



VLADEMIR PASSOS

**TEORIA DOS GRAFOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO
FUNDAMENTAL**

Santo André, 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

VLADEMIR PASSOS

**TEORIA DOS GRAFOS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO
FUNDAMENTAL**

Orientadora: Profa. Dra. Dahisy Valadão de Souza Lima

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO VLADEMIR PASSOS,
E ORIENTADO PELA PROFA. DRA. DAHISY VALADÃO DE SOUZA LIMA.

SANTO ANDRÉ, 2020

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Passos, Vlademir
Teoria dos Grafos : Uma proposta para o ensino fundamental / Vlademir
Passos. — 2020.

117 fls. : il.

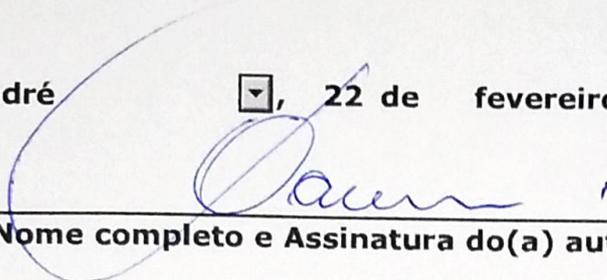
Orientadora: Dahisy Valadão de Souza Lima

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2020.

1. Introdução a teoria dos grafos. 2. Grafos Eulerianos. 3. Fórmula de
Euler. 4. Grafo planar. 5. Propostas de atividades. I. Lima, Dahisy Valadão
de Souza. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, 2020. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André , 22 de fevereiro de 2021 .



Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)



Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP

CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, VLADMIR PASSOS realizada em 30 de Novembro de 2020:

Prof.(a) INGRID SOFIA MEZA SARMIENTO

Prof.(a) RAFAEL SANTOS DE OLIVEIRA ALVES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) ANA CAROLINA BOERO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) GUIDO GERSON ESPIRITU LEDESMA

Prof.(a) DAHISY VALADAÑO DE SOUZA LIMA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

O presente trabalho foi realizado com apoio da
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de
Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Fi-
nanciamento 001.

Dedico este trabalho a meu irmão, Professor Benedito Cláudio da Silva (in memoriam). A você, minha eterna gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a Nossa Senhora, pois sem minha fé nada sou.

A meus pais, Nelson Passos (in memoriam) e Santinha Alcântara Passos (in memoriam) vocês vivem em meu coração e assim será até o fim dos meus dias.

A minha esposa, Maria Regina Reis da Cruz Passos, e a meu amado filho, Eric Reis Passos por toda a paciência e apoio, abrindo mão de muitas coisas pela realização de um sonho que me ajudaram a sonhar.

A todos os familiares e amigos que souberam compreender as diversas ausências.

A todos os colegas de turma. Em especial a Bianca, Frank, Priscila, Umbelina e Vitor.

A todo o corpo docente da UFABC - PROFMAT.

Um agradecimento especial a minha Orientadora, Dahisy Lima, pelo incentivo, pela paciência, pelos atendimentos (inclusive em finais de semana e feriados), pelo comprometimento. Minha eterna gratidão, respeito e admiração.

“A tarefa não é ver o que ninguém viu ainda, mas pensar o que ninguém pensou sobre algo que todos veem.”

(Arthur Schopenhauer)

RESUMO

Esse trabalho apresenta uma breve introdução a teoria dos grafos. Apresentamos os grafos eulerianos e o problema das pontes de Königsberg, resolvido por Euler, que é tido como o marco zero da teoria dos grafos. Demonstramos a validade da fórmula de Euler para grafos planares conexos e apresentamos a característica de Euler como um invariante topológico. Estabelecemos condições suficientes para garantir a planaridade de um grafo. Abordamos o conceito de grafo dual, que nos permite demonstrar de forma alternativa a validade da fórmula de Euler. Finalmente, apresentamos uma proposta de exercícios de fixação, problemas e situações cotidianas em que podemos identificar a aplicação de grafos.

Palavras-chave: Grafos, Grafo Euleriano, Planaridade, Fórmula de Euler, Problemas com Grafos.

ABSTRACT

This work presents a brief introduction to graph theory. We present the Eulerian graphs and the problem of Königsberg bridges, solved by Euler, considered to be the ground zero of graph theory. We prove the validity of Euler's formula for connected planar graphs and present the Euler characteristic as a topological invariant. We establish sufficient conditions to guarantee that a graph is planar. We present the concept of dual graph that allows us to give an alternative proof for the Euler's formula. Finally, we present a proposal of exercises, problems and everyday situations where we can identify the application of graphs.

Keywords: Graph theory, Eulerian graph, Planarity, Graph problems.

CONTEÚDO

Introdução	1
1 INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS	3
1.1 Noções preliminares	3
1.2 Adjacências, incidências, tamanho, grau e matrizes	6
1.2.1 Adjacências de vértices e arestas	6
1.2.2 Matriz de adjacência e Matriz de incidência	7
1.2.3 Tamanho e grau de um grafo	8
1.3 Classificação de Grafos	9
1.3.1 Grafos nulo, simples, completo e multigrafo	9
1.3.2 Grafo orientado (dígrafo), grafo valorado e grafo rotulado	11
1.4 Isomorfismo e grafos planares	13
1.4.1 Grafos isomorfos	13
1.4.2 Grafos planares	14
1.5 Grafo bipartido e grafo conexo	16
1.5.1 Grafo bipartido	16
1.5.2 Grafo conexo	17
1.6 Árvore	18
2 GRAFOS EULERIANOS - O PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGSBERG	23
2.1 Passeio, trilha, caminho e ciclo	23
2.2 O problema das sete pontes de Königsberg	26
2.3 Condição para a Existência de Trilhas e Ciclos Eulerianos	27
3 CARACTERÍSTICA DE EULER E A FÓRMULA DE EULER	33
3.1 Homeomorfismo de grafos e invariante topológico	33
3.2 Característica de Euler	34
3.3 A Fórmula de Euler para grafos planares conexos	39
3.4 Aplicação da Fórmula de Euler para poliedros	41
4 PLANARIDADE E GRAFO DUAL	45
4.1 Planaridade	45
4.2 Grafo Dual	49
4.2.1 Árvore de um grafo dual	51

4.2.2 Grafo dual e coloração	54
5 PROPOSTA DE ATIVIDADES	57
5.1 Exercícios de fixação	58
5.2 Problemas Desafios	61
5.3 Identificando o uso de grafos no cotidiano	75
A APÊNDICE A	85
A.1 Respostas dos exercícios de fixação.	85
A.2 Respostas dos desafios.	88
B APÊNDICE B	95
B.1 Modelo.	95
Bibliografia	101

INTRODUÇÃO

Veremos nesse trabalho que a Teoria dos Grafos surge da resolução de um problema que na verdade era uma brincadeira local, algo folclórico e que é resolvido por Leonhard Euler em 1736. Quando Euler se propôs a resolver o Problema das Pontes de Königsberg, deve tê-lo feito apenas pelo desafio em si, pelo encantamento que o problema lhe trouxe, sem ter pensado nos desdobramentos e muito menos na criação de uma teoria e, essa é a questão, a teoria traz a ludicidade em sua essência e além disso, tem muito de intuitivo.

Embora relativamente recente, a Teoria dos Grafos, graças a várias contribuições (como veremos ao longo desse trabalho), mostra uma grande aplicabilidade em diversas áreas incluindo, mais recentemente, na informática.

Muito embora não explicitamente, muitos de nós já nos deparamos com uma aplicação da Teoria dos Grafos na informática: como a indicação de amizade nas redes sociais, ou ainda, durante a navegação pela internet, a oferta de produtos que você "visitou" outrora em alguma loja virtual.

Temos assim, um exemplo do uso dos grafos nas relações pessoais e no marketing. Mas não para por aí, ao usar um GPS você estará também fazendo uso da Teoria dos Grafos. A essa altura você deve estar se perguntando "Então essa teoria é voltada exclusivamente para a informática?". A resposta é não. Apesar do ambiente computacional permitir ampliar sua potencialidade, podemos utilizá-la em situações de menor escala para resolvermos problemas de logística por exemplo.

É nesse contexto que trazemos a proposta do estudo da Teoria dos Grafos a partir do Ensino Fundamental – séries finais.

No primeiro capítulo, procuramos tratar por meio de uma breve introdução de alguns termos e definições que serão necessários para nosso estudo. Para alguém que conheça a Teoria dos Grafos pode parecer que estamos sendo muito simplistas, mas precisamos deixar claro que nossa proposta é introduzir tal teoria no ensino fundamental e assim sendo, são esses os principais aspectos que consideramos relevantes e que devem contribuir para um estudo com maior profundidade no futuro.

O segundo capítulo traz o Problema das Pontes e a solução apresentada por Euler. Mas antes, se fará necessário, para uma melhor compreensão da solução apresentada, algumas definições e a demonstração das condições necessárias e suficientes para que um grafo seja dito um grafo euleriano.

No terceiro capítulo, veremos que a diferença entre o número de vértices e o número de arestas determina o número de "buracos" em um grafo e, além disso, vamos ver que uma condição necessária, porém não suficiente, para que dois grafos sejam isomorfos é que tenham um mesmo valor para essa diferença. Veremos que há uma classificação dentro da Topologia para esse tipo de constante. Demonstraremos, a validade da fórmula de Euler para grafos planares conexos. Ainda no terceiro capítulo, usaremos a fórmula de Euler para demonstrar a existência de apenas cinco poliedros regulares.

No quarto capítulo, retomaremos o estudo de planaridade e grafo dual. Apresentaremos uma demonstração alternativa da validade da fórmula de Euler para grafos planares conexos utilizando o conceito de árvores geradoras do grafo e de seu grafo dual. Embora de maneira superficial, abordamos a coloração de vértices para colorir mapas (ou regiões).

O capítulo cinco é destinado à aplicação de grafos na resolução de problemas. Optamos por não nos preocupar com uma sequência didática, ou seja, não se trata de um roteiro a ser seguido, mas sugestões que poderão ser usadas ou adaptadas de acordo com a realidade de cada turma, ficando assim, a critério de cada professor a organização de sua própria sequência didática. Trazemos algumas propostas que acreditamos estarem em consonância com o exposto nos primeiros parágrafos desta introdução. Fizemos uma divisão em: exercícios de fixação, problemas desafios e situações que mostram o uso (ou pelo menos a presença) de grafos no cotidiano. Além dos problemas, procuramos colocar uma série de propostas de interações com outras disciplinas por meio de projetos que poderiam ter os problemas como disparador.

Boa leitura.

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS

Nesse capítulo traremos várias definições e resultados, muitos dos quais serão norteadores para os demais capítulos.

Iniciaremos buscando deixar claro que os grafos não são meros desenhos (representações gráficas, diagramas), muito embora os desenhos sejam frequentemente usados para representá-los e tornem mais fácil a sua compreensão nos primeiros contatos com a teoria. Teoria essa, que surge a partir de uma representação gráfica simplificada de uma situação problema, cuja solução é apresentada por Euler.

Apesar de muito usuais, os desenhos não são a única maneira de representarmos os grafos. Aliás, quanto maior o grafo, mais difícil fazer uma representação clara por meio de desenhos. Na área da informática, por exemplo, as matrizes são mais adequadas para representarmos os grafos. As referências básicas para esse capítulo são [8], [11] e [10].

1.1 NOÇÕES PRELIMINARES

Os grafos são compostos por vértices e arestas. Cada vértice é indicado por um ponto e cada aresta por uma linha que une dois vértices (distintos ou não conforme veremos mais adiante) ditos extremidades da aresta. Veja o grafo representado na Figura 1, por exemplo. Ele possui 5 vértices aos quais denominados: v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 e 4 arestas, v_1v_2 , v_2v_3 , v_3v_4 , v_4v_5 que, não por acaso, foram nomeadas pelos seus extremos. Dessa forma, já temos os vértices adjacentes desse grafo, ou seja, os vértices associados por uma aresta. Alguns outros conceitos podem ser tirados dessa figura, tais como: a adjacência de arestas, o grau de cada vértice e, conseqüentemente, o grau do grafo e o tamanho do grafo, entre outros.

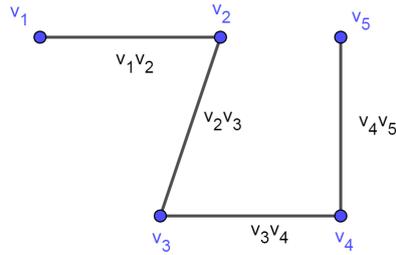


Figura 1: modelo de grafo.

Faremos agora a apresentação formal desses e de outros conceitos.

Definição 1.1. Um **grafo** G consiste em um conjunto finito $V(G)$ de elementos chamados **vértices**, um conjunto finito $A(G)$ de elementos chamados **arestas**, e uma função de incidência ψ que associa a cada aresta α , $\alpha \in A(G)$, um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de G , chamados de **extremos** de α .

Dessa forma, dada uma aresta $\alpha \in A(G)$ com $\psi(\alpha) = \{u, v\}$, onde u e $v \in V(G)$, dizemos que α liga os vértices u e v (ou é uma ligação entre u e v). Além disso, dizemos que u e v são os extremos de α . Nesse caso, denotaremos a aresta α por uv . Note que uv e vu representam a mesma aresta α .

Exemplo 1.1. Considere os conjuntos $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$, $A(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e a função de incidência $\psi(G)$ dada por:

$$\begin{aligned} \psi_G(a) = uv & \quad \psi_G(b) = uu & \quad \psi_G(c) = vw & \quad \psi_G(d) = wx \\ \psi_G(e) = vx & \quad \psi_G(f) = wx & \quad \psi_G(g) = ux & \quad \psi_G(h) = xy \end{aligned}$$

A tripla $(V(G), A(G), \psi(G))$ define um grafo G .

Um possível diagrama para o grafo G do Exemplo 1.1 é dado na Figura 2.

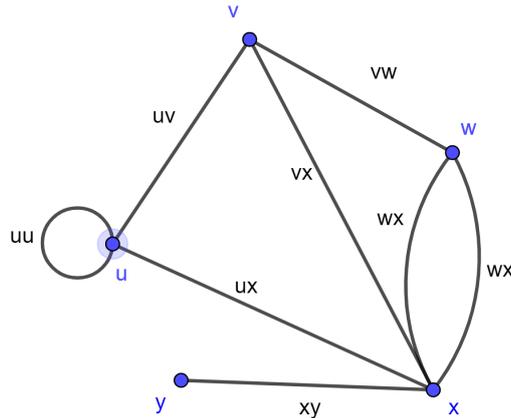


Figura 2: Representação gráfica do grafo G no Exemplo 1.1.

Uma outra possível representação para o grafo G no Exemplo 1.1 é mostrada na Figura 3.

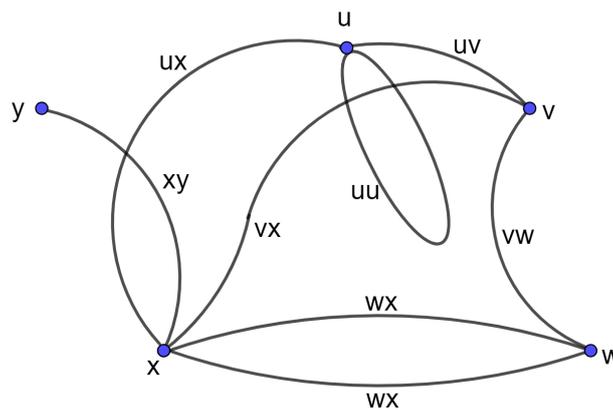


Figura 3: Outra possível representação para o grafo G .

Note que a representação via diagrama de um grafo, em geral, não é única. Além disso, não existe uma maneira “correta” de desenhar o grafo no sentido de que as posições dos pontos representando os vértices e os formatos das linhas representando as arestas não têm relevância para a teoria. Por convenção nos referiremos a um diagrama como sendo o próprio grafo, nesse sentido, chamamos os seus pontos de vértices e suas linhas de arestas. Usaremos as notações $G = G(V, A)$.

1.2 ADJACÊNCIAS, INCIDÊNCIAS, TAMANHO, GRAU E MATRIZES

A maioria das definições básicas na Teoria dos Grafos são motivadas por sua representação gráfica, como veremos nessa seção.

1.2.1 Adjacências de vértices e arestas

Definição 1.2. Seja G um grafo. Dois **vértices** u e v são **adjacentes** ou **vizinhos** se existe uma aresta unindo-os. Denotaremos por $\text{Adj}(V)$ o conjunto formado pelos pares de vértices adjacentes.

Os extremos de uma aresta são adjacentes (mesmo que coincidam).

Definição 1.3. Duas **arestas** são **adjacentes** se elas têm um vértice em comum, ou seja, uma aresta será adjacente a outra desde que tenham um extremo em comum. Denotaremos por $\text{Adj}(A)$ o conjunto de arestas adjacentes.

Considerando o grafo ilustrado na Figura 4,

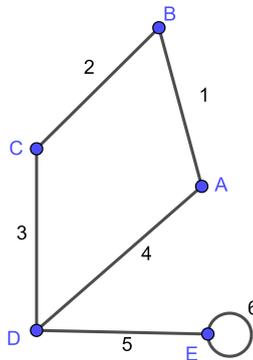


Figura 4: Grafo com laço

temos que o conjunto dos vértices é $V = \{A, B, C, D, E\}$ e o conjunto das arestas é $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nesse caso, os vértices adjacentes podem ser representados por $\text{Adj}(V) = \{AB, AD, BC, CD, DE, EE\}$ e as arestas adjacentes são representadas por $\text{Adj}(A) = \{\{1;2\}, \{1;4\}, \{2;3\}, \{3;4\}, \{3;5\}, \{4;5\}, \{5;6\}\}$.

Conforme a tabela que segue, a função de incidência ψ associada ao grafo na Figura 4 pode ser expressa por: $\psi(\alpha) = v$, onde $\alpha \in A$ e $v \in \text{Adj}(V)$.

α	$\psi(\alpha)=v$
1	AB
2	BC
3	CD
4	AD
5	DE
6	E

Tabela 1: Função de incidência.

Note ainda que cada linha da tabela determina uma relação de incidência, onde podemos observar que a aresta 6 incide em um único ponto, ou seja, suas extremidades coincidem. A esse tipo de aresta denominamos **laço**, os demais casos são ditos ligações. Então, na Figura 4, temos 5 ligações e 1 laço.

1.2.2 Matriz de adjacência e Matriz de incidência

Um grafo $G(V, A)$ pode ser representado por meio de matrizes. De fato, existem diversas formas de associar uma matriz a um grafo, de acordo com a característica que se queira ressaltar. A seguir, definimos duas delas.

Uma matriz $B(G)=[a_{ij}]$ quadrada de ordem n é chamada **matriz de adjacência** de G , indicada por $Adj(G)$, quando:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i v_j \in A(G) \\ 0, & \text{se } v_i v_j \notin A(G), \text{ em que } v_i \text{ e } v_j \in V(G). \end{cases} \quad (1.1)$$

Ou seja, a matriz $Adj(G)$ possui apenas 1 ou 0 como entradas, e uma entrada a_{ij} é igual a 1 se, e somente se, existe pelo menos uma aresta ligando os vértices v_i e v_j .

Uma outra característica dessa matriz é o fato dela apresentar simetria em relação a sua diagonal principal. Essa simetria se deve ao fato de que $v_i v_j$ e $v_j v_i$ representam a mesma aresta. Por exemplo, o grafo da Figura 4 gera a seguinte matriz de adjacência entre seus vértices:

$$Adj(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A condicional (1.1), bem como os elementos da matriz, podem ser melhor entendidos por meio da tabela que segue:

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	0
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	0
D	1	0	1	0	1
E	0	0	0	1	1

Tabela 2: Tabela de adjacência entre os vértices de G.

Por outro lado, em um grafo, cada aresta é incidente a seus extremos e vice-versa. O grafo G, também pode ser representado por meio de uma matriz $C(G)=[a_{ij}]$ de ordem $n \times m$ que associa a cada vértice a aresta que nele incide, a essa matriz chamamos de **matriz de incidência** e a indicaremos por $Inc(G)$. Essa matriz é definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } a_j \text{ incide no vértice } v_i. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos assim a seguinte matriz de incidência para o grafo da Figura 4:

$$Inc(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Tamanho e grau de um grafo

Definição 1.4. O **tamanho** de um grafo G é o número inteiro $|V(G)|+|A(G)|$, em que $|V(G)|$ é o número de vértices e $|A(G)|$ é o número de arestas do grafo G, ou seja, é a soma entre o número total de vértices e o número total de arestas do grafo G.

Assim, para o grafo G na Figura 4, temos: $|V(G)|+|A(G)| = 5 + 6 = 11$.

Definição 1.5. O **grau** de um vértice v do grafo G, denotado por $g(v)$, é dado pelo número de arestas que incidem em v , onde os laços são contados duas vezes. O **grau do grafo** G, denotado por $g(G)$, é a soma dos graus de seus vértices.

Dessa forma, para o grafo G na Figura 4, podemos verificar que: $g(A) = 2$, $g(B) = 2$, $g(C) = 2$, $g(D) = 3$ e $g(E) = 3$. O grau do grafo G , será obtido pela soma do grau de seus vértices, logo, $g(G) = g(A) + g(B) + g(C) + g(D) + g(E) = 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 12$.

Da Definição 1.5 segue imediatamente o seguinte resultado:

Proposição 1.6. *O grau de um grafo G é igual ao dobro do número de arestas desse grafo. Ou seja,*

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2|A(G)|.$$

Prova. De cada vértice v partem n arestas. Porém, cada aresta possui dois vértices. Desse modo, se somarmos os graus de todos os vértices obteremos o dobro do número de arestas. Aqui consideramos que se e_i é um laço, então seu extremo v é contado duas vezes. \square

Corolário 1.7. *Em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar, é par.*

Prova. Segue imediatamente da Proposição 1.6, pois a soma dos graus dos vértices sempre é um número par. \square

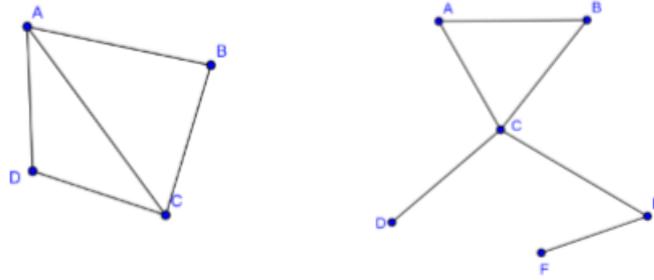
1.3 CLASSIFICAÇÃO DE GRAFOS

Muito embora utilizemos o termo “Grafo” para uma representação geral, temos algumas distinções que consideramos interessante destacar nesse momento. Outros casos serão especificados a medida que se apresentarem ao longo do texto.

1.3.1 Grafos nulo, simples, completo e multigrafo

Grafo vazio é o grafo cujo conjunto de arestas $A(G)$ é vazio, isto é, nenhum vértice é adjacente.

Grafo Simples é aquele que não contém laços (aresta com extremos em um mesmo vértice) nem duas ligações distintas com o mesmo par de extremos (arestas paralelas). Veja a Figura 5.



Grafo com 4 vértices e 5 arestas (b) grafo com 6 vértices e 6 arestas

Figura 5: Grafos simples.

Os grafos nas Figuras 2 e 4 não são simples.

Grafo Completo é um grafo simples em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes, ou seja, têm uma aresta que os associa. Veja Figura 6.

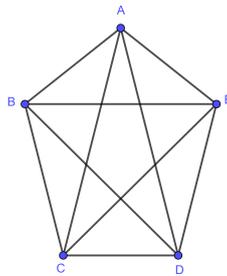


Figura 6: Grafo completo.

Grafo complementar do grafo G , representado por \overline{G} , é um grafo onde $V(G) = V(\overline{G})$ e que a união disjunta $A(G) \sqcup A(\overline{G})$ são as arestas de um grafo completo. Ou seja, dois vértices de \overline{G} são adjacentes se, e somente se, eles não são adjacentes em G . Assim, o complementar de um grafo completo é o grafo vazio.

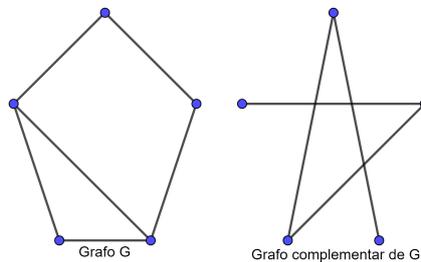


Figura 7: Grafos complementares.

Note ainda que o complementar de \bar{G} é o próprio grafo G .

Multigrafo é um grafo que contém laços e/ou ligações distintas com o mesmo par de extremos (arestas paralelas). Veja Figura 8.

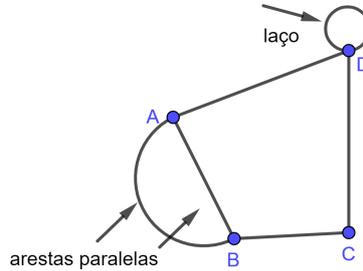


Figura 8: Multigrafo.

Grafo Regular é um grafo com a propriedade de que todos os seus vértices têm o mesmo grau (n). Dizemos que G é um grafo n -regular caso haja a necessidade de explicitar o grau comum dos vértices de G . Veja Figura 9.

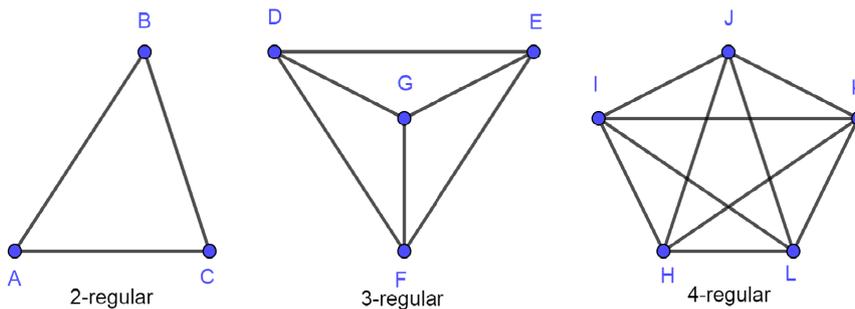


Figura 9: Grafos regulares.

1.3.2 Grafo orientado (dígrafo), grafo valorado e grafo rotulado

Grafo orientado ou dígrafo é um grafo com setas nas arestas que indicam um sentido, ou seja, suas arestas são pares ordenados, representados por setas, de maneira que (uv) é diferente de (vu) . No caso $a = (uv)$, dizemos que a é divergente em relação a u e convergente em relação a v . Nesse caso, a terminologia usada é nó (vértice) e arco (aresta), muito embora seja comum utilizá-las como sinônimos. Veja a Figura 10.

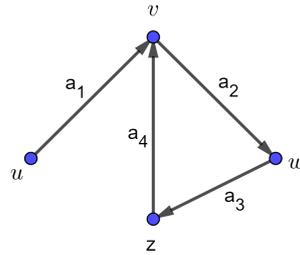


Figura 10: Grafo orientado

Um grafo $G(V,A)$ é dito **grafo rotulado** nos vértices (ou nas arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo. Veja Figura 11.

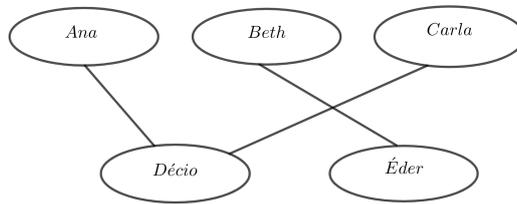


Figura 11: Grafo rotulado

Um grafo $G(V,A)$ é dito **grafo valorado** quando existe uma ou mais funções relacionando V e/ou A a um conjunto de números.

Exemplo 1.2. Considere as seguintes proposições:

- $V = \{\text{São Paulo, Curitiba, Florianópolis, Porto Alegre}\};$
- $A = \{(u, v, t), u, v \in V \mid \text{há linha aérea ligando } u \text{ e } v \text{ em um tempo } t \text{ dado em minutos}\}.$

Tais proposições podem ser resumidas através de um grafo com rótulos nos vértices e nas arestas. Veja Figura 12.

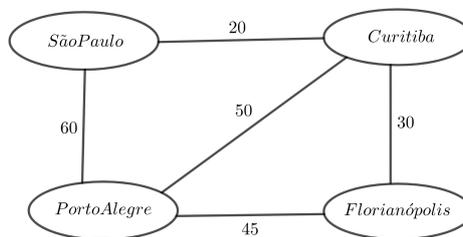


Figura 12: Uma possível representação por meio de um grafo valorado.

1.4 ISOMORFISMO E GRAFOS PLANARES

1.4.1 Grafos isomorfos

A noção de isomorfismo de grafos nos permite distinguir as propriedades que são inerentes ao grafo das propriedades associadas a uma representação por diagramas, os rótulos.

Definição 1.8. Um grafo $G_1 = G_1(V_1, A_1)$ é **isomorfo** a um grafo $G_2 = G_2(V_2, A_2)$ se existe uma função

$$\lambda : V_1 \rightarrow V_2$$

Satisfazendo as seguintes condições:

1. λ é bijetora;
2. Para todos v e $w \in V_1$, $\{vw\} \in A_1$ se, e somente se, $\{\lambda(v)\lambda(w)\} \in A_2$.

Nesse caso, escrevemos $G_1 \cong G_2$ e dizemos que G_1 é isomorfo a G_2 (ou ainda, que G_1 e G_2 são isomorfos). Uma outra alternativa é dizer que existe uma bijeção λ de $V(G_1)$ sobre $V(G_2)$ que preserva a adjacência; isto é $vw \in A(G_1)$ se, e somente se, $\lambda(v)\lambda(w) \in A(G_2)$.

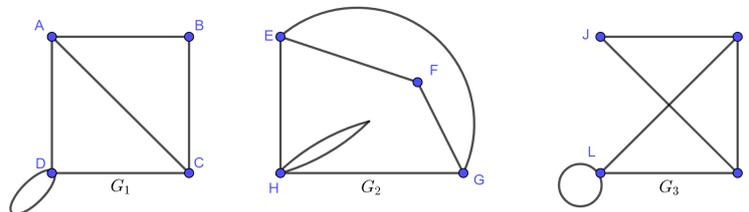


Figura 13: Grafos isomorfos

Os grafos na Figura 13 são isomorfos. De fato, temos a bijeção, entre G_1 e G_2 , dada por:

$$\begin{aligned} \lambda\{AB\} &\rightarrow \{EF\} \\ \lambda\{BC\} &\rightarrow \{FG\} \\ \lambda\{CD\} &\rightarrow \{GH\} \\ \lambda\{DA\} &\rightarrow \{HE\} \\ \lambda\{AC\} &\rightarrow \{EG\} \\ \lambda\{DD\} &\rightarrow \{HH\} \end{aligned}$$

Também é fácil verificar que G_3 é isomorfo a G_1 , e conseqüentemente, a G_2 .

Pela Definição 1.8, vemos que se $G_1 \cong G_2$ então $|V(G_1)| = |V(G_2)|$ e $|A(G_1)| = |A(G_2)|$, além disso, os vértices correlatos têm o mesmo grau.

Para que possamos deixar ainda mais claro o conceito de isomorfismo, mostraremos um contra-exemplo. Nele, veremos dois grafos com mesmo número de vértices e mesmo número de arestas, além de terem mesmo grau. Apesar disso, não são isomorfos, mostrando que as condições expostas são necessárias, mas não suficientes.

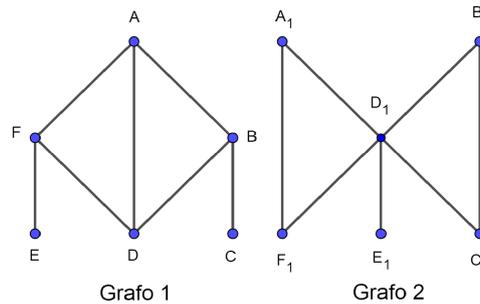


Figura 14: Grafos não isomorfos.

Considere o grafo na Figura 14. No grafo 1, o vértice A tem grau 3 enquanto que no grafo 2, nenhum de seus vértices apresenta grau 3, fato que por si só é suficiente para afirmarmos a inexistência de um isomorfismo entre o grafo 1 e o grafo 2 em questão.

1.4.2 Grafos planares

Quando um grafo pode ser desenhado em uma superfície qualquer sem que haja cruzamento de suas arestas, dizemos que esse grafo é imersivo naquela superfície. Quando o grafo é imersivo no plano, dizemos que o grafo é planar. Mais especificamente:

Definição 1.9. Um grafo G' é **planar** quando é isomorfo a um grafo G que tenha sido traçado no plano sem cruzamento de arestas. Caso não haja um isomorfismo desse tipo o grafo é dito **não planar**.

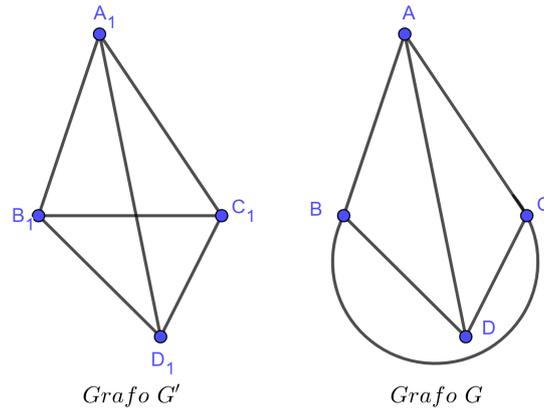


Figura 15: Grafo planar

A Figura 15 nos mostra que o grafo G' é planar, pois é isomorfo ao grafo G , que foi traçado no plano sem cruzamento de arestas, ou seja, planar.

Quando um grafo é planar ele divide o plano em regiões que são delimitadas por suas arestas. A essas regiões denominamos **faces**. A região exterior ao grafo também é contada como uma face do grafo.

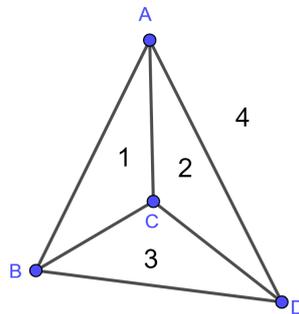


Figura 16: Grafo planar com 4 faces

O **grau de uma face** de um grafo planar é o número de arestas que limitam a região desta face. Veja Figura 16.

Na Seção 3.2 e no Capítulo 4, iremos abordar várias propriedades de grafos planares.

1.5 GRAFO BIPARTIDO E GRAFO CONEXO

1.5.1 Grafo bipartido

Definição 1.10. Grafo bipartido é um grafo onde os vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos X e Y tais que cada aresta tem como extremos um vértice em X e um vértice em Y . Quando todos os vértices de X estão ligados a todos os vértices de Y , dizemos tratar-se de um **grafo bipartido completo** que é denotado por $K_{m,n}$, onde $m = |X|$ e $n = |Y|$.

A Figura 17 fornece exemplos de grafos bipartidos.

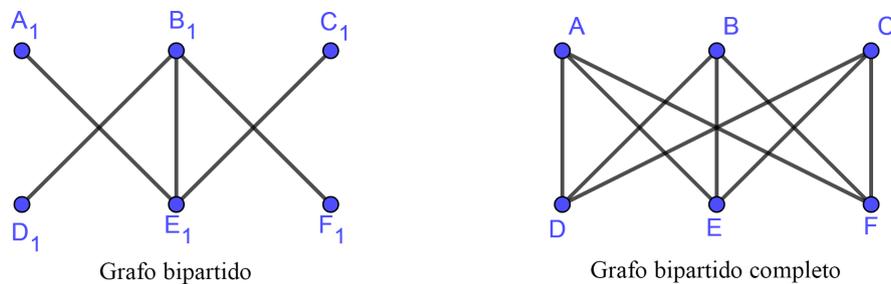


Figura 17: Grafo bipartido e grafo bipartido completo ($K_{3,3}$).

Resumindo: seja $G = G(V, A)$ um grafo bipartido, V é particionado em dois conjuntos X e Y , tais que:

- $V = X \cup Y$;
- $X \cap Y = \emptyset$;
- Vértices em X conectam-se apenas a vértices em Y (e vice-versa).

Veja o exemplo na Figura 18.

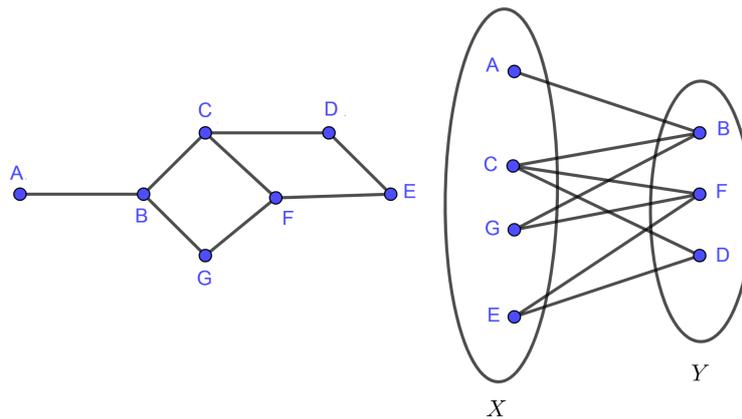


Figura 18: Bipartição de um grafo

1.5.2 Grafo conexo

Definição 1.11. Um grafo é **conexo** se, para toda partição de seus vértices em dois conjuntos disjuntos não vazios X e Y , existe uma aresta, denominada ponte, com um extremo em X e um extremo em Y . Caso contrário, dizemos que o grafo é **desconexo**.

Da definição tiramos duas consequências:

- O grafo com um único vértice é conexo.
- A extração da ponte provoca uma redução na conectividade do grafo.

Um grafo desconexo é formado por partes denominadas **componentes conexas**. Considere o grafo G desconexo na Figura 19. Nesse caso, G é formado por duas componentes conexas G_1 e G_2 .

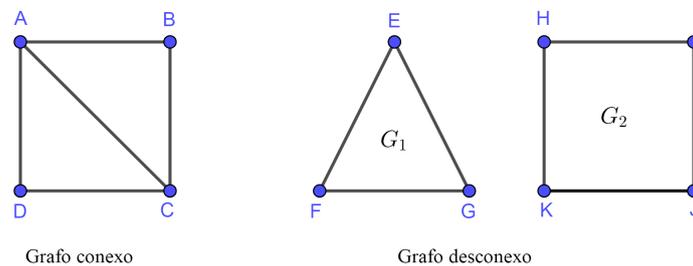


Figura 19: Grafo conexo e grafo desconexo.

Muito embora o termo desconexo nos remeta a ideia de "separado", podemos ter uma representação em que o grafo, muito embora desconexo, tem suas componentes conexas sobrepostas de tal maneira que seus vértices não coincidam ou fiquem sobre as arestas da outra componente conexa. Ilustramos essa ideia na Figura 20.

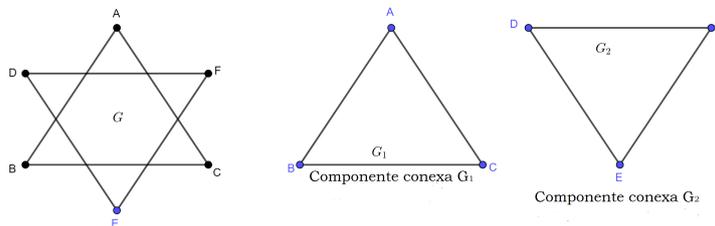


Figura 20: Grafo Desconexo

1.6 ÁRVORE

Definição 1.12. Dado um grafo G , um grafo G' é dito um **subgrafo** de G se $V(G') \subseteq V(G)$ e $A(G') \subseteq A(G)$.

Definição 1.13. Dizemos que um grafo H é um **supergrafo** de G se G é subgrafo de H .

Na Figura 21 a seguir temos que o grafo G é um subgrafo do grafo H , e conseqüentemente, o grafo H é um supergrafo do grafo G .

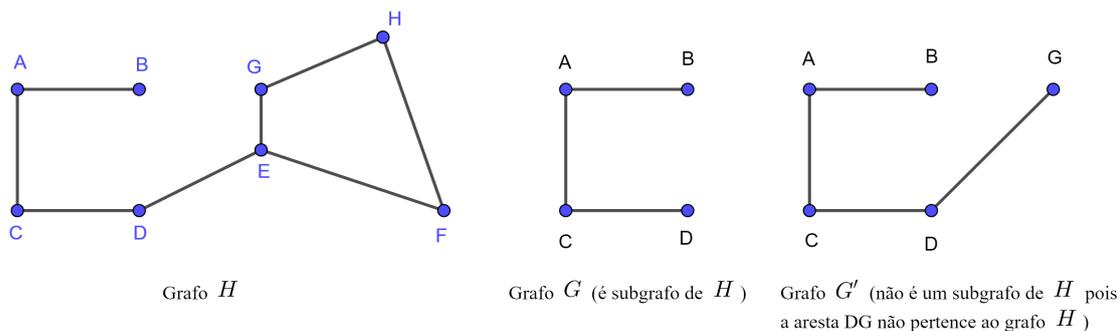


Figura 21: Supergrafo e subgrafo

Passaremos a estudar uma das molas propulsoras da Teoria dos Grafos, as árvores.

Definição 1.14. Uma **árvore** é um grafo conexo em que cada uma de suas arestas é uma ponte.

Observação 1.6.1. Como uma árvore é um grafo conexo em que cada uma de suas arestas é uma ponte, não se definem regiões internas (faces), tendo, portanto, apenas uma face (região externa/plano).

Para um dado número de vértices n , uma árvore é um grafo conexo com o menor número de arestas conectando dois vértices.

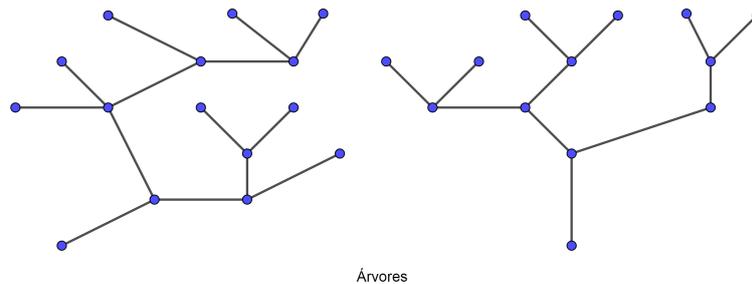


Figura 22: Floresta

O teorema a seguir reúne algumas caracterizações das árvores.

Teorema 1.15. Seja T um grafo com n vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. T é uma árvore.
2. T não tem faces internas e tem $n - 1$ arestas.
3. T é conexo e tem $n - 1$ arestas.
4. T é conexo e não tem faces internas.
5. Todo par de vértices “ u ” e “ v ”, não adjacentes de T apresenta entre eles, uma única sequência de vértices adjacentes tal que “ u ” e “ v ” são extremos dessa sequência.
6. T não contém faces internas, mas a adição de uma aresta produz uma única face interna.

Vamos provar a seguinte sequência de implicações: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$, o que irá garantir a equivalência das afirmações.

Prova. ($1 \Rightarrow 2$) Vamos fazer a prova por indução no número de vértices n de T . Se T é grafo vazio (logo tem um vértice, por ser conexo) então o resultado é imediato. Suponha que o resultado é válido para árvores com i -vértices, para $0 \leq i \leq n - 1$. Seja T uma árvore com n vértices. Pela definição de árvore, cada aresta de T é uma

ponte. Portanto a retirada de uma aresta uv separa u de v e o grafo é separado em um par de árvores T' e T'' com n' e n'' vértices, respectivamente, tais que $n = n' + n''$. Por indução, o número de arestas de T' é $n' - 1$ e o número de arestas de T'' é $n'' - 1$. Acrescentando a aresta uv , concluímos que o número de arestas de T é, portanto, $(n' - 1) + (n'' - 1) + 1 = n - 1$. E segue o resultado.

(2 \Rightarrow 3) Se T fosse desconexo, cada componente conexa seria uma árvore. Pelo item anterior, o número de arestas em cada componente é inferior em uma unidade ao número de vértices portanto o número total de arestas de T seria inferior a $n - 1$, contradizendo a hipótese inicial. Logo, T é conexo.

(3 \Rightarrow 4) A retirada de qualquer aresta separa o grafo, pois $n - 2$ arestas são insuficientes para conectar um grafo com n vértices. Logo, toda aresta é uma ponte.

(4 \Rightarrow 5) Se existisse mais que uma sequência de vértices distintos e adjacentes entre dois vértices não adjacentes (os extremos da sequência), o grafo teria uma face interior e haveria uma aresta que, se removida, não separaria o grafo, ou seja, uma aresta que não é uma ponte.

(5 \Rightarrow 6) Se T contivesse uma face interna, haveria um par de vértices que seriam extremos ligados por mais que uma sequência de vértices adjacentes. A adição de uma aresta uv , concatenada com a sequência (única) de vértices entre u e v , produz uma face interna. Se essa face interna não fosse única, a retirada da aresta uv deixaria duas sequências de vértices adjacentes distintas entre u e v .

(6 \Rightarrow 1) Basta mostrar que T é conexo. Se T fosse desconexo, uma aresta ligando duas componentes não produziria uma face interna. \square

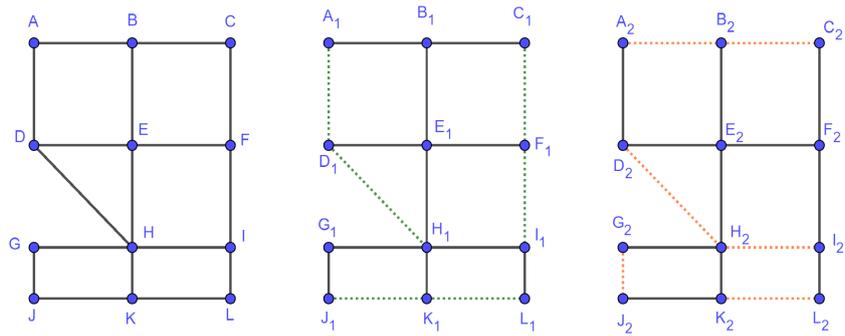
Definição 1.16. Floresta é um grafo desconexo onde cada componente conexa é uma árvore.

Definição 1.17. Uma **folha** de uma árvore é um vértice de grau um.

Definição 1.18. Um **subgrafo gerador** ou **árvore geradora** de um grafo G é qualquer subgrafo de G que seja uma árvore e contenha todos os vértices de G .

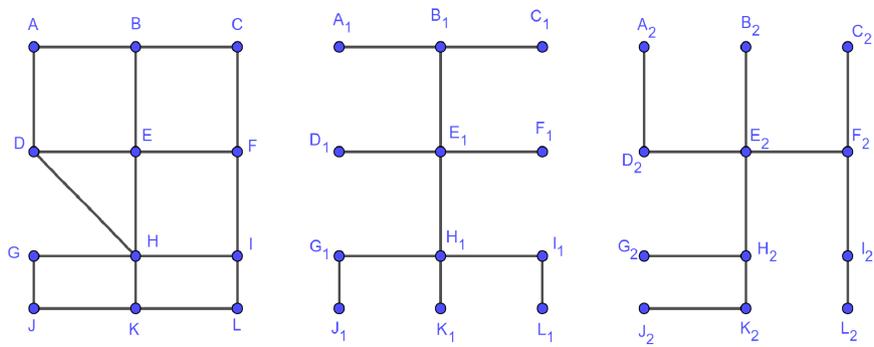
Corolário 1.19. Como árvores são conexas, todo grafo dotado de uma árvore geradora é conexo. Reciprocamente, todo grafo conexo tem pelo menos uma árvore geradora.

Tal afirmação é facilmente verificada, para tanto basta tomarmos um grafo conexo e retirarmos, uma a uma, arestas de maneira a manter-se a conexidade. Quando não for mais possível extrair arestas mantendo a conexidade, teremos obtido a árvore geradora.



Um grafo conexo G e duas possíveis árvores geradoras (subgrafos geradores) desse grafo.

Figura 23: Extração de arestas.



Um grafo conexo G e duas possíveis árvores geradoras (subgrafos geradores) desse grafo.

Figura 24: Árvores geradoras.

GRAFOS EULERIANOS - O PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGSBERG

Nesse capítulo, buscaremos definir passeio, trilha, caminho e ciclo, em seguida estabeleceremos condições necessárias e suficientes para classificar um grafo como Grafo Euleriano e uma trilha como Trilha Euleriana e, dessa forma, justificar a solução apresentada por Euler ao Problema das Pontes de Königsberg.

Prossigamos então, nosso “passeio” por “trilhas” e “caminhos” que nos levarão a uma viagem pela Teoria dos Grafos. As referências básicas para esse capítulo são [4], [9] e [13].

2.1 PASSEIO, TRILHA, CAMINHO E CICLO

Definição 2.1. Um **passeio** de comprimento $n \geq 1$ em um grafo G é uma sequência $P = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ de vértices (não necessariamente distintos) de G , tal que v_i é adjacente a v_{i-1} , para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Um passeio P é dito **fechado** se $v_0 = v_n$.

Observação 2.1.1. Outra notação usual para passeio é $\{v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n\}$, onde a_i é uma aresta que liga v_{i-1} a v_i .

Exemplo 2.1. Considere o grafo G representado na Figura 25. A sequência de vértices $\{v_0, v_1, v_2, v_4, v_2, v_5\}$ define um passeio em G . Por outro lado, a sequência $\{v_1, v_3, v_4, v_2, v_5\}$ não define um passeio, pois note que v_1 e v_3 não são adjacentes.

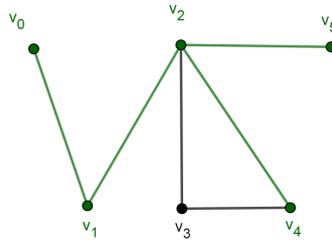


Figura 25: Um possível passeio no grafo G.

Definição 2.2. Um passeio em um grafo G com todas as suas arestas distintas é chamado de **trilha**. Se $T = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ é uma trilha em que $v_0 = v_n$, dizemos que T é **fechada**.

Exemplo 2.2. Considere o grafo representado na Figura 26. A sequência de vértices $T = \{v_2, v_4, v_3, v_2\}$ define uma trilha. Veja que T é uma trilha fechada.

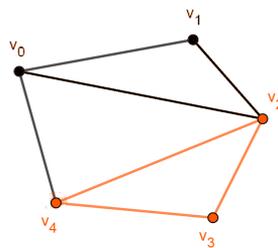


Figura 26: Uma trilha fechada em G.

Na Figura 27 a sequência $\{v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_0\}$, define uma trilha pois, embora haja a repetição do vértice v_2 , não há repetição de arestas.

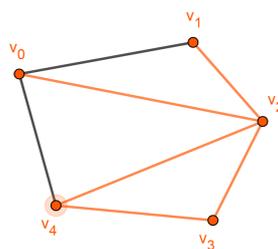


Figura 27: Grafo com trilha

Definição 2.3. Um passeio em um grafo G com todos os seus vértices distintos é chamado de **caminho**.

Definição 2.4. Um ciclo em um grafo G é um passeio fechado $P = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0\}$ em G , de comprimento $n \geq 1$ e tal que $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é um caminho.

Exemplo 2.3. Considere o grafo representado na Figura 28. A sequência de vértices $C = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_0\}$ define um ciclo.

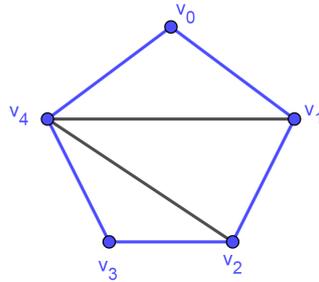


Figura 28: Um ciclo no grafo G

A tabela abaixo sumariza as definições apresentadas acima:

	Vértices e arestas quaisquer	Arestas distinta	Vértices distintos
começa e termina em qualquer vértice	passeio	trilha	caminho
Começa e termina no mesmo vértice	passeio fechado	trilha fechada	ciclo

A Figura 29, ilustra as definições acima e as diferentes possibilidades de passeios.

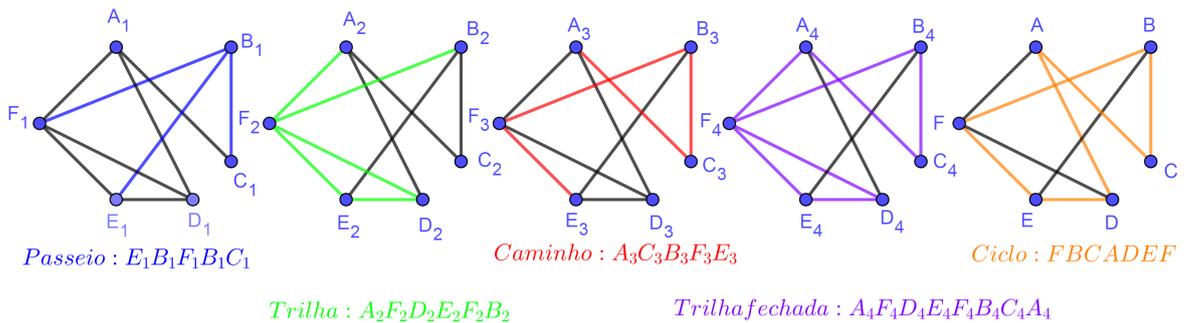


Figura 29: Passeios e suas classificações.

Observação 2.1.2. Com essa linguagem, uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos.

2.2 O PROBLEMA DAS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG

A cidade de Königsberg (atual Kaliningrado, na Rússia) possui 4 regiões distintas separadas pelo rio Pregel e ligadas por sete pontes conforme representado na Figura 30.

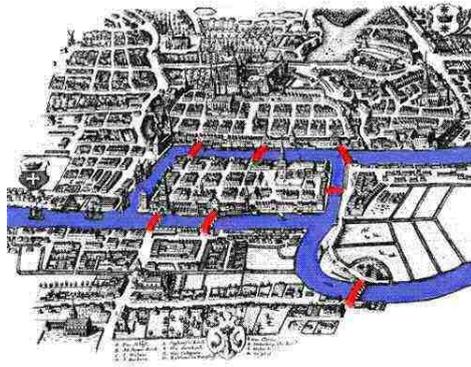


Figura 30: Representação das Pontes de Königsberg.

(Fonte: [4])

O problema consistia na seguinte pergunta: é possível, saindo de um ponto da cidade, percorrer estas sete pontes uma única vez, e voltar ao ponto inicial?

A resposta viria apenas em 1736, quando Leonhard Euler soluciona o problema, fazendo uma representação simplificada do mapa onde cada região é representada por um ponto (vértice) e as pontes são ligações (arestas) entre esses pontos. Veja a Figura 31. Além da solução do problema proposto, surgia ali um novo ramo da matemática, a **Teoria dos Grafos**.

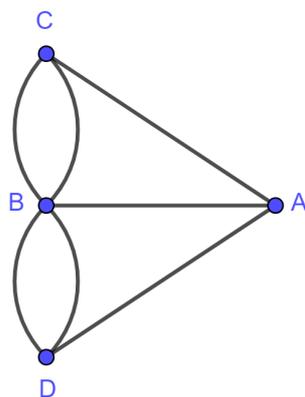


Figura 31: Representação do mapa das sete pontes

A essa altura o leitor pode estar se perguntando “E qual a resposta?”. Então, propomos a continuidade da leitura para que antes da resposta, entendamos o porque, e assim possamos compreender a conclusão a que Euler chegou.

2.3 CONDIÇÃO PARA A EXISTÊNCIA DE TRILHAS E CICLOS EULERIANOS

Definição 2.5. Um grafo que possui um ciclo que passa por todas as suas arestas sem repeti-las é chamado **Grafo Euleriano**. Este ciclo é chamado **Ciclo Euleriano**.

Definição 2.6. Um passeio que passa por todas as arestas apenas uma vez, podendo repetir vértices, é chamado de **Trilha Euleriana**.

Dado um grafo, é possível encontrar um passeio no qual cada aresta apareça exatamente uma vez (ou seja, uma trilha Euleriana)? O Teorema 2.7 estabelece condições necessárias e suficientes para a existência de trilhas Eulerianas.

Teorema 2.7. *Dado um grafo conexo G , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *Existe um passeio no qual cada aresta de G aparece uma única vez, ou seja, G é uma trilha Euleriana.*
- (b) *Existem no máximo dois vértices de grau ímpar.*

Prova. ($a \Rightarrow b$)

Seja P um passeio, digamos $\{v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n\}$, conectando um vértice v_0 a um vértice v_n . Os vértices v_0 e v_n são os extremos de P enquanto que os demais vértices são ditos interiores (ou internos) do passeio. Suponha que cada aresta de G aparece uma única vez em P , isto é, P é uma trilha Euleriana. A prova segue pela análise dos vértices e pelo número de incidência de arestas ao se “caminhar por P ”.

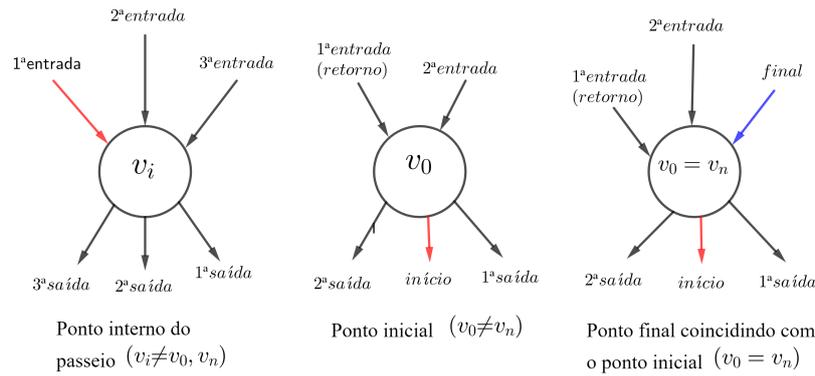


Figura 32: Passeio passando por um vértice.

Quando P passa por um vértice v_i , interno do passeio e portanto diferente de seus extremos v_0 e v_n , o passeio chega a v_i por uma aresta e deixa v_i por outra aresta. Então cada passagem pelo vértice v_i faz uso de duas arestas incidentes nesse vértice. Como cada aresta aparece uma única vez em P , isso implica que:

$$g(v_i) = 2 \times (\text{número de vezes que } P \text{ passa por } v_i),$$

para $i \neq 0$ e n . Assim, podemos afirmar que o grau de um vértice interior ao passeio P é sempre par.

A contagem para v_0 e v_n , onde $v_0 \neq v_n$, é análoga, exceto pelo fato de serem, respectivamente, o vértice inicial e o vértice final do passeio (extremos). Logo, v_0 que inicia o passeio, muito embora possa ser “visitado” inúmeras vezes, não será um vértice terminal do passeio. Daí,

$$g(v_0) = 1 + 2 \times (\text{número de vezes que } P \text{ passa por } v_0).$$

Analogamente,

$$g(v_n) = 1 + 2 \times (\text{número de vezes que } P \text{ passa por } v_n).$$

Logo, v_0 e v_n têm grau ímpar.

Observe que no caso particular de $v_0 = v_n$ (quando P é um passeio fechado), então

$$g(v_0) = 2 \times (\text{número de vezes que } P \text{ passa por } v_0) + 2.$$

Nesse caso, todos os vértices de P têm grau par. □

Para provar a implicação ($b \Rightarrow a$), vamos usar o seguinte lema:

Lema 2.8. *Se todos os vértices de um grafo conexo G tem grau par, então deletando (excluindo/retirando) uma aresta de G , ainda obtemos um grafo conexo.*

Prova. Seja G' o grafo obtido deletando-se uma aresta a de G . Suponha por absurdo que G' não é conexo, então G' tem duas componentes conexas G_1 e G_2 . A aresta a conecta um vértice $v \in G_1$ a um vértice $v' \in G_2$ e para cada vértice $w \in G_1$, temos:

$$g_{G_1}(w) = \begin{cases} g_G(w) & w \neq v \\ g_G(w) - 1 & w = v \end{cases}$$

onde $g_G(w)$ e $g_{G_1}(w)$ denotam os graus do vértice w em relação aos grafos G e G_1 , respectivamente.

Portanto, G_1 contém apenas um vértice de grau ímpar. Isso implica que a soma dos graus de todos os vértices de G_1 é ímpar, contradição pela Proposição 1.6. A contradição implica que G' é conexo. \square

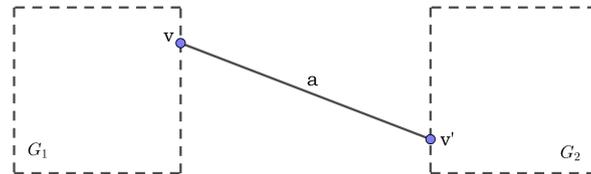


Figura 33: Deletando a obtemos um grafo não conexo.

Prova. Teorema 2.7 ($b \Rightarrow a$):

Vamos provar um resultado mais forte:

- 1 Se todo vértice tem grau par, então começando de qualquer vértice de G , existe um ciclo onde qualquer aresta de G aparece uma única vez, isto é, existe um ciclo Euleriano.
- 2 Se existem exatamente dois vértices de grau ímpar, então, começando de um vértice com grau ímpar, existe um passeio em que cada aresta de G aparece uma única vez, de maneira que o passeio termina exatamente no outro vértice de grau ímpar. Tal passeio é uma trilha Euleriana.

A afirmação é claramente verdadeira para grafos com uma única aresta. Assuma que a afirmação é verdadeira para grafos conexos com $n - 1$ arestas. Considere então, um grafo G conexo com n arestas. Tome uma aresta a com extremos v e v' . Além disso, no caso do grafo G ter vértices de grau ímpar, assumamos que $g_G(v)$ é ímpar. Removendo-se a

do grafo G , obtemos um grafo G' com $n - 1$ arestas.

Para aplicarmos a hipótese de indução, temos que garantir que G' é conexo.

- Se a é um laço, então G' é evidentemente conexo.
- Se todos os graus dos vértices de G são pares, então pelo lema anterior (Lema 1.12), G' é conexo.
- Falta considerar o caso onde G tem exatamente dois vértices de grau ímpar e a não é um laço.

Suponha que G tem exatamente dois vértices de grau ímpar e a não é um laço ($v \neq v'$). Se G' não fosse conexo, então G' teria duas componentes conexas G_1 e G_2 com $v \in G_1$ e $v' \in G_2$ como na Figura 33. Temos que $g_{G_1}(v) = g_G(v) - 1$, portanto par e, $g_{G_1}(w) = g_G(w)$, para todo w vértice de G_1 diferente de v . Como G tem exatamente dois vértices de grau ímpar, e v é um deles, vimos que G_1 tem no máximo um único vértice de grau ímpar. Pelo Corolário 1.7, um grafo não pode ter um único vértice de grau ímpar, logo G_1 não possui nenhum vértice de grau ímpar. Em outras palavras, todos os vértices de G_1 possuem grau par. Pelo Lema 2.8, deletando qualquer aresta e de G_1 que é incidente a v , produz um grafo conexo. Agora, deletando a aresta e do grafo G , $e \neq vv'$, também produz um grafo conexo G' .

Portanto, dado um grafo G conexo com n arestas, sempre conseguimos deletar uma aresta com extremos v e v' , tal que o grafo resultante G' é conexo. Assim, podemos usar a hipótese de indução em G' . Vamos provar que existe um passeio que começa em v ou v' e passa por todas as arestas de G' uma única vez. Adicionando a aresta e a esse passeio, obtemos um passeio em G que contém todas as arestas de G exatamente uma única vez.

- Se e é um laço então $v = v'$ e

$$g_{G'}(w) = \begin{cases} g_G(w) & w \neq v \\ g_G(w) - 2 & w = v. \end{cases}$$

Portanto o grafo G' tem ou todos os vértices de grau par ou exatamente dois vértices de grau ímpar e nesse caso, $g_{G'}(v)$ é ímpar. Aplicando a hipótese de indução, existe um passeio $\{v, a_1, v_1, a_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n\}$ que começa em v e contém todas as arestas de G' .

- Se e não é um laço, então, $v \neq v'$ e

$$g_{G'}(w) = \begin{cases} g_G(w) & , w \neq v, v' \\ g_G(v) - 1 & , w = v \text{ ou } v'. \end{cases}$$

Temos as seguintes possibilidades para G' :

1. Todos os vértices de G tem grau par, portanto, v e v' têm grau ímpar em relação a G' .
2. Os vértices v e v' têm grau ímpar em G , logo todos os vértices de G' tem grau par.
3. v tem grau ímpar em G , v' tem grau par em G e w tem grau ímpar em G .

Então, v' e w tem grau ímpar em G' e são os únicos vértices de grau ímpar em G' .

Nas três possibilidades, aplicando a hipótese de indução em G' , encontramos um passeio em G' , dado por $\{v', a_1, v_1, a_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n\}$, que começa em v' e contém todas as arestas de G' exatamente uma única vez

O passeio desejado em G é:

$$\{v, e, v', a_1, v_1, a_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n\}.$$

□

Observe que a prova do Teorema 2.7 nos garante condição necessária e suficiente para a existência de num Ciclo Euleriano.

Corolário 2.9. *Em um Ciclo Euleriano, todos os vértices do grafo devem ter grau par.*

Além disso, o Teorema 2.7 nos mostra condições necessárias e suficientes para a existência de uma Trilha Euleriana não fechada.

Corolário 2.10. *Em uma Trilha Euleriana, existem exatamente dois vértices de grau ímpar que correspondem ao início e ao final da trilha.*

Solução do Problema das Pontes.

Como vimos anteriormente, o Problema das Pontes de Königsberg consistia em, partindo de uma das pontes, atravessar todas as demais pontes uma única vez, retornando ao ponto de origem. Como vimos no início do capítulo as Figuras 30 e 31, representam as pontes, por meio de um mapa e, logo a seguir, uma representação por meio de um grafo.

No grafo, os vértices representam as partes terrestres (ilhas e continentes), enquanto que as arestas representam as pontes.

Para que o desafio seja concluído com êxito, devemos ter um Ciclo Euleriano e, como vimos, em um Ciclo Euleriano todos os vértices têm grau par.

Analisando o grafo usado para modelar o problema, Figura 31, podemos concluir que todos os vértices têm grau ímpar, o que torna impossível cumprir com êxito o desafio. Assim, Euler conclui ser impossível atender as condições impostas pelo problema.

CARACTERÍSTICA DE EULER E A FÓRMULA DE EULER

Iniciaremos o capítulo com um breve comentário sobre o que é um invariante topológico no contexto de grafos e quando dois grafos são considerados topologicamente equivalentes. Em seguida vamos definir um invariante topológico, chamado de característica de Euler que nos fornece uma condição suficiente para garantir que dois grafos são não isomorfos, ou ainda, dizer se um grafo é uma árvore, olhando apenas para o número de arestas e de vértices dos grafos em questão.

Além disso, provaremos a validade da fórmula de Euler, $v - a + f = 2$, para grafos planares conexos. Demonstraremos ainda quantos e quais são os poliedros regulares. As referências básicas para esse capítulo são [2] e [7].

3.1 HOMEOMORFISMO DE GRAFOS E INVARIANTE TOPOLÓGICO

Dado um grafo G , a adição de um vértice de grau 2 a uma aresta de G é chamado de **expansão do Grafo G** , ou **subdivisão de G** .

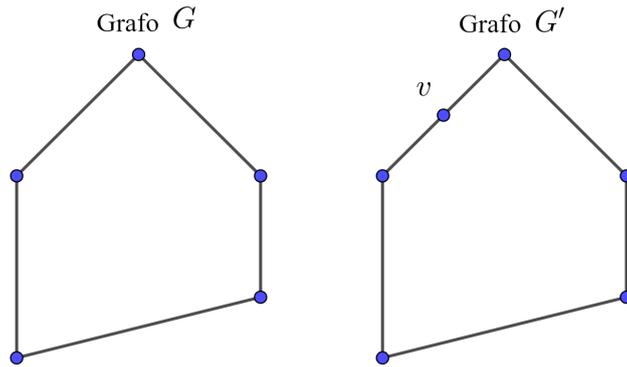


Figura 34: Expansão de um grafo G para G'

Na Figura 34, o grafo G' é uma expansão do grafo G , obtida pela adição do vértice v .

Dizemos que um grafo G' é **homeomorfo** a um grafo G se G' puder ser obtido de G pela inserção (ou extração) de vértices em suas arestas. Ou seja, se G' for uma expansão de G (ou se G for uma expansão de G').

Um **invariante topológico** é uma propriedade que é invariante ou mantida por homeomorfismo. Aqui trataremos de um invariante topológico que é um número.

Uma quantidade α é dita um invariante topológico se sempre que G_1 e G_2 forem homeomorfos tivermos $\alpha(G_1) = \alpha(G_2)$.

3.2 CARACTERÍSTICA DE EULER

Definição 3.1. Dado um grafo G , a **característica de Euler** de G é definida por

$$\chi(G) = |V(G)| - |A(G)|,$$

onde $|V(G)|$ é o número de vértices e $|A(G)|$ é o número de arestas de G .

Exemplo 3.1. Considere os grafos:

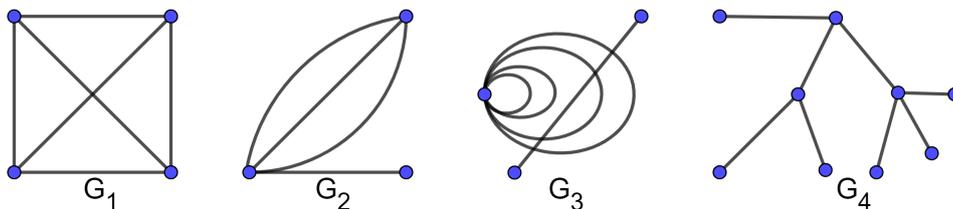


Figura 35: Grafos e a característica de Euler.

Temos que:

$$\chi(G_1) = 4 - 6 = -2$$

$$\chi(G_2) = 3 - 4 = -1$$

$$\chi(G_3) = 3 - 5 = -2$$

$$\chi(G_4) = 9 - 8 = 1$$

Veja que $\chi(G_1) = \chi(G_3)$, porém G_1 e G_3 não são isomorfos e nem homeomorfos (topologicamente equivalente), pois G_1 é conexo e G_3 é desconexo. Este exemplo mostra que a característica de Euler não distingue grafos não isomorfos nem mesmo homeomorfos. No entanto, se dois grafos são isomorfos então ambos têm a mesma característica de Euler, isto é, se $G \cong H$, então $\chi(G) = \chi(H)$. O que é fácil ver, pois se G e H são isomorfos, então $V(G) = V(H)$ e $A(G) = A(H)$.

Exemplo 3.2. Vamos calcular a característica de Euler de um grafo completo K_n e de um grafo completo bipartido $K_{m,n}$. Por definição de K_n , temos $|V(K_n)| = n$. Como existe exatamente uma aresta para cada par de vértices, temos que:

$$|A(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Logo,

$$\chi(K_n) = |V(K_n)| - |A(K_n)| = n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3n - n^2}{2}.$$

Para o grafo completo bipartido, temos:

$$\chi(K_{m,n}) = |V(K_{m,n})| - |A(K_{m,n})| = m + n - m.n.$$

Teorema 3.2. *Seja G uma árvore. Então $\chi(G) = 1$.*

Prova. A prova segue por indução no número de arestas $A(G)$ de G . Note que, se $|A(G)| = 0$, então G consiste de um único vértice, logo $|V(G)| = 1$. Portanto,

$$\chi(G) = |V(G)| - |A(G)| = 1 - 0 = 1.$$

Assuma que o resultado é verdadeiro para toda árvore contendo menos de n arestas, ou seja, se H é uma árvore e $|A(H)| < n$, então $\chi(H) = 1$.

Seja G uma árvore com n arestas. Escolha uma aresta a de G , e denote os extremos da aresta a por v e u . Veja Figura 36.

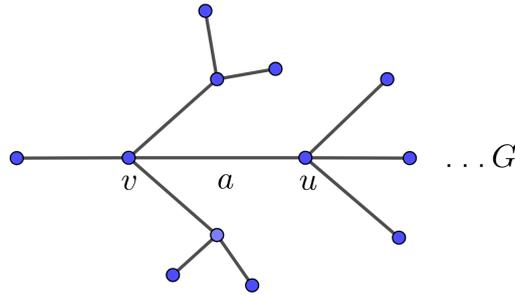


Figura 36: Árvore.

Note que se a aresta “a” é deletada de \$G\$, então obtemos duas árvores desconexas, \$G_1\$ e \$G_2\$, como na Figura 37.

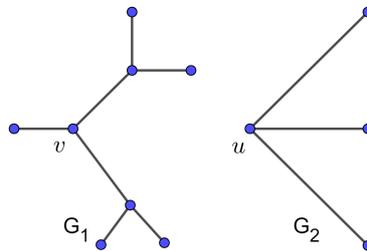


Figura 37: \$G_1\$ e \$G_2\$, sub árvores de \$G\$.

Veja que a quantidade de arestas de \$G_1\$ e de \$G_2\$ é menor do que \$n\$. Pela hipótese de indução, temos:

$$\chi(G_1) = |V(G_1)| - |A(G_1)| = 1$$

$$\chi(G_2) = |V(G_2)| - |A(G_2)| = 1$$

Como cada vértice de \$G\$ está em \$G_1\$ ou em \$G_2\$, mas não simultaneamente em ambos, temos:

$$|V(G)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|.$$

As arestas de \$G\$ consistem nas arestas de \$G_1\$, de \$G_2\$ e na aresta “a”. Logo,

$$|A(G)| = |A(G_1)| + |A(G_2)| + |\{a\}|.$$

Portanto, de 3.2, temos:

$$\begin{aligned}
 X(G) &= |V(G)| - |A(G)| \\
 &= |V(G_1)| + |V(G_2)| - |A(G_1)| - |A(G_2)| - 1 \\
 &= \chi(G_1) + \chi(G_2) - 1 \\
 &= 1 + 1 - 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

E segue o resultado desejado. □

Pelo teorema anterior, todas as árvores têm a mesma característica de Euler. É claro que nem todo par de árvores é homeomorfo. Por exemplo, a Figura 38 apresenta duas árvores que, apesar de terem a mesma quantidade de vértices e de arestas, não são homeomorfas.

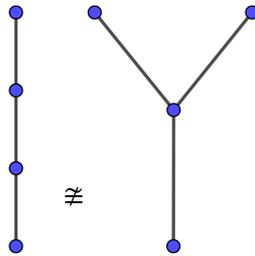


Figura 38: Árvores com $|V(G)| = 4$ e $|A(G)| = 3$.

Porém, a característica de Euler carrega informações relevantes sobre o formato dos grafos. Em particular sobre a existência de ciclos, caminhos fechados, laços. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 3.3. Considere os grafos, da Figura 39.

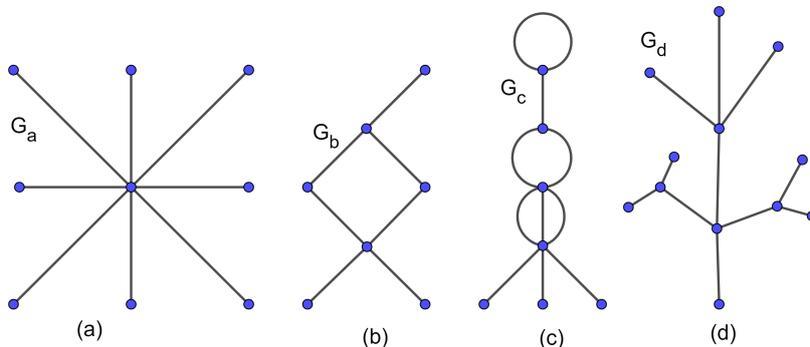


Figura 39: Grafos

Veja que os grafos em (a) e (d) são árvores e

$$\chi(G_a) = \chi(G_d) = 1.$$

Os grafos em (b) e (c) possuem ciclos, logo, não são árvores. Fazendo uma contagem, temos

$$\chi(G_b) = 7 - 7 = 0$$

$$\chi(G_c) = 7 - 10 = -3.$$

Portanto, $\chi(G_b) \neq 1$ e $\chi(G_c) \neq 1$.

A característica de Euler nos diz que G_b e G_c não são árvores, mas parece dizer mais ainda sobre os ciclos nos grafos. Veja que G_b contém um ciclo. Já os ciclos de G_c são um pouco mais complicados de analisar, veja que num primeiro momento contamos 5 ciclos: $\{j, j\}$, $\{g, h\}$, $\{d, e\}$, $\{e, f\}$, $\{d, f\}$, onde as arestas estão rotuladas como na Figura 40.

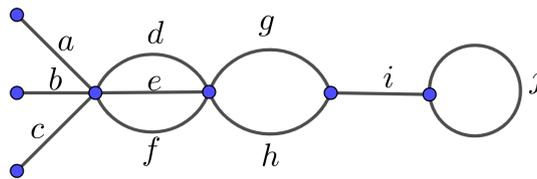


Figura 40: Grafo com ciclos.

Porém o ciclo $\{d, f\}$ pode ser visto como o ciclo $\{d, e\}$ combinado com o ciclo $\{e, f\}$. Portanto, consideramos que G_c tem 4 ciclos distintos.

Outra justificativa seria que em G_b podemos tirar 1 aresta sem desconectar o grafo e obter uma árvore. Em G_c o número mínimo de arestas que precisam ser removidas para se obter uma árvore é 4. Ou seja, o número de ciclos distintos em um grafo pode ser pensado como o número mínimo de arestas removidas do grafo para obter uma árvore geradora.

Veja que estes exemplos mostram que cada ciclo reduz a característica de Euler por 1, pois para os grafos da Figura 39 vale que:

$$\chi(G_a) = \chi(\text{árvore}) = 1 \quad e \quad G_a \text{ não tem ciclos,}$$

$$\chi(G_b) = 0 \quad e \quad G_b \text{ tem um ciclo,}$$

$$\chi(G_c) = -3 \quad e \quad G_c \text{ tem 4 ciclos distintos.}$$

O próximo teorema garante que essa análise é sempre válida.

Teorema 3.3. *Seja G um grafo com n ciclos distintos. Então $\chi(G) = 1 - n$. Em outras palavras. Seja n o número mínimo de arestas retiradas de G para se obter uma árvore geradora. Então,*

$$\chi(G) = 1 - n.$$

Prova. Para cada um dos n ciclos distintos de G , podemos remover uma aresta sem desconectar o grafo, já que cada ciclo implica um caminho redundante entre dois vértices. Após fazer isso, obtemos uma árvore geradora T para G . Pelo teorema anterior, $\chi(T) = 1$. A árvore T contém todos os vértices de G e contém n arestas a menos que G , logo

$$\begin{aligned} 1 &= \chi(T) = |V(T)| - |A(T)| \\ &= |V(G)| - (|A(G)| - n) \\ &= |V(G)| - |A(G)| + n \\ &= \chi(G) + n \end{aligned}$$

Portanto, $\chi(G) = 1 - n$. □

O resultado anterior garante que apesar da característica de Euler não dar informações precisas do grafo, fornece informações preciosas sobre seu formato. Além disso, este é um invariante topológico como mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.4. *Sejam G_1 e G_2 grafos homeomorfos. Então $\chi(G_1) = \chi(G_2)$.*

A demonstração pode ser encontrada na referência [2].

3.3 A FÓRMULA DE EULER PARA GRAFOS PLANARES CONEXOS

Um caso particular de grafos é a classe dos grafos planares como vimos na Subseção 1.4.2, todo grafo planar conexo determina regiões no plano, chamadas de faces do grafo. Embora a característica de Euler não seja fixa para grafos planares, se adicionarmos a ela a quantidade de faces de G então sempre teremos o valor 2. Ou seja, se G é planar conexo, vale que $\chi(G) +$ o número de faces $= 2$. Essa equação é conhecida como a fórmula de Euler.

Buscaremos nessa seção demonstrar a validade da Fórmula de Euler para os grafos planares conexos.

Teorema 3.5. *Seja $G(V, A)$ um grafo planar conexo com v vértices, f faces (ou regiões) e a arestas, então, vale a fórmula de Euler:*

$$v - a + f = 2.$$

Prova. Faremos a prova por indução sobre o número de arestas de G . Para o grafo vazio é imediato, então, utilizaremos como caso base o grafo com uma aresta, ou seja, $a = 1$ e portanto dois vértices, $v = 2$. Temos

$$v - a + f = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Portanto, para um grafo com 1 aresta a fórmula de Euler é válida.

Consideremos agora, como hipótese de indução, que a fórmula de Euler é válida para um grafo planar e conexo com n arestas. Dessa maneira, a igualdade que segue é verdadeira:

$$v - n + f = 2 \text{ (hipótese de indução).}$$

Buscaremos provar a validade da fórmula de Euler para um grafo planar e conexo com $n + 1$ arestas. Para tanto, iremos considerar 3 casos:

1º caso: O grafo é uma árvore. Então, $v = (n + 1) + 1$ e $f = 1$, substituindo na fórmula temos:

$$v - a + f = (n + 2) - (n + 1) + 1 = 2.$$

2º caso: O grafo G contém $(n + 1)$ arestas, sendo que um dos vértices tem grau 1.

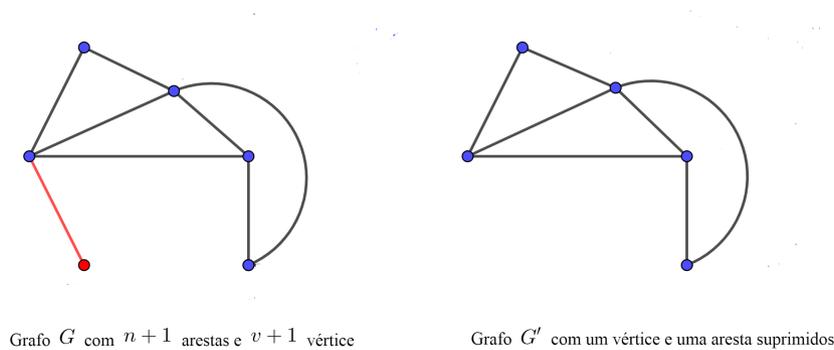


Figura 41: Ilustração do caso 2 - supressão de vértice e aresta

Suprimindo do grafo G o vértice de grau ímpar, também suprimimos a aresta que nele incidia obtendo assim um grafo G' com v vértices, n arestas e f faces, ou seja:

$$v - n + f = 2 \text{ (que é nossa hipótese de indução).}$$

Verificamos assim que a fórmula é válida para o grafo G' , mas é necessário verificarmos sua validade para o grafo G . Temos então que:

$$(v + 1) - (n + 1) + f = v - n + f = 2.$$

Sendo portanto válida, pela hipótese de indução, para o grafo G .

3º caso: Consideremos agora um grafo G com $n + 1$ arestas, onde nenhum de seus vértices tem grau 1.

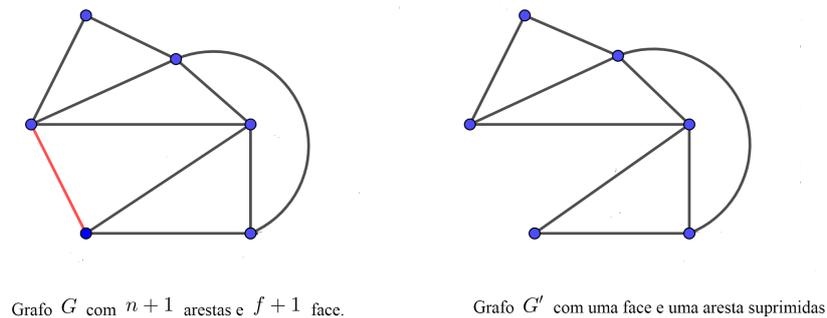


Figura 42: Ilustração do caso 3 - supressão de face e aresta

Se suprimirmos do grafo G uma de suas arestas que faz fronteira com sua região exterior, obteremos um grafo G' com v vértices, f faces e n arestas. O que nos remete a nossa hipótese de indução. Resta-nos verificar a validade para o grafo G . Ora

$$v - (n + 1) + (f + 1) = v - n + f = 2 \quad (\text{hipótese de indução}).$$

Dessa maneira, a fórmula de Euler é válida para um grafo G planar e conexo, como queríamos demonstrar. \square

3.4 APLICAÇÃO DA FÓRMULA DE EULER PARA POLIEDROS

É bastante comum a associação, quase que imediata, da fórmula de Euler aos poliedros convexos.

Trataremos de um grupo especial de poliedros, os regulares. Que muito embora não sejam, o principal objeto de nosso estudo, é importante abordarmos o tema.

Definição 3.6. Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices incidem o mesmo número de arestas.

Uma família conhecida de poliedros convexos e regulares são os famosos poliedros de Platão, tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Na Figura 43, apresentamos tais poliedros bem como uma possível representação desses poliedros através de grafos. Mais especificamente, associamos a cada poliedro de Platão um grafo planar com a mesma quantidade de arestas, vértices e faces do poliedro em questão. Ou seja, tais poliedros podem ser vistos como grafos planares. Consequentemente, satisfazem a fórmula de Euler.

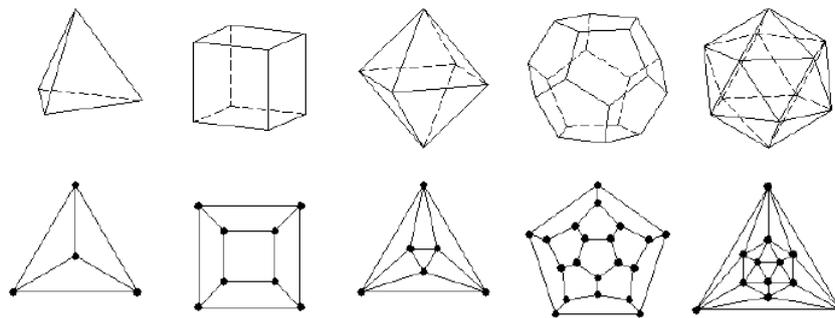


Figura 43: Poliedros de Platão e os grafos a eles associados.

(Fonte: [7])

Perceba que os grafos associados aos poliedros não são suas planificações propriamente ditas, muito embora suas planificações sejam também grafos, porém distintos dos grafos apresentados, com número de vértices, arestas e faces distintos. Isso fica evidente na Figura 44.

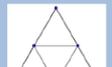
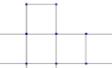
Poliedro	Grafos	Planificação
 Tetraedro		
 Hexaedro		
 Octaedro		
 Dodecaedro		
 Icosaedro		

Figura 44: Poliedros, grafos e planificações.

(Fonte: [7])

Utilizando aqui o grafo e a planificação do tetraedro, notoriamente distintos, são grafos de classes distintas. Vemos que, no entanto, a fórmula de Euler é válida para ambos. No caso do grafo temos 4 vértices, 4 faces e 6 arestas ($4 - 6 + 4 = 2$). Já a planificação tem 6 vértices, 5 faces e 9 arestas ($6 - 9 + 5 = 2$).

Dentro do que nos propomos, buscaremos, partindo de sua definição, provar que há uma quantidade finita de poliedros regulares, bem como identificá-los de tal forma que possamos afirmar que todo poliedro regular é um poliedro de Platão (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro).

Teorema 3.7. *Existem apenas cinco poliedros regulares convexos e são poliedros de Platão.*

Prova. Temos que ao multiplicar o número n de arestas em cada face, pelo número de faces do poliedro, contaremos duas vezes cada aresta. Assim:

$$n.F = 2.A \Rightarrow F = \frac{2.A}{n}$$

Como cada aresta incide em dois vértices, ao multiplicarmos o número p de arestas que incidem em cada vértice pelo número de vértices do poliedro, estaremos mais uma vez contando duas vezes o número de arestas. Daí,

$$p.V = 2.A \Rightarrow V = \frac{2.A}{p}$$

Substituindo na Fórmula de Euler, obtemos

$$\begin{aligned}
 V - A + F &= 2 \\
 \frac{2.A}{p} - A + \frac{2.A}{n} &= 2 \\
 2.A.n - A.n.p + 2.A.p &= 2.n.p \\
 A &= \frac{2.n.p}{2.n - n.p + 2.p}
 \end{aligned}$$

Devemos ter $2.n - n.p + 2.p > 0$, ou seja

$$\frac{2.n}{n-2} > p$$

Como $p \geq 3$, chegamos a $2 < n < 6$. As possibilidades são então as seguintes:

$$n = 3 \rightarrow A = \frac{6.p}{6-p} \rightarrow 3 \leq p < 6 \rightarrow \begin{cases} p = 3 \rightarrow A = 6, V = 4, F = 4 \rightarrow \text{tetraedro.} \\ p = 4 \rightarrow A = 12, V = 6, F = 8 \rightarrow \text{octaedro.} \\ p = 5 \rightarrow A = 30, V = 12, F = 20 \rightarrow \text{icosaedro.} \end{cases}$$

$$n = 4 \rightarrow A = \frac{4p}{4-p} \rightarrow 3 \leq p < 4 \rightarrow p = 3 \rightarrow A = 12, V = 8, F = 6 \rightarrow \text{hexaedro(cubo).}$$

$$n = 5 \rightarrow A = \frac{10.p}{10-3.p} \rightarrow 3 \leq p < \frac{10}{3} \rightarrow p = 3 \rightarrow A = 30, V = 20, F = 12 \rightarrow \text{dodecaedro.}$$

São portanto cinco os poliedros regulares: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro, que são também poliedros de Platão. \square

PLANARIDADE E GRAFO DUAL

Apresentaremos nesse capítulo mais propriedades de grafos planares e mostraremos as condições para que possamos garantir a planaridade de um grafo.

Trataremos ainda de grafos duais, o que nos proporcionará uma demonstração alternativa para a validade da fórmula de Euler para grafos planares conexos.

Encerramos o capítulo falando de maneira informal sobre coloração, tendo em vista que nosso objetivo é mostrar a utilização de um grafo dual (excluída sua região infinita) na coloração de regiões ou mapas. As referências básicas para esse capítulo são [5], [9] e [10].

4.1 PLANARIDADE

Já vimos anteriormente que um grafo é planar se pode ser representado no plano sem que haja cruzamento de suas arestas (ou, é isomorfo a um grafo com tal propriedade). Buscaremos aqui estudar um pouco mais sobre planaridade.

Considere um grafo planar G . Então, como vimos na Seção 1.4.2, a noção de faces está bem definida.

Definição 4.1. Uma aresta de G é chamada de **borda** se essa aresta corresponde a uma separação entre duas faces.

Definição 4.2. Uma aresta de G é chamada de **spike** se esta aresta não é uma separação entre duas faces.

A Figura 45 apresenta um grafo planar onde suas arestas são classificadas como borda ou spike.

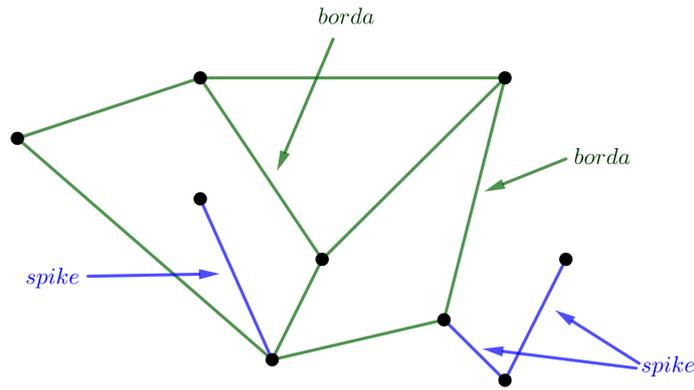


Figura 45: Bordas e spikes

Definição 4.3. O grau de uma face, que denotaremos por $g(f)$, é a soma das bordas que delimitam a face f mais as spikes em f contados duas vezes.

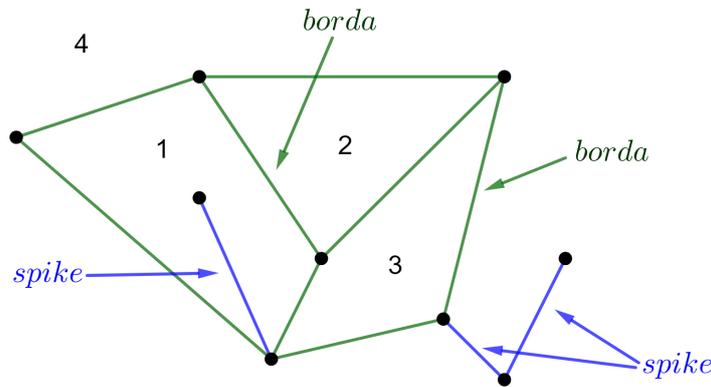


Figura 46: Grau das faces: $g(f_1) = 6$, $g(f_2) = 3$, $g(f_3) = 4$ e $g(f_4) = 9$

Proposição 4.4. Se G é um grafo conexo planar simples, com $v \geq 3$ vértices e a arestas, então

$$a \leq 3v - 6.$$

Prova. Observe que, por se tratar de um grafo simples, G não admite laços ou arestas paralelas, portanto, cada face está limitada por pelo menos 3 arestas. Assim, considere um grafo G com f faces $f_i, i = 1, 2, \dots, f$. Denotando o número de arestas que compõem a face f_i por $g(f_i)$, obtemos a seguinte relação: $g(f_i) \geq 3$. Além disso, quando somamos o número de arestas de cada face, estamos contando duas vezes o número real de arestas. Então, temos a seguinte relação

$$2a = \sum_{i=1}^f g(f_i).$$

É importante lembrarmos a existência de uma face externa, chamada de ilimitada, para verificarmos a validade dessa igualdade.

Dessa forma temos a seguinte relação

$$2a = \sum_{i=1}^f g(f_i) \geq \sum_{i=1}^f 3 = 3f.$$

Isto é, $2a \geq 3f$, logo $f \leq \frac{2}{3}a$.

Aplicando a desigualdade na fórmula de Euler, temos que:

$$v - a + f = 2 \Rightarrow f = 2 + a - v \Rightarrow 2 + a - v \leq \frac{2}{3}a \Rightarrow 6 + 3a - 3v \leq 2a \Rightarrow a \leq 3v - 6.$$

□

Na prova anterior, vimos que como uma borda separa exatamente duas regiões e uma spike tem peso 2 no grau de uma face, então se um grafo G tem a arestas a soma dos graus das faces f_i de G é igual a $2a$.

Proposição 4.5. *Se G é conexo, planar com $v \geq 3$ vértices e não tem ciclos de comprimento 3, então $a \leq 2v - 4$, onde a é o número de arestas.*

Prova. Note que como G não tem ciclos de comprimento 3, então cada região terá pelo menos quatro arestas de borda. Então a soma dos graus das faces é pelo menos $4f$, em que f é o número de faces. Assim, $2a \geq 4f$.

Usando a fórmula de Euler:

$$2a \geq 4f \Rightarrow 2a \geq 4(2 - v + a) = 8 - 4v + 4a \Rightarrow a \leq 2v - 4.$$

□

Proposição 4.6. *Seja G um grafo conexo planar simples. Então G contém um vértice v tal que $g(v) \leq 5$.*

Prova. Suponha por absurdo que o grau de todos os vértices de G é no mínimo 6. Temos que:

$$\sum_{v \in V(G)} g(v) \geq 6v.$$

Como o grau de um vértice, por definição, é o número de arestas que incidem neste vértice, e cada aresta de um grafo simples tem extremidade em dois vértices, temos que:

$$\sum_{v \in V(G)} g(v) = 2a.$$

Consequentemente, temos: $2a \geq 6v$ logo $a \geq 3v$. Mas pela Proposição 4.4, $a \leq 3v - 6$. Temos então $a \leq 3v - 6$ e $a \geq 3v$, o que é uma contradição. Portanto, existe um vértice de grau menor ou igual a 5. \square

Vamos utilizar esses resultados para mostrar que certos grafos não são planares.

Conforme apresentado na Definição 1.10 um grafo bipartido completo tem seus vértices dispostos em dois conjuntos X e Y tal que cada vértice $v \in X$ está associado a cada vértice $w \in Y$ e, é denotado por $K_{m,n}$, onde $m = |X|$ e $n = |Y|$. Assim, um grafo bipartido completo em que $|X|=3$ e $|Y|=3$, é representado por $K_{3,3}$. Ver Figura 17.

Proposição 4.7. *O grafo $K_{3,3}$ é não planar.*

Prova. Vamos supor, por absurdo, que o grafo $K_{3,3}$ seja um grafo planar. Sendo v o seu número de vértices e a o seu número de arestas, temos que $v(K_{3,3}) = 6$ e $a(K_{3,3}) = 9$.

Aplicando a fórmula de Euler é fácil concluir que $f(K_{3,3}) = 5$. Observe que $K_{3,3}$ não tem faces triangulares, logo pela Proposição 4.5, temos que:

$$a \leq 2v - 4 \Rightarrow (9) \leq 2(6) - 4 \Rightarrow 9 \leq 8,$$

o que é um absurdo, logo $K_{3,3}$ não é planar. \square

Proposição 4.8. *O grafo K_5 é não planar.*

Prova. O grafo K_5 é completo (veja a Figura 6). Temos que $v(K_5) = 5$ e $a(K_5) = 10$. Supondo por absurdo, que K_5 é planar, pela Proposição 4.4, temos que:

$$a \leq 3v - 6 \Rightarrow 10 \leq 3(5) - 6 \Rightarrow 10 \leq 9.$$

O que é um absurdo. Portanto, K_5 não é planar. \square

Consideramos importante destacar que a Proposição 4.4, quando não satisfeita, garante a não planaridade, como vimos na Proposição 4.8. No entanto, ser satisfeita não garante a planaridade do grafo, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 4.1. O grafo $K_{3,3}$ possui 6 vértices e 9 arestas, assim, temos:

$$a \leq 3v - 6 \Rightarrow 9 \leq 12.$$

Logo, a Proposição 4.4 é satisfeita. Porém, na Proposição 4.7, vimos que o grafo $K_{3,3}$ é não planar.

O próximo resultado nos fornece uma ampla família de grafos que não são planares.

Proposição 4.9. *Toda expansão de $K_{3,3}$ ou de K_5 é não planar.*

Prova. Considere um grafo G como sendo uma expansão de $K_{3,3}$ ou de K_5 . Suponha, por contradição, que G é planar. Logo, é possível representar G no plano sem cruzamento de arestas. O processo de retirarmos os vértices que foram adicionados ao grafo $K_{3,3}$ ou K_5 para obtermos G não cria cruzamento de arestas. Portanto, se fizermos isso em G , teremos como resultado um grafo planar. Mas o grafo obtido é, na verdade, o grafo $K_{3,3}$ ou K_5 inicial, que são não planares, de acordo com as Proposições 4.7 e 4.8. Temos então uma contradição. E, portanto, toda expansão de $K_{3,3}$ ou K_5 é não planar. \square

No ano de 1930, o matemático polonês **Kuratowski** demonstrou pela primeira vez o seguinte teorema:

Teorema 4.10. *Um grafo G é planar se, e somente se, não contém um subgrafo homeomorfo ao grafo K_5 ou ao grafo $K_{3,3}$.*

Um exemplo bastante comum é a demonstração por meio da subdivisão inversa, de que o Grafo de Petersen, a esquerda na Figura 47, é homeomorfo a um grafo $K_{3,3}$.

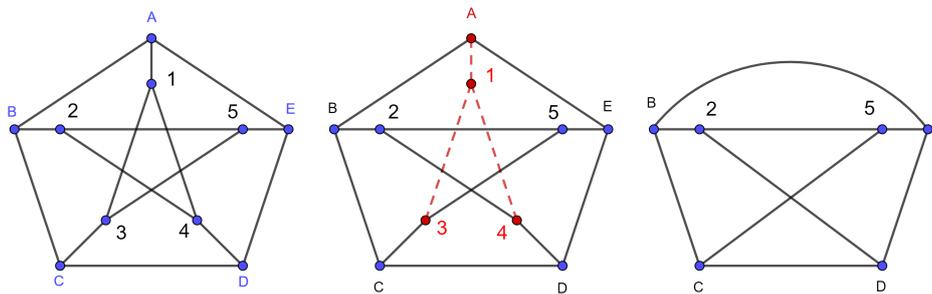


Figura 47: Grafo de Petersen homeomorfo a um grafo $K_{3,3}$ por subdivisão inversa.

O grafo obtido pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos de vértices, X e Y , onde $X = \{B, 5, D\}$ e $Y = \{C, 2, E\}$, de modo que cada elemento de X está associado a todos os elementos de Y , ou seja, é um grafo $K_{3,3}$. Logo, o Grafo de Petersen não é planar.

4.2 GRAFO DUAL

Dado um grafo planar G , definimos o grafo dual de G , denotado por G^* , como sendo um grafo que tem um, e somente um, vértice v^* em cada face f de G , donde,

$|V(G^*)| = |F(G)|$. As arestas $A^*(G^*)$ associam vértices que estão em faces adjacentes de G tal que cada aresta a^* intersecciona exatamente uma aresta a , $a \in G$ que separa as faces que contém os vértices que são extremos de a^* .

A Figura 48 mostra um grafo planar e seu dual.

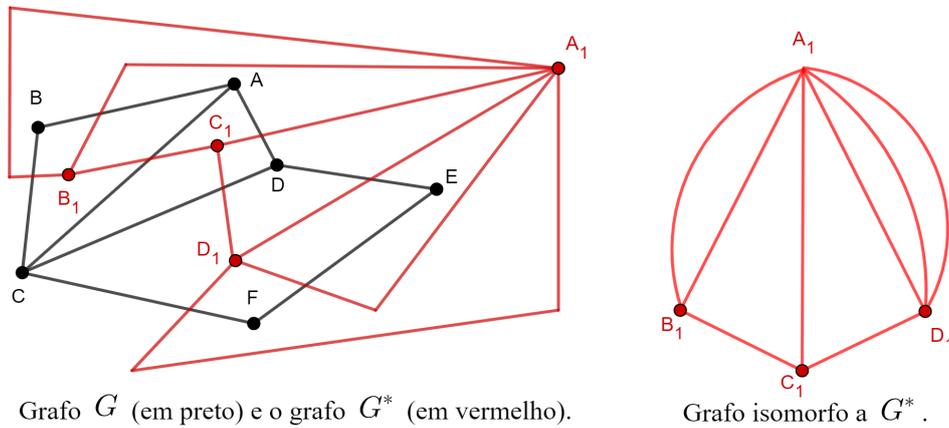


Figura 48: Grafo dual (em vermelho) e uma possível representação por isomorfismo.

É interessante observar que, em um grafo dual, temos um laço quando o grafo de origem tem um spike, e arestas paralelas (ou múltiplas) quando duas faces são separadas por mais de uma aresta. Veja a Figura 49.

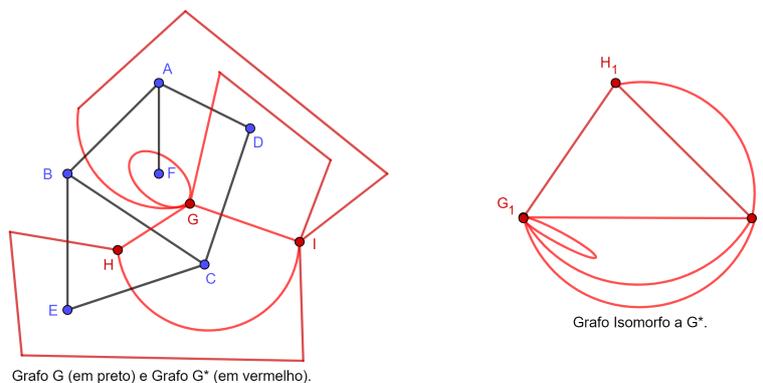


Figura 49: Grafo dual com laço e arestas paralelas.

Os grafos duais tem as seguintes propriedades:

1. Um grafo dual G^* é sempre conexo, ainda que o grafo G seja desconexo.

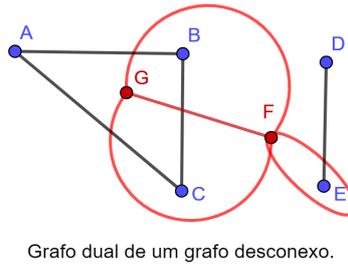


Figura 50: O grafo dual de um grafo desconexo é conexo.

2. O grafo dual do grafo dual de G é isomorfo ao grafo G se, e somente se, o grafo G é conexo.

Como exemplo, considere o grafo dual G^* da Figura 49. Calculando o grafo dual dele, o resultado obtido é o próprio grafo G rotacionado, ou seja, um grafo isomorfo a G que é conexo.

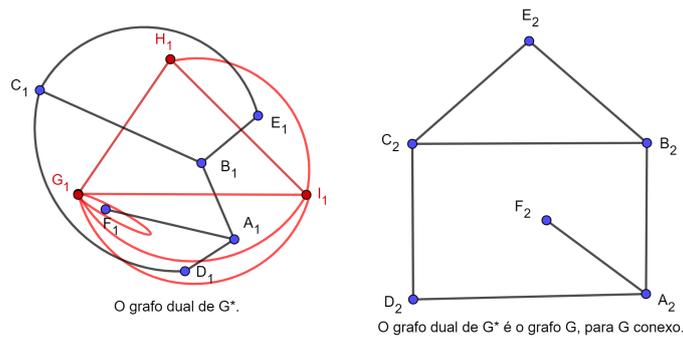


Figura 51: O grafo dual de G^* é isomorfo ao grafo G .

4.2.1 Árvore de um grafo dual

Como vimos anteriormente, um grafo dual G^* de um grafo G planar é sempre conexo. Então é possível obter uma árvore geradora para o grafo G^* . A seguir, utilizamos um exemplo para maior clareza na exposição, porém deixamos claro que o exposto pode ser generalizado.

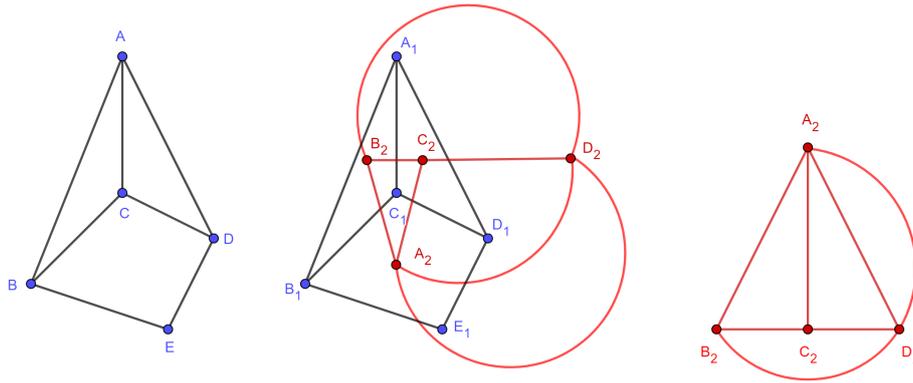


Figura 52: Grafo G e seu grafo dual.

Considere o grafo G apresentado à esquerda na Figura 52, e seu dual G^* (ao centro e à direita). Observe que o grafo G tem 5 vértices, 7 arestas e 4 faces, enquanto o grafo G^* tem 4 vértices, 7 arestas e 5 faces. Esse fato não acontece por acaso. Veja:

- Por definição, os vértices do grafo G^* ocupam cada um uma face do grafo G , então, o número de vértices do grafo G^* é igual ao número de faces do grafo G .
- Segue da definição que cada aresta do grafo G^* “cruza” exatamente uma aresta do grafo G , logo o número de arestas de G^* e G são iguais.
- Como vimos anteriormente, o dual do grafo dual de G , para G conexo, é o próprio G ou um grafo isomorfo a G , dessa forma, o número de faces do grafo G^* é igual ao número de vértices do grafo G .

Vamos agora obter uma árvore geradora para G e para G^* da Figura 52. Para tanto, deixaremos as arestas a serem extraídas pontilhadas na Figura 53.

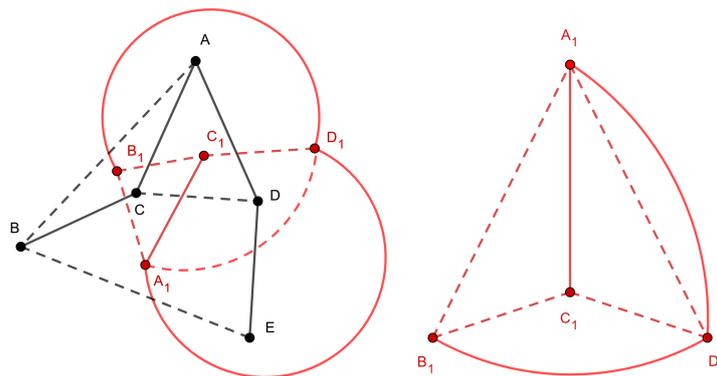


Figura 53: Extração de arestas para obtenção de árvore geradora.

Chamamos atenção aqui para o fato de termos mantido no grafo dual exatamente as arestas que “passam” pelas arestas pontilhadas, extraídas do grafo G . Dessa maneira, podemos afirmar que a árvore geradora de um grafo G , que denotaremos por T , terá a_0 arestas enquanto que a árvore geradora de um grafo G^* , denotada por T^* , terá $a - a_0$ arestas, onde a é o número de arestas do grafo G (que é igual ao número de arestas de G^*). Veja as árvores geradoras obtidas na Figura 54.

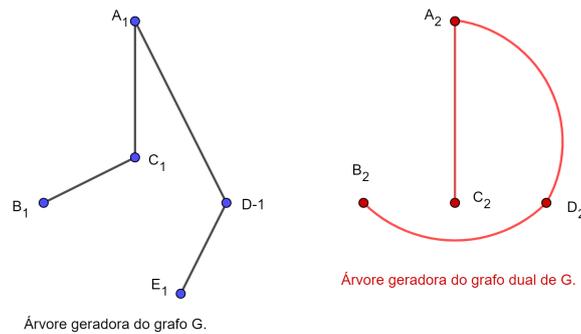


Figura 54: Árvores geradoras de G e G^* .

Analisemos agora de maneira genérica as árvores T e T^* . Conforme já visto, o número de arestas de uma árvore é igual ao número de vértices menos 1. Logo, em T temos $v - 1$ arestas, donde $a_0 = v - 1$. Usando essas informações em T^* , vejamos o fruto que colhemos.

árvores	vértices	arestas	faces
T	v	$a_0 = v - 1$	1
T^*	f	$a - a_0 = f - 1$	1

Tabela 3: f é número de faces de G , que é igual ao número de vértices de G^* .

Donde,

$$\begin{aligned}
 f - 1 &= a - a_0 \\
 &= a - (v - 1) \\
 &= a - v + 1.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$v - a + f = 2.$$

Como para cada aresta acrescentada em T^* aumentamos também uma face, não alterando assim o resultado obtido. Daí, concluímos de forma alternativa, que a fórmula de Euler é válida para grafos planares.

4.2.2 Grafo dual e coloração

Uma aplicação do conceito de grafo dual que consideramos pertinente para nosso estudo é seu uso na coloração de regiões.

Dentro da teoria dos grafos existe um estudo da coloração de mapas (regiões) totalmente estruturado nos seus teoremas e definições, que fogem ao escopo desse trabalho. Porém, apesar de sua complexidade, ela traz também uma parte intuitiva que buscaremos explorar dada sua relevância.

O que iremos abordar é a coloração de regiões de tal maneira que regiões que fazem fronteira (vizinhas), não possam ter a mesma cor, além disso, devemos usar a menor quantidade possível de cores.

Exemplo 4.2. Na Figura 55, apresentamos uma sequência de passos para a coloração do mapa. Primeiramente, trace o grafo dual, excluindo a região infinita (face externa). Em seguida, faça a coloração dos vértices de maneira que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Por fim, pinte a região de acordo com a cor do vértice nela contido. Veja a Figura 55.

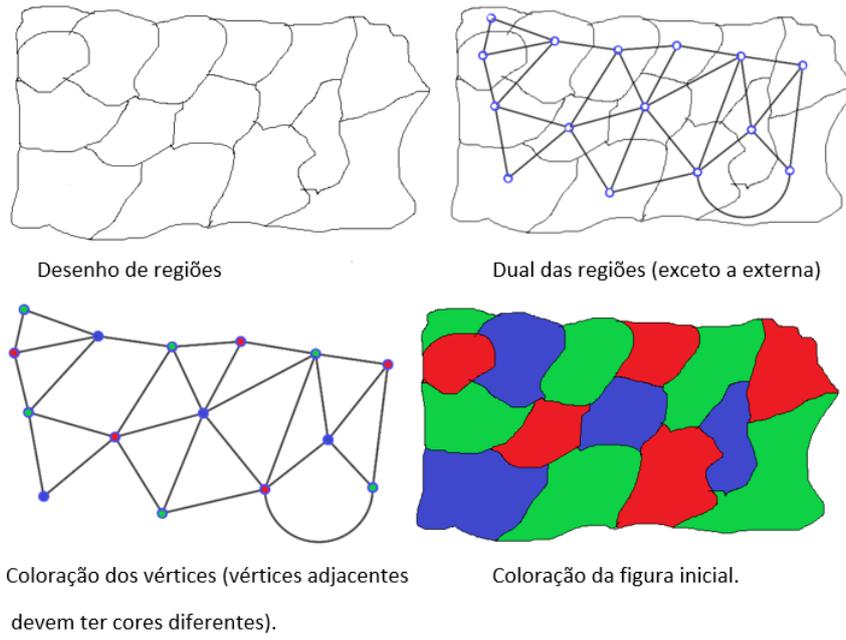


Figura 55: Coloração de grafos.

PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo iremos propor o ensino da Teoria dos Grafos nos anos finais do ensino fundamental por considerarmos que sua presença se faz notória, apesar de não explicitamente, nas habilidades a serem desenvolvidas no processo de ensino aprendizagem, embora a **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)** não tenha mencionado dentre os objetos de conhecimento.

Na BNCC, o **Letramento Matemático** tem lugar de destaque.

“O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição)”.

Fonte: BRASIL.Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

Tendo em sua essência um caráter intuitivo, mesmo que não se apresente de maneira formal sua teoria, os grafos são mais uma opção para resolução de problemas, que propiciam a argumentação, o uso de diagramas para representação simplificada de um problema, uma generalização e, principalmente, traz consigo um lado lúdico.

Buscaremos apresentar alguns problemas voltados ao ensino fundamental e que podem ser solucionados com o uso de grafos. A sequência em que os problemas são propostos na Seção 5.2 não é uma sequência didática, optamos em fazer dessa maneira por considerar que cada professor conhece a potencialidade de seu aluno e poderá montar uma sequência própria e mais adequada a sua realidade ou ainda, escolher um ou outro problema que considere pertinente. Porém, antes dispostos de alguns exercícios de fixação, na Seção 5.1, objetivando principalmente uma análise do leitor quanto a seu grau de dificuldade e a viabilidade ou não da proposta de aplicação no ensino fundamental.

Diferente do que fizemos nos capítulos anteriores, utilizaremos os termos **nós ou conectores** ao invés de **vértices**, e **ligações** no lugar de **arestas**. A justificativa para tal é a preocupação em não causar um conflito aos conhecimentos prévios (porém ainda não consolidados) do educando. Um exemplo claro disso é o conceito de paralelismo estudado na geometria plana euclidiana, quando mencionarmos arestas paralelas em um grafo, parecerá contraditório ao educando o conceito de paralelismo estudado até então, gerando assim o conflito mencionado. Apesar do exposto, deixamos claro tratar-se de opinião pessoal do autor, baseado exclusivamente em sua experiência pessoal, ficando assim a cargo do leitor acatar ou não a sugestão.

Encerraremos com a Seção 5.3, destinada a mostrar a utilização de grafos, que passam despercebidos, em nosso dia a dia. As referências básicas para esse capítulo são: [1], [3], [6], [9], [10] e [12].

5.1 EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Observe o grafo e responda:

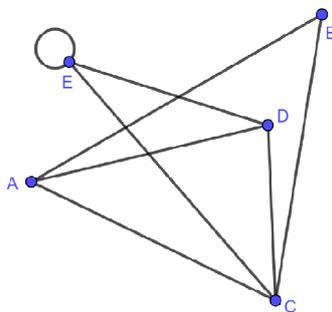


Figura 56: Grafo - Atividade 1

- a) Qual o grau de cada nó desse grafo?
- b) Qual o grau desse grafo?
- c) Quantas ligações o grafo possui?
- d) Há alguma ligação dupla ou laço nesse grafo? Em caso afirmativo, indique quais.
- e) Escreva o(s) nó(s) adjacente(s) ao nó dado:
 - i. C
 - ii. E
 - iii. B
 - iv. A
 - v. D

2. Ainda considerando o grafo do exercício anterior, Figura 56, complete a tabela abaixo utilizando 1 para nós adjacentes e 0 para nós não adjacentes.

	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

3. Dê um exemplo de:
- a) Grafo simples com 4 nós e 3 ligações;
 - b) Grafo com 3 nós e 2 ligações;
 - c) Grafo com 3 nós e 1 ligação dupla.
4. Represente por meio de um grafo os dados da tabela de adjacências a seguir:

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	1
B	1	0	1	0	1
C	0	1	0	1	1
D	1	0	1	0	1
E	1	1	1	1	0

5. Um torneio de tênis está sendo disputado por 8 jogadores. Cada jogador deve enfrentar todos os demais uma única vez. Infelizmente, devido à pandemia do Covid 19, o torneio teve que ser interrompido. Na Figura 57, estão representados por meio das ligações os jogos já realizados.

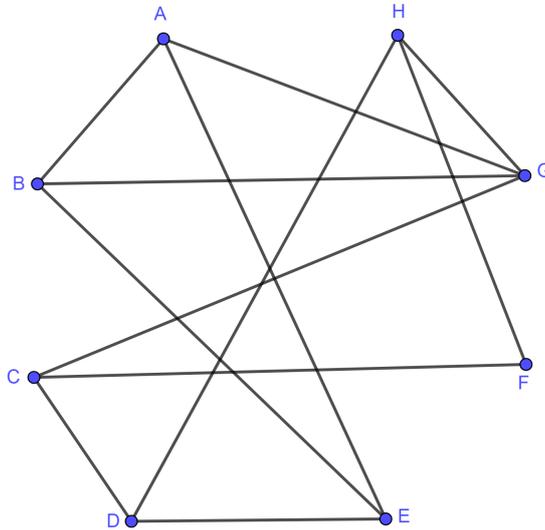


Figura 57: Jogos realizados.

- Escreva a matriz de adjacência dos jogos realizados.
 - Desenhe o grafo complementar ao da Figura 57.
 - O que esse grafo complementar representa?
 - Ao final do torneio, qual terá sido o número total de jogos?
6. Um grafo completo com n nós é denotado por K_n . Determine o número total de ligações do grafo:
- K_3
 - K_5
 - K_7
 - K_{10}
 - K_n
7. Qual o número de ligações do grafo complementar ao grafo desconexo formado por duas componentes conexas isomorfas a K_3 e K_7 ?

8. Um grafo conexo com 7 nós, sem laços ou ligações múltiplas, pode ter 25 ligações? Justifique sua resposta.
9. Analise o mapa contendo os arredores da escola 1º de Maio e represente por meio de grafos os itens solicitados:

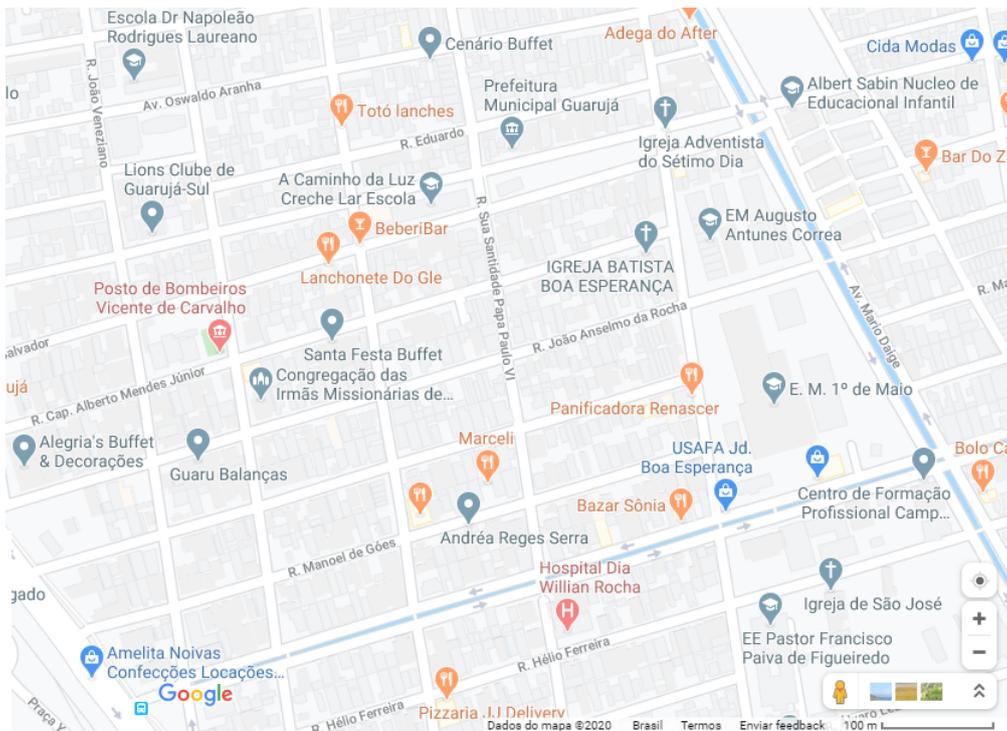


Figura 58: Mapa dos arredores da escola

- a) As escolas que aparecem no mapa, inclusive de Educação Infantil;
- b) Hospital, Bombeiros, Camp, Usafa, Lions Club.

5.2 PROBLEMAS DESAFIOS

Problema 1.

Na Figura 59, temos uma representação do mapa com alguns pontos de referência ao redor da casa de Maria. Determine o menor caminho entre a casa da Maria e a escola.

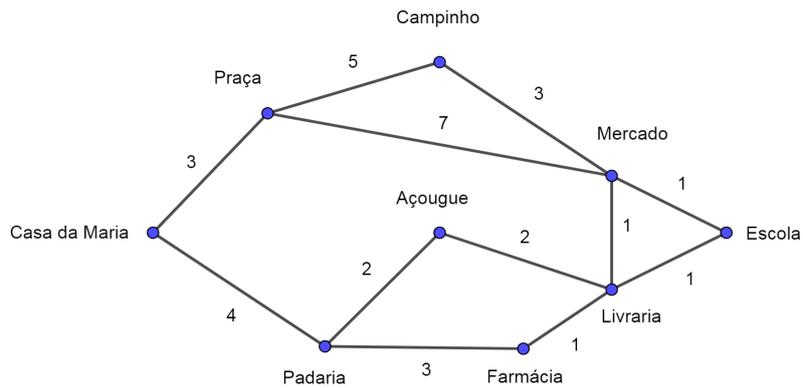


Figura 59: Representação do mapa por meio de um grafo rotulado em seus nós e valorado em suas ligações.

Problema 2.

Em um tabuleiro 3×3 (3 linhas e 3 colunas), temos em cada um dos 4 “cantos” um cavalo, sendo que, inicialmente, temos cavalos brancos na 1ª linha e cavalos pretos na 3ª linha, conforme a Figura 60. O desafio consiste em, usando o movimento do cavalo no jogo de xadrez e sem capturar qualquer peça, inverter as posições dos cavalos, ou seja, os cavalos brancos devem ocupar os “cantos” da 3ª linha e os cavalos pretos, devem ocupar os “cantos” da 1ª linha.

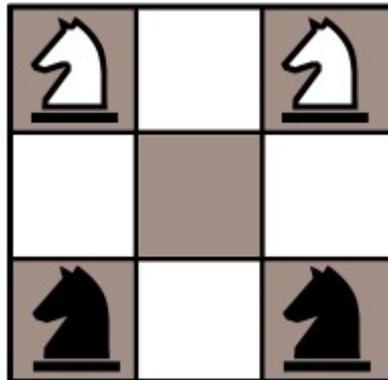


Figura 60: Desafio dos 4 cavalos

Sugestão para aula: Para que o desafio fique ainda mais interessante, sugerimos que seja disponibilizado um tabuleiro para cada aluno (ou dupla conforme a proposta

de trabalho) e tampinhas coloridas (duas a duas) ou marcadores quaisquer para que o aluno tenha maior interação.

Roteiro de solução: Construa um tabuleiro numerado conforme Figura 61 e posicione as peças em sua posição original.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 61: Tabuleiro numerado.

Cada uma dessas “casas” representa um nó e o acesso entre elas é representado por uma ligação, assim, podemos representar as possíveis jogadas iniciais por meio de um grafo, como na Figura 62.

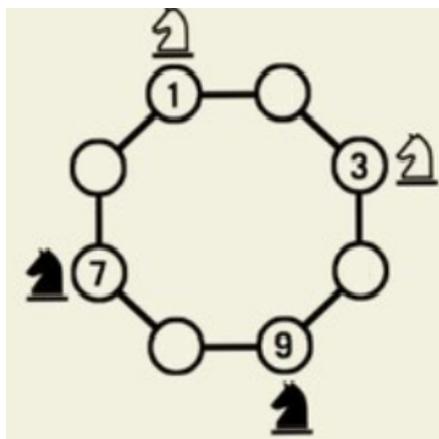


Figura 62: Grafo associado ao tabuleiro.

Proponha ao aluno que ele complete a Figura 62 e escreva em linguagem própria suas observações especificando se apenas com a figura, ele seria capaz de resolver o problema.

Na sequência, disponha as peças de acordo com a Figura 63 e proponha que, seguindo as mesmas regras anteriores, tente retornar o tabuleiro em sua disposição original conforme Figura 60.

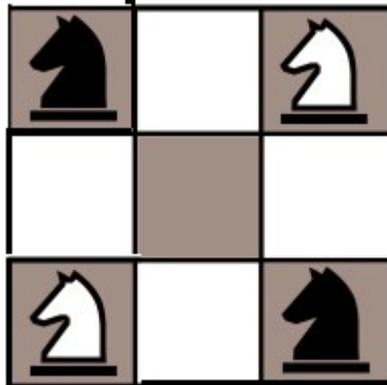


Figura 63: Nova disposição.

Sugestão para elaboração de projeto: Proponha ao professor de Educação Física um trabalho em conjunto para ensinar xadrez e promover, futuramente, um torneio.

Em sala, aproveite para contar a lenda do jogo de xadrez e faça, caso considere o momento adequado, a introdução do estudo de potenciação.

Problema 3

Reproduza, se possível, as figuras I, II e III, representadas na Figura 64, sem tirar o lápis do papel e sem passar por cima de ligações já desenhadas.

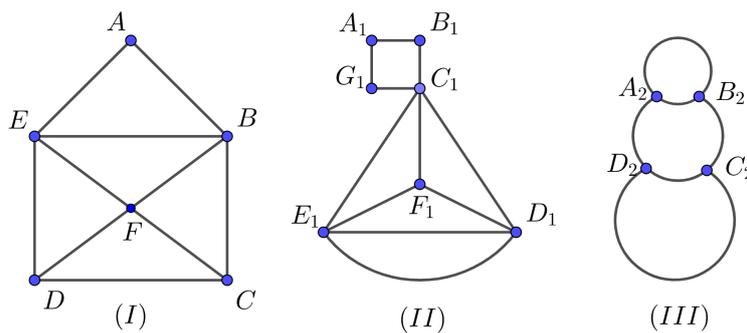


Figura 64: Grafo a ser desenhado

a) É possível começar e terminar em um mesmo ponto?

- b) Retire, se possível, uma das ligações, em cada figura (I, II e III), de maneira a conseguir começar e terminar em um mesmo ponto.

Sugestão para sala de aula: Aproveite o momento para contar a “História do Problema das Pontes de Königsberg.”.

Proposta elaboração de projeto: Converse com os professores de História e Geografia, antecipadamente, e verifique se há a possibilidade de eles abordarem alguns aspectos dessa cidade (localização geográfica, nome atual, país a que pertence, razões históricas para as mudanças), enfim, buscar integração com outras disciplinas. Embora não seja preponderante tal integração para nosso estudo, pode trazer um maior interesse por parte dos alunos, o que por si só já é um ganho imenso. Além disso, o projeto interdisciplinar é uma proposta constante na prática docente.

Problema 4.

O carteiro de um pequeno vilarejo precisa entregar as cartas aos moradores. O vilarejo fica às margens de um rio e só tem nove casas, conforme a Figura 65.

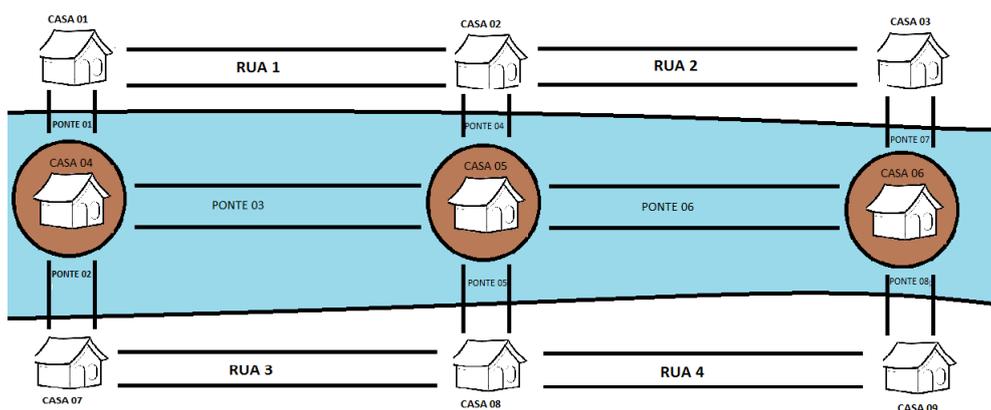


Figura 65: Vilarejo

O desafio consiste em passar uma única vez, se possível, em cada uma das 8 pontes e em cada uma das 4 ruas.

- Escolha uma das casas como ponto de partida;
- A partir dessa casa, tente passar em todas as outras casas, lembrando que você deve passar em todas as pontes e ruas, mas somente uma vez;

- Caso não consiga efetuar o desafio, escolha duas ruas ou duas pontes e exclua ambas. Quais você retiraria? Por qual casa você começaria? Em qual terminaria?

Sugestão para sala de aula: Após o término da atividade, procure verificar junto aos alunos se perceberam alguma semelhança com o Problema das Pontes de Königsberg ou mesmo com a atividade anterior. Caso demonstrem ter feito a associação, siga com os demais problemas, caso não tenham feito a relação, peça que busquem as semelhanças e registre na lousa as semelhanças observadas (corretas ou não). Verifique, por parte dos alunos, a aceitação de cada um dos itens. Caso haja dificuldade na análise de semelhanças, solicite que representem os casos por meio de grafos. Volte a solicitar a comparação.

Nos próximos 3 problemas, ainda estaremos abordando os conceitos de Ciclos Eulerianos e Trilhas Eulerianas, sendo que nos dois próximos (5 e 6) temos apenas uma mudança de cenário e contexto. Dessa maneira, é possível escolher entre trabalhar um ou outro mas não excluimos a possibilidade de trabalhar ambos, até porque, cabem dois (ou mais) temas interessantes e de caráter social: a violência (diversos tipos) e a população carcerária (lei e justiça, punição ou correção, causa e consequência, ...). Nessas discussões, extremamente delicadas, é importante que o professor tenha isenção pois a ideia é proporcionar ao aluno a reflexão, a discussão, o acesso a diferentes pontos de vista, buscando a formação de sua própria visão de mundo. **É evidente que essas discussões não são uma proposta atrelada à aplicação do problema.** Talvez sejam mais apropriadas para o Ensino Médio e sirva de gancho para uma aula de Filosofia, Sociologia, ou seja, apenas ilustramos a potencialidade de um simples problema matemático.

Problema 5.

Um prisioneiro pretende fugir de uma prisão e, para tanto, espera contar com a ajuda de um dos guardas. O guarda em questão passou as seguintes instruções ao prisioneiro.

- Para sair da prisão, precisará passar em todas as celas, todas as salas e pelo refeitório. Cada um desses espaços tem uma chave dentro, e você precisará de todas essas 10 chaves para fugir;
- A saída está numa porta dentro da cela 1, que só abre com as 10 chaves;
- Você nunca pode sair de uma sala pela mesma porta que entrou, caso contrário o alarme irá disparar;

- Você também precisa passar em todas as portas do presídio. Em cada uma delas, existe um botão no canto superior esquerdo que você deve acionar. Novamente, caso isso não seja feito, o alarme dispara (lembre-se que a saída está dentro da cela 1, mas ela não conta como uma das portas, assim para efeito de fuga, considere que a cela 1 tem duas portas. A saída você só vai usar ao final do processo).

Questionamentos: Suponha que o preso está em uma das celas.

- a) O guarda realmente ajudou o prisioneiro? Justifique.
- b) Se o guarda colocasse uma chave a menos, ou seja, se o prisioneiro não precisasse entrar em um desses espaços, ele conseguiria fugir? Qual seria esse espaço?
- c) Se o preso estivesse no refeitório, e a saída não necessariamente estivesse na cela 1, onde deveria estar a saída para que a fuga tivesse sucesso?



Figura 66: Mapa da prisão

Sugestão para sala de aula: Tema transversal: Ética e Cidadania. Em uma conversa informal, porém rodeada de cuidados, discutir com os alunos questões como direitos e deveres e a importância do respeito de ambos para a vida em sociedade. De acordo com o ano em questão (lembramos que a atividade pode ser proposta para o ensino médio, inclusive), podemos propor um trabalho interdisciplinar com professores de Sociologia, Filosofia, Biologia e Matemática. Dentre os diversos desdobramentos que o assunto pode ter, destacamos a população carcerária; o ambiente como fonte de propagação

de doenças; direitos humanos (o que são, quando e por que surgem), são algumas sugestões, porém, ressaltamos a adequação às turmas e o cuidado na abordagem do tema.

Problema 6.

O detetive que estudava grafos.

Residência do bilionário Count Van Diamond, que acaba de ser assassinado. Sherlock Gomes (um conhecido detetive que nas horas vagas é um estudioso da Teoria dos Grafos) foi chamado para investigar o caso.

O mordomo alega ter visto o jardineiro entrar na sala da piscina (lugar onde ocorreu o assassinato) e logo em seguida deixar aquela sala pela mesma porta que havia entrado.

O jardineiro, contudo, afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa.

Sherlock Gomes avaliou a planta da residência e em poucos minutos declarou solucionado o caso.

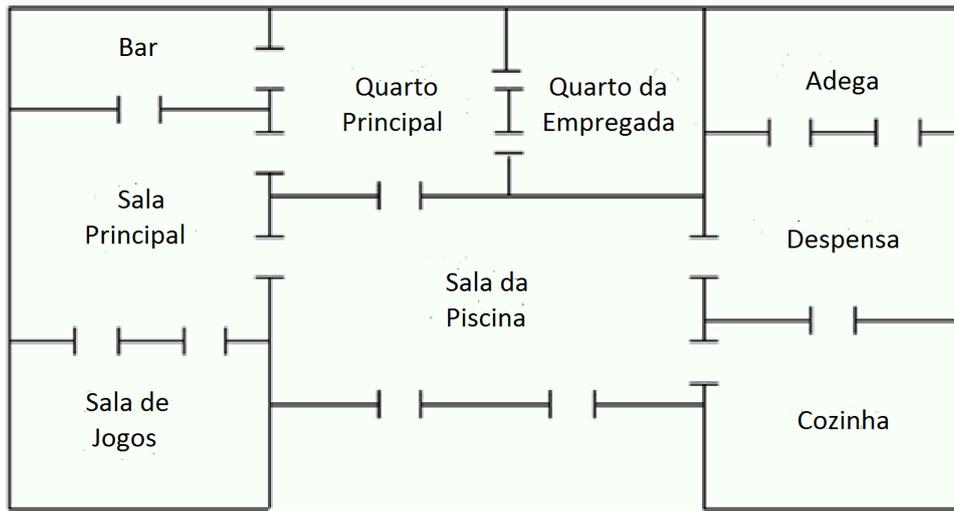


Figura 67: Planta da residência

- Quem poderia ser o suspeito indicado por Sherlock Gomes?
- Qual o raciocínio utilizado pelo detetive para apontar o suspeito?

Sugestão para sala de aula: Mais uma vez, sugerimos o cuidado com a adequação à turma e também na condução do tema, haja visto que uma grande parte de nossos alunos convivem diariamente expostos a diversos tipos de violência. Dito isso, segue a proposta, que sempre pode ser desenvolvida em conjunto com colegas de outras áreas. Promova uma conversa com os alunos sobre violência. Veja o que eles tipificam como violência e coloque no quadro para que todos visualizem. Incentive que verifiquem se não querem acrescentar mais algum tipo. Verifique se na lista aparecem o bullying, a violência psicológica, discriminação, cyberbullying, violência sexual, violência institucional, violência física. A ideia é fomentar um projeto que traga informação (para que possam reconhecer quando expostos) e atitudes (preventivas e de ações), a serem tomadas contra a violência no ambiente escolar e com extensão para vida.

Problema 7.

Em uma cidade muito pequena, com um único caminhão para realizar a coleta de lixo, o prefeito, buscando economizar o dinheiro público, determina a seu secretário que busque uma rota onde o caminhão passe uma única vez em cada rua. Na Figura 68, temos uma representação do mapa por meio de um grafo onde as ligações indicam as ruas e os nós representam pontos de acesso para o caminhão, que deve iniciar e terminar seu trabalho em um mesmo ponto de acesso. Determine:

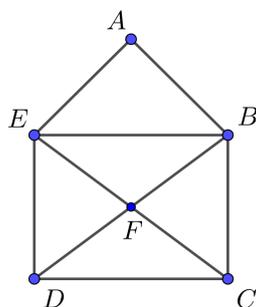


Figura 68: Mapa da cidade representado por meio de um grafo.

- Qual deve ser o ponto de acesso para a realização da tarefa imposta pelo prefeito ao secretário?
- Seria possível iniciar em um nó e terminar em outro de maneira a passar por todas as ruas uma única vez? Em caso afirmativo, quais seriam esses nós?

Sugestão para elaboração de projeto: Aproveite a atividade para iniciar uma discussão a respeito do destino do lixo em sua cidade, cabe um projeto bem interessante

envolvendo várias áreas do conhecimento: Ciências, Artes, Educação Física, Língua Portuguesa e Matemática. Seguem alguns possíveis temas.

- Ciências: descarte inadequado do lixo e o meio ambiente; lixo, uma questão de saúde;
- Educação Artística: confecção e exposição de artes a partir de produtos reciclados;
- Educação Física: produção de brinquedos com material reciclado para jogar, brincar e doar (campanha de arrecadação de brinquedos usados em boas condições para doação em comunidades carentes ou entidades que trabalhem com crianças carentes);
- Leitura e produção de textos; produção de cartazes com frases de conscientização; Leitura interpretativa de charges; elaboração de acrósticos, produção de poesia, apresentação de jogral;
- Matemática:
 - O custo da produção excessiva de lixo (para a natureza e para os cofres públicos);
 - A importância da reciclagem (diminuição de resíduos na natureza e fonte de renda).

Problema 8.

Dadas as peças de um dominó incompleto conforme mostra a Figura 69,

$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{5}{5}$

Figura 69: Dominó incompleto.

pergunta-se:

- a) É possível montar uma sequência, segundo as regras do jogo de dominó, de maneira a não sobrar peças?

- b) Caso seja possível, você seria capaz de dizer, sem montar a sequência, quais seriam os números nas extremidades?

Sugestão para aula: Aqui, um momento de ludicidade dentro da aula, onde podemos confeccionar as peças e propor que, em duplas (devido a quantidade de material), os alunos tentem formar a sequência e dar as respostas obtidas. Sugerimos ainda, que seja estipulado um tempo para a tarefa ser executada (não maior que 15 minutos no total, organização e realização). Após serem dadas as respostas, ainda em posse do material, faça as seguintes perguntas:

- Quantas vezes cada número aparece?
- Quais números aparecem um número par de vezes?
- Quais números aparecem um número ímpar de vezes?
- Você percebe alguma relação entre os valores que ficaram nos extremos da sequência?

Outras sequências podem ser usadas de tal forma que cada grupo tenha uma sequência diferente para analisar e expor seus resultados. Seguem alguns exemplos cujo os números das peças indicadas abaixo estão em correspondência com a Figura 102 apresentada no apêndice B.

- 2, 4, 5, 6, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 27 e 28.
- 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 18, 20, 21, 22, 24 e 25.
- 1, 4, 5, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 26 e 27.
- 3, 4, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 23, 24, 25, 26, 27 e 28.
- 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24 e 28.
- 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 24, 25 e 27.
- sorteio de 16 peças.

Problema 9.

Preencha corretamente o Sudoku.

2		
	3	
		1

Apresentaremos um roteiro de resolução para exemplificar o preenchimento do sudoku 3×3 dado. Em seguida, deixamos como exercício o sudoku 4×4 .

a) Escreva um sudoku genérico.

v_1	v_2	v_3
v_4	v_5	v_6
v_7	v_8	v_9

b) Considere cada quadradinho como um vértice e quadradinhos na mesma linha ou na mesma coluna como vértices adjacentes. Vértices adjacentes não podem ter valores iguais.

c) O valor atribuído a v_1 pode também ser atribuído a $\{v_5, v_6, v_8, v_9\}$.

$v_1 = 2$	v_2	v_3
v_4	$v_5 = 3$	v_6
v_7	v_8	$v_9 = 1$

Note agora que, v_5 e v_9 já têm valores atribuídos no sudoku, restando assim apenas v_6 e v_8 para terem valores iguais ao de v_1 atribuídos.

d) O valor atribuído a v_5 pode ser também atribuído a $\{v_1, v_3, v_7, v_9\}$, mas v_1 e v_9 já têm valores atribuídos, restando assim, apenas v_3 e v_7 para atribuirmos tal valor.

$v_1 = 2$	v_2	v_3
v_4	$v_5 = 3$	v_6
v_7	v_8	$v_9 = 1$

A essa altura já temos claro que os quadradinhos restantes, v_2 e v_4 , não podem, portanto, assumir os valores 2 e 3 e conseqüentemente devem ser iguais a 1.

2	1	3
1	3	2
3	2	1

Uma outra maneira de apresentarmos uma solução é por meio de árvores. Na Figura 70, temos os pontos com valores atribuídos e seus pontos adjacentes que, como já mencionado, devem ter valores diferentes. Daqui, Utilizaremos cores para facilitar a visualização.

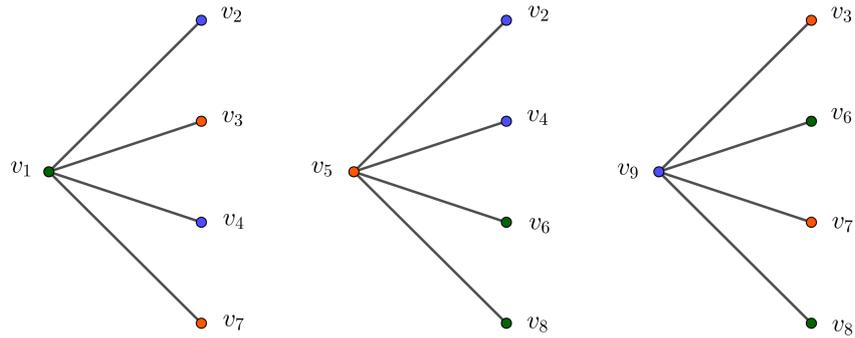


Figura 70: Representação da argumentação por meio de grafos (árvores com coloração de vértices).

Temos três vértices com valores (cores) distintos atribuídos a cada um deles. Assim, se um vértice não pode assumir dois entre esses três valores, necessariamente, terá que assumir o valor restante. Fazendo portanto, a interseção dos vértices que não podem ter atribuídos os valores de v_5 e v_9 , tais vértices terão o valor de v_1 atribuídos. Logo, $v_1 = v_6 = v_8 = 2$, $v_5 = v_3 = v_7 = 3$ e $v_9 = v_2 = v_4 = 1$, conforme solução apresentada anteriormente.

1. Preencha o sudoku 4×4 a seguir. Para isso, faça uma das argumentações apresentadas no exemplo.

2			
		1	
	2		
			4

Problema 10.

Seis amigos se encontram em uma festa. Todos se cumprimentam com apertos de mão. Todos apertam a mão de todos uma única vez. Quantos são, ao todo, os apertos de mão?

A simplicidade do problema por vezes pode obscurecer a riqueza de possibilidades de resolução.

Problema 11.

Usando o menor número possível de cores, pinte a Figura 71 de tal maneira que regiões vizinhas tenham cores diferentes. (Considere que regiões vizinhas têm uma aresta em comum.)

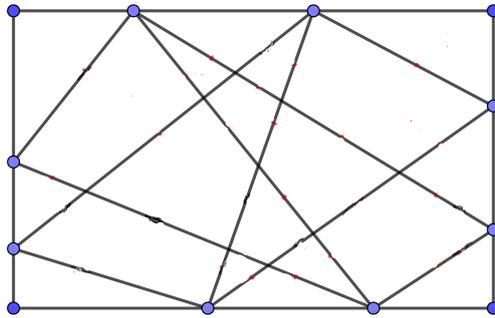


Figura 71: Figura a ser colorida.

Problema 12.

Usando o menor número de cores possível e usando cores diferentes para países que fazem fronteira, pinte o mapa da América do Sul.



Figura 72: Mapa da América do Sul.

Sugestão de atividade interdisciplinar. Acreditamos que a coloração nos propicie uma atividade interdisciplinar com Educação Artística, proporcionando uma atividade prazerosa, se não para todos, acreditamos que para uma maioria de nossos alunos.

Quando propomos um trabalho interdisciplinar com Educação Artística, pensamos em propor o estudo das cores (primárias, secundárias, terciárias, quentes, frias, etc.), alguma releitura, ou mesmo a confecção de quadros. Veja Figura 73.

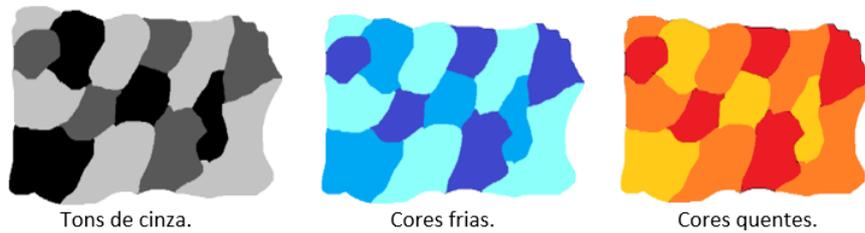


Figura 73: Estudo das cores.

5.3 IDENTIFICANDO O USO DE GRAFOS NO COTIDIANO

Buscaremos nessa seção apresentar algumas situações, que não são necessariamente problemas (mas inclusive), em que o leitor terá sua atenção voltada para o uso de grafos.

Situação 1 - Um policial vai patrulhar a pé as ruas de um bairro, cuja planta é apresentada na Figura 74. Ele pretende passar em cada rua do bairro uma única vez, partindo e terminando em P. Caso não seja possível, como ele deve proceder para repetir ruas um número mínimo de vezes?



Figura 74: Mapa do bairro.

Uma possível solução para esse problema logístico passa pela origem da Teoria dos Grafos, quando em 1736, o suíço Leonhard Euler, resolveu o Problema das Pontes de Königsberg (solução já apresentada nesse trabalho). Atente para a resolução que apresentaremos a partir de agora.

Vamos usar um grafo para representar o mapa do bairro. Nesse grafo, indicaremos o grau de cada vértice sem nomeá-los, conforme a Figura 75.

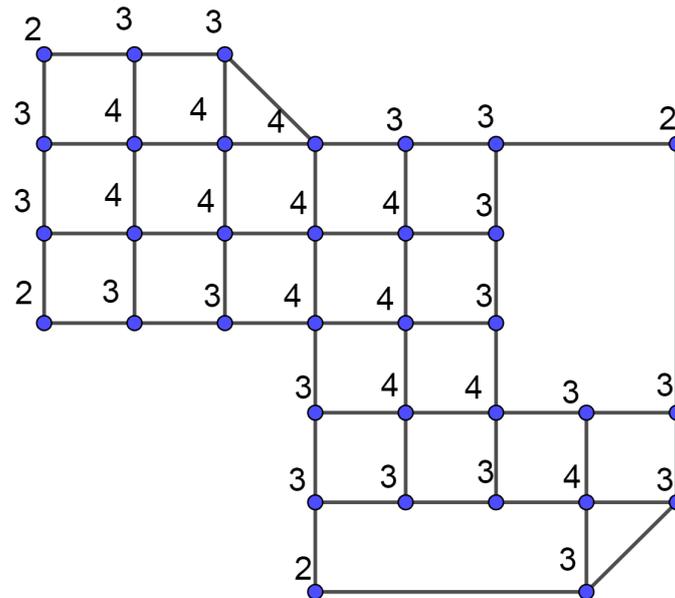


Figura 75: Grafo representativo do bairro.

Observando o grau dos vértices, sabemos não tratar-se de um grafo euleriano, logo, não será possível passar uma única vez em cada rua.

Para podermos minimizar a patrulha, vamos acrescentar uma aresta aos vértices de grau ímpar tornando-os vértices de grau par e, assim, passando a ter um grafo euleriano.

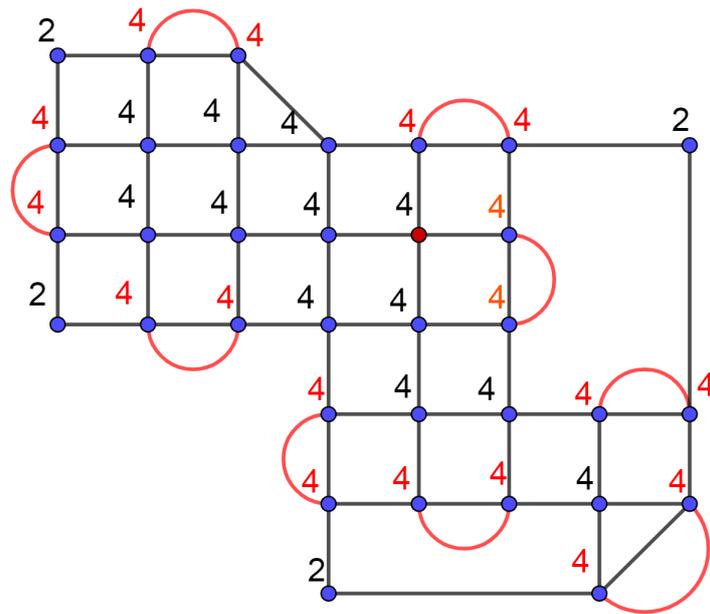


Figura 76: Grafo que soluciona o problema.

Cada aresta acrescentada indica uma nova passagem pela rua, dessa maneira, o policial terá que passar duas vezes em, no mínimo, nove ruas.

Situação 2 - Você se depara com a fotografia de uma placa de circuitos integrados e outras duas que parecem ser uma maneira simplificada de representar a primeira. Eles eliminam informações periféricas e se concentram em pontos e ligações entre eles, de maneira a não ocorrerem cruzamentos, minimizando os custos e aumentando a velocidade de produção.

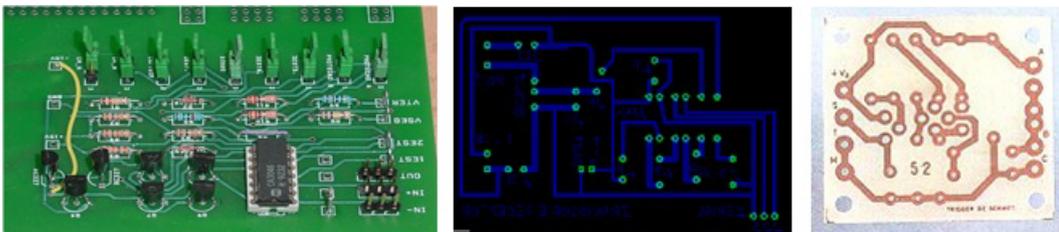


Figura 77: Esquemas de ligações que evitem cruzamentos são essenciais para diminuir os custos e aumentar a velocidade de produção.

Sim, a Teoria dos Grafos está presente nos circuitos elétricos. Em 1847, o alemão Gustav Robert Kirchhoff, físico nascido em Königsberg, teve contato

com o trabalho de Euler e aplicou a ideia no estudo de circuitos elétricos dando origem a Teoria das Árvores.

Situação 3 - Em uma aula de Química é exposto o seguinte:

- A Figura 78 representa as moléculas do metano (CH_4) e do propano (C_3H_8).

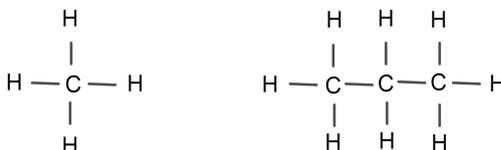


Figura 78: Metano e propano (fórmula estrutural).

- a) Existem duas moléculas com fórmula C_4H_{10} (isômeros). Desenhe os grafos correspondentes.

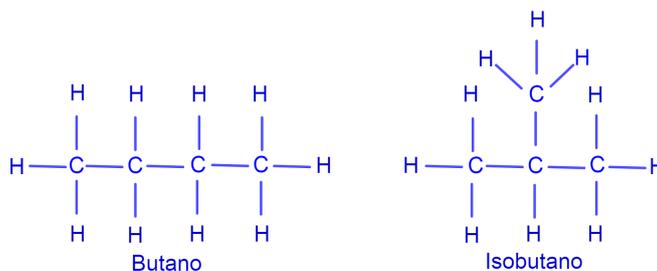


Figura 79: Duas substâncias representadas por uma mesma fórmula molecular porém, com diferentes propriedades e características estruturais.

O britânico Arthur Cayley, em 1857, aplica o conceito de árvore à química orgânica. Agora, com um novo olhar para estas estruturas, podemos propor um novo item.

- b) Interpretando esses diagramas como grafos, o que podemos dizer sobre os nós que representam os átomos de carbono (C) e os átomos de hidrogênio (H)? *Os nós representados por C têm grau 4 (o carbono é tetravalente), já os nós representados por H, têm grau 1 (o hidrogênio é monovalente).*

Situação 4 - Um caixeiro viajante trabalha em 4 cidades conhecidas e quer descobrir o menor caminho que lhe permita visitar cada cidade exatamente uma vez e então voltar

	A	B	C	D
A	0	100	120	150
B	100	0	200	180
C	120	200	0	110
D	150	180	110	0

Tabela 4: Distâncias entre as cidades.

à cidade de partida. Sabe-se que as distâncias entre as cidades são dadas pela tabela, em quilômetros

a) Encontre tal caminho sabendo que o caixeiro inicia no ponto A.

Os possíveis caminhos entre as cidades são: (consideramos aqui caminhos inversos como iguais por representarem a mesma distância, não levando em conta a ordem de acesso as cidades).

$$A - B - C - D - A = A - D - C - B - A = 100 + 200 + 110 + 150 = 560.$$

$$A - B - D - C - A = A - C - D - B - A = 100 + 180 + 110 + 120 = 510.$$

$$A - C - B - D - A = A - D - B - C - A = 120 + 200 + 180 + 150 = 650.$$

Logo, o melhor caminho será $A-B-D-C-A$ (ou $A-C-D-B-A$) com um percurso de 510km.

Os dados da Tabela 4 poderiam ser representados por meio de um grafo, veja Figura 80, facilitando assim sua visualização.

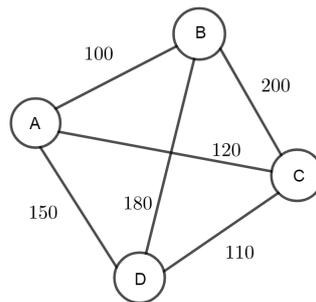


Figura 80: Representação, por meio de um grafo, das cidades e suas respectivas distâncias em quilômetros.

Há algum tempo que os grafos são utilizados para determinar percursos. Em 1856, Hamilton inventou um jogo que chamou de “Icosain Game” e que consistia em

descobrir uma maneira de, partindo de Londres, visitar cada cidade do “mundo” exatamente uma vez. Entenda por “mundo” o dodecaedro usado como tabuleiro, no qual os vértices representam as cidades e as arestas representam os caminhos entre as cidades.

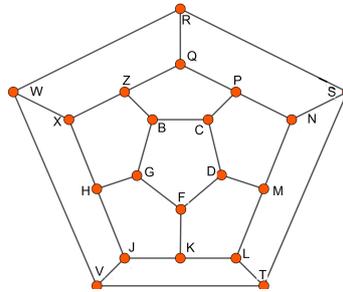


Figura 81: Representação do tabuleiro do jogo Icosiano.

Situação 5 - Você chega a uma estação do metrô em uma cidade que você está visitando pela primeira vez. Digamos que você sabe para qual estação deve ir porém, surge uma dúvida: "Será necessário fazer alguma baldeação?". Você obviamente pode buscar essa informação com alguém a seu lado, ou mesmo com um funcionário do metrô, mas com o mapa ali, a sua disposição, uma simples leitura fará desaparecer sua insegurança.



Figura 82: Mapa do Metrô de São Paulo.

O mapa do metrô é de simples leitura por apresentar apenas as estações (nós/vértices) onde ocorrem as paradas para embarque e desembarque e uma ligação entre elas (ligações/arestas), indicando assim a trajetória entre estações e proporcionando ao usuário dos serviços a escolha do trajeto que melhor lhe convém. O desenho do mapa é portanto um grafo.

Situação 6 - Lá está você navegando na internet, saltando de uma página para outra por meio de links. Percebe aqui a relação com os grafos? Sim, isso mesmo, as páginas são os nós (vértices) e os links são as ligações (arestas).

Situação 7 - No Facebook, se você é amigo de determinada pessoa você adiciona essa pessoa e passa a compartilhar com ela mensagens, fotos, etc. Por vezes você recebe sugestões de pessoas que você pode conhecer, o critério usado é o número de amigos comuns entre você e essas pessoas. Então, no Facebook, as pessoas são os nós (vértices) e a amizade entre elas a ligação (aresta).

Situação 8 - Ocorre o rompimento de um duto de água em uma rua.

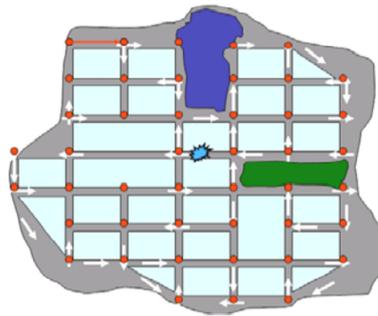


Figura 83: Local do rompimento.

Muito embora fique evidente a necessidade do conserto, outra ação deve precedê-lo. Por tratar-se de via pública, será necessária a interdição dessa via e consequentemente um desvio, com mudança de mão, ou com um sistema siga e pare.

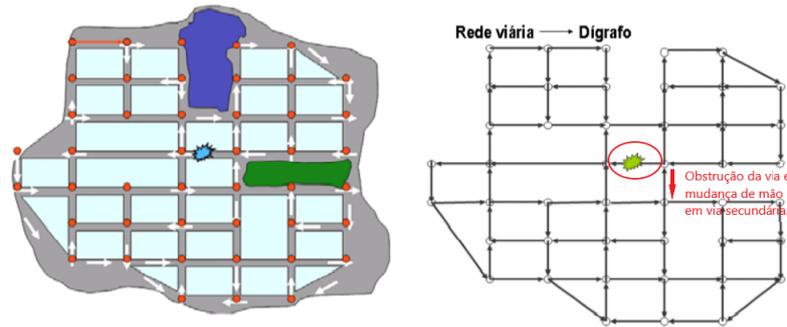


Figura 84: Ações: interdição e redirecionamento do trânsito.

Caso o sistema seja autômato os registros circulados são fechados assim que o problema é identificado, caso contrário, dependendo da dimensão do rompimento, procede-se um corte total do abastecimento até que os registros sejam fechados manualmente. O abastecimento é retomado exceto no local do reparo a ser feito e na região 2 (Área 2), indicada na Figura 85.

Ação: Recompôr o funcionamento da rede de água da região.

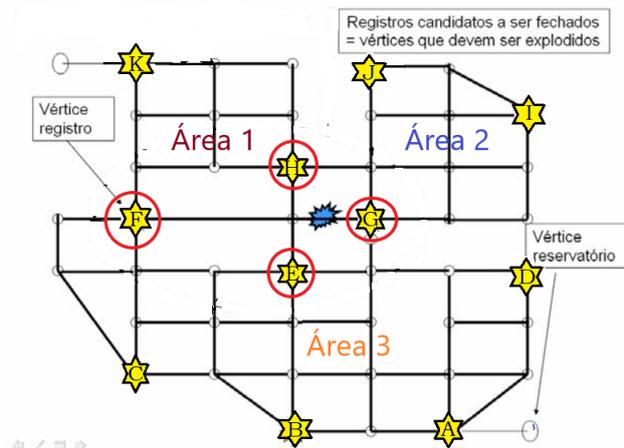


Figura 85: Registros a serem fechados (automática ou manualmente).

Procede-se o conserto, abrem-se os registros reestabelecendo o fornecimento de água, libera-se o trânsito retornando a sua forma original.

Com todo esse contexto, pode até passar despercebido mas fizemos uso de um grafo orientado (dígrafo) que indicava o sentido do trânsito, fundamental para as medidas de redirecionamento a serem tomadas. Logo a seguir, utilizamos um

grafo com a localização de registros, os quais nos possibilitaram fazer a escolha do fechamento daqueles que minimizariam o problema de desabastecimento.

Situação 9 - Um concurso público abriu inscrição para sete cargos que denominaremos pelas letras A, B, C, D, E, F e G. As provas ocorrerão em um mesmo dia, em quatro horários distintos e cada candidato poderá se inscrever para, no máximo, dois cargos.

Após o período de inscrição, foi feito o levantamento e observou-se 16 grupos. Observe a tabela:

Grupo	Cargo	Grupo	Cargo	Grupo	Cargo	Grupo	Cargo
I	A e B	V	B e C	IX	C e D	XIII	D e F
II	A e C	VI	B e D	X	C e F	XIV	E e F
III	A e D	VII	B e E	XI	C e G	XV	E e G
IV	A e G	VIII	B e G	XII	D e E	XVI	F e G

Nessas condições, será possível distribuir as provas em horários de maneira que um candidato não tenha duas provas no mesmo horário?

Uma possibilidade de resolver de maneira relativamente simples tal situação é o uso de coloração de vértices em um grafo. Considerando cada cargo como sendo um vértice e a inscrição para dois cargos são indicadas por vértices adjacentes, obtemos o seguinte grafo.

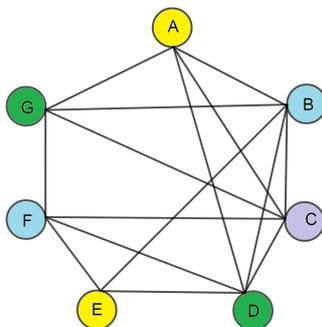


Figura 86: Solução pela coloração de vértices.

Logo, a resposta é sim, e uma possível distribuição é dada na tabela a seguir.

1º horário	A e E
2º horário	B e F
3º horário	G e H
4º horário	C

O problema das quatro cores foi proposto em 1852 pelo sul-africano Francis Guthrie: Todo mapa pode ser colorido usando-se apenas quatro cores. Apenas em 1878, o britânico James Joseph Sylvester utiliza pela primeira vez o termo grafo.

Em 1879, o britânico Alfred Bray Kempe dá a primeira demonstração errada, mas famosa, do problema das 4 cores e em 1880, o escocês Peter Guthrie Tait divulgou uma segunda demonstração para o problema das 4 cores, mas também falha.

Em 1890, o britânico Percy John Heawood prova o teorema das 5 cores.

Somente em 1977, o americano Kenneth Ira Appel e o alemão Wolfgang Haken resolvem o problema das 4 cores por meios computacionais.

Diversas outras contribuições são feitas no decorrer dos anos porém, a Teoria dos Grafos passa a ter maior desenvolvimento e aplicabilidade com o advento do computador.

Apesar de ter origem reconhecida no trabalho de Euler, buscamos deixar claro que a Teoria dos Grafos é uma construção coletiva com diversas contribuições de pessoas com nacionalidades diferentes e que, embora não mencionados até então, erros foram cometidos no decorrer dessa construção. Fatos óbvios para os leitores mas que não o são para nossos alunos, daí chamar atenção para tais fatos. Consideramos fundamental que nossos alunos compreendam, entre outras coisas, que a matemática se faz por um processo coletivo, por vezes (embora nem sempre) para resolver problemas, e que o erro é parte natural e importante de qualquer processo de construção.

A

APÊNDICE A

A.1 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO.

1. a) $g(A)=3$; $g(B)=2$; $g(C)=4$; $g(D)=3$; $g(E)=4$.
b) $g(G)=16$.
c) 8 ligações.
d) Sim, há um laço em E.
e) a seguir:
 - i. C: A, B, D, E.
 - ii. E: C, D, E.
 - iii. B: A, C.
 - iv. A: B, C, D.
 - v. D: A, C, E.

2. Matriz preenchida.

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	1	0	0
C	1	1	0	1	1
D	1	0	1	0	1
E	0	0	1	1	1

3. a) Resposta pessoal.

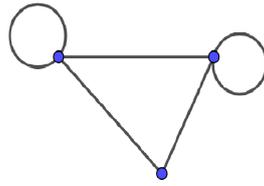


Figura 87: Uma possível resposta.

b) Resposta pessoal.

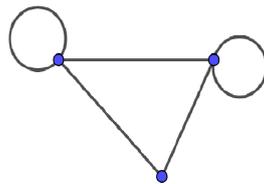


Figura 88: Uma possível resposta.

c) Resposta pessoal.

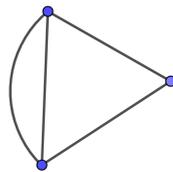


Figura 89: Uma possível resposta.

4. Resposta pessoal (desde que atendidas as condições de adjacência da tabela).

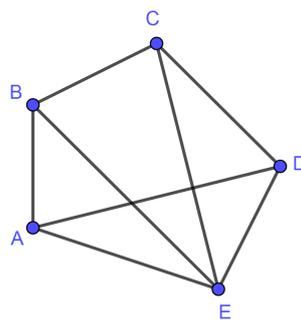


Figura 90: Uma possível resposta.

5. a) A resposta é a matriz a seguir.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	1	0	0	1	0	1	0
B	1	0	0	0	1	0	1	0
C	0	0	0	1	0	1	1	0
D	0	0	1	0	1	0	0	1
E	1	1	0	1	0	0	0	0
F	0	0	1	0	0	0	0	1
G	1	1	1	0	0	0	0	1
H	0	0	0	1	0	1	1	0

b) O grafo complementar está representado em vermelho. (O grafo original pontilhado não é parte da resposta).

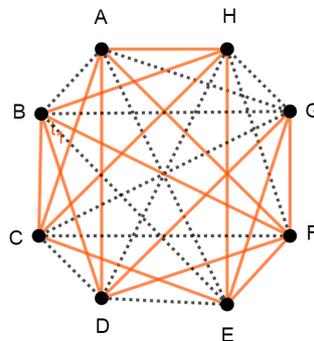


Figura 91: Grafo original, pontilhado, e seu complementar em vermelho.

- c) Os jogos ainda não realizados.
- d) 28 jogos.
6. a) 3 ligações.
- b) 10 ligações.
- c) 21 ligações.
- d) 45 ligações.
- e) $\frac{n(n-1)}{2}$.
7. 21 ligações.
8. Um grafo sem laços ou ligações múltiplas atinge o número máximo de ligações se for um grafo completo. No caso de um grafo com 7 vértices, o número máximo de ligações é 21. Portanto, a resposta é não.

9. A representação é pessoal mas devem ser grafos completos (de cada escola é possível acessar qualquer outra sem, necessariamente, precisar passar pelas demais). O mesmo raciocínio serve para o item (b). Teremos um K_6 e um K_5 respectivamente.
- a) Seis vértices (Escolas: Napoleão, A Caminho da Luz, Antunes Correa, Albert Sabin, 1º de Maio e Pastor Paiva).
- b) Cinco vértices (já citados no enunciado).

A.2 RESPOSTAS DOS DESAFIOS.

1. Por tratar-se de um exercício intuitivo, espera-se que o aluno descreva todos os caminhos indicando a soma em cada caso.
- a) Casa da Maria \rightarrow praça \rightarrow campinho \rightarrow mercado \rightarrow escola $\Rightarrow 3 + 5 + 3 + 1 = 12$;
- b) Casa da Maria \rightarrow praça \rightarrow mercado \rightarrow escola $\Rightarrow 3 + 7 + 1 = 11$;
- c) Casa da Maria \rightarrow praça \rightarrow mercado \rightarrow livraria \rightarrow escola $\Rightarrow 3 + 7 + 1 + 1 = 12$;
- d) Casa da Maria \rightarrow padaria \rightarrow açougue \rightarrow livraria \rightarrow mercado \rightarrow escola $\Rightarrow 4 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$;
- e) Casa da Maria \rightarrow padaria \rightarrow açougue \rightarrow livraria \rightarrow escola $\Rightarrow 4 + 2 + 2 + 1 = 9$;
- f) Casa da Matia \rightarrow padaria \rightarrow farmácia \rightarrow livraria \rightarrow mercado \rightarrow escola $\Rightarrow 4 + 3 + 1 + 1 + 1 = 10$;
- g) Casa da Matia \rightarrow padaria \rightarrow farmácia \rightarrow livraria \rightarrow escola $\Rightarrow 4 + 3 + 1 + 1 = 9$.
2. Iniciaremos completando a Figura 62 conforme solicitado no problema.

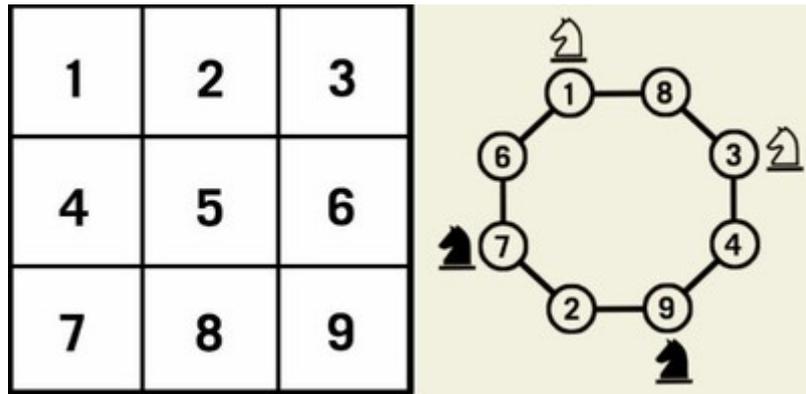


Figura 92: Figura completa com os movimentos dos cavalos.

- a) A figura mostra que rotacionando as peças teremos êxito em inverter as posições conforme solicitado no problema.
 - b) Não é possível. Basta proceder de maneira similar. Veremos que as posições, em razão da intercalação de cores, vão se alternando sem retornar a configuração original, apresentada na Figura 60.
3.
 - a) Após algumas tentativas o aluno deve concluir que não;
 - b) ligação a ser retirada deve ser a que liga os vértices C e D.
 4. Inicialmente o desafio não pode ser concluído, sendo necessária a remoção sugerida de duas pontes ou duas ruas. Muito embora haja a possibilidade de remover as pontes 4 e 5, consideramos como uma escolha ideal a retirada das pontes 3 e 6, assim, o trajeto poderia começar na casa 2 e terminar na casa 8, cumprindo as condições propostas.
 5.
 - a) Não.
 - b) Sim, na porta de acesso entre a sala de força e o refeitório.
 - c) Na sala de força.
 6.
 - a) O jardineiro.
 - b) Não seria possível o jardineiro ter passado por todas as portas uma única vez como afirmou. Se representarmos a planta por meio de um grafo, teremos dois vértices de grau ímpar (quarto principal e Sala principal) o que inviabiliza o depoimento do jardineiro, já que o trajeto não tem início e nem fim em nenhum desses cômodos.

7. Sim, poderia iniciar em D e terminar em C ou vice versa.
8. a) Sim.
b) As extremidades seriam compostas pelos números 2 e 6;
9. Temos mais que uma solução possível.

v_1	v_2	v_3	v_4
v_5	v_6	v_7	v_8
v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}

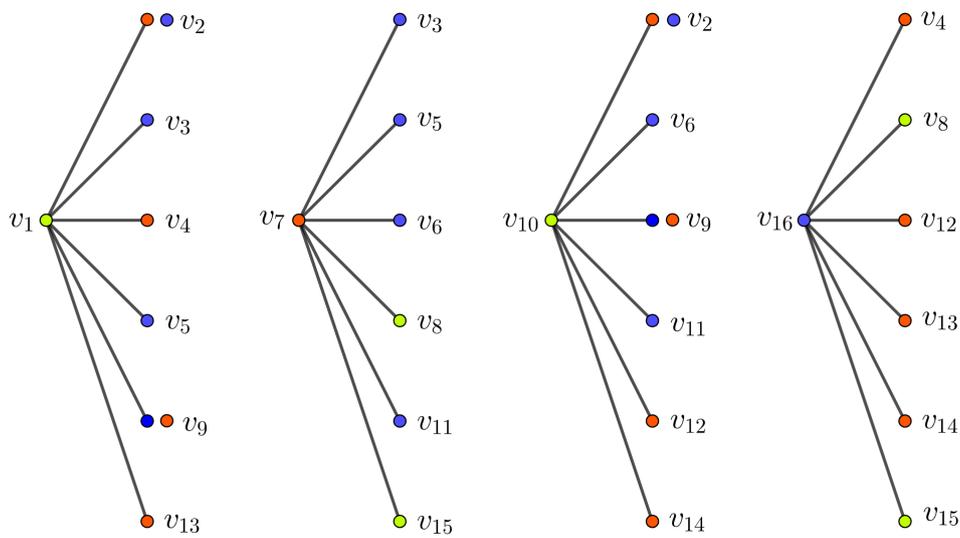


Figura 93: Grafos para resolução de Sudoku 4×4

Fazendo as interseções teremos as seguintes situações: $v_1 = v_8 = v_{10} = v_{15} = 2$ (valores fixos, ou seja, não admitem outras posições).

Por outro lado, para v_7 , devemos fazer opções em que, algumas escolhas levam a algumas exclusões. É o caso de v_2 . Se admitirmos $v_2 = v_7$, estaremos excluindo v_4, v_9 e v_{14} . Isso não será um problema, nos levará apenas a uma solução distinta de quem opte por fazer $v_2 = v_{16}$. Feita a opção, manteremos aqui a primeira igualdade, obteremos $v_7 = v_2 = v_{12} = v_{13} = 1$. Feito isso, a tabela propõe o preenchimento de tal maneira que bastará um pouco de atenção para fazê-lo de maneira correta.

2	1		
		1	2
	2		1
1		2	4

Uma sequência de preenchimento seria $v_4 = v_{14} = v_{11} = v_5 = 3$ o que nos leva a $v_{16} = v_3 = v_6 = v_9 = 4$, finalizando assim a atividade.

2	1	4	3
3	4	1	2
4	2	3	1
1	3	2	4

Como há mais de uma solução possível, sugerimos que alunos que tenham obtido solução diferente da exposta, apresentem sua solução para os demais alunos.

10. O problema possibilita diferentes abordagens em sua solução, acreditamos que ele pode aparecer em qualquer ano do Ensino Fundamental 2 e até mesmo do Ensino Médio, tendo em vista tratar-se de uma Combinação. Assim, vamos sugerir algumas soluções adequadas, em nossa opinião, ao ano correspondente. Para o sexto ano, sugerimos o uso de árvores conforme a Figura 94.

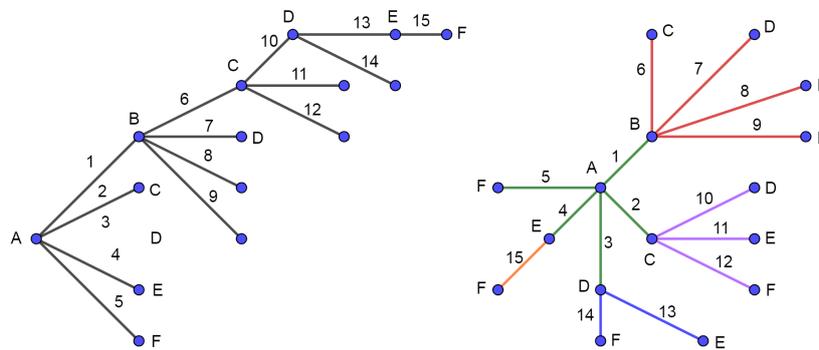


Figura 94: Resolução por meio de árvores.

Para o sétimo ano, sugerimos o uso de tabela, em que, podemos propor o preenchimento com 0 (quando não ocorre aperto de mão) ou 1 (quando ocorre o aperto de mão), tal procedimento deve facilitar sua compreensão quando for apresentado à matriz de adjacências. Ressaltem que o aperto de mão AB e BA é o mesmo, logo, devemos lembrar que o total obtido deve ser dividido por 2 (em momento oportuno terá certa obviedade dizer que $g(G) = 2A$, é o que acreditamos).

	A	B	C	D	E	F	Soma por linha
A	0	1	1	1	1	1	5
B	1	0	1	1	1	1	5
C	1	1	0	1	1	1	5
D	1	1	1	0	1	1	5
E	1	1	1	1	0	1	5
F	1	1	1	1	1	0	5

$$(6 \times 5) \div 2 = 15$$

A construção e a leitura de uma tabela de dupla entrada por si só já é um ganho. A ideia de usar 0 e 1, proporciona uma possibilidade de discutir o sistema binário e outras bases numéricas. Podemos ainda expor a tabela como um recurso para o cálculo computacional e, partindo daí discutir unidades de medidas (bit, byte, K-byte, etc.).

Para o oitavo ano, a proposta é o uso de seqüências, podendo ou não evoluir para modelagem, sempre a critério do professor.

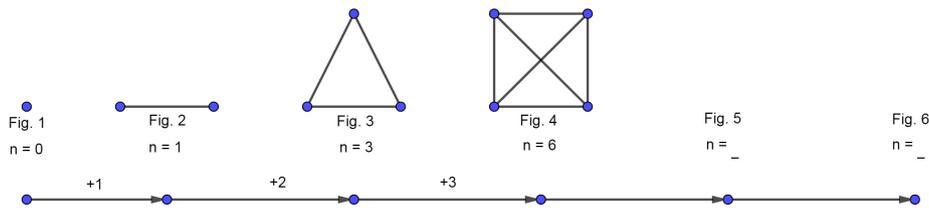


Figura 95: seqüências

Como vimos, trata-se de um desafio muito versátil. Geometricamente, podemos dizer que sua solução é dada pelo número das diagonais de um polígono somado ao número de lados desse polígono. Nesse caso, deveríamos ter polígonos de n lados, $n \geq 3$.

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2} + n \Rightarrow \frac{n^2 - 3n + 2 \cdot n}{2} \Rightarrow \frac{n \cdot (n - 1)}{2}.$$

Observe que a fórmula resultante pode ser aplicada inclusive nos casos em que $n = 1$ ou $n = 2$.

11. A resposta é dada na seqüência apresentada na Figura 96.

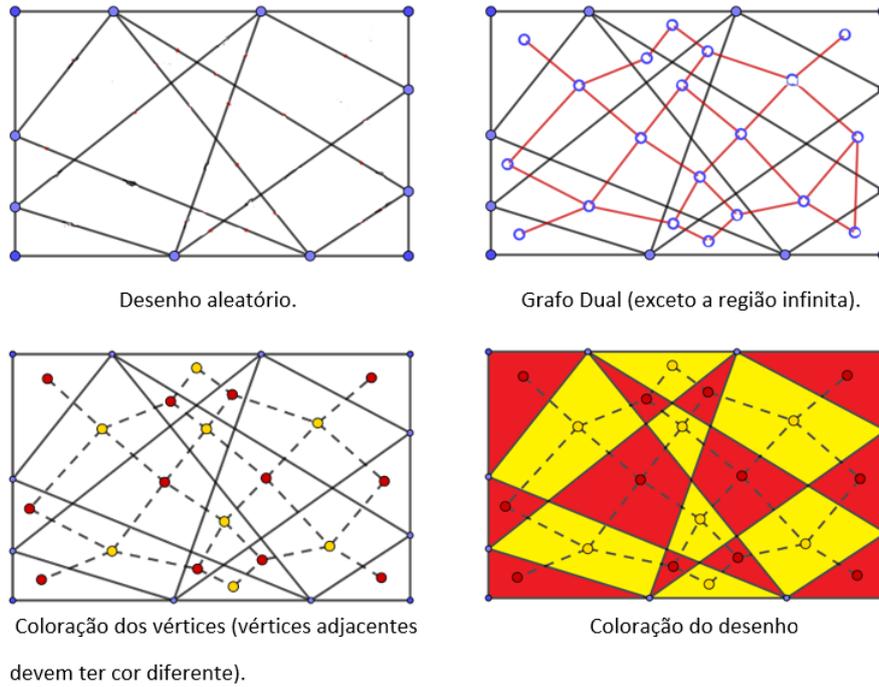


Figura 96: Procedimentos para resolução.

12. Seguindo os mesmos procedimentos, devemos obter um grafo similar ao que segue na Figura 97 e a partir daí, colorir o mapa conforme solicitado.

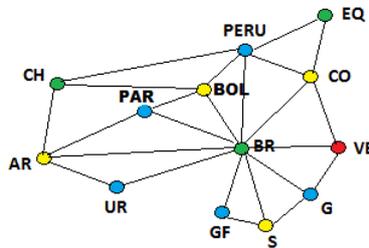


Figura 97: Uma possível representação.

B

APÊNDICE B

B.1 MODELO.

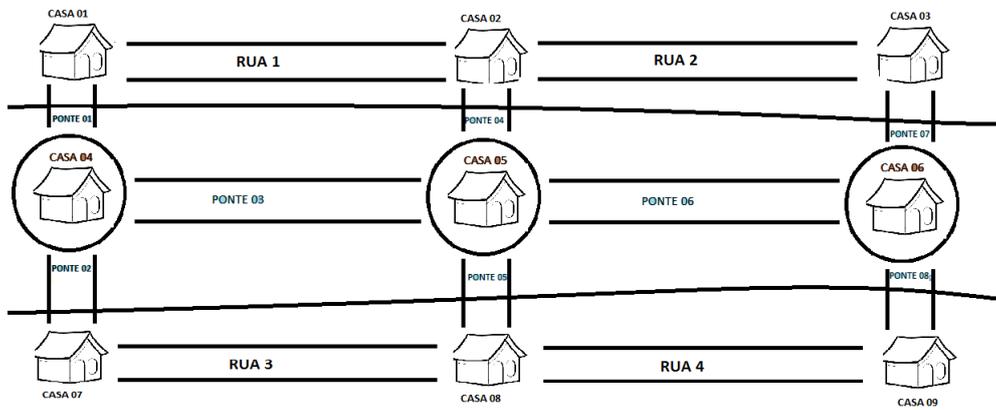


Figura 98: Vilarejo

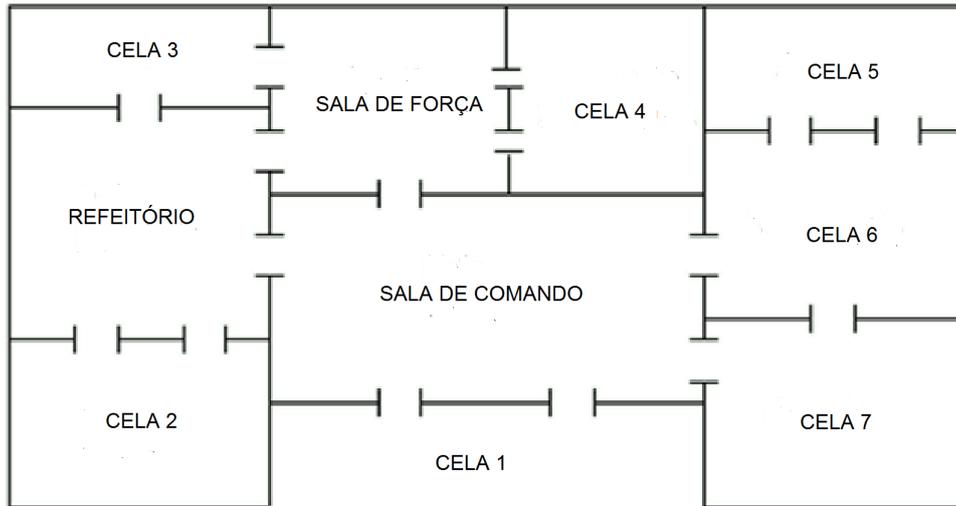


Figura 99: Mapa da prisão.

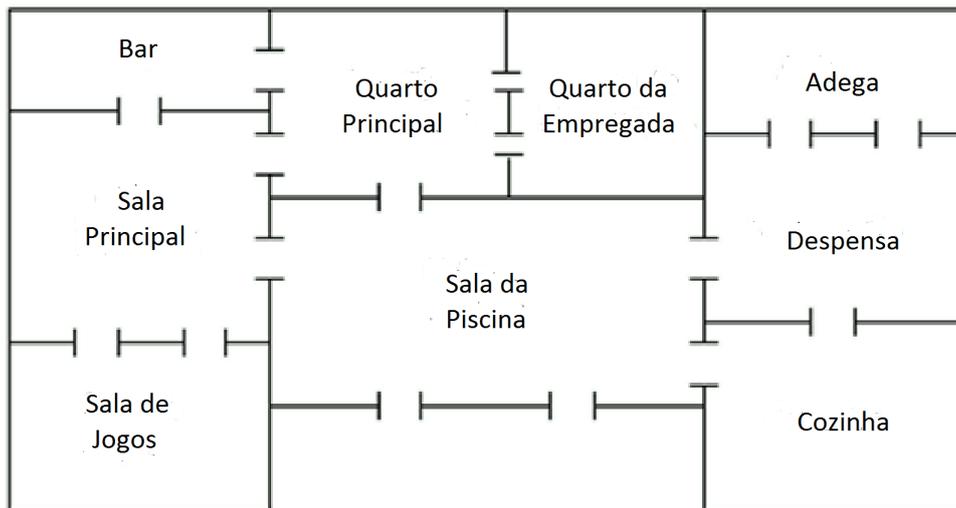


Figura 100: Planta da residência.

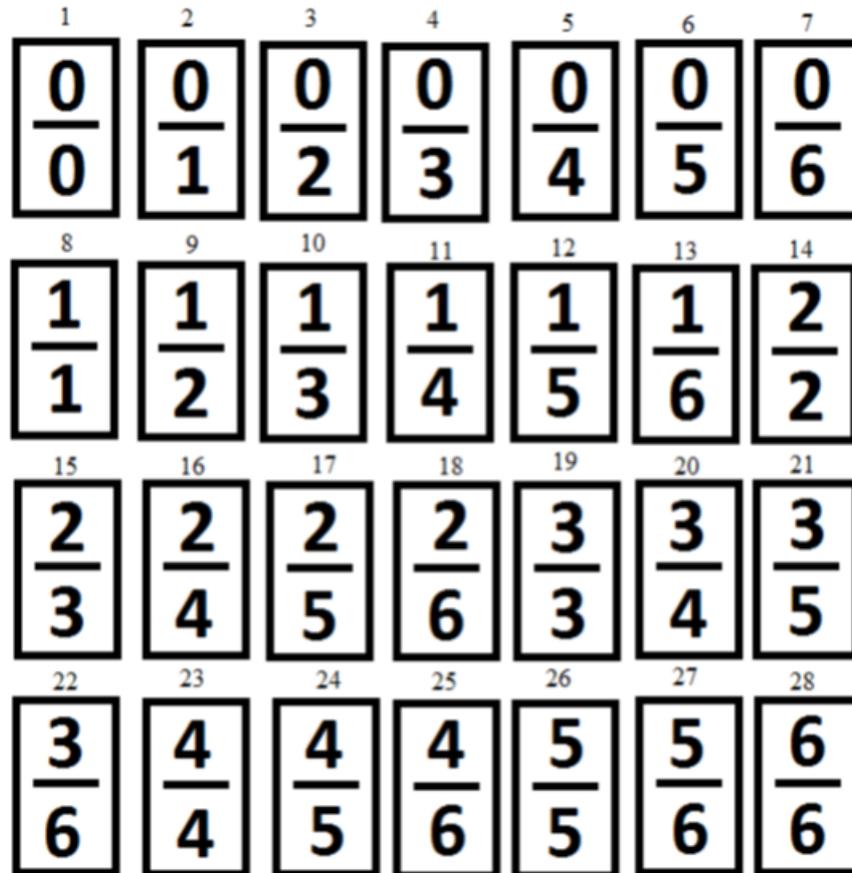


Figura 101: Modelo para atividade do dominó.

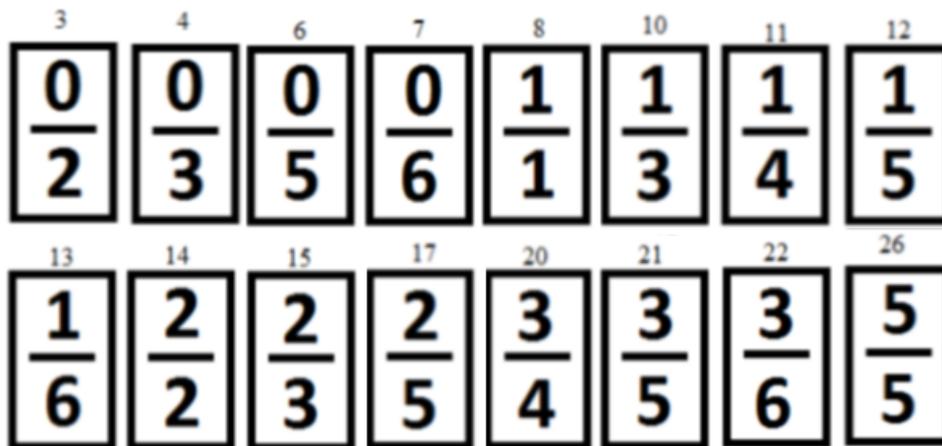


Figura 102: Modelo de dominó incompleto.



Figura 103: Mapa da América do Sul.

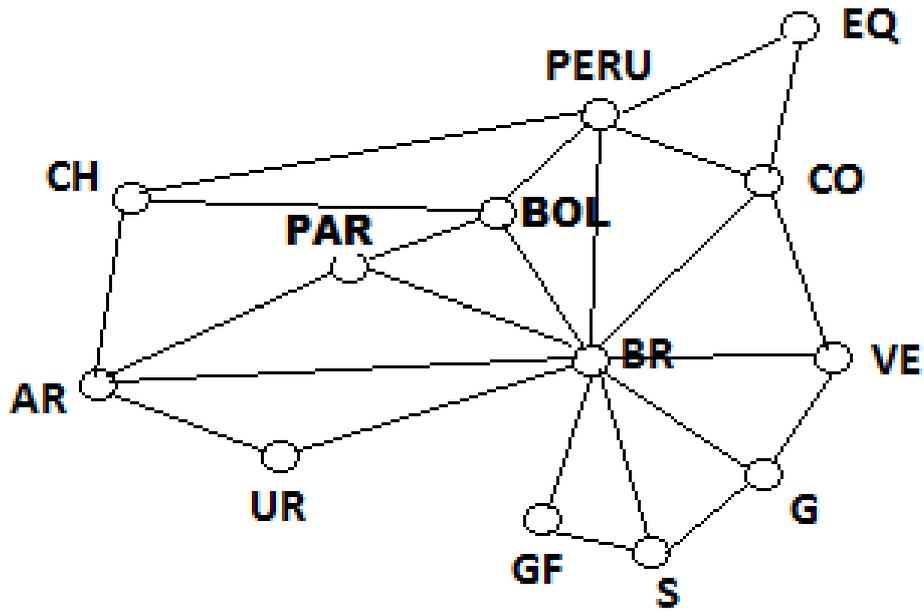


Figura 104: Um possível grafo para coloração do mapa da América do Sul.

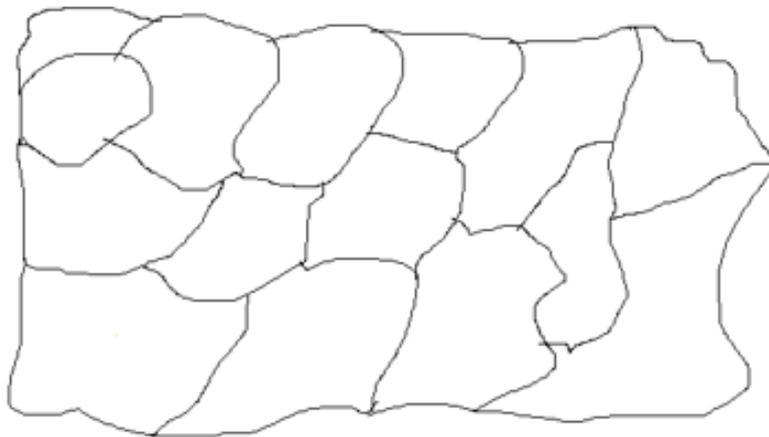


Figura 105: Coloração.

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Algumas aplicações da teoria dos grafos*, Rel. Téc., Outubro 2008.
- [2] Shaun V. ALTI, *Understanding Topology: A Practical Introduction*, JHU Press, 2018.
- [3] Bruno Nogueira Cardoso, *Grafos Eulerianos na Educação Básica*, Tese de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017.
- [4] Bruno Cesar Sá da Silva, *Emparelhamento em Grafos Bipartidos no Ensino Médio*, Tese de Mestrado, IMPA-Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - RJ, 2016.
- [5] Sheila Morais de Almeida e Mayara Omai, *Teoria dos Grafos - Aula 3 - Planaridade*, 2018.
- [6] Ricardo de Almeida Mori, *Grafos: Planaridade e projeto de ensino*, UFABC-PROFMAT, 2015.
- [7] Adriana Priscila de Brito, *Grafos, a fórmula de Euler e os poliedros regulares*, Tese de Mestrado, UFRPE - Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2014.
- [8] José Carlos Eidam e outros, *Um passeio pela teoria dos grafos*, UFPR, 2018.
- [9] Prof. José Carlos Eidam, *Um passeio pela teoria dos grafos*, 2018.
- [10] Samuel Jurkiewicz, *Grafos - Uma Introdução In Apostilas PIC 2012 - OBMEP*, 2009.
- [11] Cláudio Leonardo Lucchesi, *Introdução à Teoria dos Grafos*, IMPA, 1979.
- [12] Jonathan Gil Müller, *Teoria dos Grafos Para o Ensino Fundamental:Desafios Lúdicos*, Tese de Mestrado, Universidade Regional de Blumenau, 2015.
- [13] Min Yan, *Introduction to topology*, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016.