 (zero) é o coeficiente angular da reta secante PQ.

O coeficiente angular da reta tangente à função afim f em qualquer ponto $P(x_1, f(x_1))$ é 0 (zero), já que:

$$m_{PQ}\rightarrow m \text{, quando } x\rightarrow x_1$$

ou seja, $m=0$.

A derivada da função f em $P(x_1, f(x_1))$ é:

$$f'(x_1)=0.$$

Logo, a derivada da função f é:

$$f'(x)=0$$

Conclusão:

A derivada da função constante é um caso particular da derivada da função afim, assim como a função constante é uma particularidade da função afim.

Função constante: $f(x)=b$, para todo $x\in D_f$.

Derivada da função constante: $f'(x)=0$, para todo $x\in D_f$.

Coeficiente da reta tangente ao gráfico de f para todo $x\in D_f$ será $m=0$

3.1.3 Função Quadrática

Seja f a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

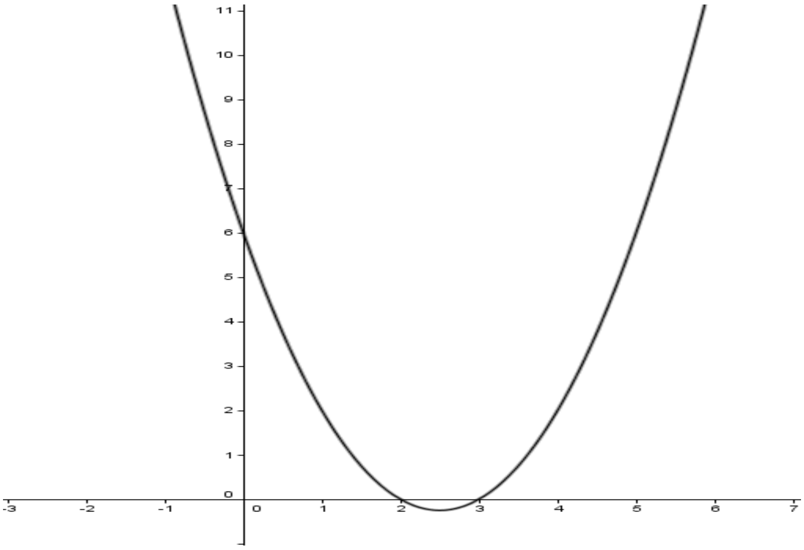

Figura 23 – Gráfico da função quadrática f(x)=x² – 5x + 6.

Pretendemos determinar o coeficiente angular da reta secante para pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ em dois intervalos, associados ao vértice da parábola:

1° intervalo: $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$

Ponto P	Ponto Q	Coeficiente angular da reta secante PQ
(-5;56)	(-4;42)	-14
(-3;30)	(-2;20)	-10
(-1;12)	(0;6)	-6
(1;2)	(2;0)	-2
(2;0)	(2,5;-0,25)	-0,5

Tabela 5 – Ponto P e Q, e coeficiente angular da reta secante PQ.

No intervalo dado, a função é decrescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$) e os coeficientes angulares das retas secantes PQ são negativos ($m_{PQ} < 0$).

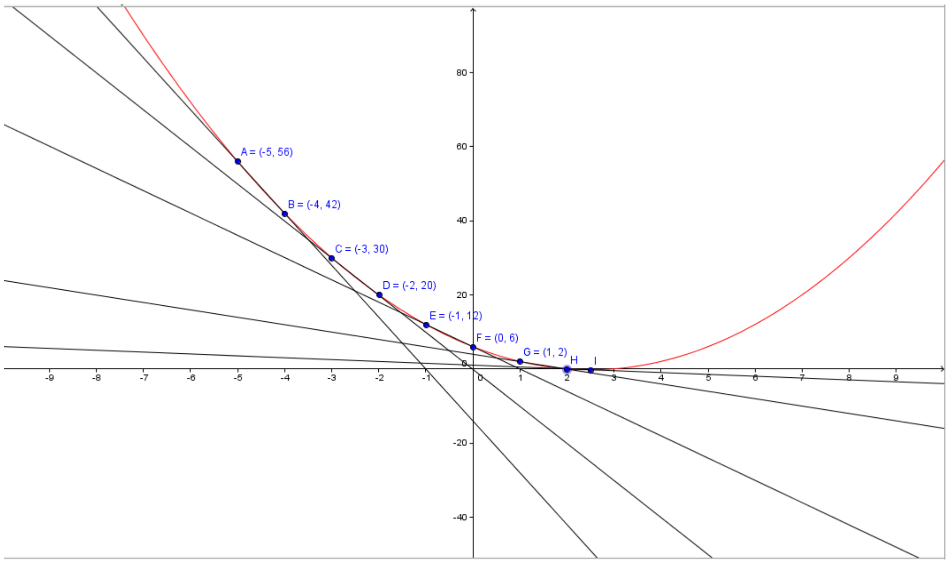

Figura 24 – Retas secantes ao gráfico de f no intervalo definido.

As retas secantes à parábola possuem coeficiente angular negativo, porém esse valor não é constante.

2° intervalo: $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$

Ponto P	Ponto Q	Coeficiente angular da reta secante PQ
(2,5;-0,25)	(3;0)	0,5
(3;0)	(4;2)	2
(4;2)	(4,5;3,75)	3,5
(4,5;3,75)	(5;6)	4,5
(5;6)	(6;12)	6

Tabela 6 – Pontos P e Q, e coeficiente angular da reta secante PQ.

Neste intervalo, a função é crescente ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) e os coeficientes angulares das retas secantes PQ são positivos ($m_{PQ} > 0$).

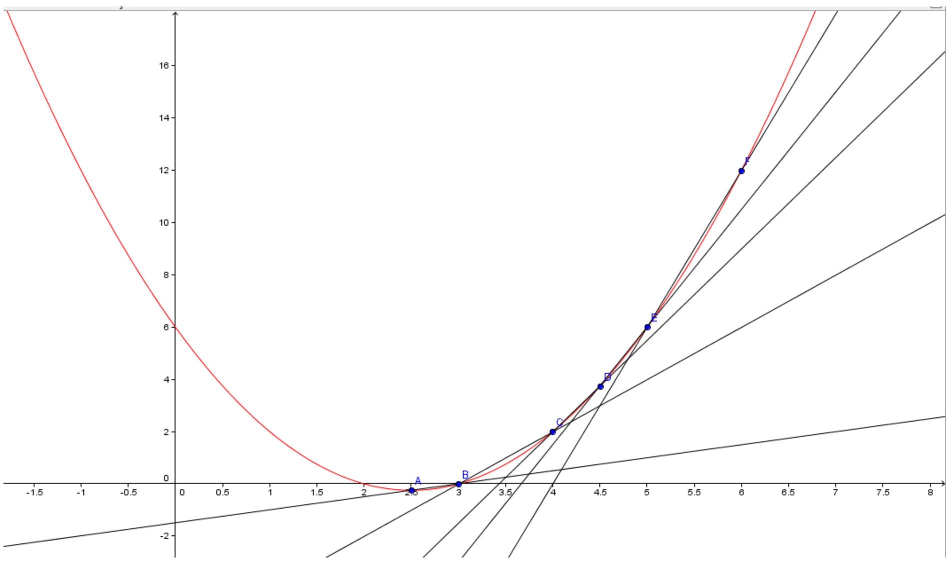

Figura 25 – Retas secantes ao gráfico de f no intervalo definido.

As retas secantes à parábola possuem coeficiente angular positivo, entretanto esse valor não é constante.

O coeficiente angular da reta secante PQ para qualquer ponto P e Q distintos será:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^{\,2} - 5x_2 + 6 - \left(x_1^{\,2} - 5x_1 + 6\right)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^{\,2} - 5x_2 + 6 - x_1^{\,2} + 5x_1 - 6}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{x_2^{\,2} - x_1^{\,2} - 5x_2 + 5x_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 5(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 5$$

Logo, m_{PQ} é:

1) positivo quando $x_2 + x_1 > 5$;

2) negativo quando $x_2 + x_1 < 5$;

3) nulo quando $x_2 + x_1 = 5$.

A Figura 26 traz retas secantes cujo coeficiente angular é nulo (0), resultando em retas paralelas ao eixo x.

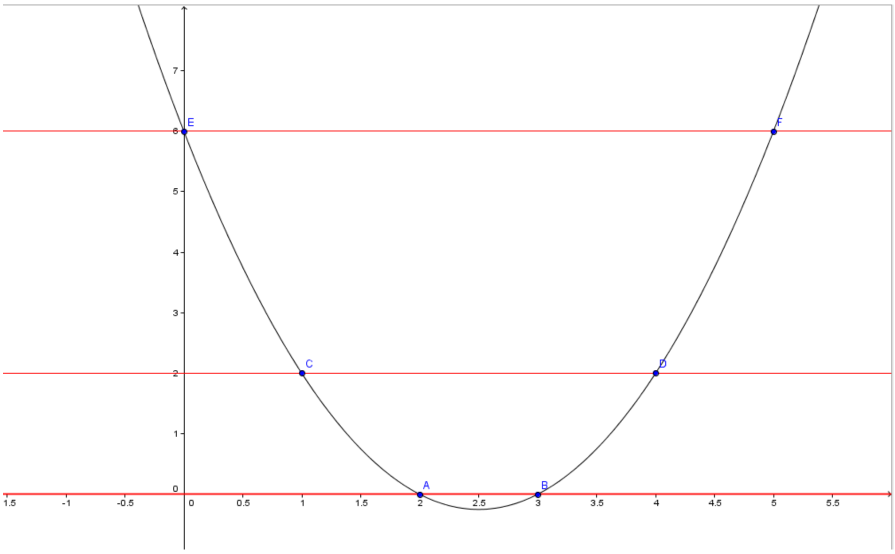

Figura 26 – Retas secantes com coeficiente angular nulo.

h) Intuitivamente, vamos determinar o coeficiente de retas tangentes à parábola em P. Sendo $P(x_1, f(x_1))$ um ponto fixo e $X(x, f(x))$ um ponto genérico:

1° intervalo: $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

Ponto X	Ponto P	Coeficiente angular da reta XP
(0;6)	**(1;2)**	**- 4**
(0,5;3,75)	**(1;2)**	**- 3,5**
(0,9;2,31)	**(1;2)**	**- 3,1**
(0,99;2,0301)	**(1;2)**	**- 3,01**
(0,9999;2,00030001)	**(1;2)**	**- 3,0001**

Tabela 7 – Pontos X e P, e valor aproximado do coeficiente angular da reta tangente a f em P.

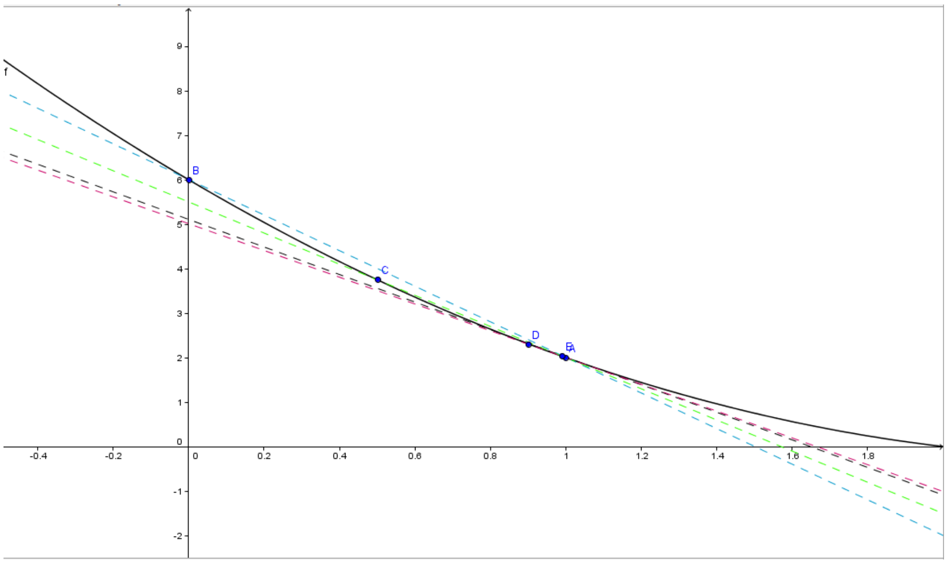

Figura 27 – Gráfico associado à tabela 5.

Ponto X	Ponto P	Coeficiente angular da reta XP
(1,5;0,75)	(1;2)	- 2,5
(1,4;0,96)	(1;2)	- 2,6
(1,1;1,71)	(1;2)	- 2,9
(1,01;1,9701)	(1;2)	- 2,99
(1,001;1,997001)	(1;2)	- 2,999

Tabela 8 – Pontos X e P, e valor aproximado do coeficiente angular da reta tangente a f em P.

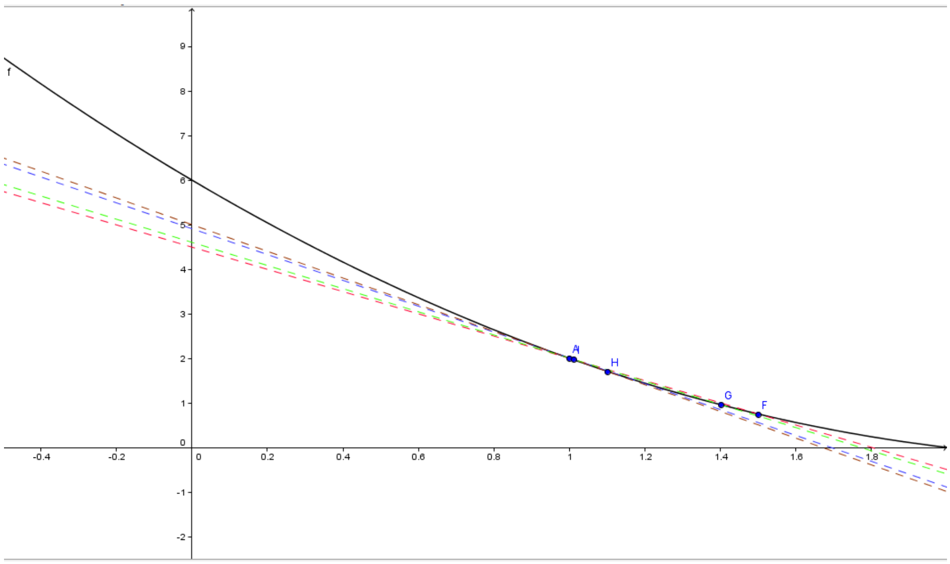

Figura 28 – Gráfico associado à tabela 6.

A reta tangente à parábola no ponto P terá, intuitivamente, coeficiente angular igual a – 3.

2° intervalo: $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$

Ponto X	Ponto P	Coeficiente angular da reta XP
(3,0)	(3,5;0,75)	1,5
(3,2;0,24)	(3,5;0,75)	1,7
(3,4;0,56)	(3,5;0,75)	1,9
(3,49;0,7301)	(3,5;0,75)	1,99
(3,499;0,748001)	(3,5;0,75)	1,999

Tabela 9 - Pontos X e P, e valor aproximado do coeficiente angular da reta tangente a f em P.

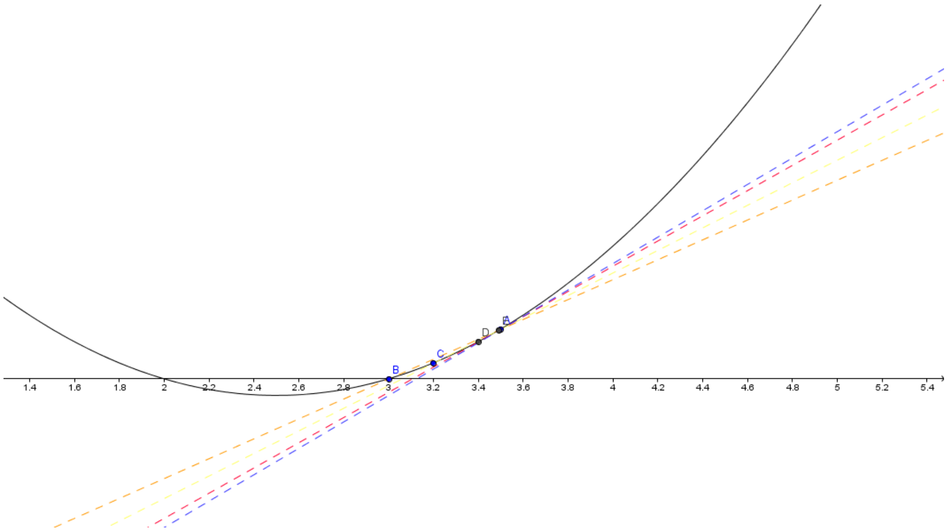

Figura 29 – Gráfico associado à tabela 7.

Ponto X	Ponto P	Coeficiente angular da reta XP
(3,8;1,44)	(3,5;0,75)	2,3
(3,6;0,96)	(3,5;0,75)	2,1
(3,51;0,7701)	(3,5;0,75)	2,01
(3,501;0,75201)	(3,5;0,75)	2,001
(3,5001;0,75020001)	(3,5;0,75)	2,0001

Tabela 10 - Pontos X e P, e valor aproximado do coeficiente angular da reta tangente a f em P.

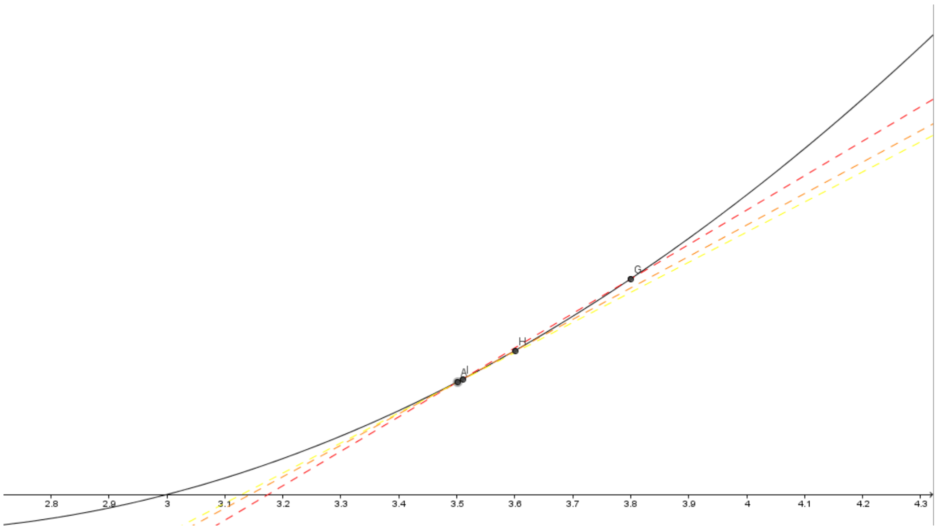

Figura 30 – Gráfico associado à tabela 8.

A reta tangente à parábola no ponto P terá, intuitivamente, coeficiente angular igual a 2.

3° intervalo: $(-\infty,+\infty)$, com $P=\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$ (vértice da parábola)

Ponto X	Ponto P	Coeficiente angular da reta
(2,2;-0,16)	(2,5;-0,25)	0,3
(2,45;-0,2475)	(2,5;-0,25)	0,05
(2,49;-0,2499)	(2,5;-0,25)	0,01
(2,499;-0,249999)	(2,5;-0,25)	0,001

Tabela 11 - Pontos X e P, e valor aproximado do coeficiente angular da reta tangente a f em P.

Ponto X	Ponto P	Coeficiente angular da reta
(2,6;-0,24)	(2,5;-0,25)	- 0,1
(2,54;-0,2484)	(2,5;-0,25)	- 0,04
(2,51;-0,2499)	(2,5;-0,25)	- 0,01
(2,501;-0,249999)	(2,5;-0,25)	- 0,001

Tabela 12 - Pontos X e P, e valor aproximado do coeficiente angular da reta tangente a f em P.

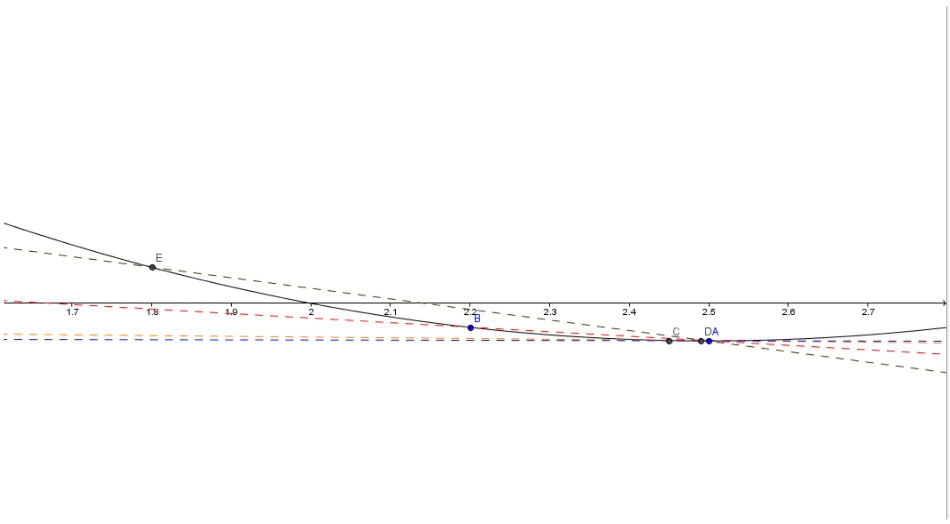

Figura 31 – Gráfico associado à tabela 9.

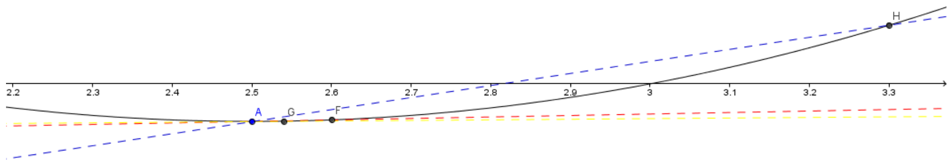

Figura 32 – Gráfico associado à tabela 10.

A reta tangente à parábola no ponto P terá, intuitivamente, coeficiente angular igual a 0.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f em um ponto $P(x_1, f(x_1))$ é obtido por:

$$m_{PQ} \to m, x_2 \to x_1$$

Sendo $m_{PQ} = x_2 + x_1 - 5$ e sabendo que m é um valor único para cada reta tangente ao gráfico de f no ponto P, concluímos que:

$$m = x_1 + x_1 - 5 = 2x_1 - 5$$

Logo, a derivada da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é:

$$f'(x_1) = 2x_1 - 5$$

E a derivada da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ é:

$$f'(x) = 2x - 5$$

Seja f a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in IR$. As retas secantes ao gráfico de f nos pontos $P = (x_1, f(x_1))$ e $Q = (x, f(x))$ terão coeficiente angular:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{ax^2 + bx + c - (ax_1^2 + bx_1 + c)}{x - x_1} = \frac{ax^2 - ax_1^2 + bx - bx_1}{x - x_1} =$$

$$= \frac{a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1)}{x - x_1} = \frac{(x - x_1)(a(x + x_1) + b)}{x - x_1} = a(x + x_1) + b$$

Logo, $m_{PQ} = a(x + x_1) + b$.

As retas tangentes ao gráfico de f no ponto $P = (x_1, f(x_1))$ terão coeficiente angular

$$m = a(x_1 + x_1) + b = 2ax_1 + b\,,$$

já que $m_{PQ} \to m,$ quando $x \to x_1,$

Então, a derivada da função f em x_1 é:

$$f'(x_1) = 2ax_1 + b$$

E a derivada da função $f(x)$ é:

$$f(x) = 2ax + b$$

O coeficiente da reta que tangencia o gráfico de qualquer função quadrática é obtido pela a derivada.

Função quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in D_f$.

Derivada da função quadrática: $f'(x) = 2ax + b$, para todo $x \in D_f$.

Coeficiente da reta tangente ao gráfico de f para todo $x \in D_f$ será $m = 2ax + b$

3.1.4 Função polinomial

Seja f a função definida por:

$$f : IR \to IR,\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

A derivada da função f será determinada conforme procedimentos anteriores. Sendo $P=(x_1, f(x_1))$ e $Q=(x, f(x))$, temos:

$$m_{PQ}=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0-\left(a_nx_1^{\ n}+a_{n-1}x_1^{\ n-1}+\ldots+a_1x_1+a_0\right)}{x-x_1}=$$

$$=\frac{\left(a_nx^n-a_nx_1^{\ n}\right)+\left(a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-1}x_1^{\ n-1}\right)+\ldots+\left(a_1x-a_1x_1\right)}{x-x_1}=$$

$$=\frac{a_n\left(x^n-x_1^{\ n}\right)+a_{n-1}\left(x^{n-1}-x_1^{\ n-1}\right)+\ldots+a_1\left(x-x_1\right)}{x-x_1}=$$

$$=\frac{a_n\left(x-x_1\right)\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_1+\ldots+xx_1^{\ n-2}+x_1^{\ n-1}\right)+a_{n-1}\left(x-x_1\right)\left(x^{n-2}+x^{n-3}x_1+\ldots+xx_1^{\ n-3}+x_1^{\ n-2}\right)}{x-x_1}+\ldots+$$

$$+\frac{a_1(x-x_1)}{x-x_1}=a_n\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_1+\ldots+xx_1^{\ n-2}+x_1^{\ n-1}\right)+a_{n-1}\left(x^{n-2}+x^{n-3}x_1+\ldots+xx_1^{\ n-3}+x_1^{\ n-2}\right)+..+a_1$$

Portanto,

$$m_{PQ}=a_n\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_1+\ldots+xx_1^{\ n-2}+x_1^{\ n-1}\right)+a_{n-1}\left(x^{n-2}+x^{n-3}x_1+\ldots+xx_1^{\ n-3}+x_1^{\ n-2}\right)+..+a_1$$

O coeficiente da reta tangente ao gráfico da função polinomial no ponto P é:

$$m=a_n\left(x_1^{\ n-1}+x_1^{\ n-2}x_1+\ldots+x_1x_1^{\ n-2}+x_1^{\ n-1}\right)+a_{n-1}\left(x_1^{\ n-2}+x_1^{\ n-3}x_1+\ldots+x_1x_1^{\ n-3}+x_1^{\ n-2}\right)+..+a_1=$$

$$=a_n\left(x_1^{\ n-1}+x_1^{\ n-1}+\ldots+x_1^{\ n-1}+x_1^{\ n-1}\right)+a_{n-1}\left(x_1^{\ n-2}+x_1^{\ n-2}+\ldots+x_1^{\ n-2}+x_1^{\ n-2}\right)+..+a_1=$$

$$=a_n(n-1+1)x_1^{\ n-1}+a_{n-1}(n-2+1)x_1^{\ n-2}+a_{n-2}(n-3+1)x_1^{\ n-3}+..+a_1=$$

$$=a_nnx_1^{\ n-1}+a_{n-1}(n-1)x_1^{\ n-2}+a_{n-2}(n-2)x_1^{\ n-3}+..+a_1$$

Podemos concluir que:

a) $f'(x_1)=a_nnx_1^{\ n-1}+a_{n-1}(n-1)x_1^{\ n-2}+a_{n-2}(n-2)x_1^{\ n-3}+..+a_1$

b) $f'(x)=a_nnx^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+a_{n-2}(n-2)x^{n-3}+..+a_1$

3.2 Utilização de funções poligonais para compreensão da reta tangente ao gráfico de funções polinomiais.

Seja $p_n: IR\rightarrow IR$ uma função poligonal e $f_n: IR\rightarrow IR$ uma função afim, sendo $n\in IN$. Observemos as figuras abaixo:

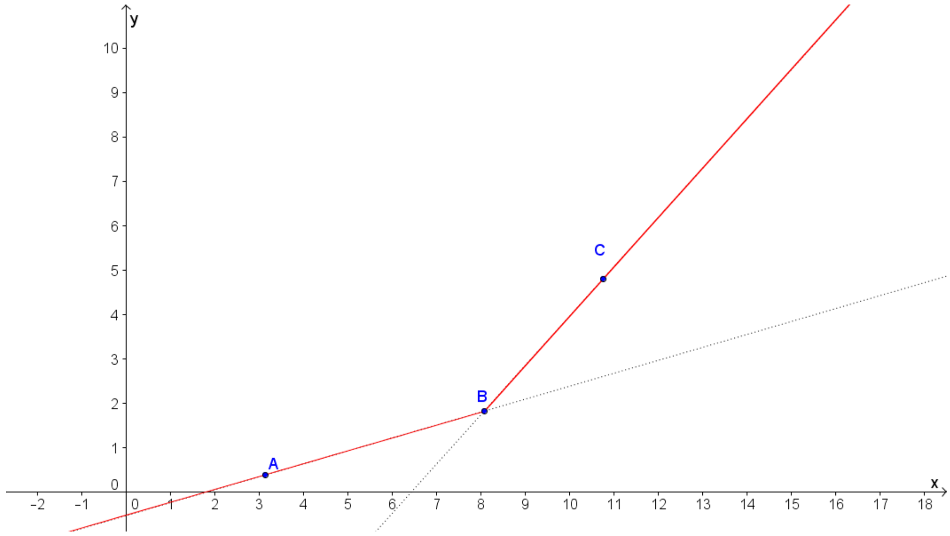

Figura 33 – Gráfico de uma função poligonal $p_1(x)$.

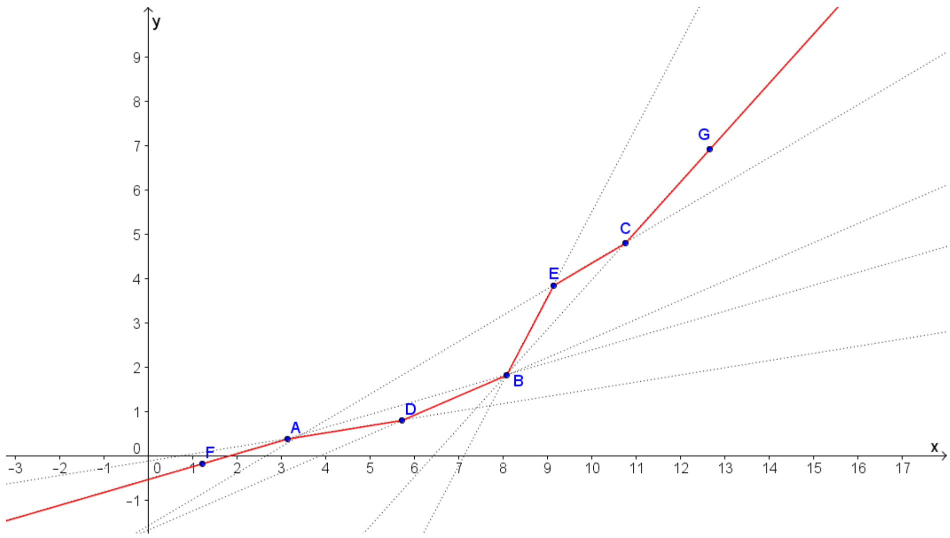

Figura 34 – Gráfico de uma função poligonal $p_2(x)$.

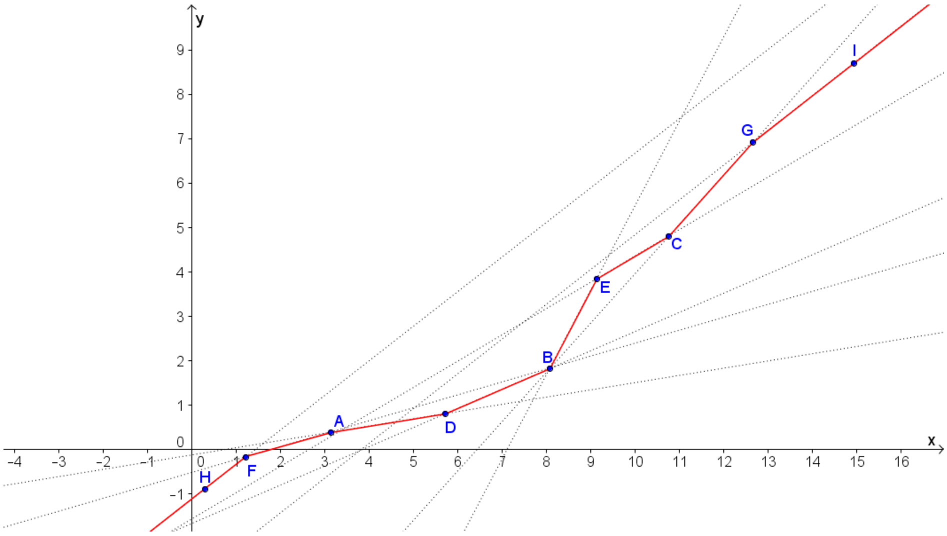

Figura 35 – Gráfico de uma função poligonal $p_3(x)$.

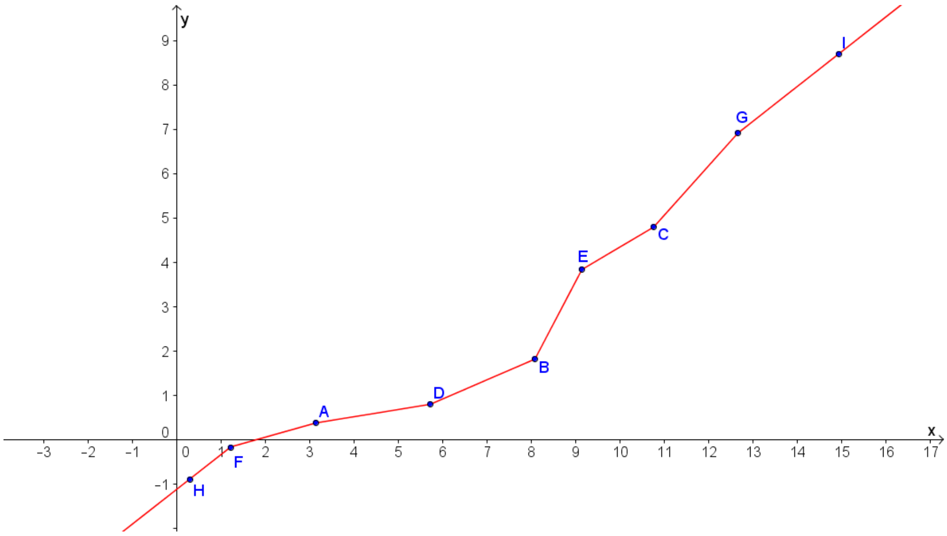

Figura 36 – Gráfico de uma função poligonal $p_4(x)$.

Os gráficos representam as funções poligonais p_n que por sua vez são todas **crescentes**.

Cada função poligonal p_n está associada a várias funções afim f_n. Portanto, em cada gráfico, todas as funções afim associadas serão representadas por retas cujo **coeficiente angular** é **positivo**.

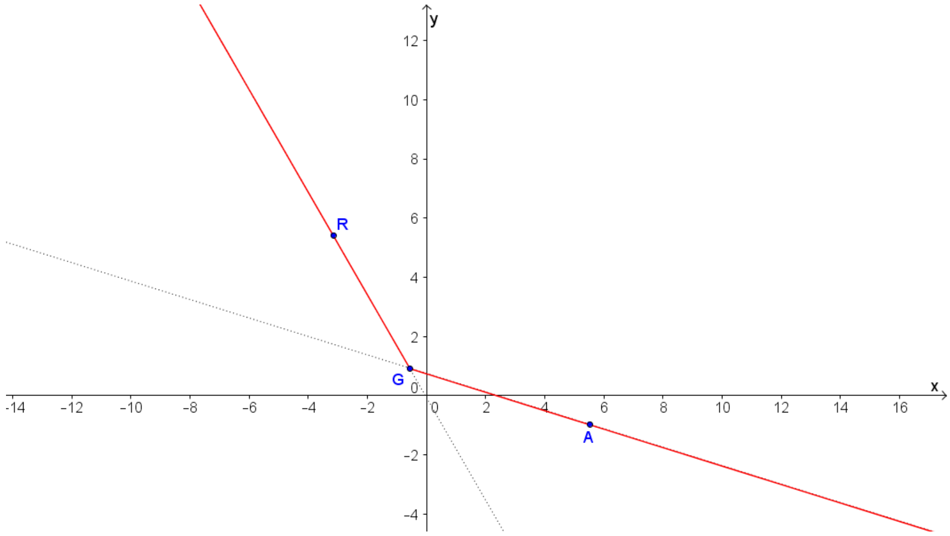

Figura 37 – Gráfico de uma função poligonal $p_5(x)$.

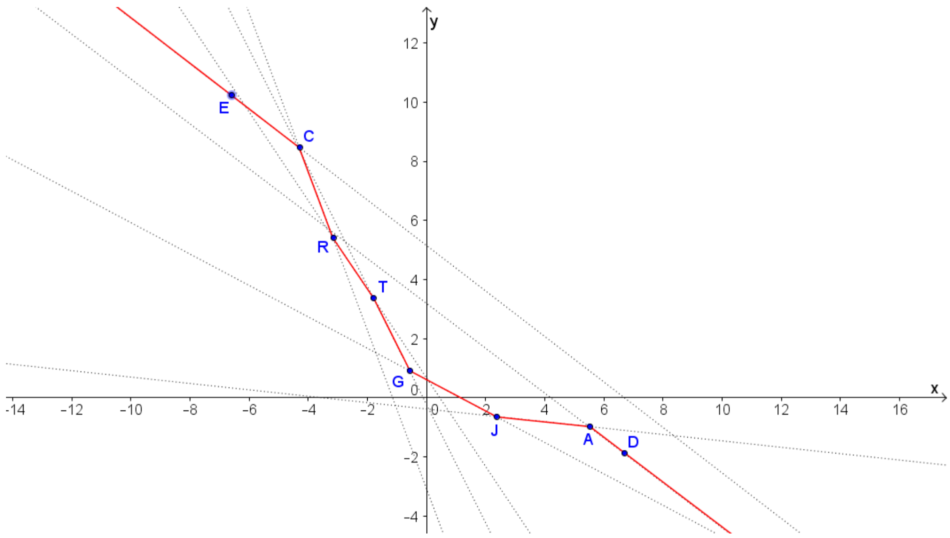

Figura 38 – Gráfico de uma função poligonal $p_6(x)$.

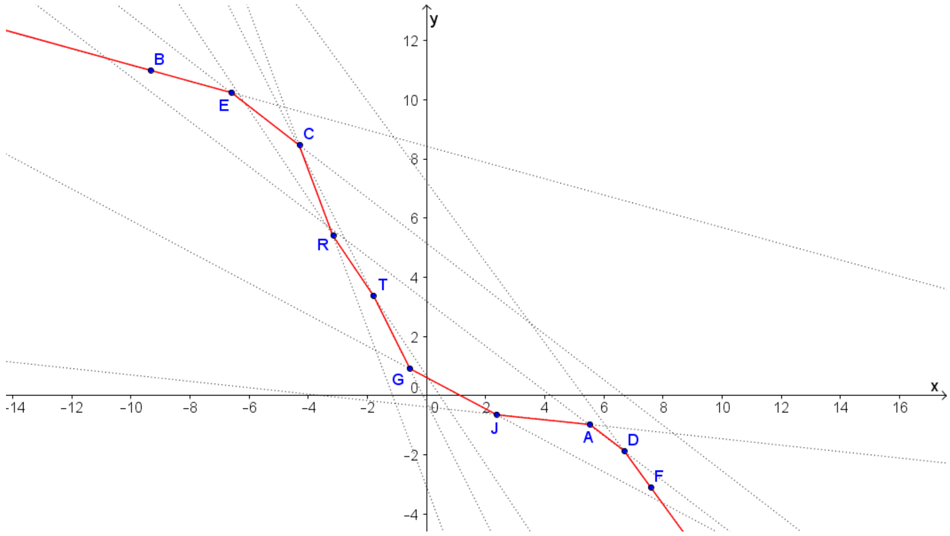

Figura 39 – Gráfico de uma função poligonal $p_7(x)$.

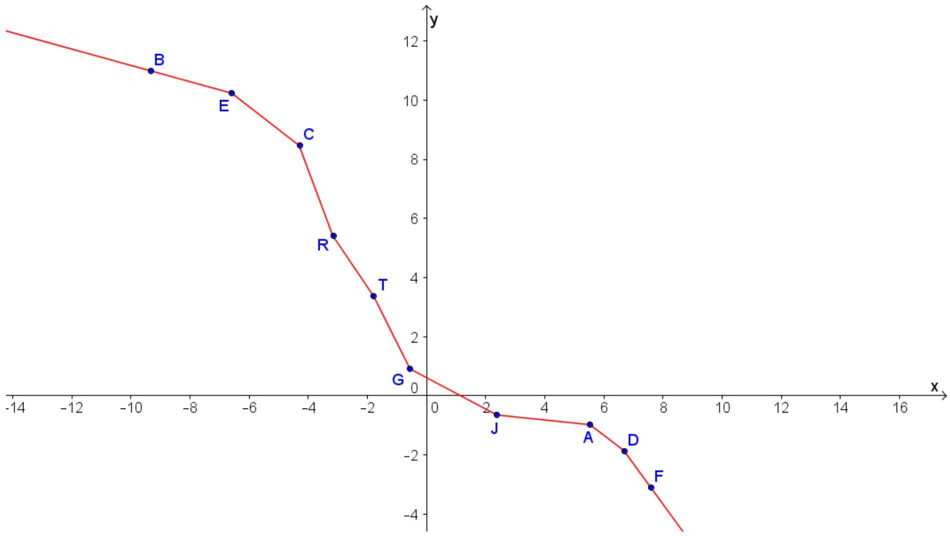

Figura 40 – Gráfico de uma função poligonal $p_8(x)$.

As Figuras 37, 38, 39 e 40 possuem gráficos de funções poligonais p_n **decrescentes**.

As funções afim f_n associadas a uma única função poligonal p_n, em cada gráfico, são representadas graficamente por retas cujo **coeficiente angular** é **negativo**.

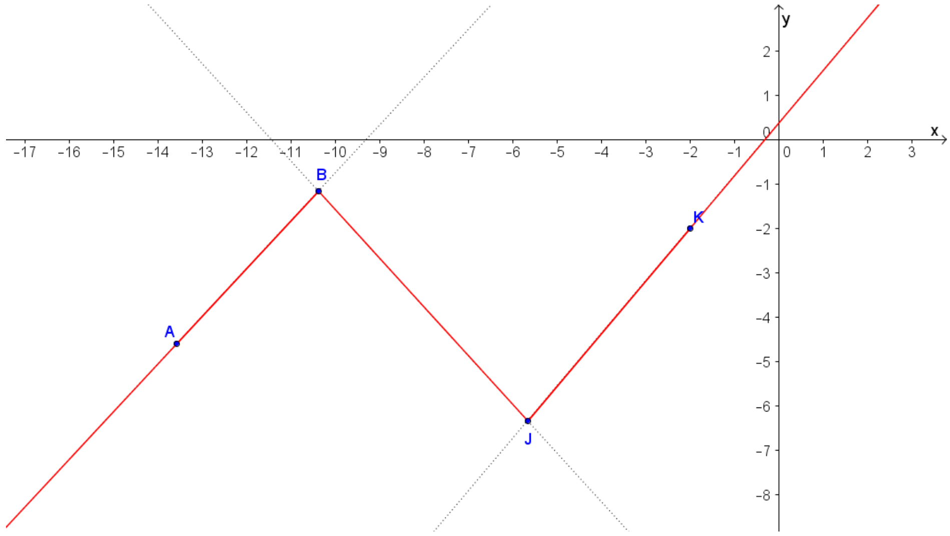

Figura 41 – Gráfico de uma função poligonal $p_9(x)$.

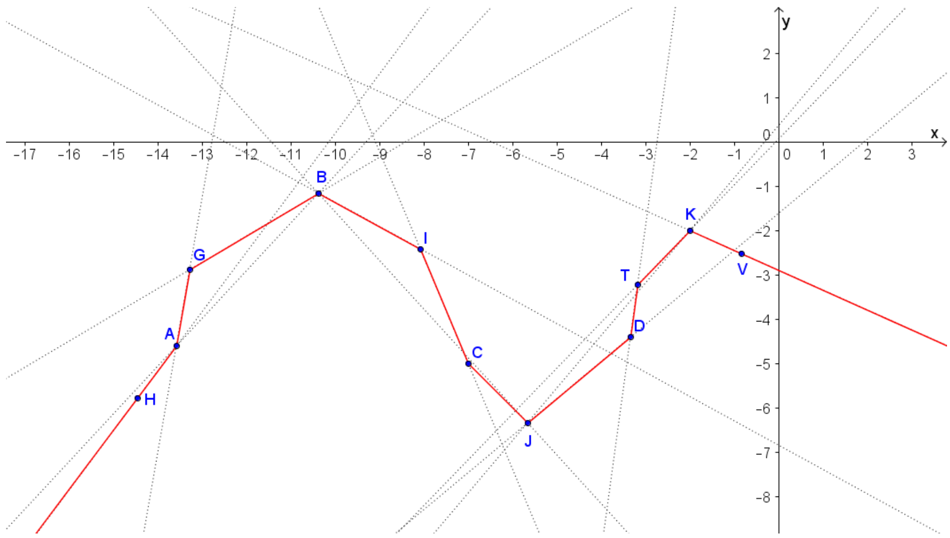

Figura 42 – Gráfico de uma função poligonal $p_{10}(x)$.

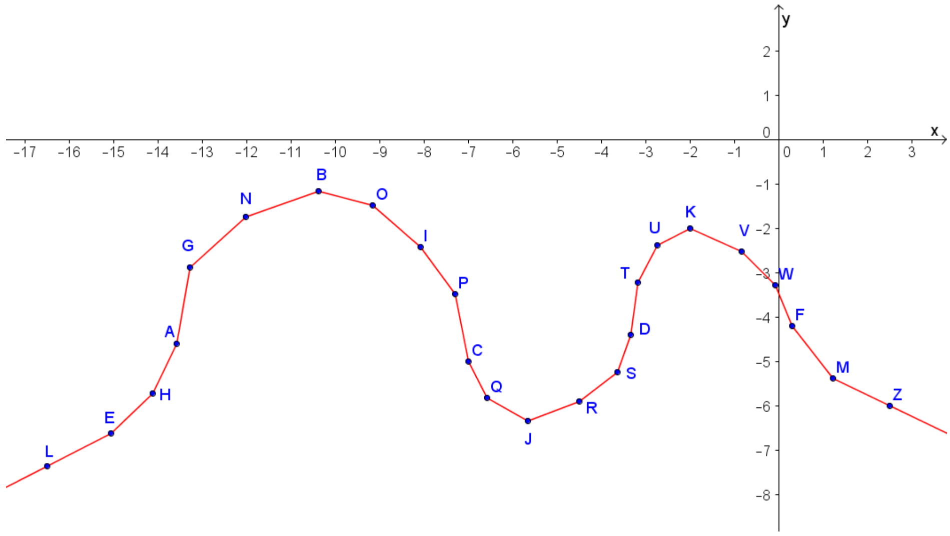

Figura 43 – Gráfico de uma função poligonal $p_{11}(x)$.

Cada figura, nesta última sequência, mostra o gráfico de uma função poligonal p_n com intervalos que alternam **crescimento** e **decrescimento**. Portanto, as funções afim f_n associadas à função poligonal p_n serão representadas por retas cujo **coeficiente angular** é **positivo** ou **negativo**.

Seja $P_n : IR \to IR$ uma função polinomial, cuja representação gráfica abaixo está associada ao gráfico de uma função poligonal p_n.

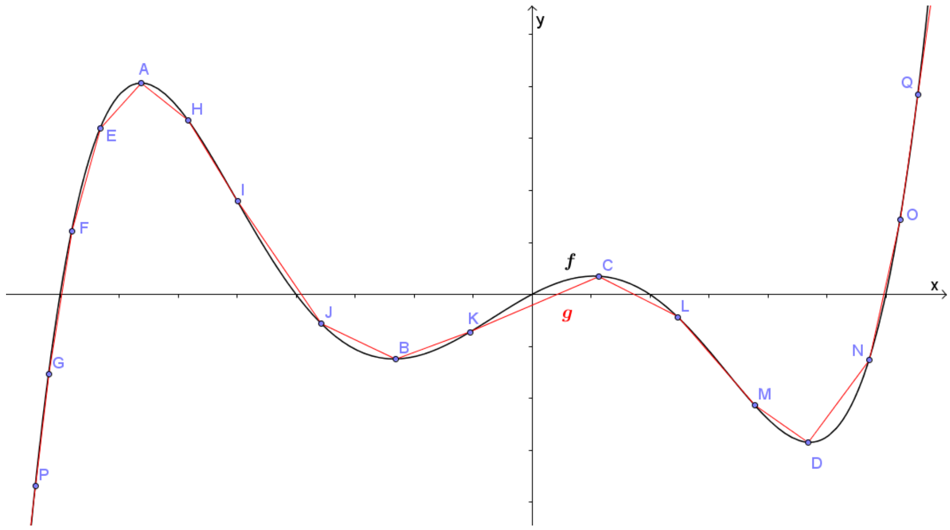

Figura 44 – Gráficos das funções P_n e p_n.

Sendo $X_1 = (x_1, y_1)$ e $X_2 = (x_2, y_2)$ pontos genéricos comuns ao gráfico das funções P_n e p_n, vamos traçar retas secantes X_1X_2 nos intervalos onde as funções são ambas crescentes.

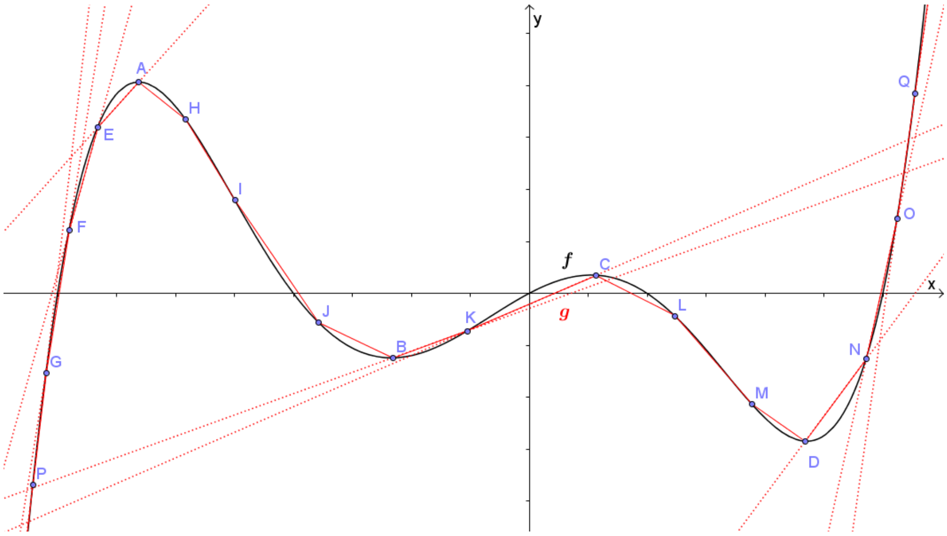

Figura 45 – Gráficos das funções P_n e p_n, e retas secantes X_1X_2.

O coeficiente angular da reta X_1X_2 é:

$$m_{x_1x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, x_1 \neq x_2$$

Os coeficientes angulares dessas retas secantes correspondem aos coeficientes angulares das representações gráficas de funções afim.

As retas tangentes ao gráfico de P_n no ponto $X_1 = (x_1, y_1)$ terão coeficiente angular positivo ($m > 0$).

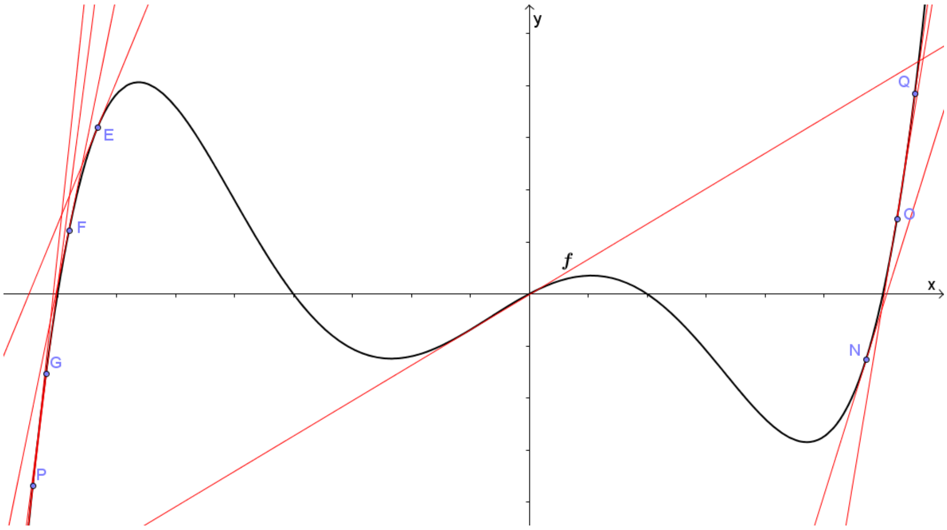

Figura 46 – Retas tangentes ao gráfico da função P_n cujo coeficiente angular é positivo.

Portanto, **a derivada** da função P_n nos intervalos onde a função é **crescente** tem valor **positivo**, isto é, $P_n' > 0$.

Se as retas secantes X_1X_2 forem traçadas nos intervalos onde as funções P_n e p_n são decrescentes, então as retas tangentes ao gráfico de P_n no ponto $X_1 = (x_1, y_1)$ terão coeficiente angular negativo ($m < 0$), e **a derivada** da função P_n tem valor **negativo**, isto é, $P_n' < 0$.

$$m_{X_1X_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, x_1 \neq x_2$$

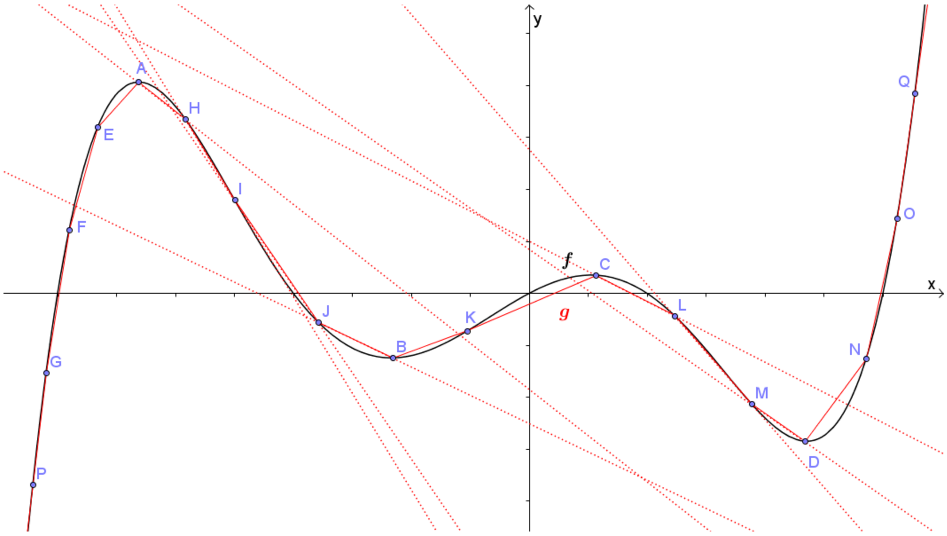

Figura 47 - Gráficos das funções P_n e p_n, e retas secantes X_1X_2.

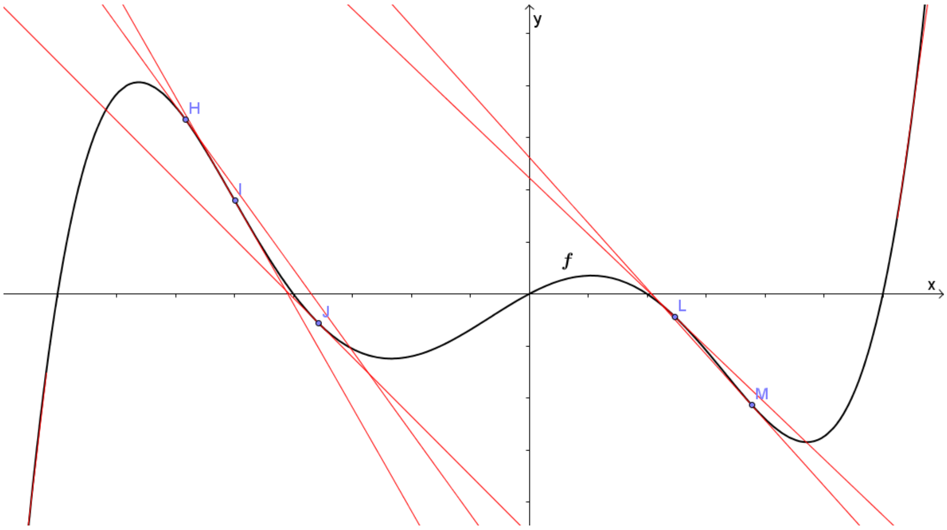

Figura 48 - Retas tangentes ao gráfico da função P_n cujo coeficiente angular é negativo.

O que ocorre quando o coeficiente angular da reta tangente à função P_n muda de positivo para negativo, ou vice-versa?

Retas secantes XY ao gráfico da função P_n com coeficiente angular igual a zero (0) promovem retas tangentes ao ponto X que serão paralelas ao eixo X.

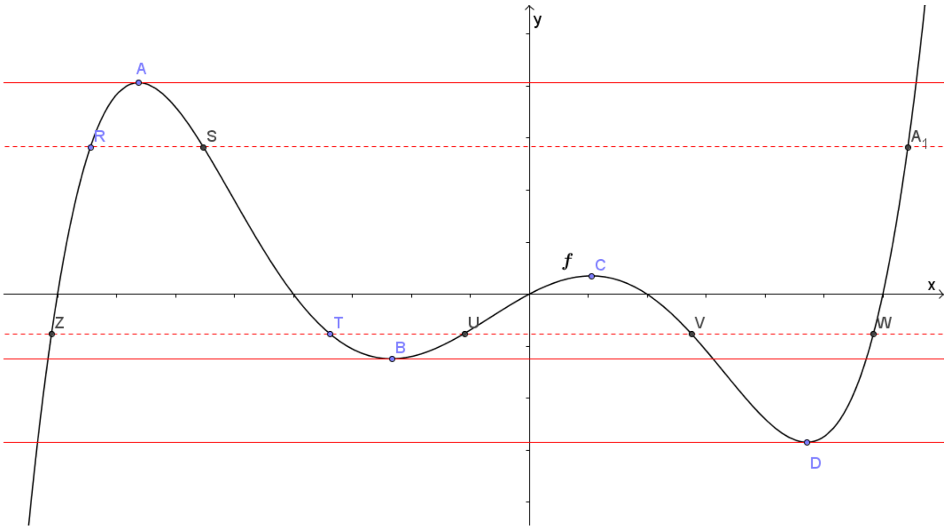

Figura 49 - Retas tangentes e secantes ao gráfico da função P_n cujo coeficiente angular é nulo.

Então concluímos que, neste caso, a derivada de P_n em X é igual a 0 (zero), ou seja, $P_n'=0$.

O ponto X onde $P_n' = 0$ corresponde ao valor extremo da função P_n.

Veja a figura abaixo:

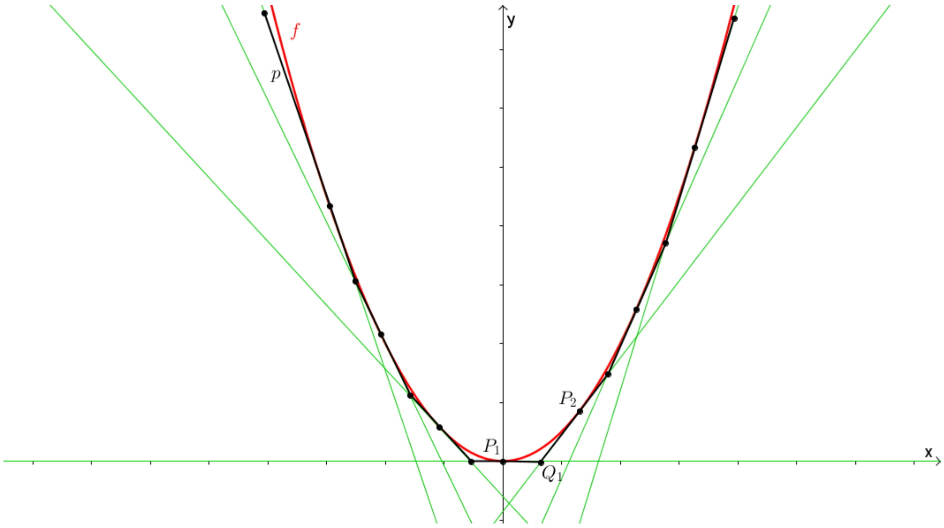

Figura 50 – Figura contendo o gráfico da parábola f, retas tangentes em um ponto P e função poligonal p.

A figura contém a função quadrática $f(x) = x^2$, retas t tangentes à f e uma função poligonal p, formada pelo ponto P, ponto comum a f e t, e Q ponto de intersecção entre duas retas tangentes cujos coeficientes angulares possuem valores próximos. (P está sempre entre dois pontos Q).

O coeficiente angular da reta t no ponto P é igual ao coeficiente angular da reta PQ representante de uma função afim associada à função poligonal p.

Tomando P_1 como fixo e fazendo o ponto P_2 aproximar-se de P_1, consequentemente teremos Q_1 se aproximando de P_1 também, pois Q_1 é comum a P_1 e P_2 (intersecção das retas tangentes a P_1 e P_2). Portanto, a função poligonal p terá um traçado "similar" à curva de f, e por conseguinte, o coeficiente angular da reta P_1Q_1 se aproxima do coeficiente angular da reta tangente a P_1.

Por fim, com base nos estudos anteriores, podemos afirmar que a derivada da função f em um ponto P, ou seja, f', é a função p, responsável pelo coeficiente angular de todas as retas tangentes à f.

3.3 Valor máximo e valor mínimo funções polinomiais.

A derivada de uma função possui como representação geométrica a reta tangente ao gráfico dessa mesma função. Conforme vimos anteriormente temos a seguinte situação:

a) $f'(x) > 0$ significa dizer que a reta tangente é ascendente, ou ainda, que o gráfico da função tem imagem crescente em certo intervalo.

b) $f'(x) < 0$ corresponde a uma reta tangente descendente, ou ainda, que gráfico da função possui imagem decrescente em certo intervalo.

c) $f'(x) = 0$ evidencia uma reta tangente paralela.

De acordo com a definição de máximo e mínimo afirmamos que:

- Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c;

- Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c;

- Se f' não mudar de positivo para negativo, ou vice-versa, em c, então f não tem um máximo ou mínimo locais em c;

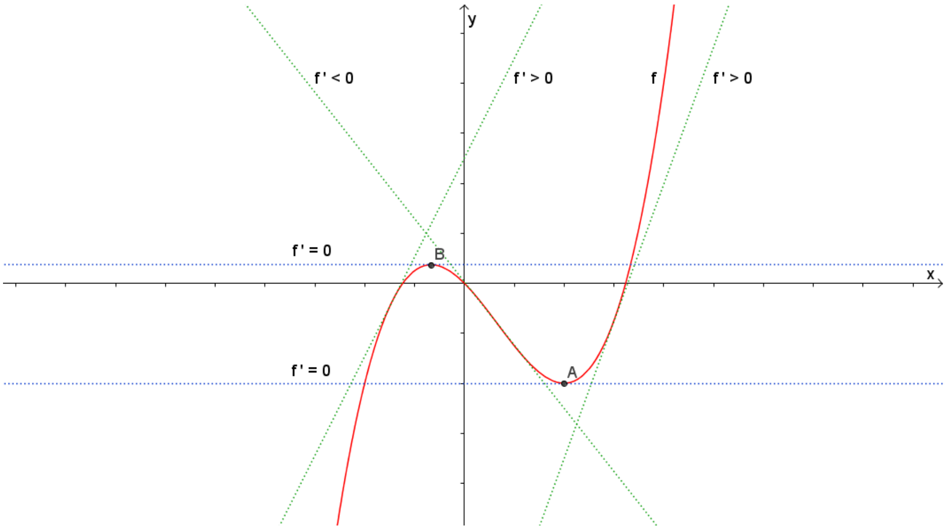

Figura 51 – Gráfico da função f com extremos relativos.

Em relação à Figura 51, o ponto B representa o máximo local de f, pois f' passa de positivo para negativo, e o ponto A representa o mínimo local de f, pois f' passa de negativo para positivo. Nesses pontos, $f' = 0$.

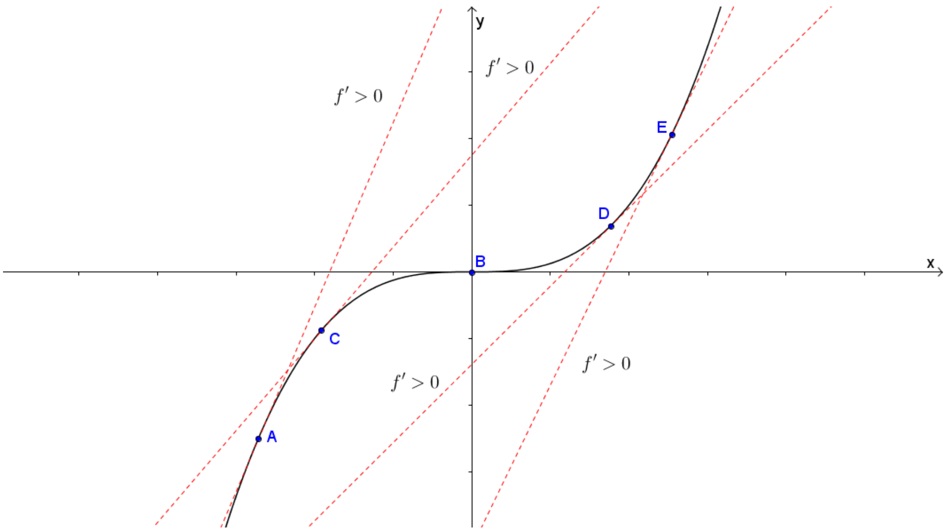

Figura 52 – Gráfico da função f sem extremos relativos.

Na Figura 52, a função f não possui extremos relativos, pois não há mudança de sinal para f'.

Capítulo 4

Situações-problemas solucionadas através da derivada.

4.1 Aplicabilidade das derivadas de funções polinomiais em eventos diversos.

Utilizando alguns exemplos correspondentes a situações diversas, inclusive do cotidiano, vamos mostrar a utilização das derivadas de funções representadas por polinômios enfatizando a determinação dos valores de máximo e/ou mínimo.

Exemplo 1:

Um pedaço de arame com 10 m é cortado em duas partes. Uma delas é curvada na forma circular e a outra na forma de um quadrado. Como dividir o fio, de tal forma que:

a) a área combinada das duas figuras seja a menor possível;

b) a área combinada das duas figuras seja a maior possível.

Antes do processo resolutivo matemático deste exemplo, seria interessante criar com os alunos estratégias para a solução do problema proposto, inclusive a utilização de imagens as quais auxiliassem a compreensão e solução.

Veja:

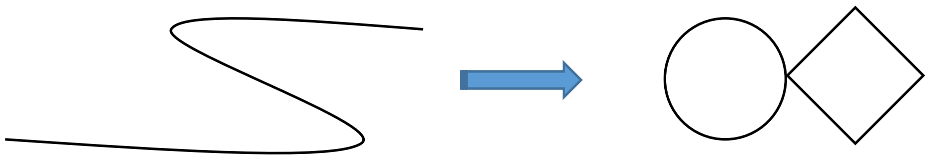

Figura 53 – Arame e construção das figuras circular e quadrada.

A resolução para esta situação será assim descrita:

a) Sejam x e y os pedaços de arame utilizados para construir cada figura determinada. Sendo assim:

1°) Figura circular

- Comprimento do arame: x

- Sendo r o raio do circulo, temos:

$$x = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{x}{2\pi}$$

- A área da região será:

$$A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$$

2°) Figura quadrada

- Comprimento do arame: $y = 10 - x$

- Sendo l a medida do lado do quadrado, temos?

$$10 - x = 4 \cdot l \Leftrightarrow l = \frac{10 - x}{4}$$

- A área da região será:

$$A_Q = l^2 = \left(\frac{10 - x}{4}\right)^2 = \frac{100 - 20x + x^2}{16}$$

3°) Figuras combinadas

- Área das figuras combinadas

$$A = A_C + A_Q = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{100 - 20x + x^2}{16} = \frac{4x^2 + 100\pi - 20\pi x + \pi x^2}{16\pi} = \frac{(4+\pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}$$

Seja A(x) a função correspondente a área combinada das figuras em estudo, sendo o domínio da mesma representado pelo intervalo [0,10]. Vamos derivar a função A(x):

- Derivando:

$$A'(x)=\left(\frac{(4+\pi)x^2}{16\pi}-\frac{20\pi x}{16\pi}+\frac{100\pi}{16\pi}\right)'=\frac{2(4+\pi)x}{16\pi}-\frac{20\pi}{16\pi}+0=\frac{(4+\pi)x-20}{8\pi}$$

- Agora determinemos os valores onde a derivada é nula:

$$A'=0\Leftrightarrow\frac{(4+\pi)x}{8\pi}-\frac{5}{4}=0\Rightarrow\frac{(4+\pi)x}{8\pi}=\frac{5}{4}\Rightarrow x=\frac{10\pi}{4+\pi}$$

Analisando, obtemos:

- $A'(x)<0$ quando $x<\dfrac{10\pi}{4+\pi}$

- $A'(x)>0$ quando $x>\dfrac{10\pi}{4+\pi}$

Podemos concluir que a função $A(x)$ possui mínimo quando $x=\dfrac{10\pi}{4+\pi}$ pela transição de $A'(x)<0$ para $A'(x)>0$.

Logo, os tamanhos para cada pedaço serão: $\dfrac{10\pi}{4+\pi}$ e $\dfrac{40}{4+\pi}$.

Portanto teremos:

- Forma circular:

$$x=2\pi r\Leftrightarrow r=\frac{x}{2\pi}\Rightarrow r=\frac{\frac{10\pi}{4+\pi}}{2\pi}=\frac{10\pi}{4+\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}=\frac{5}{4+\pi}$$

O raio do círculo deverá ser $\dfrac{5}{4+\pi}$ m.

- Forma quadrada:

$$10 - x = 4 \cdot l \Leftrightarrow l = \frac{10 - x}{4} \Rightarrow l = \frac{10 - \frac{10\pi}{4+\pi}}{4} = \frac{40}{4+\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4+\pi}$$

O lado do quadrado deverá ser $\frac{10}{4+\pi}$ m.

b) A área combinada das figuras foi representada pela função:

$$A(x) = \frac{(4+\pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}$$

A análise da derivada dessa função determinou apenas a possibilidade de existir mínimo local. Sendo assim, o máximo ocorrerá nos extremos do intervalo correspondente a imagem da função, lembrando que o domínio é representado pelo intervalo [0;10].

Portanto

1°) Se construirmos somente o círculo, teremos:

$$A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{10^2}{4\pi} = \frac{100}{4\pi} = \frac{25}{\pi} \cong 8\,.$$

2°) Se construirmos somente o quadrado, teremos:

$$A_Q = l^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 6{,}25\,.$$

Logo, o ideal é construirmos apenas um círculo com raio igual a $\frac{5}{\pi}$ m.

Graficamente podemos observar o seguinte:

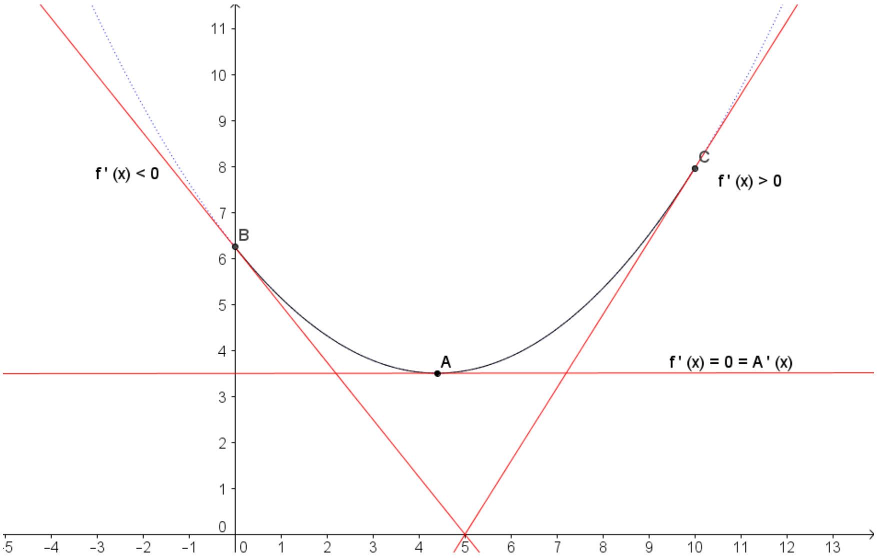

Figura 54 – Gráfico da função A(x) contendo retas tangentes.

- A parábola correspondente à linha pontilhada refere-se à função quadrática $f(x) = \dfrac{(4+\pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}$.

- A curva de cor sólida corresponde à função $A(x) = \dfrac{(4+\pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}$.

- A reta tangente à curva no ponto A possui que coeficiente angular nulo determina o valor mínimo citado anteriormente.

- Pelo traçado percebemos que a curva possui valor máximo em suas extremidades, fato abordado na segunda parte da resolução desse exemplo.

<u>Exemplo 2:</u>

Deseja-se construir uma caixa aberta com um pedaço de papelão de formato retangular cujas medidas são 08 cm X 15 cm. Para isso será necessário cortar quadrados iguais dos quatro cantos e dobrá-los para cima. Qual seria o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para obtermos uma caixa com maior volume possível? Qual seria esse volume?

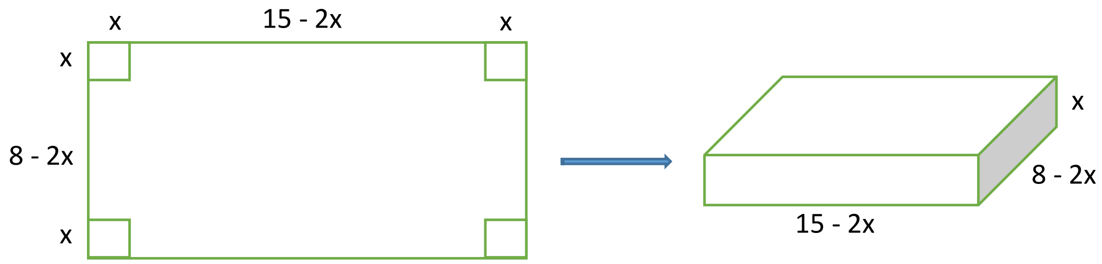

Figura 55 – Pedaço de papelão transformado em uma caixa com medidas determinadas.

A caixa de papelão corresponde a um sólido geométrico denominado paralelepípedo. Portanto, para determinarmos o volume da caixa devemos efetuar o produto entre as medidas de largura, comprimento e profundidade.

Sendo assim, temos:

$$V = L \cdot C \cdot P$$

Seja x a medida dos quadrados a serem cortados. Sendo assim, o volume será obtido através da função V(x) definida como:

$$V(x) = (8 - 2x) \cdot (15 - 2x) \cdot x$$

Observe que a função V tem como domínio $[0,4]$.

Podemos escrever:

$$V(x) = 120x - 46x^2 + 4x^3$$

A função V(x) é representada por um polinômio de grau 3. Sendo assim, a derivada da função será:

$$V'(x) = 120 \cdot 1 \cdot x^{1-1} - 46 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 120 - 92x + 12x^2 .$$

Para determinarmos um extremo local, devemos determinar um valor para x tal que V ' (x) = 0.

Então temos:

$$\begin{aligned} V'(x) &= 0 \\ 120 - 92x + 12x^2 &= 0 \\ 30 - 23x + 3x^2 &= 0 \\ (x-6)\cdot\left(x - \frac{5}{3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto os valores x = 6 ou x = 5/3 fazem V'(x)=0.

Analisando a imagem de V'(x), temos:

V'(x) > 0 quando x < 5/3 e x > 6.

V'(x) < 0 quando 5/3 < x < 6.

Notamos que a função possui:

Máximo local em x = 5/3, pois há transição de f'(x) > 0 para f'(x) < 0.

Mínimo local em x = 6, pois há transição de f'(x) < 0 para f'(x) > 0.

Já que a função em estudo tem como domínio o conjunto [0,4], utilizaremos apenas o valor de x = 5/3. Lembramos que o objetivo é determinar o valor das medidas do quadrado a ser cortado, sendo, portanto esse valor igual a 5/3 cm.

O volume máximo para caixa construída com recortes de 5/3 cm será:

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 120\cdot\left(\frac{5}{3}\right) - 46\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{600}{3} - \frac{1150}{9} + \frac{500}{27} = \frac{5400 - 3450 + 500}{27} = \frac{2450}{27}.$$

Logo, o volume máximo será aproximadamente 90,74 cm³.

Podemos descrever o evento graficamente na figura 56:

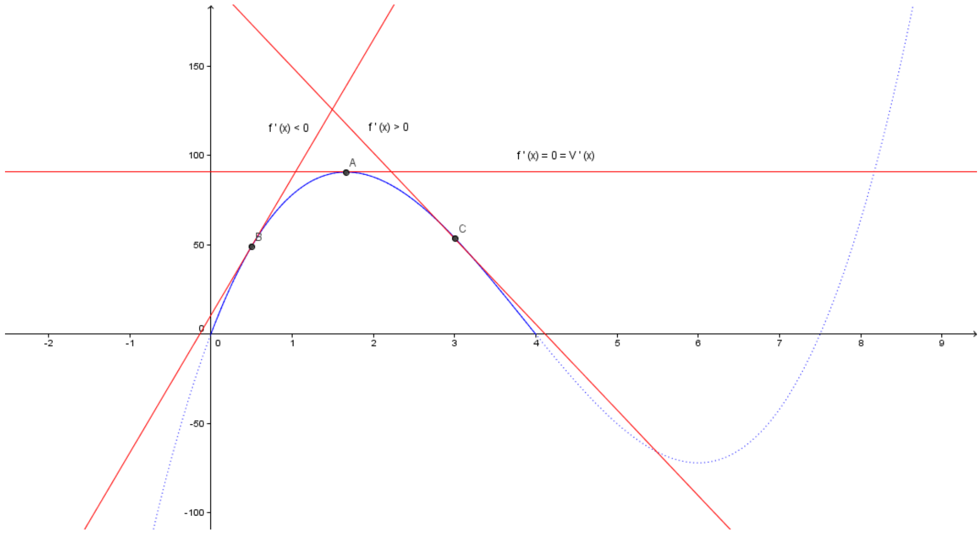

Figura 56 – Gráfico da função V(x) contendo retas tangentes.

- A curva correspondente à linha pontilhada refere-se à função cúbica $f(x) = 120x - 46x^2 + 4x^3$.

- A curva de cor sólida corresponde à função $V(x) = 120x - 46x^2 + 4x^3$.

- A reta tangente à curva no ponto A possui que coeficiente angular nulo determina o valor máximo citado anteriormente.

- Pelo traçado percebemos que a curva referente ao exemplo possui valor mínimo em suas extremidades, ocorrendo nos extremos do intervalo [0,4].

Exemplo 3

Determine dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja o menor possível.

De acordo com o problema proposto temos:

- Números: x e w.

- Soma: $x - w = 100$.

- Produto: $x \cdot w = P$

Podemos escrever:

$x - w = 100 \Leftrightarrow w = x - 100$.

E ainda:

$P = x \cdot w = x \cdot (x - 100) = x^2 - 100x$

Seja $P(x)$ a função definida pelo polinômio acima, ou seja,

$P(x) = x^2 - 100x$.

A derivada da função $P(x)$ será:

$P'(x) = 2x - 100$.

Temos ainda:

$P'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 100 = 0 \Rightarrow x = 50$.

Observe que:

Sendo $x = 50$, obtemos o valor mínimo para a função. Isso ocorre porque nesse valor há transição de $P'(x) < 0$ para $P'(x) > 0$, pois:

- $P'(x) < 0$ quando $x < 50$

- $P'(x) > 0$ quando $x > 50$.

Portanto os números serão:

$x = 50$ e $w = x - 100 = 50 - 100 = -50$.

Existe algo interessante na interpretação geométrica desse problema o qual poderíamos discutir.

Suponhamos valores distintos para as diferenças entre os números. Sendo esse valor denominado a teremos:

1) $x - w = a \Leftrightarrow w = x - a$

2) $P = x \cdot w = x \cdot (x - a) = x^2 - ax$

3) $P(x) = x^2 - ax$.

4) $P'(x) = 2x - a$

5) $P'(x) = 0 \Rightarrow 2x - a = 0 \Rightarrow x = a/2$

6) $P'(x) < 0$ quando $x < a/2$ e $P'(x) > 0$ quando $x > a/2$.

Isso significa dizer que:

i) Há diversas funções quadráticas associadas ao evento, sendo elas da forma $P(x) = x^2 - ax = x(x - a)$.

ii) Todas as derivadas são descritas da seguinte maneira: $P'(x) = 2x - a$.

iii) Sempre existirá um valor mínimo para as funções em estudo.

Observe a representação geométrica abaixo:

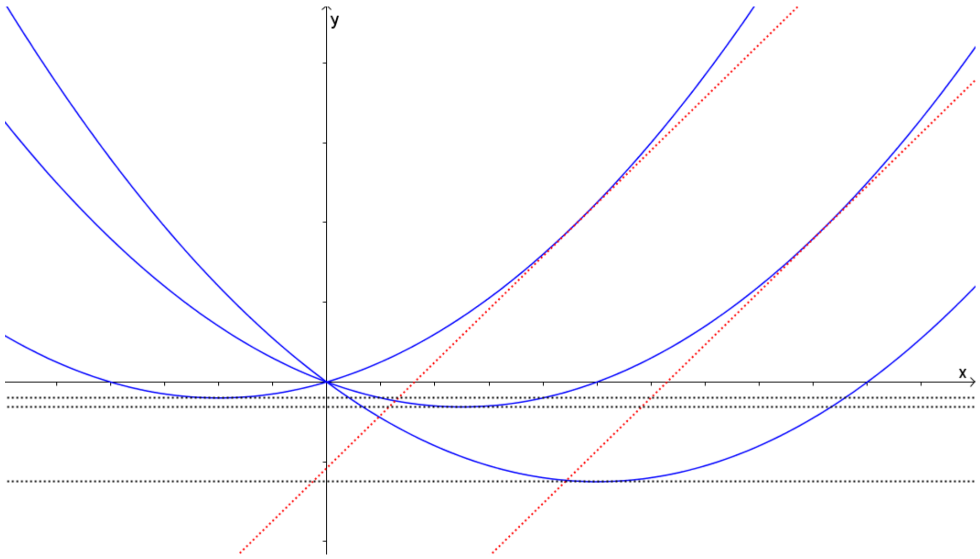

Figura 57- Gráfico da função P(x) contendo retas tangentes com mesmo coeficiente angular.

Trata-se de três parábolas referentes a três funções particulares para a função geral $P(x) = x^2 - ax$. Notamos que apesar das diferenças na disposição do plano cartesiano temos:

- Retas tangentes paralelas ao eixo x, caracterizando inclinação com valor nulo, ou seja, $P'(x) = 0$ para cada uma das parábolas.

- Retas tangentes paralelas não-nulas, ou seja, com mesma inclinação, apesar da existência de parábolas distintas, já que $P'(x) = 2x - a$ para toda $P(x) = x^2 - ax$.

Exemplo 4.

A posição de uma partícula é dada pela equação

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

Podemos dizer que relação posição e tempo representa uma função. Sendo assim, escrevemos:

$$s = f(t) \Leftrightarrow f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t \,.$$

Observe que a função obtida corresponde a uma função cúbica (representada por um polinômio de grau 3).

Vamos responder a alguns questionamentos:

1°) Qual a velocidade no instante de 2 segundos?

Falando de velocidade instantânea estaremos inserindo a taxa de variação instantânea e, dessa forma, a derivada. Então:

$$v_{inst} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ quando } \Delta t \to 0$$

Ou seja,

$$v_{inst} \Leftrightarrow f'(t).$$

Logo teremos:

$$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 .$$

A função derivada obtida é utilizada para determinar a velocidade instantânea em qualquer instante.

Para $t = 2$:

$$f'(2) = 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$$

Portanto, a velocidade no instante 2 segundos é – 3 m/s.

Vamos mostrar a representação gráfica da função:

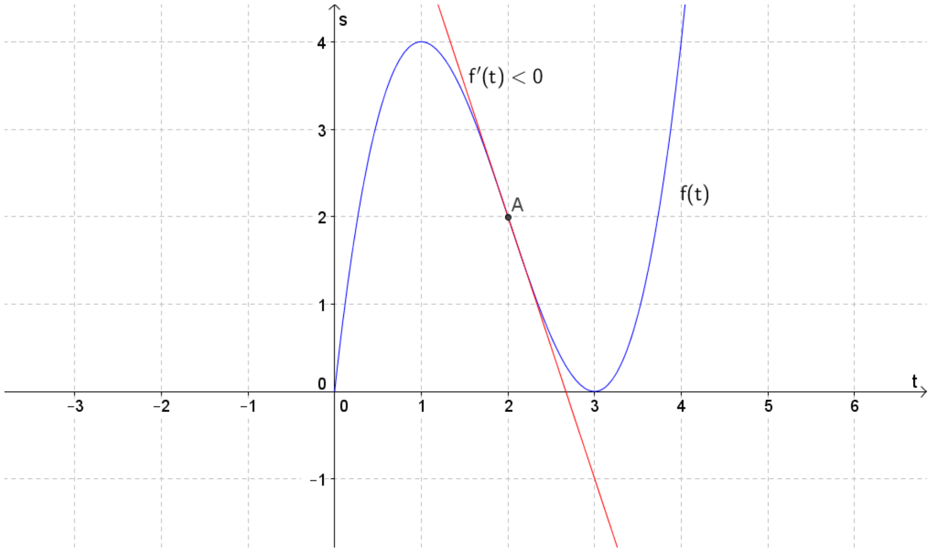

Figura 58 – Gráfico da função f(x) contendo uma reta tangente cujo coeficiente angular é negativo.

Observe que o ponto A (2,2) refere-se a relação entre a posição ocupada pela partícula (2 m) e o instante (2 s). Por ele passa uma reta tangente à curva cujo coeficiente angular é negativo ($f'(t) < 0$). O valor desse coeficiente ($f'(t) = -3$) representa a velocidade no instante $t = 2$ segundos.

2°) Quando a partícula está em repouso.

A partícula encontra-se em repouso no momento em que a velocidade instantânea é nula. Então

$$v_{inst} = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 0$$

Consequentemente,

$$3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0 \Rightarrow (t-1)(t-3) = 0$$

A derivada é nula em $t = 1$ ou $t = 3$. Dessa forma, a partícula está em repouso após 1 s e depois de 3 s.

Vamos fazer a análise geométrica:

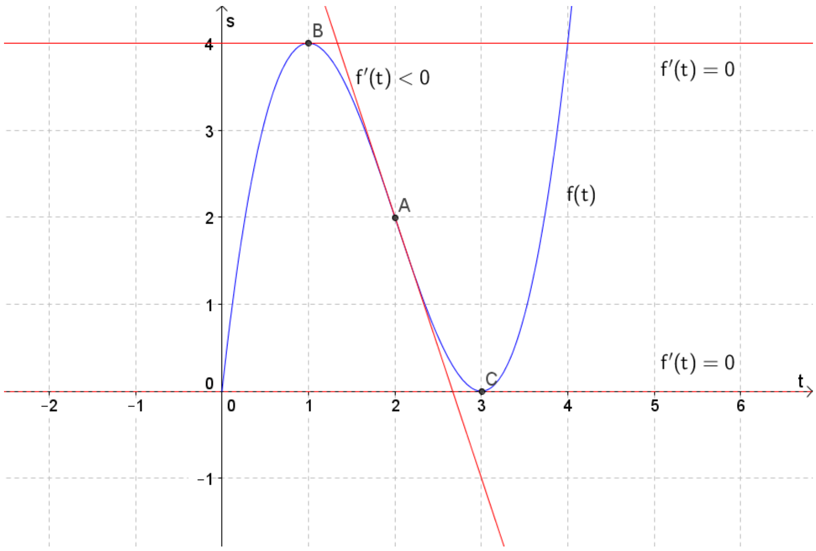

Figura 59 – Gráfico da função f(x) contendo retas tangentes cujo coeficiente angular é nulo.

Os pontos B (1,4) e C (3,0) determinam a relação posição e tempo onde a partícula possui velocidade nula. A derivada nesses pontos possui valor nulo ($f'(t) = 0$) e isso significa dizer que a reta tangente à curva será paralela ao eixo x, ou seja, seu coeficiente angular será zero (0). Os ponto B e C correspondem aos valores máximo e mínimo locais, respectivamente.

Observe que:

- Nos intervalos $0 \le t < 1$ e $t > 3$temos $f(t_1) < f(t_2)$ para $t_1 < t_2$. A função $f(t)$ é crescente e $f'(t) > 0$. A partícula move-se no sentido positivo.

- No intervalo $1 < t < 3$ temos $f(t_1) > f(t_2)$ para $t_1 < t_2$. A função $f(t)$ é decrescente e $f'(t) < 0$. A partícula move-se no sentido negativo.

- Quando a velocidade se anula, há mudança no sentido do movimento.

Considerações finais

O Cálculo é umas das áreas da Matemática de grande importância e aplicação para outras áreas do conhecimento. Muitas outras áreas utilizam seus diversos componentes para realização de eventos peculiares, para embasar pesquisas ou ainda para criação de algo novo. Podemos dizer que o avanço tecnológico e científico muitas vezes traz consigo o Cálculo como sustentador de diversas ideias.

Essas ideias podem ser iniciadas nas escolas. O espaço escolar é o melhor local para o desenvolvimento de competências e habilidades de natureza acadêmica. Nele, apresentamos aos alunos conceitos e definições acerca de determinados conteúdos cuja importância poderá ser realmente percebida e concretizada apenas em outros segmentos de ensino mais avançados.

Nessa perspectiva, apresentamos neste trabalho uma proposta para o ensino de derivadas de funções polinomiais no Ensino Médio baseada no estudo da reta tangente à uma função, com posterior associação às funções poligonais.

Nossa intenção foi promover uma sequência didática a ser utilizada nas aulas de matemática para alunos do Ensino Médio, visando introduzir conteúdos do Cálculo na Educação Básica, especificamente processos de derivação, de maneira distinta à encontrada nos livros didáticos que possuem capítulos destinados ao Cálculo.

Buscamos organizá-lo numa sequência de abordagens que possibilitassem o desenvolvimento do conceito em estudo e auxiliasse a exibição futura da definição formal de derivada.

Em nosso entendimento, a visualização seria essencial para compreensão de diversos conceitos e informações presentes nesse trabalho. Por isso, utilizamos um grande número de figuras contendo representações gráficas diversas para solidificar os elementos escritos. A inserção de situações-problema também se fez necessária, pois o público a que se destina este trabalho manifesta maior interesse no aprendizado de conteúdos cuja associação ao cotidiano seja evidenciada.

É importante ressaltar que a aplicação dessa proposta requer o empenho e conscientização do professor, da necessidade de rever o currículo no sentido de priorizar conteúdos essenciais, tais como as ideias do Cálculo, sugeridas por diversos autores já citados.

Necessitamos romper o ciclo em que os alunos ingressam nos cursos superiores de licenciatura das áreas exatas isentos de conhecimentos prévios necessários para um desempenho acadêmico satisfatório e professores com formação falha, inaptos de exercerem seu trabalho de forma plena e consciente.

Por fim, o desenvolvimento dessa proposta suscita a reflexão das prioridades definidas pelos professores na escolha dos conteúdos a serem desenvolvidos, já que mostramos um possível caminho para o desenvolvimento de atitudes capazes de incentivar a aquisição de conhecimentos importantes para o verdadeiro exercício da cidadania.

Referências Bibliográficas

ÁVILA, G. Cálculo das funções de uma variável. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. 2 v.

AVILA, G. O ensino de Cálculo no 2° grau. Revista do Professor de Matemática, n° 18, pp. 1– 9, 1991.

AVILA, G. Limites e derivadas no ensino médio? Revista do Professor de Matemática, nº 60, pp. 30 – 38, 2006.

BONGIOVANNI, V., VISSOTO, O.R. & LAUREANO, J.L.T. Matemática e Vida. 2o grau, volume 3, capítulos 32 e 33. Ática, pp. 299-320, 1993.

CARNEIRO, V.C. A Matemática aponta pontos críticos de outras ciências. Revista do Professor de Matemática, nº 22, p. 32. 1992.

DANTE, L.R. Matemática: contexto & aplicações. Ensino Médio, volume 1. Ática, p. 9 e p.165, 2004a

DANTE, L.R. Matemática: contexto & aplicações. Ensino Médio, Vol 3, Capitulo 8. Ática, 2004b.

FLEMING, Diva Marília & GONÇALVES, Mírian Buss. Cálculo A: funções, derivação, integração. 6 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2007.

FLEMING, Diva Marília & GONÇALVES, Mírian Buss. Cálculo B. 2 ed. São Paulo: Makron Books, 2007.

GIRALDO, V. Descrições e Conflitos computacionais: O Caso da Derivada. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2004.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC. 2000. 4 v.

GRAVINA, M. Um estudo de funções. Revista do Professor de Matemática, n° 20, SBM, pp.33 –38, 1992.

GUELLI, O. Matemática – série brasil. Ensino Médio. Volume Único. Ática. Sao Paulo. 2003.

IEZZI, G., MURAKAMI, C., MACHADO, N.J. Fundamentos da Matemática Elementar –limites, derivadas e noções de integral. Vol. 8. Atual. Sao Paulo. 2002.

IMENES, L.M. & LELLIS, M. A Matemática e o novo ensino médio. Educação Matematica em Revista, nº 9, ano 8, pp. 44-45, 2002a.

IMENES, L.M. & LELLIS, M. Matemática para todos. 8ª série, 4º ciclo. Scipione, pp. 287-288. 2002b.

LEI DE DIRETRIZES E BASES (LDB). Lei nº 9394 de 20 de dezembro de 1996. Titulo V,Capitulo I, Seção IV. p. 11. 1996.

LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 3 ed. São Paulo: HARBRA. 1994. 2 v.

LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio. Vol1. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACHADO, A.S. Matemática Temas e Metas – Funções e Derivadas. Vol. 6. Atual. São Paulo. 1991.

PARAMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN). Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, p 6, pp 40-46. 2000.

PCN+, Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias,

pp.117-118. 2002.

REZENDE, W.M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003.

SMOLE, K.S. & DINIZ, M.I. Matemática, ensino médio. Volume 3, Unidade 11. Editora Saraiva, pp. 277-285. 2003.

STEWART, J. Cálculo. São Paulo: Thomson Learning, 2005. 2 v.