



ROBERVAL LAES ALVES BANDEIRA

GRUPO DE ROTAÇÕES E DE LORENTZ COM APLICAÇÕES

Santo André, 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

ROBERVAL LAES ALVES BANDEIRA

GRUPO DE ROTAÇÕES E DE LORENTZ COM APLICAÇÕES

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ROBERVAL LAES ALVES BANDEIRA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI.

SANTO ANDRÉ, 2020

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

SANTO ANDRÉ, 27 de JANEIRO de 2021.

ROBERVAL LAES ALVES BANDEIRA 
Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)

SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI 
Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Bandeira, Roberval Laes Alves
Grupo de Rotações e de Lorentz com aplicações / Roberval Laes
Alves Bandeira. — 2020.

114 fls.

Orientador: Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2020.

1. Grupo de Rotações. 2. Grupo de Lorentz. 3. Espaço de
Minkowski. 4. Paradoxo dos Gêmeos. I. Lodovici, Sinuê Dayan
Barbero. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROEMAT, 2020. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Fundação Universidade Federal do ABC

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP

CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, ROBERVAL LAES ALVES BANDEIRA realizada em 30 de Outubro de 2020:

Prof.(a) **ALEXANDRE LYMBEROPOULOS**

Prof.(a) **MARCUS ANTONIO MENDONCA MARROCOS**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) **RAFAEL DE MATTOS GRISI**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) **ROSA MARIA DOS SANTOS BARREIRO CHAVES**
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) **SINUE DAYAN BARBERO LODOVICI**
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

À Renata e Livia.

AGRADECIMENTOS

O meu primeiro agradecimento é destinado aos meus pais que, mediante a esforços, garantiram minha subsistência nos anos iniciais de minha vida e deram condições de continuar meus estudos durante o Ensino Básico.

De forma especial, agradeço à minha esposa e eterna companheira Renata e à minha filha Lívia pela compreensão às noites que não pude estar em casa presente durante o curso e preparação desta dissertação. Minha maior motivação sempre foi vocês!

Imensa gratidão ao meu orientador professor Dr. Sinuê Dayan, primeiramente por aceitar em orientar esse trabalho, pela paciência em apontar as diversas melhorias e pela compreensão em momento difícil que passei no ano de 2019 sempre me incentivando a continuar. Muito obrigado grande mestre!

Agradeço ainda aos meus colegas de curso de PROFMAT com quem tive o prazer de conviver e fazer amizades.

Meu agradecimento à todos os professores do PROFMAT da UFABC que contribuíram para aprimorar meus conhecimentos, ministrando suas aulas com dedicação incentivando assim a constante melhoria do Ensino de Matemática.

Não poderia deixar de agradecer também à Sociedade Brasileira de Matemática pela implementação do programa de Mestrado PROFMAT que ano a ano contribui para melhorar a formação do professor de Matemática.

Finalmente, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Muito obrigado!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

“É difícil passar a quem não sabe matemática a sensação da beleza profunda da natureza.”

(Richard P. Feynman, Sobre as Leis da Física)

RESUMO

Este trabalho explora dois grupos de matrizes ortogonais que fazem transformações em dois espaços vetoriais: o Euclidiano e o de Minkowski. O primeiro chamado grupo de Rotações e o segundo grupo de Lorentz, ambos aqui apresentados de forma detalhada. Sugerimos atividades focadas nos anos finais do Ensino Médio, visando contribuir no ensino de Geometria Analítica e, em acréscimo, no ensino de Álgebra Linear ainda no Ensino Básico. Várias dessas atividades são propostas com a utilização do software Geogebra. Ainda apresentamos relações do grupo de Lorentz com a Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, bem como com o famoso e intrigante Paradoxo dos Gêmeos, sendo que, para este último, exploramos uma versão mais ampla que permite a abordagem do caso com referenciais não inerciais. Por fim apresentamos um exemplo de aplicação de conceitos matemáticos na área da Física e espera-se fornecer, assim, um texto de apoio para professores dessas duas disciplinas.

Palavras-chave: grupo de rotação, grupo de Lorentz, grupos ortogonais, espaço de Minkowski, paradoxo dos gêmeos

ABSTRACT

This work deals with two groups of orthogonal matrices which are related to transformations in two vector spaces: Euclidean and Minkowski. They are called Rotation Group and Lorentz Group, respectively, both carefully present. We suggest activities focused in the final years of high school, aiming to contribute to the teaching of Analytic Geometry and, in addition, to present Linear Algebra still in Basic Education. Some of these activities are proposed using the Geogebra software. We also present relations of the Lorentz group with Einstein's Theory of Special Relativity, as well as with the famous and intriguing Twin's Paradox of the Gemini, and, for the latter, we explore a broader version which allow us to approach cases with non-inertial frames. In this work, we provide to present an example of the application of mathematical concepts in Physics and provide a support text for teachers of these two disciplines.

Keywords: rotation group, Lorentz's group, orthogonal group, Minkowski's space, twin paradox

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO	1
1 NOÇÕES GERAIS	5
1.1 Álgebra	5
1.2 Álgebra Linear	7
1.2.1 Espaço e Subespaço Vetorial	7
1.2.2 Dependência e Independência Linear	9
1.2.3 Base de um espaço vetorial	10
1.2.4 Produto interno	11
1.2.5 Transformações Lineares	13
1.2.6 Autovetor e Autovalor	16
1.3 Exponencial de Matrizes	19
1.4 Geometria Diferencial	22
2 O GRUPO DE ROTAÇÕES	25
2.1 Matriz ortogonal	25
2.2 Grupo Geral Linear	27
2.3 Grupo Ortogonal	29
2.3.1 O grupo $SO(2)$	31
2.3.2 O grupo $SO(3)$	32
2.3.3 Os ângulos de Euler	38
2.3.4 Dimensão do grupo (de Lie) $SO(n)$	40
3 O GRUPO DE LORENTZ	43
3.1 O grupo ortogonal no espaço de Minkowski	45
3.2 Os grupos de Lorentz	47
3.2.1 O grupo de Lorentz em $1 + 1$ dimensões	49
3.2.2 O grupo de Lorentz	51
3.2.3 As matrizes do grupo de Lorentz	54
3.2.4 As transformações de Lorentz	55

4	O PARADOXO DOS GÊMEOS	61
4.1	O paradoxo para referenciais inerciais	62
4.2	O paradoxo para referenciais não inerciais	65
5	APLICAÇÕES	71
5.1	Comutatividade de rotações	71
5.1.1	Rotação em \mathbb{R}^2	72
5.1.2	Rotação em \mathbb{R}^3	73
5.1.3	Proposta de atividade	75
5.2	A não comutatividade de reflexões	82
5.2.1	Proposta de atividade	83
5.3	Figuras de mesma área	85
5.3.1	Proposta de atividade	88
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	95
	Bibliografia	97

INTRODUÇÃO

Dentre os diversos campos da Matemática, a Geometria Analítica ganha destaque por propiciar a representação geométrica de conceitos algébricos e vice-versa, sua origem é atribuída principalmente a Descartes¹ e a Fermat². Não menos importante, a Álgebra Linear surge, aparentemente, com Cayley³, que desenvolveu a álgebra das matrizes ligada às transformações lineares. A motivação para tal álgebra nasce com a descoberta de relações não comutativas, conforme aponta EVES (2011) [8].

Entre as duas áreas citadas, a Geometria Analítica é estudada, mesmo que introdutoriamente, no terceiro ano do Ensino Médio ao abordar a reta e a circunferência (e raramente as cônicas). Já a Álgebra Linear é abordada implicitamente e de forma rudimentar no segundo ano quando são estudadas as matrizes, determinantes e sistemas lineares. Porém, existe uma abordagem quantitativa, ou seja, o aluno aprende fazer operações de matrizes, calcular o determinante e resolver um sistema linear mas não sabe ao certo a finalidade de tal procedimento e não vê aplicação desses conceitos nem mesmo ligados à outros assuntos da Matemática. Logo, a motivação para este trabalho é apresentar aplicações simples de Transformações Lineares, utilizando para tal dois grupos de transformações: o grupo de rotações e o grupo de Lorentz. Uma motivação adicional vem da Física: o Paradoxo dos Gêmeos que tanto intriga os alunos e aguça a curiosidade para entender a Teoria da Relatividade Restrita de Einstein. Tal paradoxo será abordado do ponto de vista da Álgebra Linear, pois será uma consequência natural do grupo de Lorentz.

Assim, este trabalho aborda os grupos de transformações em dois espaços particulares: o Euclidiano (\mathbb{R}^3) e o de Minkowski (\mathbb{R}^4), onde iremos apresentar exemplos e aplicações de ambos. Tais grupos (principalmente o Euclidiano) são amplamente estudados e existem muitas contribuições na literatura matemática, porém pretendemos apresentar a comparação entre eles, além de trazer aplicações simples que podem ser utilizadas em turmas de Ensino Médio.

1 René Descartes (1596-1650)

2 Pierre de Fermat (1601?-1665)

3 Arthur Cayley (1821-1895)

O grupo no espaço Euclidiano será chamado grupo de rotações e basicamente consiste em transformações lineares cujas matrizes são ortogonais e para tal faz-se necessário apresentar as características do grupo ortogonal $O(n)$ que é o grupo formado pelas matrizes ortogonais, tal grupo possui um subgrupo formado pelas matrizes ortogonais de determinante igual a 1 o qual daremos destaque por determinar rotações puras no espaço Euclidiano, tal subgrupo será chamado de $SO(n)$.

Já o grupo no espaço de Minkowski será chamado grupo de Lorentz que nada mais é do que uma generalização do grupo ortogonal no espaço quadridimensional \mathbb{R}^4 munido de uma métrica que está de acordo com a ideia de espaço-tempo sugerido por Minkowski e posteriormente adotado por Einstein. Neste espaço teremos as três dimensões de espaço usual do espaço Euclidiano mais uma dimensão que representa o tempo, pois no conceito de espaço-tempo essas duas grandezas não são absolutas e independentes. Após todas as considerações deste grupo faremos sua relação com o famoso Paradoxo dos Gêmeos.

A expectativa é que este trabalho seja útil para professores de Matemática e Física do Ensino Médio, pois apresentaremos propostas de atividades de simples aplicação para os alunos de tal segmento. Para tanto, espera-se que o professor com formação em Matemática ou Física tenha um prévio conhecimento de conceitos básicos de Álgebra Linear, como noção de Espaço Vetorial, Transformações Lineares e operações com matrizes. Para auxiliar o leitor, o primeiro capítulo é destinado a apresentação de definições de conceitos que serão utilizados ao longo do trabalho. Por fim, espera-se também uma pequena familiarização com o software Geogebra para a realização das atividades.

Esperamos com este trabalho propiciar aos professores de Matemática do Ensino Médio uma contribuição para as aulas de aplicações de matrizes e conceitos de geometria, bem como a contribuição para as aulas de Física ao tratar da Teoria da Relatividade Restrita e sugerir, de forma ambiciosa, a inserção do estudo de conceitos de Álgebra Linear no último ano deste segmento de ensino. Ademais, espera-se que tal trabalho possa ser útil para o leitor interessado em conceitos que relacionam a Matemática com a Física. Pela exposição dos objetivos acreditamos que este trabalho tenha relevância na contribuição literária da Matemática já que une conceitos de certa abstração com aplicações simples que podem ser facilmente compreendidas por estudantes do Ensino Básico.

Conforme já mencionado, no Capítulo 1, apresentaremos definições e conceitos básicos para o bom acompanhamento dos capítulos posteriores. Esses conceitos serão

concentrados em 4 áreas: Álgebra, Álgebra Linear, Exponencial de Matrizes e Geometria Diferencial. Em Álgebra destacaremos a definição de grupo e subgrupo e suas propriedades, fundamentais nos dois capítulos seguintes. Já em Álgebra Linear apresentaremos a definição de espaço e subespaço vetorial com suas propriedades e, após passarmos pelos conceitos de independência/dependência linear e base de um espaço vetorial, abordaremos o conceito de produto interno de um espaço vetorial, que terá grande importância para definirmos o grupo de Lorentz. Finalizaremos esta parte definindo e exemplificando as transformações lineares, bem como os conceitos de autovetor e autovalor de um operador linear. O conceito de Exponencial de Matrizes será apresentado com o objetivo de elucidar as tratativas que serão feitas no Capítulo 3 ao deduzirmos algumas matrizes que compõem o grupo de Lorentz. Finalmente, alguns conceitos sobre Geometria Diferencial serão apresentados exclusivamente com o intuito de servir de base para a Proposição 2.6 ao final do Capítulo 2.

O Capítulo 2 será totalmente concentrado em explorar o grupo de rotações no espaço Euclidiano. Para tal seguiremos o seguinte roteiro: primeiramente iremos definir uma matriz ortogonal que, associada à uma transformação linear, provoca uma rotação em vetores no espaço. Em seguida definiremos o Grupo Geral Linear das matrizes quadradas invertíveis para então tratarmos do caso específico, principal objetivo deste capítulo, o Grupo Ortogonal $O(n)$, que é formado pelas matrizes quadradas cuja inversa é sua matriz transposta, ou seja, as matrizes que compõem $O(n)$ são ortogonais. O grupo $O(n)$ possui um subgrupo $SO(n)$ cujas matrizes ortogonais possuem determinante unitário e, após definirmos para o caso de dimensão geral n apresentaremos os subgrupos $SO(2)$ e $SO(3)$, ou seja, as matrizes que provocam rotações no plano \mathbb{R}^2 e no espaço \mathbb{R}^3 , aprofundaremos o estudo desses subgrupos e iremos deduzir a forma geral dessas matrizes. Ao final do capítulo mostraremos uma forma interessante de expressar a rotação provocada pelas matrizes de $SO(3)$ através da parametrização em termos dos ângulos de Euler que são frequentemente utilizados para descrever a orientação de um corpo rígido. Mostraremos ainda a dimensão do grupo de Lie $SO(n)$.

No Capítulo 3, o foco será definir o grupo de Lorentz. Iniciaremos definindo a forma bilinear (produto interno) do espaço vetorial \mathbb{R}^n para então apresentar o espaço \mathbb{R}_v^n (espaço pseudo-Euclidiano) que, para $n = 4$ e $v = 1$, é apresentado como espaço de Minkowski. Tal espaço é munido do produto interno Lorentziano, uma forma bilinear simétrica que é não-degenerado, não positivo e não negativo-definido. Após esses conceitos poderemos definir o grupo $O(p, n)$ e, em específico, para $p = 1$ e $n = 3$, o grupo $O(1, 3)$, os parâmetros p e n representam respectivamente o tempo e as três co-

ordenadas de espaço de um evento no espaço-tempo de Minkowski. Aprofundaremos o estudo nos subgrupos $SO(1, 1)$ e $SO(1, 3)$ que são os subgrupos de $O(p, n)$, formados pelas matrizes ortogonais 4×4 de determinante unitário, afim de determinarmos a estrutura dessas matrizes. Por fim, faremos a ligação de $SO(1, 3)$ com as famosas Transformações de Lorentz que servem de base para a Teoria da Relatividade Restrita (TRE) de Einstein.

O Capítulo 4 traz uma aplicação das Transformações de Lorentz e conseqüentemente do grupo de Lorentz: o Paradoxo dos Gêmeos. Tal ideia é amplamente conhecida e foi inicialmente enunciada na forma de uma “experiência mental” cuja finalidade era trazer contradição na Relatividade Restrita. Iremos abordar esse paradoxo em sua forma tradicional para referenciais inerciais e, em uma forma não muito convencional, para referenciais não inerciais. Mostraremos que na verdade não há paradoxo, pois os postulados da TRE não são contrariados e, de forma mais profunda, iremos mostrar que a aparente diferença entre as idades dos gêmeos é, de fato, possível.

Já no Capítulo 5, traremos exemplos de aplicações no Ensino Médio utilizando as matrizes do grupo de rotação e do grupo de Lorentz. Começaremos com o conceito de comutatividade, sendo que durante o Ensino Médio raramente se mostra operações não comutativas ficando tal conceito restrito à multiplicação de matrizes. Assim, iremos mostrar a não comutatividade de rotações em \mathbb{R}^3 e proporemos uma atividade detalhada que pode ser facilmente realizada com o auxílio do Geogebra. Ainda vamos propor a efeito de desafio para os alunos verificarem (geometricamente) a não comutatividade de reflexões em \mathbb{R}^2 . Após isso, iremos propor uma atividade, mostrando os passos detalhadamente, que aborda figuras planas de mesma área tanto para figuras poligonais quanto para a circunferência que será transformada em uma elipse de mesma área pelas matrizes do grupo de Lorentz.

Finalizando traremos nossas considerações finais, onde pretendemos expor as contribuições deste trabalho para o ensino e divulgação da Matemática.

NOÇÕES GERAIS

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e conceitos básicos sobre Álgebra, Álgebra Linear, Exponencial de Matrizes e Geometria Diferencial. Para o bom entendimento e acompanhamento dos capítulos subsequentes recomenda-se a leitura deste, porém o mesmo pode ser dispensado caso o leitor seja familiarizado com os conceitos citados, em especial os de Álgebra e Álgebra Linear.

1.1 ÁLGEBRA

Definição 1.1. Um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação binária denotada conforme segue:

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) \in G \times G &\mapsto a * b \in G\end{aligned}$$

Tal operação satisfaz os seguintes axiomas para quaisquer $a, b, c \in G$:

- **Associatividade:** $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- **Identidade:** $\exists e \in G$ tal que $e * a = a * e = a$;
- **Existência de Inverso:** $\exists a^{-1} \in G$ tal que $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

Conforme observa MARTIN (2010) em [14], a notação utilizada acima é chamada de *notação multiplicativa*. Alguns grupos possuem um axioma adicional, a saber: a operação binária é *comutativa*. Isso significa que $a * b = b * a$ para quaisquer $a, b \in G$. É comum, neste caso, o emprego da *notação aditiva*, representada por $+$ ao invés de $*$, ou seja:

$$(a, b) \in G \times G \mapsto a + b.$$

Neste caso, o grupo é dito abeliano, e a identidade $e \in G$ é usualmente denotada por 0 e chamada de *elemento neutro* e o inverso de $a \in G$ é chamado *oposto* de a e denotado por $-a$.

Definição 1.2. Um subconjunto H de um grupo G é chamado de *subgrupo* de G se satisfaz as três propriedades a seguir

(S1). H não é vazio.

(S2). Para todo $a, b \in H$, temos que $a * b \in H$.

(S3). Para todo $a \in H$, temos que $a^{-1} \in H$.

Proposição 1.1. O subgrupo H munido da operação binária de G é um grupo, ou seja, sua operação satisfaz os axiomas de grupo.

Demonstração. Vamos definir por μ a operação binária, que dá a H a estrutura de grupo, obtida pela restrição da operação $*$ de G , ou seja,

$$\begin{aligned} \mu : H \times H &\rightarrow H \\ (a, b) \in H \times H &\mapsto a * b \in H \end{aligned}$$

Vamos verificar que μ satisfaz os axiomas de grupo:

A propriedade (S1) garante que existe $a \in H$.

Como μ é a restrição da operação $*$ sobre G , que é associativa, segue que μ é também associativa.

Por (S3), $a^{-1} \in H$ e, por (S2), temos que $a * a^{-1} \in H$, logo $e \in H$. Como a operação μ é a restrição da operação $*$ de G , vale que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in H$.

Finalmente por (S3) temos que todo $a \in H$ possui inverso em H .

Portanto H é um grupo. □

Proposição 1.2. Seja $H \subset G$, onde G é grupo. Se $H \neq \emptyset$ e, se para todos $a, b \in H$, temos que $a^{-1} * b \in H$ (onde $*$ é a operação de G), então H é subgrupo de G .

Demonstração. Obviamente, H satisfaz (S1).

Basta observar então que, tomando $b = a$ temos, das hipóteses acima, que $a^{-1} * a = e \in H$. Daí, como $a, e \in H$ segue que $a^{-1} * e = a^{-1} \in H$, ou seja, vale (S3).

Por fim, se $a, b \in H$ temos que $a^{-1}, b \in H$ e, portanto, $(a^{-1})^{-1} * b = a * b \in H$. Logo vale (S2). □

Definição 1.3. Sejam G e G' dois grupos e considere a aplicação $\psi : G \rightarrow G'$. Dizemos que ψ é um *homomorfismo* se $\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y), \forall x, y \in G$ tal que G e G' são munidos da operação $*$. Neste caso dizemos que os grupos G e G' são homomorfos.

Definição 1.4. Uma aplicação $\phi : G \rightarrow G'$ tais que G e G' são grupos chama-se *isomorfismo* se for um homomorfismo bijetor. Neste caso dizemos que os grupos G e G' são isomorfos.

Definição 1.5. Um conjunto A , munido de duas operações binárias $+$ e \cdot , é dito *anel* se:

- A munido da operação $+$ é um grupo abeliano;
- Para todos $a, b, c \in A$ temos $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, ou seja \cdot é uma operação associativa;
- Para todos $a, b, c \in A$ temos: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Um anel é dito *comutativo* se a operação \cdot é comutativa, ou seja, se $a \cdot b = b \cdot a$ para todos $a, b \in A$.

Definição 1.6. Um conjunto \mathbb{K} , munido de duas operações binárias $+$ e \cdot , é dito *corpo* se:

- \mathbb{K} é um anel comutativo;
- Existe $1 \in \mathbb{K}$ (diferente do elemento neutro 0 da operação $+$) tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{K}$. 1 é denominado *identidade* de \mathbb{K} ;
- Para todo $a \neq 0$ existe $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a^{-1} \cdot a = 1$

Observação 1.1.1. Ao longo deste trabalho trabalharemos exclusivamente com os corpos dos números reais \mathbb{R} e dos complexos \mathbb{C} .

1.2 ÁLGEBRA LINEAR

1.2.1 Espaço e Subespaço Vetorial

Definição 1.7. Um conjunto E não vazio é chamado *espaço vetorial* (ou *espaço linear*) se seus elementos, chamados de *vetores* possuem duas operações, a saber: a *adição* representada pelo símbolo $+$, que para cada par de vetores $v, u \in E$ corresponde a outro vetor $u + v \in E$, chamado a *soma* de v e u , e a *multiplicação por um número*

escalar representada pelo símbolo $*$, que para cada escalar α num corpo \mathbb{K} e para cada $v \in E$ corresponde a um novo vetor $\alpha * v \in E$, chamado o *produto* de α por v .

Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $u, v, w \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ os axiomas listados abaixo:

- *Axiomas para a adição*
 - **Comutatividade:** $v + u = u + v$.
 - **Associatividade:** $(v + u) + w = v + (u + w)$.
 - **Elemento neutro:** Existe um elemento $0 \in E$, chamado vetor nulo, tal que $v + 0 = 0 + v = v$.
 - **Simetria:** Existe um elemento $-v \in E$, chamado simétrico de v , tal que $v + (-v) = -v + v = 0$.
- *Axiomas para a multiplicação*
 - **Associatividade:** $(\alpha * \beta) * v = \alpha * (\beta * v)$
 - **Distributividade em E :** $\alpha * (v + u) = \alpha * v + \alpha * u$.
 - **Distributividade em \mathbb{K} :** $(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v$.
 - **Identidade:** Para todo $v \in E$ temos $1 * v = v$.

Observação 1.2.1. Note que um espaço vetorial E munido da operação $+$ é um grupo comutativo com elemento neutro $e = 0$.

De modo a simplificar nossa notação, neste trabalho, escreveremos simplesmente αv para denotar $\alpha * v$, ou seja a multiplicação de v pelo escalar α .

Definição 1.8. Seja um conjunto X , subconjunto de um espaço vetorial E . X é dito subespaço (vetorial) de E se:

- Se para todos $u, v \in X$, temos $u + v \in X$;
- Se para todos $a \in \mathbb{K}$ e $v \in X$, temos $a * v \in X$;

onde $+$ e $*$ são as operações do espaço vetorial E .

Proposição 1.3. Se X é subespaço de um espaço vetorial E , então X munido das operações de E é também um espaço vetorial.

Demonstração. As propriedades de comutatividade, associatividade, identidade e distributividade são imediatas uma vez que as operações em X são as mesmas de E .

As propriedades de elemento neutro e simetria decorrem dos fatos abaixo facilmente verificáveis:

- $0 * v = 0$;
- $(-1) * v = -v$;

onde v é um elemento qualquer de X . □

1.2.2 Dependência e Independência Linear

Definição 1.9. Dizemos que um vetor v num espaço vetorial E é combinação linear dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n se existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Definição 1.10. Um conjunto X subconjunto de um espaço vetorial E é dito linearmente independente (L.I.) quando nenhum vetor em X é combinação linear de outros vetores em X .

O Teorema a seguir traz um importante critério para a verificação de conjuntos linearmente independentes:

Teorema 1.1. *Se a única combinação linear do vetor nulo a partir dos vetores v_1, \dots, v_n vetores do espaço vetorial E é aquela com todos os coeficientes nulos então o conjunto $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I. Ou seja se:*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

então $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I.

Demonstração. Ver [12] (pg. 25,26). □

Definição 1.11. Um conjunto X , subconjunto de um espaço vetorial E , é dito linearmente dependente (L.D.) se ele não for L.I., ou seja quando pelo menos um vetor $v \in X$ é combinação linear dos outros vetores de X .

LIMA (2016) chama a atenção para a seguinte observação sobre os conjuntos linearmente dependentes: Se um conjunto $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ é L.D. não é possível

afirmar que **qualquer** vetor de X é combinação linear dos demais. Por exemplo se $v = (1, 2)$, $u = (3, 4)$ e $w = (4, 8)$ então $X = \{v, u, w\} \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto L.D., pois $w = 4v + 0u$ porém u não é combinação linear de v e w .

1.2.3 Base de um espaço vetorial

Definição 1.12. Uma base de um espaço vetorial E é um conjunto $B \subset E$ linearmente independente que gera E , ou seja, todo vetor $x \in E$ se exprime de modo único, como combinação linear de elementos $v_i \in B$.

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

onde os coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são chamados de coordenadas de x na base B .

Os exemplos a seguir ilustram as chamadas *bases canônicas*.

Exemplo 1.1. *Base canônica de \mathbb{R}^2 .* Seja $B = \{(1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$, temos que B é base canônica de \mathbb{R}^2 .

De fato, B gera \mathbb{R}^2 , pois todo vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é uma combinação linear de B

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Além disso B é L.I., pois para todo escalar $\alpha_i \in \mathbb{R}$ temos que

$$\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = (0, 0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Exemplo 1.2. *Base canônica de \mathbb{R}^3 .* Seja $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$, temos que B é base canônica de \mathbb{R}^3 .

De fato, B gera \mathbb{R}^3 , pois todo vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é uma combinação linear de B

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

Além disso B é L.I., pois para todo escalar $\alpha_i \in \mathbb{R}$ temos que

$$\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Exemplo 1.3. *Base canônica de \mathbb{R}^n .* Generalizando os exemplos anteriores, temos que os vetores $v_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, \dots, 0, 1)$ constituem uma base canônica

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n .

O exemplo a seguir ilustra um conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ que apesar de ser L.I., não é base de \mathbb{R}^3 , pois não gera esse espaço vetorial.

Exemplo 1.4. Seja $X = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ em \mathbb{R}^3 . Temos que X é L.I., pois para todo escalar $\alpha_i \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, -1, 0) = (0, 0, 0) \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Porém X não gera \mathbb{R}^3 , pois para todo vetor (x, y, z) em \mathbb{R}^3 , temos que:

$$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) = (a + b, a - b, a)$$

Assim temos o sistema

$$x = a + b$$

$$y = a - b$$

$$z = a$$

Cuja solução gera o conjunto $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$. Logo X gera $Y \subset \mathbb{R}^3$, mas não gera \mathbb{R}^3 .

Portanto X é base de Y , subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 , mas não é base de \mathbb{R}^3 .

1.2.4 Produto interno

Definição 1.13. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} (onde \mathbb{K} é \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Um produto interno em E é uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K},$$

que satisfaz as seguintes propriedades para todos $u, v, w \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

- **Linearidade:**

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

- **Simetria (hermitiana):**

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle},$$

onde $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ é o complexo conjugado de z .

- **Positividade:**

$$\langle u, u \rangle > 0,$$

se $u \neq 0$.

$$\langle u, u \rangle = 0,$$

se e somente se $u = 0$.

Observação 1.2.2. No espaço de Minkowski usaremos ao invés de um produto interno, como descrito na definição acima, um produto que não satisfaz a hipótese de positividade, porém satisfaz que:

$$\langle u, v \rangle = 0, \forall v \in E \implies u = 0.$$

Tal propriedade é conhecida como a não-degenerescência do produto.

Definição 1.14. A norma de um vetor v é o número real não negativo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, ou seja, $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ para todo vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

De forma geral, uma norma em um espaço vetorial E é qualquer função real denotada por $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v, w \in E$ cumpre as condições abaixo:

1. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdade triangular);
2. $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$;
3. $v \neq 0 \implies \|v\| > 0$ e $v = 0 \iff \|v\| = 0$

Para $\|\cdot\|$ como na Definição 1.14, essas três condições pode ser facilmente demonstradas. Para o leitor interessado, as demonstrações das propriedades acima e mais detalhes sobre a norma num espaço vetorial podem ser encontrados em [1] p. 19 e 20.

Observação 1.2.3. A norma acima definida é chamada **norma Euclidiana**. No espaço de Minkowski utilizaremos a norma chamada de **norma Lorentziana** que, segundo menciona COUTO E LYMBEROPOULOS (2018) em [13], não é de fato uma norma, pois existem vetores não nulos tais que essa norma é zero, além de não valer a desigualdade triangular. Porém, apesar dessas diferenças em relação á norma Euclidiana, a norma Lorentziana (ou pseudo-Euclidiana) satisfaz a relação $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e v um vetor pertencente ao espaço de Minkowski.

Definição 1.15. Uma base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de E é dita ortonormal se:

- $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, para todo $i = 1, \dots, n$;

- $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, para $i \neq j$.

Proposição 1.4. Se $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de E , e $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, ou seja, $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$, então:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}. \quad (1.1)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i \overline{v_j} \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}. \end{aligned}$$

□

Observação 1.2.4. É fácil ver que, se para uma base de E , reciprocamente definirmos o produto de $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ pela equação (1.1), então $\langle \cdot, \cdot \rangle$ torna-se um produto interno de E .

1.2.5 Transformações Lineares

Definição 1.16. Sejam E e F espaços vetoriais, a aplicação $T : E \rightarrow F$ é dita uma *transformação linear*, se para todo $v, u \in E$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, valem as duas propriedades a seguir:

- $T(v + u) = T(v) + T(u)$;
- $T(\alpha * v) = \alpha * T(v)$

Como consequência da definição acima temos as seguintes propriedades das transformações lineares:

- A imagem do vetor nulo de E é o vetor nulo de F , ou seja, $T(0) = 0$, para $0 \in E$;
- $T(-v) = -T(v), \forall v \in E$;
- $T(v - u) = T(v) - T(u), \forall v, u \in E$

Teorema 1.2. Sejam E, F espaços vetoriais e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ uma base de E , $\forall v \in E$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ temos que:

- $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$;
- $T(v) = \alpha_1 T(b_1) + \cdots + \alpha_n T(b_n)$

Demonstração. Ver [12] (pg. 39, 40). □

Pelo teorema citado, é possível determinar qual a regra da transformação linear apenas conhecendo as imagens de cada vetor b pertencente à base B do domínio E na transformação $T : E \rightarrow F$, ou seja, os valores $T(b)$ que T assume nos vetores $b \in B$.

O exemplo a seguir ilustra uma das transformações lineares de principal objetivo deste trabalho.

Exemplo 1.5. *Rotação de ângulo θ em torno da origem em \mathbb{R}^2 .* Trata-se da operação $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que associa cada vetor $v \in \mathbb{R}^2$ à imagem $R(v)$ que resulta em uma rotação de ângulo θ no sentido anti-horário em torno da origem. É fácil verificar que R é uma transformação linear, pois para todo $v, u \in \mathbb{R}^2$ temos que $R(v + u) = R(v) + R(u)$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $R(\alpha * v) = \alpha * R(v)$.

A figura a seguir deixa claro que $R(v + u) = R(v) + R(u)$, neste exemplo temos $\theta = 90$

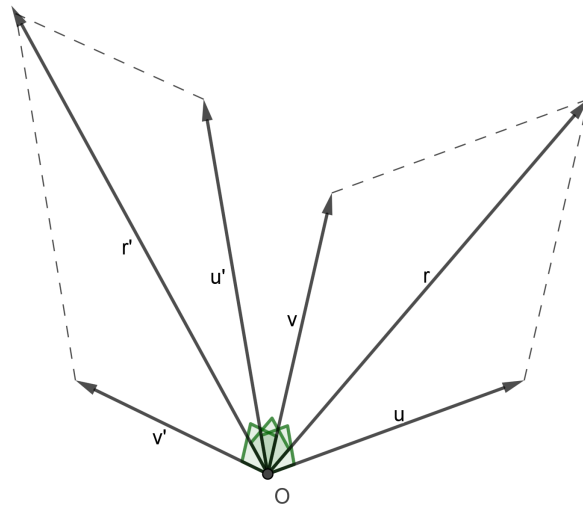


Figura 1: $r = v + u$, $r' = R(v + u)$, $v' = R(v)$, $u' = R(u)$

Pelo Teorema 1.2 podemos determinar qual a lei de formação da transformação R , para isto basta determinar a imagem do vetor $v = (x, y)$ em \mathbb{R}^2 .

Para um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrário, seja $R(v) = (x', y')$. Queremos descobrir x' e y' . Por simplicidade, consideremos os vetores da base canônica em $\{(1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$, adotando $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, temos que a imagem dos vetores (e_1, e_2) por rotação θ será $R(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $R(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

Daí temos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= R(v) = R(xe_1 + ye_2) = xR(e_1) + yR(e_2) = \\ &= x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A finalização do exemplo acima sugere que é possível estabelecer uma relação entre uma Transformação Linear e uma matriz. Essa relação é definida a seguir:

Definição 1.17. *Matriz de transformação.* Seja a transformação linear $T : E \rightarrow F$, onde E e F são espaços vetoriais finitos de dimensões respectivas m e n não necessariamente iguais. Considerando uma base $(b_1, \dots, b_m) \in E$, a matriz $m \times n$ cujas colunas são os valores $T(b_j)$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$ é denominada matriz de transformação de T .

Teorema 1.3. *Existe uma bijeção entre o conjunto das Transformações Lineares $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e o conjunto $M_{n \times n}$ de matrizes reais $n \times n$.*

Demonstração. Fixemos uma base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n . Considere a função \mathcal{F} que associa a T à matriz $A = (a_{ij})$ definida por:

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i. \quad (1.2)$$

Assim considerando duas operações T e T' conforme definido acima, observamos que se T e T' têm mesma imagem por \mathcal{F} , então $T(e_j) = T'(e_j)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo, por linearidade, $T(v) = T'(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Logo \mathcal{F} é injetora.

Por outro lado, dada $A \in M_{n \times n}$ defina T por (1.2) e estenda a $v \in \mathbb{R}^n$ por linearidade. Segue que T , por definição, satisfaz (1.2), e tem, portanto, imagem A por \mathcal{F} . Logo \mathcal{F} é sobrejetora. \square

Definição 1.18. Seja a transformação linear $T : E \rightarrow F$ com E e F espaços vetoriais finitos munidos de produto interno. A transformação *Adjunta* de T é a transformação $T^* : F \rightarrow E$ tal que, para todo $v \in E$ e $w \in F$ vale:

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle.$$

Verifica-se que T^* de fato é uma transformação linear, pois dados $w, w' \in F$ temos que para todo $v \in E$:

$$\langle v, T^*(w + w') \rangle = \langle Tv, w + w' \rangle = \langle Tv, w \rangle + \langle Tv, w' \rangle = \langle v, T^*w \rangle + \langle v, T^*w' \rangle,$$

e assim vem:

$$\langle v, T^*(w + w') \rangle = \langle v, T^*w + T^*w' \rangle \implies T^*(w + w') = T^*w + T^*w'.$$

De forma análoga temos que $T^*(\alpha w) = \alpha T^*w$. Portanto T^* é uma transformação linear.

A Adjunta de uma transformação linear possui diversas aplicações e conclusões interessantes. Para mais informações sobre a Adjunta ver [12] cap. 11.

1.2.6 Autovetor e Autovalor

Definição 1.19. Seja v um vetor não nulo em um espaço vetorial E , chamaremos v de *autovetor* do operador linear $T : E \rightarrow E$ quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Tv = \lambda v.$$

O número real λ será chamado de *autovalor* do operador T quando existir um vetor não nulo $v \in E$ tal que a vale a equação apresentada acima.

De forma análoga definimos:

Definição 1.20. Seja v um vetor não nulo em um espaço vetorial E , chamaremos v de *autovetor* da matriz A da base canônica do operador linear $T : E \rightarrow E$ quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

O número real λ será chamado de *autovalor* da matriz A com as mesmas condições da definição anterior.

Observação 1.2.5. Um operador linear é uma transformação linear $T : E \rightarrow F$ quando os espaços vetoriais E e F são iguais, ou seja, se $T : E \rightarrow E$ então T é um operador linear.

Determinar o autovetor e autovalor de um dado operador T é o mesmo que determinar o autovetor e autovalor da matriz A que é a matriz na base canônica de T . Para tal vamos adotamos o seguinte procedimento:

Dado o operador $A : E \rightarrow E$ e a matriz identidade I de mesma ordem que A podemos reescrever a equação $Av = \lambda v$ na forma $(A - \lambda I)v = 0$, ou seja, temos um sistema linear homogêneo que possui uma solução não trivial $v \neq 0$, assim para que λ seja um autovalor de A é necessário e suficiente que o operador $A - \lambda I : E \rightarrow E$ não seja invertível, o que equivale a dizer que $\det(A - \lambda I) = 0$. (Ver Teorema 2.2).

Note que pela última condição é possível determinar um polinômio que será chamado de **polinômio característico de A** que denotaremos por $c_A(x)$:

$$c_A(x) = \det(A - xI)$$

De fato $c_A(x)$ será um polinômio de grau n se A for uma matriz $n \times n$. Assim λ será um autovalor de A se $c_A(\lambda) = 0$, ou seja, se λ for a raiz do polinômio característico $c_A(x)$. Além disso, é possível encontrar os autovetores de A associados a λ , pois v será determinado pela condição $(A - \lambda I)v = 0$. Logo, os autovetores v são as soluções não nulas desse sistema homogêneo.

Exemplo 1.6. Vamos encontrar os autovalores e autovetores do operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Primeiramente determinamos o polinômio característico de A , como:

$$A - xI = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & -3 \\ 4 & -6-x \end{pmatrix},$$

Então,

$$c_A(x) = \det(A - xI) = (1-x)(-6-x) + 12 = x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3).$$

Portanto, as raízes de $c_A(x)$ são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$.

Para determinar os autovetores associados aos autovalores encontrados utilizamos o fato que $(A - \lambda I)v = 0$. Assim:

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \right) \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3v_1 - 3v_2 \\ 4v_1 - 4v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim $3(v_1 - v_2) = 0$ e $4(v_1 - v_2) = 0$, logo $v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2$. Portanto os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -2$ são todos vetores da forma

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Analogamente determinamos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4v_1 - 3v_2 \\ 4v_1 - 3v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim $4v_1 - 3v_2 = 0$, logo $v_1 = \frac{3}{4}v_2$. Portanto os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -3$ são todos vetores da forma

$$k \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Concluimos então que os autovalores do operador T são -2 e -3 enquanto que seus autovetores são da forma $k(1, 1)$ e $k(\frac{3}{4}, 1)$.

Uma aplicação dos autovalores e autovetores de grande importância diz respeito à *diagonalização* de matrizes:

Definição 1.21. Uma matriz $n \times n$ é uma matriz diagonal se todos seus elementos não pertencentes à diagonal principal são nulos, ou seja, se D é uma matriz diagonal então sua forma é:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são números reais.

Diagonalizar uma matriz possui grande vantagem pois os cálculos efetuados com uma matriz diagonal são simples, conforme afirma NICHOLSON (2015) em [16] p. 88. Autovalores e autovetores relacionam-se com a diagonalização de matrizes conforme o teorema a seguir:

Teorema 1.4. *Seja A uma matriz $n \times n$ então A é diagonalizável se, e somente se, possui autovetores X_1, X_2, \dots, X_n tais que são colunas de uma matriz P invertível. A matriz diagonalizada de A será a matriz $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, onde para cada i , λ_i é o autovalor de A associado à X_i .*

Demonstração. ver [16] p. 88

□

Exemplo 1.7. Vamos diagonalizar a matriz A do exemplo 1.6. Como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix},$$

seus autovalores são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$ com autovetores associados $X_1 = k(1, 1)$ e $X_2 = k(\frac{3}{4}, 1)$, com $k \in \mathbb{N}$. Como k é arbitrário e não nulo, por simplicidade iremos atribuir $k = 1$ para X_1 e $k = 4$ para X_2 , logo teremos os vetores coluna

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz $P = [X_1 \ X_2] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ é invertível, pelo Teorema 1.4 temos que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

que é a matriz A diagonalizada

Mais exemplos sobre autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes podem ser obtidos em [16] (p. 84 a 90).

1.3 EXPONENCIAL DE MATRIZES

No capítulo 3 para definirmos as matrizes do grupo de Lorentz utilizaremos a ideia de *exponencial de matrizes*, sendo assim, apresentaremos nesta seção sua definição.

Uma das caracterizações mais comuns da função exponencial é através da série:

$$e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

A convergência dessa série segue facilmente pelo teste da razão. Detalhes sobre a convergência e a equivalência desta com outras caracterizações da função exponencial podem ser encontrados em [18].

Seja $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ o espaço dos operadores lineares $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Podemos definir em $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ a norma de um elemento A por:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|. \quad (1.3)$$

O espaço $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ munido desta norma é um espaço normado completo.

É imediato da definição de $\|A\|$ que:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Disso segue que:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

e, por indução:

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n.$$

Como

$$e^{\|A\|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!},$$

e, para $m, p > 0$, temos

$$\left\| \frac{A^m}{m!} + \dots + \frac{A^{m+p}}{(m+p)!} \right\| \leq \frac{\|A\|^m}{m!} + \dots + \frac{\|A\|^{m+p}}{(m+p)!}.$$

Isso implica que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

é de Cauchy e, portanto, convergente.

Assim definimos:

Definição 1.22. Seja $A \in M(n)$ uma matriz quadrada $n \times n$, definimos a exponencial da matriz A por :

$$\exp(A) = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Analogamente, podemos definir o operador:

$$T(t) = \exp(At) = e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \dots + \frac{A^n}{n!}t^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}t^n.$$

É fácil ver que $T(t)$ é solução do problema de valor inicial (de solução única):

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = I \end{cases}$$

A exponencial de matrizes é munida de algumas propriedades, porém para o objetivo deste trabalho apresentaremos apenas duas delas:

1. Se A pode ser escrita da forma $A = PBP^{-1}$ então $e^A = Pe^BP^{-1}$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} A^2 &= PBP^{-1}PBP^{-1} = PB^2P^{-1} \\ A^3 &= PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1} = PB^3P^{-1} \\ A^4 &= A^2A^2 = PB^2P^{-1}PB^2P^{-1} = PB^4P^{-1} \end{aligned}$$

Logo,

$$A^n = \underbrace{PBP^{-1}PBP^{-1} \dots PBP^{-1}}_{n \text{ vezes}} = PB^nP^{-1}$$

Portanto,

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{PB^nP^{-1}}{n!} = P \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right) P^{-1} = Pe^BP^{-1}$$

2. Se $AB = BA$ então $e^{(A+B)} = e^Ae^B$

De fato, considere a função $\sigma(t) = e^{tA}e^{tB}, \forall t \in \mathbb{R}$, sua derivada será $\sigma'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}$. Como A e B comutam podemos reescrever a última igualdade da seguinte forma: $\sigma'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB}$.

Assim temos que:

$$\sigma'(t) = (A+B)\sigma(t)$$

e

$$\sigma(0) = I, \text{ pela definição da exponencial de matrizes}$$

Portanto

$$\sigma(t) = e^{t(A+B)}$$

é a única função que satisfaz as duas condições acima. Em particular para $t = 1$ temos que $e^{(A+B)} = e^Ae^B$.

Maiores detalhes da exponencial de matrizes podem ser encontrados em [3] e [19].

1.4 GEOMETRIA DIFERENCIAL

O conteúdo desta seção é de maior complexidade do que o apresentado até o presente momento e visa única e exclusivamente oferecer um contexto para a Proposição 2.6 apresentada no final do Capítulo 2, que trata da dimensão do grupo de rotações (como variedade diferenciável). Para maiores detalhes em geometria diferencial ver [5], [6]. Para maiores detalhes em cálculo em várias variáveis ver [1].

As definições e proposições a seguir foram adaptadas de [6].

Definição 1.23. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável (mergulhada em \mathbb{R}^n) se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^n e uma aplicação $\varphi : U \rightarrow V \cap M$ de um aberto U de \mathbb{R}^m ($m \leq n$) sobre $V \cap M \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

1. φ é diferenciável;
2. φ é homeomorfismo, isto é, contínua com inversa contínua;
3. Para todo $q \in U$ a diferencial $d\varphi_q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva.

φ é denominada parametrização ou sistema de coordenadas em p . Nesse caso, dizemos que a dimensão de M é m .

Proposição 1.5. Sejam $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas de uma variedade diferenciável M , e $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão m ,

$$d\varphi_q(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^n,$$

coincide com o conjunto de vetores tangentes a M em $\varphi(q)$.

Demonstração. Seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \varphi(U) \subset M$ uma curva diferenciável com $\gamma(0) = \varphi(q)$, e $v = \gamma'(0)$. Tomando $\beta = \varphi^{-1} \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, temos, pela definição de diferencial que $d\varphi_q(\beta'(0)) = v$. Logo $v \in d\varphi_q(\mathbb{R}^m)$.

Reciprocamente, seja $v = d\varphi_q(u)$, com $u \in \mathbb{R}^m$. Tome $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ definida por

$$\beta(t) = tu + q,$$

e tome $\gamma = \varphi \circ \beta$. Novamente, pela definição de diferencial temos que $v = \gamma'(0)$, ou seja, v é tangente a M em $\varphi(q)$.

Como $d\varphi_q$ é, por definição injetiva, segue que a dimensão de $d\varphi_q(\mathbb{R}^m)$ é a mesma de M , ou seja, m . □

Definição 1.24. Sob as hipóteses da Proposição anterior, se $p = \varphi(q)$ definimos então $T_pM = d\varphi_q(\mathbb{R}^m)$, e denominamos tal subespaço de \mathbb{R}^n como espaço tangente a M em p .

Definição 1.25. Uma Álgebra é um espaço vetorial munido de um produto interno, ou seja, é uma estrutura que consiste em um conjunto com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar. Caso a multiplicação dos elementos do espaço vetorial seja associativa chamamos de Álgebra associativa e os conjuntos deste espaço são anéis.

Observação 1.4.1. *Uma variedade diferenciável munida de uma operação de grupo diferenciável é conhecida como Grupo de Lie. O espaço tangente T_eG a um Grupo de Lie G na identidade e herda de G uma estrutura natural de álgebra e é, por isso, conhecida como Álgebra de Lie de G .*

O GRUPO DE ROTAÇÕES

As rotações no Espaço Euclidiano são transformações realizadas por matrizes com características específicas, denominadas matrizes ortogonais que pertencem ao grupo ortogonal. Neste capítulo apresentaremos o grupo de rotações e especificamente seu subgrupo de rotações puras $SO(n)$.

Iniciaremos abordando a definição de uma matriz ortogonal.

2.1 MATRIZ ORTOGONAL

Definição 2.1. Uma matriz $A = [a_{ij}] \in M_{n \times m}$ é ortogonal se $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle a_i, a_i \rangle = 1$ se $i = j$, onde $i, j = 1, \dots, n$ tal que a_n é a n -ésima coluna de A .

Sendo assim uma matriz é dita ortogonal se suas colunas são uma base ortonormal de um subespaço de dimensão m de R^n , tal que $m < n$, ou seja, se o produto interno de duas colunas distintas é nulo e se o produto interno de uma coluna por ela mesma é unitário.

Proposição 2.1. Se uma matriz A ortogonal for uma matriz quadrada, então A é inversível e $A^{-1} = A^T$ (sua inversa é igual à sua transposta).

Demonstração. Considere a matriz quadrada genérica de ordem n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sua transposta será:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Assim o produto da matriz transposta de A pela matriz A é dado por:

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2 & \cdots & a_{11}a_{1n} + a_{21}a_{2n} + \cdots + a_{n1}a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}a_{11} + a_{2n}a_{21} + \cdots + a_{nn}a_{n1} & \cdots & a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{pmatrix}.$$

O que, pela definição de produto interno é equivalente à:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_2, a_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \langle a_n, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Como A é ortogonal temos que $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle a_i, a_j \rangle = 1$ se $i = j$, logo:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Portanto, A é inversível e sua inversa é sua matriz transposta. \square

Corolário 2.1. Uma matriz quadrada $A \in M_{n \times n}$ é ortogonal se, e somente se, $A^T A = I_n$

Demonstração. Pela proposição 2.1 temos que se uma matriz $A_{n \times n}$ é ortogonal então $A^{-1} = A^T$ o que implica que $A^T A = I_n$.

Se $A^T A = I_n$ então as linhas de A formam um conjunto de n vetores ortonormais em \mathbb{R}^n , sendo assim, para matrizes quadradas, linhas ortonormais equivalem a colunas ortonormais, logo A é ortogonal. \square

Pelo corolário acima é fácil notar que uma matriz quadrada ortogonal é invertível. Tais matrizes serão cruciais para nossos propósitos, pois trabalharemos com grupos formados por matrizes desta forma. Sendo assim, definiremos o grupo formado por todas matrizes quadradas invertíveis, os demais grupos abordados ao longo deste trabalho estarão contidos neste grupo.

2.2 GRUPO GERAL LINEAR

Definição 2.2. O Grupo Geral Linear $GL(\mathbb{R}, n)$ é o grupo das matrizes quadradas invertíveis com elementos reais, munido com a operação binária que é a multiplicação usual de matrizes.

$$GL(\mathbb{R}, n) = \left\{ M \in Mat(\mathbb{R}, n), \det(M) \neq 0 \right\}$$

Observação 2.2.1. O grupo das matrizes quadradas de ordem n com elementos reais será denotado por $Mat(\mathbb{R}, n)$.

Proposição 2.2. Seja o sistema linear com n equações e n incógnitas $MX = B$, onde B é a matriz coluna (b_1, b_2, \dots, b_n) e X a matriz coluna das soluções (x_1, x_2, \dots, x_n) . Se M for invertível temos que pela **Regra de Cramer** cada solução é obtida por

$$x_i = \frac{\det M[i; b]}{\det M}, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde $M[i, b]$ é a matriz obtida de M substituindo sua i -ésima coluna por B .

Demonstração. ver [12] p. (254, 255). □

Proposição 2.3. Uma transformação linear T é injetora se, e somente se, leva vetores L.I. em vetores L.I.

Demonstração. ver [12] (p. 61) □

Proposição 2.4. Sejam E e F espaços vetoriais de dimensão finita, temos que a transformação linear $T : E \rightarrow F$ é invertível se, e somente se, é injetora.

Demonstração. ver [12] (p. 63) □

Teorema 2.1. Teorema do Produto (Teorema de Binet). Se A e B são matrizes quadradas, então $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Demonstração. ver [16] p. 82. □

Teorema 2.2. Seja $M \in Mat(\mathbb{R}, n)$ temos que M é invertível se e só se $\det(M) \neq 0$.

Demonstração. Se M for invertível então existe M^{-1} tal que $MM^{-1} = I$ e assim temos que $\det(MM^{-1}) = 1$, pelo Teorema do Produto temos que $\det(M) \cdot \det(M^{-1}) = 1$, logo $\det(M) \neq 0$.

Vamos agora considerar o sistema linear homogêneo $MX = B$, ou seja, B é a matriz coluna com elementos nulos $(0, \dots, 0)$. Sendo assim, temos como uma solução trivial do sistema $X = (0, \dots, 0)$. Como a solução do sistema é dada pela Regra de Cramer (proposição 2.2) temos que $\det M \neq 0$. Seja agora T a transformação linear que possui como matriz característica a matriz M , assim pela solução trivial do sistema, $T(x) = 0 \implies x = 0$ e pela proposição 2.3 T é injetora, por fim pela proposição 2.4 T é invertível. Portanto $\det M \neq 0 \implies M$ é invertível. \square

Teorema 2.3. $GL(\mathbb{R}, n)$ é um grupo G munido da operação binária de multiplicação usual das matrizes.

Demonstração. Seja a operação

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) \in G \times G &\mapsto a \cdot b \in G \end{aligned}$$

Temos que G possui o elemento neutro da multiplicação I , pois $\det(I) = 1 \neq 0 \implies I \in G$. Além disso G possui o elemento inverso da multiplicação, pois para todo $A \in G$, temos que $\det A \neq 0$ e como $\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \implies \det A^{-1} \neq 0$, assim $A^{-1} \in G$. Por fim G é dotado da operação associativa de acordo com a associatividade da multiplicação usual das matrizes, conforme se observa a seguir:

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ e $C = [c_{ij}]_{n \times n}$, tal que $A, B, C \in G$. Temos que a multiplicação $A \cdot B$ resulta em uma matriz cujo o elemento da primeira linha e primeira coluna é dado por

$$\sum_{i=1}^n a_{1i} b_{i1}.$$

Ao efetuar a operação $(A \cdot B) \cdot C$, temos que o elemento da primeira linha e primeira coluna deste produto é dado por

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} b_{ji} c_{i1} \right),$$

que trata-se de uma expressão com números reais, logo vale a associatividade. Procedendo da mesma forma para todos os elementos da matriz produto, cada elemento é uma entrada real associativa. Logo a operação de multiplicação em G é associativa. \square

2.3 GRUPO ORTOGONAL

Definição 2.3. O Grupo Ortogonal denotado por $O(n)$ é o grupo das matrizes ortogonais de ordem n com elementos reais, ou seja, o grupo das matrizes quadradas cuja inversa é igual à matriz transposta.

$$O(n) = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n), M^{-1} = M^T \right\}$$

Lema 2.4. Sejam A e B matrizes quadradas, então $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Demonstração. Sejam A e B matrizes quadradas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

Temos que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{11} + a_{nn}b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Além disso, temos que:

$$B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Logo:

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{11} + a_{nn}b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Portanto, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. □

Teorema 2.5. $O(n)$ é um grupo.

Demonstração. Considere as matrizes $A, B \in O(n)$, então tais matrizes são quadradas e ortogonais, logo $A^{-1} = A^T$ e $B^{-1} = B^T$.

Utilizando o lema 2.4 temos que:

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T = (A \cdot B) \cdot (B^T \cdot A^T) = A \cdot I \cdot A^T = I.$$

Assim, $(A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^T$ e o produto $A \cdot B \in O(n)$. Logo $O(n) \subset GL(n)$ e portanto é um grupo. □

Teorema 2.6. Para qualquer matriz quadrada A tem-se que o determinante de A é igual ao determinante de sua transposta, ou seja, $\det(A) = \det(A^T)$.

Demonstração. ver [1] p. 103. □

Considerando o Teorema acima juntamente com o Teorema 2.1 temos o seguinte Corolário:

Corolário 2.2. O determinante de uma matriz ortogonal é 1 ou -1 .

Demonstração. Seja a matriz ortogonal M , temos que $\det(I) = 1 \implies \det(MM^{-1}) = 1$, mas $M^{-1} = M^T \implies MM^T = I$, então $\det(MM^T) = \det(M) \cdot \det(M^T) = [\det(M)]^2 = 1$. Portanto $\det(M) = \pm 1$. □

Assim, o grupo ortogonal $O(n)$ é composto por dois conjuntos conexos, um cujo os elementos possuem o determinante igual a 1 e outro cujo os elementos possuem determinante igual a -1 . Destacaremos o primeiro por ser formado por matrizes características de rotações no espaço Euclidiano.

Definição 2.4. O conjunto de todas as matrizes ortogonais com determinante igual a 1 formam um grupo:

$$SO(n) = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, n), M^{-1} = M^T \text{ e } \det(M) = 1 \right\}$$

Proposição 2.5. O conjunto $SO(n)$ é um subgrupo de $O(n)$.

Demonstração. De fato, como $SO(n)$ é formado por matrizes ortogonais de determinante unitário, temos que $SO(n)$ não é vazio, além disso a identidade I pertence a $SO(n)$.

Sejam $A, B \in SO(n)$, como $\det(A) = 1$ e $\det(B) = 1$, temos, pelo Teorema do Produto, que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1$, portanto $A \cdot B \in SO(n)$.

Por fim, se $A \in SO(n)$ então sua inversa também pertence a $SO(n)$, pois A é ortogonal e portanto, $A^{-1} = A^T$, ou seja, $\det A = \det A^T = \det A^{-1} = 1$.

Assim, $SO(n)$ verifica todas as condições de um subgrupo conforme afirma MARTIN (2010) em [14] (p. 8). \square

A principal aplicação do grupo $SO(n)$ para as transformações no espaço Euclidiano diz respeito aos grupos $SO(2)$ e $SO(3)$, pois as matrizes desses grupos determinam rotações puras no plano e espaço Euclidiano. Sendo assim, daremos atenção especial à esses grupos.

2.3.1 O grupo $SO(2)$

Definição 2.5. O grupo das matrizes ortogonais de ordem 2 de determinante unitário é denominado $SO(2)$.

$$SO(2) = \left\{ M \in Mat(\mathbb{R}, 2), M^{-1} = M^T \text{ e } \det(M) = 1 \right\}$$

Para determinar a forma geral das matrizes de $SO(2)$ utilizaremos considerações inspiradas em [2].

Considere uma matriz genérica $A \in SO(2)$, ou seja, uma matriz quadrada de ordem 2 com elementos reais. Como A é ortogonal tem-se que $A^{-1} = A^T$, assim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = A^T$$

Para determinar a matriz inversa de A utilizamos a regra de Laplace para matrizes quadradas, ou seja, A^{-1} é dada pela transposta da matriz dos cofatores de A dividida pelo determinante de A , que é 1, neste caso, pois $A \in SO(2)$.

Logo temos que $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = -a_{21}$ e podemos escrever a matriz da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) = 1$, temos que $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$. Podemos, então, escrever a_{11} e a_{12} na forma $a_{11} = \cos(\theta)$ e $a_{12} = -\sin(\theta)$, com $\theta \in (-\pi, \pi]$. Portanto as matrizes do grupo $SO(2)$ possuem a seguinte forma:

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Sendo assim, a matriz A é uma matriz de transformação que determina uma rotação de θ , $\theta \in (-\pi, \pi]$ em torno da origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , denominado **plano euclidiano** (ver Exemplo 1.5).

Exemplo 2.1. A imagem abaixo ilustra a transformação do vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ quando submetido ao operador $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que associa cada vetor v no vetor Rv , sendo que a matriz de R é a matriz $A(\theta)$, para $\theta = \frac{\pi}{4}$, determinando uma rotação de v .

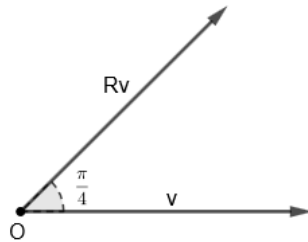


Figura 2: Rotação do vetor v para $\theta = \frac{\pi}{4}$

Estudaremos agora as propriedades do subgrupo de $O(n)$ para $n = 3$, tal grupo denominado $SO(3)$ é formado pelas matrizes quadradas de ordem 3 que determinam rotações no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

2.3.2 O grupo $SO(3)$

Definição 2.6. O grupo das matrizes ortogonais de ordem 3 de determinante unitário é denominado $SO(3)$.

$$SO(3) = \left\{ M \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 3), M^{-1} = M^T \text{ e } \det(M) = 1 \right\}$$

Para determinar a forma geral das matrizes de $SO(3)$ usaremos ideias inspiradas em [12].

Queremos determinar a matriz A de transformação do operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $A \in SO(3)$, sendo assim A é uma matriz ortogonal e conseqüentemente T é um **operador ortogonal**.

Definição 2.7. Um operador linear $T : E \rightarrow E$ é ortogonal se sua matriz de transformação, em uma base ortogonal, for ortogonal, ou seja, se suas colunas constituem bases ortonormais.

Observação 2.3.1. Uma base de um espaço vetorial é ortonormal quando for ortogonal e todos seus vetores possuírem norma unitária.

O Teorema a seguir mostra formas de verificar se um operador linear é ortogonal.

Teorema 2.7. Seja um operador linear $T : E \rightarrow E$, onde E é um espaço vetorial de dimensão finita provido de produto interno, se T for um operador ortogonal então as afirmações abaixo são verdadeiras.

- (1) T preserva norma: $\|Tv\| = \|v\|, \forall v \in E$;
- (2) T preserva distância: $\|Tu - Tv\| = \|u - v\|, \forall u, v \in E$;
- (3) T preserva produto interno: $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in E$;
- (4) $T^*T = I_E$, onde T^* é a transformação adjunta de T .

Demonstração. Se T é um operador ortogonal então existe uma base ortonormal $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset E$. Sendo assim, para todo vetor $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E$ temos que sua norma é:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

Como $\{Tv_1, \dots, Tv_n\} \subset E$ é um conjunto ortonormal, então:

$$\|Tv\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i Tv_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \|v\|^2,$$

logo $\|Tv\| = \|v\|$, assim provamos a afirmação (1).

Se vale (1) então $\|Tu - Tv\| = \|T(u - v)\| = \|u - v\|$, logo a afirmação (2) está provada.

Considere agora $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ então a norma a seguir fica:

$$\|u - v\|^2 = \sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n u_i v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

Pela definição de produto interno podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2,$$

e portanto:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \right).$$

Utilizando as afirmações (1) e (2) vem:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \left(\|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - \|Tu - Tv\|^2 \right) = \langle Tu, Tv \rangle.$$

E assim fica provada a afirmação (3).

Por fim, utilizando (3) temos que

$$\langle u, v \rangle = \langle Tu, Tv \rangle = \langle u, T^*Tv \rangle,$$

logo $T^*Tv = v$ para todo $v \in E$ e portanto $T^*T = I_E$ o que prova a afirmação (4). □

Corolário 2.3. *Toda matriz de um operador ortogonal possui autovalor real igual a 1 ou -1.*

Demonstração. De fato, pela definição de operador ortogonal a norma de uma transformação é preservada, assim de $Tv = \lambda v$ temos:

$$\|v\| = \|Tv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|,$$

logo $|\lambda| = 1$. □

Teorema 2.8. *Se o operador ortogonal $T : E \rightarrow E$ deixa invariante o subespaço $F \subset E$ então T deixa invariante o complemento ortogonal F^\perp .*

Demonstração. Seja $w \in F^\perp$, queremos provar que $Tw \in F^\perp$, ou seja, que $\langle Tw, v \rangle = 0$ para todo $v \in F$. Como T deixa invariante qualquer vetor $u \in F$ temos que $Tu \in F$, isto é, dado $u \in F$ existe $v \in F$ tal que $v = Tu$. Logo $\langle Tw, v \rangle = \langle Tw, Tu \rangle = \langle w, u \rangle = 0$, pois $w \in F^\perp$ e $u \in F$. □

Teorema 2.9. *Autovalores diferentes de um mesmo operador linear correspondem a autovetores linearmente independentes.*

Demonstração. Considere o operador linear $T : E \rightarrow E$ e v_1, \dots, v_n vetores não nulos em E . Aplicando T nesses vetores temos que $Av_i = \lambda_i v_i$ para $i = 1, \dots, n$, tais que os números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são todos distintos. Vamos provar que esses vetores são L.I. por indução em n .

Para $n = 1$ a afirmação é trivial, sendo assim, supondo válido para todo n vamos mostrar que vale para $n + 1$. Considere agora a seguinte combinação linear:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0 \quad (2.1)$$

Aplicando o operador T em ambos os lados da igualdade acima e lembrando que $Av_i = \lambda_i v_i$ temos:

$$\lambda_1 \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n v_n + \lambda_{n+1} \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0 \quad (2.2)$$

Multiplicando o equação 2.1 por λ_{n+1} e o subtraindo o resultado membro a membro da equação 2.2 temos:

$$(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\alpha_1 v_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n+1})\alpha_n v_n = 0$$

Por hipótese os vetores v_1, \dots, v_n são L.I. Então:

$$(\lambda_1 - \lambda_{n+1})\alpha_1 = \dots = (\lambda_n - \lambda_{n+1})\alpha_n = 0.$$

Como os autovalores são todos distintos, temos que as n diferenças na equação acima são todas não nulas, logo $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Sendo assim, a equação 2.1 é reescrita como $\alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$. Como $v_{n+1} \neq 0$ segue que $\alpha_{n+1} = 0$. Portanto, a igualdade representada na equação 2.1 só ocorre quando todos os coeficientes α_i são nulos, caracterizando assim a demonstração do Teorema. \square

O Teorema acima tem uma consequência crucial para nossos propósitos, pois considerando um operador linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e um conjunto $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ com v_i não nulos, aplicando o operador T em X temos que $Tv_1 = \lambda_1 v_1, \dots, Tv_n = \lambda_n v_n$ com λ_i dois a dois distintos, então X é uma base de \mathbb{R}^n , pois os vetores de v_1, \dots, v_n são L.I. e assim X é L.I. e além disso gera \mathbb{R}^n . Assim a matriz de transformação A nesta base é:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

na qual os termos que não aparecem são iguais a zero, ou seja, A é uma matriz diagonal, tal que os elementos da diagonal principal são os autovalores de T .

assim $d = \cos(\theta)$ e conseqüentemente $b = -\text{sen}(\theta)$. Portanto a matriz A fica caracterizada como uma matriz do subespaço $SO(2)$ que provoca uma rotação de ângulo θ no sentido anti-horário em relação à origem de \mathbb{R}^2 .

Procedendo de forma análoga para $ad - bc = -1$ vamos obter que $d = -\cos(\theta)$ e $b = \text{sen}(\theta)$. Sendo assim, a matriz A tem duas possibilidades:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

No primeiro caso, o polinômio característico de A , $p(\lambda) = \lambda^2 - (2\cos(\theta))\lambda + 1$, não possui raízes reais salvo para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, pois se assim fosse teríamos $A = \pm I$. Já no segundo caso, $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ possui raízes ± 1 , que são os autovalores já determinados pelo Corolário 2.3.

Considere agora um operador ortogonal $T : E \rightarrow E$, temos que se $E = \mathbb{R}^2$, sua matriz de transformação tem as seguintes possibilidades:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, I_2 \text{ e } -I_2$$

Porém se $E = \mathbb{R}^k$ com k finito e considerando, para $k = 2$ a base ortonormal $B_1 = \{v_1, u_1\} \subset E$ temos que $Av_1 = \cos(\theta) \cdot v_1 - \text{sen}(\theta) \cdot u_1$, $Au_1 = \text{sen}(\theta) \cdot v_1 + \cos(\theta) \cdot u_1$. Temos pelo Teorema 2.8 que o complemento ortogonal de B_1 em E^\perp é um subespaço invariante por A . Prosseguindo de forma análoga, sempre com bases de dimensão 2 teremos uma base ortonormal $B_k = \{v_1, u_1, \dots, v_k, u_k\} \subset E^\perp$ tal que $Av_i = \cos(\theta_i) \cdot v_i - \text{sen}(\theta_i) \cdot u_i$, $Au_i = \text{sen}(\theta_i) \cdot v_i + \cos(\theta_i) \cdot u_i$ para $i = 1, \dots, k$. Logo a matriz de transformação do operador ortogonal T é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de T e as matrizes características de rotações provenientes da base ortonormal B_k . \square

Observação 2.3.2. *A matriz do teorema acima pode não possuir elementos iguais a 1 ou -1 , bem como pode não conter nenhum dos blocos 2×2 , característicos de rotações. Conforme salienta LIMA (2016) em [12], p. 182.*

Pelo Teorema 2.10 acima temos que a matriz R da transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode ser da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Finalmente, se $R \in SO(3)$ então $\det(R) = 1$ e portanto R pode ter a forma abaixo ou suas permutações:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Note que tal matriz determina uma rotação em relação ao eixo x de $\mathbb{R}^3 = \{x, y, z\}$. As matrizes de rotação em relação aos outros eixos de \mathbb{R}^3 são:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sendo assim, as três matrizes apresentadas que denotaremos R_1, R_2 e R_3 , respectivamente, determinam rotações de ângulo θ no sentido anti-horário¹ em torno do eixo de \mathbb{R}^3 que contém os vetores invariantes em relação à transformação $T : SO(3) \rightarrow SO(3)$.

2.3.3 Os ângulos de Euler

Uma forma interessante de expressar as matrizes de rotação do grupo $SO(3)$ (em relação aos eixos de \mathbb{R}^3) é através da parametrização das rotações em \mathbb{R}^3 em termos dos chamados *ângulos de Euler* conforme aborda MOSHE (2000) em [15].

Definição 2.8. Ângulos de Euler. Dado um sistema de coordenadas cartesiano em \mathbb{R}^3 , os ângulos $\varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]$ e $\psi \in [0, 2\pi]$ são independentes parâmetros que determinam rotações sucessivas no sistema de coordenadas em uma sequência específica. Esses ângulos são chamados *Ângulos de Euler*.

Adotaremos inicialmente o sistema de coordenadas $\lambda = (x, y, z)$ e a sequência inicia pela rotação de λ pelo ângulo φ em torno do eixo z através da matriz $R_3 \in SO(3)$ (figura 2). O novo sistema de coordenadas denotaremos por $\xi = (r, s, t)$. Logo temos a transformação $\xi = R_3(\varphi)\lambda$.

¹ O que explica a diferença de sinal nos senos entre R_2 e as outras duas matrizes

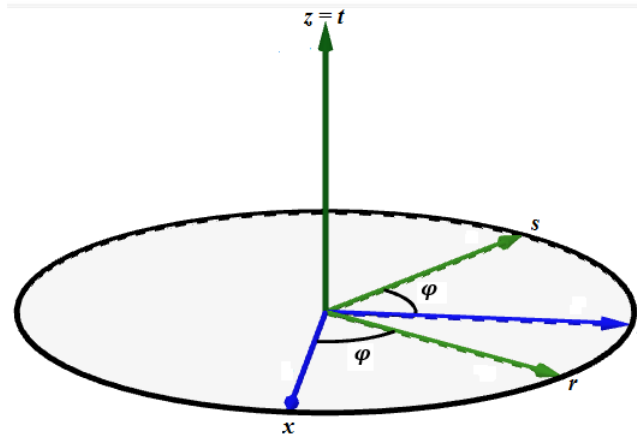


Figura 3: O sistema de coordenadas λ é transformado no sistema ζ pela rotação de λ em torno de z pela matriz R_3

No segundo estágio (figura 3) os eixos de ζ são rotacionados em torno do eixo r pelo ângulo θ através da matriz $R_1 \in SO(3)$ determinando o novo sistema de coordenadas $\zeta' = (r', s', t')$. Assim, temos a seguinte transformação: $\zeta' = R_1(\theta)\zeta$.

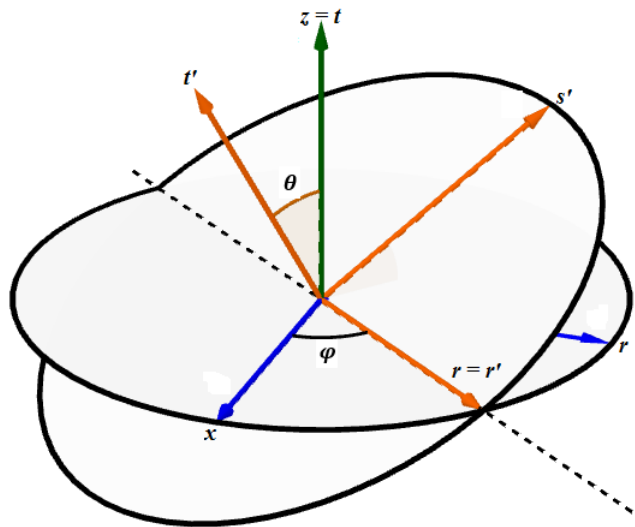


Figura 4: O sistema de coordenadas ζ é transformado no sistema ζ' pela rotação de ζ em torno de r pela matriz R_1

Finalmente, no terceiro estágio (figura 4), ocorre a rotação do sistema ζ' pelo ângulo ψ em torno do eixo t' através da matriz $R_3 \in SO(3)$ determinando o sistema de coordenadas $\lambda' = (x', y', z')$. A transformação dessa última etapa será $\lambda' = R_3(\psi)\zeta'$

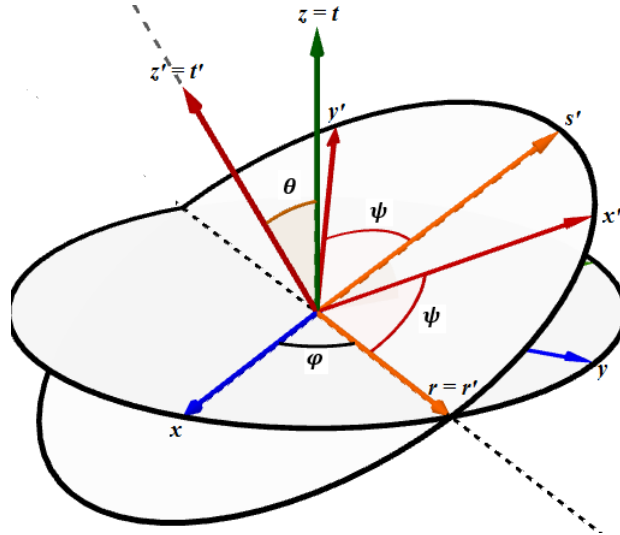


Figura 5: O sistema de coordenadas ζ' é transformado no sistema λ' pela rotação de ζ' em torno de t' pela matriz R_3

A matriz completa da transformação $\lambda' = R\lambda$ é dada, portanto, pelo seguinte produto matricial: $R = R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\varphi)$ e teremos a seguinte matriz:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\psi\sin\varphi - \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Observação 2.3.3. De acordo com BARATA (2020), os ângulos de Euler são amplamente utilizados na Mecânica para descrever a orientação de um corpo rígido, pois os ângulos φ , θ e ψ são parâmetros independentes e cada um pode variar de maneira arbitrária. Mais detalhes sobre a utilização dos ângulos de Euler podem ser obtidos em [2] (p. 1252) ou em qualquer bom livro de Mecânica Analítica.

2.3.4 Dimensão do grupo (de Lie) $SO(n)$

Proposição 2.6. A dimensão do grupo (de Lie) $SO(n)$ é dada por $\frac{n(n-1)}{2}$.

Demonstração. O grupo $SO(n)$ pode ser munido de uma estrutura de variedade diferenciável, o que o torna uma “hipersuperfície” mergulhada em \mathbb{R}^{n^2} .

Observamos que a dimensão de uma variedade diferenciável é igual a dimensão do espaço tangente a essa variedade em qualquer um de seus pontos (no caso de Grupos de Lie, isso equivale a dizer que a dimensão de um Grupo de Lie é igual a dimensão da sua Álgebra de Lie). Assim sendo, mostraremos que a dimensão do espaço tangente de $SO(n)$ sobre a matriz identidade I tem dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$. Tal espaço tangente, usualmente denotado por $so(n)$ é a álgebra de Lie do grupo $SO(n)$.

Seja $\gamma : (-1, 1) \rightarrow SO(n)$ uma curva regular com $\gamma(0) = I$. Sabemos que, para todo $t \in (-1, 1)$ vale $\gamma(t)\gamma(t)^T = I$. Derivando essa igualdade e usando a regra do produto para derivada de matrizes obtemos:

$$\gamma'(t)\gamma(t)^T + \gamma(t)(\gamma(t)^T)' = 0.$$

Calculando em $t = 0$ e usando que $\gamma(0) = \gamma(0)^T = I$ obtemos:

$$\gamma'(0) + \gamma'(0)^T = 0,$$

ou seja, um vetor tangente à variedade $SO(n)$ sobre a identidade I , é uma matriz $A = \gamma'(0)$ tal que $A + A^T = 0$, ou $A^T = -A$.

Se $A^T = -A$ observamos que a matriz A é a forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & -a_{(n-1)n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Facilmente observamos que A é univocamente determinada pelos $\frac{n(n-1)}{2}$ números reais acima da diagonal (nula).

Assim, vemos que $so(n)$ tem dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$, donde obtemos que a dimensão de $SO(n)$ é também $\frac{n(n-1)}{2}$. \square

O GRUPO DE LORENTZ

Neste capítulo abordaremos um grupo de rotações em \mathbb{R}^4 conhecido como Grupo de Lorentz¹ que possui grande utilidade na Teoria da Relatividade. Tal grupo se diferencia do grupo de rotações do Espaço Euclidiano abordado no capítulo anterior por principalmente estar definido no Espaço de Minkowski² cujo produto interno é não-degenerado e não positivo definido. Inicialmente, definiremos o produto interno pseudo-Euclidiano que servirá de base para determinar o produto interno Lorentziano. Após isso, definiremos o grupo de Lorentz em \mathbb{R}^n para em seguida apresentar o Grupo de Lorentz mais simples com duas dimensões (uma de espaço e outra de tempo) e então abordar o grupo de quatro dimensões (três de espaço e uma de tempo), objetivo principal deste capítulo. Por fim, demonstraremos que os elementos deste grupo determinam as famosas transformações de Lorentz, base para a Relatividade Restrita.

Definição 3.1. Uma forma bilinear simétrica (produto interno) $B : V \times V$, onde V é um espaço vetorial será:

1. *positiva-definida* se $B(v, v) > 0, \forall v \neq 0 \in V$;
2. *negativa-definida* se $B(v, v) < 0, \forall v \neq 0 \in V$;
3. *não-degenerada* se $B(v, w) = 0, \forall w \in V \implies v = 0$.

Definição 3.2. Para todo $n \geq 2$ definimos a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ conforme segue:

$$\langle x, y \rangle_v = x_1 y_1 + \cdots + x_{n-v} y_{n-v} - x_{n-v+1} y_{n-v+1} - \cdots - x_n y_n, \quad (3.1)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores em \mathbb{R}^n

1 Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

2 Hermann Minkowski (1849-1909)

Para diferenciar do produto interno Euclidiano convencional, chamaremos a forma bilinear definida acima de produto interno *pseudo-Euclidiano* conforme nomenclatura utilizada por COUTO E LYMBEROPOULOS (2018) em [13].

O espaço \mathbb{R}_ν^n é definido como o *espaço pseudo-Euclidiano de índice ν* . Esse espaço é provido das operações usuais de soma e multiplicação por escalar do espaço vetorial \mathbb{R}^n , munido com o produto interno pseudo-Euclidiano conforme a equação 3.1. O *espaço de Lorentz-Minkowski* é o espaço pseudo-Euclidiano para $\nu = 1$, ou seja, $\mathbf{L}^n = \mathbb{R}_1^n$. Para mais detalhes sobre o espaço de Lorentz-Minkowski ver [13].

Após as considerações apresentadas definimos o espaço de Lorentz-Minkowski para $n = 4$ que, por simplificação chamaremos de apenas *espaço de Minkowski*.

Definição 3.3. O espaço de Minkowski, denotado por \mathbf{L}^4 é o espaço de Lorentz-Minkowski em 4 dimensões ($n = 4$) provido das operações usuais de soma e multiplicação por um escalar de \mathbb{R}^4 , munido do produto interno pseudo-Euclidiano $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ que chamaremos de *produto interno Lorentziano*.

De acordo com a equação 3.1 temos que para todo vetor $x, y \in \mathbf{L}^4$ o produto interno Lorentziano será:

$$\langle x, y \rangle_L = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

Proposição 3.1. *O produto interno Lorentziano é provido das seguintes características:*

- i. *é não-degenerado;*
- ii. *é não positivo-definido;*
- iii. *é não negativo-definido.*

Demonstração. Provaremos (i) por contraposição, ou seja, dado $x \neq 0$, onde $x_i \neq 0$ então existe $y \neq 0$ tal que $\langle x, y \rangle_L = 0$. De fato, para que $\langle x, y \rangle_L = 0$ é necessário que $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = x_4y_4$, sendo assim dado $x = (1, 1, 1, 1)$ existe um $y \neq 0$, por exemplo, $y = (1, 1, 1, 3)$ tal que $\langle x, y \rangle_L = 0$, logo não-degenerado.

Para (ii) basta usar o contra-exemplo $x = (0, 0, 0, 1) \implies \langle x, x \rangle_L = -1$ logo não positivo-definido.

Por fim, para (iii) basta usar outro contra-exemplo $x = (1, 1, 1, 1) = 2$ logo não negativo-definido. \square

3.1 O GRUPO ORTOGONAL NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

Definição 3.4. O grupo $O(p,n)$. Grupo das matrizes ortogonais de elementos reais, cujas colunas formam uma base ortonormal de \mathbb{R}_v^n munido do produto interno Lorentziano.

Proposição 3.2. Toda matriz $L \in O(p,n)$ é invertível e sua inversa é determinada por um produto específico conforme segue:

$$L^{-1} = \eta(p,n)L^T\eta(p,n),$$

onde $\eta(p,n)$ é a matriz diagonal com p elementos $+1$ e n elementos -1 a qual, por simplicidade, denotaremos de agora em diante apenas por η .

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Seja uma matriz genérica $L \in O(p,n)$ de ordem $p+n$

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1(p+1)} & \cdots & a_{1(p+n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & a_{p(p+1)} & \cdots & a_{p(p+n)} \\ a_{(p+1)1} & \cdots & a_{(p+1)p} & a_{(p+1)(p+1)} & \cdots & a_{(p+1)(p+n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(p+n)1} & \cdots & a_{(p+n)p} & a_{(p+n)(p+1)} & \cdots & a_{(p+n)(p+n)} \end{pmatrix}.$$

Sua transposta será:

$$L^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} & a_{(p+1)1} & \cdots & a_{(p+n)1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{pp} & a_{(p+1)p} & \cdots & a_{(p+n)p} \\ a_{1(p+1)} & \cdots & a_{p(p+1)} & a_{(p+1)(p+1)} & \cdots & a_{(p+n)(p+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1(p+n)} & \cdots & a_{p(p+n)} & a_{(p+1)(p+n)} & \cdots & a_{(p+n)(p+n)} \end{pmatrix}.$$

Tomando agora o produto ηL^T temos:

$$\eta L^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} & a_{(p+1)1} & \cdots & a_{(p+n)1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{pp} & a_{(p+1)p} & \cdots & a_{(p+n)p} \\ -a_{1(p+1)} & \cdots & -a_{p(p+1)} & -a_{(p+1)(p+1)} & \cdots & -a_{(p+n)(p+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1(p+n)} & \cdots & -a_{p(p+n)} & -a_{(p+1)(p+n)} & \cdots & -a_{(p+n)(p+n)} \end{pmatrix}.$$

Assim, multiplicando o resultado acima à direita por η temos:

$$\eta L^T \eta = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{p1} & -a_{(p+1)1} & \cdots & -a_{(p+n)1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{pp} & -a_{(p+1)p} & \cdots & -a_{(p+n)p} \\ -a_{1(p+1)} & \cdots & -a_{p(p+1)} & a_{(p+1)(p+1)} & \cdots & a_{(p+n)(p+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1(p+n)} & \cdots & -a_{p(p+n)} & a_{(p+1)(p+n)} & \cdots & a_{(p+n)(p+n)} \end{pmatrix}.$$

Por fim, multiplicando a matriz obtida pela matriz original L temos:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_{i1}^2 - \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i1}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{i1} a_{ip} - \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i1} a_{ip} & \sum_{i=1}^p a_{i1} a_{i(p+1)} - \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i1} a_{i(p+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{i1} a_{i(p+n)} - \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i1} a_{i(p+n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p a_{ip} a_{i1} - \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{ip} a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{ip}^2 - \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{ip}^2 & \sum_{i=1}^p a_{ip} a_{i(p+1)} - \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{ip} a_{i(p+1)} & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{ip} a_{i(p+n)} - \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{ip} a_{i(p+n)} \\ -\sum_{i=1}^p a_{i(p+1)} a_{i1} + \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i(p+1)} a_{i1} & \cdots & -\sum_{i=1}^p a_{i(p+1)} a_{ip} + \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i(p+1)} a_{ip} & -\sum_{i=1}^p a_{i(p+1)}^2 + \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i(p+1)}^2 & \cdots & -\sum_{i=1}^p a_{i(p+1)} a_{i(p+n)} + \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i(p+1)} a_{i(p+n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{i=1}^p a_{i(p+n)} a_{i1} + \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i(p+n)} a_{i1} & \cdots & -\sum_{i=1}^p a_{i(p+n)} a_{ip} + \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i(p+n)} a_{ip} & -\sum_{i=1}^p a_{i(p+n)} a_{i(p+1)} + \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i(p+n)} a_{i(p+1)} & \cdots & -\sum_{i=1}^p a_{i(p+n)}^2 + \sum_{i=p+1}^{p+n} a_{i(p+n)}^2 \end{pmatrix}.$$

Porém pela definição do produto interno pseudo-Euclidiano temos, pela equação 3.1, que a matriz acima fica simplificada da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_p \rangle & \langle a_1, a_{p+1} \rangle & \cdots & \langle a_1, a_{p+n} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_p, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_p, a_p \rangle & \langle a_p, a_{p+n} \rangle & \cdots & \langle a_p, a_{p+n} \rangle \\ -\langle a_{p+1}, a_1 \rangle & \cdots & -\langle a_{p+1}, a_p \rangle & -\langle a_{p+1}, a_{p+1} \rangle & \cdots & -\langle a_{p+1}, a_{p+n} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\langle a_{p+n}, a_1 \rangle & \cdots & -\langle a_{p+n}, a_p \rangle & -\langle a_{p+n}, a_{p+1} \rangle & \cdots & -\langle a_{p+n}, a_{p+n} \rangle \end{pmatrix}.$$

Como L é ortogonal temos

$$\eta L^T \eta L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

O que conclui a demonstração. □

Sendo assim, podemos reescrever a definição do grupo $O(p, n)$ conforme segue:

$$O(p, n) = \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, p+n), L^{-1} = \eta L^T \eta\}$$

Proposição 3.3. *Toda matriz $L \in O(p, n)$ possui determinante 1 ou -1.*

Demonstração. Seja I_L a matriz identidade, pela definição de $L \in O(p, n)$ temos que $L\eta L^T \eta = I$. Então,

$$1 = \det(I_L) = \det(L\eta L^T \eta) = \det(L)\det(L^T)(\det(\eta))^2 = (\det(L))^2.$$

Portanto, se $L \in O(p, n)$, temos que $\det(L) = \pm 1$ □

Definição 3.5. O subgrupo $SO(p, n) \subseteq O(p, n)$ é composto pelas matrizes de $O(p, n)$ com determinante igual a 1.

$$SO(p, n) = \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, p+n), L^{-1} = \eta L^T \eta \text{ e } \det(L) = 1\}$$

Verifica-se de forma análoga à Proposição 2.5 que $SO(p, n)$ é um subgrupo de $O(p, n)$

3.2 OS GRUPOS DE LORENTZ

No que diz respeito às transformações cujas matrizes pertencem ao grupo $O(p, n)$ estudaremos os casos para o grupo $O(1, 3)$, ou seja, utilizaremos o grupo formado por matrizes ortogonais de elementos reais, cujas colunas formam uma base ortonormal do espaço \mathbb{L}^4 , conforme definido em 3.3. Sendo assim, esse grupo será provido do

produto interno Lorentziano que pode ser representado por uma matriz η , chamada matriz da *métrica de Minkowski*:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Para fazer uma familiaridade com o apelo físico das Transformações de Lorentz e coerência com a notação do grupo $(1, 3)$ faremos uma permutação dos eixos de η de tal forma que apenas seu primeiro termo será positivo, ou seja, adotaremos os parâmetros $p = 1$ e $n = 3$ e assim teremos:

$$\eta(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso o produto Lorentziano (ou métrica de Minkowski) ficará definido por:

$$\langle x, y \rangle_L = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4$$

O fato de adotarmos esses parâmetros tem relação direta com as transformações possíveis no *Espaço de Minkowski* ou, conforme o mesmo definiu, *espaço-tempo*. Segundo argumenta Barata (2020) em [2], p. 1161:

“... é fato elementar da natureza ser possível descrever um evento por meio de quatro números que especificam sua posição e seu instante de tempo, medidos em algum sistema de referência.”

Sendo assim, é conveniente os parâmetros utilizados, sendo que, p representa o instante em que o evento ocorre e n as três coordenadas de posição do evento do espaço Euclidiano convencional. Portanto, o conceito de espaço-tempo tem similaridade com o espaço matemático \mathbb{R}^4 , porém com outra forma de medir ângulos e comprimentos.

A métrica de Minkowski é elemento fundamental do grupo $O(1,3)$ que definiremos adiante. Tal grupo é denominado *Grupo de Lorentz* cujas matrizes determinam as transformações de Lorentz cruciais para a Teoria da Relatividade Restrita.

Por simplicidade, iniciaremos abordando as características do grupo $O(1, 1)$, ou seja, o Grupo de Lorentz para os parâmetros $p = 1$ e $n = 1$.

3.2.1 O grupo de Lorentz em 1 + 1 dimensões

Definição 3.6. O grupo $O(1, 1)$ (grupo de Lorentz em 1 + 1 dimensões) é definido como:

$$O(1, 1) = \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2), L^{-1} = \eta L^T \eta\},$$

onde

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim L é uma matriz quadrada de ordem 2×2 com $\det(L) \neq 0$, logo é invertível. Considerando $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pelo método de Laplace determinamos a inversa de L

$$L^{-1} = \frac{1}{\det(L)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Por definição, temos que $\eta L^T \eta = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$.

Pela proposição 3.3, $\det(L) = \pm 1$, portanto temos que:

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}, \text{ se } \det(L) = 1$$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}, \text{ se } \det(L) = -1$$

Definição 3.7. Define-se o subgrupo $SO(1, 1) \subseteq O(1, 1)$ com determinante unitário conforme segue:

$$SO(1, 1) = \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2), L^{-1} = \eta L^T \eta \text{ e } \det(L) = 1\},$$

Mostraremos a seguir como determinar a forma geral das matrizes de $SO(1, 1)$ e conseqüentemente das matrizes de $O(1, 1)$ conforme considerações inspiradas em [2].

Seja $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(1, 1)$, então $L^{-1} = \eta L \eta$, assim $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$.

Logo temos que $a = d$ e $b = c$. Como $\det(L) = 1$ temos que $a^2 - b^2 = 1$. Sendo assim, podemos reescrever o subgrupo $SO(1, 1)$ da seguinte forma:

$$SO(1, 1) = \left\{ L \in Mat(\mathbb{R}, 2) \mid L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } a^2 - b^2 = 1 \right\}$$

A relação $a^2 - b^2 = 1$ pode ser escrita como $a = \pm\sqrt{1+b^2}$. Sendo assim, $SO(1, 1)$ pode ser redefinido por dois componentes conexos, que denotaremos Λ_+^\uparrow e Λ_+^\downarrow :

$$\Lambda_+^\uparrow = \left\{ L \in Mat(\mathbb{R}, 2) \mid L = \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & b \\ b & \sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\Lambda_+^\downarrow = \left\{ L \in Mat(\mathbb{R}, 2) \mid L = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+b^2} & b \\ b & -\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Parametrizando $b \in \mathbb{R}$ na forma $b = \sinh(\alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, como $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$ verificamos que:

$$\Lambda_+^\uparrow = \left\{ L \in Mat(\mathbb{R}, 2) \mid L = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\Lambda_+^\downarrow = \left\{ L \in Mat(\mathbb{R}, 2) \mid L = \begin{pmatrix} -\cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & -\cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Os elementos de $O(1, 1)$ que não pertencem à $SO(1, 1)$ possuem determinante igual a -1 . Logo, são matrizes que satisfazem $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$ e portanto são da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ com $a^2 - b^2 = -1$.

Procedendo de forma análoga aos componentes conexos de $SO(1, 1)$ temos que o grupo que contém os elementos de $O(1, 1)$ com exceção dos elementos de $SO(1, 1)$ pode ser definido por dois componentes conexos, que denotaremos Λ_-^\uparrow e Λ_-^\downarrow :

$$\Lambda_-^\uparrow = \left\{ L \in Mat(\mathbb{R}, 2) \mid L = \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & b \\ -b & -\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\Lambda_-^\downarrow = \left\{ L \in Mat(\mathbb{R}, 2) \mid L = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+b^2} & b \\ -b & \sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Parametrizando novamente $b \in \mathbb{R}$ na forma $b = \sinh(\alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, verificamos que:

$$\Lambda_{-}^{\uparrow} = \left\{ L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid L = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & -\cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\Lambda_{-}^{\downarrow} = \left\{ L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 2) \mid L = \begin{pmatrix} -\cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ -\sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Portanto o grupo $O(1, 1)$ é a união de quatro componentes conexos:

$$O(1, 1) = \Lambda_{+}^{\uparrow} \cup \Lambda_{+}^{\downarrow} \cup \Lambda_{-}^{\uparrow} \cup \Lambda_{-}^{\downarrow}.$$

A notação utilizada para os componentes de $O(1, 1)$ segue o seguinte padrão: o símbolo $+$ é utilizado para componentes cujas matrizes $L \in O(1, 1)$ possuem determinante igual a 1 e o símbolo $-$ quando o determinante de $L \in O(1, 1)$ é igual a -1 . Já os símbolos \uparrow e \downarrow são utilizados quando o elemento da primeira linha e primeira coluna de $L \in O(1, 1)$, que denotaremos de L_{00} , é tal que $L_{00} > 0$ e $L_{00} < 0$, respectivamente.

Expandindo a ideia do grupo $O(1, 1) \subseteq O(p, n)$ para $p = 1$ e $n = 3$ definiremos o grupo $O(1, 3)$.

3.2.2 O grupo de Lorentz

Definição 3.8. O grupo das matrizes ortogonais 4×4 que satisfazem a relação abaixo é chamado de grupo de Lorentz.

$$O(1, 3) = \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4), L^{-1} = \eta L^T \eta\}.$$

Por simplicidade e coerência com a conclusão do grupo $O(1, 1)$ denotaremos $O(1, 3)$ por Λ .

Sabemos pela proposição 3.3 que $\det(L) = \pm 1$, assim para as matrizes L que satisfazem $\det(L) = +1$, define-se o subgrupo $SO(1, 3)$, denotado por Λ_{+} .

$$\Lambda_{+} = SO(1, 3) = \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4), L^{-1} = \eta L^T \eta \text{ e } \det(L) = 1\}.$$

Já o subgrupo de Λ com determinante igual a -1 denotaremos por Λ_{-} :

$$\Lambda_{-} = \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4), L^{-1} = \eta L^T \eta \text{ e } \det(L) = -1\}.$$

Por sua vez Λ_+ e Λ_- possuem dois componentes conexos conforme segue:

$$\begin{aligned}\Lambda_+^\uparrow &= \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4), L^{-1} = \eta L^T \eta, \det(L) = 1 \text{ e } L_{00} > 0\}, \\ \Lambda_+^\downarrow &= \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4), L^{-1} = \eta L^T \eta, \det(L) = 1 \text{ e } L_{00} < 0\}, \\ \Lambda_-^\uparrow &= \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4), L^{-1} = \eta L^T \eta, \det(L) = -1 \text{ e } L_{00} > 0\}, \\ \Lambda_-^\downarrow &= \{L \in \text{Mat}(\mathbb{R}, 4), L^{-1} = \eta L^T \eta, \det(L) = -1 \text{ e } L_{00} < 0\}.\end{aligned}$$

Portanto $\Lambda = \Lambda_+^\uparrow \cup \Lambda_+^\downarrow \cup \Lambda_-^\uparrow \cup \Lambda_-^\downarrow$.

Com o objetivo de estudarmos a estrutura das matrizes do grupo de Lorentz vamos abordar dois de seus subgrupos importantes.

- **Os subgrupos de rotações**

Se R é uma matriz 4×4 da forma

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \boxed{r_0} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

onde r_0 é uma matriz que pertence a $O(3)$, ou seja, uma matriz ortogonal característica do grupo de rotações, então $R \in \Lambda$, pois satisfaz $R^{-1} = \eta R \eta$. Sendo assim, o conjunto das matrizes da forma de R acima forma um subgrupo de Λ . Chamaremos esse subgrupo conforme a notação utilizada em [2]: *Rot*.

Por sua vez, *Rot* possui um subgrupo denotado por *SRot* formado por matrizes da forma de R tal que $\det(R) = 1$. Neste caso, r_0 é uma matriz que pertence a $SO(3)$, como por exemplo:

$$r_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- **Os boosts de Lorentz**

Este conjunto de matrizes de Lorentz de importância na Física é formado pelos “*boosts*”³ de Lorentz. Para determinar as matrizes dos *boosts de Lorentz* é conveniente

³ Conforme [2] este vocabulário é geralmente utilizado em Física para denominar transformações entre sistemas de coordenadas inerciais que envolvam apenas mudanças de velocidades. Do inglês *to boost*: impulsionar, empurrar, impelir.

escrever as matrizes de Lorentz $L \in \Lambda$ como a exponencial de uma matriz ω (ROCHA et al.,2013 [17]):

$$L = e^{\omega}.$$

onde

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & -d & 0 & f \\ 0 & -e & -f & 0 \end{pmatrix},$$

ou ainda,

$$\omega = aM_a + bM_b + cM_c + dM_d + eM_e + fM_f, \quad (3.2)$$

tal que a, \dots, f são parâmetros reais arbitrários.

É possível escrever de outra forma a expressão acima. Definindo a relação antissimétrica com dois índices, $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$, conforme segue:

$$a = \omega^{01}, b = \omega^{02}, c = \omega^{03}, d = \omega^{12}, e = \omega^{13}, f = \omega^{23}. \quad (3.3)$$

Da mesma forma enumeramos as matrizes M_a, \dots, M_f :

$$M_a = M_{01}, M_b = M_{02}, M_c = M_{03}, M_d = M_{12}, M_e = M_{13}, M_f = M_{23}. \quad (3.4)$$

Desta forma temos que $\omega = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}$.

E portanto, temos que:

$$L = e^{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}}, \quad (3.5)$$

Da Eq. (3.2) vamos tomar como único parâmetro não-nulo $a = \phi$. Logo:

$$\phi M_{01} = \frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} \implies L(\phi) = e^{\phi M_{01}}.$$

Vamos calcular a relação acima de acordo com as propriedades da exponencial de matrizes. Temos que:

$$\phi M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & \phi & 0 & 0 \\ \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\phi M_{01})^2 = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\phi M_{01})^3 = \begin{pmatrix} 0 & \phi^3 & 0 & 0 \\ \phi^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

assim por diante. Logo a exponencial fica:

$$e^{\phi M_{01}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\phi^2}{2!} + \dots & \phi + \frac{\phi^3}{3!} + \dots & 0 & 0 \\ \phi + \frac{\phi^3}{3!} + \dots & 1 + \frac{\phi^2}{2!} + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Expandindo a exponencial de acordo com a série de Taylor temos que:

$$e^{\phi} = 1 + \phi + \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^3}{3!} + \dots,$$

$$e^{-\phi} = 1 - \phi + \frac{\phi^2}{2!} - \frac{\phi^3}{3!} + \dots$$

Subtraindo membro a membro as equações acima temos:

$$2\phi + 2\frac{\phi^3}{3!} + \dots = e^{\phi} - e^{-\phi} \implies \phi + \frac{\phi^3}{3!} + \dots = \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{2} = \sinh(\phi).$$

Agora somando membro a membro as mesmas equações temos:

$$2 + 2\frac{\phi^2}{2!} + \dots = e^{\phi} + e^{-\phi} \implies 1 + \frac{\phi^2}{2!} + \dots = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2} = \cosh(\phi).$$

Portanto,

$$L = e^{\phi M_{01}} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.3 As matrizes do grupo de Lorentz

Após as considerações sobre os dois subgrupos de Λ apresentaremos algumas matrizes de transformação deste grupo. Cabe ressaltar que tais matrizes pertencem apenas ao componente $\Lambda_{\uparrow}^{\uparrow} \in \Lambda$, pois os demais componentes não possuem a estrutura de grupo pois não são fechados para a operação de produto.

Do subgrupo de rotações $SRot$ temos as seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que determinam rotações no espaço-tempo por um ângulo θ no sentido anti-horário em torno dos eixos espaciais x, y e z , respectivamente. É fácil notar que $SRot$ é isomorfo à $SO(3)$.

Dos *boosts* de Lorentz determinamos outras três matrizes que pertencem ao grupo de Lorentz:

$$\begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & 0 & \sinh(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & 0 & \cosh(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & 0 & 0 & \sinh(\phi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\phi) & 0 & 0 & \cosh(\phi) \end{pmatrix},$$

que determinam transformações no eixo temporal e em um eixo espacial entre dois referenciais inerciais. Tais transformações são chamadas *transformações de Lorentz* que demonstraremos a seguir.

3.2.4 As transformações de Lorentz

Vamos agora à interpretação física das matrizes pertencentes ao grupo de Lorentz, ou seja, partindo de uma matriz específica de Λ queremos obter as equações das Transformações de Lorentz. Para tal utilizaremos a matriz característica de $L_+^\uparrow \in \Lambda_+^\uparrow$.

Estamos interessados em mostrar que a matriz L_+^\uparrow é uma matriz de transformação entre dois referenciais inerciais que se distanciam um do outro com velocidade constante. Denotaremos os referenciais de R e R' , sendo que no instante $t = 0$ os referenciais coincidem, quando então R' se desloca com velocidade v constante em relação à R . Em certo instante t um evento e ocorre na origem de R' . Os referenciais R e R' determinam coordenadas no *espaço-tempo*, ou seja, possuem quatro coordenadas $R = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ e $R' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$, sendo a primeira a coordenada temporal e as demais coordenadas espaciais. Aplicando a transformação $R' = L_+^\uparrow R$ veremos qual a relação entre as coordenadas temporal e espacial de R e R' .

De $R' = L_+^\uparrow R$ temos que:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Logo podemos escrever cada coordenada de R' conforme segue:

$$x'_0 = \cosh(\phi)x_0 + \sinh(\phi)x_1 \quad (3.6)$$

$$x'_1 = \sinh(\phi)x_0 + \cosh(\phi)x_1 \quad (3.7)$$

$$x'_2 = x_2 \quad (3.8)$$

$$x'_3 = x_3 \quad (3.9)$$

Interpretando fisicamente as transformações acima e para que a equação (3.6) fique dimensionalmente correta ao substituirmos x'_0 por t' e x_0 por t (pois assumimos que x'_0 e x_0 são as coordenadas temporais de R' e R , respectivamente) fazemos a seguinte substituição:

$$x'_0 = ct' \text{ e } x_0 = ct,$$

onde c é uma constante que representa o valor da velocidade da luz no vácuo para qualquer referencial inercial. Assim:

$$t' = \cosh(\phi)t + \sinh(\phi)\frac{x_1}{c} \quad (3.10)$$

$$x'_1 = \sinh(\phi)ct + \cosh(\phi)x_1 \quad (3.11)$$

$$x'_2 = x_2 \quad (3.12)$$

$$x'_3 = x_3 \quad (3.13)$$

Como supomos que R' se desloca com velocidade v constante na direção x em relação a R e em certo instante t um evento e ocorre na origem de R' queremos verificar qual a relação entre as coordenadas temporais t' e t e entre as coordenadas espaciais x'_1 e x_1 . As outras coordenadas espaciais x_2 e x_3 permanecem inalteradas.

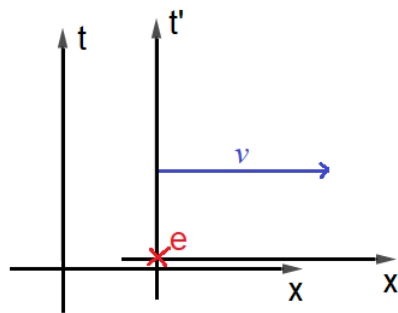


Figura 6: Evento e ocorre na origem de R' que se desloca com velocidade v em relação a R

Pelas considerações adotadas temos que $x'_1 = 0$ e $x_1 = vt$, que substituindo na equação (3.11) fica:

$$0 = \sinh(\phi)ct + \cosh(\phi)vt \implies \operatorname{tgh}(\phi) = -\frac{v}{c}. \quad (3.14)$$

A partir da identidade $\cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1$, temos, em conjunto com a equação acima,

$$\sinh^2(\phi) = \frac{v^2}{c^2}(1 + \sinh^2(\phi)) \implies \sinh(\phi) = \pm \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Como $\sinh(\phi) = -\frac{v}{c}\cosh(\phi)$ e $\cosh(\phi) > 0 \forall \phi \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Por fim, como $\sinh(\phi) = \operatorname{tgh}(\phi)\cosh(\phi)$,

$$\sinh(\phi) = -\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Retornando para as transformações (eq. (3.10) a (3.13)) temos:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x'_1 &= \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= x_3. \end{aligned}$$

As transformações acima são chamadas *Transformações de Lorentz* e descrevem a relação do tempo e espaço de um referencial R' que se move com velocidade constante v em relação a outro referencial R . Tais transformações estão em consonância com a Teoria da *Relatividade Restrita* de Einstein⁴. Maiores detalhes sobre a Teoria da Relatividade podem ser encontrados em [7].

Cabe ressaltar que poderíamos utilizar qualquer matriz $L \in \Lambda$, porém para isso precisamos que exista uma identificação com a estrutura de grupo para os componentes Λ_{-}^{\uparrow} , Λ_{+}^{\downarrow} e Λ_{-}^{\downarrow} , já que esses não são fechados para a operação de produto. Para tal utilizaremos outro subgrupo de $O(1,3)$, o qual definimos conforme abordado em [2] (p. 1171):

⁴ Albert Einstein (1879 - 1955)

- Troca de paridade e reversão temporal

As matrizes a seguir são elementos do grupo de Lorentz:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ e } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

É fácil verificar que tais matrizes pertencem à Λ , pois respeitam a condição $L^{-1} = \eta L^T \eta$. Além disso, verifica-se que $P = P_1 P_2 P_3$.

As matrizes P, P_1, P_2 e P_3 são chamadas matrizes de *troca de paridade*, pois provocam reversões dos eixos de coordenadas espaciais de \mathbb{R}^4 . A matriz T é chamada matriz de *reversão temporal*, pois ocasiona inversão da coordenada temporal de \mathbb{R}^4 .

Agora utilizando as matrizes P (*troca de paridade*) e T (*reversão temporal*) temos:

Seja $L_+^\uparrow \in \Lambda_+^\uparrow$, assim:

$$L_+^\uparrow = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definimos as matrizes dos demais componentes de Λ conforme segue:

- $L_+^\downarrow = TPL$ tal que $L \in \Lambda_+^\uparrow$

Assim:

$$L_+^\downarrow = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & -\cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$L_{+}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $L_{-}^{\uparrow} = P_1 L$ tal que $L \in \Lambda_{-}^{\uparrow}$

Logo:

$$L_{-}^{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & -\cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$L_{-}^{\uparrow} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $L_{-}^{\downarrow} = TL$ tal que $L \in \Lambda_{-}^{\downarrow}$

Logo:

$$L_{-}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cosh(\phi) & \sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$L_{-}^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, utilizando tais definições temos a identificação com a estrutura de grupo conforme queríamos. Os componentes Λ_{-}^{\uparrow} , Λ_{+}^{\downarrow} e Λ_{-}^{\downarrow} são chamados de classes laterais de um subgrupo normal.

O PARADOXO DOS GÊMEOS

Quando foi enunciada por Einstein, a Teoria da Relatividade Especial (TRE) trouxe desconfianças do meio científico, pois mesmo sendo bem fundamentada era difícil abandonar a ideia de tempo absoluto que era difundida desde Galileu. Como era de se esperar, cientistas e pensadores elaboraram conceitos e/ou experimentos que poderiam refutar as ideias de Einstein. Talvez a mais famosa de todas ficou conhecida como o Paradoxo dos Gêmeos, não por ter conseguido derrubar a TRE e sim por sua originalidade. Neste capítulo mostraremos sua origem e iremos extrapolar esse paradoxo, sendo que inicialmente foi proposto para referenciais inerciais e iremos mostrar que para referenciais não inerciais a ideia de gêmeos com idades distintas pode ser algo não tão absurdo.

Idealizado por Paul Langevin e discutido pela primeira vez na Primeira Conferência Solvay em 1911 na cidade de Bruxelas (Bélgica), o paradoxo dos gêmeos foi enunciado como uma simples “experiência mental” cujo objetivo era mostrar contradições na Teoria da Relatividade proposta por Einstein seis anos antes.

Nesta experiência dois gêmeos se separam em um dado instante, iniciando um deles uma viagem a uma estrela distante em uma nave que se desloca a uma velocidade próxima da velocidade da luz e regressa à Terra no local onde se separou de seu irmão. Ao encontrar-se com seu gêmeo que ficou na Terra verifica que este está mais velho, mostrando assim que o gêmeo viajante envelhece mais lentamente.

O paradoxo aparece quando a experiência for realizada do ponto de vista do gêmeo viajante, este pode afirmar que quem se deslocou foi o gêmeo que está na Terra e posteriormente retornou até o ponto inicial. Neste sentido, o gêmeo que ficou na Terra está mais novo do que aquele que está na nave. Porém esse paradoxo é apenas aparente, pois não existe simetria nas duas situações descritas. O gêmeo viajante não

está em um referencial inercial¹, sendo que o mesmo acelera ao partir da Terra e ao inverter o sentido de movimento, logo fica claro que ele quem está viajando e não o contrário desfazendo assim o paradoxo. [10].

4.1 O PARADOXO PARA REFERENCIAIS INERCIAIS

Desfeito o paradoxo, vamos exemplificar uma situação e verificar o estranho efeito da Relatividade Restrita:

Exemplo 4.1. Vamos chamar os gêmeos de A e B e considerar que B é o viajante espacial e viaja até uma estrela distante da Terra com velocidade igual a $0,8c$, onde c representa a velocidade da luz. Considere ainda que o tempo de ida e volta de B é de 20 anos, tempo este medido pelo relógio de A que permaneceu na Terra, qual será o tempo desta viagem medido pelo relógio de B ?

Antes de dar a resposta vale a pena fazer algumas considerações: A e B estão em referenciais diferentes, enquanto A permanece em repouso na Terra (referencial R), B desloca-se com velocidade $v = 0,8c$ em relação ao referencial R , logo está em outro referencial R' . Estamos supondo que R' é um referencial inercial, ou seja, estamos desconsiderando as acelerações que B teve ao partir da Terra, ao inverter o sentido de movimento quando atingiu a estrela e quando “aterrissa” para reencontrar A .

Dadas as considerações podemos dar a solução utilizando a primeira equação das Transformações de Lorentz determinadas na página 55:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

onde x_1 representa a distância percorrida por B durante a viagem, t' o tempo medido pelo relógio de B e t o tempo medido pelo relógio de A . Como não possuímos o valor de x_1 faremos uma pequena alteração na equação acima:

Como B se desloca com velocidade constante, da cinemática clássica temos que $x_1 = vt$, assim:

$$t' = \frac{t - \frac{v^2}{c^2}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies t' = \frac{t(1 - \frac{v^2}{c^2})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.1)$$

¹ Um referencial será dito inercial se para todo corpo neste referencial, na ausência de forças externas, mantiver constante seu vetor velocidade

Apenas analisando a última equação é fácil perceber que $t' < t$, pois como $v < c$ o termo que multiplica t é menor que 1. Utilizando as informações fornecidas temos que: $t' = 20\sqrt{1 - \frac{0,64c^2}{c^2}} = 20 \cdot 0,6 = 12$ anos. Portanto o gêmeo viajante, ao retornar, estará 8 anos mais novo do que o gêmeo que ficou na Terra.

O diagrama representado na figura a seguir, adaptado de [11], ilustra a viagem apenas de ida de B no espaço-tempo em direção à estrela.

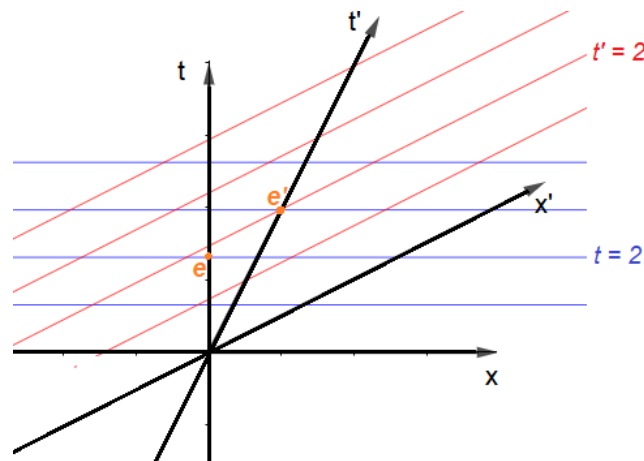


Figura 7: Referenciais R e R'

Nesta figura, os eixos $t \times x$ representa o referencial R onde o gêmeo A permaneceu em repouso e os eixos $t' \times x'$ representa o referencial R' do gêmeo viajante B . Cada par de eixos está graduada com unidades de tempo e são representados eventos (e em R e e' em R') que ocorrem em cada referencial para o tempo próprio de duas unidades. Enquanto que para o gêmeo A o evento e ocorre em $t = 2$ o evento e' ocorrerá em $t = 3$, mas para o gêmeo viajante B o evento e' ocorre em seu relógio próprio em $t' = 2$, sendo assim enquanto que para A o evento e' demora 3 unidades de tempo para acontecer para B este evento ocorre em 2 anos mostrando assim que para B o tempo é mais lento.

A justificativa para os eixos no referencial R' serem inclinados em relação aos eixos de R refere-se ao segundo Postulado da Teoria da Relatividade Especial de Einstein que afirma que o módulo da velocidade da luz é constante independente do referencial adotado. Sendo assim, como a velocidade é determinada pela razão entre a variação da posição (Δx) e a variação de tempo (Δt) para manter essa razão constante, as projeções ortogonais entre o caminho do raio de luz e os eixos deve ser constante. A figura a seguir ilustra a situação:

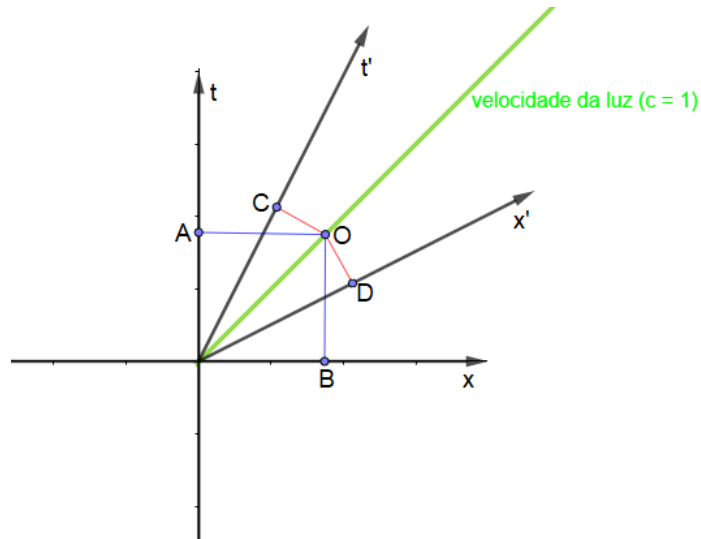


Figura 8: A velocidade da luz ($c = 1$) é constante independente do referencial. Perceba que a razão entre os segmentos que ligam a “linha de luz” aos eixos de R e a razão dos segmentos que ligam “a linha de luz” aos eixos de R’ são iguais, ou seja, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$.

Agora vejamos o diagrama da viagem de ida e volta do gêmeo B conforme exemplificado.

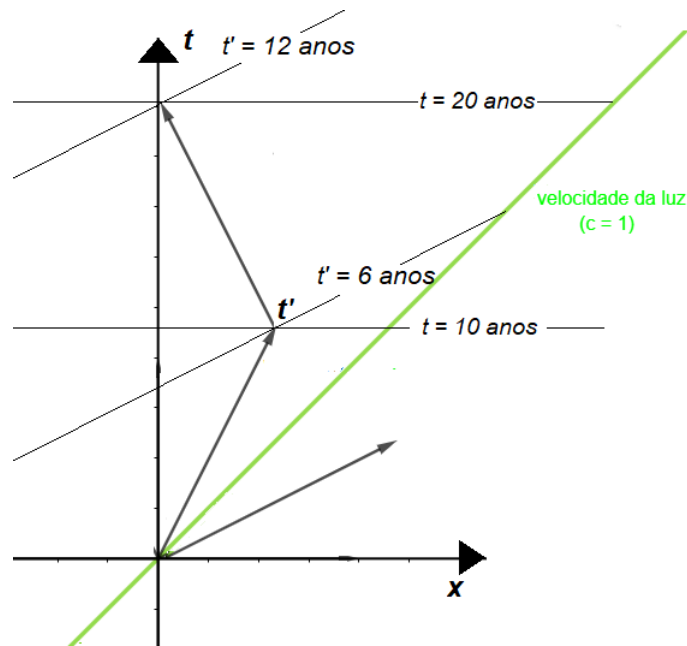


Figura 9: Para uma velocidade de $v = 0,8c$ o tempo de viagem do gêmeo B é de 12 anos enquanto que para o gêmeo que ficou na Terra esse tempo é de 20 anos.

4.2 O PARADOXO PARA REFERENCIAIS NÃO INERCIAIS

Vamos abordar agora o caso mais “real” do Paradoxo dos Gêmeos, ou seja, iremos considerar as acelerações do gêmeo viajante e exemplificar a situação.

Para tal considere que gêmeo viajante B realize os seguintes movimentos:

1. parte do repouso do mesmo ponto onde está o gêmeo A estacionário na Terra, acelera com uma aceleração constante a por certo tempo t_A medido no relógio de A até atingir uma velocidade v em relação à A ;
2. viaje com velocidade constante v durante um tempo t_C também medido no relógio de A ;
3. desacelera com aceleração de mesmo módulo a que adquiriu no primeiro passo pelo mesmo tempo t_A até atingir o repouso para inverter o sentido de movimento;
4. volta a acelerar com aceleração a porém agora em sentido oposto ao início da viagem (na direção de A) pelo tempo t_A até atingir a mesma velocidade v porém com sentido oposto à inicial;
5. mantém constante sua velocidade v pelo intervalo de tempo t_C ;
6. por fim, reduz sua velocidade com a mesma desaceleração a pelo mesmo tempo t_A até aterrissar em encontrar seu irmão A alguns anos mais velho do que ele.

A aceleração a é chamada de aceleração própria de B , que é a aceleração do gêmeo viajante absoluta invariante (ver [9] p.7 nota de rodapé [12]). Assim temos, de acordo com a *Hipótese do Relógio*², que o tempo próprio t' do gêmeo B é dado por:

$$t' = \int \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt \quad (4.2)$$

De acordo com a equação (3.14), página 55, temos que $-\frac{v}{c} = \operatorname{tgh}(\phi)$, onde ϕ é um parâmetro arbitrário. Assim temos que

$$v = -c \operatorname{tgh}(\phi),$$

² A Hipótese do Relógio é uma generalização da dilatação do tempo proposta por Einstein. Os dois postulados da Relatividade Especial foram formulados para referenciais inerciais, no caso de referenciais não inerciais basta considerar o movimento total como uma composição de movimentos inerciais de deslocamento infinitesimal, todos com velocidades constantes. Ver mais em [9]

derivando essa equação em relação a ϕ fica

$$\frac{dv}{d\phi} = -c \operatorname{sech}^2(\phi). \quad (4.3)$$

Além disso pela definição de aceleração temos que

$$a = \frac{dv}{dt},$$

logo a equação (4.3) fica

$$\frac{adt}{d\phi} = -c \operatorname{sech}^2(\phi) \implies dt = \frac{-c}{a} \operatorname{sech}^2(\phi) d\phi.$$

Agora podemos reescrever a equação (4.2) da seguinte forma:

$$t' = \int \sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2(\phi)} \left(-\frac{c}{a} \operatorname{sech}^2(\phi) \right) d\phi,$$

usando a relação $\operatorname{sech}^2(\phi) + \operatorname{tgh}^2(\phi) = 1$, a equação acima fica

$$-\frac{c}{a} \int \operatorname{sech}^3(\phi) d\phi,$$

cuja integração dá

$$t' = -\frac{c}{2a} \operatorname{arctg}(\operatorname{senh}(\phi)) + \operatorname{sech}(\phi) \operatorname{tgh}(\phi),$$

ou seja,

$$t' = -\frac{c}{2a} \operatorname{arcsen}(\operatorname{tgh}(\phi)) + \sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2(\phi)} \operatorname{tgh}(\phi) \quad (4.4)$$

Observação 4.2.1. Na equação acima usamos a relação $\operatorname{arctg}(\operatorname{senh}(\phi)) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tgh}(\phi))$.

Vamos fazer a verificação de tal relação:

Tomando $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{senh}(\phi))$ temos que

$$\operatorname{tg}(y) = \operatorname{senh}(\phi) \implies \operatorname{tg}^2(y) = \operatorname{senh}^2(\phi).$$

Usando a relação fundamental $\operatorname{cosh}^2(\phi) - \operatorname{senh}^2(\phi) = 1$ vem

$$\operatorname{tg}^2(y) = \operatorname{cosh}^2(\phi) - 1 \implies \operatorname{tg}^2(y) + 1 = \operatorname{cosh}^2(\phi),$$

ou seja,

$$\operatorname{sec}^2(y) = \operatorname{cosh}^2(\phi) \implies \operatorname{cos}^2(y) = \operatorname{sech}^2(\phi).$$

Usando as relações fundamentais da trigonometria e da trigonometria hiperbólica temos:

$$1 - \operatorname{sen}^2(y) = 1 - \operatorname{tgh}^2(\phi) \implies \operatorname{sen}^2(y) = \operatorname{tgh}^2(\phi).$$

Como as funções na última igualdade acima são positivas para todo y e ϕ podemos escrever

$$\operatorname{sen}(y) = \operatorname{tgh}(\phi) \implies y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tgh}(\phi)), \phi \geq 0$$

Agora, novamente utilizando a equação (3.14) vamos reescrever a equação (4.4) da seguinte forma:

$$t' = -\frac{c}{2a} \left(\operatorname{arcsen} \left(-\frac{v}{c} \right) + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(-\frac{v}{c} \right) \right),$$

Por simplicidade vamos fazer a seguinte mudança de variável: ³

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

prossequindo temos:

$$t' = -\frac{c}{2a} \operatorname{arcsen} \left(-\frac{v}{c} \right) + \frac{v}{2a\gamma}.$$

Como a aceleração considerada é constante, pela Cinemática básica temos que $v = at \implies t = \frac{v}{a}$, assim:

$$t' = -\frac{c}{2a} \operatorname{arcsen} \left(-\frac{at}{c} \right) + \frac{t}{2\gamma},$$

Pela equação (4.1) proveniente das equações de Lorentz juntamente com o fator de Lorentz temos que $t = \gamma t'$. onde t é o tempo medido pelo referencial inercial R e t' o tempo medido pelo referencial não inercial R' . Logo:

$$t' = -\frac{c}{2a} \operatorname{arcsen} \left(-\frac{at}{c} \right) + \frac{t'}{2} \implies t' - \frac{t'}{2} = -\frac{c}{2a} \operatorname{arcsen} \left(-\frac{at}{c} \right).$$

Portanto concluímos que:

$$t' = -\frac{c}{a} \operatorname{arcsen} \left(\frac{at}{c} \right).$$

Com essa conclusão, o tempo medido pelo referencial R' na sequência de movimentos realizada pelo gêmeo viajante B fica $\frac{c}{a} \operatorname{arcsen} \left(\frac{at_A}{c} \right)$ nas etapas com movimento acelerado ou retardado 1, 3, 4 e 6 e $t_C \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ nas etapas com movimento uniforme 2 e 5 definidas na página 63.

Observação 4.2.2. Vale ressaltar que a aceleração adotada pelo gêmeo viajante B é arbitrária, porém seu produto com o tempo medido pelo gêmeo A não ultrapassa c , tal fato se deve por dois fatores: o primeiro pela restrição do domínio da função arco seno que deve ser limitado no intervalo $[-1, 1]$. O outro fator se deve ao segundo postuldo da TRE que afirma a velocidade da luz c é uma velocidade limite. Assim mesmo que o gêmeo B acelere durante um tempo infinito sua velocidade não irá aumentar infinitamente.

³ Tal mudança é denominada nas Transformações de Lorentz de *fator de Lorentz*, pois aparece com frequência ao relacionar referenciais.

Exemplo 4.2. A efeito de exemplo considere que o gêmeo B parta do repouso da Terra com uma aceleração constante cuja intensidade vale 10% da velocidade da luz por unidade de tempo, ou seja, $a = 0,1c$ até adquirir a velocidade $v = 0,8c$. Considerando os tempos $t_A = 3$ e $t_C = 4$, ambos medidos em anos pelo relógio do gêmeo A , as etapas do movimento de B conforme descrito na página 63 ficam:

$$1. t'_1 = \frac{c}{0,1c} \arcsen\left(\frac{0,3c}{c}\right) \approx 3,047$$

$$2. t'_2 = 4\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}} \approx 2,4$$

$$3. t'_3 = \frac{c}{0,1c} \arcsen\left(\frac{0,3c}{c}\right) \approx 3,047$$

$$4. t'_4 = \frac{c}{0,1c} \arcsen\left(\frac{0,3c}{c}\right) \approx 3,047$$

$$5. t'_5 = 4\sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}} \approx 2,4$$

$$6. t'_6 = \frac{c}{0,1c} \arcsen\left(\frac{0,3c}{c}\right) \approx 3,047$$

Somando todos os tempos, temos que para o gêmeo A passou-se 20 anos enquanto que para o gêmeo viajante B 16,98 anos. Assim, ao encontrar seu irmão, B estará praticamente 3 anos mais jovem.

Algumas considerações valem a pena serem citadas. Note que utilizamos no exemplo acima o mesmo tempo para o gêmeo geostacionário A ($t = 20$) utilizado no exemplo 4.1, porém o tempo do gêmeo viajante B obtido foi 5 anos a mais, isso se deve ao fato do tempo decorrido para B atingir a velocidade de $0,8c$. Fato mais curioso ocorre quando verificamos apenas a relação entre t' e t nas etapas de movimento uniformemente variado: adotamos $t = 3$ e obtivemos $t' = 3,047$ anos, ou seja, para B o tempo passa mais rapidamente ($t' > t$), assim enquanto B estiver alterando sua velocidade ele envelhecerá mais rápido que A , porém conforme já verificado, enquanto sua velocidade for constante em relação a A seu envelhecimento será mais lento.

Uma pergunta natural neste caso é: para quais valores de aceleração e tempo o gêmeo B envelhece mais lentamente que A mesmo durante seu movimento variado? A resposta é nunca! Não existem tais valores tal que $t' < t$, conforme se verifica:

- (i) Durante o movimento acelerado temos que $\frac{c}{a}$ e $\arcsen\left(\frac{at}{c}\right)$ são ambos positivos e como $\arcsen(x) > x, \forall x > 0$ temos que

$$\arcsen\left(\frac{at}{c}\right) > \frac{at}{c} \implies \frac{c}{a} \arcsen\left(\frac{at}{c}\right) > \frac{c}{a} \cdot \frac{at}{c}.$$

logo $t' > t$, para todo t

- (ii) No caso do movimento retardado temos que o m3dulo da acelera33o 3e negativo ent33o $\frac{c}{a}$ e $\arcsen\left(\frac{at}{c}\right)$ s33o ambos negativos e como $\arcsen(x) < x, \forall x < 0$ temos que

$$\arcsen\left(\frac{at}{c}\right) < \frac{at}{c} \implies \frac{c}{a}\arcsen\left(\frac{at}{c}\right) > \frac{c}{a} \cdot \frac{at}{c}.$$

logo $t' > t$, para todo t .

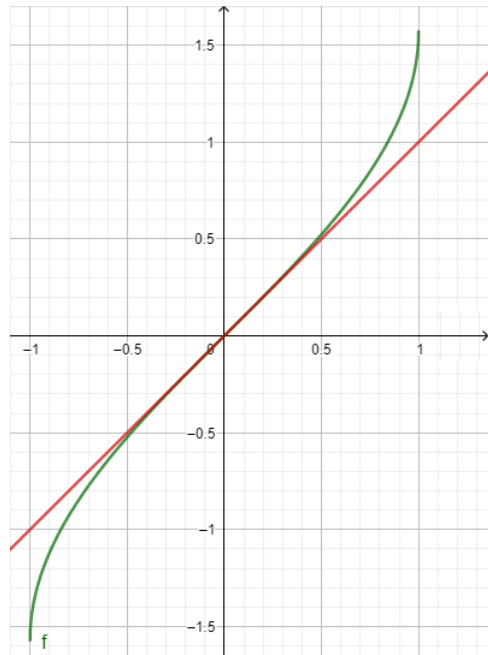


Figura 10: Na figura a curva verde representa o gráfico de $f(x) = \arcsen(x)$ e a reta vermelha o gráfico de $g(x) = x$. Assim temos que $f(x) > g(x), \forall x > 0$ e $f(x) < g(x), \forall x < 0$.

Note que, na figura, quando t se aproxima de 0 mais próximo teremos $f(x)$ de $g(x)$, ou seja, quanto menor for o tempo que o g3eameo B ficar variando sua velocidade, menor ser33a a diferen33a entre t' e t , por3e9m isso tem um custo: sua velocidade n33o ser33a grande o suficiente para causar uma aparente dilata33o do tempo durante o movimento uniforme de sua trajet33ria..

APLICAÇÕES

Após as considerações mais abstratas tratadas nos capítulos anteriores, abordaremos algumas aplicações que podem ser utilizadas como propostas de atividades para o ensino de matemática na educação básica, mais precisamente no Ensino Médio. Tentaremos explicitar os detalhes de cada atividade mostrando a motivação e objetivos de cada uma.

5.1 COMUTATIVIDADE DE ROTAÇÕES

Desde os primeiros contatos com as operações básicas no início do Ensino Fundamental o aluno percebe a comutatividade multiplicativa dos números inteiros, ou seja, verifica que $a \cdot b = b \cdot a$ para qualquer $a, b \in \mathbb{Z}$. Apesar de tal propriedade não ser demonstrada (ou axiomáticamente assumida), o mesmo acontece quando trata-se dos números reais.

O primeiro contato do aluno com a não comutatividade ocorre já no Ensino Médio quando é estudado o produto de matrizes. Então, o aluno percebe que ocorre casos onde ao multiplicar duas matrizes o resultado pode ser diferente se trocarmos a ordem deste produto, ou seja, $A \cdot B \neq B \cdot A$ onde $A \in M_{n \times m}$ e $B \in M_{m \times n}$, sendo que, ao longo do Ensino Médio, geralmente, não lhe é apresentada outra situação onde não ocorre a comutatividade de alguma operação e, então o aluno acredita que a não comutatividade é uma exceção exclusiva da multiplicação de matrizes.

Sendo assim, a seguinte atividade proposta tem como objetivo apresentar um conceito de fácil compreensão do aluno do Ensino Médio e que apresenta uma relação não comutativa: a rotação de figuras geométricas e, para tal, utilizaremos a rotação

de vetores como base. Acreditamos que tal atividade pode ser realizada de forma interdisciplinar nas disciplinas de Matemática e Física, pois operações de vetores é um assunto abordado no ensino de Dinâmica que faz parte do currículo da 1ª Série do Ensino Médio. Vale ressaltar, que nesta proposta utilizares os conceitos do grupo de rotações abordados no capítulo 2.

Primeiramente vamos mostrar que a rotação de vetores é comutativa no espaço \mathbb{R}^2 o que não ocorre para rotações em \mathbb{R}^3 . E então faremos a proposta de atividade.

5.1.1 Rotação em \mathbb{R}^2

Proposição 5.1. *A rotação de um vetor em \mathbb{R}^2 por matrizes de $SO(2)$ é comutativa.*

Demonstração. Seja $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e duas matrizes $A(\alpha), B(\beta) \in SO(2)$, tal que $\alpha \neq \beta$. Por simplicidade chamaremos $A(\alpha)$ e $B(\beta)$ apenas de A e B , ou seja,

$$A(\alpha) = A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad B(\beta) = B = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Queremos mostrar que $B(Av) = A(Bv)$, temos que

$$Av = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\text{sen}(\alpha) \\ x\text{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

Logo temos que

$$\begin{aligned} B(Av) &= \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x\cos(\alpha) - y\text{sen}(\alpha) \\ x\text{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\alpha)\cos(\beta) - y\text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - x\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) + y\cos(\alpha)\text{sen}(\beta) \\ x\cos(\alpha)\text{sen}(\beta) - y\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) + x\text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + y\cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\alpha + \beta) - y\text{sen}(\alpha + \beta) \\ x\text{sen}(\alpha + \beta) + y\cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

É fácil perceber que $A(Bv)$ terá o mesmo resultado:

$$Bv = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\beta) - y\text{sen}(\beta) \\ x\text{sen}(\beta) + y\cos(\beta) \end{pmatrix},$$

Assim,

$$\begin{aligned} A(Bv) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x\cos(\beta) - y\operatorname{sen}(\beta) \\ x\operatorname{sen}(\beta) + y\cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\beta)\cos(\alpha) - y\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) - x\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) + y\cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) \\ x\cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) - y\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) + x\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha) + y\cos(\beta)\cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\alpha + \beta) - y\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ x\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + y\cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a operação de rotação de um vetor em \mathbb{R}^2 é comutativa. Cabe ressaltar que se $\alpha = \beta$ a operação continua sendo comutativa, conforme o leitor poderá verificar facilmente. \square

A proposição acima é explicitada pela figura a seguir.

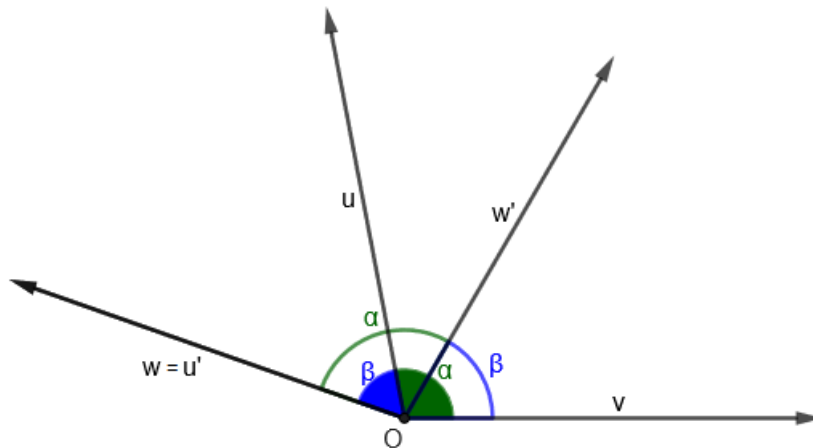


Figura 11: O vetor v é rotacionado pelo ângulo α originando o vetor u que por sua vez é rotacionado pelo ângulo β resultando no vetor w . Ao rotacionar v por β origina-se o vetor w' que então é rotacionado por α resultando em u' .

5.1.2 Rotação em \mathbb{R}^3

Proposição 5.2. *A rotação de um vetor em \mathbb{R}^3 por matrizes de $SO(3)$ não é comutativa.*

Demonstração. Basta tomarmos como contra exemplo A e B matrizes de $SO(3)$ que efetuam rotações em eixos distintos de $\mathbb{R}^3 = (x, y, z)$.

Sejam $A(\theta), B(\theta) \in SO(3)$ matrizes de rotação em relação ao eixo $x \in \mathbb{R}^3$ e em relação ao eixo $z \in \mathbb{R}^3$ respectivamente, ou seja,

$$A(\theta) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad B(\theta) = B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja um vetor $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Queremos mostrar que $B(Au) \neq A(Bu)$.

De fato,

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos(\theta) - z\text{sen}(\theta) \\ y\text{sen}(\theta) + z\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned} B(Au) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y\cos(\theta) - z\text{sen}(\theta) \\ y\text{sen}(\theta) + z\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\cos(\theta) + z\text{sen}^2(\theta) \\ x\text{sen}(\theta) + y\cos^2(\theta) - z\cos(\theta)\text{sen}(\theta) \\ y\text{sen}(\theta) + z\cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Porém, temos que,

$$Bu = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\text{sen}(\theta) \\ x\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \\ z \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A(Bu) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\text{sen}(\theta) \\ x\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\text{sen}(\theta) \\ x\text{sen}(\theta)\cos(\theta) - y\text{sen}(\theta)\cos(\theta) - z\text{sen}(\theta) \\ x\text{sen}^2(\theta) + y\text{sen}(\theta)\cos(\theta) + z\cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, claramente a operação não é comutativa. Observe na figura abaixo.

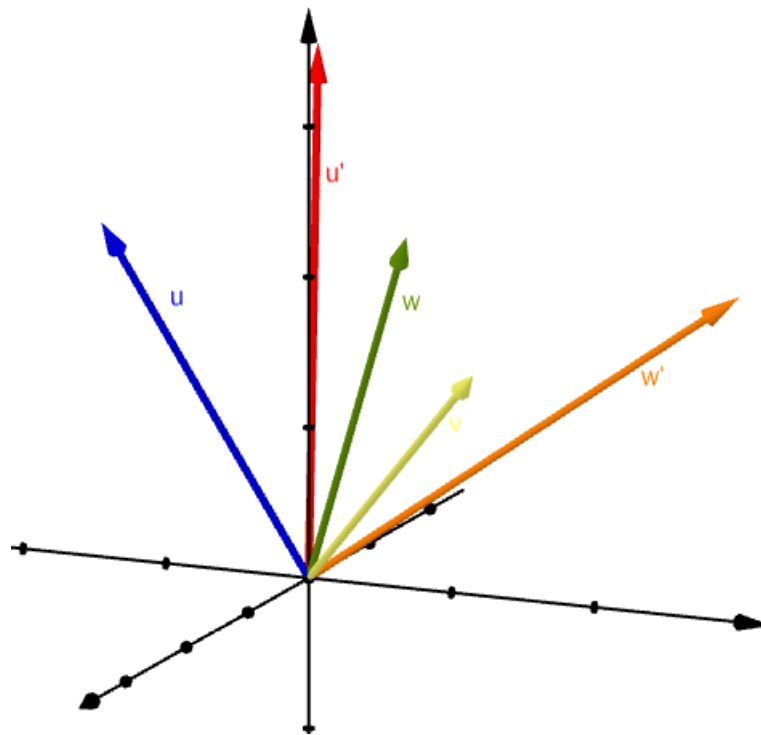


Figura 12: O vetor v é inicialmente rotacionado por um ângulo α em torno do eixo x determinando o vetor w que por sua vez é rotacionado pelo ângulo β em torno do eixo z determinando o vetor u . Ao rotacionar v por β em torno do eixo z tem-se o vetor w' que então é rotacionado por α em torno do eixo x determinando por fim, o vetor u' . Verifica-se facilmente que $w \neq u'$

□

5.1.3 Proposta de atividade

A seguinte proposta tem como público alvo alunos da 3ª série do Ensino Médio, pois à esta altura possuem familiarização com o conceito de matrizes, rotações, cônicas e noções de geometria analítica. Primeiramente, o professor pode fazer as verificações da comutatividade de rotação de uma figura plana em \mathbb{R}^2 e da não comutatividade de uma figura em \mathbb{R}^3 aplicando as respectivas matrizes em cada vértice do polígono ou poliedro. Caso considere que a turma possui boa maturidade matemática, pode fazer as devidas demonstrações conforme apresentadas nos tópicos 5.1.1 e 5.1.2.

Após a verificação algébrica é conveniente realizar as rotações das figuras geometricamente, assim a atividade torna-se mais lúdica e melhora a compreensão do tema. Sugerimos o uso do software Geogebra.¹

Os passos a seguir são apenas sugestões e podem ser adaptados livremente pelo professor.

• Rotações em \mathbb{R}^2

É conveniente disponibilizar um computador para cada dupla de alunos, assim um aluno auxilia o outro na atividade. Após acessarem o *Geogebra* entregue aos alunos uma folha com as instruções ou escreva-as na lousa:

1. Insira um triângulo escaleno ABC clicando em “polígono” de tal forma que um dos vértices (digamos o ponto A) coincida com o origem dos eixos ordenados;

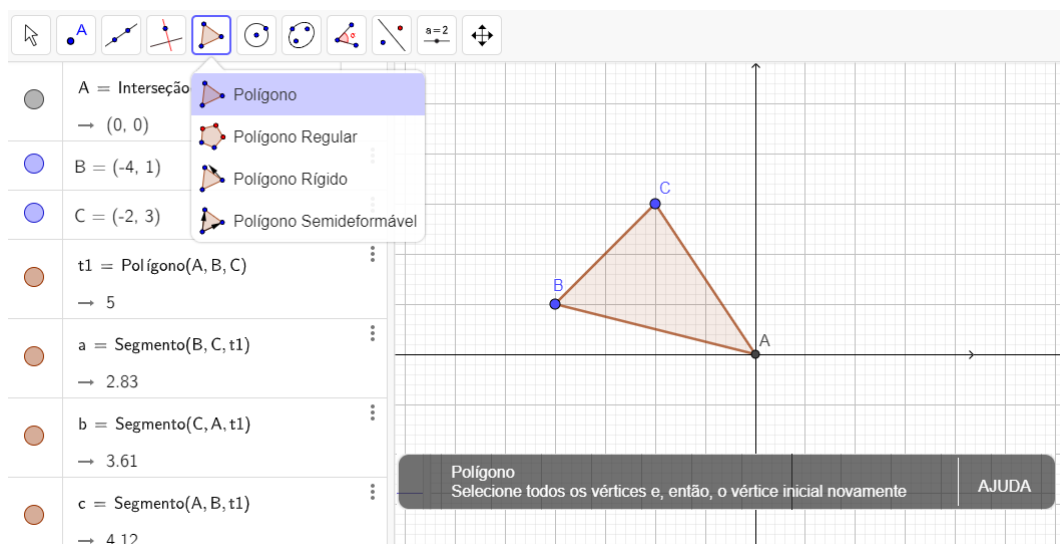


Figura 13: O ponto A é a origem dos eixos de \mathbb{R}^2

As rotações efetuadas nas etapas a seguir serão todas no sentido anti-horário:

2. Utilizando a função “Rotação em Torno de um Ponto” rotacione o triângulo por um ângulo de 60° em torno do ponto A determinando assim o triângulo $A'B'C'$;

¹ É possível utilizar a plataforma on-line pelo link <https://www.geogebra.org/> ou fazer o download através do link <https://www.geogebra.org/download>. O aplicativo é gratuito e está disponível para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux.

Para verificar um tutorial completo de utilização do Geogebra acesse <https://www.geogebra.org/m/XUv5mXTm>.

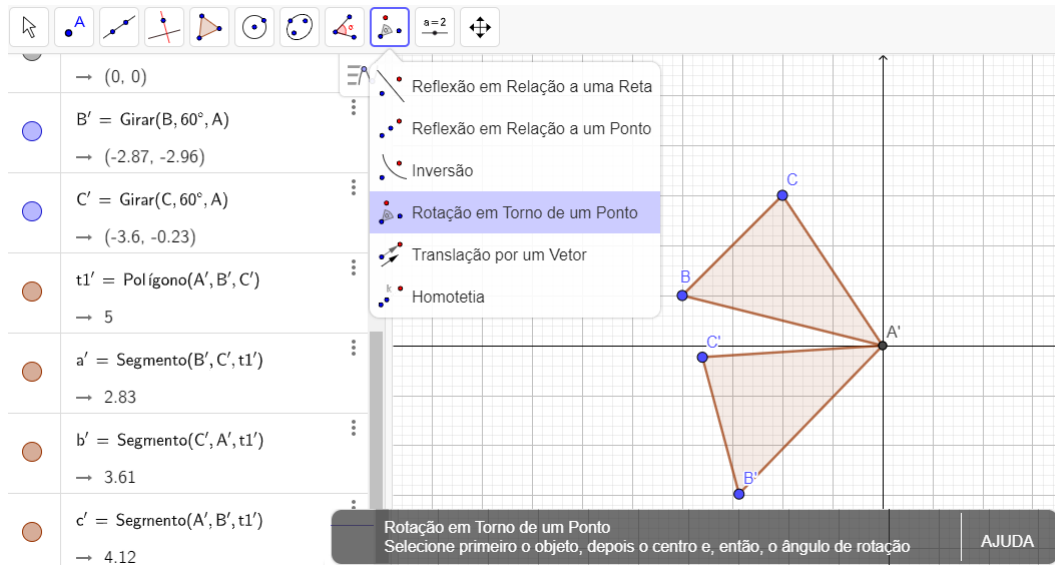


Figura 14: O ponto A coincide com o ponto A'

3. Rotacione o triângulo $A'B'C'$ por um ângulo de 45° em torno do ponto A' (que coincide com o ponto A) determinando por fim o triângulo $A''B''C''$ (perceba que o ponto A'' coincide com o ponto A);

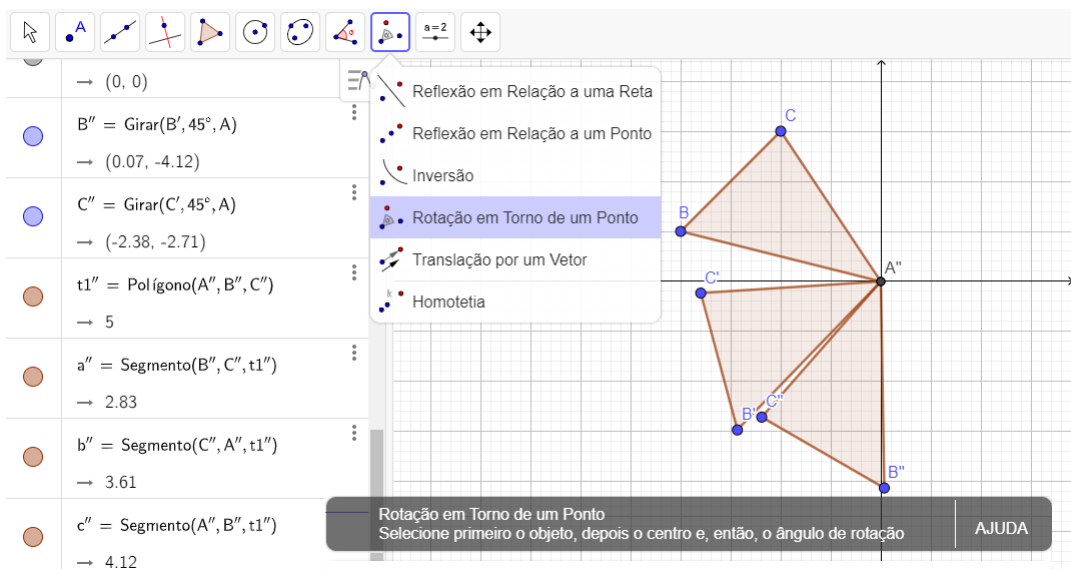


Figura 15: O ponto A coincide com o ponto A''

4. Agora rotacione o triângulo ABC por um ângulo de 45° em torno do ponto A determinando o triângulo $A_1''B_1''C_1''$;

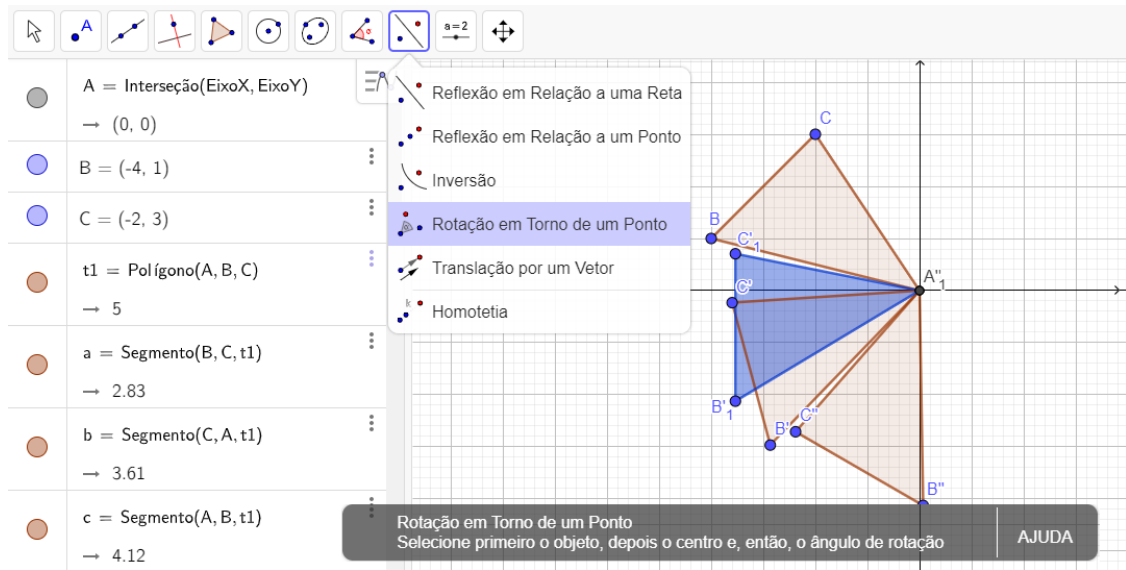


Figura 16: O ponto A coincide com o ponto A_1''

5. Finalmente rotacione o triângulo $A_1''B_1''C_1''$ por um ângulo de 60° em torno do ponto A determinando o triângulo DEF .

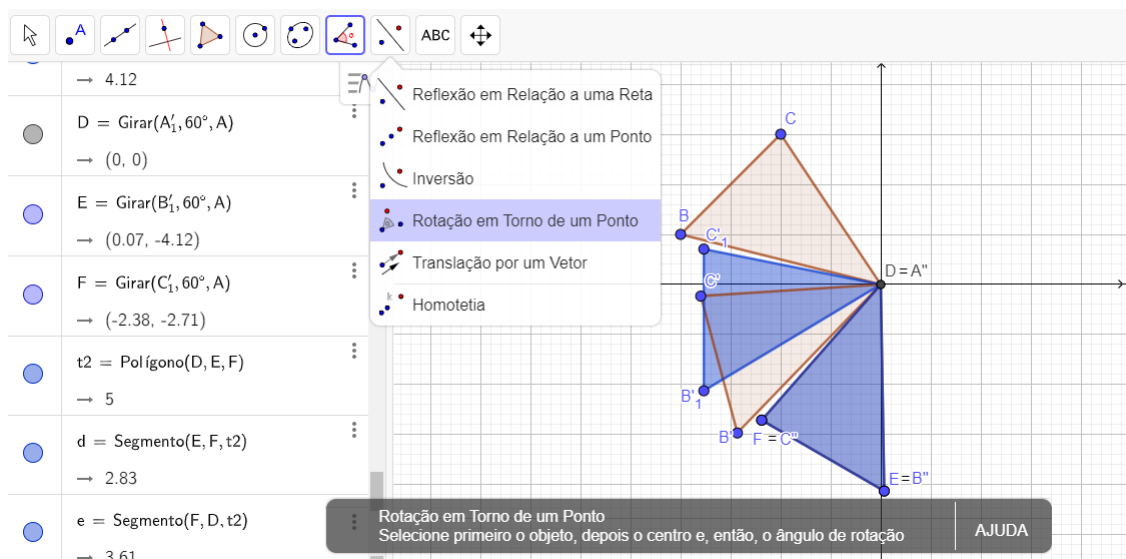


Figura 17: O triângulo $A''B''C''$ coincide com o triângulo DEF

Os alunos devem notar que o triângulo $A''B''C''$ coincide com o triângulo DEF mostrando assim que a rotação em torno de um ponto do plano \mathbb{R}^2 é comutativa.

- Rotações em \mathbb{R}^3

A proposta de construção que realizaremos a seguir é análoga à anterior, porém efetuaremos rotações no espaço \mathbb{R}^3 com o objetivo de ilustrar a não comutatividade de rotações neste espaço. Sendo assim sugerimos que cada dupla de alunos receba as seguintes instruções:

1. Primeiramente é necessário trocar o plano da tela inicial do Geogebra para o plano tridimensional, para tal clique no menu de opções no canto superior direito e então em “Exibir”, habilite a caixa “Janela de Visualização 3D” e desabilite a caixa “Janela de Visualização”

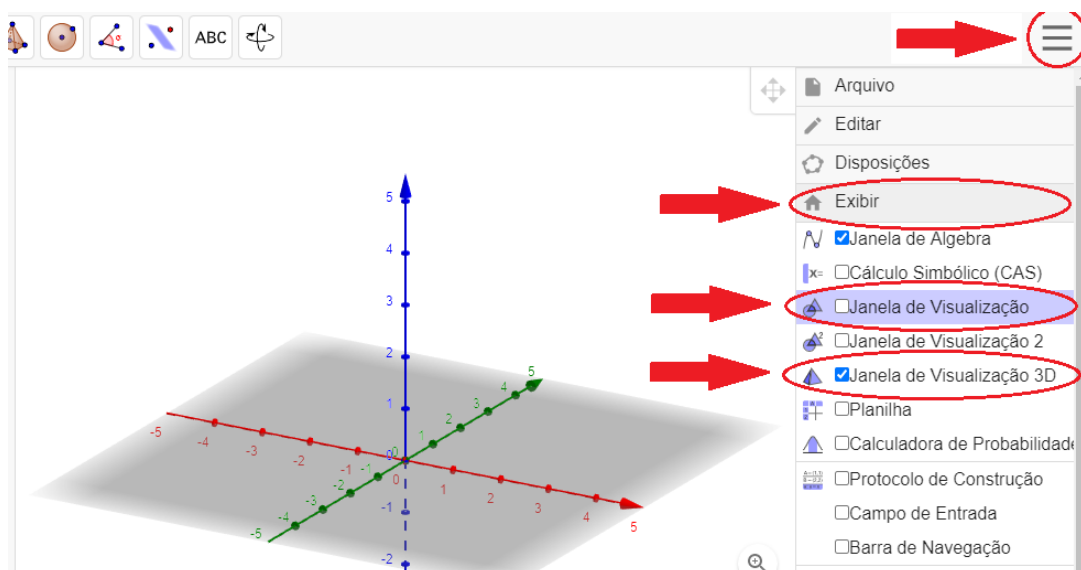


Figura 18: Tela inicial do Geogebra com o plano tridimensional

2. Insira um triângulo (não necessariamente regular) e então insira uma pirâmide utilizando como base o triângulo criado. Insira um ponto em cada vértice da pirâmide determinando, assim, a pirâmide ABCD.

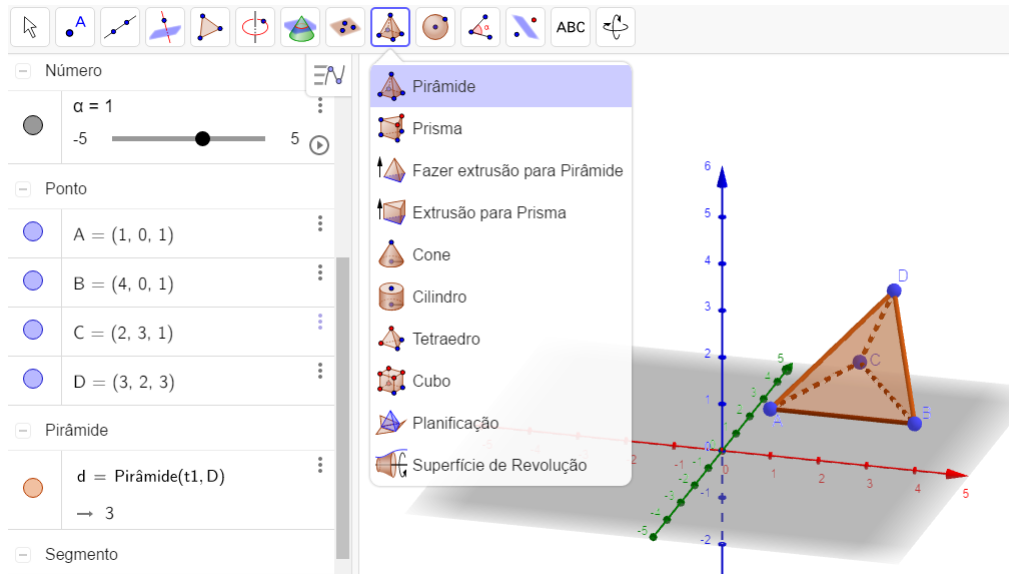


Figura 19: Pirâmide ABCD

3. Crie as matrizes M e N sendo M a matriz de rotação em relação ao eixo x e N a matriz de rotação em relação ao eixo z (utilize como parâmetro o ângulo α). Conforme apresentado na proposição 5.2.
4. Utilizando a função “Girar em torno de uma reta” rotacione a pirâmide ABCD pelo ângulo α através do eixo x (eixo vermelho). Utilizando a matriz M determine os pontos $A' = MA$, $B' = MB$, $C' = MC$ e $D' = MD$, note que esses pontos coincidem com os vértices da pirâmide rotacionada.

Na figura a seguir apresentamos a pirâmide $A'B'C'D'$ (em amarelo) em duas perspectivas diferentes

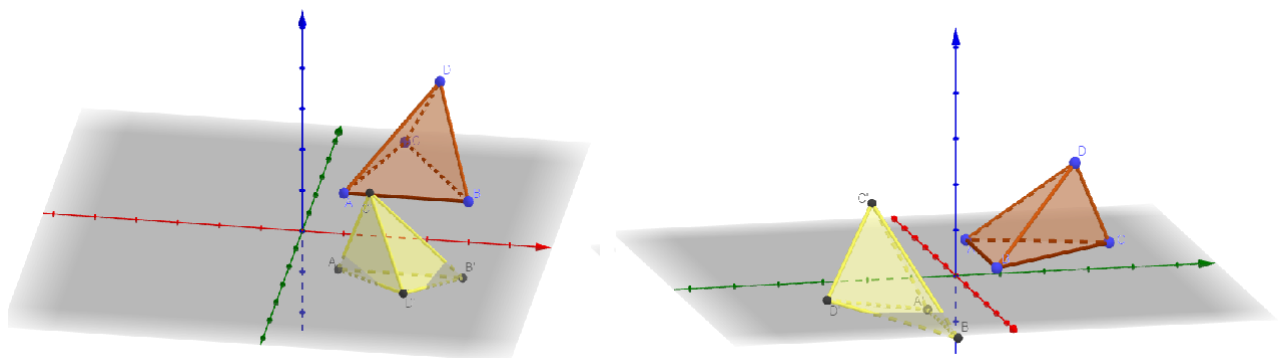


Figura 20: Pirâmide A'B'C'D'

5. Rotacione a pirâmide $A'B'C'D'$ pelo ângulo α através do eixo z (eixo azul). Agora utilizando a matriz N determine os pontos $A'' = MA'$, $B'' = MB'$, $C'' = MC'$ e $D'' = MD'$, note que esses pontos coincidem com os vértices da nova pirâmide rotacionada.

Novamente, na figura a seguir, a pirâmide $A''B''C''D''$ destacada em verde é apresentada em duas perspectivas diferentes.

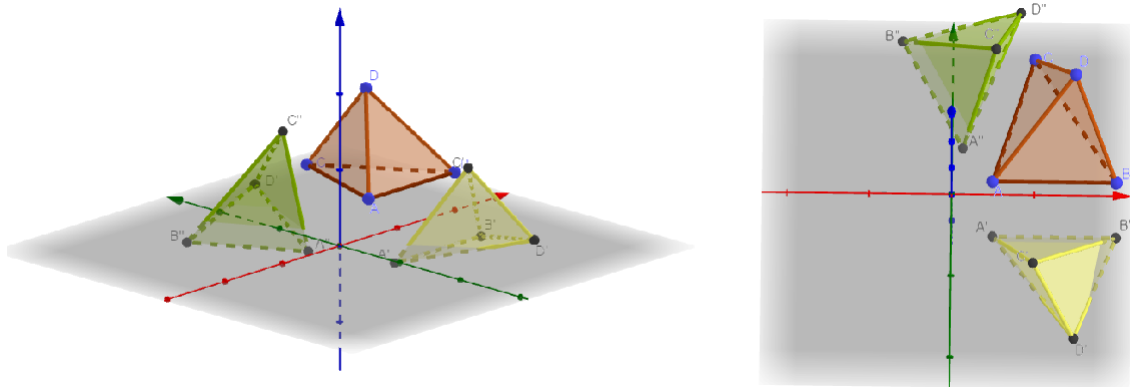


Figura 21: Pirâmide $A''B''C''D''$

Os passos seguintes são repetições dos passos 4 e 5 apenas trocando o eixo de rotação em cada um, ou seja:

6. Rotacione a pirâmide $ABCD$ pelo ângulo α através do eixo z (eixo azul). Utilizando a matriz N determine os pontos $E = NA$, $F = NB$, $G = NC$ e $H = ND$, note que esses pontos coincidem com os vértices da pirâmide rotacionada (em azul).

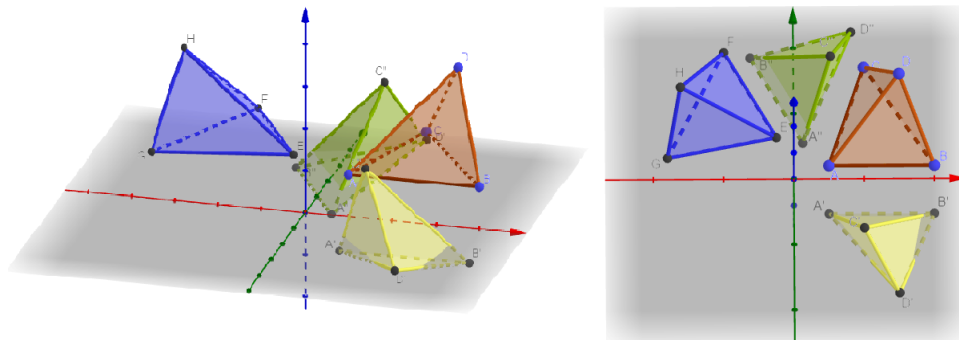


Figura 22: Pirâmide $EFGH$

7. Rotacione a pirâmide $EFGH$ pelo ângulo α através do eixo x (eixo vermelho). E por fim, utilizando a matriz M determine os pontos $E' = ME'$, $F' = MF$, $G' = MG$ e $H' = MH$, note que esses pontos coincidem com os vértices da nova pirâmide rotacionada (em rosa).

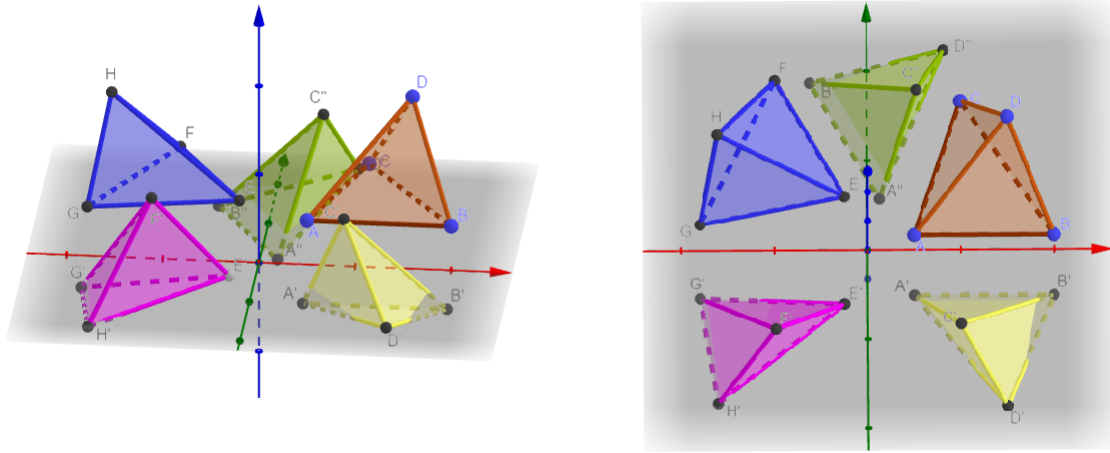


Figura 23: Pirâmide $E'F'G'H'$

Assim, nota-se claramente que a pirâmide $A''B''C''D''$ (em verde) não coincide com a pirâmide $E'F'G'H'$ (em rosa) e portanto não ocorre a comutatividade de rotações em \mathbb{R}^3 .

5.2 A NÃO COMUTATIVIDADE DE REFLEXÕES

A reflexão em \mathbb{R}^2 é não comutativa conforme se observa a seguir:

Seja o vetor $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e duas matrizes M, N características de reflexões:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde M determina uma reflexão em relação ao eixo das abscissas de \mathbb{R}^2 e N uma reflexão em torno da reta $y = x$.

Assim temos que,

$$Mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

logo,

$$N(Mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Invertendo a ordem das reflexões temos:

$$Nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix},$$

assim,

$$M(Nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Portanto $N(Mu) \neq M(Nu)$ o que mostra a não comutatividade de rotações em \mathbb{R}^2

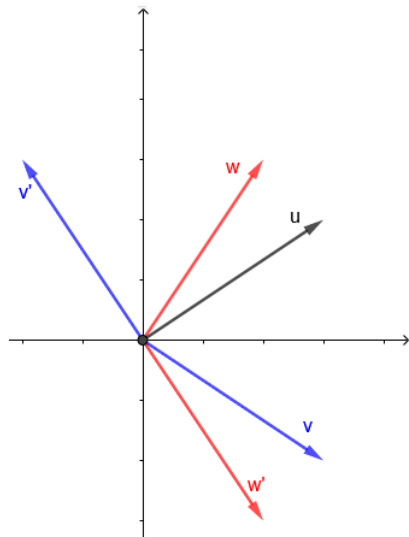


Figura 24: Reflexão não comutativa. Na figura $v = Mu$, $v' = N(Mu)$, $w = Nu$ e $w' = M(Nu)$, claramente $v' \neq w'$. Na verdade w' é a reflexão de v' em torno da origem dos eixos

5.2.1 Proposta de atividade

A proposta a seguir pode ser sugerida pelo professor em forma de desafio para a turma, pois após trabalharem com a não comutatividade de rotações, espera-se que estejam familiarizados com a aplicação de matrizes e com a utilização do Geogebra.

A ideia é concluir a não comutatividade da reflexão em \mathbb{R}^2 por conta própria, sendo assim sugerimos os seguintes passos:

1. Insira uma figura plana qualquer no plano \mathbb{R}^2 , por exemplo um triângulo retângulo

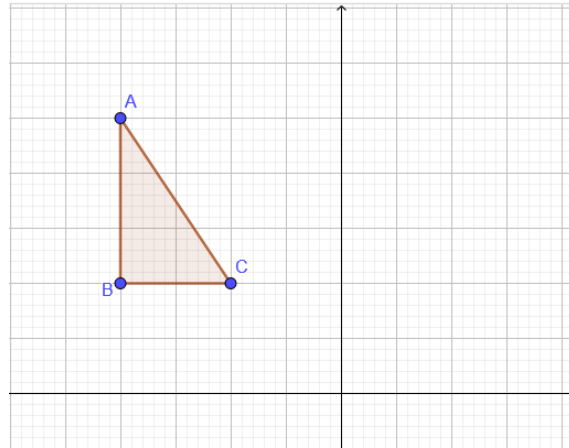


Figura 25: Triângulo retângulo ABC

2. Utilizando a função “Reflexão em Relação a uma Reta” ou a função “Reflexão em Relação a um Ponto” solicite aos alunos que efetuem duas reflexões distintas do triângulo ABC e então refletindo-o novamente com as mesmas reflexões porém em ordem invertida verifiquem o resultado.

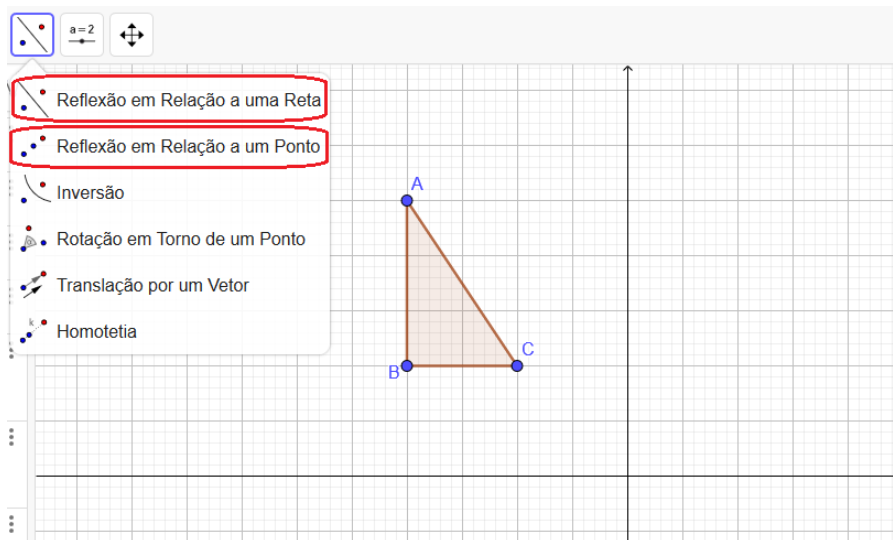


Figura 26: Triângulo retângulo ABC

O desafio consiste em achar resultados diferentes nas sucessivas reflexões. O esperado é que os alunos percebam que devem realizar rotações em torno de retas que não são perpendiculares.

5.3 FIGURAS DE MESMA ÁREA

No ensino de geometria os alunos do Ensino Médio se depararam constantemente com figuras geométricas de mesma área, porém a tratativa é sempre de forma geométrica utilizando as equações de área de triângulos e quadriláteros.

Pretendemos abordar o tema utilizando transformações e mostrar ao aluno que uma figura plana pode ser transformada em outra que possui a mesma área, para tal utilizaremos as matrizes do grupo $SO(1, 1)$, ou seja, a matriz de Lorentz em 2 dimensões com elementos reais. Cabe ressaltar que transformações com as matrizes de $SO(2)$ também preservam a área de figuras, pois apenas as rotacionam, porém a intenção nesta proposta é mostrar figuras distintas de mesma área.

Primeiramente é necessário demonstrar o teorema a seguir para efetivarmos a proposta.

Teorema 5.1. *Sejam A e B duas figuras planas tal que $B = T \cdot A$ onde $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um operador linear com matriz de transformação M . Então a razão entre as áreas de B e A é o determinante de M .*

Demonstração. Considere as bases canônicas $e_1 = (1, 0)$; $e_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, bem como a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sendo que:

$$T(e_1) = (a, c) \text{ e } T(e_2) = (b, d).$$

Assim temos que a matriz de transformação de T é: $M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Considerando agora a matriz em \mathbb{R}^3 que contém M_T : $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos que

M é uma matriz de transformação em \mathbb{R}^3 que transforma um vetor em \mathbb{R}^3 deixando invariante o plano $z = 0$.

Sendo assim, podemos adotar os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$ da base canônica de \mathbb{R}^3 e aplicar a transformação T cuja matriz de transformação é a matriz M . Teremos como resultado dois vetores u, v no plano $z = 0$, tais que $u = M(e_1) = (a, c, 0)$ e $v = (b, d, 0)$

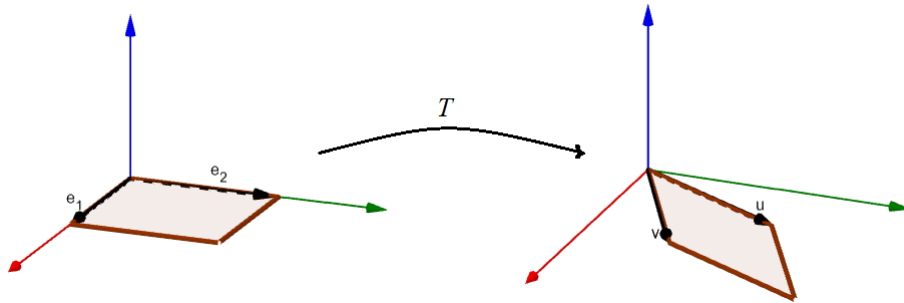


Figura 27: Os vetores e_1 e e_2 transformados por T

Podemos determinar a área de um paralelogramo pelo produto vetorial dos vetores que o determinam conforme se observa a seguir:

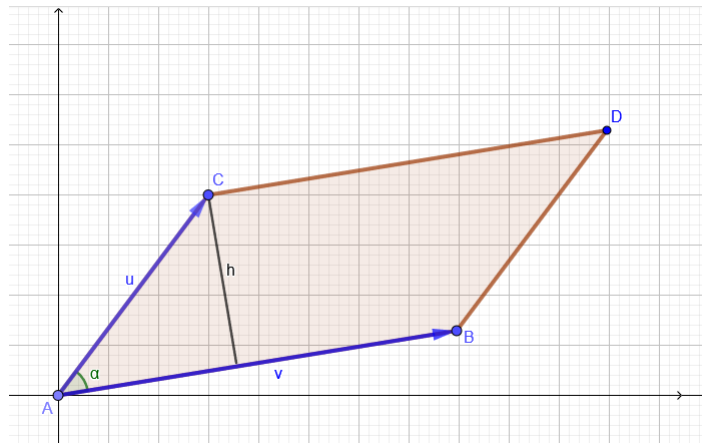


Figura 28: Paralelogramo q de vértices A, B, C, D e de altura h

A altura do paralelogramo da figura em relação ao lado AB é:

$$h = \overline{AC} \text{sen}(\alpha).$$

Assim a área do paralelogramo q será dada por:

$$\text{Area}(q) = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen}(\alpha) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \text{sen}(\alpha) = \|u \times v\|$$

A definição e justificativa da relação do produto vetorial com a área de um paralelogramo podem ser encontrados em [4].

Finalmente, retornando nos vetores $u = M(e_1) = (a, c, 0)$ e $v = M(e_2) = (b, d, 0)$ e calculando o produto vetorial entre eles temos:

$$\|u \times v\| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix} = (ad - bc)k,$$

ou seja, $\|u \times v\| = \det M \cdot k$, onde k é a área do quadrilátero determinado por e_1 e e_2 , pois $\|e_1 \times e_2\| = k$.

Portanto o determinante de M pode ser interpretado como um fator de ampliação ou contração da área do quadrilátero de lados e_1 e e_2 .

Generalizando, podemos adotar o procedimento acima para qualquer figura plana e concluir que o determinante da matriz da transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicada a essa figura será a razão da área da figura transformada pela área da figura original. Para tal basta utilizar o Método da Exaustão.

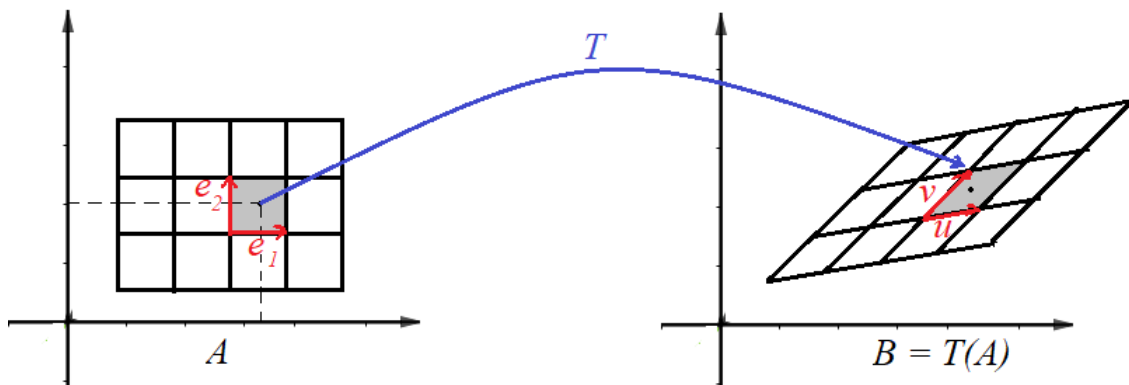


Figura 29: Pelo Método da Exaustão é possível dividir o polígono A em quadriláteros cada vez menores até que se obtenha o quadrilátero determinado por e_1 e e_2 , que pela transformação T teremos a figura B formada por quadriláteros determinados pelos vetores u e v

□

Verifica-se facilmente que como consequência do Teorema acima temos que se aplicarmos a matriz de transformação do grupo $SO(1,1)$ teremos como resultado uma

figura de mesma área euclidiana que a inicial, pois o determinante da matriz $L \in SO(1, 1)$ é unitário.

5.3.1 Proposta de atividade

A seguinte proposta destina-se a alunos das 2ª e 3ª séries do Ensino Médio, pois é necessário que já tenham estudado multiplicação de matrizes. A ideia é aplicar a matriz $L \in SO(1, 1)$ em figuras planas e verificar que a área é preservada. Novamente, os exemplos apresentados a seguir servem de apoio e podem ser alterados livremente pelo professor da turma.

• O Polígono Lorentziano

Sugerimos os seguintes passos nesta atividade utilizando o Geogebra:

1. Insira a matriz $L \in SO(1, 1)$ na “Janela de Álgebra” com parâmetro α e habilite para que o controle deslizante fique visível na “Janela de Visualização” e então construa um polígono qualquer, como por exemplo um pentágono não regular.

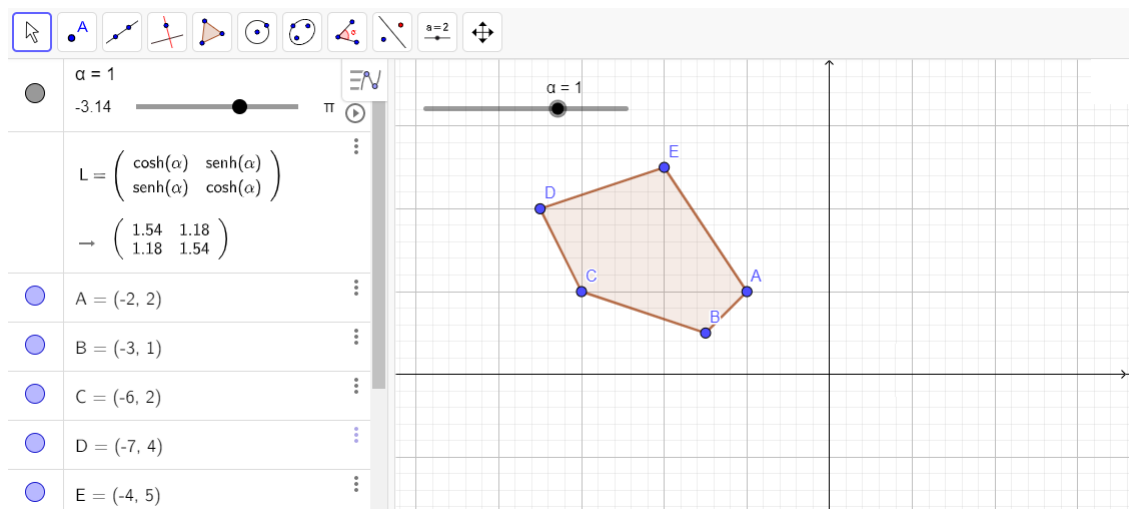


Figura 30: Polígono ABCDE

2. Aplique a matriz L em cada vértice do polígono $ABCDE$ determinando assim os pontos $A' = LA, B' = LB, C' = LC, D' = LD$ e $E' = LE$. Insira o polígono cujos vértices são esses novos pontos.

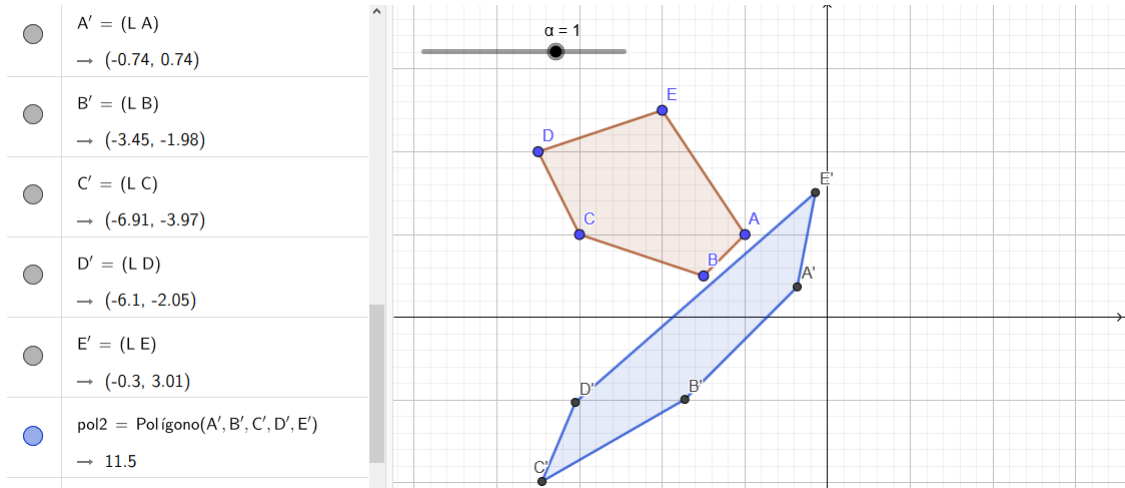


Figura 31: $A'B'C'D'E'$ é o polígono transformado pela matriz de Lorentz 2×2 .

3. Verifique com os alunos que os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ possuem a mesma área. O próprio Geogebra fornece a área desses polígonos e independente do valor do parâmetro α , as áreas coincidem. Perceba que no exemplo a seguir a área permanece constante em 11,5 para dois valores distintos de α , conforme ilustrado a seguir:

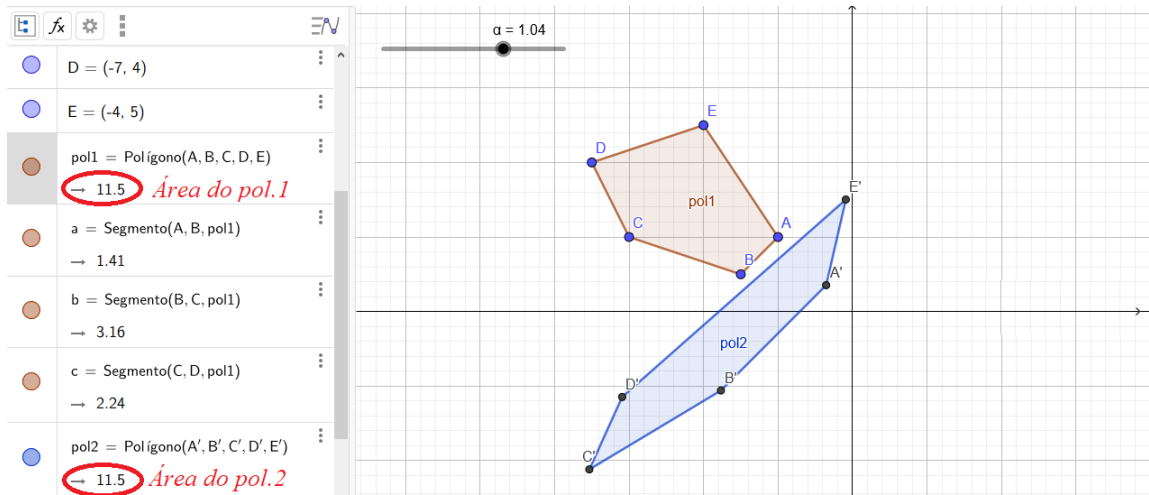


Figura 32: Transformação do polígono $ABCDE$ (pol1) para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

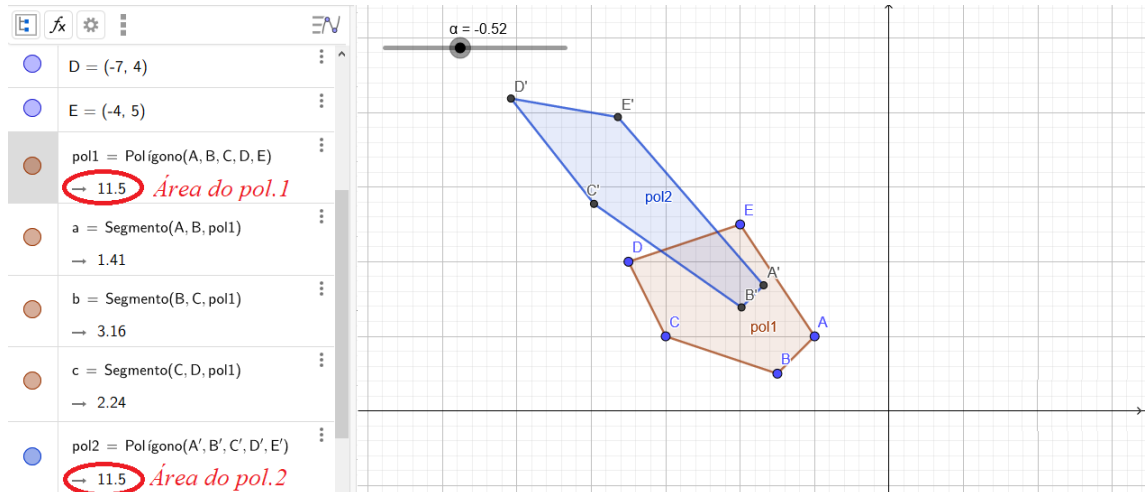


Figura 33: Transformação do polígono ABCDE (pol1) para $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.

• **A circunferência Lorentziana**

A seguinte proposta, similar com a anterior, tem como objeto mostrar que não apenas polígonos são transformados em outros polígonos de mesma área. Sendo assim, iremos transformar um circunferência através da matriz de Lorentz e verificaremos que teremos como resultado o que parece ser uma elipse que terá a mesma área da circunferência inicial.

Para determinar a área das figuras a seguir utilizamos o conceito da *Soma de Riemann*. Obviamente, o professor não precisa definir esse conceito com os alunos, porém acreditamos que explorando o Método da Exaustão é possível mostrar aos alunos, mesmo que intuitivamente, como determinar área de figuras não poligonais.

1. Novamente insira a matriz $L \in SO(1, 1)$ com parâmetro α e habilite o controle deslizante visível na “Janela de Visualização”. Agora construa uma circunferência de centro A e raio qualquer. Então clique com o botão direito do *mouse* sobre a circunferência, vá em “configurações”, “Álgebra” e selecione “Forma paramétrica”

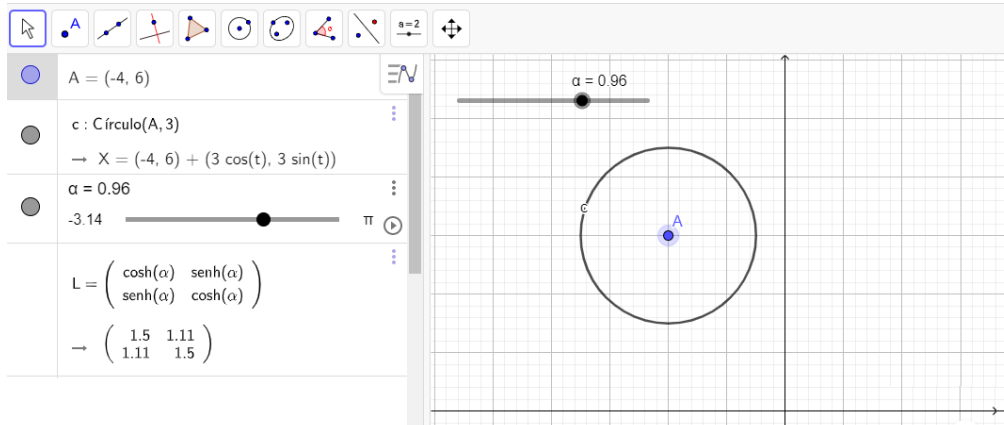


Figura 34: Circunferência c . Note que na caixa de entrada logo abaixo do objeto “ c ” está a forma paramétrica

2. Aplique a matriz L no ponto A determinando assim o ponto A' .

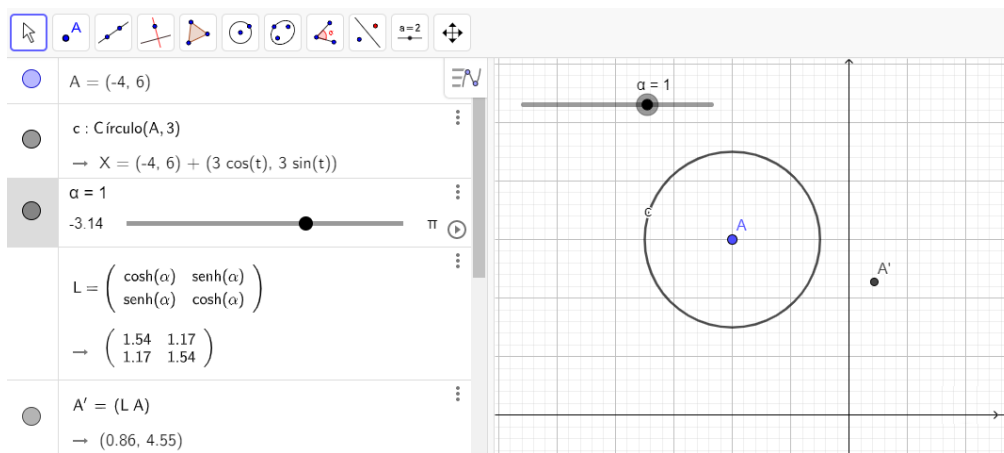


Figura 35: Ponto A' determinado pela aplicação da matriz L no ponto A para $\alpha = 1,0 \text{ rad}$.

3. Na caixa de entrada digite o comando “Curva” e então escolha a primeira opção “<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>”. Utilizaremos apenas uma expressão, sendo assim em um dos campos “<Expressão>” escreva a forma paramétrica da circunferência C aplicando a matriz L , ou seja: $(A' + L(3\cos(t), 3\sin(t)))$. Insira em uma variável t e valor inicial e final respectivamente 0 e 2π . Ao teclar *Enter* determinaremos uma elipse c' que é a circunferência c transformada pela matriz L .

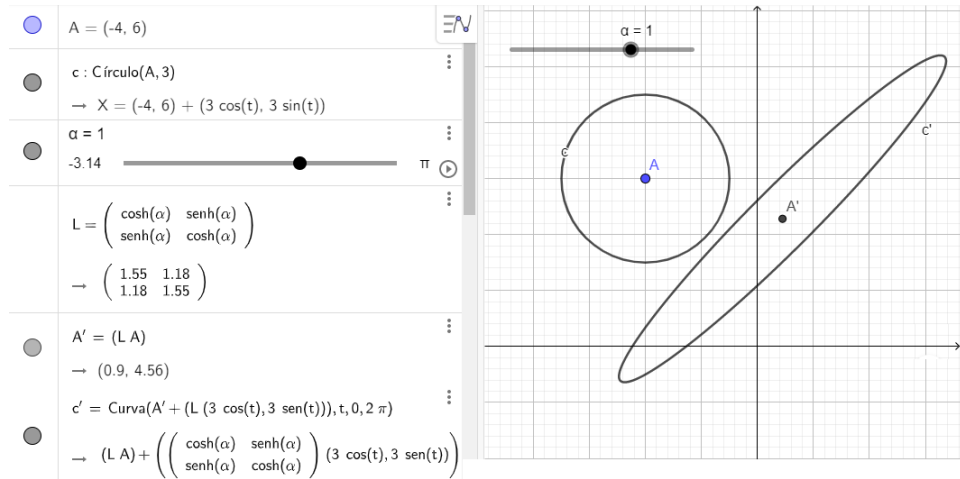


Figura 36: Curva c' : circunferência c transformada pela matriz L . Note na última linha da caixa de entrada a forma paramétrica da curva c'

Para verificarmos que a curva c' e a circunferência c possuem a mesma área interna realize os seguintes passos:

4. Crie um controle deslizante n de valor mínimo 3 e máximo 30 (o valor máximo pode ser diferente, porém quanto maior melhor). Crie um ponto B na circunferência c .

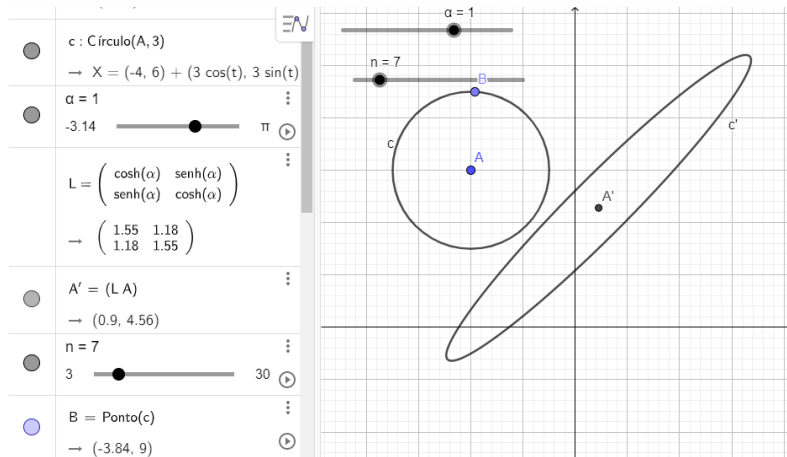


Figura 37: O controle deslizante n e ponto B pertencente à circunferência c .

5. Na caixa de entrada digite o comando “Sequência” e escolha a quarta opção “<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>”. Em “<Expressão>” digite o comando “Girar” e escolha a segunda opção “<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>”. Atribua uma variável i para a Sequência com Valor Inicial 1 e

no Valor Final o controle deslizante n . Finalmente no comando “Girar” rotacione o ponto B por um ângulo de $\frac{i \cdot 360^\circ}{n}$ em torno do ponto A .

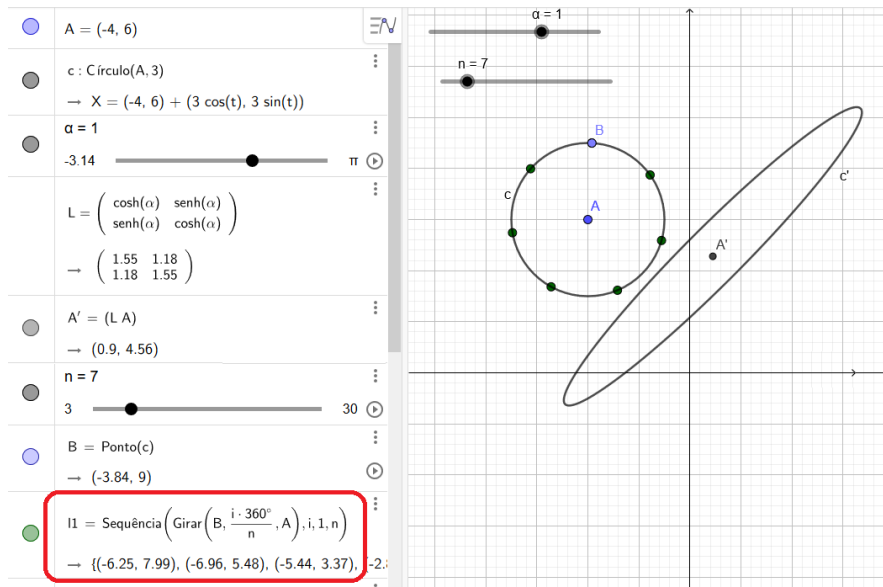


Figura 38: Circunferência c com o ponto B rotacionado em relação ao centro A para $i = 7$. Em destaque a Sequência $I1$.

- Nomeie um dos pontos da sequência $I1$, por exemplo por C , para tal utilize o comando “Ponto” na caixa de entrada e escolha a primeira opção “Ponto (<Objeto>)” e no “objeto” digite $I1$. Utilize o comando “Polígono (<Ponto>, <Ponto>, <Número de vértices>” e insira p polígono $pol1 = (B, C, n)$

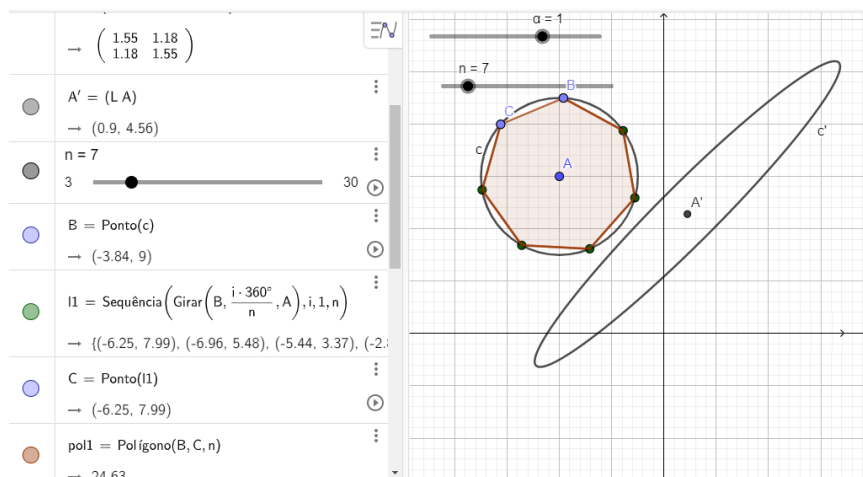


Figura 39: Polígono $pol1$ com sete vértices.

7. Agora insira uma nova sequência similar com a $I1$ utilizando a quarta opção “<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>” e em “<Expressão>” insira $L \cdot I1(i)$ ou seja, a sequência $I1$ transformada pela matriz L e então insira a variável i com valor inicial 1 e valor final n . Por fim, utilizando a primeira opção do comando “Polígono”: “Polígono (<Lista de pontos>)” crie o polígono $pol2$ cuja lista de pontos é $I2$.

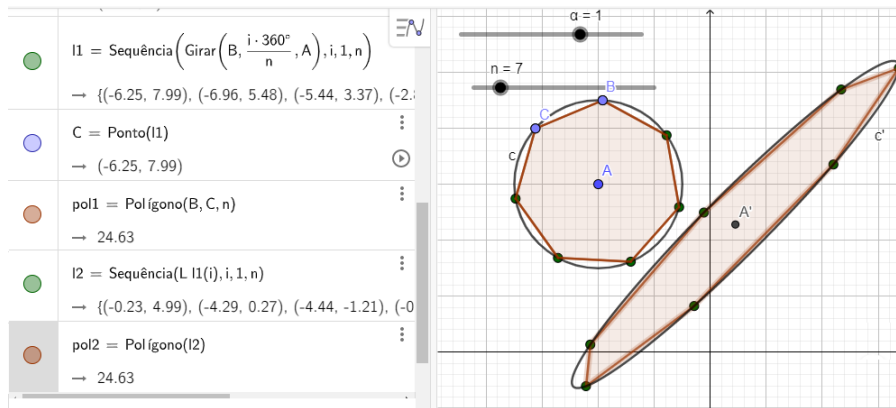


Figura 40: O Polígono $pol2$ fica inscrito na curva c' .

8. A atividade é finalizada observando que a área do polígono $pol1$ é igual à área do polígono $pol2$ e conforme aumenta-se o número de vértices dos polígonos (aumentando-se n) a área do polígono $pol1$ se aproxima da área da circunferência c e a área do polígono $pol2$ se aproxima da área da curva c' . Portanto as áreas de c e c' são iguais.

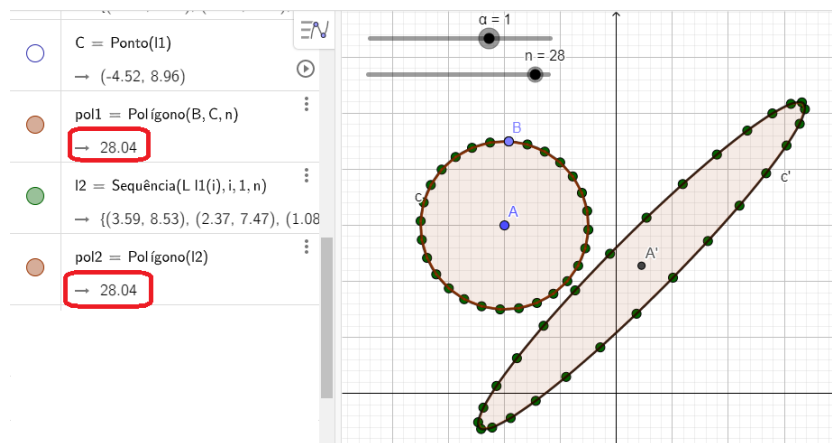


Figura 41: Os polígonos $pol1$ e $pol2$ para $n = 28$, quanto maior o valor de n mais próximas ficam as áreas dos polígonos c e c' . Em destaque as áreas de $pol1$ e $pol2$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do apresentado neste trabalho, acreditamos que conseguimos mostrar com detalhes as características dos grupos de rotação e de Lorentz. Em ambos mostramos que tratam-se de grupos ortogonais nas suas respectivas métricas (Euclideana e de Minkowski).

No caso do grupo de rotações, apresentado no Capítulo 2, após definir uma matriz ortogonal, mostramos que o grupo ortogonal $O(n)$ satisfaz as propriedades de grupo e estudamos mais a fundo as características de seu subgrupo de matrizes de determinante unitário, $SO(n)$. Determinamos então a forma geral das matrizes dos grupos $SO(2)$ e $SO(3)$. Para tal foi necessário a demonstração de Teoremas que envolvessem conceitos como operadores ortogonais, espaço invariante, autovalores e autovetores. Chamamos a atenção para o Teorema 2.10, onde todos os conceitos citados foram utilizados para concluirmos a forma das matrizes de $SO(3)$.

No Capítulo 3, exploramos o grupo de Lorentz e, para tal, partimos do espaço pseudo-Euclidiano \mathbb{R}_v^n munido de um produto interno específico, chamado produto interno pseudo-Euclidiano, e, tomando $v = 1$ e $n = 4$, definimos o espaço de Minkowski R^4 , munido do produto interno Lorentziano. Assim, pudemos definir o grupo $O(p, n)$ das matrizes ortogonais em R^4 munido do produto interno Lorentziano e seu subgrupo $SO(p, n)$ composto das matrizes de $O(p, n)$ com determinante unitário. Assim como foi feito para o grupo de rotações, aprofundamos o estudo para o grupo $SO(p, n)$ nos casos especiais $SO(1, 1)$ e $SO(1, 3)$, estes chamados grupos de Lorentz e determinamos a forma de suas matrizes. A atenção especial deste capítulo fica por conta da relação das matrizes de $SO(1, 3)$ com a Teoria da Relatividade Restrita, pois mostramos que as Transformações de Lorentz podem ser obtidas através de uma transformação linear cuja matriz de transformação é a matriz $L \in SO(1, 3)$.

Assim, após o estudo desses grupos mostramos aplicações desses conceitos. Primeiramente, abordamos o Paradoxo dos Gêmeos e acreditamos que tal assunto pode ser abordado no Ensino Médio pelo professor de Física pelo menos no caso mais comum para referenciais inerciais. A abordagem para referenciais não-inerciais pode servir de aprofundamento do caso. Outras aplicações dos grupos $SO(2)$, $SO(3)$ e $SO(1, 1)$ foram

mostradas e detalhadas em atividades que podem facilmente serem aplicadas no Ensino Médio em Matemática dentro do contexto da Geometria Analítica ou no estudo de Matrizes.

Finalmente, acreditamos que o presente trabalho contribuiu de alguma forma para a divulgação da Matemática e pode servir de apoio para inserir no Ensino Médio a noção intuitiva de Álgebra Linear.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. Apostol. *Cálculo - cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra Linear com aplicações às equações diferenciais e às probabilidades*. Number v. 2. Editora Reverté, 1996.
- [2] J. Barata. *Notas para Cursos de Física Matemática*. Versão de 05 de setembro de 2020.
- [3] D. de Figueiredo and A. Neves. *Equações diferenciais aplicadas*. Coleção matemática universitária. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- [4] J. Delgado, K. Frensel, and L. Crissaffi. *Geometria Analítica*. Coleção PROFMAT. SBM, 2017.
- [5] M. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Escola de geometria diferencial. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [6] M. do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Textos Universitarios: Ciências médicas. Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [7] A. Einstein. *A teoria da relatividade especial e geral*. Traduzido por Carlos Almeida Pereira. Contraponto Editora, 2003.
- [8] H. Eves. *Introdução à História da Matemática - 5ª ed.* Editora Unicamp, 2011.
- [9] G. Freitas and A. Gomes. *Dilatação do tempo, referenciais acelerados e o paradoxo dos gêmeos*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.41, n.3, 4304. 2019.
- [10] J. Gondar and R. Cicolatti. *Iniciação à Física Matemática: modelagem de processos e métodos de solução*. Coleção Matemática e Aplicações. IMPA, 2009.
- [11] M. Huemer. *Correct Resolution of the Twin Paradox*. Acesso em 31 de Agosto de 2020.
- [12] E. Lima. *Álgebra linear*. Coleção matemática universitária. IMPA, 1995.

- [13] A. Lyberopoulos and I. Couto. *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*. Textos Universitários. SBM, 2018.
- [14] P. A. Martin. *Grupos, Corpos e Teoria de Galois*. Textos Universitários do IME-USP. Livraria da Física, 2010.
- [15] C. Moshe. *Group Theory & General Relativity*. International series in pure and applied physics. World Scientific Publishing Company, 2000.
- [16] W. Nicholson. *Álgebra Linear - 2.ed.* AMGH Editora, 2015.
- [17] A. Rocha, B. Rizzuti, and D. Mota. *Transformações de Galileu e Lorentz: Um estudo via teoria de grupos*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.35, n.4, 4304. 2013.
- [18] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976.
- [19] J. Tello. *Licoes de equacoes diferenciais ordinarias*. Projeto Euclides. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1979.