



FRANSUERMESON CALDAS DE ANDRADE

INTRODUÇÃO INTUITIVA À TOPOLOGIA

Santo André, 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

FRANSUERMESON CALDAS DE ANDRADE

INTRODUÇÃO INTUITIVA À TOPOLOGIA

Orientadora: Profa. Dra. Dahisy Valadão de Souza Lima

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO FRANSUERMESON CALDAS DE ANDRADE,
E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. DAHISY VALADÃO DE SOUZA LIMA.

SANTO ANDRÉ, 2020

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Andrade, Fransuermeson Caldas de
INTRODUÇÃO INTUITIVA À TOPOLOGIA / Fransuermeson Caldas de
Andrade. — 2020.

127 fls. : il.

Orientadora: Dahisy Valadão de Souza Lima

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2020.

1. Topologia. 2. Espaços Métricos. 3. Funções Contínuas. 4. Topologia de
Superfícies. 5. Homeomorfismo. I. Lima, Dahisy Valadão de Souza. II.
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,
2020. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André , 09 de FEVEREIRO de 2021 .

FRANSVERMESON CALDAS DE ANDRADE

Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)

Dahisy Valdo de Souza Lima

Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, FRANSUERMESON CALDAS DE ANDRADE realizada em 30 de Novembro de 2020:

Prof.(a) PAULO HENRIQUE PEREIRA DA COSTA

Prof.(a) SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) MARIANA RODRIGUES DA SILVEIRA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) RODRIGO ROQUE DIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) DAHISY VALADAO DE SOUZA LIMA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura



Dedico este trabalho a toda minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa Natália de Souza, pelo apoio, amor, dedicação, compreensão e paciência durante esse anos, ao meu filho Theo Souza de Andrade por estar presente na minha vida.

À minha família, em especial meus pais, Francineldo e Joana, meus irmãos Larissa e Erik e a minha sogra Aparecida, que proporcionaram suporte para prosseguir nos meus estudos.

À minha orientadora professora Dra. Dahisy Valadão de Souza Lima, pela disposição em sempre tirar dúvidas, responder meus questionamentos e, principalmente, pelas contribuições, correções e sugestões que muito enriqueceram o trabalho.

A todos os colegas que, ao longo do curso proporcionaram momentos de muita alegria, risadas, companheirismos, ajuda nos grupos de estudos e proporcionaram ricas experiências.

Agradeço aos docentes do Mestrado Profissional da Universidade Federal do ABC (UFABC).

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

À CAPES pelo apoio financeiro e investimento na ampliação e na qualificação do ensino de Matemática no Brasil.

Enfim, agradeço a todos que colaboraram de alguma forma para realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Se você achar que os ensinamentos se aplicam a você, empregue-os à sua vida, o máximo que puder. Se não forem aplicáveis, deixe-os.”

(Dalai Lama do Tibete)

RESUMO

Este trabalho foi elaborado com o intuito de apresentar os conceitos básicos de topologia, em especial ao estudo intuitivo de superfícies. Inicialmente, abordamos os conceitos básicos e a definição formal de espaços métricos, bem como funções contínuas e homeomorfismos. Apresentamos um material sobre topologia básica, definindo seus elementos e, de maneira intuitiva, estabelecemos a classificação topológica para superfícies fechadas. Por fim, apresentamos algumas atividades que, de forma lúdica e intuitiva, podem ser aplicadas tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio.

Palavras-chave: Topologia, Espaços métricos, Homeomorfismo, Espaços topológicos, Superfícies.

ABSTRACT

This project was developed with the purpose of presenting the basic concepts of topology, in particular, the intuitive study of surfaces. Initially, we approach the basic concepts and the formal definition of metric spaces, as well as, continuous functions and homeomorphisms. We present a material on basic topology, defining its elements and, in an intuitive way, we establish a topological classification for closed surfaces. Lastly, we present some activities which in a playful and intuitive way can be applied in both elementary and high school.

Keywords: Topology, Metric spaces, Homeomorphism, Topological spaces, Surfaces.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO	1
1 ESPAÇOS MÉTRICOS	5
1.1 Métricas	5
1.2 Bolas e esferas	10
1.3 Conjuntos Limitados	16
1.4 Isometrias	18
2 FUNÇÕES CONTÍNUAS	21
2.1 Definição e exemplos	21
2.2 Propriedades das aplicações contínuas	25
2.3 Homeomorfismos	28
3 TOPOLOGIA BÁSICA	33
3.1 Espaços topológicos	33
3.2 Conjuntos fechados	37
3.3 Bases	38
3.4 Subespaços topológicos	39
3.5 Funções contínuas em espaços topológicos	40
3.6 Homeomorfismos	42
3.7 Topologia produto	46
3.8 Topologia quociente	47
4 TOPOLOGIA DE SUPERFÍCIES	55
4.1 Superfícies: noção intuitiva.	55
4.2 Geometria e Topologia	56
4.3 Superfícies sem bordo, diagramas e orientabilidade	61
4.4 Plano projetivo, Toro, faixa de Möbius e Garrafa de klein.	64
4.5 Soma conexa de superfícies	76
4.6 Característica de Euler	83
4.7 Classificação topológica das superfícies fechadas	89

5	SUGESTÃO DE ATIVIDADES	93
5.1	Uma faixa diferente I	93
5.2	Uma faixa diferente II	94
5.3	Uma faixa diferente III	96
5.4	Uma faixa diferente IV	97
5.5	Duas faixas simples juntas	99
5.6	Uma faixas simples e uma faixa de Möbius juntas	101
5.7	Duas faixas de Mobius com sentido de rotação contrário	101
5.8	Duas faixas de Möbius com mesmo sentido de rotação	103
5.9	Topologia X Geometria	105
5.10	Reconhecendo formas planas topologicamente equivalentes I	107
5.11	Reconhecendo formas planas topologicamente equivalentes II	108
5.12	Reconhecendo formas topologicamente equivalentes III	109
5.13	Reconhecendo formas topologicamente equivalentes IV	110
5.14	Descubra as propriedades topológicas das superfícies	111
5.15	Reconhecendo formas topologicamente equivalentes V	113
5.16	Reconhecendo formas topologicamente equivalentes e classificando a letras	114
A	APÊNDICE A	117
A.1	Faixa para impressão e recorte	117
B	APÊNDICE B	119
B.1	Modelo de atividade para impressão	119
	Bibliografia	127

INTRODUÇÃO

Durante uma conversa com colegas de profissão fui abordado sobre qual tema seria trabalhado em minha monografia do mestrado profissional em matemática. Durante alguns instantes comentei que estava pensando em estudar um pouco sobre topologia. Neste momento me deparei com uma situação inusitada quando meus colegas me abordaram com a seguinte pergunta. – Topologia fala sobre medir distâncias?

A confusão entre comparar topologia com topografia ajudou a decidir que o tema que eu deveria escrever seria sobre introdução à topologia e com isso levar aos colegas professores de matemática e aos alunos um saber que não aparece nos livros didáticos de matemática do ensino básico e até mesmo em muitos cursos de graduação.

Este trabalho tem o intuito de apresentar aos alunos, professores do ensino básico e interessados em conhecer um pouco sobre topologia uma visão da matemática contemporânea. Hoje a matemática continua crescendo e se atualizando, tendo em toda a parte do mundo pesquisadores que desenvolvem conceitos, artigos científicos e exploram todos os tipos de subáreas da matemática. Uma dessas subáreas da matemática é dedicada ao estudo da topologia. Existem vários ramos da topologia, como a topologia algébrica, que usa como instrumento a álgebra, a topologia geral, que se utiliza como instrumento da teoria dos conjuntos. A topologia geométrica é baseada no estudo dos conjuntos de propriedades que não se alteram com as deformações contínuas com inversas contínuas.

Topologia é uma palavra que resulta dos termos grego *topos*, “lugar”, e *logos*, “estudo”, cujo significado é o estudo das propriedades do espaço não afetadas por deformações contínuas. Uma maneira mais intuitiva é ver a topologia como um tipo de geometria. A **geometria** estuda os conceitos que se alteram com as deformações e as medidas associadas a elas como: distância, perímetro, áreas, ângulos, volume e curvaturas. Isso significa que ao fazer comparação de tamanho e medidas, de alguma forma acabam sendo importantes os conceitos geométricos. A **topologia** não se importa com medidas, se preocupa com o formato do objeto, mais especificamente, das propriedades que não se alteram com as deformações. A conexão entre dois pontos A e B pode ser feita com uma linha reta ou, de modo equivalente, com qualquer outra

linha, sendo a distância entre esses pontos irrelevante em topologia, como mostra a Figura 1.

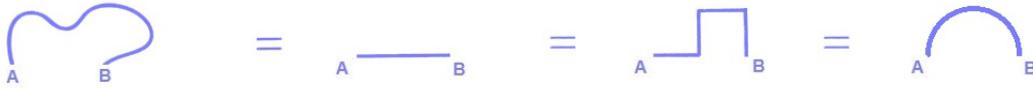


Figura 1: Conexão entre dois pontos.

Sob o ponto de vista topológico, quadrados, círculos ou triângulos são considerados um mesmo objeto básico, quando fazemos uma deformação contínua de um deles resultando em outro. Isso significa que na topologia não se fala em comprimentos, áreas, ângulos, etc. Na topologia é muito importante o conceito de homeomorfismo, isto é, transformações contínuas que podem ser desfeitas. Dois ou mais objetos podem ser topologicamente equivalentes se um puder ser deformado continuamente no outro e vice-versa. A Figura 2 ilustra um exemplo de como podemos a partir de alguns objetos deformar eles continuamente até obter outros.

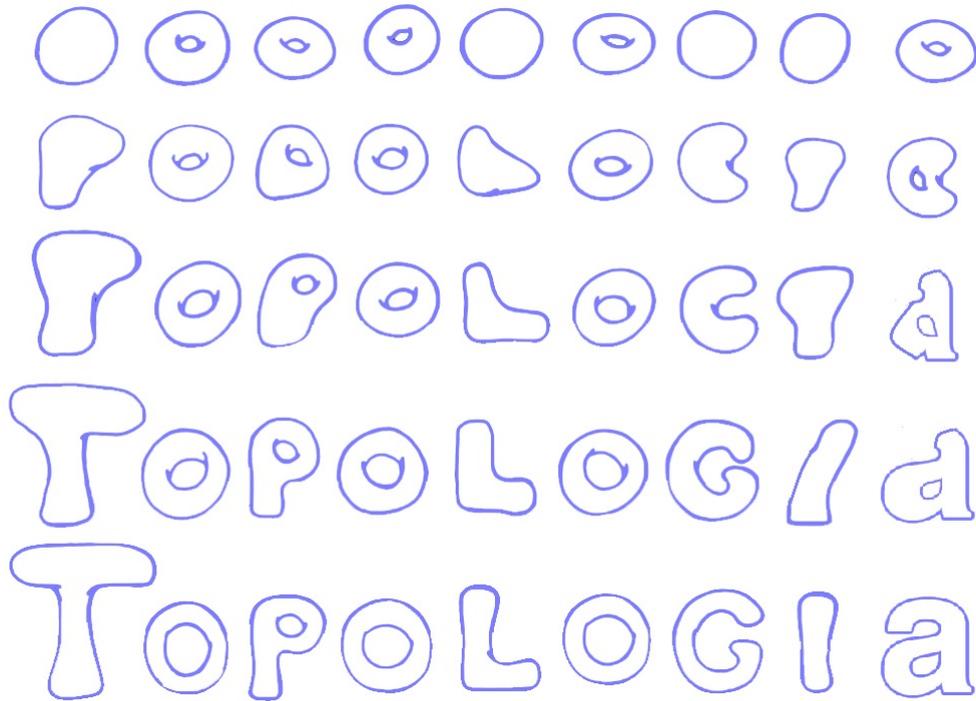


Figura 2: Deformando objetos.

O trabalho está dividido em cinco capítulos, com os seguintes temas: Espaços Métricos, Funções Contínuas, Topologia Básica, Topologia de Superfícies, Sugestão de Atividades, respectivamente. E que serão explorados, de forma mais simples e intuitiva possível, da seguinte maneira:

No Capítulo 1, serão apresentados os conceitos básicos de espaços métrico. Em especial, veremos como definir em \mathbb{R}^n três diferentes maneiras de medir distâncias equivalentes.

No Capítulo 2, apresentamos a noção de funções contínuas e algumas propriedades, destacando as funções Lipschitzianas e a definição de homeomorfismo em espaços métricos.

No Capítulo 3, substituiremos a noção de métrica, pelos conceitos iniciais de topologia que são baseados em grande parte na teoria de conjuntos, destacando a definição de espaços topológicos, homeomorfismos, topologia produto, topologia quociente e exemplos.

No Capítulo 4, apresentamos os conceitos básicos sobre topologia geométrica, em particular serão tratados de forma intuitiva e geométrica alguns aspectos da classificação topológica das superfícies. Exemplificamos a diferença entre geometria e topologia, listamos as deformações "legais e ilegais", que afetam ou não a topologia de uma superfície. Apresentamos a definição de superfície orientável, característica de Euler-Poincaré e de soma conexa.

No último capítulo, apresentamos algumas sugestões de atividade práticas, buscando oferecer aos alunos e professores uma introdução ao conhecimento de topologia, atividades lúdicas, manipulação geométrica, desenvolvimento lógico, transformações topológicas, exemplos de estruturas topológicas e diversas aplicações inerentes à topologia.

ESPAÇOS MÉTRICOS

Espaços métricos, em matemática, especialmente na topologia, é caracterizado por um conjunto onde a distância entre quaisquer dois de seus elementos é bem definida. Uma métrica é uma função que generaliza o conceito de distâncias. De modo intuitivo uma distância entre dois de seus pontos, é não negativa e deve satisfazer certas propriedades, como veremos a seguir. As referências para este capítulo são [5] e [6].

1.1 MÉTRICAS

Definição 1.1. Seja M um conjunto não vazio. Uma **métrica** em M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a **distância** de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- (1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$; (**Simétrica**)
- (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (**Desigualdade Triangular**)

Definição 1.2. Um par (M, d) , onde M é um conjunto e d uma métrica em M , é chamado de um **espaço métrico**.

Quando a métrica d for de fácil entendimento, podemos escrever somente M para indicar o espaço métrico (M, d) .

Exemplo 1.1. (Função zero-um ou métrica discreta). Sejam M um conjunto qualquer e $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Observe que as condições (1) e (2) da definição de espaços métricos são claramente satisfeitas. Para mostrar que d é uma métrica em M basta mostrar que d satisfaz a propriedade (3). De fato:

- i) Se $x = z$, então fica evidente que $d(x, z) = d(x, x) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$.
- ii) Se $x \neq z$, temos que $d(x, z) = 1$. Note que não pode ocorrer $x = y$ e $y = z$, simultaneamente, sendo assim $x \neq y$ ou $y \neq z$.
Para $x \neq y$, temos $d(x, z) = 1 \leq d(x, y) + d(y, z)$.
Para $y \neq z$, temos $d(x, z) = 1 \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Portanto, a função d é uma métrica em M e o par (M, d) é um espaço métrico.

Exemplo 1.2. (Métrica usual da reta). Consideremos o conjunto dos números reais \mathbb{R} e $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ a função definida por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Mostraremos que (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico, isto é, que d satisfaz as três propriedades de métrica.

- i) Vale que $d(x, y) = |x - y| \geq 0$. Além disso,

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

- ii) Como $|x - y| = |y - x|$, então $d(x, y) = d(y, x)$.
- iii) Temos que $|x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z|$. Assim obtemos, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Portanto, a função d é uma métrica em \mathbb{R} e o par (\mathbb{R}, d) é um espaço métrico. Observe que esse espaço métrico é uma reta, ou seja, o próprio conjunto \mathbb{R} consiste no exemplo mais conhecido de espaço métrico munido da função distância.

Exemplo 1.3. (Métrica Euclidiana). Consideremos o plano \mathbb{R}^2 e as funções $d_1, d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ definidas por

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

e

$$d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

Mostraremos que d_1 e d_2 são métricas em \mathbb{R}^2 , isto é, as três propriedades de métrica são satisfeitas.

Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

Caso d_1 :

i) Temos que $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 &\Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x_1 - y_1| = 0 \\ |x_2 - y_2| = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}. \end{aligned}$$

ii) Como $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$, então

$$d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1((y_1, y_2), (x_1, x_2)).$$

iii) Veja que

$$\begin{aligned} d_1((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \\ &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\ &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \\ &= d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d_1((y_1, y_2), (z_1, z_2)). \end{aligned}$$

Caso d_2 : As propriedades (1) e (2) da definição de métrica são imediatas e basta mostrar que a propriedade (3) é satisfeita para d_2 .

iii) Note que $d_2((x_1, x_2), (z_1, z_2)) = |x_1 - z_1|$ ou $d_2((x_1, x_2), (z_1, z_2)) = |x_2 - z_2|$.
Utilizando a desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned} |x_1 - z_1| &\leq |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| \\ &\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\} \\ &\text{e} \\ |x_2 - z_2| &\leq |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| \\ &\leq \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\}. \end{aligned}$$

Em qualquer um dos casos, a propriedade (3) é verificada.

Note que a distância entre dois pontos na geometria plana, pode ser facilmente deduzida através de uma demonstração analítica no plano, utilizando o Teorema de Pitágoras. Observe que, se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são pontos de \mathbb{R}^2 , esta distância é dada por

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Exemplo 1.4. (\mathbb{R}^n como espaço métrico). Este exemplo mostra três formas distintas de medir distâncias em \mathbb{R}^n a partir das seguintes métricas:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \\ d_2(x, y) &= \max |x_i - y_i|, \\ d_3(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \end{aligned}$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

As provas de que d_1 e d_2 são métricas em \mathbb{R}^n são semelhantes aos Exemplos 1.2 e 1.3. A seguir, mostraremos que d_3 define uma métrica em \mathbb{R}^n e a partir desse ponto adotaremos esta como padrão para os demais exemplos.

i) $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos:

Se $x = y$,

$$\begin{aligned} d_3(x, x) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $d_3(x, x) = 0$.

Se $x \neq y$, temos que $\exists i$ tal que $x_i \neq y_i$, daí:

$$\begin{aligned} d_3(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &\geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} = |x_i - y_i| \\ &> 0 \end{aligned}$$

Logo, $d_3(x, y) \geq 0$.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} d_3(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n [(-1)(y_i - x_i)]^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (-1)^2 (y_i - x_i)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

Logo, $d_3(x, y) = d_3(y, x)$.

iii) Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, mostraremos que $d_3(x, y) \leq d_3(x, z) + d_3(z, y)$.

Veja que:

$$\begin{aligned}
 [d_3(x, y)]^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \cdot (z_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \cdot \left[\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\
 &= \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} \right]^2 \\
 &= [d_3(x, z) + d_3(z, y)]^2,
 \end{aligned}$$

A validade da desigualdade acima é obtida pela **desigualdade de Cauchy-Schwarz**¹

Logo, $d_3(x, y) \leq d_3(x, z) + d_3(z, y)$.

Portanto a função d_3 é uma métrica sobre \mathbb{R}^n e o par (\mathbb{R}^n, d_3) é um espaço métrico.

Definição 1.3. (Métrica induzida). Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $X \subset M$, pode ser considerado como espaço métrico se considerarmos a restrição de d a $X \times X$, ou seja, usar entres os elementos de X a mesma distância que eles possuíam como elementos de M . Quando isto é feito, (X, d) é chamado **subespaço** de (M, d) .

1.2 BOLAS E ESFERAS

Definição 1.4. Seja M um espaço métrico e a um ponto em M . Dado $r > 0$ um número real, definimos bola aberta, bola fechada e esfera da seguinte maneira:

1. A **bola aberta** de centro a e raio r é o conjunto, denotado por $B(a; r)$, dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r . Ou seja,

$$B(a; r) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}.$$

¹ A desigualdade de Cauchy-Schwarz, dada por $|x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$, para $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, aparece em muitos contextos da matemática, como na álgebra linear, na análise matemática, na resolução de problemas, etc. A demonstração dessa desigualdade pode ser obtida no livro [2].

2. A **bola fechada** de centro a e raio r é o conjunto, denotado por $B[a; r]$, formado pelos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a . Ou seja,

$$B[a; r] = \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}.$$

3. A **esfera** de centro a e raio r é o conjunto, denotado por $S(a; r)$, formado pelos pontos $x \in M$ tais que $d(x; a) = r$. Assim:

$$S(a; r) = \{x \in M \mid d(a, x) = r\}.$$

Note que $B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r)$ representa uma união disjunta.

Se $X \subset M$ é um subespaço de M e $a \in X$, as bolas aberta e fechada de centro a e raio r em X serão indicadas, respectivamente, por $B_X(a; r)$ e $B_X[a; r]$, enquanto a esfera de centro a e raio r será indicada por $S_X(a; r)$.

Observe que

$$B_X(a; r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\} = B(a; r) \cap X,$$

$$B_X[a; r] = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\} = B[a; r] \cap X,$$

$$S_X(a; r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\} = S(a; r) \cap X.$$

Exemplo 1.5. Consideremos M com a métrica do Exemplo 1.1 (métrica “zero-um”), ou seja,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Dados $x, a \in M$, temos:

$$d(x, a) < 1 \Leftrightarrow x = a \quad \text{e} \quad d(x, a) \geq 1 \Leftrightarrow x \neq a.$$

Dados $a \in M$ e $r = 1$, então

$$B(a; 1) = \{x \in M \mid d(x, a) < 1\} = \{a\};$$

$$S(a; 1) = \{x \in M \mid d(x, a) = 1\} = M - \{a\};$$

$$B[a; 1] = \{x \in M \mid d(x, a) \leq 1\} = M.$$

Dados $a \in M$ e $r > 1$, então

$$B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\} = M;$$

$$S(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) = r\} = \emptyset;$$

$$B[a; r] = B(a; r) \cup S(a; r) = M \cup \emptyset = M.$$

Dados $a \in M$ e $0 < r < 1$, então

$$B(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\} = \{a\};$$

$$S(a; r) = \{x \in M \mid d(x, a) = r\} = \emptyset;$$

$$B[a; r] = \{a\} \cup \emptyset = \{a\}.$$

Exemplo 1.6. Considere \mathbb{R} com a **métrica usual** da reta, apresentada no Exemplo 1.2.

Para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, temos:

1. A bola aberta $B(a; r)$ é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$. Com efeito,

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < r\} \Leftrightarrow |x - a| < r \Leftrightarrow -r < x - a < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r.$$

2. A bola fechada $B[a; r]$ é o intervalo fechado $[a - r, a + r]$. De fato,

$$B[a; r] = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) \leq r\} \Leftrightarrow |x - a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r.$$

3. A esfera $S(a; r)$ possui apenas os pontos $a - r$ e $a + r$, já que

$$S(a; r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) = r\} \Leftrightarrow |x - a| = r.$$

Exemplo 1.7. No Exemplo 1.4, apresentamos três métricas que são equivalentes d_1 , d_2 e d_3 para \mathbb{R}^2 . Vejamos as correspondentes bolas:

1. Considere (\mathbb{R}^2, d_1) , onde $d_1(x, a) = |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|$. Uma bola aberta de centro a e raio r corresponde ao interior de um quadrado de centro a e diagonais paralelas aos eixos, cada uma medindo $2r$. Veja Figura 3.

$$\text{Se } a = (0, 0) \text{ e } r = 1, \text{ então } d_1((x, y), (0, 0)) = |x| + |y|.$$

Note que, dado $(x, y) \in B(a, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$, temos:

- a) Se $x = 0$ e $|y| < 1$, então $-1 < y < 1$;
- b) Se $y = 0$ e $|x| < 1$, então $-1 < x < 1$;
- c) $x > 0, y > 0$ temos que $x + y < 1$, ou seja, $y < 1 - x$;
- d) $x < 0, y > 0$ temos que $-x + y < 1$, ou seja, $y < 1 + x$;
- e) $x > 0, y < 0$ temos que $x - y < 1$, ou seja, $-y < 1 - x$;
- f) $x < 0, y < 0$ temos que $-x - y < 1$, ou seja, $-y < 1 + x$.

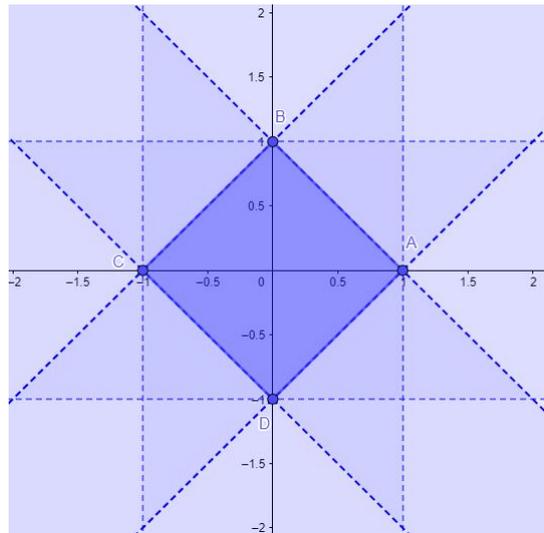


Figura 3: Bola aberta $B((0,0), 1)$ em (\mathbb{R}^2, d_1) .

2. Considere (\mathbb{R}^2, d_2) onde $d_2(x, a) = \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\}$. A bola aberta $B(a, r)$ de centro a e raio r , corresponde ao interior de um quadrado de centro a e lados paralelos aos eixos com medida $2r$ cada. Veja Figura 2.

Se $a = (0,0)$ e $r = 1$. Temos $d_2((x, y), (0,0)) = \max\{|x|, |y|\}$, então $B(a, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\}$.

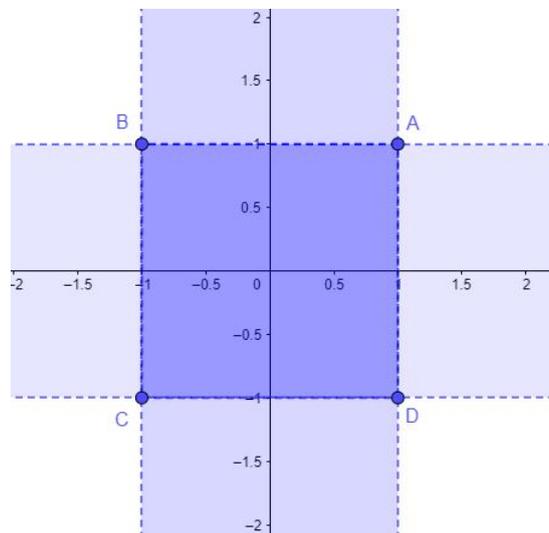


Figura 4: Bola aberta $B((0,0), 1)$ em (\mathbb{R}^2, d_2) .

3. Considere (\mathbb{R}^2, d_3) , onde $d_3(x, a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$. A bola aberta $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, a) < r\}$ corresponde ao interior de um círculo de centro a e raio r . Veja Figura 3.

Sejam $a = (0, 0)$ e $r = 1$. Temos $d_3((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2}$, então $B(a, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

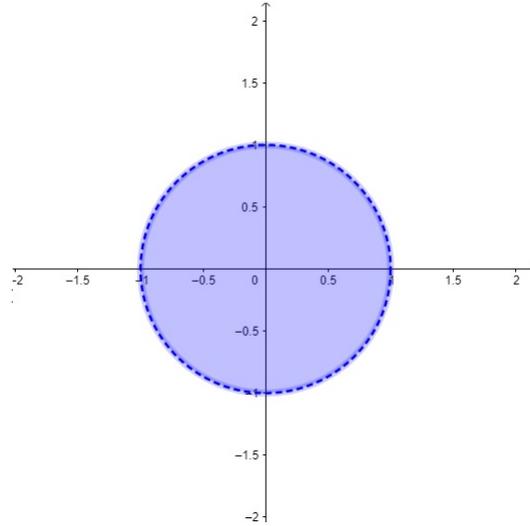


Figura 5: Bola aberta $B((0,0), 1)$ em (\mathbb{R}^2, d_3) .

Definição 1.5. Dado um espaço métrico (M, d) , um conjunto $A \subseteq M$ é um **aberto** em M se, para cada ponto $a \in A$, existe $r_a > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$.

Definição 1.6. Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ é um **ponto isolado** de M se existe uma bola em torno de a que não contém nenhum ponto de M , ou seja, se existe $r > 0$ tal que $B(a; r) = a$.

Definição 1.7. Quando todos os pontos de um espaço métrico M são pontos isolados, chamamos M de um **espaço métrico discreto**.

Exemplo 1.8. Seja (\mathbb{R}, d) a reta com a métrica usual. Considere o conjunto dos naturais \mathbb{N} como subespaço métrico de \mathbb{R} com a métrica induzida. Então (\mathbb{N}, d) é um espaço métrico discreto.

Com efeito, dado $a \in \mathbb{N}$, tome $\delta < 1$, então a bola $B(a, \delta)$ não contém nenhum ponto de \mathbb{N} diferente de a . Veja Figura 6.

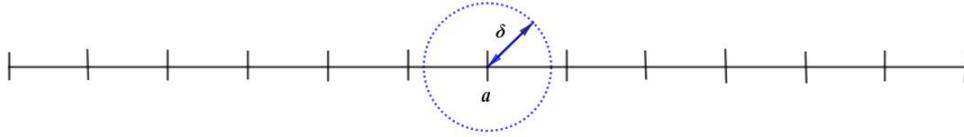


Figura 6: Métrica induzida na reta

Pela arbitrariedade de a , segue que (\mathbb{N}, a) é um espaço métrico discreto.

Analogamente, pode-se mostrar que \mathbb{Z} e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com as métricas induzidas de \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 , respectivamente, são exemplos de espaços métricos discretos.

Proposição 1.8. *Seja M um espaço métrico. Dados pontos $a, b \in M$ tais que $a \neq b$, sejam $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s \leq d(a, b)$, então as bolas abertas $B(a; r)$ e $B(b; s)$ são disjuntas.*

Demonstração.

Suponha por absurdo que as bolas abertas $B(a; r)$ e $B(b; s)$ não são disjuntas, ou seja, existe $x \in B(a; r) \cap B(b; s)$. Então teríamos $d(a, x) < r$ e $d(x, b) < s$. Assim,

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + s \leq d(a, b),$$

onde a primeira desigualdade decorre da condição (3) de métrica, e a última desigualdade decorre da hipótese. Logo, chegamos que $d(a, b) < d(a, b)$, o que é uma contradição. Portanto, as bolas $B(a; r)$ e $B(b; s)$ são disjuntas.

A Figura 7 ilustra essa demonstração. □

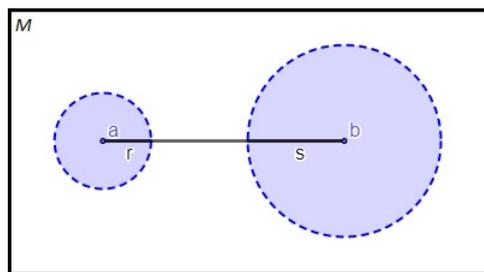


Figura 7: Bolas abertas disjuntas.

1.3 CONJUNTOS LIMITADOS

Definição 1.9. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M . Dizemos que X é **limitado** quando existe $k > 0$ constante tal que $d(x, y) \leq k$, para quaisquer $x, y \in X$.

Se $x, y \in X$ então $d(x, y) \leq k$, isso significa que k é uma cota superior para o conjunto das distâncias $d(x, y)$ entre pontos do subconjunto X .

A menor das cotas superiores de um conjunto de números reais chama-se o *supremo* desse conjunto.

Proposição 1.10. Um conjunto $X \subset M$ é **limitado** se, e somente se, $X \subset B[a; r]$ para alguma bola $B[a; r]$ de M .

Demonstração. De fato, se $X \subset M$ para algum $a \in M$ e $r > 0$, então dados $x, y \in X$ temos

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq r + r = 2r.$$

Logo, se $X \subset M$, então X é limitado. Por outro lado, se X é limitado, isto é, se existir $k > 0$ tal que

$$d(x, y) \leq k$$

para quaisquer $x, y \in X$, então dado $a \in X$, tomamos $r = k$ e teremos que

$$d(x, a) \leq k = r$$

para todo $x \in X$, isto é, $X \subset B[a; r]$.

□

Definição 1.11. Seja X um subconjunto limitado de um espaço métrico M . Chamamos **diâmetro** de X ao supremo² dos números $d(x, y)$ com $x, y \in X$. Assim o diâmetro é o número real dado por

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

Para indicar que X não é limitado, escreve-se $\text{diam}(X) = \infty$. Neste caso, para qualquer que seja o número k , podem-se obter pontos $(x_k, y_k) \in X$, tais que $d(x_k, y_k) > k$.

Observe que se X é limitado e $Y \subset X$, então Y também é limitado e $\text{diam}(Y) \leq \text{diam}(X)$. De fato, se X é limitado então $\exists k > 0$, tal que $d(x, y) \leq k, \forall x, y \in X$. Sejam

² A definição de supremo pode ser encontrada em [2]

$x_0, y_0 \in Y$, como por hipótese $Y \subset X$, então $x_0, y_0 \in X$. Logo, $d(x_0, y_0) \leq k$ e portanto, Y também é limitado.

Proposição 1.12. *Sejam $a \in M$ e $r > 0$, então $B(a; r)$ é um conjunto limitado e $\text{diam}(B(a; r)) \leq 2r$. O mesmo vale para a bola fechada $B[a; r]$ e a esfera $S(a; r)$.*

Demonstração.

Dados $x, y \in B(a; r)$, temos que $d(x, a) < r$ e $d(y, a) < r$. Assim,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r.$$

Veja também que, se $x, y \in B[a; r]$, temos que $d(x, a) \leq r$ e $d(y, a) \leq r$. Então,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq r + r = 2r.$$

Da mesma forma, sejam $x, y \in S(a; r)$, temos que $d(x, a) = r$ e $d(y, a) = r$. Logo,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) = r + r = 2r.$$

□

Observe que pode acontecer que o diâmetro seja menor do que $2r$. Neste caso, basta analisar o Exemplo 1.5 para verificar que $S(a; r) = \emptyset$.

Proposição 1.13. *Se X e Y são conjuntos limitados, então $X \cup Y$ é limitado.*

Demonstração.

Fixando um ponto $a \in X$ e um ponto $b \in Y$, existem $k_1, k_2 > 0$ tais que $d(x, a) \leq k_1$ e $d(y, b) \leq k_2$ para todo $x \in X$ e todo $y \in Y$.

Caso $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$ não há o que mostrar. Assuma $X \neq \emptyset$ e $Y \neq \emptyset$.

Tomando $l = k_1 + k_2 + d(a, b)$, temos que, para $x \in X$ e $y \in Y$ arbitrários:

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y) \leq k_1 + d(a, b) + k_2 = l.$$

Logo, $d(x, y) \leq l$ para todo $x, y \in X \cup Y$, o que mostra que a união $X \cup Y$ é um conjunto limitado. □

Note que, aplicando este resultado $n - 1$ vezes, isto é, usando o princípio de indução, concluímos que a união $X_1 \cup \dots \cup X_n$ de n conjuntos limitados é um conjunto limitado. Em particular, todo conjunto finito, sendo união dos seus pontos, é limitado.

1.4 ISOMETRIAS

Definição 1.14. Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \rightarrow N$ é chamada **imersão isométrica** quando preserva distâncias, isto é, quando para quaisquer $x, y \in M$ tivermos $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Uma *imersão isométrica* $f : M \rightarrow N$ é sempre injetora pois $f(x) = f(y) \Rightarrow d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$.

Exemplo 1.9. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x, 0)$. Considere as métricas usuais em \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 . Temos,

$$d(f(x), f(y)) = d((x, 0), (y, 0)) = \sqrt{(x - y)^2 + 0^2} = |x - y| = d(x, y).$$

Portanto, f é uma imersão isométrica.

Exemplo 1.10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (x, y, 0)$.

Temos,

$$d(f(x, y), f(x', y')) = d((x, y, 0), (x', y', 0)) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 0^2} = d((x, y), (x', y')).$$

Portanto, f é uma imersão isométrica.

Definição 1.15. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é chamada **isometria** se ela for uma imersão isométrica sobrejetiva. Toda imersão isométrica $f : M \rightarrow N$ define uma isometria de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.

Exemplo 1.11. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x$ é uma isometria.

De fato,

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |-x - (-y)| = d(x, y).$$

Portanto, f é imersão isométrica e sobrejetiva. Logo, isometria.

Exemplo 1.12. A função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (y, x)$ é uma isometria.

De fato,

$$d(f(x, y), f(x', y')) = d((y, x), (y', x')) = \sqrt{(y - y')^2 + (x - x')^2} = d((x, y), (x', y')).$$

Como, f é uma função sobrejetiva, segue que f é isometria.

Observação 1.4.1. *Note que a composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são ainda isometrias. Reflexões, translações e rotações também são isometrias.*

Agora vejamos alguns exemplos de funções que não são isometrias.

Exemplo 1.13. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ não é isometria. De fato,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \\ &= ||x| - |y|| \\ &\leq |x - y| \\ &\leq d(x, y). \end{aligned}$$

Segue da Definição 1.14 que a função f não é uma imersão isométrica e da Definição 1.15 que a função f não é uma isometria. Por exemplo, $d(f(2), f(-1)) = d(2, 1) = 1$, mas $d(2, -1) = 3$, ou seja, $d(f(2), f(-1)) < d(2, -1)$.

Exemplo 1.14. Sejam \mathbb{R} com a métrica usual e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{2}$. Temos que,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \\ &= \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |x - y| \\ &= \frac{1}{2} \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

Logo, não é uma isometria.

FUNÇÕES CONTÍNUAS

Introduziremos a definição de função contínua em um espaço métrico. As funções contínuas possuem características importantes e ao mesmo tempo estão presentes em inúmeros eventos do nosso cotidiano. A ideia de continuidade se deve primeiramente ao matemático francês, Agustin Louis Cauchy, que no ano 1821, em sua obra *Cour's d'Analyse*, apresentou a noção intuitiva de continuidade. As principais referências bibliográficas para este capítulo são [2], [4] e [5].

2.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

Definição 2.1. Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \rightarrow N$ é **contínua** num ponto $a \in M$ quando, dado $\varepsilon > 0$, é possível obter $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, para todo $x \in M$ com $d(x, a) < \delta$.

Se f é contínua em todos os pontos $a \in M$, então f é dita **contínua**.

Observe que em termos de bolas abertas, temos que $f : M \rightarrow N$ é contínua em a se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. Veja a Figura 8.

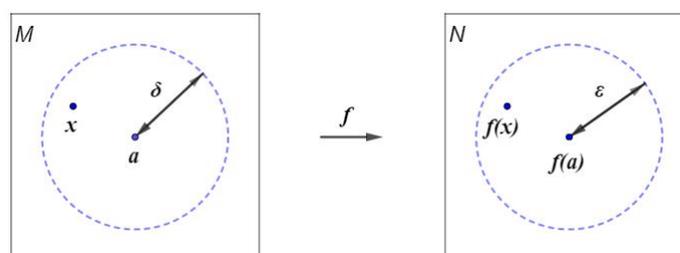


Figura 8: Bolas abertas

Exemplo 2.1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ e a métrica usual em \mathbb{R} . Mostraremos que f é contínua no ponto $a = 0$.

Dado ε , queremos encontrar um $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(0)) < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que cumpra $d(x, 0) < \delta$. Isto é, obtemos

$$|x^2| = |x^2 - 0^2| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$|x| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Para tal, é suficiente tomar $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ e teremos

$$d(f(x), f(0)) = |x^2 - 0^2| < \varepsilon,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ com $d(x, 0) = |x| < \delta$.

Exemplo 2.2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x, x)$. Considere as métricas usuais em \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 . Vamos mostrar que f é contínua.

Dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &= d((x, x), (a, a)) \\ &= \sqrt{(x-a)^2 + (x-a)^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot |x-a|. \end{aligned}$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, temos que, se $|x-a| = d(x, a) < \delta$, então

$$d(f(x), f(a)) = \sqrt{2} \cdot |x-a| < \sqrt{2} \cdot \delta = \sqrt{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon.$$

Logo, f é contínua em $a \in \mathbb{R}$. Como a foi tomado de forma arbitrária, temos que f é contínua.

Exemplo 2.3. Considere o conjunto dos naturais \mathbb{N} com a métrica induzida da reta. Seja P um espaço métrico qualquer, então toda função $f : \mathbb{N} \rightarrow P$ é contínua.

Com efeito, dados $a \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = 1$ e teremos que $d(x, a) < \delta$ fornece $x = a$. Assim $d(f(x), f(a)) = d(f(a), f(a)) = 0 < \varepsilon$.

Definição 2.2. Uma função $f : M \rightarrow N$ é uma função de **Lipschitz** (ou lipschitziana) se existe $k > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y), \forall x, y \in M.$$

A constante k é chamada *constante de Lipschitz* da função f .

Proposição 2.3. Se $f : M \rightarrow N$ é lipschitziana então f é contínua.

Demonstração.

De fato, sendo f uma aplicação lipschitziana, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y), \forall x, y \in M.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ e tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, temos

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

sempre que $d(x, y) < \delta$.

Portanto, f é contínua em M .

□

Proposição 2.4. Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções lipschitzianas, o mesmo ocorre com $f + g$ e $c \cdot f$, para $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração.

Temos, por hipótese, que f e g são lipschitzianas, ou seja, existem $k_1, k_2 > 0$ tais que

$$d(f(x), f(y)) \leq k_1 \cdot d(x, y), \forall x, y \in M,$$

e

$$d(g(x), g(y)) \leq k_2 \cdot d(x, y), \forall x, y \in M.$$

A seguir, consideramos a métrica usual em \mathbb{R} .

i) $f + g$ é lipschitziana:

Como $(f + g)(x), (f + g)(y) \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
 d((f + g)(x), (f + g)(y)) &= |(f + g)(x) - (f + g)(y)| \\
 &= |f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| \\
 &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\
 &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\
 &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\
 &= d(f(x), f(y)) + d(g(x), g(y)) \\
 &\leq k_1 \cdot d(x, y) + k_2 \cdot d(x, y) \\
 &\leq (k_1 + k_2) \cdot d(x, y).
 \end{aligned}$$

Portanto, $d((f + g)(x), (f + g)(y)) \leq (k_1 + k_2) \cdot d(x, y)$, ou seja, $f + g$ é *lipschitziana*.

ii) $c \cdot f$ é *lipschitziana*: Como a imagem da função f é um subconjunto de \mathbb{R} , temos

$$\begin{aligned}
 d(c \cdot f(x), c \cdot f(y)) &= |c \cdot f(x) - c \cdot f(y)| \\
 &= |c \cdot (f(x) - f(y))| \\
 &= |c| \cdot |f(x) - f(y)| \\
 &= |c| \cdot d(f(x), f(y)).
 \end{aligned}$$

Como por hipótese f é uma função *lipschitziana* então $d(f(x), f(y)) \leq k_1 \cdot d(x, y)$, $\forall x, y \in M$, obtemos

$$d(c \cdot f(x), c \cdot f(y)) = |c| \cdot d(f(x), f(y)) \leq |c| \cdot k_1 \cdot d(x, y).$$

Tomando $|c| \cdot k_1 = k_3 > 0$, com $k_3 \in \mathbb{R}$, concluímos que

$$d(c \cdot f(x), c \cdot f(y)) \leq k_3 \cdot d(x, y).$$

Portanto, $c \cdot f$ é uma função *lipschitziana*. □

Definição 2.5. Se $f : M \rightarrow N$ é uma função que satisfaz $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, dizemos que f é uma **contração fraca**. Neste caso f é uma função *lipschitziana* com constante $k = 1$ e portanto uma função contínua.

Exemplo 2.4. A aplicação *constante* $f : M \rightarrow N$, $f(x) = c$, para todo $x \in M$ e $c \in \mathbb{R}$ é uma *contração fraca*. Pela própria definição, $d(f(x), f(y)) = d(c, c) = 0$.

Assim, $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in M$, obtemos que

$$d(f(x), f(y)) = d(c, c) = 0 \leq d(x, y).$$

Exemplo 2.5. (Descontinuidade). Sejam M, N espaços métricos. Se $f : M \rightarrow N$ não é contínua no ponto a , chamamos f de uma função **descontínua** nesse ponto. Isto é, existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, pode se obter $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ e $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$. Note que x_δ depende de δ .

Um exemplo de descontinuidade é a função característica do conjunto \mathbb{Q} dos números racionais. Mais especificamente, seja a função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$, γ é descontínua. De fato, basta tomar $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dado $\delta > 0$, se $a \notin \mathbb{Q}$, tomemos $x_\delta \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$. Então $|\gamma(x_\delta) - \gamma(a)| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$.

Agora, se $a \in \mathbb{Q}$, basta tomar $x_\delta \notin \mathbb{Q}$, segue o mesmo resultado.

Observação 2.1.1. Dada uma aplicação $f : M \rightarrow N$, seja $N_1 \subset N$ um subespaço tal que $f(x) \in N_1$ para todo $x \in M$. Então f pode também ser considerada como uma aplicação de M em N_1 , digamos $f_1 : M \rightarrow N_1$. Então f é contínua se, e somente se, f_1 é contínua.

2.2 PROPRIEDADES DAS APLICAÇÕES CONTÍNUAS

Proposição 2.6. Se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto a e $g : N \rightarrow P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua no ponto a , ou seja, a composta de duas aplicações contínuas é contínua.

Demonstração.

Dado $\varepsilon > 0$ e sendo g contínua no ponto $f(a)$, existe $\lambda > 0$, tal que

$$y \in N, d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Para $\lambda > 0$ e sendo f contínua no ponto a , podemos obter $\delta > 0$, tal que

$$x \in M, d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda.$$

Assim, segue que

$$d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon.$$

A Figura 9 ilustra esta demonstração:

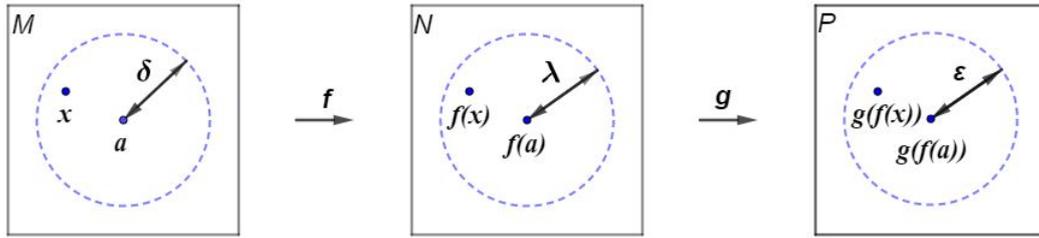


Figura 9: Composição de funções

□

Corolário 2.7. Se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in X \subset M$, então $f|_X$ é contínua no ponto a .

Demonstração.

Sendo $f|_X$ a função f restrita ao conjunto X , temos uma composição do tipo $f \circ i$, onde $i : X \rightarrow M$ é uma função de inclusão, ou seja, $i(x) = x$, com $x \in X$. Assim, $d(i(x), i(a)) = d(x, a)$, em particular, $d(i(x), i(a)) \leq d(x, a)$, logo pela Definição 2.5, i é uma contração fraca e contínua. Como a função f é contínua, a Proposição 2.6 nos permite afirmar que a composição $f \circ i$ é contínua. Portanto, $f|_X$ é contínua.

□

Definição 2.8. Dados os espaços métricos M, N_1 e N_2 , uma aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$ equivale a um par de aplicações $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$, chamadas as **coordenadas** de f , tais que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ ou $f = (f_1, f_2)$ para todo $x \in M$. Considerando-se as projeções $p_1 : N_1 \times N_2 \rightarrow N_1$ e $p_2 : N_1 \times N_2 \rightarrow N_2$, tem-se $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$, onde consideramos em $N_1 \times N_2$ a métrica $d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$.

Proposição 2.9. A aplicação $f : M \rightarrow N_1 \times N_2$ é contínua no ponto $a \in M$ se, e somente se, suas coordenadas $f_1 : M \rightarrow N_1$ e $f_2 : M \rightarrow N_2$ são contínuas no ponto $a \in M$.

Demonstração.

(\Rightarrow) Se f é contínua então o mesmo ocorre com $f_1 = p_1 \circ f$ e $f_2 = p_2 \circ f$ porque as projeções p_1 e p_2 também são contínuas.

(\Leftarrow) Dado $\varepsilon > 0$, como f_1 e f_2 são contínuas no ponto a , existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon$ e $d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon$. Tome $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, daí $d(x, a) < \delta_0 \Rightarrow \max\{d(f_1(x), f_1(a)), d(f_2(x), f_2(a))\} < \varepsilon$. Logo f é contínua no ponto a . □

Proposição 2.10. Se $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas com valores reais, então $f + g$, $f \cdot g$ e f/g quando $g(x) \neq 0$ para todo $x \in M$ são funções contínuas.

Demonstração.

i) Dado $a \in M$, vamos provar que $f + g$ é contínua em a .

Dado $\varepsilon > 0$, como f e g são contínuas em a , existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que

$$d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(g(x), g(a)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Considerando a métrica usual em \mathbb{R}

$$\begin{aligned} d((f + g)(x), (f + g)(a)) &= |(f + g)(x) - (f + g)(a)| \\ &= |f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &\leq d(f(x), f(a)) + d(g(x), g(a)). \end{aligned}$$

Para $x \in M$ tal que $d(x, a) < \delta$, temos que

$$d((f + g)(x), (f + g)(a)) \leq d(f(x), f(a)) + d(g(x), g(a)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Segue que $f + g$ é contínua em a .

As provas que $f \cdot g$ e f/g quando $g(x) \neq 0$ para todo $x \in M$ são funções contínuas e podem ser encontradas em qualquer livro de cálculo. □

2.3 HOMEOMORFISMOS

Definição 2.11. Sejam M e N espaços métricos. Um **homeomorfismo** de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \rightarrow N$ cuja a inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ também é contínua. Neste caso, diz-se que M e N são **homeomorfos** ou topologicamente equivalentes.

Teorema 2.12. Se $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ são homeomorfismos, então $g \circ f : M \rightarrow P$ e $f^{-1} : N \rightarrow M$ também são homeomorfismos.

Demonstração.

Por hipótese f e g são bijeções contínuas com inversas f^{-1} e g^{-1} contínuas. Queremos provar que $g \circ f$ é homeomorfismo, isto é, uma bijeção contínua com inversa contínua.

i) $g \circ f$ é injetora:

Dados $x_1, x_2 \in M$, suponha que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Então $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g é injetora, temos que $f(x_1) = f(x_2)$. Sendo f injetora, temos $x_1 = x_2$.

ii) $g \circ f$ é sobrejetora:

Dado $y \in P$, como g é sobrejetora, existe $a \in N$ tal que $g(a) = y$. Sendo f sobrejetora, existe $x \in M$ de modo que $f(x) = a$. Logo, $g(f(x)) = g(a) = y$. Portanto, $g \circ f$ é sobrejetora.

iii) Pelos itens i e ii concluímos que $g \circ f$ é bijetora.

iv) $g \circ f$ é contínua:

Segue da Proposição 2.6 que a composta de funções contínuas é contínua.

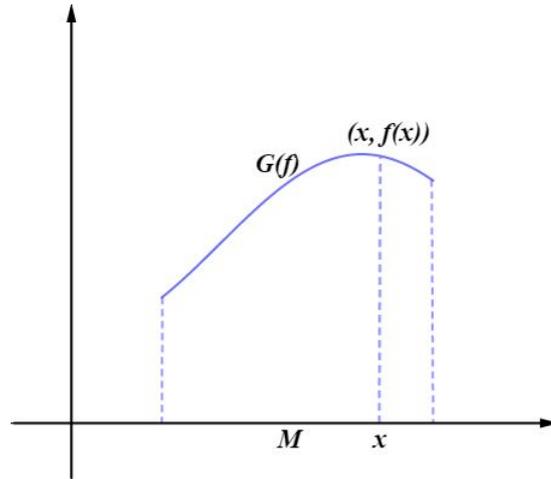
v) $(g \circ f)^{-1}$ é contínua:

Vale que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, e como f^{-1} e g^{-1} são contínuas, pela Proposição 2.6, $(g \circ f)^{-1}$ é contínua.

Deixamos a cargo do leitor a demonstração de que f^{-1} é homeomorfismo.

□

Proposição 2.13. Seja $f : M \rightarrow N$ uma função contínua. O gráfico da função f dado por $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$ é homeomorfo ao domínio M dessa função.

Figura 10: Gráfico $G(f)$

Demonstração. Mostraremos que $G(f)$ é homeomorfo ao domínio M da função f .

Considere a função

$$\begin{aligned} F: M &\rightarrow G(f) \\ x &\mapsto (x, f(x)). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que F é um homeomorfismo, ou seja, f é uma bijeção contínua com inversa contínua.

i) F é injetora:

Dados $x_1, x_2 \in M$, se $F(x_1) = F(x_2)$, então $F(x_1) = (x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2)) = F(x_2)$.
Portanto $x_1 = x_2$ e F é injetora.

ii) F é sobrejetora:

Dado $y \in G(f)$, $\exists x \in M$ tal que $y = (x, f(x))$, então $F(x) = (x, f(x)) = y$.

iii) Pelos itens *i* e *ii* concluímos que F é bijetora.

iv) F é contínua:

$F(x) = (F_1(x), F_2(x)) = (x, f(x))$ onde $F_1(x) = x$ e $F_2(x) = f(x)$.

Segue da Proposição 2.9 que F é contínua se, e somente se, as funções coordenadas são contínuas. Como, F_1 e F_2 são contínuas, segue que F é contínua.

v) F^{-1} é contínua:

Considere a função contínua

$$\begin{aligned} g: G(f) &\rightarrow M \\ (x, f(x)) &\mapsto x \end{aligned}$$

Veja que g é a inversa de F , isto é, $g = F^{-1}$. De fato,

$$g \circ F(x) = g((x, f(x))) = x = id_M(x).$$

$$F \circ g(x, f(x)) = F(g(x, f(x))) = F(x) = (x, f(x)) = id_{G(f)}.$$

Logo $g = F^{-1}$.

Portanto, pela Definição 2.11, o gráfico da função f é homeomorfo ao domínio M . □

A Proposição 2.13 fornece uma fonte de exemplos de homeomorfismos como veremos a seguir.

Observação 2.3.1. A notação S^1 é a designação do círculo unitário $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ em \mathbb{R}^2 (Veja Figura 11). Analogamente, S^n designa a esfera unitária $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ em \mathbb{R}^{n+1} .

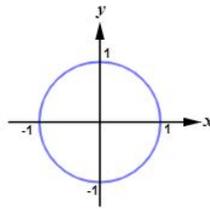


Figura 11: Círculo unitário S^1

Exemplo 2.6. O hemisfério norte $S_+^1 = \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}$ é homeomorfo à bola $B(0, 1) =]-1, +1[$ uma vez que esse hemisfério é o gráfico de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in]-1, +1[$. Veja Figura 12.

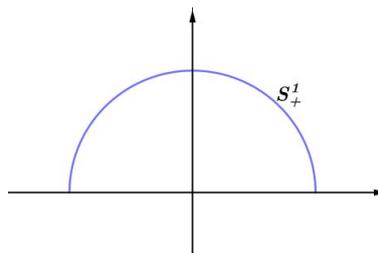


Figura 12: Hemisfério norte S_+^1

De maneira geral o hemisfério norte $S_+^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > 0\}$ é homeomorfo à bola $B(0, 1) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.7. A reta \mathbb{R} é homeomorfa à parábola $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ uma vez que esta parábola é o gráfico da função $x \mapsto x^2$ de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

Exemplo 2.8. O círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e o quadrado $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$ do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 são homeomorfos. Veja Figura 13. De fato, consideremos a função $f : Q \rightarrow S^1$, definida por:

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Ela é contínua, bijetora e possui inversa contínua.

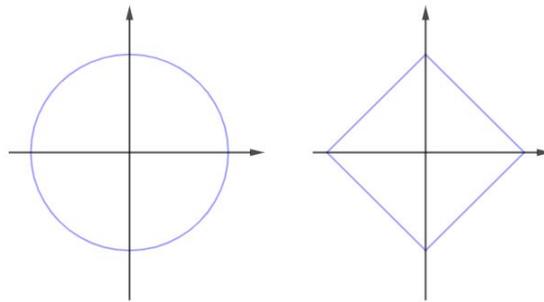


Figura 13: Homeomorfismo entre o círculo e o quadrado.

Exemplo 2.9. O plano Euclidiano perfurado $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$ e o cilindro circular reto $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ de eixo $0Z$ são também homeomorfos uma vez que a função $f : Y \rightarrow X$ dada por $f(x, y, z) = (x \cdot e^z, y \cdot e^z)$ é contínua, bijetora e possui inversa contínua. Veja Figura 14.

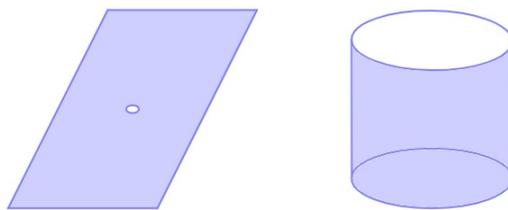


Figura 14: Homeomorfismo entre o plano perfurado e o cilindro circular reto.

Exemplo 2.10. (Projeção estereográfica). Sejam $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e o ponto $N = (0, 1)$. A projeção estereográfica

$$\pi : S^1 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$$

é um homeomorfismo entre o círculo menos um ponto $S^1 - \{N\}$ e a reta \mathbb{R} . Essa função leva cada ponto $P \in S^1 - \{N\}$ em um ponto P' obtido pela intersecção do eixo das abscissas com a semirreta de origem N , e que contém o ponto P . Veja Figura 15.

Seja $P = (x_1, y_1)$, para determinar analiticamente o ponto P' , recorremos à equação da reta que passa por N e P e tomamos sua intersecção com a reta $y = 0$. A equação da reta em questão é

$$y = \left(\frac{y_1 - 1}{x_1} \right) \cdot x + 1.$$

Esta reta intercepta a reta $y = 0$ no ponto em que

$$0 = \left(\frac{y_1 - 1}{x_1} \right) \cdot x + 1 \Rightarrow (y_1 - 1) \cdot x + x_1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{x_1}{y_1 - 1} = \frac{x_1}{1 - y_1}.$$

Note que $y_1 \neq 1$.

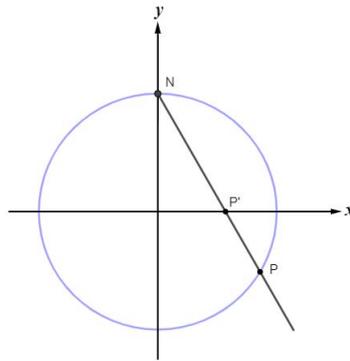


Figura 15: homeomorfismo entre o círculo $S^1 - \{N\}$ e a reta \mathbb{R} .

Ou seja, se $P \in S^1 - \{N\}$, então a projeção de P na reta $y = 0$ é $\pi(P) = \frac{x_1}{1 - y_2}$.

Na projeção estereográfica, à medida que o ponto P se aproxima de N o ponto P' tende ao infinito, ou seja, P' fica cada vez mais longe, e dizemos que N é projetado no infinito.

TOPOLOGIA BÁSICA

O objetivo deste capítulo é a generalização de alguns conceitos mais importantes utilizados nos capítulos anteriores. Para isto substituiremos a noção de métrica, sobre a qual se fundamenta toda a construção da teoria dos espaços métricos, pelo conceito de topologia. A topologia compreende dois ramos principais: topologia geral e topologia algébrica. Esta primeira é o foco principal deste trabalho e se fundamenta em grande parte da teoria dos conjuntos. Este capítulo é baseado nas referências [7] e [3].

3.1 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Definição 3.1. Uma **topologia** num conjunto X é uma coleção \mathcal{T} de partes de X , chamados os **abertos** da topologia, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- (2) Se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$ então $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{T}$;
- (3) Se $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma família qualquer de conjuntos de \mathcal{T} então $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Definição 3.2. Um **espaço topológico** é um par (X, \mathcal{T}) , onde X é um conjunto e \mathcal{T} é uma topologia em X .

Exemplo 3.1. Dado o conjunto $X = \{a, b, c\}$, dentre as seguintes coleções de subconjuntos, apenas \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_3 e \mathcal{T}_5 são possíveis topologias em X :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, X\}; \\ \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, X\}; \\ \mathcal{T}_3 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}; \\ \mathcal{T}_4 &= \{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}; \\ \mathcal{T}_5 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}.\end{aligned}$$

Veja uma ilustração dessa coleções de subconjuntos na Figura 16:

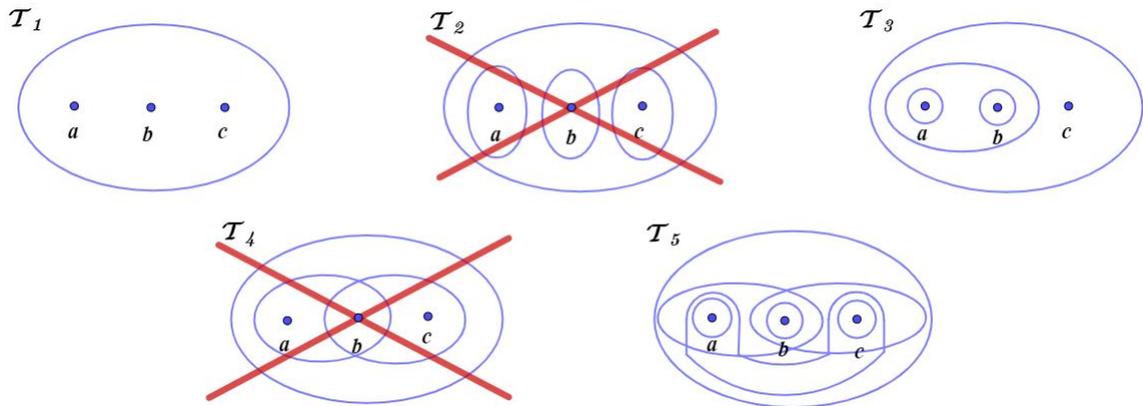


Figura 16: \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_3 e \mathcal{T}_5 são possíveis topologias.

Note que \mathcal{T}_2 e \mathcal{T}_4 não são topologias, pois $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ não pertence a \mathcal{T}_2 e $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ não pertence a \mathcal{T}_4 , portanto não satisfazem as propriedades da Definição 3.1.

Exemplo 3.2. Todo conjunto $X \neq \emptyset$ possui as seguintes topologias:

- i) **Topologia trivial ou caótica.** Os únicos subconjuntos abertos de X são \emptyset e X , ou seja, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.
- ii) **Topologia discreta.** Todos os subconjuntos de X são abertos, ou seja, \mathcal{T} é a coleção de todos os subconjuntos de X .

Exemplo 3.3. Dado o conjunto $X = \{a, b\}$, a coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ é uma topologia em X . O par (X, \mathcal{T}) é chamado de espaço de **Sierpinski**¹.

¹ Waclaw Sierpiński, matemático polonês (1882 - 1969).

Exemplo 3.4. (Topologia usual da reta). Considere o conjunto \mathbb{R} . A coleção \mathcal{T} dada por:

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \forall a \in A, \exists \varepsilon > 0, (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A\}$$

é uma topologia em \mathbb{R} , chamada de *Topologia usual da reta*. Os elementos de \mathcal{T} , na topologia usual, são os subconjuntos $A \subset \mathbb{R}$ de modo que seus pontos são centros de intervalos abertos contidos em A .

Exemplo 3.5. (Topologia do complemento finito ou cofinita). Seja X um conjunto não vazio. A coleção

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A^c \text{ é finito ou } A = X\}$$

é uma topologia sobre X .

De fato,

(1) Claramente, \emptyset e $X \in \mathcal{T}$;

(2) Sejam $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$, queremos mostrar que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$.

Temos $\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$ e A_i^c é finito ou X , logo a interseção também é finita ou X .

Assim, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{T}$;

(3) Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família qualquer de conjuntos de \mathcal{T} . Queremos mostrar que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$, ou seja, a união de quaisquer elementos de \mathcal{T} é um elemento de \mathcal{T} .

Como $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ e A_i^c é finito ou X , logo a união é finita ou X .

Note que, se X é finito, então *topologia do complemento finito ou cofinita* é igual a *topologia discreta*.

Definição 3.3. Uma topologia \mathcal{T} em X se diz **metrizável** quando existe uma métrica em X em relação à qual os abertos coincidem com os elementos de \mathcal{T} .

Observação 3.1.1. No caso de não ser possível definir uma métrica d em X de modo que os abertos de (X, d) sejam os mesmo de (X, \mathcal{T}) , dizemos que, neste caso (X, \mathcal{T}) não é metrizável.

Definição 3.4. Duas métricas d_1 e d_2 sobre um conjunto M são **equivalentes** se, e somente se, elas determinam a mesma topologia em M .

Proposição 3.5. *Todo espaço métrico M é um espaço topológico.*

Demonstração. Como efeito, dado um espaço métrico (M, d) , pela Definição 1.5, os abertos de M como espaço métrico são uniões de bolas abertas de M . Assim, basta tomar

$$\mathcal{T} = \{X \subset M \mid X \text{ é união de bolas abertas de } M\},$$

e \mathcal{T} será uma topologia em M . O espaço topológico (M, \mathcal{T}) terá os mesmos abertos que (M, d) . □

Definição 3.6. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ se diz **aberta** quando, para cada aberto $A \subset X$, $f(A)$ é aberto em Y .

Definição 3.7. Um espaço topológico X chama-se um **espaço de Hausdorff**² quando, para cada par de pontos distintos $x, y \in X$, existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

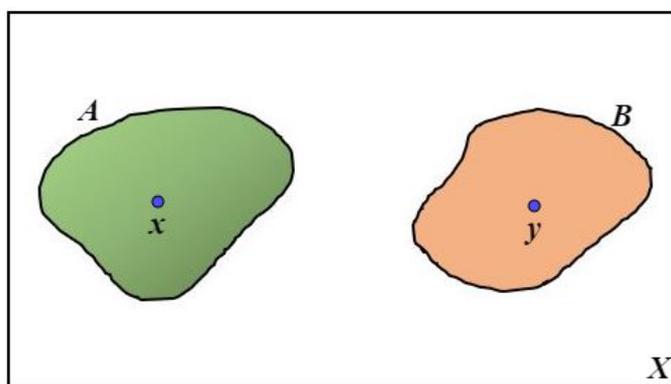


Figura 17: Par de pontos distintos em um espaço de Hausdorff.

Em outras palavras, X é um espaço de Hausdorff se dois pontos distintos sempre podem ser separados por dois abertos disjuntos. Veja Figura 17.

Observação 3.1.2. *Todo espaço métrico é um espaço de Hausdorff.*

² Felix Hausdorff, matemático alemão (1868–1942).

3.2 CONJUNTOS FECHADOS

Definição 3.8. Seja X um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ é um **conjunto fechado** em X se $F^c \in \mathcal{T}$.

Observação 3.2.1. Isto é, um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é um conjunto aberto.

Proposição 3.9. Seja X um espaço topológico. Então

- (a) \emptyset, X são fechados em X .
- (b) Se F_1, F_2, \dots, F_n são fechados então $F_1 \cup \dots \cup F_n$ é fechado.
- (c) Se $\{F_j\}_{j \in J}$ é uma família qualquer de fechados então $\bigcap_{j \in J} F_j$ é fechado.

Demonstração.

(a) É imediato da Definição 3.8.

(b) Sejam F_1, F_2, \dots, F_n fechados, então $F_1^c, F_2^c, \dots, F_n^c$ são abertos. Veja que

$$(F_1 \cup \dots \cup F_n)^c = F_1^c \cap F_2^c \cap \dots \cap F_n^c$$

que é um aberto. Logo $F_1 \cup \dots \cup F_n$ é fechado.

(c) Se $\{F_j\}_{j \in J}$ é uma família de fechados, então F_j^c é aberto, $\forall j$. Além disso, $(\bigcap_{j \in J} F_j)^c = \bigcup_{j \in J} F_j^c$ é aberto. Portanto, $\bigcup_j F_j$ é fechado.

□

Exemplo 3.6. Considere a topologia de *Sierpinski* do Exemplo 3.3; então os fechados de X são \emptyset, X e $\{b\}$.

Exemplo 3.7. Considere $X = \{a, b, c\}$ com a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. Determinemos os conjuntos fechados de X .

- (i) X e \emptyset são fechados em X ;

(ii) Os conjuntos $\{a\}$ e $\{b\}$ não são fechados, de fato:

$$\{a\}^c = \{b, c\} \notin \mathcal{T};$$

$$\{b\}^c = \{a, c\} \notin \mathcal{T}.$$

(iii) Os conjuntos $\{c\}$, $\{a, c\}$ e $\{b, c\}$ são fechados em X , pois:

$$\{c\}^c = \{a, b\} \in \mathcal{T};$$

$$\{a, c\}^c = \{b\} \in \mathcal{T};$$

$$\{b, c\}^c = \{a\} \in \mathcal{T}.$$

Exemplo 3.8. Considere a topologia *usual da reta* do Exemplo 3.4; então todo conjunto finito é fechado.

De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, então $\{x\}$ é fechado em \mathbb{R} , pois:

$$\{x\}^c = (-\infty, x) \cup (x, \infty);$$

Logo, se $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ temos que:

$$A = \bigcup_{i=1}^n \{x_i\},$$

Isto é, A é união finita de fechados, portanto A é fechado.

Observação 3.2.2.

- (i) A propriedade de ser aberto ou fechado é independente uma da outra.
- (ii) Um conjunto pode ser simultaneamente fechado e aberto, aberto e não fechado, fechado e não aberto ou nenhum dos dois.

3.3 BASES

Definição 3.10. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico e \mathcal{B} um família de subconjuntos de X tal que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Dizemos que \mathcal{B} é uma **base** para \mathcal{T} , se para todo $A \in \mathcal{T}$, existe uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de elementos da base, tal que:

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B.$$

Observação 3.3.1.

- (i) Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, então toda união de elementos de \mathcal{B} também pertence a \mathcal{T} . Os elementos de \mathcal{B} são chamados de **abertos básicos** da topologia.

(ii) Se \mathcal{B} é uma base de \mathcal{T} , dizemos que \mathcal{B} **gera** a topologia \mathcal{T} ou que \mathcal{T} é a **topologia gerada** por \mathcal{B} .

Exemplo 3.9. Considere $X = \{a, b, c\}$ com a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$. Temos que $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ é uma base de (X, \mathcal{T}) pois todo conjunto de \mathcal{T} , inclusive o \emptyset , pode ser representado como união de membros de \mathcal{B} .

Exemplo 3.10. Seja (X, \mathcal{T}) um espaço cuja topologia é a discreta. Então $\mathcal{B} = \{\{a\} \mid a \in X\}$ é uma base da topologia \mathcal{T} . De fato, dado $A \in \mathcal{T}$, $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$, para todo $a \in A$.

3.4 SUBESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Definição 3.11. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico, $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ e $\mathcal{T}_1 = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{T}\}$. A topologia \mathcal{T}_1 é chamada **topologia induzida** por \mathcal{T} em Y e (Y, \mathcal{T}_1) é chamado **subespaço** de (X, \mathcal{T}) .

Exemplo 3.11. A topologia induzida em $[0, 1]$, pela topologia usual da reta \mathbb{R} , é gerada por subconjuntos da forma $[0, a)$, (b, c) , $(d, 1]$, com $0 < a, b, c, d < 1$. Veja Figura 18.



Figura 18: Topologia induzida $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Exemplo 3.12. A topologia induzida no eixo x de \mathbb{R}^2 é a mesma de \mathbb{R} , uma vez que sua intersecção com uma bola aberta de \mathbb{R}^2 é vazia ou um intervalo aberto. Veja Figura 19.

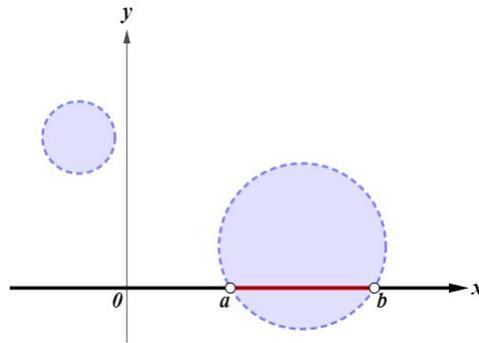


Figura 19: $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

3.5 FUNÇÕES CONTÍNUAS EM ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Definição 3.12. Sejam X e Y espaços topológicos arbitrários. Uma função $f : X \rightarrow Y$ se diz **contínua** num ponto $a \in X$ se, dado um aberto V qualquer de Y com $f(a) \in V$, existe um aberto $U \subset X$ de modo que $a \in U$ e $f(U) \subset V$. Veja Figura 20.

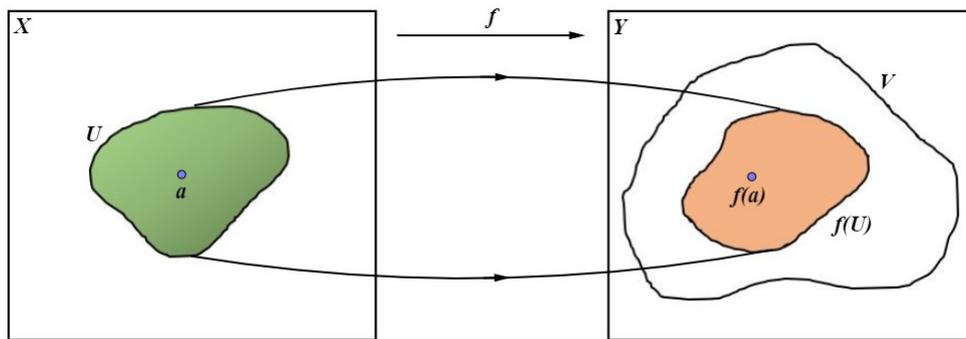


Figura 20: Representação de uma função contínua em espaços topológicos.

Se f é contínua em todos os pontos de X , então f se diz **contínua**.

Exemplo 3.13. Se a topologia de X é a *topologia discreta*, então $f : X \rightarrow Y$ é contínua, independente de qual seja a topologia de Y . De fato, se $a \in X$ e $f(a) \in V$, onde V é aberto, tomando $U = \{a\}$ que é aberto de X , então $f(U) \subseteq V$.

Exemplo 3.14. Se a topologia de Y é a *topologia trivial*, ou seja, $\mathcal{T} = \{\emptyset, Y\}$, então $f : X \rightarrow Y$ é contínua, também independente da topologia utilizada em X . De fato se

$a \in X$, o único aberto em Y que contém $f(a)$ é o próprio Y e, tomando $P = X$, então $a \in P$ e $f(P) \subset Y$.

Exemplo 3.15. Seja $X = \{a, b, c\}$ com a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$. A função $f : X \rightarrow X$, dada por $f(a) = b$, $f(b) = c$ e $f(c) = a$ é contínua em a e b , mas não é contínua em c .

Com efeito os abertos que contêm $f(a) = b$ são X , $\{b\}$ e $\{a, b\}$. Tomando o aberto $P = \{a\}$, então $f(P) = \{b\}$ que está contido nos três abertos que contêm b . De modo semelhante pode-se mostrar que f é contínua em b .

Agora note que f não é contínua em c , pois tomando o aberto $Q = \{a\}$, que contém $f(c) = a$, então o único aberto que contém c , ou seja, o conjunto X , é tal que

$$f(x) \notin Q = \{a\}.$$

Proposição 3.13. *Sejam (X, \mathcal{T}_1) e (Y, \mathcal{T}_2) espaços topológicos. A função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para todo $V \in \mathcal{T}_2$, temos que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Suponha que f é contínua. Dado V aberto de Y , pela definição de continuidade, para cada $a \in f^{-1}(V)$, existe um aberto $V_a \in \mathcal{T}_1$ contendo a tal que $f(V_a) \subseteq V$ e, portanto, $V_a \subseteq f^{-1}(V)$. Segue que

$$f^{-1}(V) = \cup \{V_a \mid a \in f^{-1}(v)\}.$$

E como união de abertos é aberto, então $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$.

(\Leftarrow) Suponha que, dado $V \in \mathcal{T}_2$ vale que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$. Queremos mostrar que f é contínua. Para isso, basta mostrar que f é contínua em um ponto $a \in X$ arbitrário.

Com efeito, dado $a \in X$, seja $V \in \mathcal{T}_2$ um aberto que contém $f(a)$. Por hipótese, $f^{-1}(V)$ é um aberto de X , isto é $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$, e $a \in f^{-1}(V)$. Além disso, $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$. Portanto, f é contínua em a .

□

Logo, f é contínua se, e somente se, a imagem inversa dos abertos de Y são abertos em X .

Exemplo 3.16. Toda função constante é contínua. De fato, sejam $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in X$ e $V \subset Y$ aberto, então:

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} X, & \text{se } c \in V \\ \emptyset, & \text{se } c \notin V \end{cases}.$$

Em ambos os casos, $f^{-1}(V)$ é aberto em X . Logo f é contínua.

Exemplo 3.17. Considere $[0, 2\pi)$ com a topologia induzida da reta e S^1 com a topologia induzida pelo plano \mathbb{R}^2 . A função $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ definida por $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ é uma função contínua. Se tomarmos um arco aberto de S^1 , independente do arco conter o ponto $(1, 0)$, a imagem inversa desse aberto é da forma $[0, a) \cup (b, 2\pi)$ ou (a, b) , que são ambos abertos na topologia de $[0, 2\pi)$. Veja ilustração na Figura 21.

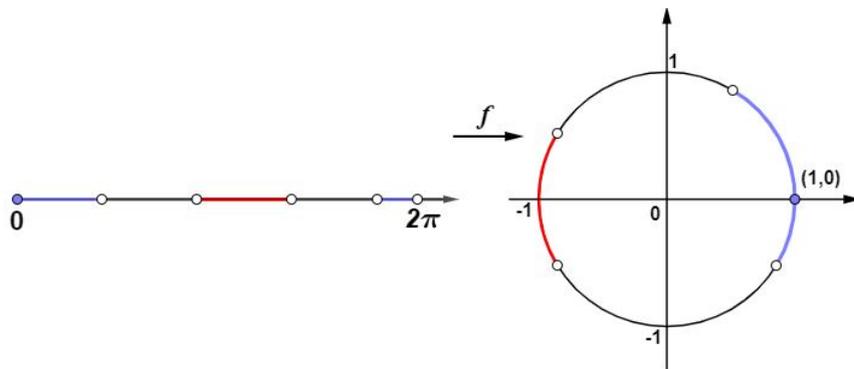


Figura 21: $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$.

Observação 3.5.1. A continuidade depende das topologias.

3.6 HOMEOMORFISMOS

Dados dois conjuntos X e Y , uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ identifica cada ponto de X a um único ponto de Y e vice-versa. Se X e Y forem espaços topológicos, f for contínua e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também for contínua, então também serão identificados cada aberto de X com um único aberto de Y e vice-versa. Tudo o que puder ser dito sobre a topologia de X poderá ser afirmado sobre a topologia de Y através da identificação dada por f .

Definição 3.14. (Homeomorfismo). Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que uma aplicação

$$f : X \rightarrow Y$$

é um **homeomorfismo** de X em Y quando f for bijetiva, contínua e sua inversa f^{-1} também for contínua.

Observação 3.6.1. *Quando existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos, dizemos que estes espaços são homeomorfos.*

Sejam (X, \mathcal{T}_1) e (Y, \mathcal{T}_2) espaços topológicos homeomorfos. Essa relação será representada por $X \cong Y$.

Observação 3.6.2. *Espaços topológicos homeomorfos possuem as mesmas propriedades topológicas. Assim, teremos que espaços homeomorfos são iguais do ponto de vista topológico.*

Descrever explicitamente um homeomorfismo nem sempre é uma tarefa fácil. Porém se um espaço topológico X puder ser deformado em outro espaço topológico Y preservando os abertos e de forma bijetiva, a função que leva cada ponto de X no correspondente de Y será um **homeomorfismo**.

Exemplo 3.18. Seja \mathbb{R} com a topologia usual da reta. Todo intervalo aberto não degenerado (a, b) , com a topologia induzida pela topologia usual de \mathbb{R} , é homeomorfo a \mathbb{R} , ou seja $(a, b) \cong \mathbb{R}$.

De fato, seja $f : (a, b) \rightarrow (-1, 1)$ definida por:

$$f(x) = \frac{2x - (b + a)}{b - a}.$$

f é uma função bijetiva, contínua e sua inversa

$$f^{-1}(y) = \frac{(b - a)y + (a + b)}{2}$$

também é uma função contínua. Assim, o intervalo $(a, b) \cong (-1, 1)$. Agora definimos $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ por:

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

f é uma função bijetiva, contínua e sua inversa

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

também é uma função contínua. Logo, $\mathbb{R} \cong (-1, 1)$.

Portanto, temos que $\mathbb{R} \cong (a, b)$.

Exemplo 3.19. O círculo S^1 menos um ponto é homeomorfo a um intervalo aberto, por meio da função $f : (0, 2\pi) \rightarrow S^1 - \{(1, 0)\}$ definida por $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Exemplo 3.20. A projeção estereográfica do Exemplo 2.10 é um homeomorfismo, logo $S^1 - \{(1, 0)\} \cong \mathbb{R}$.

Exemplo 3.21. (Projeção estereográfica).

Sejam $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e o ponto $N = (0, 0, 1)$. A projeção estereográfica

$$\pi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida por

$$\pi : (x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

é um homeomorfismo entre a esfera menos o polo norte $S^2 - \{N\}$ e o plano \mathbb{R}^2 . Essa função leva cada ponto $P \in S^2 - \{N\}$ em um ponto P' obtido pela intersecção do plano OXY com a semirreta de origem N , que contém o ponto P . Veja Figura 22.

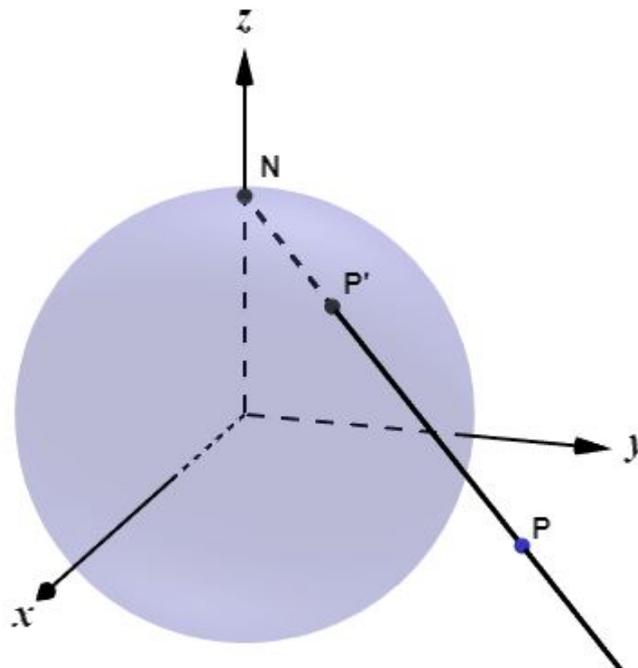


Figura 22: $S^2 - \{N\} \cong \mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.22. (Círculo unitário e o quadrado). Sejam $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e o quadrado $Q = \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ em \mathbb{R}^2 com a topologia induzida pela topologia usual de \mathbb{R}^2 , então temos um homeomorfismo entre o círculo e o quadrado. Veja Figura 23.

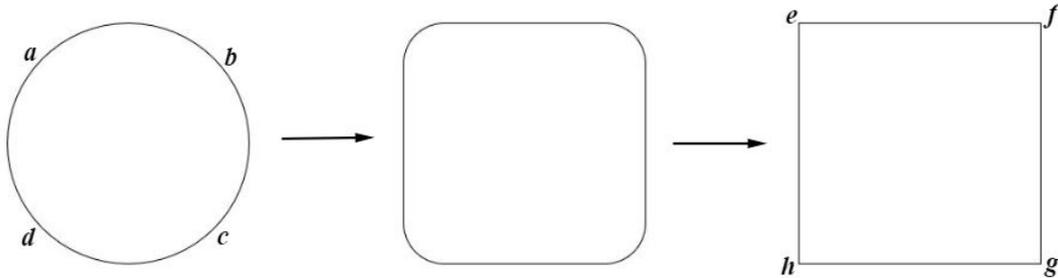


Figura 23: $S^1 \cong Q$.

Considere $f : S^1 \rightarrow Q$ que transportar o arco \widehat{ab} de S^1 no segmento ef de Q , o arco \widehat{bc} de S^1 no segmento fg de Q , o arco \widehat{cd} de S^1 no segmento gh de Q e o arco \widehat{da} de S^1 no segmento he de Q , definida por:

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m} \right) \quad \text{e} \quad f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right),$$

onde $m = \max\{|x|, |y|\}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Fica evidente que f e f^{-1} são funções bijetoras e contínuas. Logo f é um homeomorfismo e $S^1 \cong Q$.

Exemplo 3.23. (Esfera e cubo unitário). Sejam $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e o cubo unitário $C = \{(x, y, z) \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} = 1\}$ em \mathbb{R}^3 . De maneira análoga ao Exemplo 3.22, temos um homeomorfismo entre a esfera unitária e o cubo unitário. Veja Figura 24.

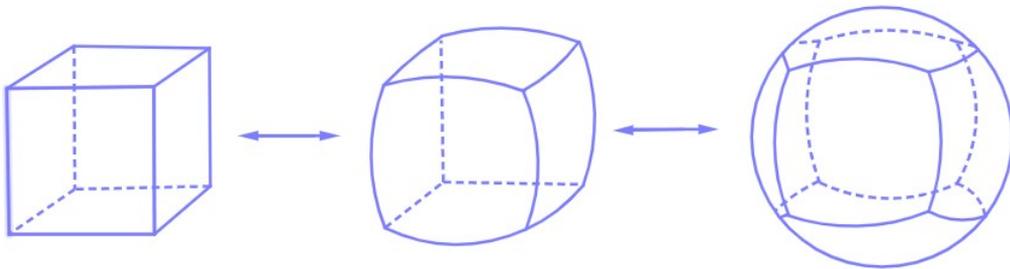


Figura 24: $S^2 \cong C$.

3.7 TOPOLOGIA PRODUTO

Definição 3.15. Sejam X e Y espaços topológicos e consideremos o produto cartesiano $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. A topologia produto em $X \times Y$ é a topologia que tem como base a coleção \mathcal{B} de todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é aberto de X e V é aberto de Y . Veja Figura 25.

Um subconjunto de $X \times Y$ será aberto se for uma união de produtos de abertos de X e Y .

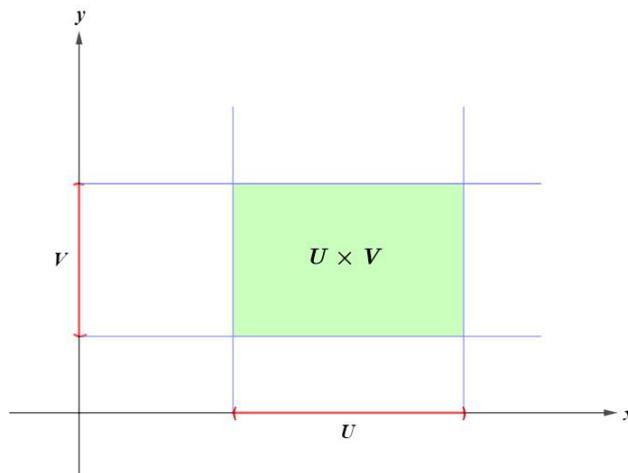


Figura 25: Abertos de $X \times Y$.

Exemplo 3.24. O produto de um círculo S^1 por um intervalo I é um cilindro. Veja Figura 26.

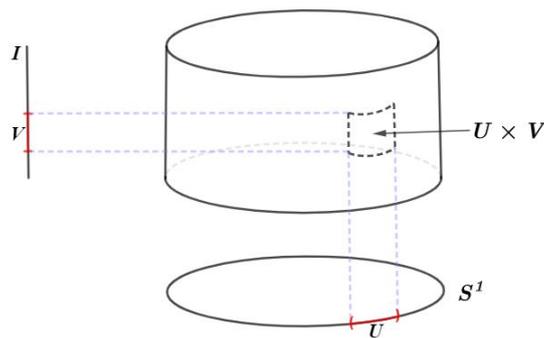


Figura 26: Cilindro = $S^1 \times I$.

Ou seja, $S^1 \times I \cong \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, t \in I\}$.

Exemplo 3.25. O resultado do produto de dois círculos é o toro T^2 . Veja Figura 27.

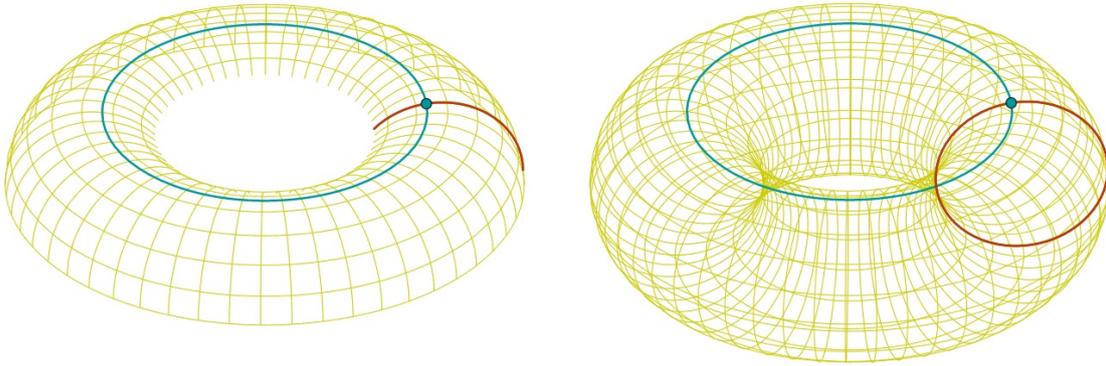


Figura 27: Toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

3.8 TOPOLOGIA QUOCIENTE

O conceito inicial de topologia quociente aparece com frequência em matemática e consiste em auxiliar na formalização da construção de objetos. Estes objetos em si, apresentam formas muita vezes desconhecidas pela maior partes das pessoas e nos limitaremos apenas a dar uma descrição intuitiva e geométrica.

Definição 3.16. Sejam (X, \mathcal{T}) um espaço topológico, Y um conjunto não vazio e seja $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. Então definimos em Y a seguinte topologia:

$$\mathcal{T}_f = \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}.$$

\mathcal{T}_f é chamada **topologia quociente** em Y induzida por f .

Utilizando uma ideia mais intuitiva, a coleção \mathcal{T} de todos os subconjuntos V de Y tais que $f^{-1}(V)$ são abertos em X é uma topologia em Y na qual f é uma aplicação quociente.

Exemplo 3.26. Sejam \mathbb{R} com a topologia usual, $X = \{a, b, c\}$ e uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \{a, b, c\}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x < 0 \\ b, & \text{se } x = 0 \\ c, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Então, $\mathcal{T}_f = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$ é a topologia quociente em X induzida por f . Veja ilustração na Figura 28.

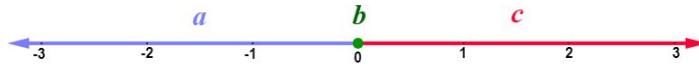


Figura 28: $f : \mathbb{R} \rightarrow \{a, b, c\}$.

Definição 3.17. Sejam (X, \mathcal{T}) , (Y, \mathcal{T}_Y) espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetora. A função f que induz a topologia quociente em Y é chamada uma **identificação** se $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_f$. Em outras palavras, a topologia quociente induzida por f coincide com a topologia original de Y .

Exemplo 3.27. A função $f : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ definida por $f(\theta) = (\cos\theta, \text{sen}\theta)$ é uma função sobrejetora. A topologia quociente induzida por f em S^1 tem os mesmos abertos da topologia usual de S^1 . Veja ilustração na Figura 29.

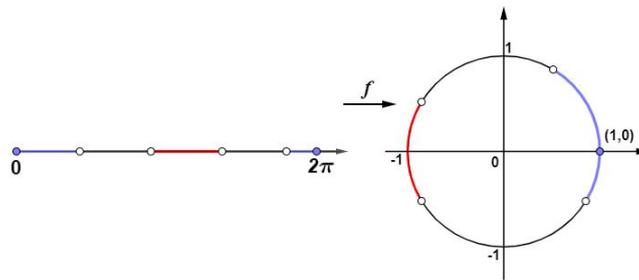


Figura 29: $f : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$.

Observe que cada ponto do círculo S^1 é imagem de um único ponto do intervalo aberto $(0, 2\pi)$, com exceção do ponto $(1, 0)$, que possui pré-imagem $\{0, 2\pi\}$. A ideia seria como se a função f enrolasse o intervalo no círculo, e depois uni-se suas extremidades, formando o círculo. Assim, dizemos que os pontos $\{0; 2\pi\}$ foram **identificados**. Veja Figura 30.

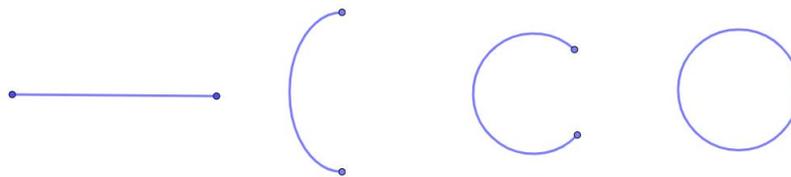


Figura 30: Intervalo com extremidades identificadas é homeomorfo a S^1 .

Exemplo 3.28. A projeção $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x$, é uma função sobrejetora, e a pré-imagem de cada $x \in \mathbb{R}$ é uma reta vertical que passa por $(x, 0)$. Veja Figura 31.

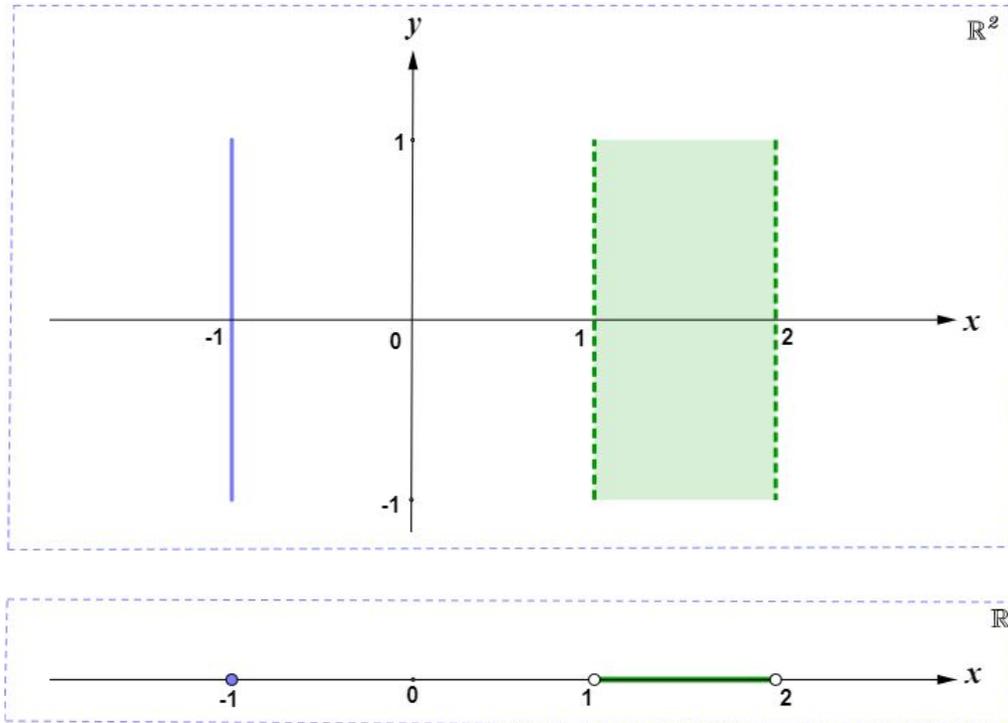


Figura 31: Projeção $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Note que a função f induz em \mathbb{R} uma topologia quociente igual à usual. Assim, f é uma função de identificação, que projeta cada reta vertical em um único ponto para transformar \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} .

Nos exemplos anteriores, o contradomínio Y e a função f já são dados. Porém, em geral, teremos conhecimento apenas de X . Nesse sentido, queremos identificar alguns pontos de X para formar um novo espaço Y de tal forma que Y tenha a topologia quociente com respeito a essas identificações. Para formalizar esta ideia, vamos introduzir as noções de partição e classes de equivalências.

Definição 3.18. (Partição). Uma **partição** \mathcal{P} de um conjunto X é uma coleção de subconjuntos disjuntos e não-vazios de X , cuja união é X . Cada um desses subconjuntos será chamado de **classe**, e representado por $[x]$ a classe a que $x \in X$ pertence.

Exemplo 3.29. Considere o conjunto X dado na Figura 32.

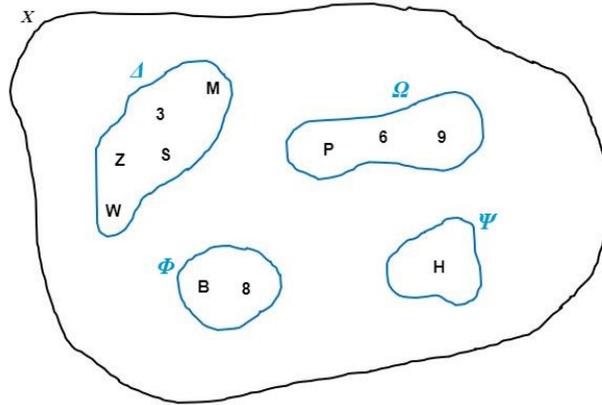


Figura 32: Exemplo de partição de classes de homeomorfismos de letras e números.

Note que, nesse exemplo, temos uma partição $\mathcal{P} = \{\Delta, \Omega, \Phi, \Psi\}$ do conjunto X formada por subconjuntos $\{\Delta\}$, $\{\Omega\}$, $\{\Phi\}$ e $\{\Psi\}$, chamados de classes. Podemos nos referir as classes da seguinte maneira:

$$[W] = \Delta = \{Z, S, 3, M, W\};$$

$$[B] = \Phi = \{8, B\};$$

$$[H] = \Psi = \{H\};$$

$$[P] = \Omega = \{6, 9, P\}.$$

Definição 3.19. (Relação de equivalência). Seja X um conjunto. Uma relação \sim em X é dita ser uma **relação de equivalência** se ela satisfaz:

- i) $x \sim x, \forall x \in X$ (reflexividade);
- ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x, \forall x, y \in X$ (simetria);
- iii) $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z, \forall x, y, z \in X$ (transitividade).

Essa relação particiona X em classes de equivalência que são subconjuntos de elementos equivalentes entre si.

Definição 3.20. (Classe de equivalência). Dada uma relação de equivalência \sim em X , seja $x \in X$, a **classe de equivalência** $[x]$ de x é definida como sendo $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$. Este é o conjunto de todos os pontos de X equivalentes a x .

Definição 3.21. Se X é um conjunto e \sim uma relação de equivalência em X , a partição de X formada por todas as classes de equivalência chama-se **conjunto quociente** e denota-se por X/\sim (lê-se "X módulo a equivalência"). Ou seja, $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$.

Dada uma relação de equivalência \sim em um espaço topológico (X, \mathcal{T}_X) , obtemos um novo espaço topológico (Y, \mathcal{T}_Y) onde $Y = X/\sim$ e \mathcal{T}_Y é a topologia quociente induzida pela função $f : X \rightarrow Y$, definida por $f(x) = [x]$. Portanto, chamamos X/\sim de **espaço quociente**.

Os exemplos a seguir serão apresentados de forma intuitiva e geométrica, sendo todos homeomorfismos, considerando a topologia quociente.

Exemplo 3.30. (O círculo). Seja $X = [0, 1]$ com a topologia induzida de \mathbb{R} . Veja a ilustração na Figura 33.



Figura 33: intervalo

Podemos agora identificar 0 e 1 como sendo equivalentes. Isso quer dizer que consideramos a relação de equivalência gerada pela relação que associa apenas 0 e 1. Escreveremos $0 \sim 1$ quando fazemos essa construção. Nessa relação de equivalência, $0 \sim 1$ e todos os pontos $r \in (0, 1)$ são equivalentes apenas a si mesmos. A partição que corresponde a isso, é

$$\mathcal{P} = \{\{0, 1\}, \{r\} \mid r \in (0, 1)\}.$$

Isso significa que $[0] = \{0, 1\} = [1]$ e $[r] = \{r\}$, $r \in (0, 1)$. Se analisarmos as deformações a seguir podemos verificar que $[0, 1]/\sim \cong S^1$. Veja a Figura 34.

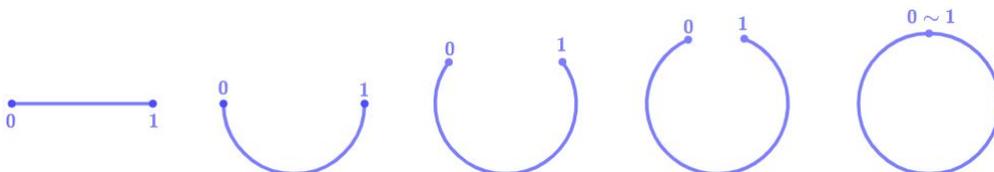


Figura 34: Relação de equivalência $0 \sim 1$.

Exemplo 3.31. (O cilindro). Seja $X = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1]^2 \in \mathbb{R}^2$. Considere X com a topologia induzida pela topologia usual de \mathbb{R}^2 . O cilindro $\{x^2 + y^2 = 1 \mid |z| \leq 1\}$ é o espaço quociente do quadrado X pela relação de equivalência

$$(x, y) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow (x, y) = (x_1, y_1) \text{ ou } \{x, x_1\} = \{0, 1\} \text{ e } y = y_1,$$

para todo $(x, y), (x_1, y_1) \in X$. Temos, de uma forma mais intuitiva, que a relação de equivalência identifica o ponto $(0, y)$ com $(1, y), \forall y$. Veja Figura 35.

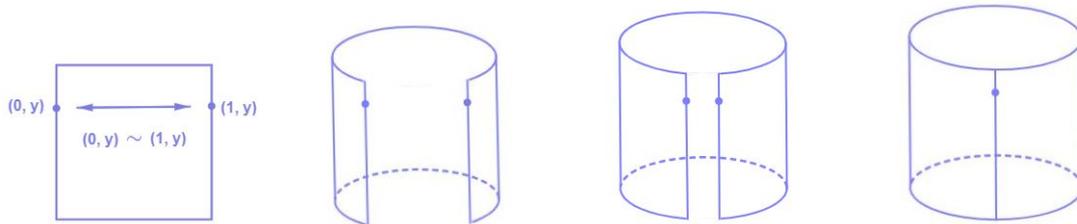


Figura 35: Relação de equivalência $(0, y) \sim (1, y)$.

Exemplo 3.32. (O Toro bidimensional T^2). O toro é obtido identificando-se os dois círculo das extremidades do cilindro da forma com que a ilustração 36 apresenta. Em termos do quadrado original, isso corresponde a adicionar a identificação $(x, 0) \sim (x, 1)$ no exemplo anterior.

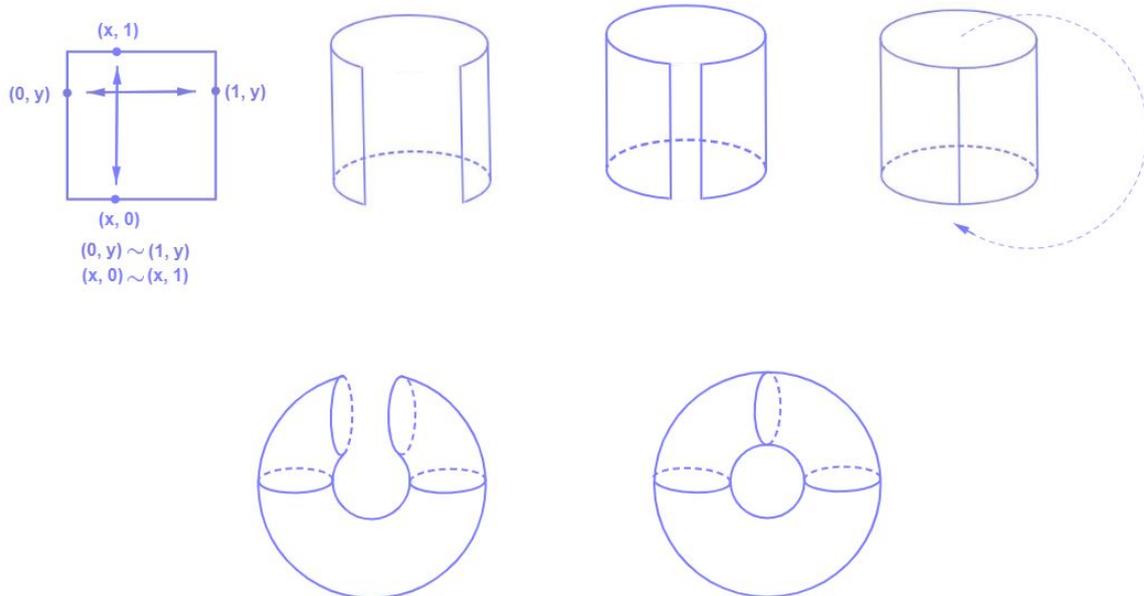


Figura 36: Relação de equivalência $(0, y) \sim (1, y)$ e $(x, 0) \sim (x, 1)$.

Exemplo 3.33. (A faixa de Möbius). É obtida através de uma identificação de pontos em um quadrado como mostra a ilustração da Figura 37.

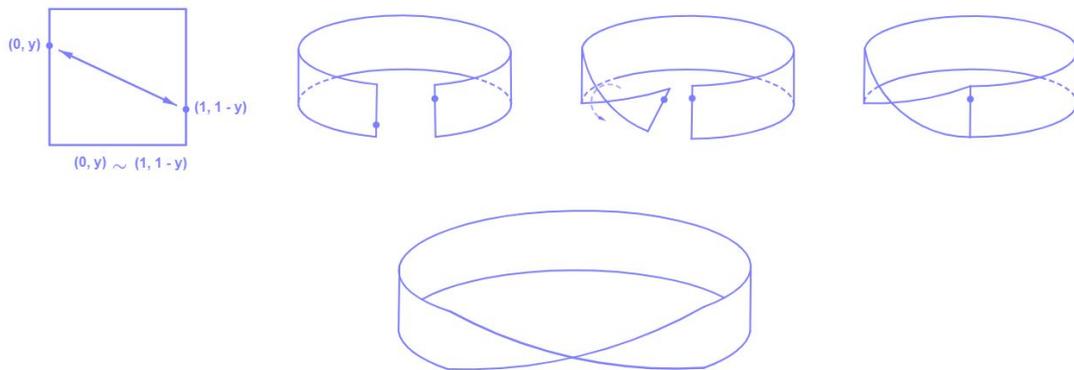


Figura 37: Relação de equivalência $(0, y) \sim (1, 1 - y)$.

Exemplo 3.34. (A garrafa de Klein). Este notável objeto é obtido identificando-se os dois círculo das extremidades do cilindro de uma maneira totalmente diferente do habitual. Veja Figura 38.

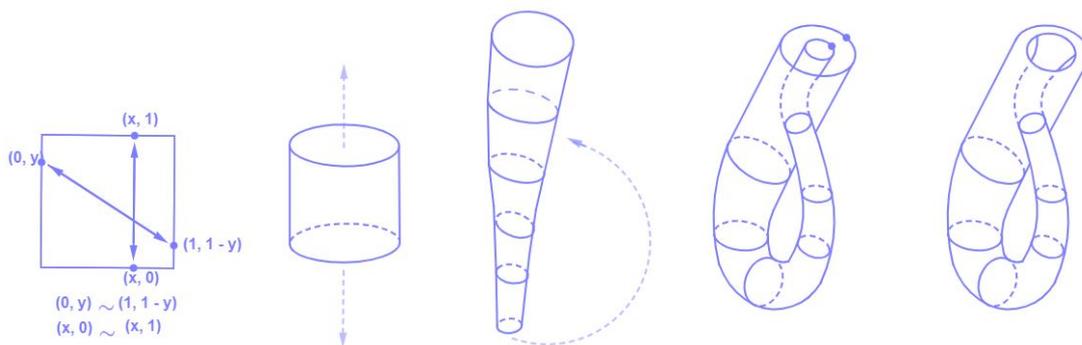


Figura 38: Relação de equivalência $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ e $(x, 0) \sim (x, 1)$.

TOPOLOGIA DE SUPERFÍCIES

Este capítulo apresenta um material básico sobre topologia geométrica; em particular serão tratados de forma intuitiva e geométrica alguns aspectos da classificação topológica das superfícies. As principais referências são [8], [9] e [10].

4.1 SUPERFÍCIES: NOÇÃO INTUITIVA.

Quando pensamos em superfícies, logo nos veem a cabeça uma ideia intuitiva que superfícies possuem apenas largura e comprimento sem apresentar espessura ou altura. Uma definição matemática simples de superfícies seria uma variedade de dimensão 2. Sendo assim, superfícies são objetos de estudos da topologia em dimensão 2, de que, a partir de suas variantes topológicas, são extraídas classificações.

Exemplo 4.1. Assumimos que as superfícies não tem espessura, sendo assim, podemos construir um modelo de uma superfície fazendo uso de uma material maleável e/ou elástico como por exemplo:

(a) Folha de papel.



Figura 39: Folha de papel como superfície.

(b) Casca de uma esfera.

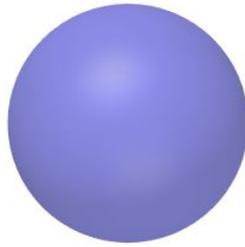


Figura 40: Casca de uma esfera como superfície.

(c) Câmara de ar.

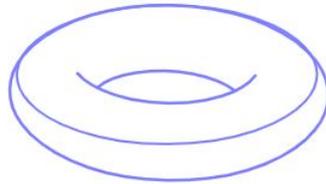


Figura 41: Casca de uma câmara de ar ou Toro como superfície.

Do ponto de vista topológico, uma superfície é um espaço topológico com as mesmas propriedades locais do plano da geometria euclidiana.

4.2 GEOMETRIA E TOPOLOGIA

A geometria de superfícies estuda conceitos que se alteram com as deformações como: distâncias, áreas, ângulos e curvaturas. Porém a topologia de superfícies trata do conjunto de propriedades que não se alteram com deformações. Note que nosso objeto de estudo quando esticado ou encolhido, um pouco, em parte ou o todo de uma superfície, apresentam certas propriedades que se mantêm inalteradas. Tais propriedades constituem o que chamamos de invariantes topológicos, intrínsecos à topologia da superfície.

Definição 4.1. Uma **variedade n-dimensional** M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e tal que para cada $x \in M$, existem um aberto $U \subset M$,

com $x \in U$ e um homeomorfismo $\phi : U \longrightarrow V$, onde V é um aberto do R^n .

Definição 4.2. Uma variedade de dimensão dois é chamada de **superfície**.

Dada uma superfície, listamos a seguir, de maneira intuitiva, quatro deformações, que não afetam a topologia de uma superfície, essas deformações são denominadas **deformações legais**:

- (1) Esticar ou inflar a superfície ou partes dela;
- (2) Encolher a superfície ou partes dela;
- (3) Entortar a superfície ou partes dela;
- (4) Cortar a superfície segundo uma linha suave nela demarcada e logo após colar novamente, uma na outra, as bordas geradas por esse recorte, resgatando assim a superfície original com a linha demarcada. (Recorte e colagem).

Observação 4.2.1. *Em uma superfície um corte dá origem a duas arestas que são objetos unidimensionais. Os pares de arestas, gerados por esse corte devem ser orientados conforme o sentido do corte. Essa orientação deve ser respeitada quando se proceder a colagem, de modo a não alterar o tipo topológico da superfície.*

Definição 4.3. (Superfícies Isotópicas). Quando uma superfície é obtida de outra por meio de uma combinação qualquer das três primeiras transformações listadas anteriormente, em um número finito de vezes, dizemos que elas são **isotópicas**.

Definição 4.4. (Superfícies Homeomorfas). Se uma superfície é obtida de outra por uma combinação das quatro transformações listada anteriormente, em um número finito de vezes, dizemos que elas são **superfícies homeomorfas** ou **topologicamente equivalentes**.

Note que as transformações legais são homeomorfismos e, portanto, a definição de superfícies homeomorfas dada aqui implica a existência de um homeomorfismo entre as superfícies.

Proposição 4.5. *Todas as superfícies isotópicas são homeomorfas.*

Exemplo 4.2. A Figura 42 mostra como podemos utilizar as deformações legais para distorcer continuamente superfícies isotópicas.

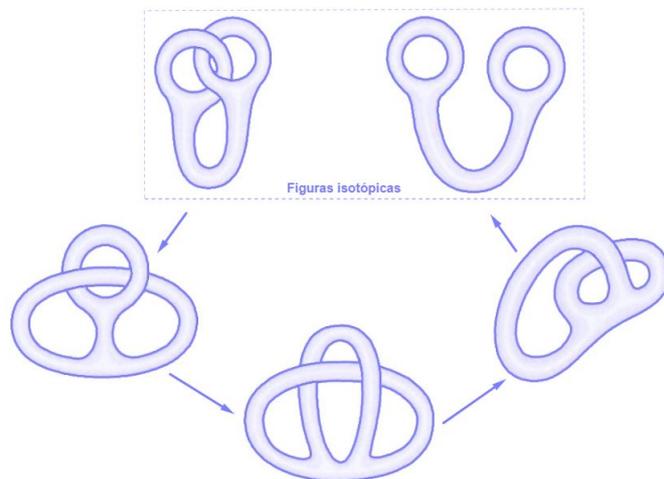


Figura 42: Superfícies isotópicas.

Note que a figura, no topo à esquerda, é isotópica à superfície com duas alças não-entrelaçadas, no topo à direita, cada superfície sucessiva é uma distorção contínua da anterior sem a necessidade do procedimento de recorte e colagem.

Exemplo 4.3. A Figura 43 ilustra o exemplo clássico de superfícies isotópicas mais difundida no mundo, pois em diversas vezes a "xícara" e a "rosquinha", são objetos de comparação para exemplificar de forma intuitiva e visual o que é um homeomorfismo. Este exemplo tão usual, na verdade, nada mais é que uma deformação do toro.

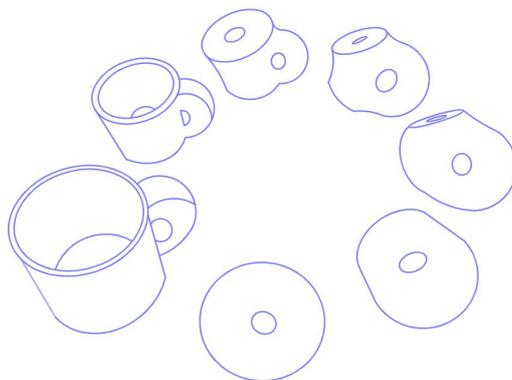


Figura 43: Superfícies isotópicas.

Observação 4.2.2. A afirmação recíproca da Proposição 4.5 não é verdadeira, pois não podemos afirmar que duas superfícies homeomorfas são isotópicas e no exemplo a seguir mostramos um contraexemplo.

Exemplo 4.4. (Superfícies homeomorfas não-isotópicas). A Figura 44 é um exemplo de aplicação das deformações legais em uma superfície, em particular, na transformação que podemos obter com o uso do recorte e colagem aplicada a uma superfície. A superfície resultante após essas deformações é homeomorfa à superfície original.

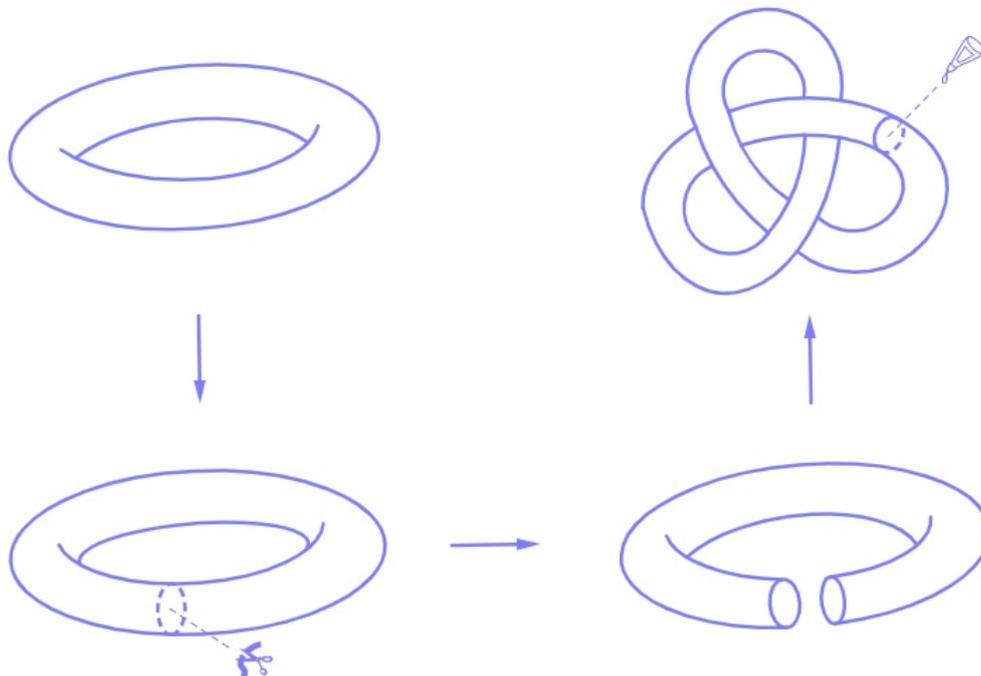


Figura 44: Superfícies homeomorfas não-isotópicas.

Na ilustração podemos perceber que podemos ter, além da utilização das três primeiras deformações legais, o uso do procedimento de recorte e colagem. Logo após a colagem de ambas as bordas, uma na outra, resgatamos então a curva original e a porção da superfície em torno dela, e assim, obtendo o homeomorfismo entre as superfícies. Porém, no espaço euclidiano tridimensional, elas não são isotópicas¹.

¹ A demonstração formal de que essas duas superfícies não são isotópicas requer o uso de teoria de nós e foge do escopo desse trabalho.

Ao contrário das deformações legais, listamos a seguir, três deformações que alteram a topologia de uma superfície, resultando em superfícies não-homeomorfas à superfície original, essas deformações são denominadas **deformações ilegais**:

- (1) Cortar a superfície, segundo uma curva nela demarcada, e não tornar a colar um no outro, os bordos gerados pelo recorte;
- (2) Realizar colagens de modo arbitrário, fazendo com que dois ou mais pontos antes distintos, tornem-se um só ponto da superfície;
- (3) Encolher a superfície ou algumas de suas partes, de maneira que os pontos antes distintos se aglutinem num só ponto.

Exemplo 4.5. A Figura 45 é um exemplo da aplicação das deformações ilegais em uma superfície, em particular, na transformação que podemos obter com o uso do recorte na superfície sem torná-lo a colar um no outro. A superfície resultante após essas deformações não é homeomorfa à superfície original.

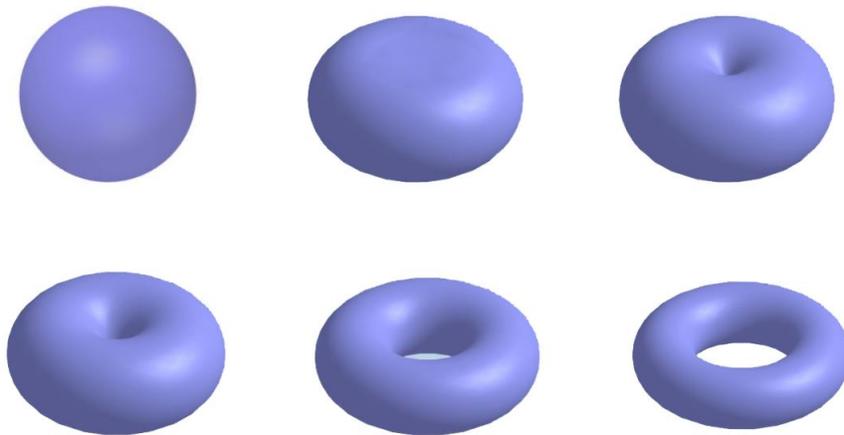


Figura 45: Superfícies Não-homeomorfas.

Observe que ao tentarmos transformar uma esfera em um toro, utilizando deformações, estaremos quebrando a regra (4) das transformações legais que trata sobre recorte e colagem, tal feito recai sobre a regra (1) das transformações ilegais e assim teremos superfícies não-homeomorfas.

4.3 SUPERFÍCIES SEM BORDO, DIAGRAMAS E ORIENTABILIDADE

Quando pensamos no estudo da topologia em dimensão 2, temos em grande parte, reservada para à classificação de superfícies segundo critérios que não se importam com grandezas geométricas, mas na ocorrência interna a si, como furos, bordos e orientação. Assim, a partir deste ponto, daremos mais importância, ao estudo de superfícies básicas que, dão origem a outras superfícies, por homeomorfismo, soma conexa ou uma junção das duas.

Definição 4.6. (Superfície com bordo). Uma variedade n -dimensional M com **bordo** é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e tal que para cada $x \in M$, existem um aberto $U \subset M$, com $x \in U$ e um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, onde V é um aberto do \mathbb{R}^n ou $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 < 1, x_1 \geq 0\}$.

Um ponto p de M é chamado de **ponto de bordo** se não existe aberto V de \mathbb{R}^n tal que $\phi : U \rightarrow V$ é homeomorfismo. Quando uma variedade não possui pontos de bordo dizemos que ela tem bordo vazio ou é sem bordo.

Definição 4.7. Uma variedade com bordo de dimensão dois é chamada de **superfície com bordo**.

Definição 4.8. (Superfície compacta). Quando uma superfície pode ser dividida em um número finito de triângulos² chamamos de **superfície compacta**.

Definição 4.9. (Superfície fechada). Quando uma superfície não tem bordo e é limitada, ou seja, pode ser subdividida em um número finito de triângulos, é denominada **superfície fechada**.

Observação 4.3.1. *Por definição, uma superfície fechada é uma superfície compacta e sem bordo.*

² Um triângulo em uma superfície é um pedaço da superfície que é homeomorfa a uma região triangular plana. Um triângulo em uma superfície também possui 3 vértices, 3 arestas e uma face.

Exemplo 4.6. Um retângulo plano não é uma superfície fechada, pois possui um bordo poligonal retangular. Veja Figura 46.



Figura 46: Superfícies com bordo.

Exemplo 4.7. O plano Euclidiano não tem bordo, porém não é uma superfície fechada, pois não pode ser subdividido em um número finito de regiões triangulares.

Definição 4.10. (Triangulação). Uma coleção de triângulos em uma superfície quando obedecer a certas regras será chamada de **triangulação ou triangularização**. Estas regras são:

- (1) Cada dois triângulos distintos da coleção tem em comum uma aresta ou um vértice ou nada tem em comum;
- (2) Cada aresta de um desses triângulo é comum a exatamente dois triângulos;
- (3) Dado um par de pontos A e B da superfície, existem triângulos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, com A na região triangular Δ_1 e B na região triangular Δ_n , tal que cada dois triângulos consecutivos desta sequência tem uma aresta em comum.

Exemplo 4.8. Quando é possível triangularizar uma superfície, isso significa que é possível cobri-la de formas triangulares, as quais tem em comum, ou um vértice ou uma aresta ou nada em comum. Além disso, a triangularização de uma superfície não é única. Na Figura 47, temos uma triangularização da faixa de Möbius.

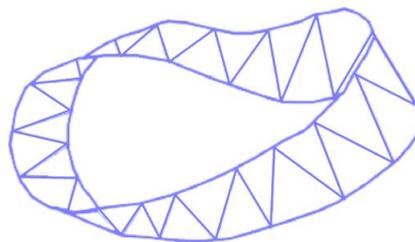


Figura 47: Triangularização da faixa de Möbius.

Exemplo 4.9. O toro é um exemplo de superfície fechada. Veja Figura 48.

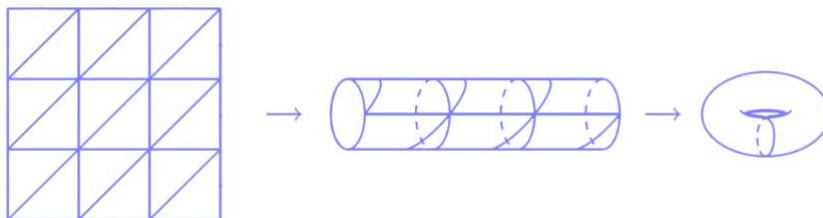


Figura 48: Superfície fechada.

Note que o retângulo apesar de ter bordo, após a colagem deixa de existir, e a deformação do cilindro resulta em uma superfície sem bordo.

Definição 4.11. (Diagrama plano). Uma representação poligonal de uma superfície é chamada de **diagrama plano** ou **modelo plano de uma superfície**.

Exemplo 4.10. (Esfera e seu diagrama plano). O diagrama plano da esfera S^2 pode ser representada identificando arestas adjacentes nos sentidos indicados conforme a Figura 49 da esquerda, que também equivale ao diagrama de um disco homeomorfo conforme a figura 49 da direita.

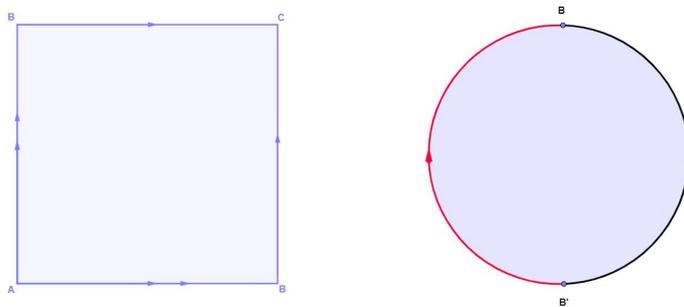


Figura 49: Diagrama plano da esfera S^2 .

O conceito de orientabilidade permite dividir superfícies compactas em duas classes, orientáveis e não orientáveis, e é usada para nos ajudar a classificar, quando tomamos como base a existência ou não de orientação, isto é, quanto a lados internos e externos de uma superfície.

Definição 4.12. (Superfície orientável). Uma superfície é considerada orientável se um vetor Y perpendicular à superfície no ponto P pode deslizar ao longo da superfície de modo que permaneça sempre perpendicular à superfície e quando retornar ao ponto P continua apontando na mesma direção em que começou. Veja Figura 50.

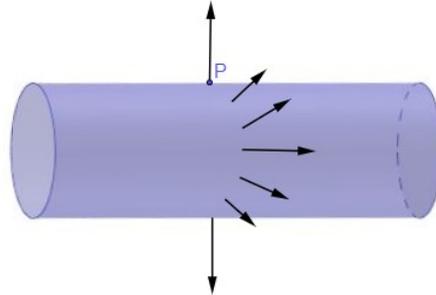


Figura 50: Superfície orientável.

De modo mais intuitivo uma superfície é dita orientável quando é possível distinguir dois lados um interno e outro externo, como por exemplo uma esfera. Veja Figura 51.

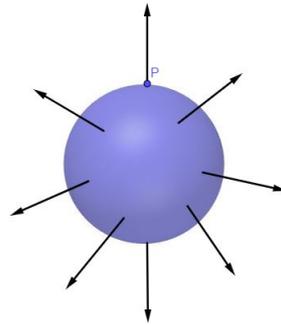


Figura 51: Superfície orientável.

Definição 4.13. Uma superfície é dita não orientável quando existe pelo menos um vetor perpendicular à superfície e que não satisfaz a condição na Definição 4.12.

4.4 PLANO PROJETIVO, TORO, FAIXA DE MÖBIUS E GARRAFA DE KLEIN.

A seguir ilustraremos as superfícies que são definidas abstratamente a partir de colagens estratégicas de pares de arestas de regiões poligonais planas. As definições para cada superfície será apresentada por meio de exemplos intuitivos.

Exemplo 4.11. (Toro). O toro, muito conhecido como donnut (ou camara de ar), é também uma superfície orientável fechada; resultante da identificação orientada das arestas opostas de um retângulo. Em um diagrama plano, ver Figura 52, o toro é representado por um retângulo com duas arestas opostas com setas simples de mesma orientação e outras duas arestas opostas com setas duplas de mesma orientação.



Figura 52: Diagrama retangular do Toro.

Então, para produzir o toro plano, são **coladas**³, aos pares, as arestas opostas, ou seja, os lados opostos do retângulo, uma na outra. As setas demarcadas no retângulo indicam que as arestas de setas simples serão coladas uma sobre a outra, assim como as arestas de setas duplas. Veja Figura 53.

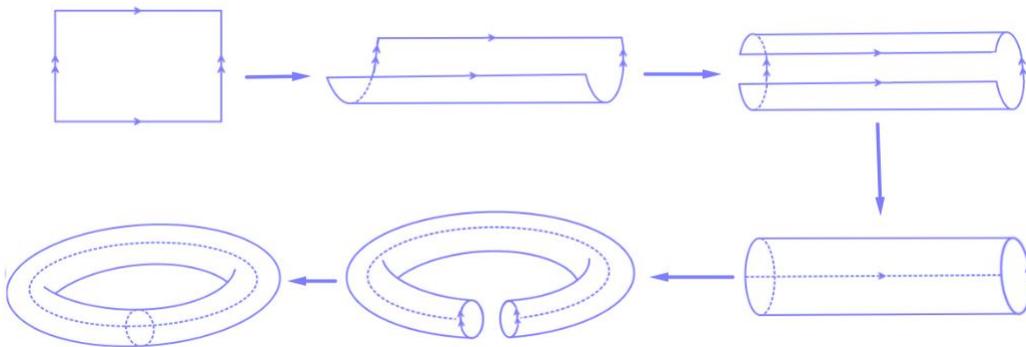


Figura 53: Modelo de Toro.

O toro é uma superfície fechada e antes de todo processo de colagem seria possível imaginarmos um objeto ou habitante bidimensional se movimentando nessa superfície. Este objeto ou habitante, conseguiria sair por qualquer ponto da borda e reaparecer do lado oposto como mostra a Figura 54 e após a colagem teríamos um habitante movimentando sobre uma superfície orientada.

³ A colagem, em Topologia, é ação que desfaz as linhas das arestas, tornando o objeto contínuo.

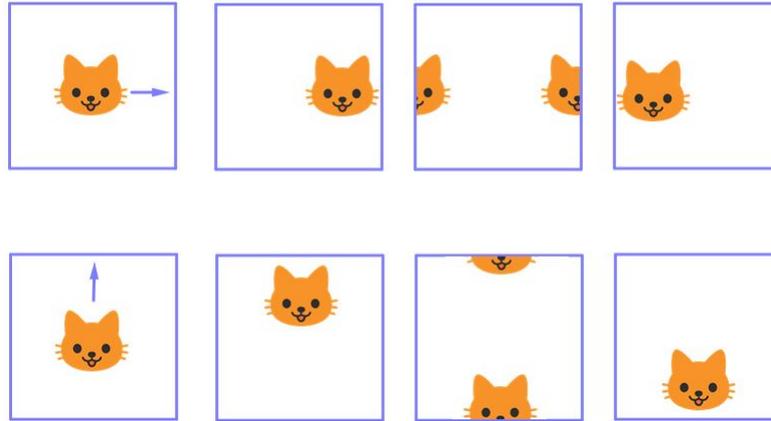


Figura 54: Habitante bidimensional.

Exemplo 4.12. (Faixa de Möbius). A Faixa de Möbius é a mais elementar superfície não-orientável e possivelmente o mais conhecido exemplo de superfície definida abstratamente; tem a particularidade de possuir apenas um único e contínuo bordo. Veja Figura 55.

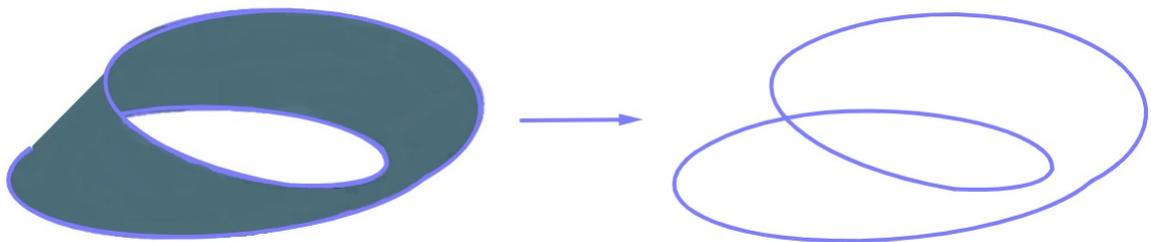


Figura 55: Borda contínua da Faixa de Möbius.

Podemos representar um modelo desta superfície identificando-se os lados opostos de um retângulo, como pode ser visto no diagrama da Figura 56, após um giro de 180° graus, isto é, uma semi-torção, que pode ser para a direita ou para a esquerda e colando as setas duplas, como pode ser visto na Figura 57.



Figura 56: Diagrama retangular da faixa de Möbius.

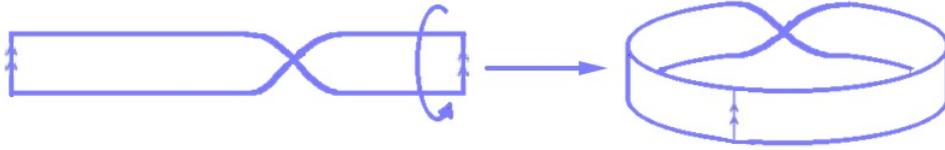


Figura 57: Modelo da faixa de Möbius.

Uma particularidade dessa superfície é ser não-orientável, assim podemos imaginar um habitante bidimensional percorrendo a faixa de Möbius. Esse passeio ao longo da faixa é um pouco inusitado, pois ao retornar a sua posição original, descobre-se que o habitante girou 180° em torno de si mesmo. Veja Figura 58.

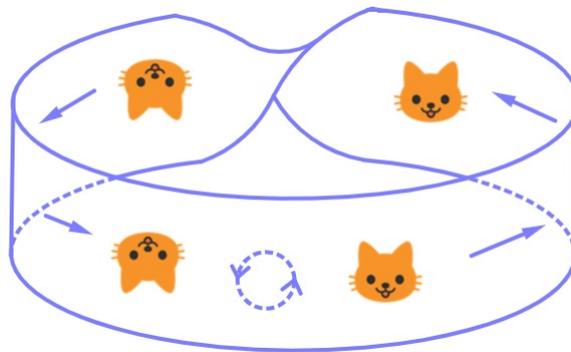


Figura 58: Passeio ao longo da faixa de Möbius.

O resultado do passeio de nosso habitante é um contra exemplo da Definição 4.12, porque ao se tomar um vetor perpendicular na superfície da faixa de Möbius e desliza-lo ao longo da superfície o vetor aponta na direção oposta, como inicialmente fazia. Veja Figura 59.

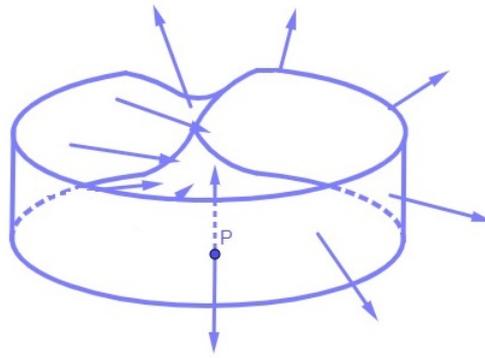


Figura 59: Faixa de Möbius não-orientável.

Uma outra maneira de entender a não orientabilidade sem o uso de vetores é analisar o diagrama quando 2 arestas estão identificadas com sentidos opostos, ao cruzarmos uma saímos pela outra de cabeça para baixo como ilustra a Figura 60.

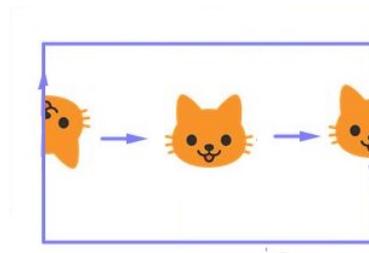


Figura 60: Arestas identificadas em sentidos opostos invertem figuras.

Duas curiosidades, que serão exploradas no capítulo 5, a respeito da faixa de Möbius dizem respeito a cortes que podem ser realizados em seu modelo de papel.

- i) A primeira delas é que, tomado o ponto médio de sua largura e traçado um corte em toda a extensão do comprimento da faixa, ela cederá lugar a uma faixa orientável, duas vezes maior, com quatro semitorções;
- ii) A segunda é que, tomado $1/3$ da largura e traçado um corte em toda a extensão até encontrar seu início, a fita cederá lugar a uma faixa orientável, duas vezes maior, com quatro semitorções, enodada, como elo de corrente, com uma faixa de Möbius de mesmo tamanho que a original, apenas $2/3$ mais estreita.

Exemplo 4.13. (Garrafa de Klein). Criada pelo matemático Felix Klein, em 1884, a Garrafa de Klein é também uma superfície não-orientável, porém fechada, resultante da identificação dos bordos de duas faixas de Möbius, uma com uma semi-torção à direita e outra com uma semi-torção à esquerda. Veja a Figura 61.

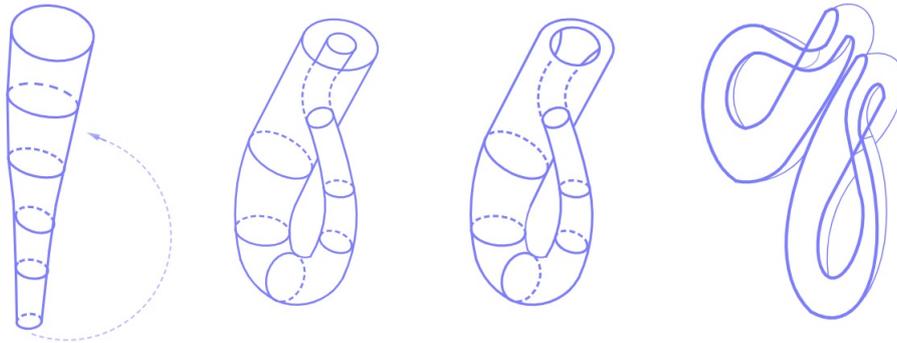


Figura 61: Garrafa de Klein e Faixa de Möbius.

Uma segunda maneira de construir a garrafa de Klein abstratamente é tomar como ponto de partida, um diagrama plano do retângulo. Veja Figura 62.

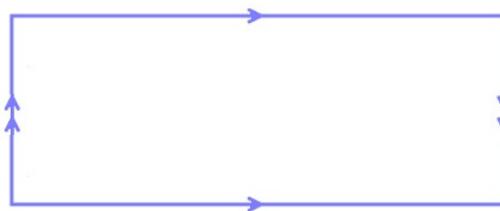


Figura 62: Diagrama da Garrafa de Klein.

Observe que na Figura 63, a faixa retangular ao meio da garrafa de Klein é uma faixa de Möbius.



Figura 63: Faixa de Möbius na garrafa Klein.

A partir do retângulo plano, colamos a aresta superior na inferior, como na construção do toro plano. Em seguida, colamos a aresta esquerda na direita, após aplicarmos uma semi-torção de 180° numa das extremidades da faixa retangular. Veja na Figura 64 o resultado da construção da garrafa de Klein no espaço euclidiano tridimensional.

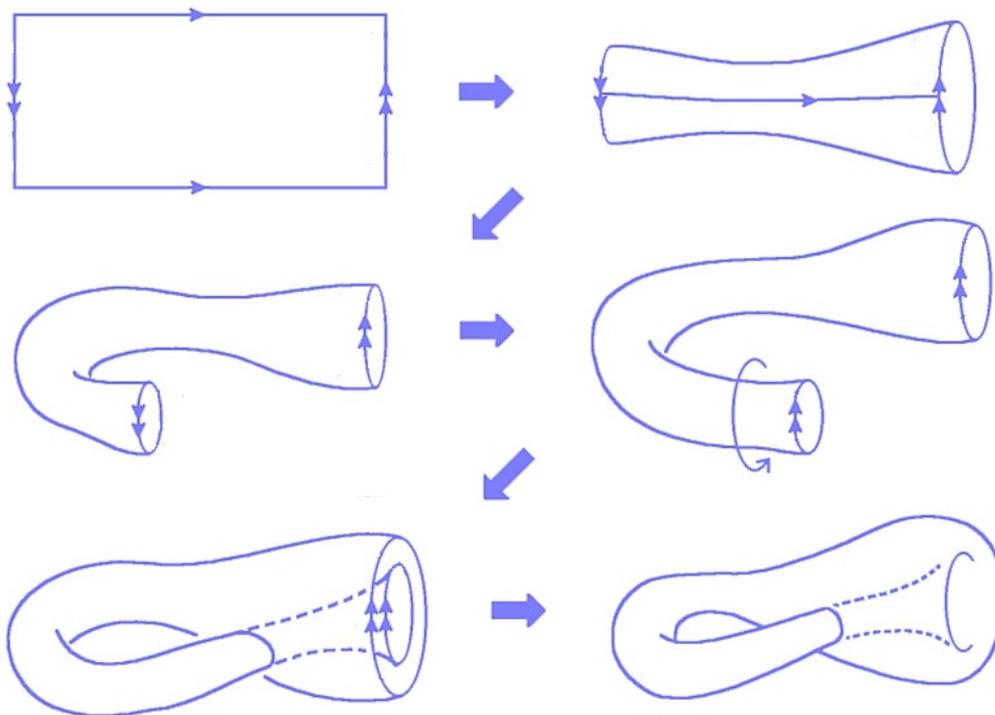


Figura 64: Garrafa de Klein no espaço Euclidiano.

Fonte: Imagem obtida do livro [10].

A Figura 65 apresenta alguns exemplos da garrafa de Klein.



Figura 65: Garrafa de Klein.

Imagem obtida em www.kleinbottle.com.

Exemplo 4.14. (Esfera). A Esfera S^2 é uma superfície orientável fechada resultante da identificação de arestas adjacentes nos sentidos indicados na Figura 66.

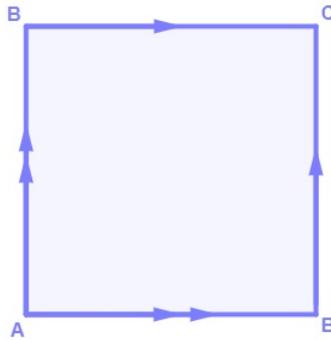


Figura 66: Diagrama poligonal da esfera S^2 .

Em um diagrama plano, devido ao homeomorfismo entre o quadrado e o círculo, a esfera também pode ser representada como um círculo com setas de mesma orientação como mostra a Figura 67.

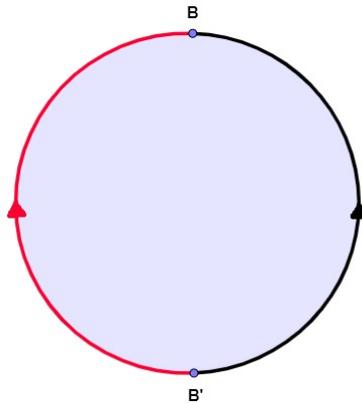


Figura 67: Diagrama plano da esfera S^2 .

Para produzir a esfera S^2 , são coladas, as arestas curvilíneas de mesma cor ou setas simples, como mostra a Figura 68. Uma maneira interessante de enxergar a construção da esfera S^2 é colar as arestas curvilíneas de setas simples e tomar o vértice B como polo norte.

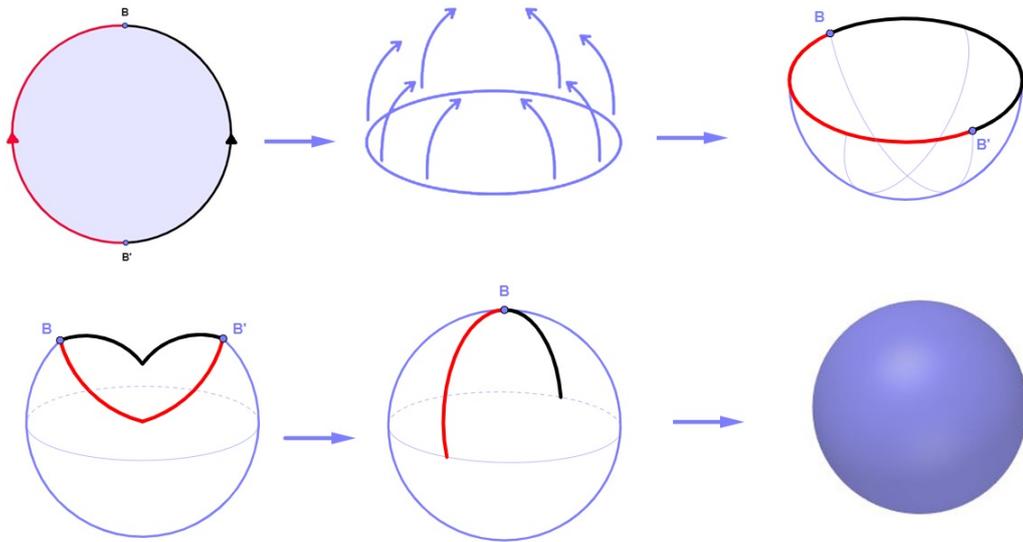


Figura 68: Exemplo de construção da esfera S^2 .

Assim como mencionado na Definição 4.12, a esfera S^2 é uma superfície orientável e podemos imaginar um habitante bidimensional percorrendo esta superfície como mostra a Figura 69.

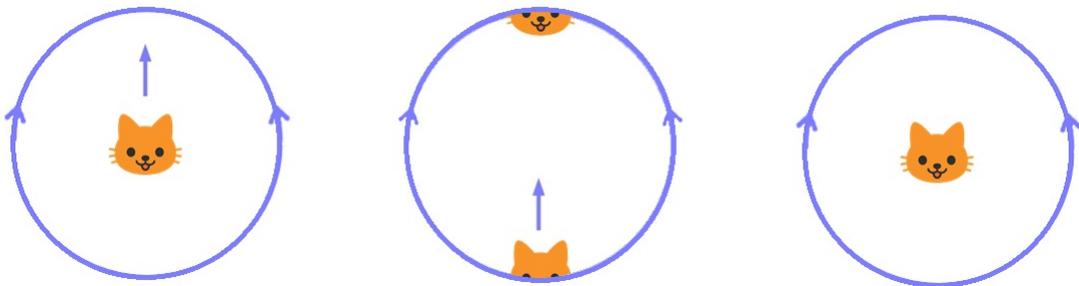


Figura 69: Habitante bidimensional na esfera S^2 .

Exemplo 4.15. (Plano projetivo). O plano projetivo é uma superfície não-orientável fechada, sendo obtido a partir de uma quadrado ao se identificar os pares de arestas opostas, em sentidos opostos, como indicado na Figura 70.

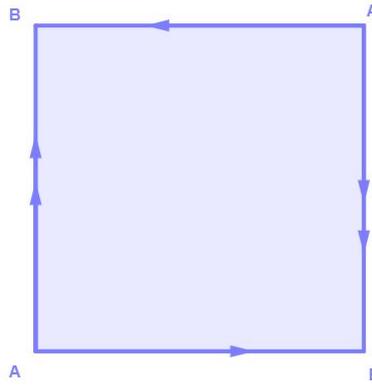


Figura 70: Diagrama poligonal do plano projetivo.

O plano projetivo pode ser representado por um diagrama plano circular, de duas arestas curvilíneas, com setas de orientação opostas, como indica a Figura 71.

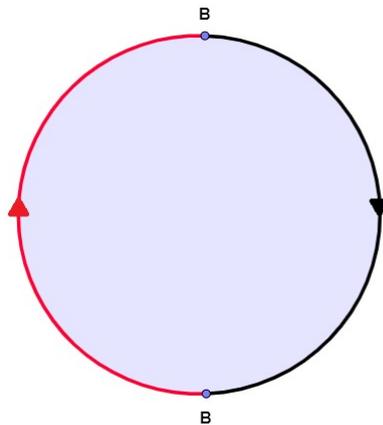


Figura 71: Diagrama circular do plano projetivo.

Para construir o plano projetivo podemos tomar como ponto de partida o hemisfério sul da superfície de uma esfera, ou seja, vamos utilizar uma semi-esfera. Cada ponto no bordo da semi-esfera deve ser colado com seu ponto diametralmente⁴ oposto, assim os pontos A , B e C são colados no pontos A' , B' e C' , respectivamente, como mostra a Figura 72.

⁴ De um polo ao outro, no sentido do diâmetro.

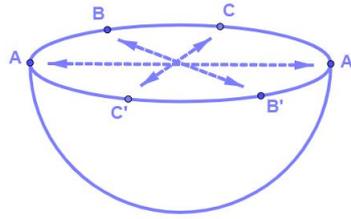


Figura 72: Plano projetivo a partir de uma semi-esfera.

Uma outra maneira de construir o plano projetivo, a partir do diagrama plano circular, consiste da colagem da aresta curvilínea direita sobre a esquerda, com uma retorção, o que equivale a colar, os pontos diametralmente opostos do bordo circular, como mostra a Figura 73. Essa construção no plano euclidiano tridimensional resulta na chamada **esfera com um cross cap**⁵.

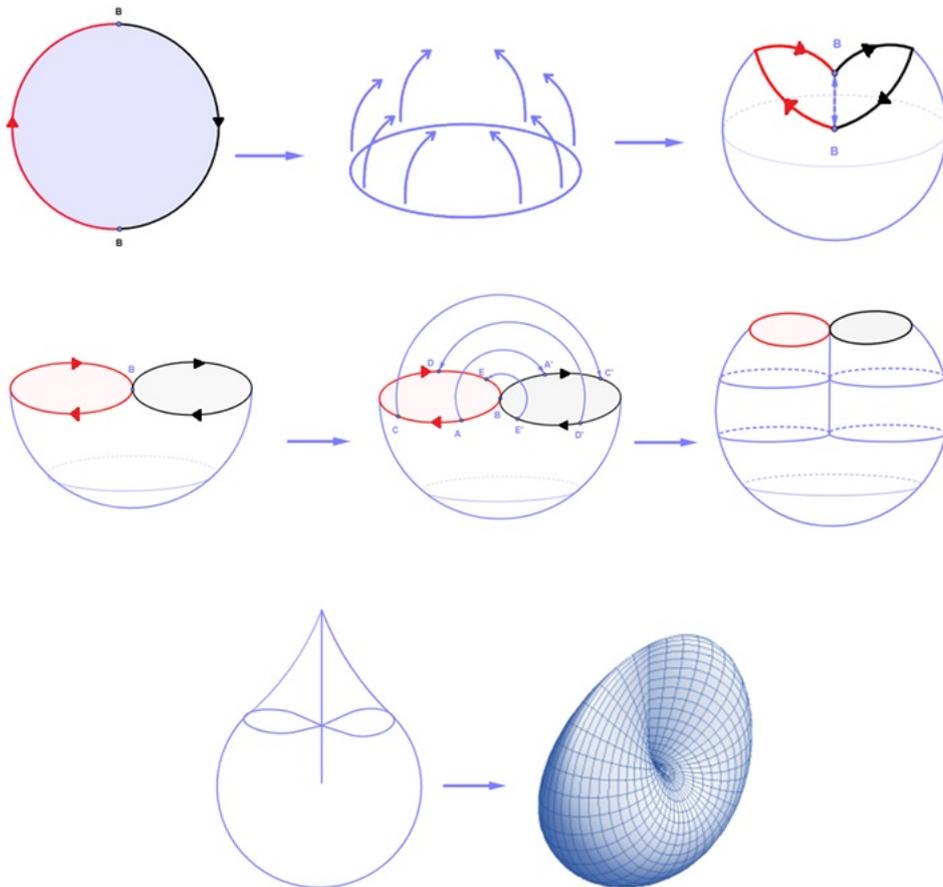


Figura 73: Construção do plano projetivo no espaço Euclidiano tridimensional.

⁵ O cross cap é a representação tridimensional do plano projetivo obtida da identificação da borda de um disco com a borda de uma faixa de Möbius.

Além da representação clássica do plano projetivo no espaço tridimensional, denominada **cross cap**, existem outras duas representações chamadas de **superfície romana de Steiner**⁶ e **superfície de Boy**⁷. Veja Figura 74

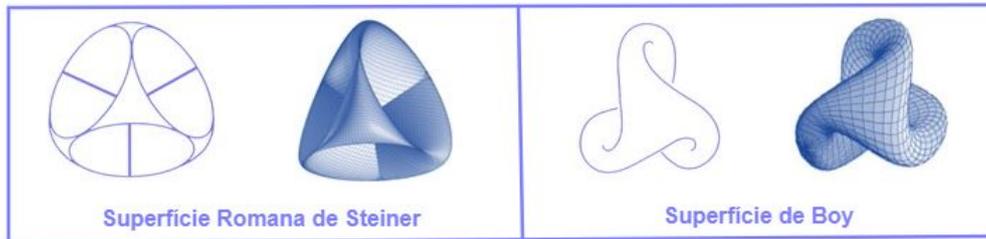


Figura 74: Plano projetivo no espaço tridimensional.

Fonte: Imagem obtida do livro [8]

Agora podemos analisar o diagrama plano circular do plano projetivo e encontraremos uma figura muito familiar já mencionado anteriormente, a faixa de Möbius, que apresenta uma indicação simples sem uso de vetores que o plano projetivo é uma superfície não-orientável. Veja Figura 75.

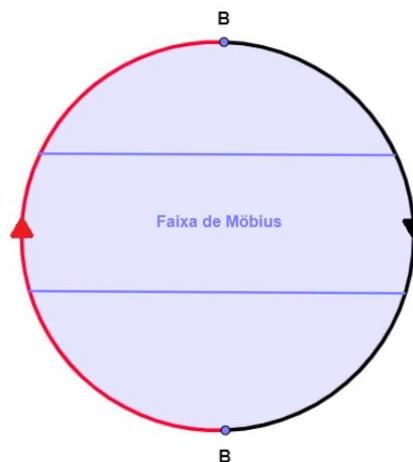


Figura 75: Faixa de Möbius no plano Projetivo.

⁶ O matemático Jakob Steiner (1796-1863), famoso por suas contribuições à geometria, certa vez em férias em Roma (Itália), criou um modelo do plano projetivo, batizado por ele de superfície romana.

⁷ Werner Boy (1879-1914) apresentou, em 1901, em sua tese, defendida na Universidade de Göttingen (Alemanha), um modelo do plano projetivo conhecida como superfície de Boy

Isso nos permite imaginar um habitante bidimensional que deslocando-se sobre esta superfície retorna a sua posição original, dando uma giro de 180° em torno de si mesmo. Veja Figura 76.

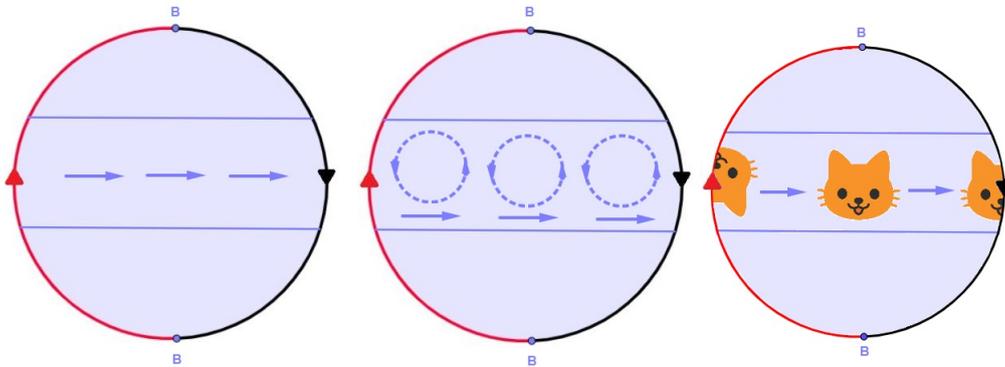


Figura 76: Passeio no plano projetivo.

A faixa de Möbius é o exemplo primordial de superfície não-orientável e, desta, é a primária; sendo assim, toda superfície que contém dentro de si uma faixa de Möbius é uma **superfície não-orientável**.

4.5 SOMA CONEXA DE SUPERFÍCIES

Ao contrário da noção de homeomorfismo, a soma conexa pode ser considerada uma operação descontínua. Essa operação é realizada pela junção de uma ou mais superfícies resultando em uma nova superfície. Os exemplos de superfícies apresentados até agora, esfera, toro, plano projetivo e garrafa de Klein recebem notações para facilitar o estudo e a identificação de somas conexas de superfícies fechadas. Para indicarmos a esfera utilizamos a notação S^2 , para o toro T^2 , para a garrafa de Klein K^2 e para o plano projetivo P^2 .

Definição 4.14. (Soma conexa). Sejam S_1 e S_2 duas superfícies fechadas e disjuntas. A soma conexa de S_1 e S_2 é uma nova superfície, que indicaremos por $S_1 \# S_2$, que é obtida removendo-se um disco de cada uma das duas superfícies e, em seguida, identificando-se as bordas deixadas pela remoção dos discos.

Observação 4.5.1. Em topologia, remover um disco de uma superfície é o mesmo que remover um único ponto. Isso significa que estamos manipulando um objeto perfeitamente deformável que nos permite aumentar o ponto ou furo, até criar um disco que se tornará uma borda.

Proposição 4.15. Sejam S_1 , S_2 e S_3 superfícies fechadas e disjuntas. A soma conexa de superfícies satisfaz as seguintes propriedades:

- i) Comutatividade, $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$;
- ii) Associatividade, $(S_1 \# S_2) \# S_3 = S_1 \# (S_2 \# S_3)$;
- iii) Existência do elemento neutro, $S^2 \# S_1 = S_1$. A esfera é o elemento neutro dessa soma.

Exemplo 4.16. (Soma conexa entre toro e esfera). Como a esfera S^2 é o elemento neutro da soma conexa de superfícies, a soma entre o toro T^2 e uma esfera S^2 é $T^2 \# S^2 = T^2$. Ver Figura 77.

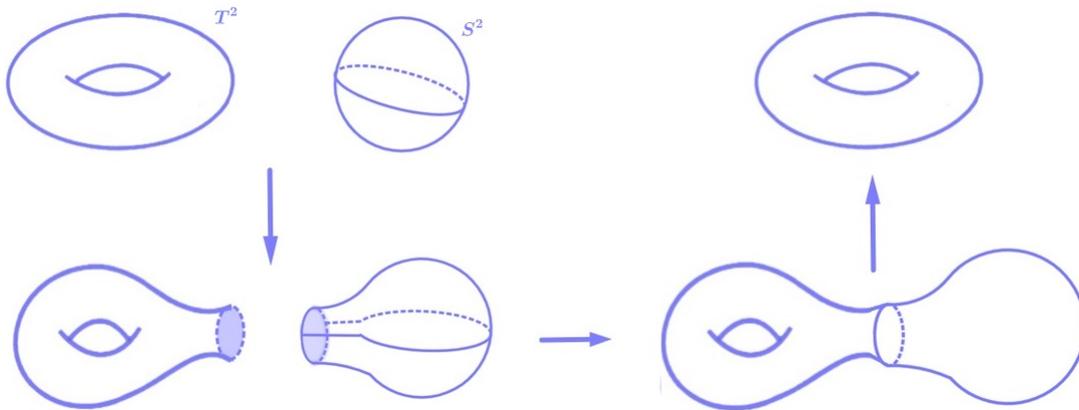


Figura 77: Soma conexa T e S^2 .

Exemplo 4.17. (Soma conexa entre toro e toro). A soma conexa $T^2 \# T^2$ é chamada de **toro de gênero**⁸ **2** ou **bitoro**. Observe na Figura 78, que foi utilizado um corte e removido uma pequena região circular ou disco de cada uma das superfícies. Uma pequena deformação em cada uma das figura, puxando cada bordo circular e depois identificando os mesmos, obtemos a soma conexa $T^2 \# T^2$.

⁸ Em superfícies orientadas, o gênero é o número de buracos ou alças de uma superfície. Por exemplo, o toro bidimensional possui gênero 1 e a esfera gênero 0.

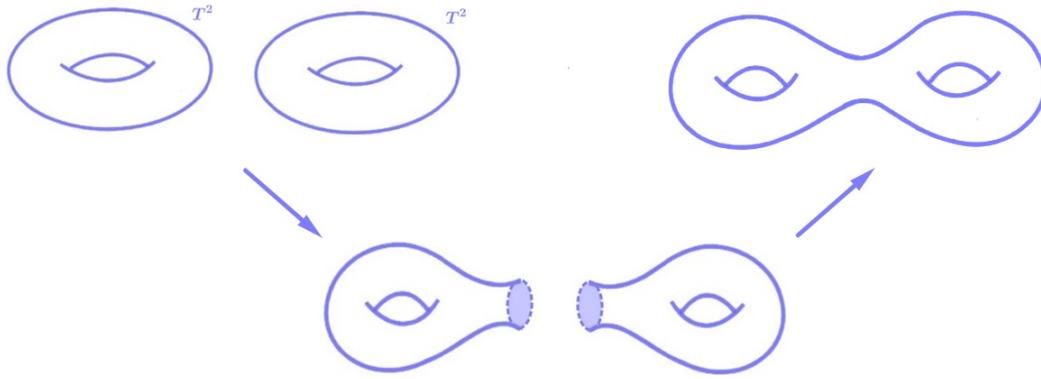


Figura 78: Bitoro como soma conexa de dois toros.

Exemplo 4.18. (Soma conexa entre bitoro e toro). A soma conexa dessas superfícies é obtida de maneira análoga ao Exemplo 4.17. Veja Figura 79.

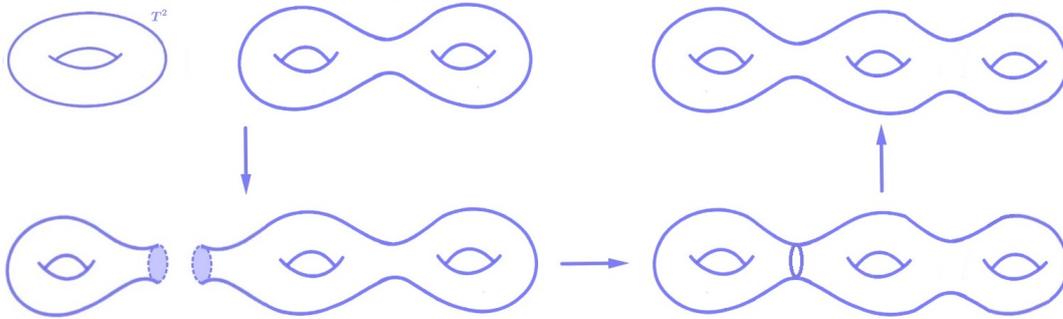


Figura 79: Toro de gênero 3 como soma conexa de bitoro e toro.

Em topologia das superfícies, além das quatro superfícies básicas, a esfera, o toro, a garrafa de Klein e o plano projetivo, por meio de um número finito de somas conexas todas as demais superfícies fechadas são construídas a partir dessas superfícies básicas.

Exemplo 4.19. (A garrafa de Klein K^2). A garrafa de Klein K^2 é obtida pela soma conexa de dois planos projetivos P^2 , ou seja $K^2 = P^2 \# P^2$. Veja Figura 80.

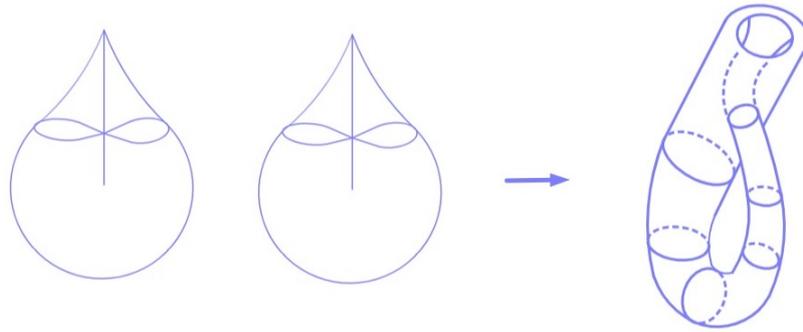


Figura 80: Garrafa de Klein como soma conexa de planos projetivos.

Ao observar a imagem acima não fica tão intuitivo que a soma conexa dos planos projetivos resulta em uma garrafa de Klein. Porém, no Exemplo 4.15, vimos que o plano projetivo possui uma faixa de Möbius em seu interior, e por meio do homeomorfismo, o diagrama do plano projetivo fica idêntico ao diagrama plano da faixa de Möbius, veja Figura 81. Além disso, no Exemplo 4.13, a garrafa de Klein é resultante da identificação de duas faixas de Möbius.

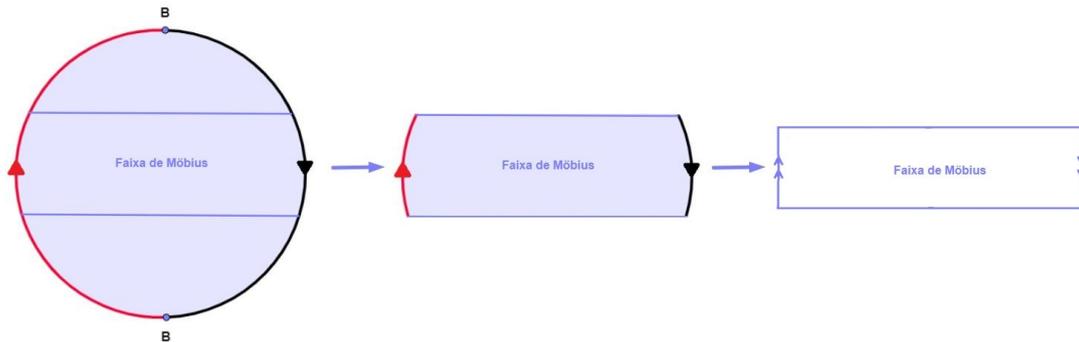


Figura 81: Homeomorfismo entre o diagrama do Plano projetivo e da faixa de Möbius.

Se temos duas superfícies que podem ser representadas pelos seus respectivos diagramas planos, é possível obter a soma conexa delas também representada por um diagrama plano. Isso possibilita uma visibilidade direta do objeto em sua manipulação. Esse diagrama da soma é obtido através de encaixes estratégicos das arestas dos diagramas planos das superfícies. Vamos nomear as arestas por letras e indicar sentido por setas. As arestas marcadas com a mesma letra são coladas uma às outras obedecendo a direção das setas nelas demarcadas, de modo a obter a superfície associada ao diagrama plano referente. Nesse contexto, a soma conexa de duas superfícies consiste

na remoção de um disco de cada diagrama plano seguido da identificação dos bordos dos mesmos.

A Figura 82 ilustra uma outra maneira de visualizar a soma conexa de dois planos projetivos e assim conclui-se que $P^2 \# P^2$ é topologicamente uma garrafa de Klein.

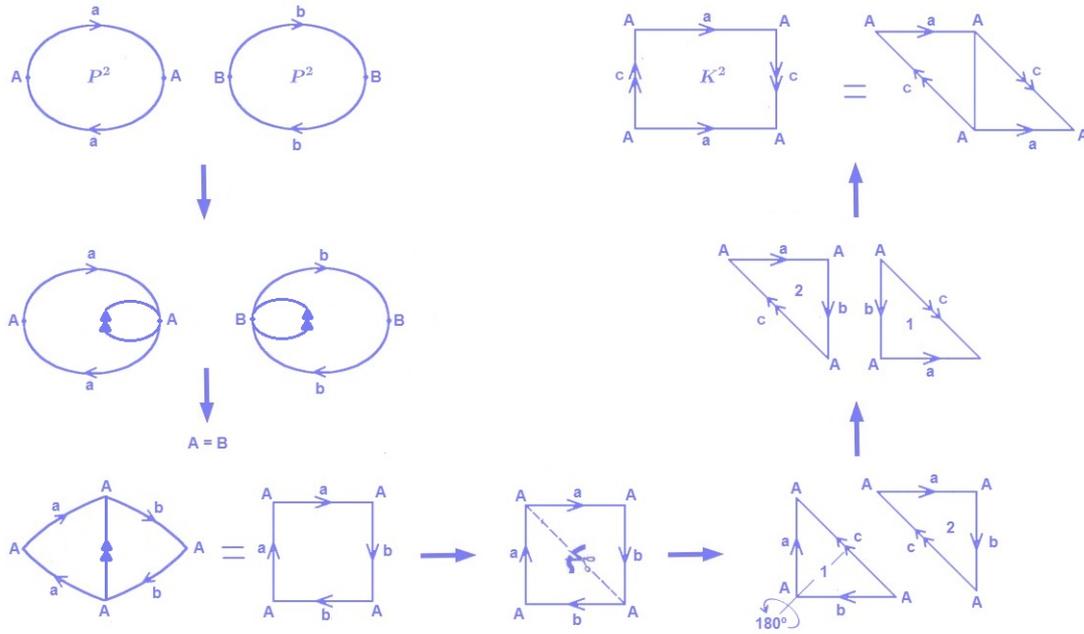


Figura 82: Modelo plano da soma conexa $P^2 \# P^2 = K^2$.

Fonte: Imagem obtida do livro [10].

Note que ao visualizar a soma conexa de duas superfícies através de diagramas, as aresta podem ser identificadas por letras e demarcadas por setas, isso possibilita que sua identificação se torne ainda mais precisa. As letras utilizadas nos diagramas planos, seguindo as indicações das setas, formam o que chamamos de **palavra** ou **representação por palavras**. Essa denominação é uma forma de etiquetar e guardar as informações acerca da configuração poligonal plana de uma superfície.

Para construir uma representação por palavra de uma superfície, a partir da representação poligonal plana, procedemos da seguinte forma:

- i) Consideramos a representação poligonal da superfície com as arestas que devem ser identificadas etiquetadas com a mesma letra e com o mesmo sentido da identificação;

- ii) Percorremos toda a borda da representação plana fixando um vértice inicial e um sentido, horário ou anti-horário;
- iii) Durante o percurso anotamos, em forma de sequência, a letra que dá nome a cada aresta, tomando o cuidado de anexar o expoente "-1", caso o percurso seja no sentido oposto à orientação na aresta.

As representações por palavras, do toro, da garrafa de Klein, do plano projetivo e da esfera, permitindo-nos, nesses dois últimos casos, o uso de arestas curvilíneas, podem ser visualizadas na Figura 83 e a partir delas, escrevemos as primeiras representações por palavras, como mostra a Tabela 1.

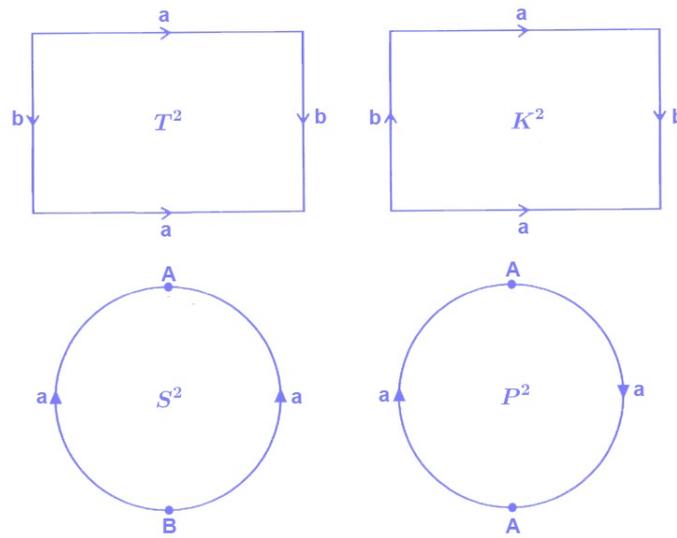


Figura 83: Representação poligonal.

Superfície	Palavra
Toro plano	$aba^{-1}b^{-1}$
Garrafa de Klein	$aba^{-1}b$
Esfera	aa^{-1}
Plano projetivo	aa

Tabela 1: Representação por palavras a partir da representação poligonal.

Utilizando o sentido horário para escrever as representações por palavras das superfícies, escrevemos, então, $T^2 \equiv aba^{-1}b^{-1}$, $K^2 \equiv aba^{-1}b$, $S^2 \equiv aa^{-1}$ e $P^2 \equiv aa$.

Exemplo 4.20. (Diagrama poligonal do bitoro e sua representação por palavra). O diagrama plano do bitoro é representado por um octógono e obtido pela soma conexa de dois toros. Sua construção, seguindo-se o passo a passo indicado na Figura 84, começa removendo-se um disco ou uma região circular de cada um dos toros, tomando o cuidado que seu bordo circular comece e termine em um determinado vértice do diagrama. Em seguida, os bordos circulares etiquetados com as letras e e f são colados um no outro, obtendo, assim uma representação octogonal do bitoro.

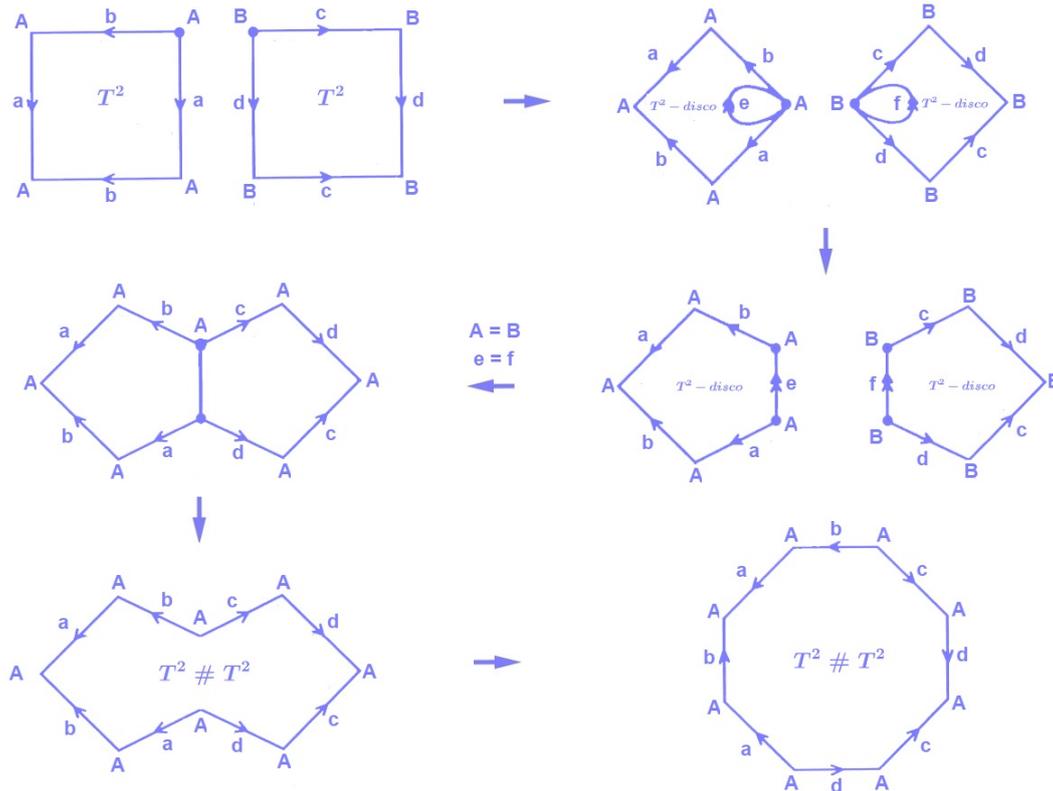


Figura 84: Construção poligonal da soma conexa de dois toros.

Fonte: Imagem obtida do livro [10].

Ao escrevermos as representações por palavras de uma soma conexa, é conveniente usar letras diferentes para diferenciar cada superfície. Na Figura 84, temos a soma de dois toros, um bitoro, onde a representação por palavra que corresponde ao octógono é $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ que provêm da concatenação das palavras $aba^{-1}b^{-1}$ e $cdc^{-1}d^{-1}$, que são as representações por palavras dos dois toros utilizados na soma.

4.6 CARACTERÍSTICA DE EULER

Leonhard Euler em seus estudos percebeu que as características essenciais de um poliedro são as componentes de dimensão 0, 1 e 2 da sua superfície. Euler enunciou que se um poliedro convexo tem V vértices, A arestas e F faces, então $V - A + F = 2$. No entanto, o matemático Poincaré, foi o primeiro a perceber que o teorema de Euler era um teorema de topologia, ao observar que o número $V - A + F$ é um **invariante topológico**.

Definição 4.16. (Invariante topológico). Uma propriedade que é preservada por homeomorfismo, isto é, que não se altera mesmo quando o espaço é transformado em outro, por meio de um número finito de deformações contínua reversíveis, é chamada um **invariante topológico**.

Definição 4.17. Seja S uma superfície compacta, com uma triangulação T e denotemos por v , o número de vértices, f o número de faces e a o número de arestas de T . O número $\chi(S) = v - a + f$ é chamado de **características de Euler-Poincaré** de S .

Observação 4.6.1. Note que este conceito dependeria da triangulação escolhida, porém a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de S .

Exemplo 4.21. A Figura 85 apresenta os poliedros de Platão que obedecem ao teorema de Euler e a Tabela 2 apresenta as características que elas possuem.

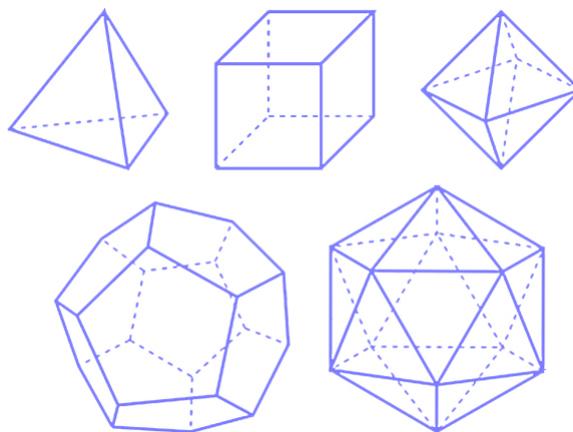


Figura 85: Poliedros de Platão.

Poliedro	v	a	f	$X(P) = v - a + f$
Tetraedro	4	6	4	$4 - 6 + 4 = 2$
hexaedro	8	12	6	$8 - 12 + 6 = 2$
Octaedro	6	12	8	$6 - 12 + 8 = 2$
Dodecaedro	20	30	12	$20 - 30 + 12 = 2$
Icosaedro	12	30	20	$12 - 30 + 20 = 2$

Tabela 2: Poliedros de Platão e sua característica.

Note que todos os poliedros de Platão apresentam a mesma característica de Euler igual a 2.

Exemplo 4.22. (Poliedro não-convexo). A Figura 86 apresenta um poliedro que não obedece ao teorema de Euler, porém mesmo assim, possui uma característica que é encontrada em outros sólidos pela invariância topológica.

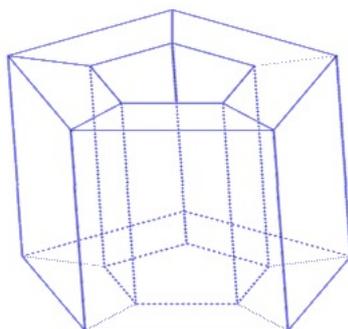


Figura 86: Poliedro não-convexo.

Nesse caso, o poliedro possui um buraco, e podemos verificar que ele possui 20 vértices, 40 arestas e 20 faces. Logo, sua característica de Euler-Poincaré é $\mathcal{X}(P) = v - a + f = 20 - 40 + 20 = 0$.

Exemplo 4.23. (Poliedro não-convexo II). A Figura 87 apresenta um poliedro que não obedece ao teorema de Euler, mas também possui uma característica que é encontrada em outros sólidos pela invariância topológica.

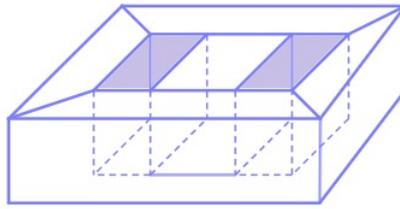


Figura 87: Poliedro não-convexo.

Nesse caso, o poliedro possui dois buracos, e podemos verificar que ele possui 24 vértices, 48 arestas e 22 face. Logo, sua característica de Euler-Poincaré é $\chi(P) = v - a + f = 24 - 48 + 22 = -2$.

Exemplo 4.24. (Cilindro). A Figura 88 é um exemplo de triangulação do cilindro.

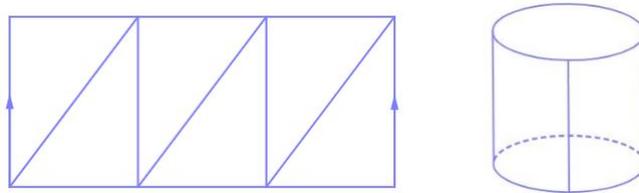


Figura 88: Exemplo de triangulação do cilindro.

Como a triangulação do cilindro possui 6 vértices, 12 arestas e 6 faces, a característica de Euler-Poincaré de C é $\chi(C) = v - a + f = 6 - 12 + 6 = 0$.

Exemplo 4.25. (Esfera S^2). A Figura 89 é um exemplo de triangulação para a esfera.

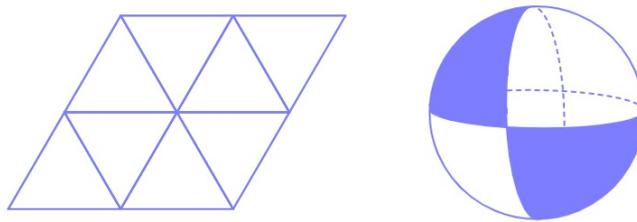


Figura 89: Exemplo de triangulação da esfera.

A característica de Euler-Poincaré para a esfera, superfície que possui triangulação com 4 vértices, 6 arestas e 4 faces, é $\chi(S^2) = v - a + f = 4 - 6 + 4 = 2$.

Exemplo 4.26. (Faixa de Möbius). A Figura 90 é um exemplo de triangulação da faixa de Möbius.

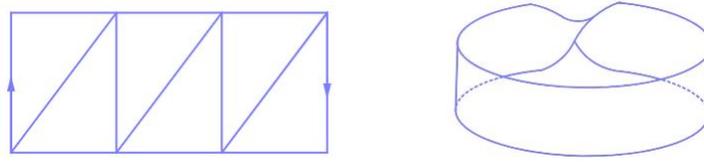


Figura 90: Exemplo de triangulação da faixa de Möbius.

A característica de Euler-Poincaré para a faixa de Möbius, superfície que possui triangulação com 10 vértices, 27 arestas e 18 faces, é $\chi(M) = v - a + f = 10 - 27 + 18 = 1$.

Exemplo 4.27. (Toro). A Figura 91 é um exemplo de triangulação do toro.

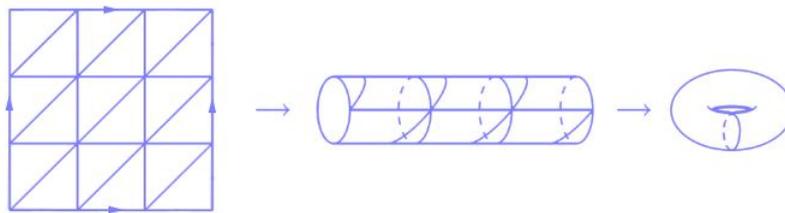


Figura 91: Exemplo de triangulação do toro.

A característica de Euler-Poincaré para o toro é $\chi(T^2) = v - a + f = 9 - 27 + 18 = 0$, já que o toro admite triangulação com 9 vértices, 27 arestas e 18 faces.

Exemplo 4.28. (Garrafa de Klein K^2). A Figura 92 é um exemplo de triangulação da garrafa de Klein.

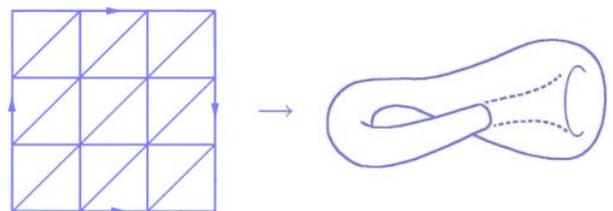


Figura 92: Exemplo de triangulação da garrafa de Klein.

A característica de Euler-Poincaré para a garrafa de Klein é $\chi(K^2) = v - a + f = 9 - 27 + 18 = 0$.

Exemplo 4.29. (Plano projetivo). A Figura 93 é um exemplo de triangulação do plano projetivo.

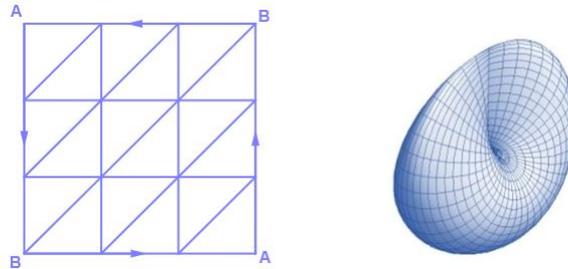


Figura 93: Exemplo de triangulação do plano projetivo.

A característica de Euler-Poincaré para o plano projetivo é $\chi(P^2) = v - a + f = 6 - 15 + 10 = 1$.

Proposição 4.18. *Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas homeomorfas, então*

$$\chi(S_1) = \chi(S_2).$$

A demonstração desta proposição pode ser encontrado no livro [1].

A igualdade acima mostra que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico para superfície desde que ambas sejam orientáveis ou ambas são não orientáveis.

Proposição 4.19. *Sejam S_1 e S_2 superfícies fechadas. Se $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ e ambas forem orientáveis ou ambas forem não orientáveis, então S_1 é homeomorfa a S_2 .*

A demonstração desta proposição pode ser encontrado no livro [1].

Proposição 4.20. *A característica de Euler-Poincaré para um polígono qualquer é igual a 1.*

Proposição 4.21. *Sejam S_1 e S_2 superfícies fechadas. Então*

$$\mathcal{X}(S_1 \# S_2) = \mathcal{X}(S_1) + \mathcal{X}(S_2) - 2.$$

A demonstração desta proposição pode ser encontrado no livro [1].

Proposição 4.22. *Seja a característica de Euler-Poincaré um invariante topológico, então:*

1. $\mathcal{X}(S^2) = 2$;
2. $\mathcal{X}(T^2 \# \dots \# T^2) = 2 - 2n$ (Soma conexa de n -toros);
3. $\mathcal{X}(P^2 \# \dots \# P^2) = 2 - n$ (Soma conexa de n -planos projetivos);
4. $\mathcal{X}(P^2 \# T^2 \# \dots \# T^2) = 1 - 2n$ (Soma conexa de uma plano projetivos e n -toros);
5. $\mathcal{X}(K^2 \# T^2 \# \dots \# T^2) = -2n$ (Soma conexa de uma garrafa de Klein e n -toros).

Corolário 4.23. *Seja S uma superfície conexa, compacta e orientável. Então*

$$\mathcal{X}(S) = 2 - 2g,$$

onde g é o gênero⁹ de S .

Note que, por esta igualdade para uma superfície S de gênero maior que 1, ou seja, excluindo a esfera que possui característica igual a 2, e o toro que possui característica igual a 0, para n -toros a característica de Euler-Poincaré é sempre um número negativo, como ilustra a Tabela 3.

Superfície	Gênero	Característica de Euler-Poincaré
Esfera	0	2
Toro	1	0
Bitoro	2	-2
Tritoro	3	-4

Tabela 3: Característica de Euler-Poincaré.

⁹ Em topologia, o gênero ou genus de uma superfície é o número de buracos que ela possui.

4.7 CLASSIFICAÇÃO TOPOLÓGICA DAS SUPERFÍCIES FECHADAS

A Tabela 4 lista as superfícies fechadas básica apresentadas até este momento e suas respectivas notações especiais.

Notação	Superfície
S^2	esfera bidimensional
T^2	toro bidimensional
K^2	garrafa de Klein
P^2	plano projetivo bidimensional

Tabela 4: Superfícies básicas.

A classificação topológica das superfícies fechadas foi apresentada por Brahana¹⁰ e descreve duas listas de superfícies, as superfícies orientáveis e as não orientáveis.

Proposição 4.24. *Toda superfície fechada orientável é uma esfera ou um toro ou uma soma conexa de dois ou mais toros.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrado no livro [10].

A seguir, temos a lista infinita das superfícies orientáveis que se inicia com a esfera, essa que é o elemento neutro da soma conexa, seguida pelo toro e pelas somas conexas de n -cópias de toros, chamados **n-toros**:

$$\begin{aligned}
 & S^2 \\
 & T^2 \\
 & T^2 \# T^2 \\
 & T^2 \# T^2 \# T^2 \\
 & \dots \\
 & T^2 \# T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2
 \end{aligned}$$

A soma conexa de n toros planos, $nT^2 = T^2 \# \dots \# T^2$, que é um toro de gênero n , pode ser representada por uma região poligonal plana de $4n$ lados, neste caso um $4n$ -ângono.

¹⁰ Henry Roy Brahana (1895-1972), em sua tese de doutorado defendida em Princeton, Estados Unidos, em 1920.

Um toro é representado por um retângulo, um toro de gênero 2 é representado por um octógono, um toro de gênero 3 é representado por um dodecágono (12-ágono), e assim sucessivamente. Além disso, no diagrama poligonal de cada uma dessas superfícies, todos os $4n$ vértices, após colagens, tornam-se um único ponto da superfície.

Proposição 4.25. *Toda superfície fechada não orientável é um plano projetivo ou uma soma conexa de dois ou mais planos projetivos.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrado no livro [10].

A lista infinita das superfícies não orientáveis inicia com o plano projetivo, seguido das somas conexas de n -cópias de planos projetivos.

$$\begin{aligned}
 &P^2 \\
 &P^2 \# P^2 \\
 &P^2 \# P^2 \# P^2 \\
 &\dots \\
 &P^2 \# P^2 \# P^2 \# \dots \# P^2 = nP^2
 \end{aligned}$$

De maneira análoga, a soma conexa de n planos projetivos, $n \geq 2$, pode ser representada por uma região poligonal plana de $2n$ lados, um $2n$ -ágono. A garrafa de Klein, soma conexa de 2 planos projetivos, é representada por um retângulo, a soma conexa de 3 planos projetivos é representada por um hexágono, e assim por diante. No diagrama poligonal de cada uma dessas somas conexas, todos os $2n$ vértices correspondem a um único ponto da superfície.

Um fato interessante é que a soma conexa de um toro e o plano projetivo é uma superfície homeomorfa à soma conexa de uma garrafa de Klein e um plano projetivo. Isso significa, $T^2 \# P^2 = K^2 \# P^2$ e por conta dessa igualdade, podemos verificar através da linguagem simbólica que a propriedade do cancelamento não é válida, uma vez que, ao cancelarmos P^2 de ambos os lados da igualdade, teríamos como resultado um toro igual a garrafa de Klein, $T^2 = K^2$, que neste caso é um absurdo.

Do Exemplo 4.19, vimos que $K^2 = P^2 \# P^2$ e substituindo essa igualdade na expressão $T^2 \# P^2 = K^2 \# P^2$ a operação soma conexa verifica,

$$T^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2.$$

Essa igualdade é chamada **identidade fundamental** da classificação topológica das superfícies fechadas.

Utilizando a identidade fundamental $T^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$, podemos simplificar ainda mais as somas conexas de n -planos projetivos. Ao somarmos um P^2 em cada um dos lados da igualdade $T^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$, obtemos $T^2 \# P^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2$. Assim, a soma de quatro cópias de P^2 é igual à soma de T^2 com a garrafa de Klein $P^2 \# P^2$. Portanto, $T^2 \# K^2 = P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2$. Somando um P^2 em cada lado desta última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2 &= T^2 \# K^2 \# P^2 \\ &= T^2 \# P^2 \# P^2 \# P^2 \\ &= T^2 \# T^2 \# P^2. \end{aligned}$$

Repetindo sucessivamente esse processo chegamos às igualdades:

$$\begin{aligned} (2n+1)P^2 &= nT^2 \# P^2 \\ &\text{e} \\ (2n+2)P^2 &= nT^2 \# K^2 \end{aligned}$$

Podemos a partir destas igualdades concluir que:

- i) A soma de um número ímpar $(2n+1)$ de planos projetivos equivale à soma de n -toros com um plano projetivo;
- ii) A soma de um número par $(2n+2)$ de planos projetivos equivale à soma de n -toros com uma garrafa de Klein.

SUGESTÃO DE ATIVIDADES

Este capítulo apresenta algumas sugestões de atividades práticas, buscando oferecer aos alunos e professores uma introdução ao conhecimento de topologia, atividades lúdicas, manipulação geométrica, desenvolvimento lógico, transformações topológicas, exemplos de estruturas topológicas e diversas aplicações inerentes à topologia.

5.1 UMA FAIXA DIFERENTE I

Esta atividade consiste em construir a faixa de Möbius e mostrar que ela apresenta uma única face.

- (1) Para construir a faixa de Möbius, pegue uma tira de papel de uns 24 cm de comprimento por uns 3 cm de largura, ou utilize o Apêndice A;



Figura 94: Tira de papel.

- (2) Cole as extremidades, após aplicar uma torção de 180° ;

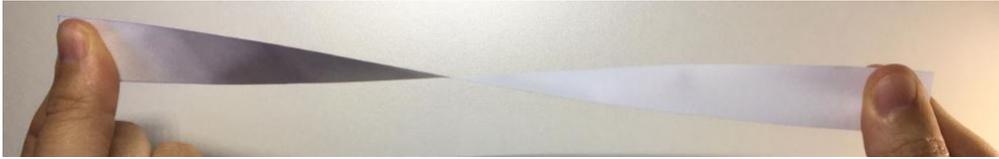


Figura 95: Torção de 180°.

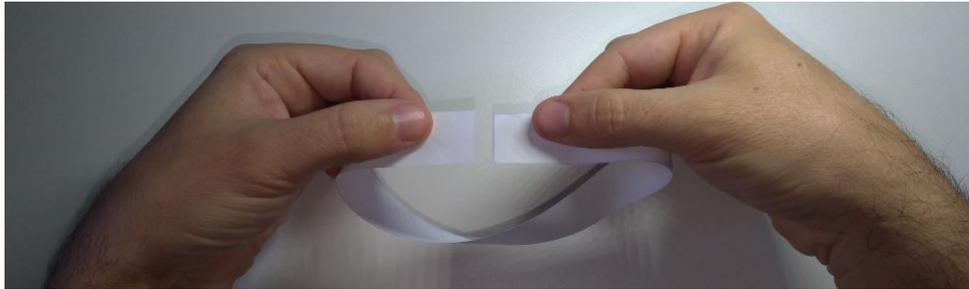


Figura 96: Colando as extremidades.

(3) O resultado obtido é uma faixa com uma única face.

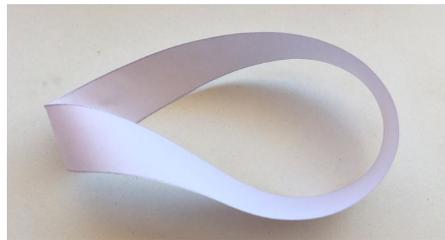


Figura 97: Faixa de Möbius em tira de papel.

5.2 UMA FAIXA DIFERENTE II

Esta atividade consiste em obter a partir da faixa de Möbius uma faixa orientável com dois lados, duas vezes maior, com quatro semi torções.

(1) Para construir essa nova faixa, pegue uma tira de papel de uns 24 cm de comprimento por uns 3 cm de largura, construa a faixa de Möbius (ver Seção 5.1) e tomado o ponto médio de sua largura trace uma linha em toda a extensão do comprimento da faixa ou utilize o Apêndice A;

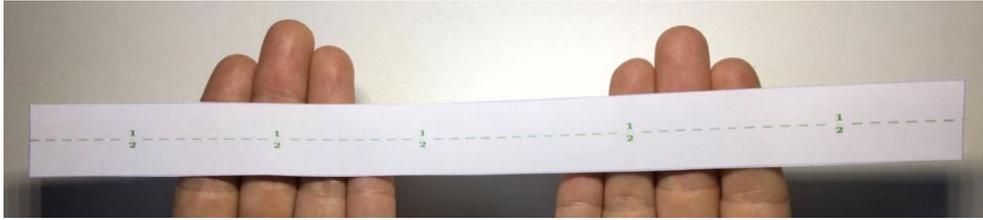


Figura 98: Faixa de Möbius em tira de papel.

- (2) Com a ajuda de uma tesoura, corte a primeira tira ao meio longitudinalmente, começando numa ponta e continuando a cortar até regressar ao ponto de partida, o Apêndice A possui a marcação em verde com a descrição para facilitar o recorte;



Figura 99: Recorte longitudinal da faixa.

- (3) O resultado obtido é uma única faixa orientável, duas vezes maior, com quatro semi torções.



Figura 100: Faixa com o dobro de tamanho.

5.3 UMA FAIXA DIFERENTE III

Esta atividade consiste em obter, de maneira surpreendente, duas faixas entrelaçadas a partir de uma única faixa .

- (1) Pegue uma tira de papel de uns 24 cm de comprimento por uns 3 cm de largura, e tomado o ponto médio de sua largura, trace uma linha em toda a extensão do comprimento da faixa ou utilize o Apêndice A;

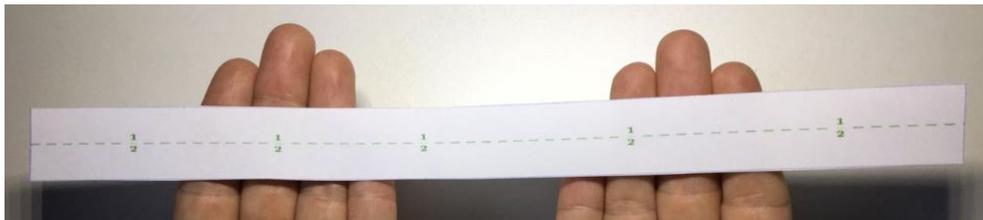


Figura 101: Faixa de Möbius em tira de papel.

- (2) Cole as extremidades, após aplicar duas torções de 180° , ou seja, uma torção completa;



Figura 102: Faixa com uma torção completa.

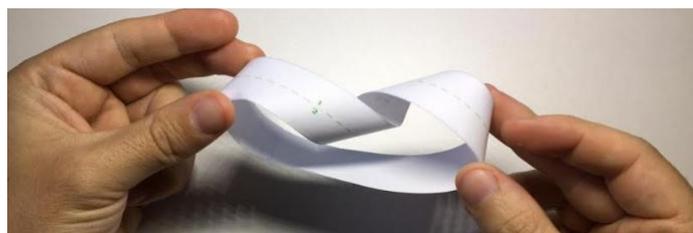


Figura 103: Faixa colada após uma torção completa.

- (3) Com a ajuda de uma tesoura, corte a primeira tira ao meio longitudinalmente, começando numa ponta e continuando a cortar até regressar ao ponto de partida, o anexo 2 possui a marcação para facilitar o recorte;



Figura 104: Recorte da faixa.

- (4) O resultado obtido é exatamente duas faixas entrelaçadas idênticas a partir de uma única faixa.

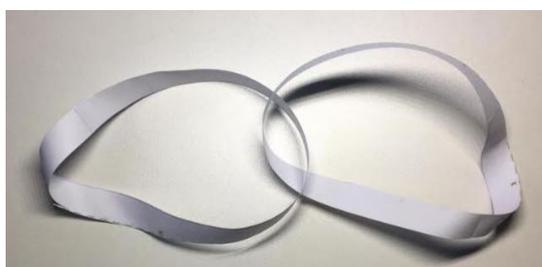


Figura 105: Faixas entrelaçadas.

5.4 UMA FAIXA DIFERENTE IV

Esta atividade é uma variação da atividade anterior, e consiste em obter, a partir de um corte a um terço da borda, uma faixa orientável duas vezes maior com quatro semi-torções, enodada, como elo de corrente, com uma faixa de Möbius de mesmo tamanho que a original, apenas $\frac{2}{3}$ mais estreita.

- (1) Pegue uma tira de papel de uns 24 cm de comprimento por uns 3 cm de largura, e tomado um terço da largura traçar uma linha em toda a extensão do comprimento da faixa ou utilize o Apêndice A com a marcação em vermelho a um terço da borda;

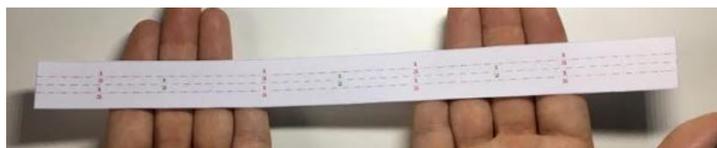


Figura 106: Faixa de Möbius em tira de papel.

- (2) Cole as extremidades, após aplicar uma semi torção de 180° de maneira a construir uma faixa de Möbius conforme Seção 5.1;

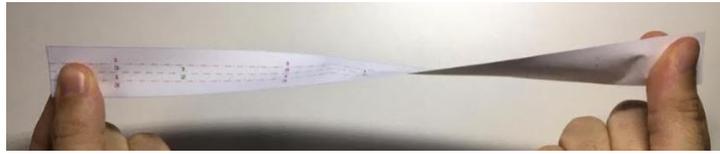


Figura 107: Faixa com semi torção.

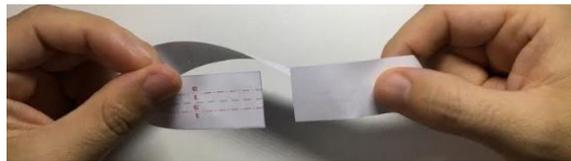


Figura 108: Unindo as extremidades da faixa.

- (3) Com a ajuda de uma tesoura, corte a faixa a um terço da borda longitudinalmente, começando numa ponta e continuando a cortar até regressar ao ponto de partida, o Apêndice A possui a marcação em vermelho para facilitar o recorte;



Figura 109: Recorte da faixa a um terço da borda.

- (4) O resultado obtido é exatamente duas faixas entrelaçadas, uma sendo a faixa de Möbius com o tamanho original apenas $\frac{2}{3}$ mais estreita e a outra, neste caso uma faixa orientável, duas vezes maior, com quatro semi torções.

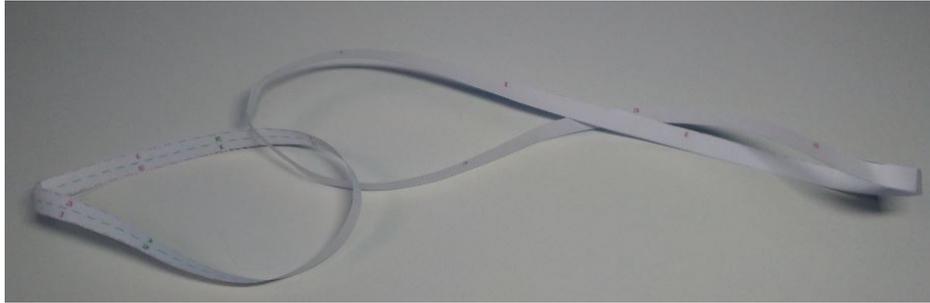


Figura 110: Duas faixas entrelaçadas.

5.5 DUAS FAIXAS SIMPLES JUNTAS

Quando juntamos duas faixas perpendicularmente uma na outra e cortamos as ambas ao meio longitudinalmente o resultado é muito interessante. Vamos chamar o resultado desta atividade de setor quadrático, uma referência homeomorfa ao setor circular.

- (1) Pegue duas tiras de papel de uns 24 cm de comprimento por uns 3 cm de largura ou utilize o Apêndice A;

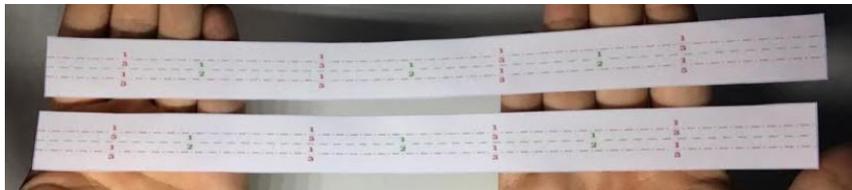


Figura 111: Duas tiras de papel.

- (2) Cole as extremidades de cada tira de papel sem torcer para obter duas faixas simples com formato cilíndrico;



Figura 112: Faixas simples com formato cilíndrico.

(3) Cole uma faixa na outra perpendicularmente;



Figura 113: Faixas coladas perpendicularmente.

(4) Agora com a ajuda de uma tesoura, corte cada tira ao meio longitudinalmente, começando numa ponta e continuando a cortar até regressar ao ponto de partida, o anexo 2 possui a marcação em verde na metade da tira de papel para facilitar o recorte;

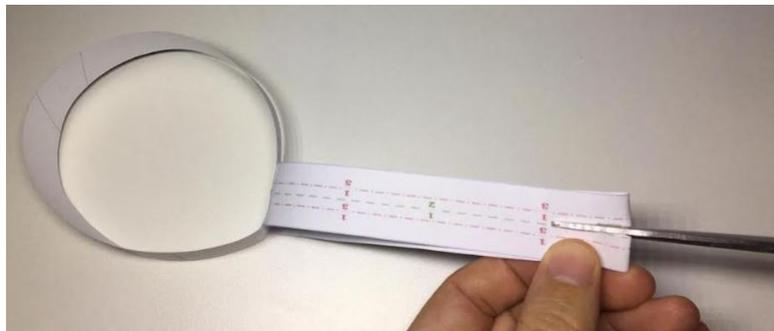


Figura 114: Recorte na linha central de cada faixa.



Figura 115: Recorte após uma volta em cada faixa .

(5) O resultado obtido é um setor quadrático.



Figura 116: Setor quadrático.

5.6 UMA FAIXAS SIMPLES E UMA FAIXA DE MÖBIUS JUNTAS

Quando juntamos duas faixas perpendicularmente, sendo uma faixa simples cilíndrica e a outra uma faixa de Möbius e em seguida cortamos ambas ao meio longitudinalmente o resultado é análogo a atividade anterior, ou seja, obtemos uma quadrado plano. Verifique!

5.7 DUAS FAIXAS DE MOBIUS COM SENTIDO DE ROTAÇÃO CONTRÁRIO

Se juntarmos duas faixas Möbius sendo cada uma com sentido oposto de semi torção o resultado é apaixonante com dois corações entrelaçados.

- (1) Pegue duas tiras de papel de uns 24 cm de comprimento por uns 3 cm de largura ou utilize o Apêndice A;
- (2) Cole as extremidades de cada tira de papel com uma semi torção com **direções opostas** de modo a obter duas faixas de Möbius.

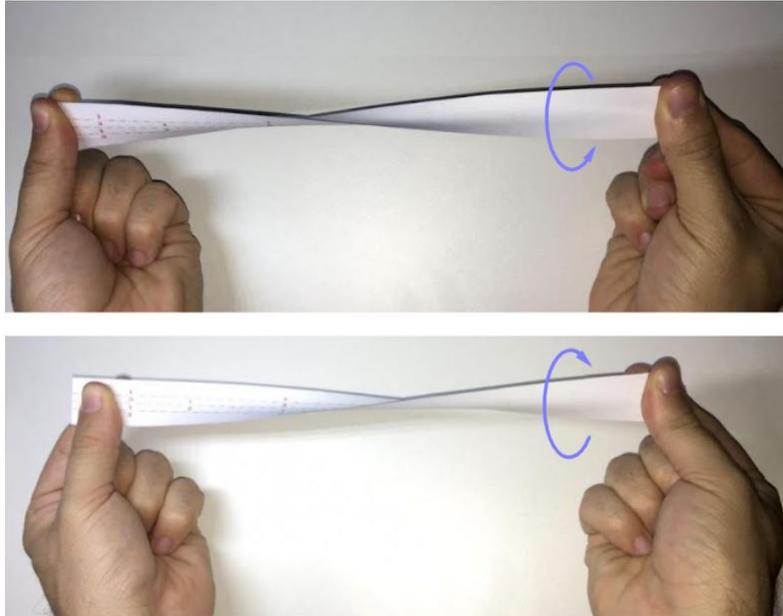


Figura 117: Tiras com sentido contrário de semi torção.



Figura 118: Faixas de Möbius com sentido de rotação opostas.

(3) Cole uma faixa na outra perpendicularmente;

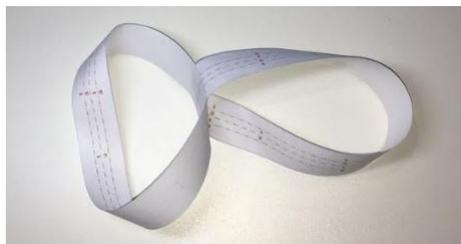


Figura 119: Duas faixas de Möbius coladas.

(4) Agora com a ajuda de uma tesoura, corte cada tira ao meio longitudinalmente, começando numa ponta e continuando a cortar até regressar ao ponto de par-

tida, o Apêndice A possui a marcação em verde na metade da tira de papel para facilitar o recorte;



Figura 120: Recorte das faixas.

(5) O resultado obtido são dois corações entrelaçados.

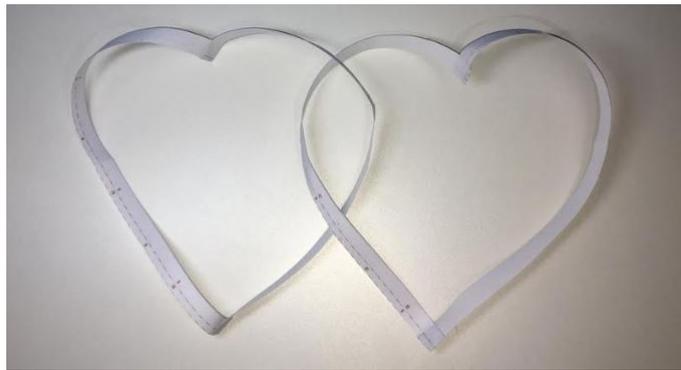


Figura 121: Corações entrelaçados.

5.8 DUAS FAIXAS DE MÖBIUS COM MESMO SENTIDO DE ROTAÇÃO

Se juntarmos duas faixas Möbius com mesmo sentido de rotação o resultado é diferente da atividade anterior, onde conseguimos obter dois corações entrelaçados. Com a colagem de ambas as faixas o resultado será dois objetos diferentes, um deles simétrico.

- (1) Pegue duas tiras de papel de uns 24 cm de comprimento por uns 3 cm de largura ou utilize o Apêndice A;
- (2) Cole as extremidades de cada tira de papel com uma semi torção cada, de modo a obter duas faixas de Möbius com mesmo sentido.



Figura 122: Tira com sentido de semi torção.



Figura 123: Faixas de Möbius com mesmo sentido de rotação.

- (3) Cole uma faixa na outra perpendicularmente;

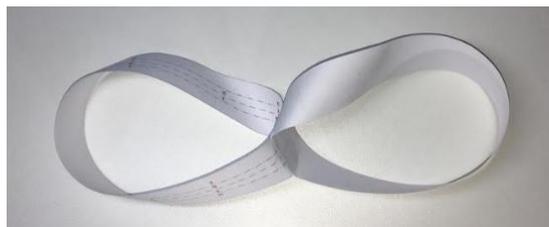


Figura 124: Duas faixas de Möbius com mesmo sentido de rotação coladas.

- (4) Com a ajuda de uma tesoura, corte cada tira ao meio longitudinalmente, começando numa ponta e continuando a cortar até regressar ao ponto de partida, o anexo 2 possui a marcação em verde na metade da tira de papel para facilitar o recorte;

- (5) O resultado obtido após cada um dos recortes simétricos em ambas as faixas são dois objetos diferentes unidos através de simetria.

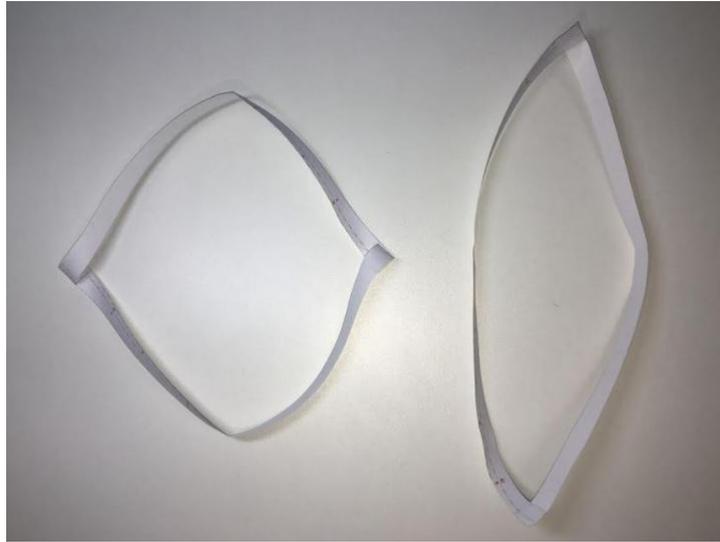


Figura 125: Objetos diferentes.

5.9 TOPOLOGIA X GEOMETRIA

A **geometria** estuda os conceitos que se alteram com as deformações e as medidas associadas a elas como: distância, perímetro, áreas, ângulos, volume e curvaturas. Isso significa que ao fazer comparação de tamanho e medidas, de alguma forma acabam sendo importante os conceitos geométricos. A Figura 126 mostra triângulos iguais, ou seja equivalentes, pois possuem suas medidas proporcionais, já os triângulos da Figura 127 são diferentes, geometricamente, uma vez que suas medidas não são proporcionais. Nestes casos a comparação ou necessidade de utilizar, uma medida, área, perímetro ou qualquer outras medidas acabam importando.

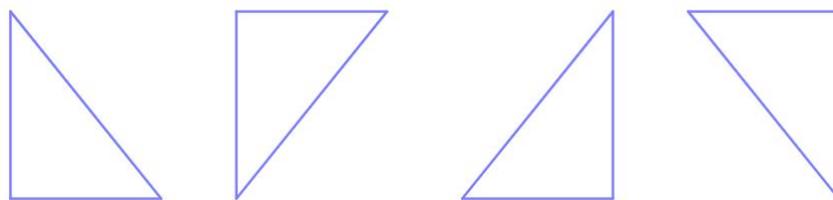


Figura 126: Triângulos equivalentes.

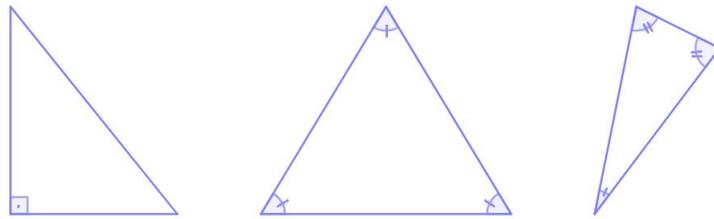


Figura 127: Triângulos não equivalentes.

A **topologia** não se importa com medidas, se preocupa com certas características do formato do objeto, sendo mais específico, das propriedades que não se alteram com deformações contínuas com inversa contínua, isto é, homeomorfismo. Tomando cuidado que essas deformações precisam seguir algumas regras já mencionadas na Seção 4.2. A Figura 128 mostra exemplos de formas topologicamente equivalentes e a Figura 129 apresenta um contra-exemplo exatamente no fato de uma das formas possui um buraco e a outra não.



Figura 128: Formas equivalentes.

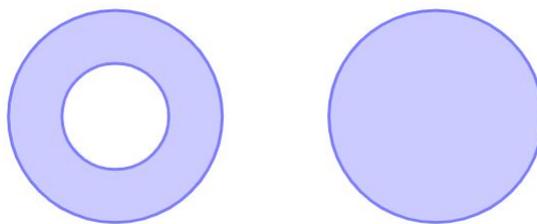


Figura 129: Formas não equivalentes.

A seguir uma proposta de atividades para reconhecer, sem a necessidade de conceitos formais, quando uma forma é equivalente topologicamente a outra ou não, e assim introduzir a ideia de objetos que apresentam homeomorfismos.

5.10 RECONHECENDO FORMAS PLANAS TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTES I

Esta atividade possui modelo para ser aplicado em sala de aula. Veja Apêndice B.

- (1) Seguindo o exemplo abaixo observe os pares de formas planas e circule **SIM** quando as formas forem topologicamente equivalentes e **Não** quando não forem topologicamente equivalentes. Comente qual foi o raciocínio utilizado para as respostas.

Exemplo:



Figura 130: Exemplo de pares de formas planas.

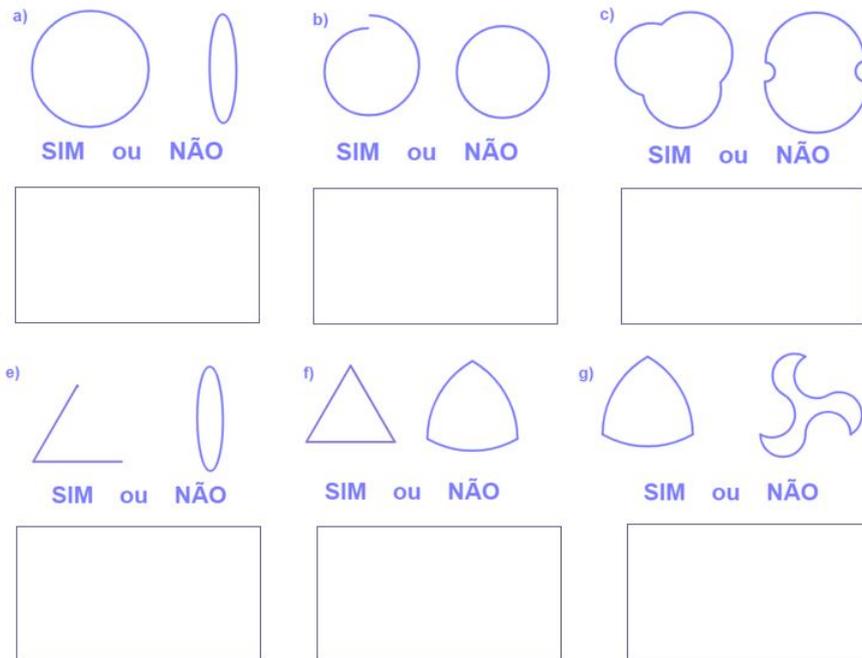


Figura 131: Reconhecendo figuras topologicamente equivalentes.

5.11 RECONHECENDO FORMAS PLANAS TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTES II

Esta atividade possui modelo para ser aplicado em sala de aula. Veja Apêndice B.

- (1) Seguindo o exemplo abaixo observe os pares de formas planas e circule **SIM** quando as formas forem topologicamente equivalentes e **Não** quando não forem topologicamente equivalentes. Comente qual foi o raciocínio utilizado para as respostas.

Exemplo:



Figura 132: Exemplo de pares de formas planas.

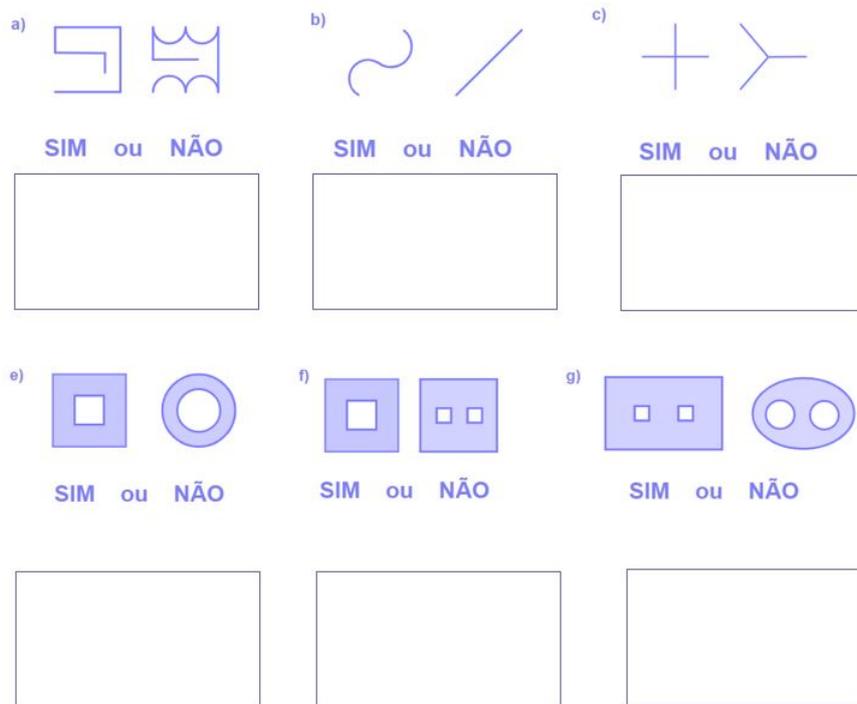


Figura 133: Reconhecendo figuras topologicamente equivalentes.

5.12 RECONHECENDO FORMAS TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTES III

Esta atividade possui modelo para ser aplicado em sala de aula. Veja Apêndice B.

- (1) Seguindo o exemplo abaixo observe os pares de figuras e circule **SIM** quando as formas forem topologicamente equivalentes e **Não** quando não forem topologicamente equivalentes. Comente qual foi o raciocínio utilizado para as respostas.

Exemplo:

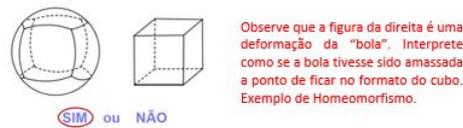


Figura 134: Exemplo de pares de formas planas.

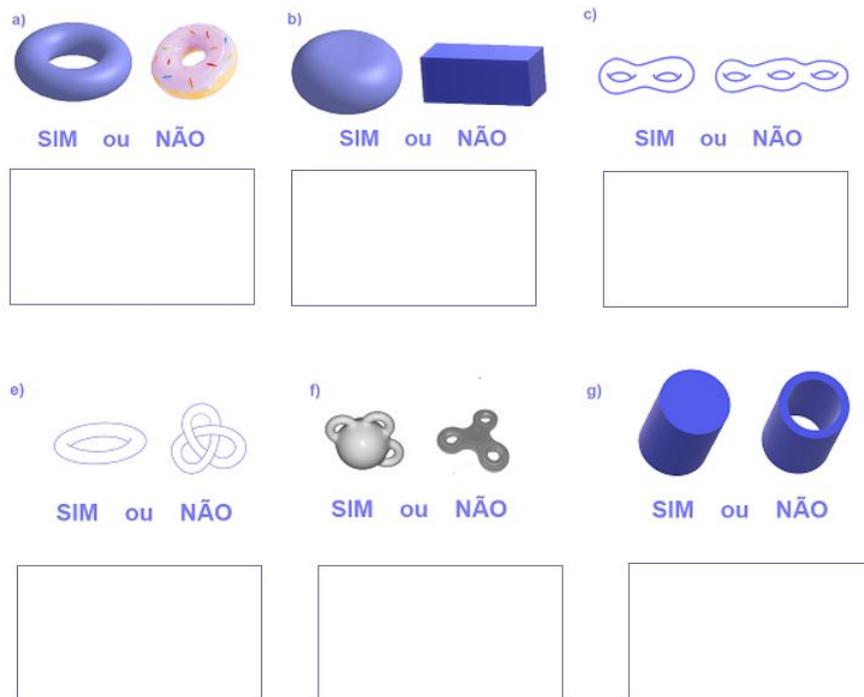


Figura 135: Reconhecendo figuras topologicamente equivalentes.

5.13 RECONHECENDO FORMAS TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTES IV

Esta atividade possui modelo para ser aplicado em sala de aula. Veja Apêndice B.

(1) Observe o exemplo abaixo e determine quais grupos são topologicamente equivalentes.

Exemplo:



As letras j) e h) são exemplos de grupos topologicamente equivalentes. Note que o cachorro é uma modelagem do cubo através de muitas deformações.

Figura 136: Exemplo de figuras equivalentes.

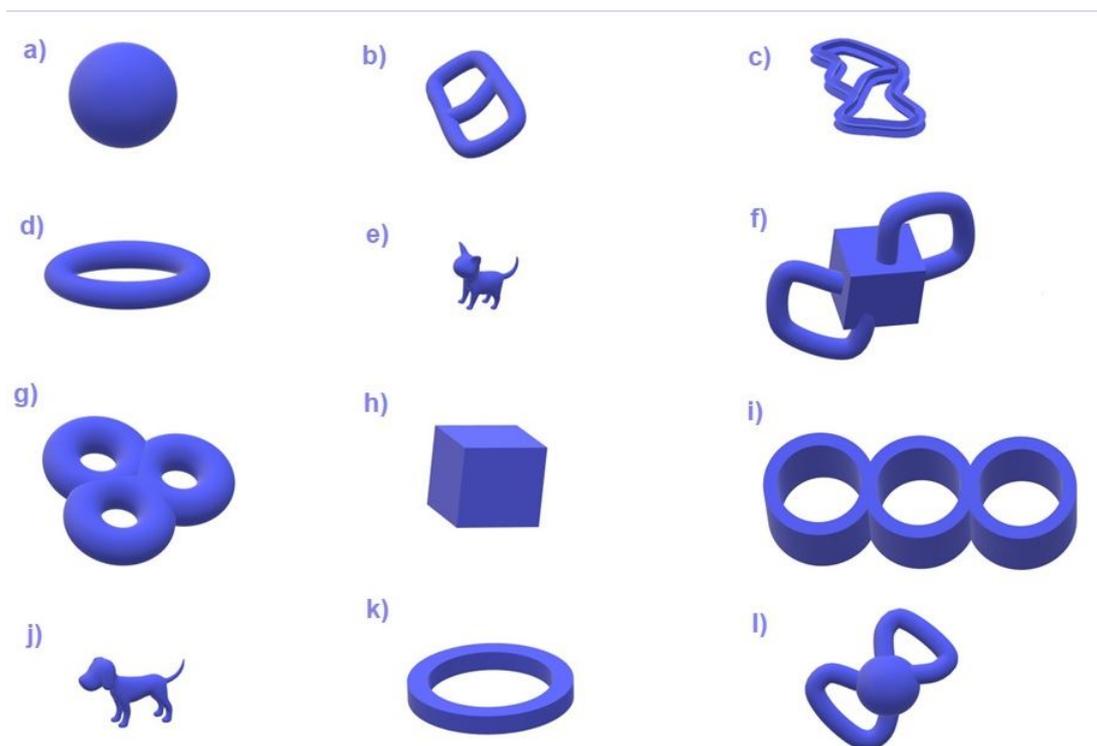


Figura 137: Reconhecendo figuras topologicamente equivalentes.

5.14 DESCUBRA AS PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DAS SUPERFÍCIES

Esta atividade consiste em descobrir as propriedades topológicas das superfícies através da utilização de uma bexiga e uma caneta ou marcador colorido. Veja Figura 138.



Figura 138: Bexiga vazia.

Desenhe um quadrado no balão vazio e marque um ponto no seu interior. Veja Figura 139.



Figura 139: Bexiga vazia com um quadrado desenhado.

Encha o balão em vários estágios, observando quais propriedades das formas mudam e quais não são alteradas, se possível deforme o balão inflado de qualquer forma, exceto cortando, rasgando ou estourando. Veja Figura 140.

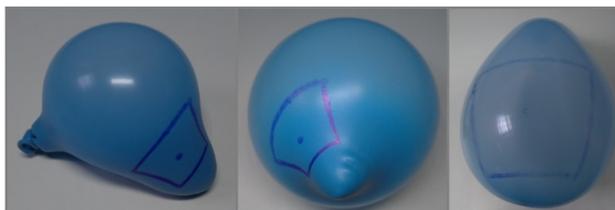


Figura 140: Bexiga cheia com um quadrado deformado.

Note que os aspectos geométricos de uma superfície consiste nas propriedades das formas desenhadas nela que mudam quando a superfície é deformada sem cortar ou rasgar. Os aspectos topológicos de uma superfície consiste nas propriedades das formas desenhadas nela que não mudam quando a superfície é deformada sem cortar ou rasgar.

Agora vamos responder o seguinte questionário:

- (1) Crie uma lista que inclua as propriedades comuns das formas que mudam e das que não são alteradas.
- (2) O que acontece com o ponto no interior do quadrado após encher a bexiga?
- (3) A borda do quadrado divide a superfície em quantas regiões? Quais são elas?
- (4) Indique se é uma propriedade geométrica ou uma propriedade topológica de uma superfície.

- Comprimento de segmentos e arcos _____
- Tamanho dos ângulos _____
- Menor distância entre dois pontos _____
- Uma região fechada _____
- Número de regiões fechadas _____
- Número de vértices _____
- Número de arcos entre pares de vértices _____
- Área de uma região fechada _____
- Perímetro de uma região fechada _____
- Número total de arcos (retos ou curvos) _____
- Número de arcos que cercam uma região _____
- Curvatura da forma na superfície _____

5.15 RECONHECENDO FORMAS TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTES V

Esta atividade possui modelo para ser aplicado em sala de aula. Veja Apêndice B.

- (1) Se uma superfície é obtida de outra por uma combinação das quatro deformações legais, em um número finito de vezes, dizemos que elas são superfícies homeomorfas ou topologicamente equivalentes. Associe a segunda coluna de acordo com a primeira com base em superfícies que são topologicamente equivalentes. Veja Figura 141.

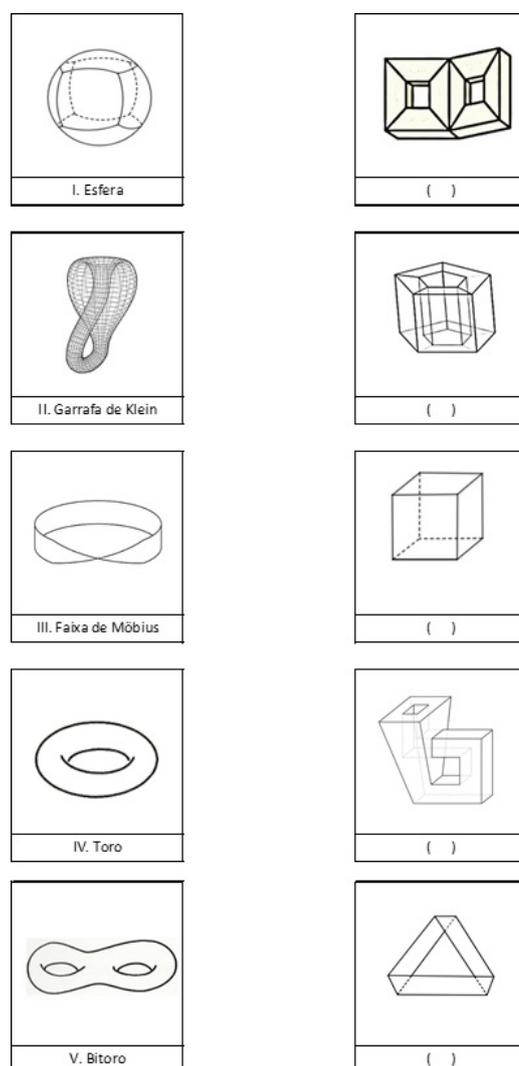


Figura 141: Associando colunas com formas equivalentes.

5.16 RECONHECENDO FORMAS TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTES E CLASSIFICANDO A LETRAS

Antes de iniciar atividade, é importante ter uma ideia dos invariantes topológicos de objetos unidimensionais em \mathbb{R}^2 . O número de 3-vértices, 4-vértices, n -vértices, para $n \geq 3$, e o número de furos no objeto são os invariantes topológicos que precisamos identificar.

Podemos pensar em um vértice como um ponto onde várias curvas se cruzam ou se unem. O número de interseções nas curvas determinam o tipo de vértice.

É muito importante reconhecer que uma estrutura topológica com um buraco não pode ser continuamente reduzido a um único ponto. Além disso, uma função que mapeia um espaço com um buraco para um sem buraco não pode ser um homeomorfismo.

Exemplo 5.1. A Figura 142 mostra um exemplo onde três curvas que se cruzam em um 3-vértices são homeomórficas a quaisquer outras três curvas que se cruzam em um 3-vértice. No entanto, eles não são homeomórficos a uma única curva. Este ponto é ilustrado na Figura 143.



Figura 142: 3-Vértices homeomorfos.

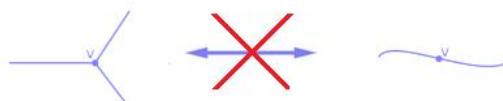


Figura 143: 3-Vértices e uma única curva não são homeomorfos.

Esta atividade possui modelo para ser aplicado em sala de aula. Veja Apêndice B.

- (1) Utilizando o conceito de homeomorfismo para classificar as letras do alfabeto. Complete os conjuntos abaixo com as letras que são topologicamente equivalentes. Utilize o alfabeto com 26 letras conforme a Figura 144. (*Devemos usar as*

letras impressas nesta atividade, pois alterar a fonte pode alterar os invariantes topológicos da letra.)

A - B - C - D - E - F - G - H - I - J - K - L - M -
N - O - P - Q - R - S - T - U - V - W - X - Y - Z

Figura 144: Alfabeto após a nova reforma ortográfica.



Figura 145: Conjuntos para completar.

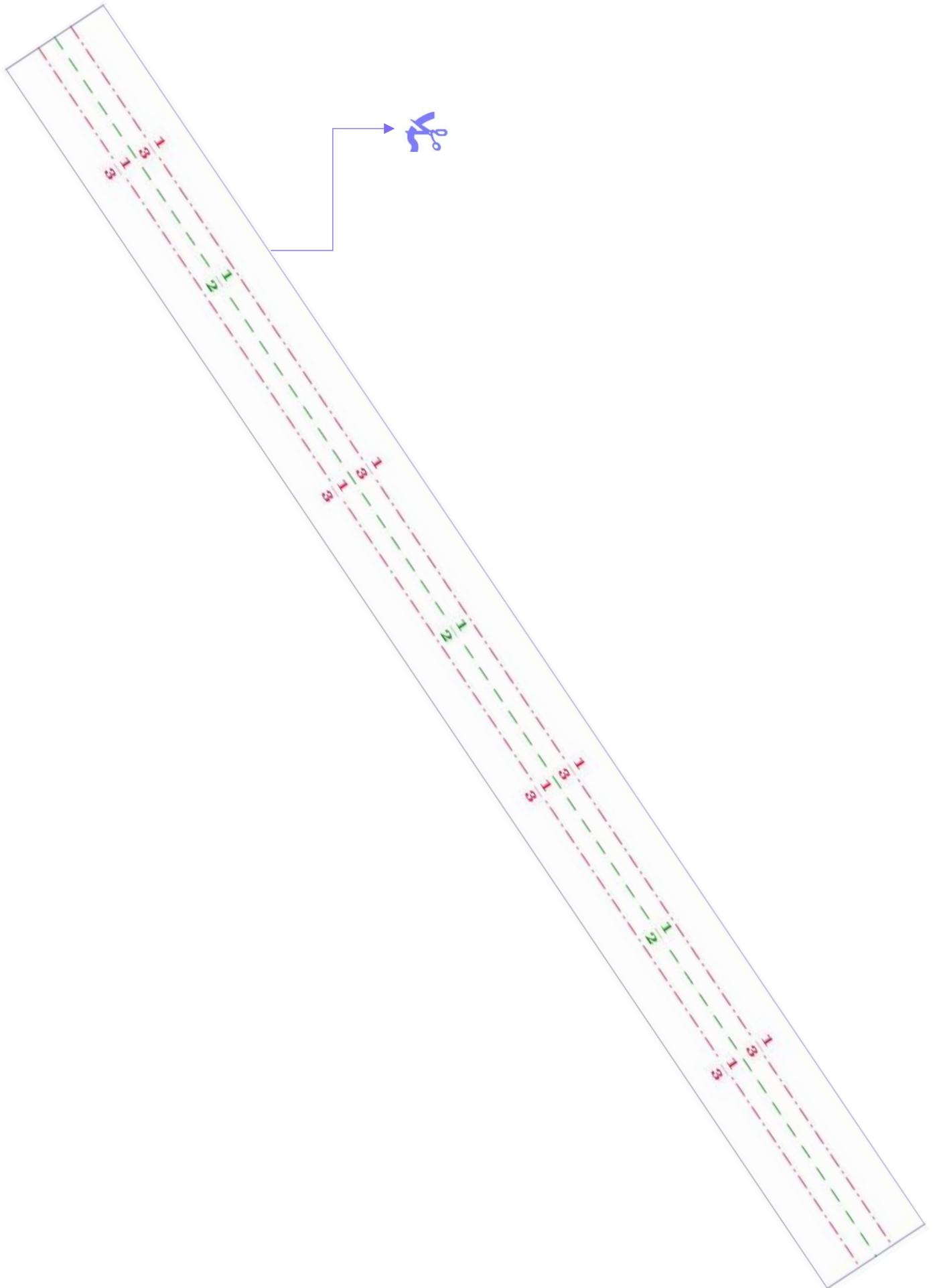
A

APÊNDICE A

A.1 FAIXA PARA IMPRESSÃO E RECORTE

Utilize este material para construir a faixa de Möbius e realizar as atividades das Seções 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8.

APÊNDICE A - Faixa com marcações para recorte



B

APÊNDICE B

B.1 MODELO DE ATIVIDADE PARA IMPRESSÃO

A seguir apresento modelos de atividades para impressão e utilização em sala de aula, referente as seções 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.15 e 5.16, caso seja do interesse do professor.

Nome:

Data: ___/___/___ - Professor(a): _____ -

Exercício 1. Seguindo o exemplo abaixo observe os pares de formas planas e circule **SIM** quando as formas forem topologicamente equivalentes e **NÃO** quando não forem topologicamente equivalentes. Comente qual foi o raciocínio utilizado para as respostas.

Exemplo:



SIM ou **NÃO**

Você pode esticar a figura à esquerda para obter a figura à direita



SIM ou **NÃO**

Você não pode obter a figura à direita deformando a figura à esquerda



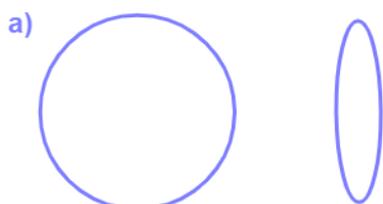
SIM ou **NÃO**

A figura da esquerda possui um buraco, enquanto que a da direita não.

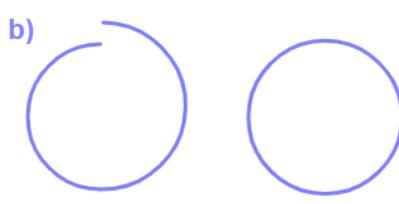


SIM ou **NÃO**

Você pode esticar a figura à direita para obter a figura à esquerda.



SIM ou **NÃO**



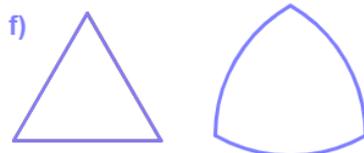
SIM ou **NÃO**



SIM ou **NÃO**



SIM ou **NÃO**



SIM ou **NÃO**



SIM ou **NÃO**



Geometria X Topologia – Parte II

Nome: _____

Data: ___ / ___ / ___ - Professor(a): _____ -

Exercício 1. Seguindo o exemplo abaixo observe os pares de formas planas e circule **SIM** quando as formas forem topologicamente equivalentes e **Não** quando não forem topologicamente equivalentes. Comente qual foi o raciocínio utilizado para as respostas.

Exemplo:



SIM ou NÃO

Observe que a figura da esquerda possui 4 segmentos e a figura da direita um único



SIM ou NÃO

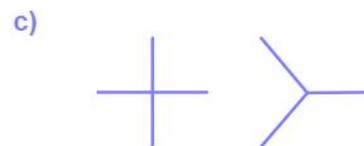
Observe que as duas figuras possuem três filamentos.



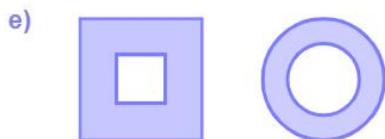
SIM ou NÃO



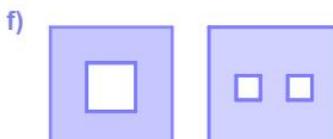
SIM ou NÃO



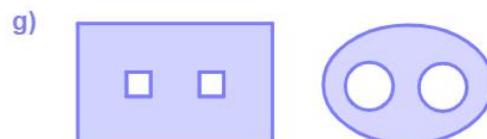
SIM ou NÃO



SIM ou NÃO



SIM ou NÃO



SIM ou NÃO

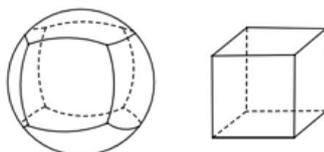
Geometria X Topologia – Parte III

Nome:

Data: __/__/__ - Professor(a): _____ -

Exercício 1. Seguindo o exemplo abaixo observe os pares de formas planas e circule **SIM** quando as formas forem topologicamente equivalentes e **Não** quando não forem topologicamente equivalentes. Comente qual foi o raciocínio utilizado para as respostas.

Exemplo:

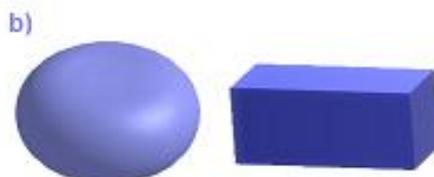


SIM ou **NÃO**

Observe que a figura da direita é uma deformação da "bola". Interprete como se a bola tivesse sido amassada a ponto de ficar no formato do cubo. Exemplo de Homeomorfismo.



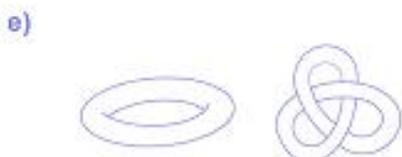
SIM ou **NÃO**



SIM ou **NÃO**



SIM ou **NÃO**



SIM ou **NÃO**



SIM ou **NÃO**



SIM ou **NÃO**

Geometria X Topologia – Parte IV

Nome:

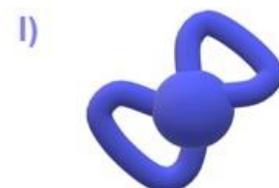
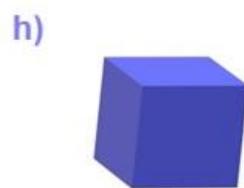
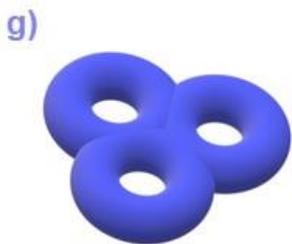
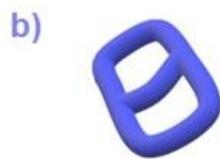
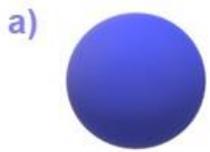
Data: ___ / ___ / ___ - Professor (a): _____ -

Exercício 1. Observe o exemplo abaixo e determine quais grupos são topologicamente equivalentes.

Exemplo:



As letras j) e h) são exemplos de grupos topologicamente equivalentes. Note que o cachorro é uma modelagem do cubo através de muitas deformações.

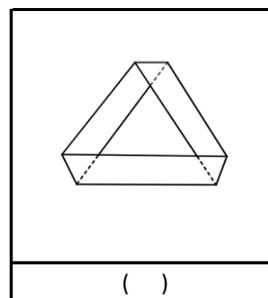
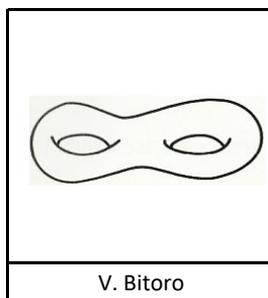
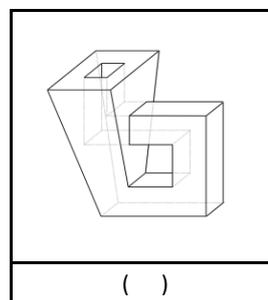
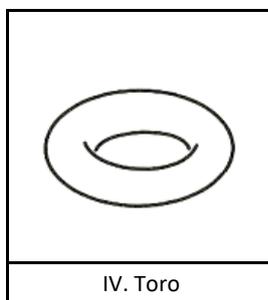
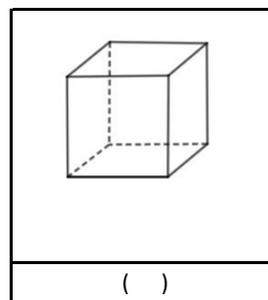
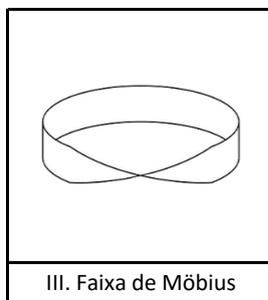
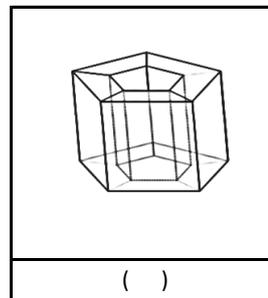
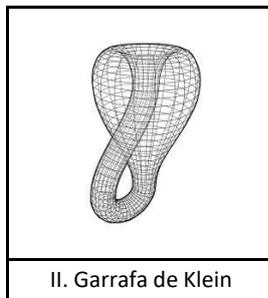
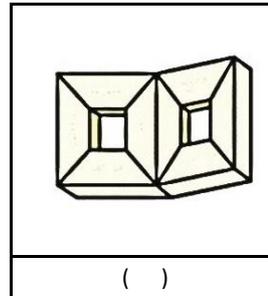
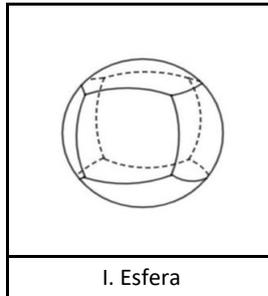


Topologia – Parte I

Nome:

Data: ___ / ___ / ___ - Professor(a): _____ -

Se uma superfície é obtida de outra por uma combinação das quatro deformações legais, em um número finito de vezes, dizemos que elas são superfícies homeomorfas ou topologicamente equivalentes. Associe a segunda coluna de acordo com a primeira com base em superfícies que são topologicamente equivalentes.



Topologia – Classificando Letras

Nome:

Data: ___ / ___ / ___ - Professor (a): _____ -

Exercício 1. Utilizando o conceito de homeomorfismo para classificar as letras do alfabeto. Complete os conjuntos abaixo com as letras que são topologicamente equivalentes. Utilize o alfabeto com 26 letras conforme a imagem a seguir.

A – B – C – D – E – F – G – H – I – J – K – L – M –
N – O – P – Q – R – S – T – U – V – W – X – Y – Z

(Obs: Devemos usar as letras impressas nesta atividade, pois alterar a fonte pode alterar as invariantes topológicas da letra.)

C I

Dica: Cabem 12 letras aqui!

Dica: Cabem 4 letras aqui!

Dica: Cabem 2 letras aqui!

Dica: Cabem 2 letras aqui!

Dica: Cabem 2 letras aqui!

Dica: Cabe 1 letra aqui!

BIBLIOGRAFIA

- [1] Thiago de Melo, Alice K. M. Libardi e João Peres Vieira, *Invariantes Topológicos*, 1ª ed., Cultura Acadêmica, São Paulo, 2012, ISBN 9788579832390.
- [2] Hygino H. Domingues, *Espaços métricos e introdução à topologia*, 1ª ed., Atual, São Paulo, 1982.
- [3] P. A. Firby e C. F. Gardiner, *Surface topology*, Mathematics and its applications, Ellis Horwood, 1991, ISBN 0138553211.
- [4] Nilo Kühlkamp, *Introdução à topologia geral*, 3ª ed., Atual, Florianópolis, 2016, ISBN 9788532807342.
- [5] Elon Lages Lima, *Elementos de topologia geral*, 3ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2014, ISBN 9788585818432.
- [6] ———, *Espaços métricos*, 5ª ed., IMPA, São Paulo, 2015, ISBN 9788524401589.
- [7] André Mandolesi, *Introdução às Variedades Topológicas*, 2018.
- [8] Ton Marar, *Topologia Geométrica para Inquietos*, 1ª ed., Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019, ISBN 9788531417467.
- [9] David Moreno Sperling, *Arquiteturas contínuas e topologia: similaridades em processo*, Tese de Mestrado, São Carlos, 2003.
- [10] João Carlos Vieira, *Uma introdução à topologia Geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores*, 1ª ed., EdUFSCar, São Carlos, 2012, ISBN 9788576001294.