Universidade Estadual do Piauí - UESPI
Nucleo de Pós-Graduação - NPG
Mestrado Profissional em Matemática

Antonielton da Silva Fontenele

A MATEMÁTICA NO CONTEXTO VIRTUAL: ESTRATÉGIAS PARA O APRENDIZADO DE SISTEMAS LINEARES POR MEIO DO PROGRAMA GEOGEBRA

Teresina
2021

ANTONIELTON DA SILVA FONTENELE

A MATEMÁTICA NO CONTEXTO VIRTUAL: ESTRATÉGIAS PARA O APRENDIZADO DE SISTEMAS LINEARES POR MEIO DO PROGRAMA GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Piauí como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito.

TERESINA

2021

F683m Fontenele, Antonielton da Silva.
A matemática no contexto virtual: estratégias para o aprendizado de sistemas lineares por meio do Programa GeoGebra / Antonielton da Silva Fontenele. – 2021.
75 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Mestrado Profissional em Matemática, *Campus* Poeta Torquato Neto, Teresina-PI, 2021.
“Orientador Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito.”

1. GeoGebra. 2. Ensino médio. 3. Sistemas lineares. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecária) CRB-3ª/1188

ANTONIELTON DA SILVA FONTENELE

A MATEMÁTICA NO CONTEXTO VIRTUAL: ESTRATÉGIAS PARA O APRENDIZADO DE SISTEMAS LINEARES POR MEIO DO PROGRAMA GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Coordenação do Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Piauí como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito.

Defendida em: 20/12/2021

BANCA EXAMINADORA

Arnaldo Silva Brito

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito - Presidente e Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Prof. Me. Mário Gomes dos Santos - Examinador
Universidade Federal do Piauí - UFPI

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus, pela oportunidade de viver o agora, por conviver com pessoas maravilhosas e pela esperança de um dia ver novos céus e nova terra onde habita a justiça. (2 Pedro 3:13)

Ao meu filho João Benício e minha esposa Maria José, motivações para aproveitar o hoje e alegremente esperar o amanhã.

À minha mãe, Maria do Rosário da Silva, também minha primeira professora, que com muita paciência, me fez amar o processo de aprender.

Às minhas irmãs, Teresa e Maria Antonia e aos meus sobrinhos Theo e Mariana, pessoas que me mostram a cada dia que a existência compartilhada é a melhor que existe.

Ao meu pai, Antonio Jacinto Fontenele, pelo apoio financeiro na graduação.

À minha madrinha Maria Elita de Sousa, pela dedicação e cuidado na minha educação. Sempre passava atividades extras durante as férias.

Às minhas tias Luzia Fontenele, Rosário Cerqueira e Luiza Cerqueira por terem aberto seus lares e me recebido com tanto carinho durante a graduação.

Ao fiel amigo Geovânio Lima dos Santos. Sábio, humilde e sempre com uma palavra de sabedoria.

Ao mestre Lízio Laguna Lopes Soares. Ser sonhador e inteligente quase sem paralelo. Fez-me enxergar e contemplar o mundo natural pela ótica científica.

À querida Luciana Barbosa da Silva, traduzida como: Mulher Guerreira. Esteve presente nos momentos mais tristes da minha vida compartilhando força e esperança.

Ao meu grande professor de Cálculo I, hoje meu orientador, professor Arnaldo Silva Brito. Homem firme e justo. Fez-me melhorar como aluno, como professor e até como pai. Ensinou-me que cultivar esperança é difícil, mas vale a pena.

Ao professor Afonso Norberto da Silva, dono de uma humildade incrível. Alguém que, naquela paz criada na sua sala de aula, conseguiu nos fazer acreditar que conseguimos aprender qualquer coisa. E no fim, ele estava certo.

Aos colegas do Profmat: Andreína e José Carlos. Sem ser injusto com os demais, os dois me mostraram que persistir com um objetivo em mente nos faz invencíveis.

A todos os meus professores de São José do Divino. Apesar da minha imaturidade ter me prejudicado, foi pelo empenho deles que esta conquista se tornou possível.

A todos que consciente ou inconscientemente contribuíram para o meu caminho.

"Contudo, quando avaliei tudo o que as minhas mãos haviam feito e o trabalho que eu tanto me esforçara para realizar, percebi que tudo foi inútil, foi correr atrás do vento; não há qualquer proveito no que se faz debaixo do sol."

(Eclesiastes 2:11)

RESUMO

Esta pesquisa analisa a aplicabilidade do programa GeoGebra para o ensino da Matemática, especialmente do conteúdo sistemas lineares no ensino médio, considerando o que preceitua a BNCC, o contexto de pandemia instaurado pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2) e a praticidade do programa para a resolução das atividades propostas pelos educadores aos educandos. Além do exposto, o trabalho apresenta uma sugestão de proposta didática a ser aplicada em sala de aula, com alunos do 2º ano do ensino médio. Quanto à metodologia, esta pesquisa é classificada como bibliográfica, tendo em vista que o atual contexto de pandemia foi um entrave para a pesquisa-ação, que era a proposta inicial desta pesquisa acadêmica.

Palavras-chave: GeoGebra. Ensino Médio. Sistemas Lineares.

ABSTRACT

This research analyzes the applicability of the GeoGebra program for the teaching of Mathematics, especially the content of linear systems in high school, considering what the BNCC precepts, the pandemic context created by the new coronavirus (SARS-CoV-2) and the practicality of the program for the resolution of the activities proposed by the educators to learners. In addition to the above, the work presents a suggestion for a didactic proposal to be applied in the classroom, with students from the 2nd year of high school. As for the methodology, this research is classified as bibliographical, considering that the current context of the pandemic was an obstacle for action research, which was the initial proposal of this academic research.

Keywords: GeoGebra. High School. Linear Systems.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Em 2020, o decreto de pandemia de COVID-19, doença respiratória causada pelo novo coronavírus (Sars-Cov-2), declarado pela Organização Mundial de Saúde (OMS), no dia 11 de março, alertou a população de todos os países, sem exceção, para que adotassem medidas sanitárias no intuito de conter a disseminação da doença. No Brasil, o fechamento de instituições de ensino, a suspensão de eventos (esportivos, culturais, religiosos) e outras ações preventivas foram iniciadas a partir do mês de março, quando apenas as atividades consideradas essenciais (serviços de assistência à saúde, produção e distribuição de itens alimentícios e de higiene) funcionaram ativamente.

Daí em diante, o cenário nacional foi profundamente afetado pelas consequências do estado de calamidade e paralização de grande parte das atividades econômicas. Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), estima-se que mais de 700 mil empresas brasileiras encerraram suas atividades. Consequentemente, além do aumento exponencial do índice de desemprego, a Associação Brasileira de Psiquiatria (ABP) e a Associação Brasileira de Estudo e Prevenção de Suicídio (ABEPS) constataram que os casos de depressão, ansiedade e estresse dobraram durante a pandemia.

No contexto educacional, o impacto da pandemia foi igualmente avassalador, tendo em vista que as instituições de ensino foram fechadas e os professores precisaram, muito rapidamente, passar por um processo de atualização obrigatória para aprenderem a lidar com ensino no contexto virtual, o que para muitos representou e continua representando um enorme desafio, se considerarmos as diversas funções possíveis, mas ainda desconhecidas por muitos profissionais.

Nesse sentido, esta pesquisa bibliográfica apresenta o cenário afetado pelo efeito devastador da pandemia COVID-19, com vistas ao ensino da Matemática no ensino médio, etapa escolar escolhida por ser a área de maior atuação do sujeito pesquisador e também um momento decisivo para os adolescentes e jovens que, logo depois, farão a prova do

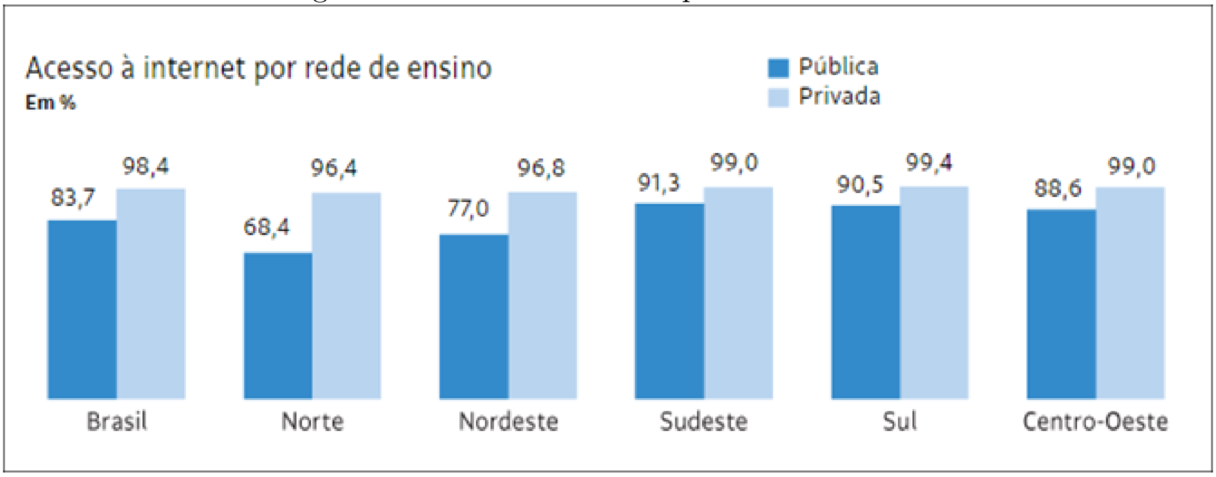
ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), um momento decisivo para muitos alunos e também para as famílias envolvidas no processo educativo.

A necessidade de implementar estratégias digitais para um ensino mais eficiente é tão urgente que, por exemplo, os alunos que em 2019 terminaram o 9º ano do ensino fundamental foram, de certa forma, direto para 3º ano do ensino médio. Ocorre que no início da pandemia estes alunos iniciariam presencialmente o 1º ano do ensino médio, mas logo a pandemia foi decretada em março. Desta forma, os alunos cursaram o 1º ano em 2020 na modalidade remota e o 2º ano em 2021, híbrido a partir de agosto, retornando presencialmente para o 3º ano em 2022. Assim, se estes alunos não foram assistidos por meios remotos satisfatórios, suas chances de aprovação no Enem foram reduzidas.

Nesse cenário, uma avaliação realizada pelo IBGE e divulgada no site Folha de S. Paulo [28] apontou que mais de 4 milhões de alunos não tinha acesso à internet no momento da paralisação das atividades escolares na pandemia. A pesquisa aponta dados do último semestre do ano de 2019, e evidencia traços da desigualdade social latente no cenário educacional brasileiro, pois salienta que o acesso à internet dos alunos de escolas públicas é inexistente ou bastante limitado sendo que do total de estudantes sem internet, 95,9% são de escolas públicas.

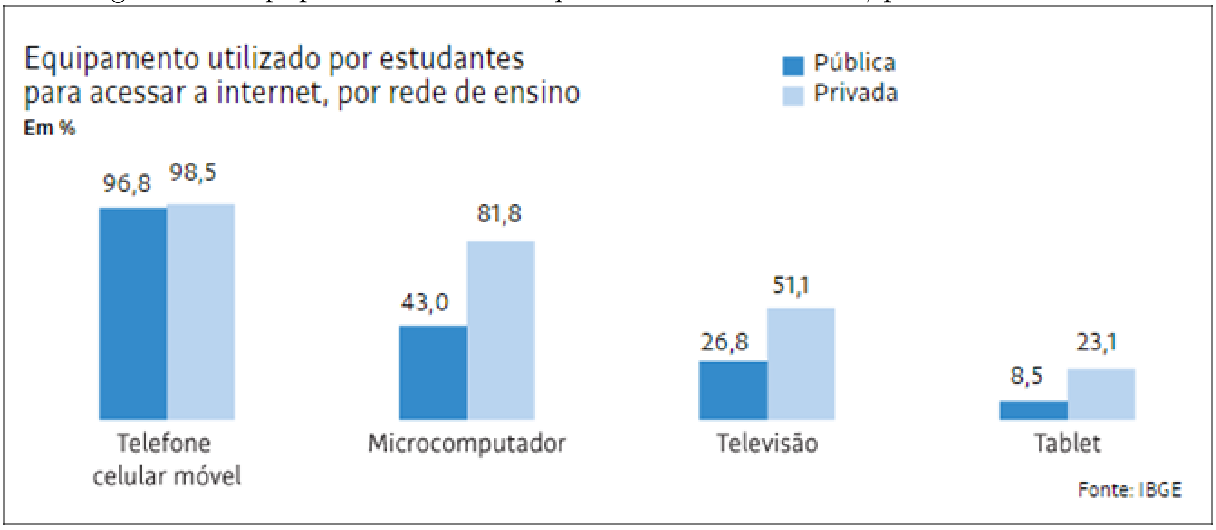
Conforme destacado acima, problemas relacionados à conectividade dificultaram a continuidade e consequente progressão dos estudos dos alunos da rede pública de ensino. A esse respeito, [28] ainda aponta que somente em São Paulo, "cerca de 91 mil alunos não acompanharam as aulas remotas nem entregaram nenhuma atividade letiva no ano (de 2020)." Na mesma reportagem, a Folha de S. Paulo também esclarece, por meio da fala da pesquisadora Alessandra Brito, integrante da equipe do IBGE, que: "a questão do aparelho ser caro e do serviço ser caro é um problema, mas é um problema ainda maior para o estudante da rede pública, pois enquanto 99,5% dos brasileiros acessam a internet pelo celular, apenas 45,1% o fazem por computadores." Os estudos ainda salientam o seguinte cenário:

Figura 01: Acesso à internet por rede de ensino



Fonte: Folha de S. Paulo [28]

Figura 02: Equipamento utilizado para acessar a internet, por rede de ensino



Fonte: Folha de S. Paulo [28]

Nesse sentido, confirmamos numericamente que o acesso à internet e também aos aparelhos tecnológicos para os alunos da rede pública é, sim, demasiado limitado ou mesmo inexistente. Além disso, convém destacar a situação das zonas menos privilegiadas, especialmente as zonas rurais onde, segundo os dados publicados pelo IBGE [28], a taxa de cobertura de internet pouco mais de 55%. O estudo ainda esclarece que as regiões norte e nordeste são bastante afetadas, pois nelas apenas 38,4% e 51,2%, respectivamente, têm acesso à internet na zona rural.

Diante disso, fica evidente a necessidade e também a urgência de discussões profundas acerca desta temática que afeta diretamente a vida presente, mas também, e especialmente, o futuro dos adolescentes e, consequentemente, da nação brasileira que terá menos jovens com o pensar crítico desenvolvido e menos pessoas aptas a lutarem em prol do bem comum e até mesmo das comunidades carentes e minorias, mais afetadas pela desigualdade social.

O fator desigualdade pode ser percebido durante este período em todas as esferas sociais, mas também em forma de conteúdo nas mídias sociais, cuja função é discutir (mesmo que nem sempre de forma bem fundamentada) os problemas sociais em questão no Brasil, dando voz àqueles que não tinham acesso às redes, conforme lemos no exemplo a seguir:

Figura 03: Desigualdade na educação durante a pandemia

Fonte: Portal Viu [13]

Imagens como esta, postada pelo portal on-line Portal Viu [13] e também amplamente compartilhadas nas redes sociais colocaram em questão, de forma bastante explícita e expressiva, as desigualdades enfrentadas pelos estudantes brasileiros. O portal salienta que, de acordo com o Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), quase 17% da população brasileira não teve acesso à internet durante a primeira onda da pandemia. [13] também menciona que de acordo com a Agência Brasil, 88 milhões de brasileiros, ou seja, 42% da população nunca utilizou um computador. Entre os não contemplados estão, especialmente, negros, indígenas e pessoas de baixa renda.

Os dados apontados nestas pesquisas dizem de outro modo, de forma numérica, a ausência de boas perspectivas por parte dos estudantes menos favorecidos. Na [Figura 03], percebemos que a janela do lado esquerdo, onde temos um estudante que goza de boas condições financeiras e boa infraestrutura para os estudos aponta para uma universidade. Do outro lado, observamos a janela simples e fechada do aluno desfavorecido, que nem mesmo está alimentado, pois, como observamos, a panela ao lado dele aparece vazia e seu semblante tristonho ou desfigurado.

Levando em conta as condições excludentes, bem como o alto índice de ansiedade e outras dificuldades enfrentadas pelos alunos e por suas famílias, temos ainda a análise divulgada do pesquisador Alexandre Schneider, atuante na universidade Columbia em Nova York e também na Fundação Getúlio Vargas em São Paulo divulgada no site Extra Classe [12], com quem compreendemos que "dedicamos poucos esforços a medir os impactos das políticas educacionais implementadas no último ano".

Dito isso, compreendemos que o tema em questão, a saber, "a Matemática no contexto virtual: estratégias para o aprendizado de sistemas lineares por meio do programa GeoGebra", vai muito além da discussão numérica propriamente dita, pois deve considerar os aspectos sociais, contextuais sob os quais os alunos da rede pública estão submetidos, e não apenas o cálculo ou as normas como um fim em si mesmo. Vale ainda ressaltar que, embora seja importante refletir sobre as práticas do professor e o processo de atualização repentino a que foi submetido, é igualmente urgente e necessário compreender o processo de formação do alunado para o real desenvolvimento e atendimento de suas demandas, desenvolvendo, de forma eficiente, as competências e habilidades exigidas em cada um dos períodos letivos.

Assim, esta pesquisa bibliográfica tem como justificativa a relevância do conteúdo, sistemas lineares, para o aluno do ensino médio da rede pública, a existência e pertinência da implementação do programa GeoGebra em sala de aula e ainda o contexto de pandemia e crise educacional instaurado no Brasil. Frisamos que muitas referências virtuais aparecem como repertório devido à atualidade da temática em questão. Como referências, destacou-se os autores e sites relacionados à pandemia de SARS-CoV-2 e ao programa GeoGebra com ênfase ao trabalho, principalmente, dos seguintes autores Aguiar (2011), Andrade (1998), Araújo (2020), Hohenwarter (2009), Marchetti (2014), Onuchic (1999; 2004), Lino (2014) e Poloni (2018).

Esta pesquisa tem por objetivo geral analisar o ensino remoto da Matemática, mais especificamente o ensino de sistemas lineares com o auxílio do software GeoGebra a alunos do ensino médio. Para isso levamos em conta o contexto pandêmico e suas implicações sociais que prejudicaram o desempenho do aluno da rede pública no Brasil. Por fim, destacamos que esta pesquisa segue dividida em cinco partes:

O presente capítulo: **Introdução**, momento de apresentação dos efeitos da pandemia no contexto educacional e social;

O segundo capítulo: **A pandemia e o ensino da matemática**, um aprofundamento dos danos da pandemia especificamente na educação onde traremos alguns trabalhos realizados neste período;

O terceiro capítulo: **Metodologia**, descrição das etapas e escolhas realizadas na pesquisa;

O quarto capítulo: **Sistemas lineares e o GeoGebra**, momento em que mostraremos diversas áreas do cotidiano em que os sistemas lineares são utilizados, o que orienta a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sobre o ensino baseado em recursos tecnológicos, uma breve apresentação sobre o software GeoGebra e a estrutura de uma sequência didática.

E para concluir a pesquisa, teremos o quinto capítulo: **Considerações finais**.

2 A PANDEMIA E O ENSINO DA MATEMÁTICA

A Constituição da República Federativa do Brasil de 1988 aponta em seu artigo 6º [9] que: "São direitos sociais a educação, a saúde, a alimentação, o trabalho, a moradia, o transporte, o lazer, a segurança, a previdência social, a proteção à maternidade e à infância, a assistência aos desamparados [$\cdots$]". No entanto, conforme dados do IPEA [26], em março de 2020, mais de 220 mil pessoas (sobre)vivem em situação de rua no Brasil e são inúmeros os casos de famílias desassistidas no que diz respeito aos direitos básicos ou fundamentais, como o acesso à educação, por exemplo.

Como mencionado no capítulo de Introdução desta pesquisa, o ano de 2020 foi marcado pelo decreto de pandemia da COVID-19 pela OMS, recomendando a todos os países adotassem medidas sanitárias restritivas a fim de conter a disseminação do vírus. Entre muitas instituições fechadas sem previsão de reabertura no Brasil estavam as instituições de ensino públicas e privadas.

Nesse contexto, a reportagem "População em situação de rua cresce durante a pandemia", publicada no Diário do Nordeste [25], em 29 de junho de 2020, afirma que, com a piora de indicadores econômicos sociais e o desemprego, a quantidade de pessoas em estado de vulnerabilidade ou desassistência aumentou significativamente. Sem condições de seguir orientações básicas de prevenção, os cidadãos foram considerados mais expostos ao contágio, também enfrentaram dificuldades como escassez de suprimentos básicos e problemas relacionados à educação, visto que as aulas remotas demandam um aparato tecnológico maior.

Nessa perspectiva, considerando a dinamicidade dos sentidos e as estratégias educativas, especialmente neste momento de pandemia, esta pesquisa viabiliza discussões considerando:

1. O contexto de calamidade pública instaurado pelo SARS-CoV-2;

2. A vulnerabilidade social e a ausência de recursos tecnológicos;

3. A democratização do acesso ao conhecimento, por meio da implementação das novas tecnologias em sala de aula para o ensino da Matemática;

4. A necessidade de elaboração de estratégias aplicáveis e eficientes de ensino da Matemática na modalidade remota de ensino.

Assim, conforme expresso pelos problemas de pesquisa, a pandemia de COVID-19 relacionada às práticas educativas e, mais precisamente, ao ensino da Matemática, justamente pela atualidade inerente à temática, pode ser considerada nova em sua especificidade - visto que permite, trabalhando no entremeio do ensino, a elaboração de material didático para o melhoramento de práticas educativas na escola e garantir o aprendizado e o protagonismo do alunado.

Sendo assim, a temática a ser desenvolvida, nesta pesquisa, é de grande relevância para a atualidade, principalmente em decorrência da escassez de políticas públicas e documentos voltados para aqueles que não podem estar em casa ou que não tem domínio da utilização das novas tecnologias voltadas para o ensino da disciplina em questão. Pesquisas como esta, que colocam em destaque o ensino e a atuação ativa do aluno para a construção de saberes, objetivam não apenas analisar fenômenos numéricos, mas intervir na forma como estes conteúdos são percebidos, instaurando, assim, uma compreensão crítica sobre o funcionamento das práticas educativas e sociais.

2.1 Contexto pandêmico

Além do exposto no capítulo primeiro desta pesquisa, Introdução, os impactos da pandemia vão muito além das discussões acerca de questões financeiras ou alimentares. Mestra em psicologia pela Universidade Federal de Pernambuco, a professora Fabiana Amorim, em entrevista concedida ao Portal Viu [13], aponta que o isolamento social pode aumentar ou mesmo ampliar sintomas relacionados à ansiedade na juventude, isso porque há a ausência de atividade do sistema de reforço.

Em consonância ao exposto, segundo dados de maio de 2021 de uma pesquisa do UNICEF (Fundo das Nações Unidas para a Infância) [15], 52% da população brasileira com 18 anos ou mais relatam "preocupações exageradas com o futuro", 45% apresentaram "alterações no sono como insônia ou excesso de sono" e 37% demonstraram "mudanças repentinas de humor e irritabilidade" durante a pandemia. Os dados também confirmam que quase 30% dos jovens entrevistados entre 11 e 17 anos declaram ter sentido "mudanças repentinas de humor e irritabilidade", além de 20% que declararam ter apresentado "agitação, tristeza ou choro fácil e sem motivo".

Outro ponto importante neste momento foi o uso da internet (para aqueles que tiveram acesso a ela) durante a pandemia causada pelo SARS-CoV-2. No Brasil, de acordo com informações da ABRANET (Associação Brasileira de Internet) trazidas pelo portal Olhar Digital [11], dobrou o número de horas de uso das redes sociais após o início da pandemia e o tempo gasto na internet para trabalho de casa saltou de 3h41min para 6h44min diariamente.

Sobre este tópico, a saber, a excessiva exposição às redes, o Instituto Nacional de Saúde da Mulher, da Criança e do Adolescente (IFF) em matéria publicada em maio de 2020 [21] verificou que "a participação intensiva nas redes sociais também pode gerar um "excesso" de informação ou, em muitos casos, desinformação sobre a pandemia. O excesso de informação pode gerar ansiedade e a difusão da noção de um "medo global", com ênfase no número de mortes e previsões das curvas de contágio". Além do exposto, o texto ressalta ainda o aumento dos perigos de sofrer ou praticar violências na ambiência digital.

Fica, portanto, evidente que o tema saúde mental no contexto da pandemia tem sido amplamente discutido, justamente por sua pertinência neste período que ainda defende a manutenção do afastamento ou isolamento social para a minimização dos contágios pelo SARS-CoV-2.

"Dependência sem droga" é o termo apresentado pelo jornal El País [31] cuja manchete é "Vício em redes sociais dispara na pandemia, mas há como recuperar o controle e se desintoxicar: Em tempos de isolamento social, mais gente sucumbiu a essa dependência. Veja cinco métodos para revertê-la e ser mais feliz". O jornal virtual destaca o perigo da assimilação de conteúdos considerados tóxicos e disponíveis na ambiência digital, além de mencionar o documentário publicado pela Netflix (plataforma global de filmes e séries de televisão via streaming), intitulado "O dilema das redes" publicado em 26 de janeiro de 2020, que aborda por meio de falas de especialistas em tecnologia, o perigoso impacto das redes sociais no mundo moderno, bem como a despreocupação com o ser humano como pessoa humana (conforme estabelece o Texto Constitucional), mas sim como produto posto, de forma ora explícita, ora velada, à venda nas plataformas virtuais mais diversas.

Ainda sobre o contexto de pandemia, é importante mencionarmos que muitos foram os jovens e adolescentes vítimas do SARS-CoV-2. A esse respeito, o jornal on-line CNN Brasil, em matéria publicada em julho de 2021 [14] alerta para as "longas internações e síndromes pós-Covid em pacientes jovens: Rejuvenescimento da pandemia faz com que mais da metade dos casos sejam de pessoas com menos de 60 anos". De acordo com o jornal, tem sido cada vez mais comum que pacientes jovens evoluam ao estado mais grave da doença e que, embora recuperados, sofram por tempo ainda indeterminado com sequelas com fadiga, cansaço, perda do olfato e do paladar, parosmia e outros problemas ainda desconhecidos causados pela atuação do vírus no organismo dos jovens e adolescentes.

No que diz respeito à sobrevivência o público jovem viu suas oportunidades de trabalho diminuir devido à paralisação das atividades comerciais e ao fechamento de diversas empresas, especialmente de pequeno porte, que não sobreviveram à pandemia. Dito isso, e esclarecidos alguns dos dilemas da população jovem neste tempo, concluímos que são estes os alunos com os quais os professores lidam diariamente. Logo, é perceptível que o ensino não pode ou deve estar preso às amarras dos números somente, mas sim promover o crescimento e o desenvolvimento cognitivo e pessoal dos indivíduos envolvidos no processo educativo.

2.2 Atualização profissional e a pandemia

Além do alunado, os professores também devem ser analisados em suas práticas, de modo que as lacunas presentes no ensino da Matemática sejam percebidas, analisadas e corrigidas, especialmente agora, com a implementação do ensino mais fortemente nas plataformas digitais. O contato, agora, com câmeras, vídeos e novos equipamentos tecnológicos para a criação de formas, traços e até mesmo para a execução de cálculos é, para muitos educadores, algo novo. Por isso, esses aspectos também precisam ser avaliados. A Matemática no contexto virtual deve ser pensada com vistas a estratégias de fato eficientes para o aprendizado de temas como, por exemplo, sistemas lineares, por meio de programas como o GeoGebra - que será apresentado posteriormente.

2.3 Estratégias abordadas

Neste tópico, abordaremos pesquisas já realizadas no período da pandemia e relacionadas ao tema em questão, no intuito de evidenciarmos os trabalhos já realizados, complementar as discussões. A seguir, listamos alguns dos artigos e dissertações produzidos neste momento de enfrentamento da COVID-19 no contexto da educação, mais precisamente do ensino da Matemática.

Para tanto, destacamos os seguintes trabalhos, selecionados pela temática abordada (que vai ao encontro da nossa proposta de trabalho) e também por terem sido produzidos durante o período de pandemia:

1. Desafios de se ensinar Matemática remotamente: os impactos da pandemia de COVID-19 na rotina de professores [19], artigo científico dos pesquisadores Agnaldo da Conceição Esquincalha e Pedro Paulo Mendes da Rocha Marques da Universidade Federal do Rio de Janeiro;

2. A pandemia sob outra perspectiva: uma experiência com fotografias no ensino não presencial de geometria espacial [27], artigo dos pesquisadores Lauro Chagas e Sá e Organdi Mogin Rovetta do Instituto Federal do Espírito Santo;

3. Uma análise da educação Matemática durante a pandemia de covid-19 [3], dos pesquisadores Francisco Willame Gomes de Araújo, Emanoel Marcilio de Abrantes Gadelha Silva e Roberlândia de Abrantes Gadelha Silva da Universidade Estadual da Paraíba.

No primeiro trabalho destacado, "Desafios de se ensinar Matemática remotamente: os impactos da pandemia covid-19 na rotina de professores" [19], artigo científico dos pesquisadores Agnaldo da Conceição Esquincalha e Pedro Paulo Mendes da Rocha Marques da Universidade Federal do Rio de Janeiro, percebemos uma análise acerca da necessidade de repensarmos as práticas didáticas de ensino da Matemática devido à necessidade de isolamento social entre alunos, professores e escolas provocada pela pandemia.

Nesse sentido, o trabalho, de abordagem qualitativa, os pesquisadores focaram suas observações na desenvoltura dos professores participantes do curso de extensão "Cada um na sua casa: alguns caminhos para ensinar matemática em ambientes virtuais" (CUNSC), ofertado durante a pandemia pelo grupo de pesquisas Tecnologias, Inclusão, Matemática e Educação (TIME), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT-UFRJ), que contou com mais de 300 participantes.

A pesquisa avaliou que a pandemia de COVID-19 acelerou o processo de expansão das tecnologias digitais e adaptação das escolas ao universo das tecnologias, contudo, ao mesmo tempo, expôs amplamente questões como a desigualdade de acesso aos equipamentos eletrônicos, inclusive por parte dos professores (que são o foco desta pesquisa) e o desconhecimento dos recursos digitais ou do modo como são operacionalizados. Dito isso, ficou evidente que a falta de recursos (dados/internet, aparelhos eletrônicos) dos alunos e o desconhecimento dos professores são entraves na efetivação do ensino da Matemática no contexto da pandemia, na era digital. Por fim, vale ressaltar aspectos analíticos relacionados à carga horária do profissional da educação e também da baixa remuneração, problemas atuais e urgentes neste momento sobremodo obscuro.

"A pandemia sob outra perspectiva: uma experiência com fotografias no ensino não presencial de geometria espacial"[27], artigo dos pesquisadores Lauro Chagas e Sá e Organdi Mogin Rovetta do Instituto Federal do Espírito Santo, segunda pesquisa em foco, tomou como referência a utilização de fotografias. A pesquisa foi desenvolvida em maio de 2020 com 116 alunos de três turmas do 2º ano do ensino médio. Os pesquisadores concluíram que a fotografia pode servir como instrumento para a facilitação do aprendizado e uma melhor visualização das figuras geométricas. O estudo sinalizou relações entre a observação de registros fotográficos e o desenvolvimento do pensamento crítico.

A terceira pesquisa, "Uma análise da educação Matemática durante a pandemia de covid-19" [3], dos pesquisadores Francisco Willame Gomes de Araújo, Emanoel Marcilio de Abrantes Gadelha Silva e Roberlândia de Abrantes Gadelha Silva da Universidade Estadual da Paraíba analisou como tem sido o ensino na internet da Matemática em tempos de pandemia. O estudo fez uso do método qualiquantitativo e indicou a necessidade de uma revisão curricular, conclusão pensada a partir da observação de metodologias aplicadas no ensino médio de escolas do sertão paraibano.

Diante disso, consideramos importante e necessária uma reflexão acerca do contexto situacional dos alunos e professores, a fim de que, a partir dela, novos caminhos sejam pensados ou mesmo repensados para que o ensino da Matemática seja verdadeiramente eficiente e eficaz. Vale ressaltar que esta seria uma pesquisa qualitativa, todavia, por conta da pandemia, novos caminhos foram definidos. Leituras e discussões acerca deste momento são indispensáveis ao desenvolvimento da educação, pois percebem os alunos e professores como sujeitos de saber, capazes de sentir e opinar.

As afirmações se comprovam ao analisarmos o que traz o portal online BBC News Brasil [4], em sua matéria acerca das “falhas do ensino da Matemática expostas pela pandemia”. Conforme Marcelo Viana, diretor-geral do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e uma das fontes mencionadas na página, “Estamos ensinando a Matemática do século 19 nas nossas escolas, e isso cria uma lacuna na formação que damos aos jovens para o exercício de profissões e para munir as crianças com ferramentas para entender o mundo à nossa volta, que é o objetivo da Matemática”. A afirmação ressalta a importância da necessidade de atualizações mediante o crescimento exponencial da necessidade de aulas remotas. Mostra que não é mais viável confinar alunos conectados durante até seis aulas semanais para mostrar um exemplo no quadro e pedir que estes resolvam os demais exercícios da página. Se me é permitido complementar o que diz Marcelo Viana, nós, professores, estamos no mesmo ambiente físico que nossos alunos, mas com uma diferença temporal de quase 300 anos.

2.4 O aluno do ensino médio no contexto da pandemia

De acordo com as autoras Onuchic e Alevato (2004) [22], temos, no mínimo, seis motivos para o estudo da Matemática relacionado à resolução de problemas. Mas a resolução dos problemas não deve ser visto como o objetivo final a ser alcançado e sim como suporte para elaborar novos conhecimentos e conceitos que possam ser aplicados ao mundo contemporâneo. A esse respeito, as autoras destacam:

> 1 - Resolução de problemas coloca o foco da **atenção dos alunos sobre ideias e sobre o “dar sentido”**. Ao resolver problemas alguns alunos necessitam **refletir sobre ideias** que são inerentes e/ou ligadas ao problema;
>
> 2 - Resolução de problemas desenvolve o “poder matemático”. Os estudantes, ao resolver problemas em sala de aula, se engajam em todos os cinco padrões de procedimentos descritos no Standards 2000: **Resolução de problema; raciocínio e prova; comunicação; conexões e representação, que são os processos de fazer Matemática, além de permitir ir bem além na compreensão do conteúdo que está sendo construído em sala de aula;**
>
> 3 - Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido. Cada vez que o professor propõe uma tarefa com problemas e espera pela solução ele diz aos estudantes “Eu acredito que vocês podem fazer isso!” Cada vez que a classe resolve um problema, **a compreensão, a confiança e**

> **a autovalorização dos estudantes são desenvolvidas;**
>
> 4 - Resolução de problemas provê **dados de avaliação contínua** que podem ser usados para tomar decisões instrucionais, ajuda os alunos a ter sucesso e informar os pais;
>
> 5 - É gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar do modo "ensinar dizendo". A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos através de seu próprio raciocínio vale todo o esforço e, de fato, **é divertido**, também para os alunos;
>
> 6 - A formalização de toda a teoria Matemática pertinente a cada tópico construído, dentro de um programa assumido, feita pelo professor no final da atividade, **faz mais sentido para os alunos.** (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 233-234) [23] (grifos nossos).

As considerações são pertinentes ao tema em questão porque entendem o aluno como sujeito social. Conforme foi apresentado pelas autoras e destacado na citação acima, a resolução de problemas feita em sala de aula de forma bem planejada e orientada desperta a reflexão, amplia a compreensão de mundo, estimula a autoconfiança, a autovalorização, promove a diversão dos alunos e, principalmente, faz sentido. Dito de outro modo, a proposta, conforme o que foi dito, atende às demandas sociais e cognitivas dos alunos do ensino médio no contexto da pandemia de COVID-19.

O aluno do ensino médio no contexto da pandemia deve ser visto como um sujeito bastante afetado pelo mundo que o cerca e também pelos acontecimentos e notícias veiculados a todo o momento por meio dos aparelhos eletrônicos e das novas tecnologias digitais. Sendo assim, importa como exposto acima, que o ensino da Matemática em sala de aula faça sentido para o aluno em sua vida e até mesmo em suas relações sociais, caso contrário não haverá interesse ou motivação por parte do alunado.

Nesse sentido, a presença do problema matemático deve sugerir soluções e conceitos para trabalhar com as figuras geométricas, uma das maiores dificuldades, mas também necessidade, dos alunos do ensino médio. O conteúdo anteriormente apresentado de forma sequencial agora pode assumir um formato espiralado, ou seja, são desenvolvidos em consonância com o grau de dificuldade que pode ser enfrentado pelo aluno e seu desenvolvimento cognitivo. No intuito de compreendermos a Matemática no contexto virtual e as estratégias para o aprendizado de sistemas lineares por meio do programa GeoGebra, precisamos entender, primeiramente, onde vive o alunado e o que chamar sua atenção, quais os seus objetivos e metas.

3 METODOLOGIA

Este capítulo elucidará quais os procedimentos, etapas e ferramentas analíticas para o desenvolvimento desta pesquisa acadêmica, além da justificativa do tema em questão. Como instrumento de comunicação, a forma como ensinamos a Matemática passa por inúmeras variações decorrentes de diversos fatores regionais, culturais, socioeconômicos, além de alinhar-se a múltiplas situações de interação social, com maior ou menor grau de dificuldade. Contudo, não apenas as metodologias mudam, mas o próprio conceito é igualmente afetado por fatores externos a elas. Por isso é necessário refletirmos essas questões e, especialmente, sobre estes sujeitos que integram o processo educacional e fundamentam a permanência e também o desenvolvimento das comunidades e da sociedade.

3.1 Caracterização da pesquisa

A pesquisa realizada nesse estudo possibilita um entendimento da realidade, é um processo permanentemente inacabado, um diálogo crítico e criativo, com abordagem qualitativa quanto ao objeto de estudo, pois se preocupa com aspectos da realidade do alunado que não podem ser quantificados. Quanto à fonte dos dados, classifica-se como documental, pois foram analisadas fontes legitimadas cuja abordagem tem como objetivo esclarecer-nos acerca deste tempo.

Esse estudo descritivo tem como objetivo geral analisar o ensino remoto da Matemática e propor uma sequência didática para o ensino de sistemas lineares, por meio do programa GeoGebra aos alunos do ensino médio. Para isso, consideramos, especialmente, o cenário exposto pelos efeitos da pandemia e a recente necessidade de desenvolver estratégias que viabilizem um ensino remoto, porém dinâmico, ao aluno da rede pública no Brasil.

Para a construção do referencial teórico desse estudo fizemos uso de pesquisas já publicadas no ano de 2020 acerca da pandemia, além de matérias, pesquisas e entrevistas de sites considerados legitimados socialmente para a compreensão do momento de pandemia que temos vivenciado. Deste material destacamos que o critério para a seleção dos materiais considerou, primeiramente, a presença ou não de uma ou mais das palavras-chaves destacadas no resumo desta pesquisa e, em segundo lugar, a relação com o contexto educacional e/ou de ensino da Matemática no Brasil. Para uma breve abordagem histórica, utilizamos principalmente as seguintes fontes: Andrade (1998) e Onuchic (1999; 2004). E para além da prática com o GeoGebra, foi pesquisado sobre o programa com os autores Aguiar (2011); Cataneo (2011); Marchetti (2014); Matos (2020) e Poloni (2018).

3.2 Etapas de desenvolvimento da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida de acordo com as seguintes etapas: levantamento das fontes, análise das fontes e seleção do material adequado, de acordo com os critérios de exclusão já apontados, análise dos dados encontrados e, posteriormente, apresentação dos conceitos matemáticos a serem abordados pelo professor, por meio do GeoGebra.

Esta pesquisa se justifica pela necessidade de reformulações no que diz respeito não somente às metodologias aplicadas em sala de aula, mas também (e principalmente) aos alunos e professores, pessoas, sujeitos humanos envolvidos no processo ensino e aprendizagem. Em um tempo tão obscuro e de tantas perdas bastante significativas, este trabalho visa discutir a humanidade no processo de ensino da Matemática como ciência, mas como uma ciência que oportuniza o fortalecimento de laços e objetiva o bem comum.

4 SISTEMAS LINEARES E O GEOGEBRA

Como objetivo, este trabalho salienta o papel do programa GeoGebra para o ensino do conteúdo sistemas lineares no ensino médio, focando em sua materialização ou possibilidade de representação gráfica e interpretação de dados relacionados ao sistema algébrico e ao sistema geométrico. Ante o exposto, abordaremos, neste capítulo, um pouco mais sobre a história dos estudos do conteúdo apontado anteriormente e a aplicabilidade do GeoGebra, mas sem esquecer o contexto e também possíveis pontos negativos relacionados às práticas aplicadas pelos educadores em sala de aula.

Isso porque, segundo (LIMA 1993 apud. BASTOS 2016) [6], em grande parte dos centros de ensino o conteúdo, sistemas lineares, é apresentado apenas como expressões algébricas, de forma rígida e sem motivação, não despertando o interesse do alunado para o estudo do conteúdo como forma de conhecimento ou mesmo ampliação de seu conhecimento de mundo e também conhecimento da relevância do tema para a manutenção de empregos (inclusive) e o funcionamento social. Defendemos, com esta pesquisa, a necessidade de diálogos participativos e contextualizados, que comuniquem ao alunado algo relevante e relaciona a suas vivências e experiências dentro e fora da escola.

Para Lima (2006 apud. POLONI 2018) [24] a análise de um sistema linear pode ser feita de modo a percebê-lo em diversos aspectos, tais como:

> $[\cdots]$ linhas, colunas, interseção de planos, combinações lineares e determinantes. A confluência dessas várias interpretações ilustra muito bem a riqueza de um assunto, aparentemente elementar, porém de grande utilidade na Matemática e em suas aplicações.

Nesse sentido é que Poloni (2018, p. 146) [24] ressalta em sua dissertação:

> $[\cdots]$ apresentamos o estudo de sistemas lineares, focalizando principalmente na sua resolução gráfica e interpretação geométrica, o que geralmente não enfatizado no ensino médio, porque as provas de vestibula-

> res, concursos e avaliações do governo geralmente cobram a resolução algébrica.

Desse modo, é importante que se destaque a abrangência e relevância do conteúdo, e não somente focalizemos alguns pormenores. O autor ainda destaca em sua pesquisa a importância da utilização do GeoGebra, especialmente pela possibilidade de trabalho em três dimensões e o aprofundamento do conteúdo, conforme lemos a seguir:

> • Programa livre e de código aberto;
> • Gráficos, álgebra e tabelas são conectados dinamicamente;
> • Interface fácil de usar, mas com poderosos recursos;
> • Ferramentas de autoria para criar materiais de ensino interativos exibidos como páginas da internet;
> • Disponível em vários idiomas para milhões de usuários ao redor do mundo. (POLONI, 2018, p. 16) [24]

Em sua pesquisa intitulada "Sistemas lineares, aplicações e representação gráfica", o autor e pesquisador objetiva otimizar o ensino do conteúdo em sala de aula, a fim de tornar o conhecimento mais acessível aos alunos, especialmente da rede pública de ensino (em seu caso, foram focalizados os alunos do estado de São Paulo, contudo a pesquisa tem grande abrangência e os apêndices com atividades práticas podem ser copiados ou mesmo reformulados por professores de todos os lugares do país e aplicados em sala de aula).

Acerca do conceito, acreditamos que os primeiros estudos relativos aos sistemas lineares foram descobertos na China, datados do século 111 a.C. Os chineses costumavam representar sistemas lineares utilizando barras de bambu sobre quadrados de um tabuleiro. Fora eles os prováveis inventores do método de eliminação. Poloni (2018, p. 18) [24] reafirma:

> O estudo dos sistemas lineares desenvolveu-se, historicamente, com maior intensidade, nas civilizações orientais. Um dos capítulos do livro chinês *Nove capítulos sobre a Arte da Matemática* (aproximadamente século III a.C.) contém um tópico sobre equações indeterminadas e a solução de um problema envolvendo um sistema linear com quatro equações e cinco incógnitas. Os coeficientes do sistema eram escritos com barras de bambu sobre um tabuleiro, que desempenhava o papel hoje ocupado pelas matrizes. Ainda na China em 1303, Chu Shi-kié encontra-se a apresentação mais acabada dos métodos aritmético-algébricos chineses de que se tem conhecimento. Ele se utilizava dos métodos matriciais comuns que encontramos, sua metodologia de eliminação e substituição já foi comparada ao de J.J. Sylvester (1814-1897).
>
> Credita-se aos chineses a descoberta de um processo de resolução de sistemas equivalente ao atual método do escalonamento.
>
> Exemplo de um problema contido no capítulo VIII: *Três feixes de uma*

> *colheita de boa qualidade, dois feixes de uma qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual é o preço do feixe para cada uma das qualidades?.*

Poloni também destaca o surgimento das matrizes, a partir da explanação do trabalho desenvolvido por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês e um dos responsáveis por revolucionar o modo como pensamos e construímos a Matemática na atualidade. Ele é considerado responsável pelas primeiras nomenclaturas relacionadas às configurações numéricas, conforme lemos a seguir: "parece ter sido o primeiro a nomear essas configurações numéricas de tableau (tabela, em francês), em 1826, e só em 1850, com o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897), é que esse tipo de configuração numérica recebeu o nome de matriz". (POLONI, 2018, p. 19) [24]

O pesquisador ainda destaca que outros nomes como, por exemplo, Arthur Cayley (1821-1895), datado de 1858, foram responsáveis por avanços significativos no universo dos estudos matemáticos. O autor afirma que:

> Cayley criou as matrizes no contexto de estrutura algébrica, sem pensar em suas aplicações práticas que apareceriam posteriormente. Porém, bem antes, no século III a.C., os chineses já desenvolviam um processo de resolução de sistemas lineares em que aparecia implícita a ideia das matrizes. As matrizes surgiram para Cayley ligadas as transformações lineares do tipo:
>
> $$x' = ax + by,$$
> $$y' = cx + dy$$
>
> com a, b, c e d números reais, e que podem ser imaginadas como aplicações que levam o ponto (x, y) no ponto (x', y'). Obviamente a transformação precedente fica completamente determinada pelos quatro coeficientes a, b, c e d, de modo que ela pode ser simbolizada pela tabela:
>
> $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

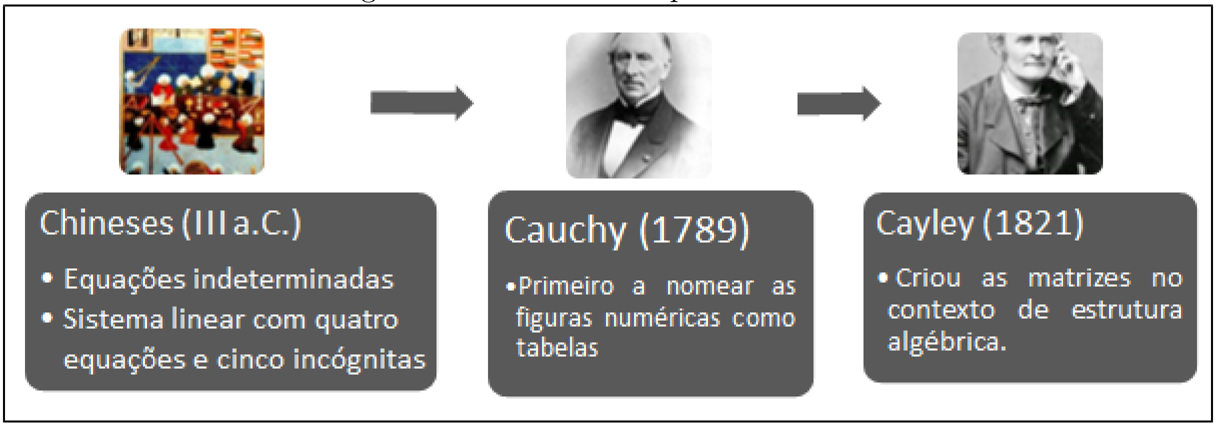
No que diz respeito à origem dos determinantes, consideramos necessário destacar o papel de Augustin-Louis Cauchy, seus escritos acerca do assunto foram a base para os estudos desta temática em 1812 e repercute no modo como o compreendemos até os dias de hoje. Sobre ele, Poloni (2018, p. 20) [24] salienta que:

> As contribuições de Cauchy à teoria dos determinantes, começando em 1812 com uma extrema memória de oitenta e quatro páginas, colocam-no como o matemático que mais contribuiu para o assunto. Foi num artigo de Cauchy de 1812 que apareceu a primeira demonstração do importante e útil teorema que garante que o determinante do produto

> de duas matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes das matrizes.

Elaboramos uma linha do tempo com as respectivas fotos e principais contribuições de cada um dos autores a partir da pesquisa de Poloni (2018) [24]:

Figura 04: Linha do tempo das matrizes



Fonte: Elaborada pelo autor com dados extraídos de (POLONI, 2018) [24]

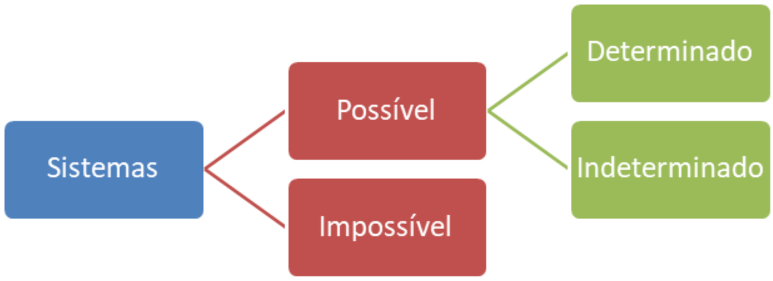
Sobre os estudos relacionados aos determinantes, destacamos o seguinte:

> Foi num artigo de Cauchy de 1812 que apareceu a primeira demonstração do importante e útil teorema que garante que o determinante do produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes das matrizes. O matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746) possivelmente em 1729, já conhecesse a regra de resolução de um sistema de equações lineares, hoje conhecida por Regra de Cramer. A primeira aparição impressa da regra ocorreu em 1748, no Treatise of Algebra de Maclaurin, uma obra póstuma. O matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) publicou-a, independentemente, em 1750, em sua Introduction à I'Analyse des Lignes Courbes Algébriques, com uma notação superior que, talvez, seja a responsável pela opção do mundo matemático pelo nome consagrado pela regra. Bézout, numa memória para a Academia de Paris em 1764, em mais extensamente num tratado de 1779 intitulado Théorie générale des équations algébriques, deu regras artificiais, semelhantes às de Cramer, para resolver n equações lineares simultâneas em uma ou mais incógnitas. (POLONI, 2018, p. 20) [24]

Vale ressaltar que os sistemas lineares são formados por equações lineares, estas são as equações que podem ser reduzidas à forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, onde $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ são as incógnitas e $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ são números reais chamados coeficientes e b é um número real denominado termo independente (POLONI, 2018) [24].

Os sistemas lineares podem ser classificados em possíveis ou impossíveis (de serem resolvidos no conjunto dos números reais). Consideramos como um Sistema Possível e Determinado (SPD) quando existir solução comum às equações do sistema e esta solução é única. Já quando o sistema admite solução, mas são infinitas soluções, trata-se de um Sistema Possível e Indeterminado (SPI). Por fim, temos um Sistema Impossível (SI) quando não existe solução real comum a todas as equações do sistema. É o que temos a seguir:

Figura 05: Classificação dos sistemas lineares



Fonte: Autor

Os sistemas lineares também podem ser homogêneos. É assim classificado todo sistema linear em que os termos independentes de todas as equações são nulos. Segue o caso geral:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Um sistema linear é não homogêneo quando pelo uma das equações lineares do sistema não é homogênea.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Ao representar graficamente um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, precisamos representar graficamente cada equação. E, assim, o sistema fica representado por duas retas, que podem ser:

- Duas retas concorrentes;
- Duas retas coincidentes;
- Duas retas paralelas.

> Para cada caso acima, temos uma interpretação distinta: No primeiro caso, se as duas retas são concorrentes, existirá um ponto de intersecção, ou seja, um ponto comum, que representará a solução única do sistema, então, o mesmo será possível e determinado (SPD); no segundo caso, se as duas retas são coincidentes, o sistema apresentará uma infinidade de soluções, então o mesmo será possível e indeterminado (SPI); no terceiro caso, se as duas retas são paralelas, o sistema não apresentará solução, então o mesmo será impossível (SI). (POLONI, 2018, p. 59) [24]

Dito isso, destacamos a relevância do conceito para os estudiosos da Matemática, bem como o percurso que desenvolveram até alcançarem o sistema e as nomenclaturas que hoje conhecemos. De acordo com o levantamento de Poloni (2018, p. 102) [24], temos algumas aplicações muito interessantes para os sistemas lineares que têm o potencial de despertar interesse nos alunos, conforme lemos a seguir:

> **Química: Balanceamento de equações químicas**
> Estequiometria é o cálculo que permite relacionar quantidades de reagentes e produtos que participam de uma reação química com o auxílio das equações químicas correspondentes. Para uma equação química estar balanceada, é necessário que o número de átomos de cada elemento seja o mesmo em cada lado da equação. Para fazermos um balanceamento é necessário colocarmos um número (denominado coeficiente estequiométrico) antes dos símbolos. Esses coeficientes, usados no balanceamento de uma equação química, devem ser sempre os menores números inteiros possíveis. Numa reação química temos um rearranjo de átomos, onde reagentes são transformados em produtos.
>
> **Biologia: Dieta alimentar**
> Um jovem esportista está fazendo o seu treino e se sente muito cansado. Fala então com a nutricionista do clube que lhe sugere uma dieta com quilocalorias, lipídeos e proteínas suficientes para as atividades esportivas. O atleta precisa consumir diariamente 2072 Kcal (quilocalorias), 220g de proteínas e 19,3g de lipídeos e, para isto, uma nutricionista passou uma dieta a base de arroz, filé de frango grelhado e maçã.
>
> **Curva polinomial**
> Com n pontos num plano xy, (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots, (x_n, y_n)$, representando uma coleção de dados, pretendemos encontrar uma função polinomial de grau $n-1$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ cujo gráfico passa por todos os pontos especificados. Este procedimento é chamado de curva polinomial. Se todas as coordenadas dos pontos são distintas, então existe precisamente uma função polinomial de grau $n-1$ (ou menos) que se ajusta aos n pontos. Para encontrar os n coeficientes de $p(x)$, substituímos cada um dos n pontos na função polinomial e obtemos n equações lineares nas variáveis $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$, ou seja, obtemos o seguinte sistema linear de n equações e n variáveis.

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2{x_1}^2 + \cdots + a_{n-1}{x_1}^{n-1} & = & y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2{x_2}^2 + \cdots + a_{n-1}{x_2}^{n-1} & = & y_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots & = & \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2{x_n}^2 + \cdots + a_{n-1}{x_n}^{n-1} & = & y_n \end{cases}$$

> **Análise de rede**
> As redes compostas de ramos e junções são usadas como modelos em campos tais como economia, análise de trânsito e engenharia elétrica. Em um modelo de rede, assumimos que o fluxo total em uma junção é igual ao fluxo total fora da junção.
> [$\cdots$]
> Como cada junção em uma rede dá origem a uma equação linear, podemos analisar o fluxo através de uma rede composta por várias junções, resolvendo um sistema de equações lineares. (Grifos nossos)

Portanto o ensino da Matemática deve ser dinâmico, leve e interessante, capaz de despertar nos alunos, apesar das dores e dificuldades enfrentadas durante este momento de pandemia, a esperança de que poderão vencer as adversidades da vida e alcançar aprovações, uma carreira e um futuro melhor. Este trabalho discute conceitos já dados, mas, principalmente, aqueles que ainda estão em formação ou que sofreram alterações profundas e irreversíveis após os efeitos catastróficos da pandemia.

4.1 O GeoGebra

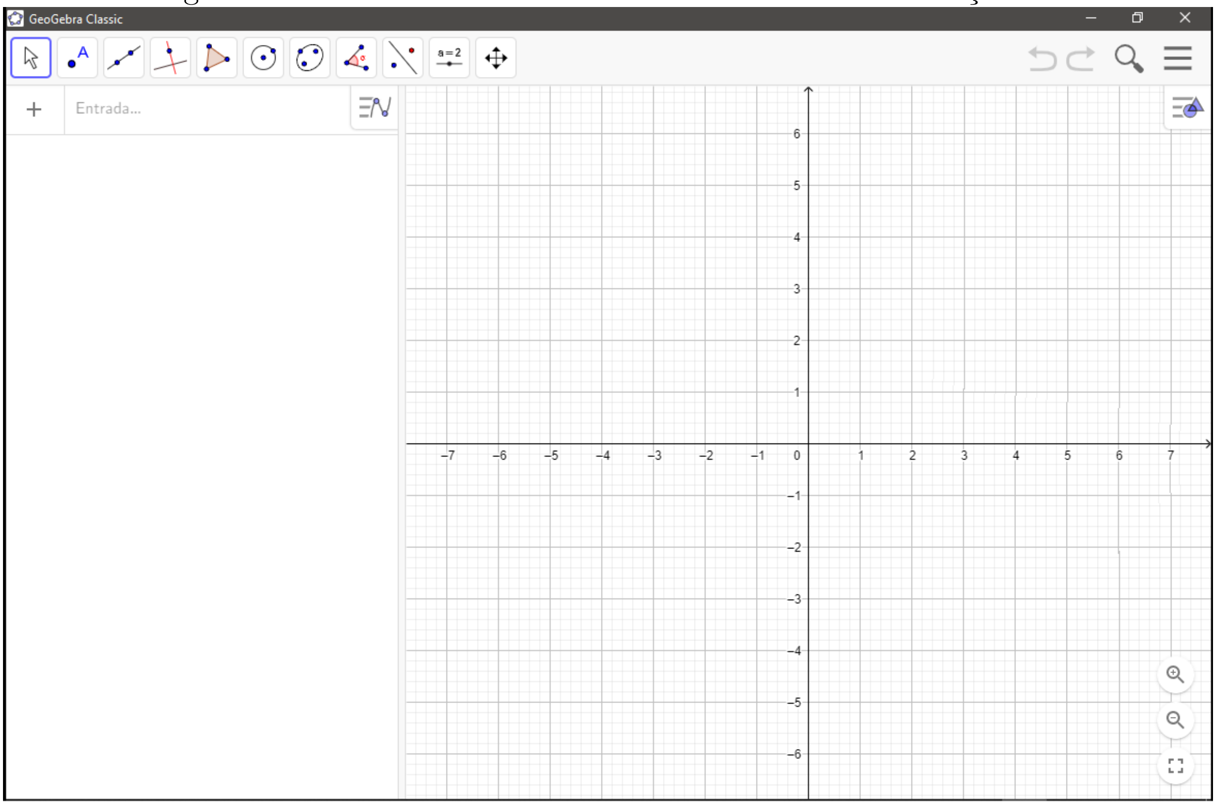
O GeoGebra é um software gratuito com recursos que auxiliam no ensino e aprendizagem de Matemática. Este programa possui ferramentas de geometria, álgebra e cálculo diferencial. De acordo com Cataneo (2011) [8], o GeoGebra:

> [$\cdots$] permite trabalhar a geometria de maneira dinâmica com a abordagem de vários conteúdos matemáticos, oferecendo a possibilidade de fazer o seu uso em vários níveis de ensino, pois combina geometria, álgebra, tabela, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. [$\cdots$] Por outro lado, equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do Geogebra.

Veremos à frente, na (Figura 06) as abas com as ferramentas presentes no GeoGebra. Nele é possível, de acordo com o Manual do GeoGebra [7] desenvolvido pelo professor Borges Neto, "realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas como com funções que podem modificar-se dinamicamente depois."

De acordo com a página virtual da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC-SP [16] o GeoGebra foi desenvolvido em 2001 pelo austríaco Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg a título de sua tese de doutorado. Desde então o software vem sendo bem recebido por professores e alunos. Ainda lemos em [16] que o GeoGebra já foi traduzido para 55 idiomas, é utilizado em 190 países e são contabilizados mais de 300.000 downloads por mês e para dar suporte ao seu uso existem 62 Institutos GeoGebra distribuídos por 44 países. Ainda de acordo com a mesma fonte, o programa já foi homenageado com diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA.

Figura 06: Tela inicial do GeoGebra na Janela de Visualização 2D

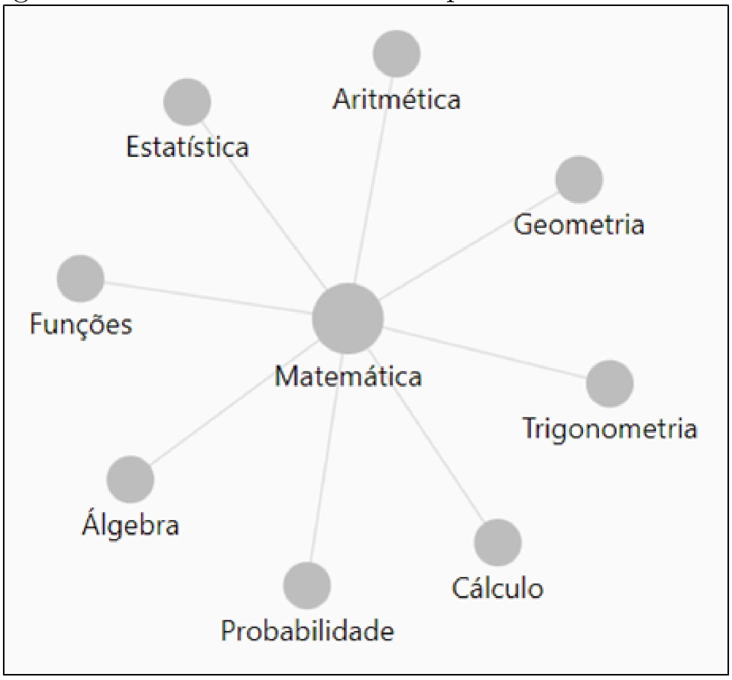


Fonte: Autor

Ainda em consonância com o Manual do GeoGebra [7], o GeoGebra pode ser distribuído livremente com a GNU (General Public License), sendo que o seu download pode ser feito pela internet, onde se pode obter, também, as versões mais recentes da sua aplicação. O link para download pode ser encontrado na página principal do software www.geogebra.org. Ao entrar no site citado e clicar na opção "MATERIAIS DIDÁTICOS", é mostrada a página da (Figura 07) onde diversos trabalhos agrupados por áreas da Matemática estão disponíveis para uso e edição.

Este software é desenvolvido em Java e, dessa forma, pode ser instalado nas mais diversas plataformas, tais como Windows, Linux ou Macintosh. Além disso, por ser um programa de código aberto, há colaboração de programadores de todas as partes do mundo, no escopo de melhorar o seu desempenho e facilidade de sua aplicação no ensino da Matemática nas escolas.

Figura 07: Materiais didáticos disponíveis no GeoGebra



Fonte: Autor

Sobre as formas de acesso ou instalação do GeoGebra, Aguiar (2011) [1] explica que "no modo denominado Web Start, pode-se instalar o Geogebra diretamente da internet e ter disponível para executá-lo offline ou utilizar a versão Applet Start que disponibiliza o Geobegra sem a necessidade de instalação." Uma maneira de utilizar o GeoGebra em máquinas sem acesso à internet é baixar o programa instalador e instalá-lo em máquinas offline.

Em sua interface, temos o seguinte:

> 1. Barra de Menus: disponibiliza opções para **salvar o projeto** em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.
>
> 2. Barra de Ferramentas: composta por dois conjuntos de ícones, para se **trabalhar em 2D ou 3D**, concentra todas as ferramentas úteis para **construir pontos, retas, figuras geométricas, obter medidas de objetos construídos**, entre outros. Cada ícone dessa barra esconde outros ícones que podem ser acessados clicando com o mouse em seu canto inferior direito.
>
> 3. Janela de Álgebra: área em que são exibidas as **coordenadas, equações, medidas e outros atributos dos objetos construídos**.

> 4. Entrada: campo de entrada para **digitação de comandos**.
>
> 5. Janela de Visualização: área de **visualização gráfica de objetos em 2D ou 3D**, que possuem representação geométrica e que podem ser desenhados com o mouse usando ícones da Barra de Ícones ou comandos digitados na Entrada.
>
> 6. Lista de Comandos: listagem de comandos predefinidos. Entre eles há comandos relacionados aos ícones da Barra de Ferramentas. (POLONI, 2018, p. 104) [24]

Ainda sobre o potencial do GeoGebra, Matos (2020) [20], define que o GeoGebra:

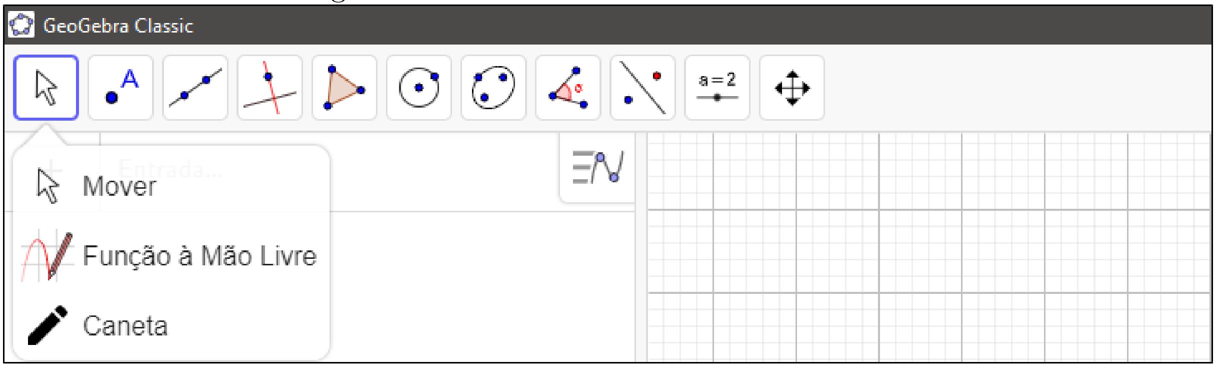
> [$\cdots$] é uma tecnologia poderosa para o estudo do comportamento variacional de funções reais, que permite a criação de ambientes propícios para aprendizagem matemática, considerando aspectos fundamentais como, por exemplo, o papel do professor, o design ou natureza de atividade propostas, dentre outros. A organização do ambiente é um aspecto fundamental para garantir que o conhecimento seja adquirido com o uso do GeoGebra.
> A sua utilização para a realização de atividades matemáticas envolve a complexidade do pensamento matemático e a intensificação da complexidade na reelaboração de uma atividade matemática investigativa é uns dos desafios para a experimentação e investigação matemática pensando-com-tecnologia.

Sobre o dinamismo dos elementos criados no GeoGebra, Hohenwarter (2009, p.06 apud. MARCHETTI, 2014) [18] diz que "no GeoGebra as representações de um mesmo objeto estão ligadas de modo dinâmico e adaptam-se de modo automático às mudanças realizadas em qualquer uma delas, não importando como esses objetos foram criados". Fazendo uso destes meios tecnológicos, o professor poderá mostrar ao aluno soluções de problemas relacionados ao seu cotidiano, permitindo ao aluno, "relacionar análises, debates, conclusões, questionamentos, tão importantes para a construção dos conceitos matemáticos em um menor tempo de que se fosse realizado [$\cdots$] com base em aulas teóricas, sem relação nenhuma com a realidade". Marchetti (2014) [18]

A variedade de ferramentas do GeoGebra torna possível a professores e estudantes a produção de elementos dinâmicos que podem ser salvos e disponibilizados na biblioteca do GeoGebra (Figura 07). Com estes recursos, a criação e execução de sequências didáticas sobre conteúdos de Matemática ficam mais iterativas.

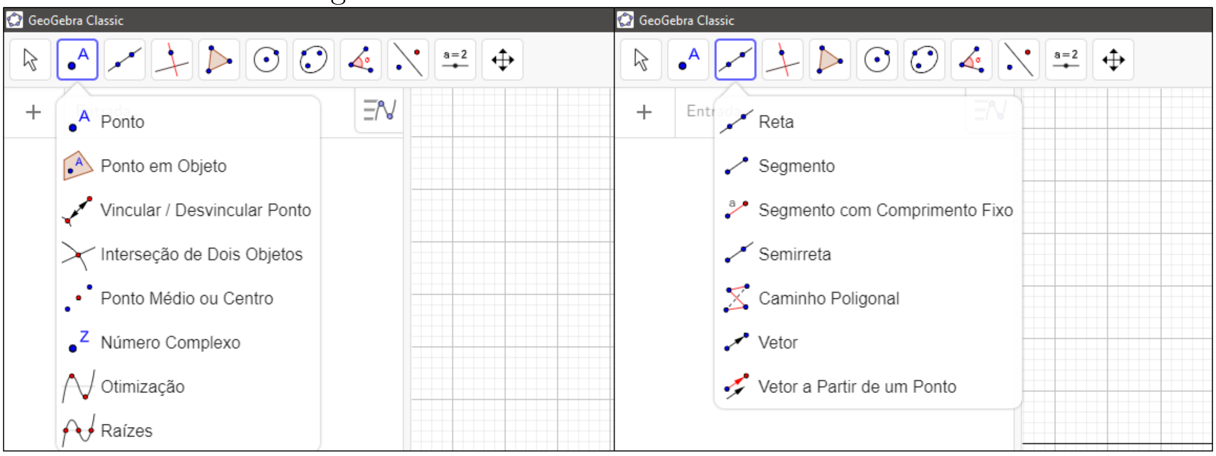
Vejamos a seguir as abas do programa na janela de visualização 2D:

Figura 08: Ferramentas do GeoGebra em 2D



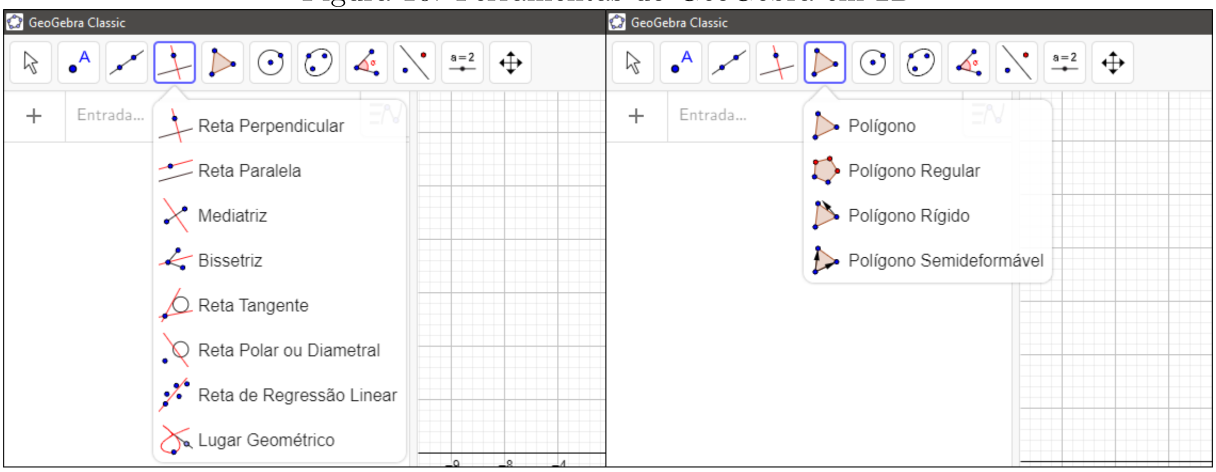
Fonte: Autor

Figura 09: Ferramentas do GeoGebra em 2D



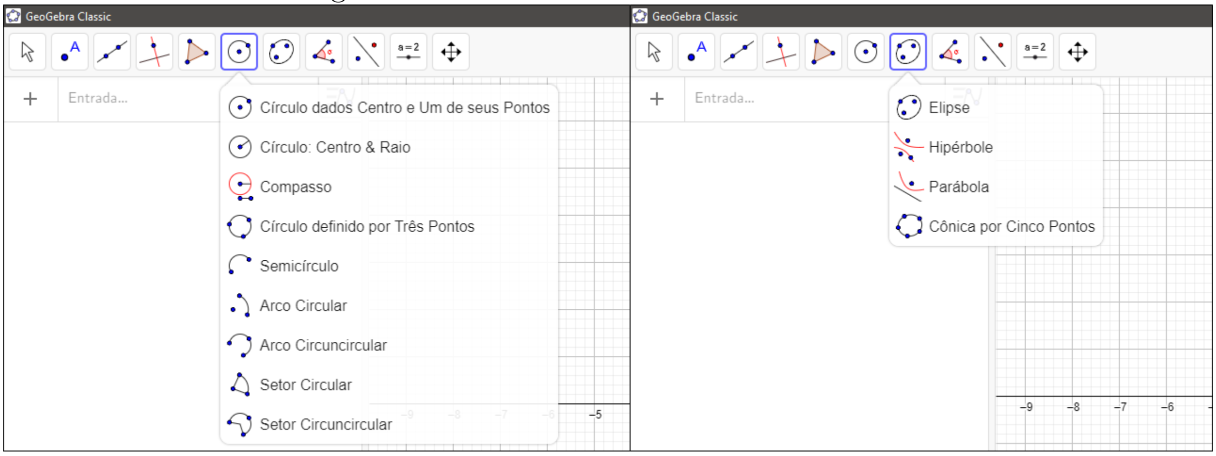
Fonte: Autor

Figura 10: Ferramentas do GeoGebra em 2D



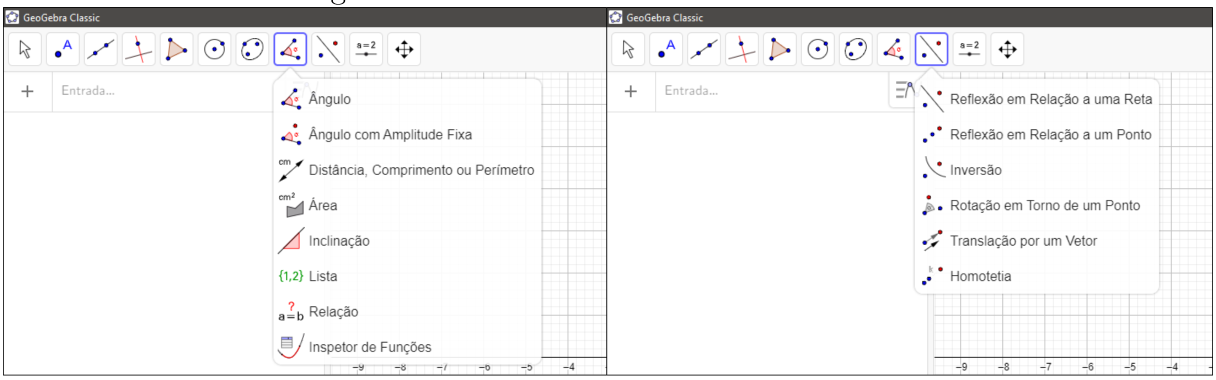
Fonte: Autor

Figura 11: Ferramentas do GeoGebra em 2D



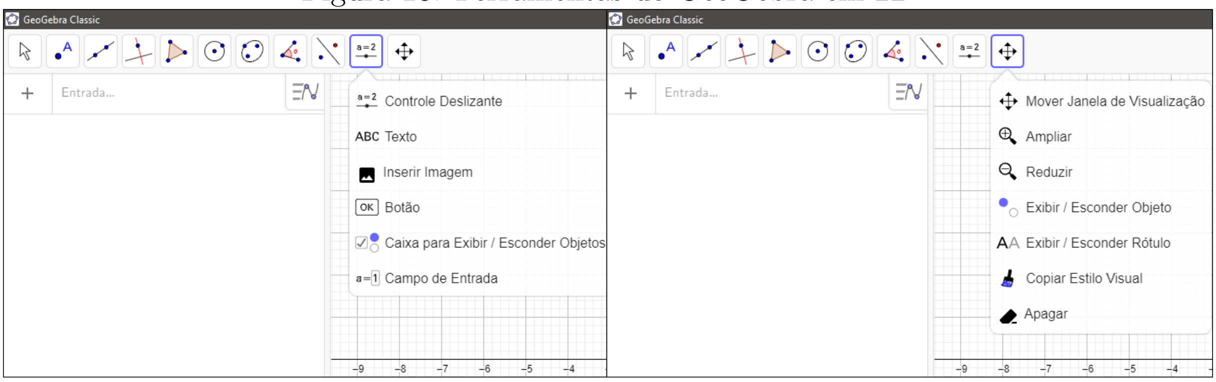
Fonte: Autor

Figura 12: Ferramentas do GeoGebra em 2D



Fonte: Autor

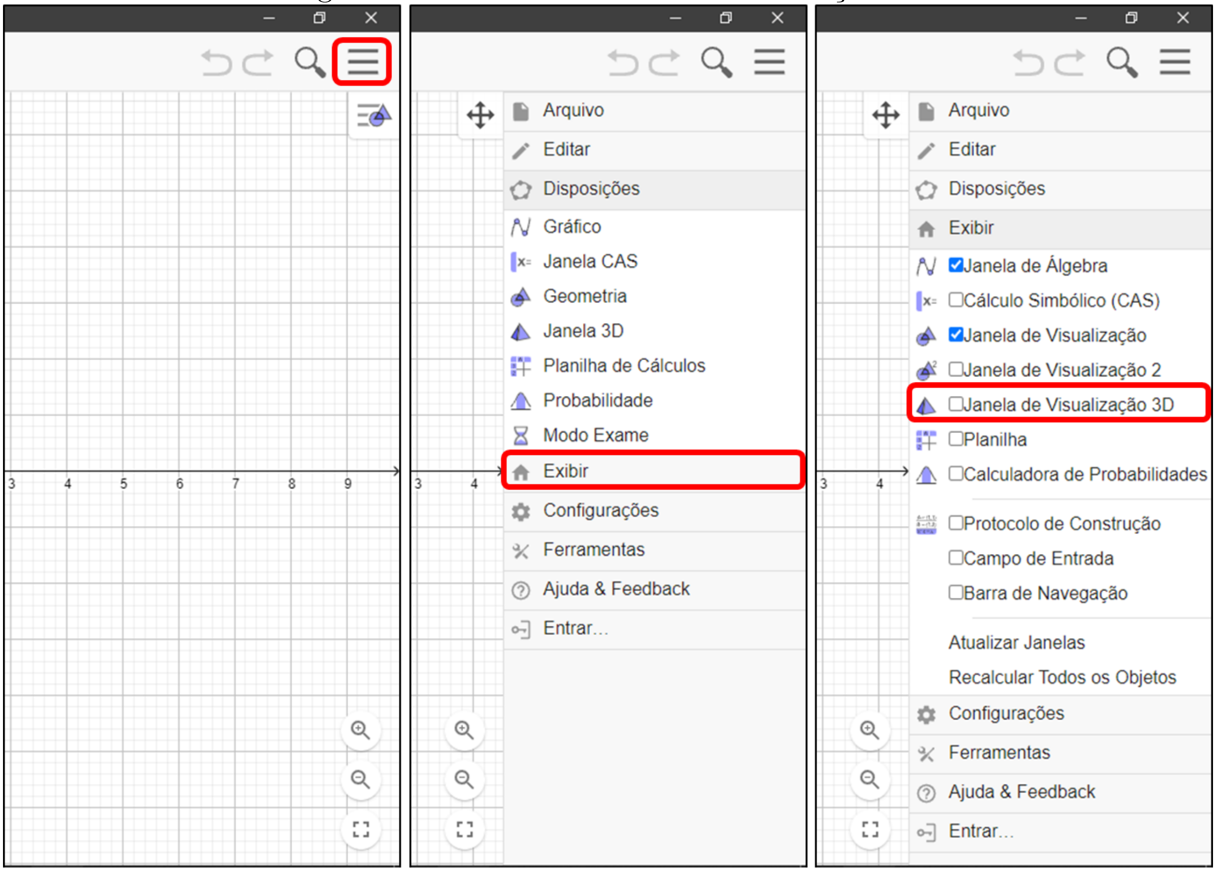
Figura 13: Ferramentas do GeoGebra em 2D



Fonte: Autor

Além de visualizar a representação gráfica no plano, podemos criar e manipular elementos no espaço, usando a janela de visualização 3D. Para acessar esta janela, basta seguir o passo-a-passo da figura a seguir:

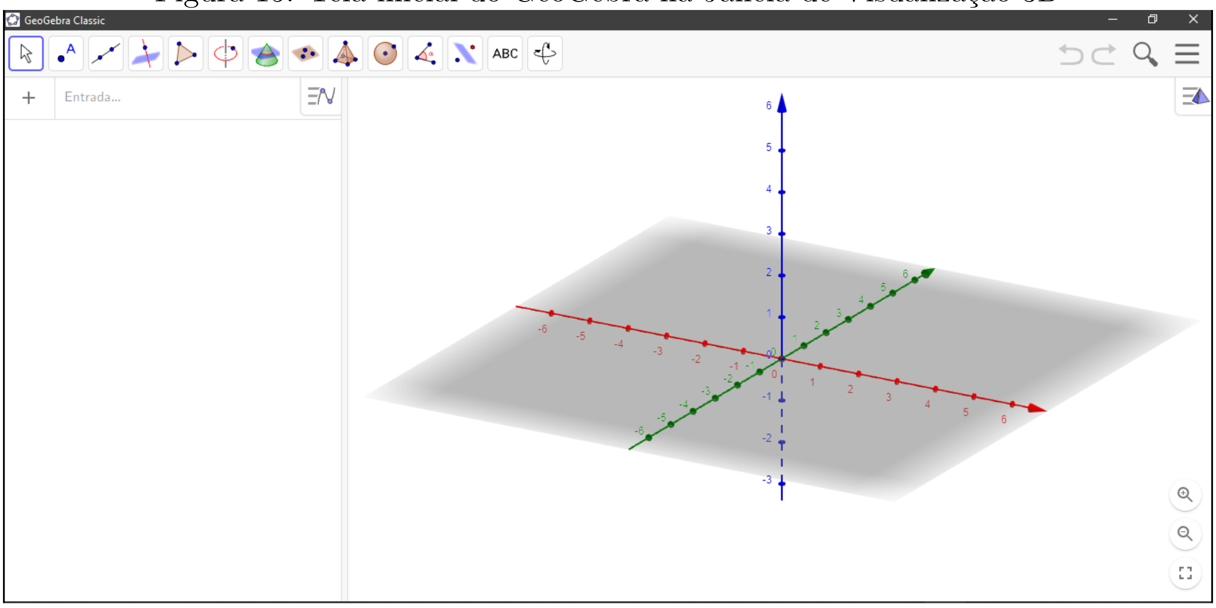
Figura 14: Acesso à Janela de Visualização 3D



Fonte: Autor

É possível manter abertas simultaneamente as janelas de visualização 2D e 3D. Abaixo vemos o GeoGebra apenas no modo 3D.

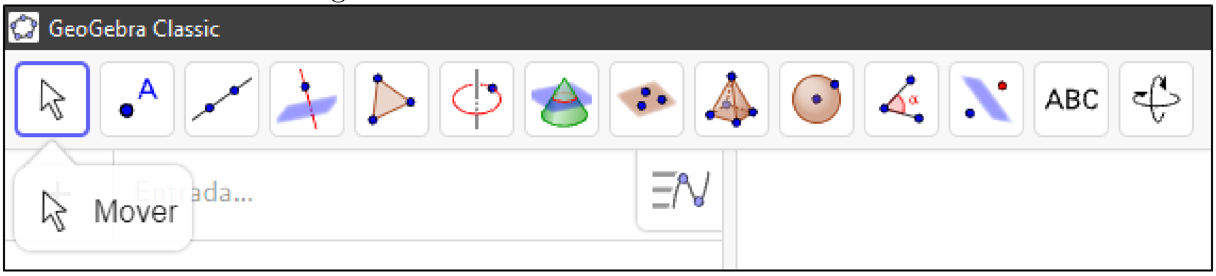
Figura 15: Tela inicial do GeoGebra na Janela de Visualização 3D



Fonte: Autor

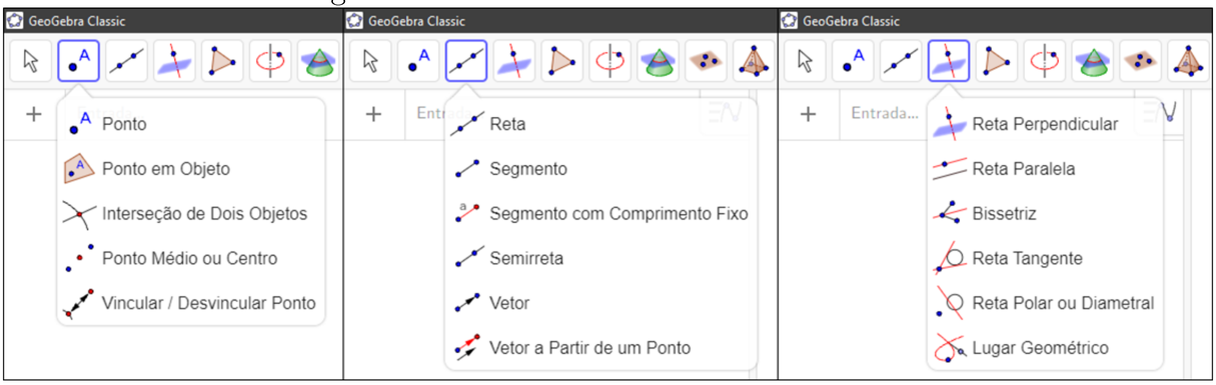
Nesta janela, o GeoGebra apresenta novas abas com as ferramentas que possibilitam trabalhar com elementos no espaço.

Figura 16: Ferramentas do GeoGebra em 3D



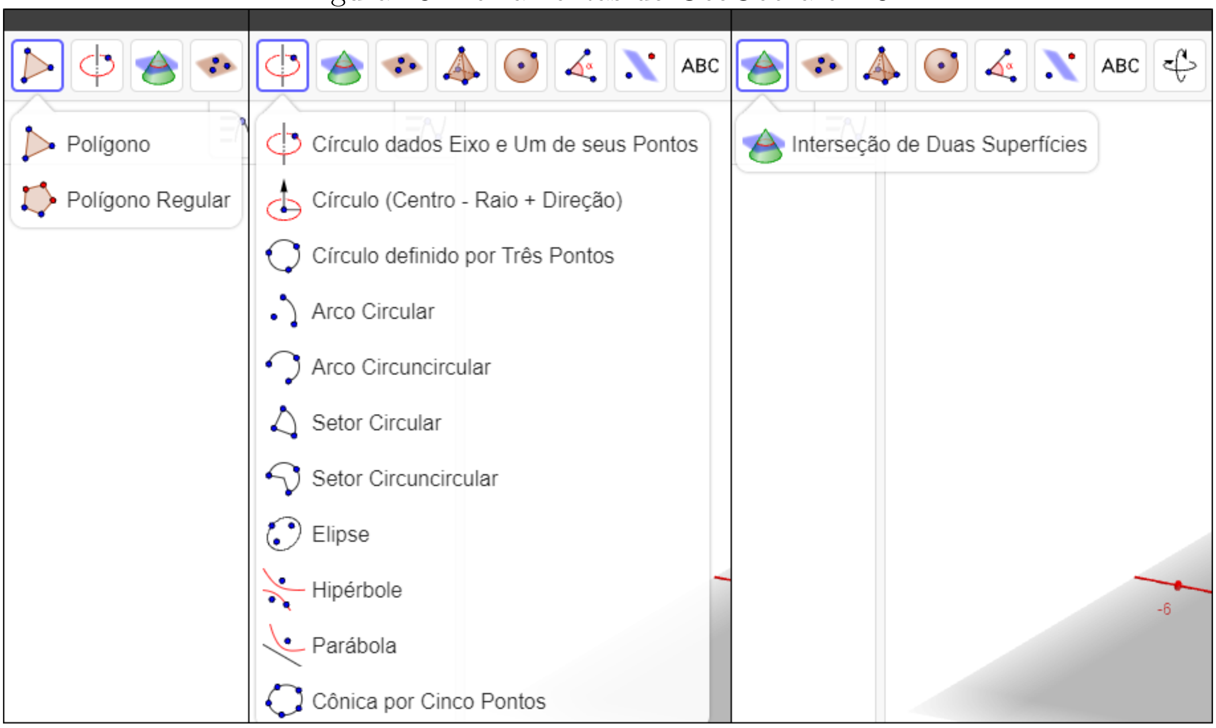
Fonte: Autor

Figura 17: Ferramentas do GeoGebra em 3D



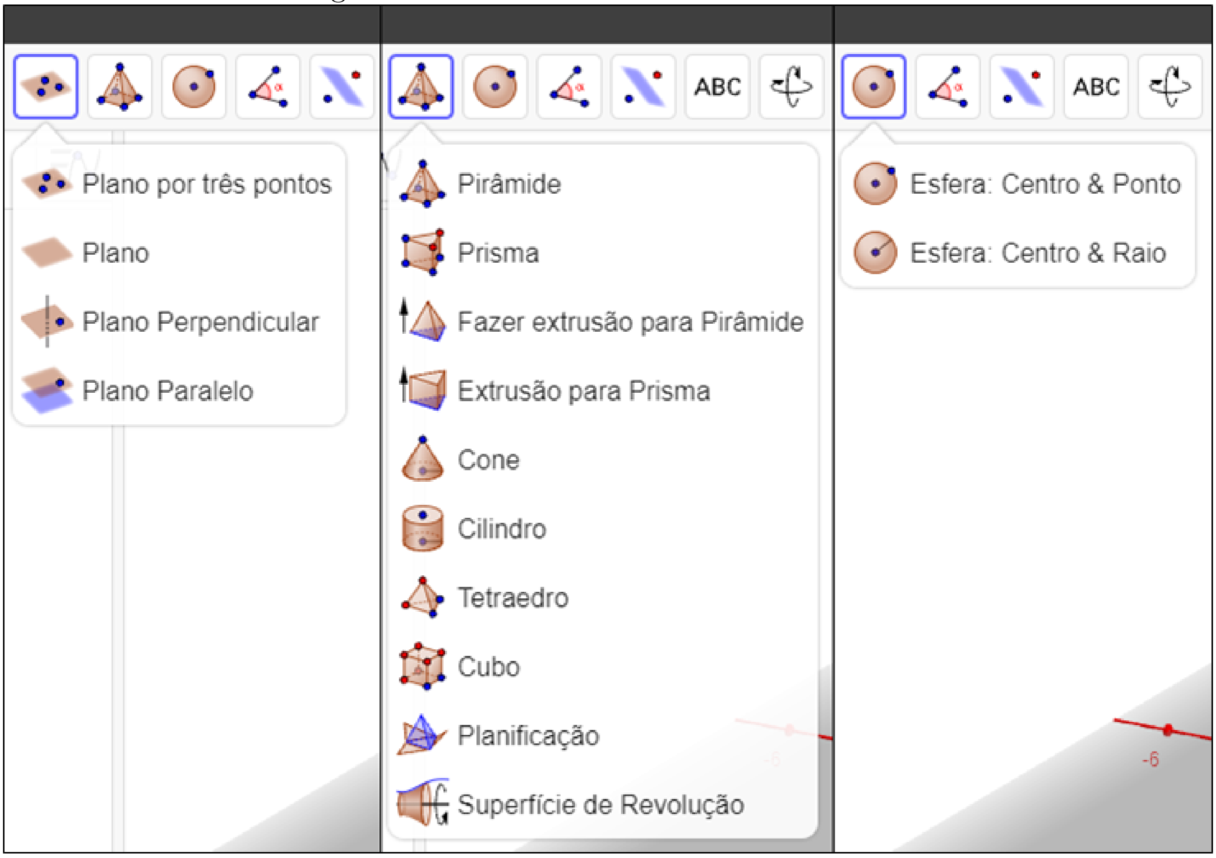
Fonte: Autor

Figura 18: Ferramentas do GeoGebra em 3D



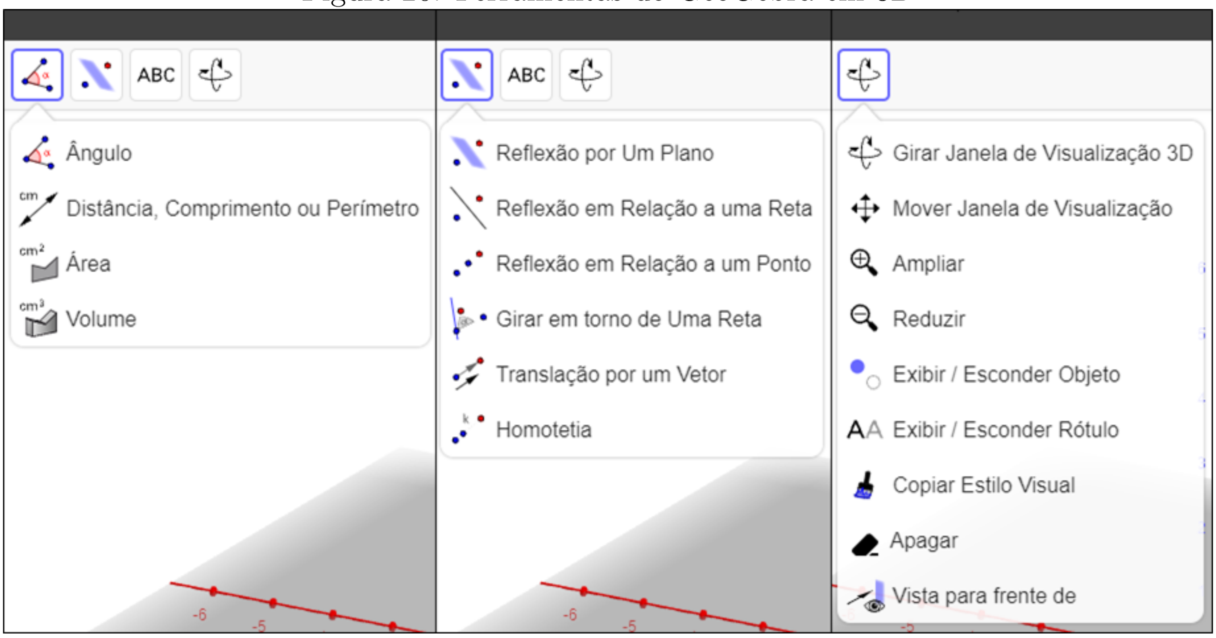
Fonte: Autor

Figura 19: Ferramentas do GeoGebra em 3D



Fonte: Autor

Figura 20: Ferramentas do GeoGebra em 3D



Fonte: Autor

O software GeoGebra, portanto, vai ao encontro do que preceitua a BNCC, conforme leremos a seguir.

4.2 O que preceitua a BNCC

A BNCC, documento legal que discute e orienta os rumos da educação no país, apresenta, para cada período escolar, coordenadas organizadas em forma de competências e habilidades que devem ser trabalhadas, de acordo com o ano de ensino, em todas as escolas do Brasil. O documento, constantemente discutido e reformulado sempre que necessário, visa assimilar os acontecimentos do mundo, de modo que a qualidade do ensino seja elevada "com equidade e preservando a autonomia dos entes federados e as particularidades regionais e locais." (BNCC, p. 6) [5]

Para o ensino médio, no intuito de organizar as habilidades que se esperam dos alunos, o documento é organizado com objetividade, clareza e precisão. Assim, todo o país tem acesso, ao menos em tese, das orientações necessárias para a elaboração de currículos. Os conhecimentos são articulados de modo que os alunos da educação básica desenvolvam habilidades específicas e reconheçam atitudes e valores necessários ao convívio social. Como competências gerais da educação básica, temos:

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
> 4. Utilizar diferentes linguagens - verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital -, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BNCC, p. 9-10) [5]

Portanto, fica evidente que, de maneira geral, o documento defende, como dito no primeiro tópico, a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Contudo, na prática, a teoria é outra. Se considerarmos o exposto já nos primeiros parágrafos deste trabalho, verificaremos que a ausência de equipamentos eletrônicos, de internet e em alguns casos, até mesmo a falta de professores em algumas escolas da rede pública comprometem, logicamente, o andamento do processo de aprendizagem e, consequentemente, o cumprimento de todos os outros objetivos apontados pela BNCC. A ideia da contextualização do ensino ao contexto local e regional, prevista e explícita no documento mencionado, já evidencia a incoerência de algumas equiparações que não são percebidas na prática, nas vivências escolares.

No quinto objetivo, temos o seguinte: “Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.” Neste tópico encontramos respaldo para a utilização do GeoGebra como ferramenta de elaboração de novos saberes. O programa, como vimos anteriormente, atende a todos os pré-requisitos apontados pelo documento.

Além disso, destacamos que o GeoGebra desperta no aluno a curiosidade pela pesquisa, inserção e aplicação de dados e informações, conforme previsto nos objetivos, além de permitir a experiência com diferentes sentidos, o trabalho com a relação entre diferentes tipos de linguagem (verbal e não verbal), o acesso a informações confiáveis e úteis para a vida em comunidade, a troca de experiências e informações entre os alunos e seus colegas e entre os alunos e o professor, o trabalho com a autocrítica, em casos de divergências com o resultado considerado correto e o desenvolvimento do pensar crítico.

4.3 Sequência Didática

A Matemática é uma ciência relacionada à busca por respostas desde os tempos antigos, entre os povos egípcios, por exemplo, a Matemática era usada para a contagem de grãos e alimentos, mas também era aprendida para a edificação de monumentos e outras construções, especialmente para a exaltação de autoridades constituídas, os faraós e seus governadores. Embora reconheçamos a grande influência desses povos para os avanços dos estudos matemáticos, observamos que a manutenção da ideia de simples resolução de uma situação-problema hipotética já determinada foi o que norteou o ensino da Matemática até o século XX. Hoje em dia, em algumas salas de aulas, ainda é comum a presença marcada desta visão técnica e específica. De acordo com Andrade (1998) [2]:

> A primeira vez em que a resolução de problema é tratada como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores, foi a partir do livro How to solve it, de Polya, cuja primeira edição data de 1945. Antes desse período, entretanto, houve algumas experiências e alguns estudos enfatizando os produtos da resolução de problemas. As experiências mais remotas e significativas podem ser creditadas a Dewey, entre 1896 e 1904. Nessas experiências, as crianças estudavam através de projetos que reproduziam as situações socioeconômicas (estudo/resolução de problemas de interesse da comunidade). Dewey sugeria que essa orientação pedagógica, centrada em projetos, pudesse contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico das crianças, capacitando-as a colaborar para o desenvolvimento de uma sociedade democrática (Fiorentini, 1994, p.188). Segundo Gazire (1989, p.71 - 73), os estudos sobre resolução de problemas realizados até o final da década de 1950, nos Estados Unidos, em sua maioria indicavam que a criança, para desenvolver sua capacidade de resolução de problemas, deveria exercitar-se ostensivamente na solução de uma grande quantidade de problemas. Bloom e Broder, ainda na década de 1950, questionavam as pesquisas, até então desenvolvidas sobre a solução de problemas, pela ênfase que vinha sendo dadas aos produtos das soluções em vez de valorizar os processos implícitos da resolução criativa dos problemas. Estes pesquisadores, para melhorar captarem as estratégias de resolução, estudaram os processos de resolução utilizados pelos estudantes bem-sucedidos. Para que isso fosse possível, os alunos deveriam pensar em voz alta durante o processo. (ANDRADE, 1998, p. 8) [2]

O autor considera, a partir desta análise, que o ensino da Matemática, portanto, poderia ser mais participativo. Assim, as resoluções de problemas poderiam ser reformuladas ou mesmo transformadas no intuito de alcançarmos uma formação adequada e eficiente fazendo com que os alunos atinjam os objetivos almejados que segundo as autoras (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 2018):

> têm como propósito fazer com que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles.

Em 1960, com o reconhecimento de várias áreas de estudos como ciência, como é o caso da sociologia e da psicanálise, surge o movimento para a renovação dos métodos de ensino da Matemática, mais conhecido como "Matemática moderna", ideia aderida pelo Brasil e por muitos outros países. A falha deste movimento foi a ausência do envolvimento dos educadores, peças fundamentais e estruturantes no processo de ensino. Deste modo, embora houvesse uma preocupação com a elaboração de uma linguagem matemática universal, as reuniões objetivavam a adoção de terminologias extremamente complexas que, aos olhos dos educadores, certamente representavam um entrave, porque dificultariam o processo de aprendizagem e, consequentemente, a assimilação do conteúdo em sala de aula, na prática escolar. Sobre isso, temos o que afirma Onuchic (1999) [23]:

> [$\cdots$] o professor falava, porém muitas vezes não seguro daquilo que dizia. O aluno não percebia a ligação que todas aquelas propriedades enunciadas tinham a ver com a matemática dos problemas e, principalmente, com a matemática usada fora da escola. Embora procurasse usá-las em exercícios de aplicação, repetindo o que havia sido feito em classe e dizendo o nome daqueles novos símbolos matemáticos que lhe eram apresentados, com frequência não conseguia lhe dar significado. Esse ensino passou a ter preocupação excessiva com formalização, distanciando-se das questões práticas. (ONUCHIC, 1999, p. 203) [23].

Como dito acima, nem mesmo os professores estavam conscientes das mudanças, o que atrapalhava as vivências em sala de aula e até mesmo diminuía a credibilidade do educador como sujeito de saber, capaz de atender às demandas dos alunos e sanar as dúvidas relacionadas ao conteúdo que estava sendo ministrado em sala. Nessa perspectiva, a ausência de significados e da valorização do que hoje conhecemos como objetivo afetivo, necessário e todos os encontros em sala de aula, a tarefa do professor passava a ser ainda mais desafiadora.

Ainda de acordo com Onuchic (1999) [23], a Matemática deveria ser observada na prática acadêmica ou mesmo escolar. Por seu trabalho como orientador e seu engajamento como pesquisador, o estudioso muito contribuiu para o reconhecimento do papel do professor no processo de análises, escolhas e principalmente de adequação de parâmetros, tendo em vista que os estudos seriam desenvolvidos, realmente, na ambiência das academias e escolas. A ideia era preservar o desenvolvimento desta ciência ainda repleta de lacunas a serem investigadas ou até mesmo descobertas.

No que diz respeito às descobertas, urgentes e necessárias, especialmente em tempos de pandemia elas englobam não somente os conteúdos propriamente ditos, mas também e especialmente os modos como o conhecimento chegará ao alunado para o desenvolvimento do pensar crítico e a garantia dos avanços de pesquisas relacionadas ao universo da Matemática.

À procura de respostas para o alcance de uma educação melhor no que diz respeito ao ensino da Matemática, mas que superasse a ideia de simplesmente resolver problemas hipotéticos com nomes fictícios, temos o que afirma Andrade (1998) [2]:

> Na metade da década de 1980, Resolução de Problemas passa a ocupar a atenção de quase todos os congressos internacionais. É nessa década que o Brasil, de fato, começa a trabalhar sobre Resolução de Problemas. Fiorentini (1994, p.189) disse que "os estudos relativos ao ensino de resolução de problemas só seriam iniciados, de modo mais efetivo, a partir da segunda metade da década de 80. Esses estudos restringem-se quase que absolutamente, a trabalhos traduzidos em dissertações de Mestrados e teses de Doutorado. (ANDRADE, 1998, p. 9) [2].

Assim, observamos que os estudos sobre a relação professor, aluno e ensino são demasiado recentes. De acordo com o autor, na década de 1980 muitos materiais foram produzidos para professores, mas com o objetivo de servirem como subsídios para a resolução de problemas, e não apresentando novos métodos de aprendizagem ou conceitos que fugissem ao padrão pré-estabelecido. Para o matemático, a importância de pensar a Matemática como uma metodologia de ensino está diretamente relacionada ao modo como ensinamos. Os problemas, portanto, deveriam ser apresentados aos alunos não como um fim em si mesmos, mas sim como pontos de partida para a elaboração pensamentos individuais, para a construção do conhecimento pensado na e para a coletividade, para o melhoramento do mundo, inclusive.

Schroeder e Lester (1989 apud SOUZA e JUSTULIN, 2013) [29], por sua vez, apontam três formas de estudo da Matemática partindo da resolução de problemas, a saber, a criação de formas ou métodos para se chegar ao resultado (ensinar para resolver); o apego aos parâmetros já dados e pesquisados pelos estudos matemáticos da época (ensinar sobre resolução de problemas) e, por fim, a utilização de problemas para a elaboração de conceitos (ensinar através da resolução de problemas).

Sendo assim, embora cientes de que, especialmente para os professores, as mudanças representam grandes desafios, pois modificam práticas já cristalizadas e removem os educadores de suas zonas de conforto, percebemos, pelo exposto, que é esta a necessidade dos alunos em tempos de pandemia: a busca por respostas e descobertas capazes de norteá-los nas relações sociais e também para a compreensão do funcionamento do mundo. O aluno do ensino médio no contexto da pandemia exige do professor a disposição para a pesquisa e para a reformulação de conceitos que já não se aplicam à realidade atual.

Quanto à Sequência Didática (SD), salientamos uma vez mais a pesquisa de Poloni (2018, p. 115) [24] que, numa perspectiva do ensino na prática da sala de aula do ensino médio na rede pública, aponta o seguinte:

> [$\cdots$] os alunos entendam e consigam relacionar a solução algébrica e a representação geométrica de sistemas e a solução de equações lineares com duas e três incógnitas, através da construção do seu conhecimento com atividades, tais como, construção de tabelas, resoluções e classificação de sistemas, e o uso do computador para a construção gráfica. Para tanto, o professor deverá ter noção do software GeoGebra, para que possa orientar seus alunos, sendo que, no capítulo 7, apresentamos uma explicação e exemplos de como usar este software. O professor poderá também usar o capítulo 4, sobre sistemas lineares, como referência.

Um dos autores mais citados no que diz respeito a SD, Zabala (1998, p. 18) [32] define como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos". Podemos dizer então, que qualquer aula pode se caracterizar como parte de uma SD desde que esteja vinculada às demais aulas; os objetivos de ensino e aprendizagem estejam bem definidos e claros a ambas as partes e ao final do período escolhido, os alunos dominem as habilidades planejadas.

Conforme Lino (2014) [17], a SD aplicada em sala de aula deve seguir as seguintes etapas e/ou procedimentos, sendo cada momento montado estrategicamente pelo professor a fim de alcançar a atenção e o engajamento dos alunos para o estudo do tema ou mesmo da questão proposta. Para tanto, a autora elaborou os procedimentos a seguir divididos nas Figuras 21, 23, 32 e 39:

Figura 21: 1º procedimento da Sequência Didática

1º PROCEDIMENTO	ESTRATÉGIAS
Ativação do conhecimento prévio do aluno sobre a leitura	· Começar com uma aula introdutória sobre o assunto em pauta; · Transmitir um vídeo motivacional; · Aplicar um questionário rápido com perguntas para analisar o pensamento de cada um; · Proporcionar um momento de debate com as carteiras dispostas em círculo para que todos se vejam. O objetivo do debate é que os alunos compartilhem experiências boas e ruins com livros, artigos, etc.; · Após a entrega do questionário, listar o tema que mais é agradável ao aluno no momento da leitura – todos terão que dizer.

Fonte: Lino (2014) [17]

Neste primeiro momento, é importante ouvirmos os alunos. Para que a primeira etapa se concretize, o aluno, de algum modo, precisa comunicar sua opinião. Esta é a etapa primeira e fundamental para o bom andamento da aula, pois, uma vez cativado, o aluno terá maior interesse em entender o conteúdo ministrado. Neste momento, o papel do educador é fundamental, pois é ele quem escolhe, com base no conhecimento do contexto de cada aluno em sala de aula, o material que mais se adequa ao objetivo traçado para o público-alvo. No contexto dos sistemas lineares, citamos acima vários exemplos e aplicações que podem ser utilizados nesta etapa. Sugerimos para início de conversa com os alunos, não apenas a apresentação direta de números e normas ou parâmetros, mas, inicialmente, fatos curiosos sobre a vida e a obra dos sujeitos pesquisados, a apresentação de fotografias, áudios ou vídeos, frases impactantes que motivem os alunos a pesquisarem sobre o estudioso ou mesmo a participarem de maneira mais efetiva da aula, de modo que os conhecimentos sejam construídos conjuntamente.

Sobre o assunto abordado, sistemas lineares, importa ainda destacar sua aplicabilidade em diversos setores e instrumentos da vida cotidiana. A apresentação das funcionalidades do conteúdo e a exemplificação ou mesmo apresentação dele aliado às práticas dos alunos ou mesmo ao contexto no qual estão inseridos fomentaria, muito provavelmente, mudanças bastante significativas no modo como os alunos do ensino médio veem não apenas o conteúdo apresentado, mas também o professor e, principalmente, a disciplina.

Acerca destas possibilidades de aplicação e resgate de conteúdos práticos, que servirá como fator de motivação dos alunos em sala de aula, é sempre necessário que o aluno participe ativamente do processo de ensino para que o conteúdo explanado produza sentidos e signifique para o aluno e sala de aula, mas sempre em conexão também ao que está fora dela.

Para tanto, como exemplo de prática de motivação relacionada aos sistemas lineares trazemos a imagem a seguir:

Figura 22: GPS: uma aplicação de sistemas lineares

Fonte: https://bestlifeonline.com/news-driving-dementia/

Uma simples imagem, como esta que vemos acima, pode suscitar, em sala de aula, perguntas como:

1. Você faz uso de transporte por aplicativo?

2. Caso não, por quê?

3. O transporte público da cidade atende suas necessidades?

4. Caso sim, como foi sua experiência? Boa ou ruim? Por quê?

Aparentemente desconexas ou até mesmo despretensiosas, as perguntas geram comentários e interações entre os alunos e seus colegas de classe, e também entre os alunos e o professor que conduz a turma durante a conversação. Na Teresina de 2021, é provável que os alunos mencionem, por exemplo, a crise do transporte público causada pela pandemia, que levou diversas empresas, inclusive de transporte, à falência. Nesse contexto, é ainda provável que mencione as dificuldades que eles e suas famílias enfrentam para chegar à escola todos os dias (em caso de retorno às aulas presenciais) ou os desafios enfrentados pelos pais para chegarem ao trabalho, por exemplo. Partindo disso, agora, com mais leveza e contando com o apoio e a participação da turma, o professor pode questionar:

5. O que acontece quando um motorista desconhece a rota ou seu local de destino em um transporte por aplicativo?

Nesse momento, certamente a turma mencionará a necessidade e importância do GPS, momento em que entra a discussão acerca da relação entre os sistemas GPS e os sistemas lineares, como vemos a seguir a informação retirada da página "Derivando a Matemática" [10], disponível no site da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP):

> O Sistema de Posicionamento Global (GPS) é uma rede de 24 satélites originalmente desenvolvidos pelos militares dos EUA como uma ferramenta de navegação. Hoje, a tecnologia GPS é usada em uma ampla variedade de aplicações civis, tais como entrega de pacotes, agricultura, mineração, agrimensura, construção, serviços bancários, previsão do tempo e assistência em desastres. Um receptor GPS funciona usando leituras de satélite para calcular sua localização. Em três dimensões, o receptor usa sinais de pelo menos quatro satélites para "trilaterar"sua posição. Em um modelo matemático simplificado, um sistema de três equações lineares em quatro incógnitas (três dimensões e tempo) é usado para determinar as coordenadas do receptor em função do tempo.

Com efeito, o esclarecimento das aplicações do conteúdo nas vivências cotidianas facilmente elucidará as questões mais frequentes durante as aulas de Matemática: Para quê? Por quê? Para que serve? Qual a finalidade disto?

Isso posto, compreendemos que as aulas se tornarão mais atrativas e leves, fazendo com que as competências e habilidades previstas na BNCC sejam desenvolvidas e o senso crítico dos alunos se torne cada vez mais aguçado e devotado às questões relacionadas aos estudos, mas também abertos às pesquisas e às leituras acerca deste e de outros temas tão importantes para o funcionamento da sociedade no dia a dia.

Considerando esta forma mais dialogada e inclusiva de apresentar o conteúdo aos alunos, apresentaremos a seguir, o roteiro das 7 aulas que compõem a SD sugerida.

Aula (1/7)

Objetivos: Compreender a importância e aplicações de sistemas lineares em nosso dia-a-dia.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Apresentar o conteúdo em uma aula participativa, mostrando as imagens e/ou vídeos selecionados;
- Seguir o roteiro de questionamentos e incluir, ao máximo, os alunos no diálogo.

Antecipando a segunda etapa da SD, podemos indicar aos alunos como leitura antecipada para a Aula 2 alguns dos exemplos disponíveis na página virtual da UNICAMP [10] ou mesmo conteúdos audiovisuais como vídeos do Youtube ou ainda atividades interativas da plataforma sem fins lucrativos Khan Academy. Assim o aluno poderá iniciar o estudo do conteúdo sabendo que este tem aplicações em diversas áreas no cotidiano, o que já desperta mais interesse do que um conteúdo sem aplicações conhecidas.

Na segunda etapa, temos o procedimento:

Figura 23: 2º procedimento da Sequência Didática

2º PROCEDIMENTO	ESTRATÉGIAS
Leitura rápida dos elementos que despertarão interesse nos alunos.	· A partir dos temas propostos, fazer uma listagem de sugestões de livros específicos a cada um, com o prazo de 15 dias para a leitura. · O aluno terá que montar uma narrativa ilustrada, ou seja, contará capítulo por capítulo do livro por meio de fotos que serão produzidas por eles mesmos. Elas poderão ser feitas de qualquer maneira, estimulando a criatividade. · Após a criação das fotos, utilizar o laboratório de informática para a criação de um blog, onde serão postadas individualmente essas narrativas.

Fonte: Lino (2014) [17]

Neste momento, a autora sugere a antecipação de leituras e conteúdos necessários à compreensão do assunto que será abordado posteriormente. Como podemos ver, as estratégias não são fixas, deixando o professor livre em sua criatividade para pensar acerca do modo como abordará o conteúdo em questão. Como percebemos, o importante é que o aluno passe de ouvinte a protagonista, atuando ativamente em sala de aula para a construção do conhecimento juntamente com o educador.

Como exemplo de atividade que pode aferir o conhecimento prévio dos estudantes a cerca de sistemas lineares, sugerimos alguns exercícios:

Aula (2/7)

Conteúdo: Equações lineares e suas soluções.

Objetivos: Conhecer o nível de proficiência desenvolvido no ensino fundamental sobre equações lineares.

Materiais: Material impresso.

Desenvolvimento: Aplicar uma avaliação diagnóstica e identificar dificuldades ou falhas no aprendizado de equações lineares e suas soluções.

01. Verifique em cada caso a seguir se a equação é linear ou não. (Apesar de podermos representar as incógnitas por quaisquer letras, utilizaremos apenas x, y e z que são aceitas no GeoGebra)

(a) $x + y = 16$

(b) $xy = 10$

(c) $x - 5y - 4z = 0$

(d) $x^2 - xy - yz + z^2 = 1$

(e) $x - y = 5 - x + y$

(f) $x^2 + y = 6$

02. Verifique quais dos pares ordenados são soluções das equações lineares abaixo, ou seja, quais pares satisfazem as equações.

(a) Equação $-2x + y = 1$ e pares ordenados $(0, -1),\ (3, -2)\ e\ (1, 3)$

(b) Equação $5x - 4y = -2$ e pares ordenados $(-1, 2),\ (2, 3)\ e\ (4, 6)$

(c) Equação $-x + 10y = 5$ e pares ordenados $(10; 1, 5),\ (1, 5)\ e\ (5, 1)$

(d) Equação $20x + 30y = 100$ e pares ordenados $(-10, 10),\ (5 - 10)\ e\ (2, 2)$

03. Verifique quais dos ternos ordenados são soluções das equações lineares a seguir, ou seja, quais ternos satisfazem as equações.

(a) Equação $4x - y + 2z = 6$ e ternos $(1, -2, 0),\ (2, 1, 4)\ e\ (0, 4, 5)$

(b) Equação $5x + 6y + z = 10$ e ternos $(-2, 2, 3),\ (-7, 5, 2)\ e\ (2, -1, 6)$

(c) Equação $-x + 4y + 3z = -4$ e ternos $(4, 2, 1),\ (-3, 0, 2)\ e\ (1, 1, 4)$

(d) Equação $-2x + 3y + 10z = 9$ e ternos $(2, 1, 1),\ (5, 3, 1)\ e\ (1, -3, 2)$

04. Resolva os sistemas lineares a seguir pelo método que preferir e classifique-os em SPD, SPI ou SI.

(a) $\begin{cases} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 2y &= -2 \\ 2x - 4y &= -4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -4x + 2y &= 8 \\ x - 0,5y &= 3 \end{cases}$

Dependendo do andamento da Aula 1, o professor pode, na mesma aula, aplicar o conteúdo da Aula 2, que consiste na avaliação diagnóstica. Mais temáticas sobre sistemas lineares para despertar a curiosidade dos alunos estão relacionados a seguir:

- **RUÍDO ACÚSTICO**

Pesquisadores na Itália estudando os níveis de ruído acústico no tráfego de veículos em um cruzamento movimentado de três vias usaram um sistema de equações lineares para modelar o fluxo tráfego no cruzamento. Para ajudar a formular o sistema de equações, os "operadores" se posicionaram em vários locais ao longo do cruzamento e contaram o número de veículos que passaram por eles.

- **TRIPULAÇÃO DE VOO**

Muitas aplicações de sistemas lineares na vida real envolvem um número enorme de equações e variáveis. Por exemplo, um problema de agendamento da tripulação de voo para a American Airlines exigia a manipulação de uma matriz com 837 linhas e mais de 12.750.000 colunas. Para resolver esta aplicação de programação linear, pesquisadores particionaram o problema em pequenas peças e resolveram em um computador.

• **MECANISMOS DE BUSCA**

Sistemas de recuperação de informações como mecanismos de busca na Internet fazem uso da teoria matricial e da álgebra linear para manter o controle da informação. Para ilustrar, considere um exemplo simplificado. Você pode representar as ocorrências de m palavras-chaves disponíveis em uma base de dados de n documentos por A, uma matriz $m \times n$ em que a entrada é 1 quando a palavra-chave ocorre no documento e 0 quando não ocorre no documento. Você poderia representar a busca com uma matriz coluna $(\mathbf{X})m \times 1$, com m entradas, na qual o elemento 1 representa a palavra-chave que você está procurando e 0 representa a palavra-chave que você não está procurando. Então a matriz produto de tamanho $n \times 1$, $\mathbf{A}^T\mathbf{X}$ representaria o número de palavras-chave em sua pesquisa que ocorre em cada um dos n documentos. (Página virtual da Unicamp) [10]

Aula (3/7)

Conteúdo: Equações lineares e suas soluções no GeoGebra.

Objetivos: Relacionar a forma algébrica de equações lineares com duas ou três incógnitas e suas soluções a suas representações no GeoGebra.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Corrigir as questões 1, 2 e 3 da Aula 2. Na impossibilidade de ter um computador para cada aluno ou dupla, pode-se pedir que cada aluno insira uma equação no computador que está projetando no quadro a fim de que todos possam acompanhar.

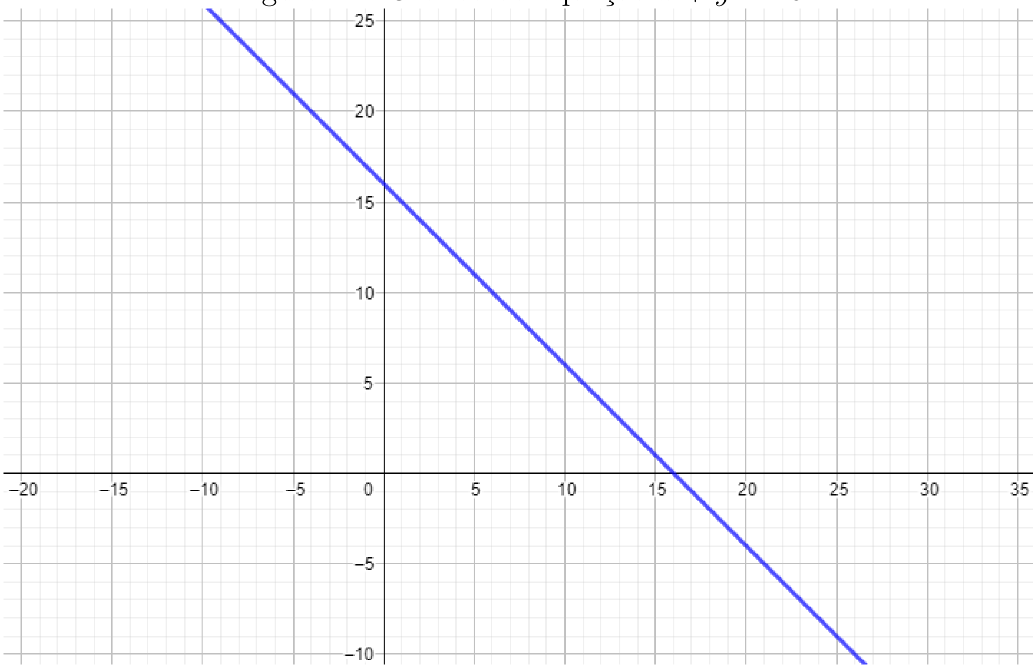
- A cada fórmula inserida, criar relações com os gráficos gerados no GeoGebra.

01. Verifique em cada caso a seguir se a equação é linear ou não.

- *Explicar que uma equação é linear quando sua representação gráfica tem curvatura nula, ou seja, quando não apresenta curvas. Para facilitar no entendimento dos alunos, pode-se dizer que uma equação linear de duas incógnitas gera uma reta (obviamente sem curvas) e que uma equação linear de três incógnitas gera um plano (também sem curvas).*

(a) $x + y = 16$ (*Digitar no Geogebra:* x + y = 16)

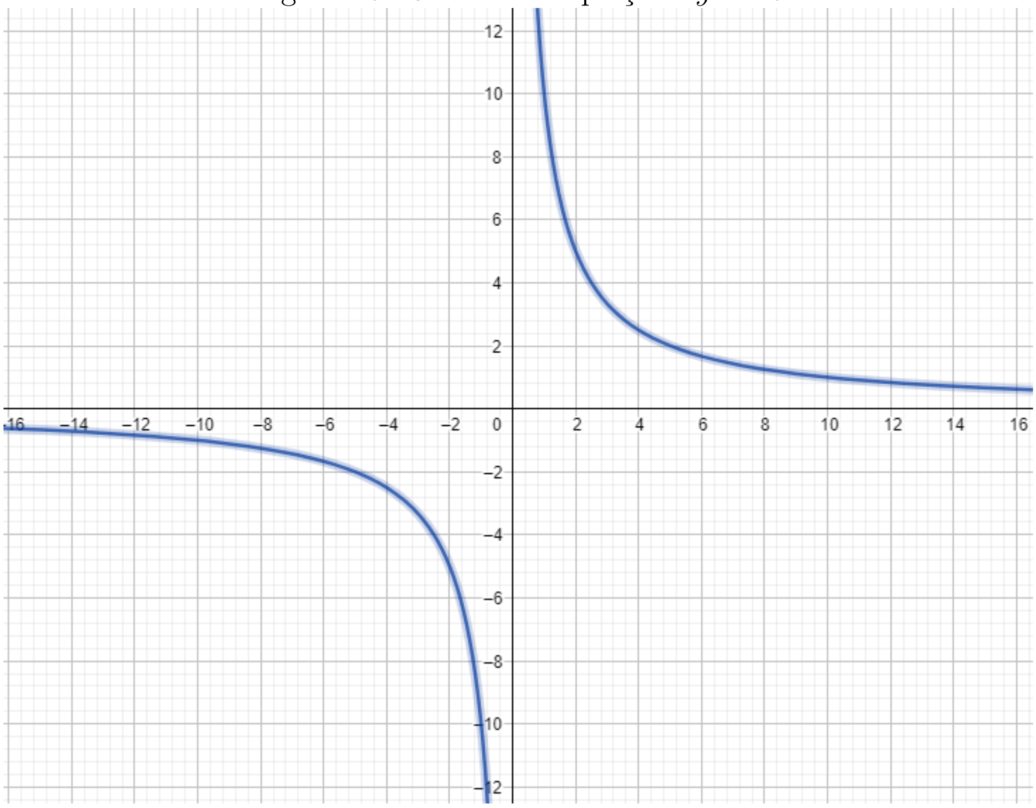
Figura 24: Gráfico da equação $x + y = 16$



Fonte: Autor

(b) $xy = 10$ (*Digitar:* x y = 10)

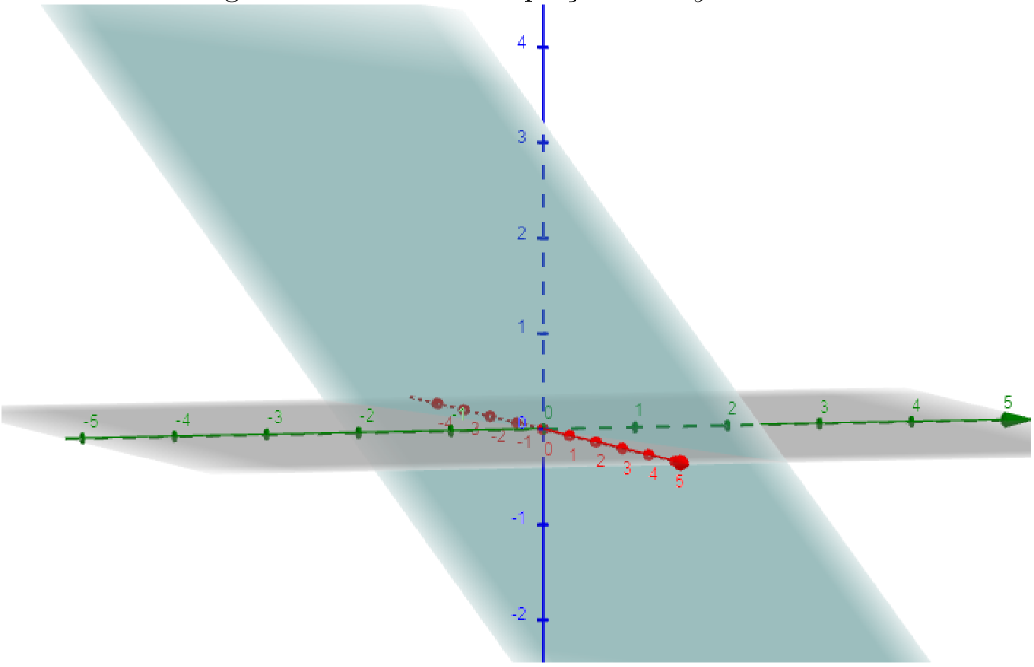
Figura 25: Gráfico da equação $xy = 10$



Fonte: Autor

(c) $x - 5y - 4z = 0$ (*Digitar:* x - 5 y - 4 z = 0)

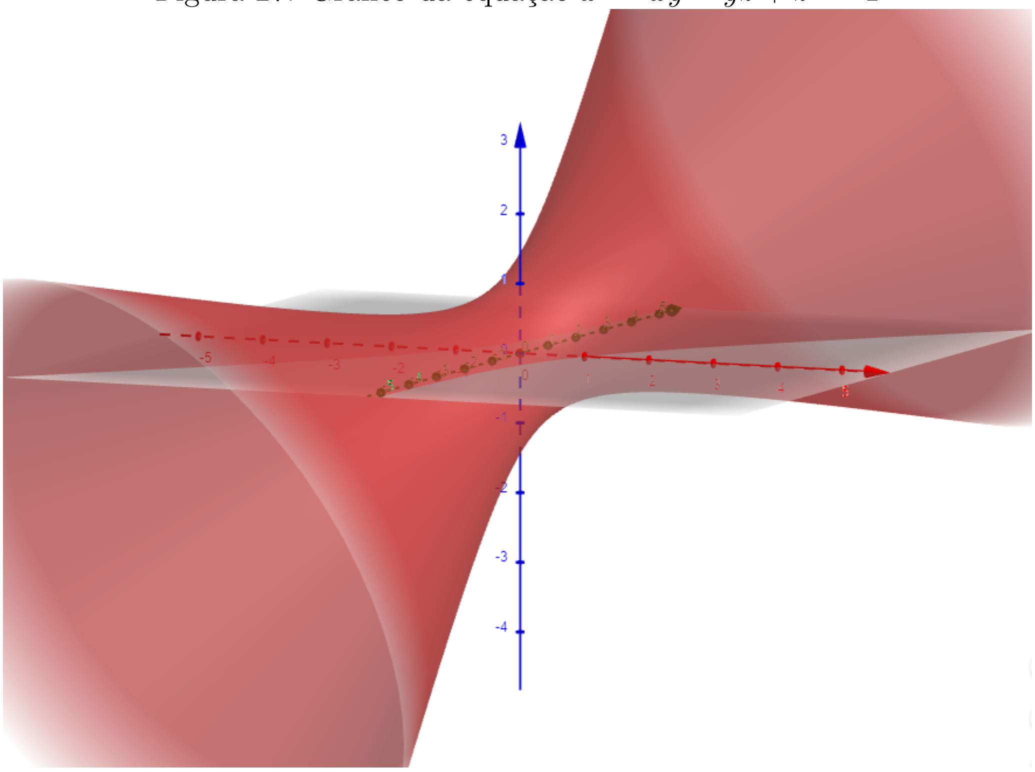
Figura 26: Gráfico da equação $x - 5y - 4z = 0$



Fonte: Autor

(d) $x^2 - xy - yz + z^2 = 1$ (*Digitar:* x ∧ 2 - x y - y z + z ∧ 2 = 1)

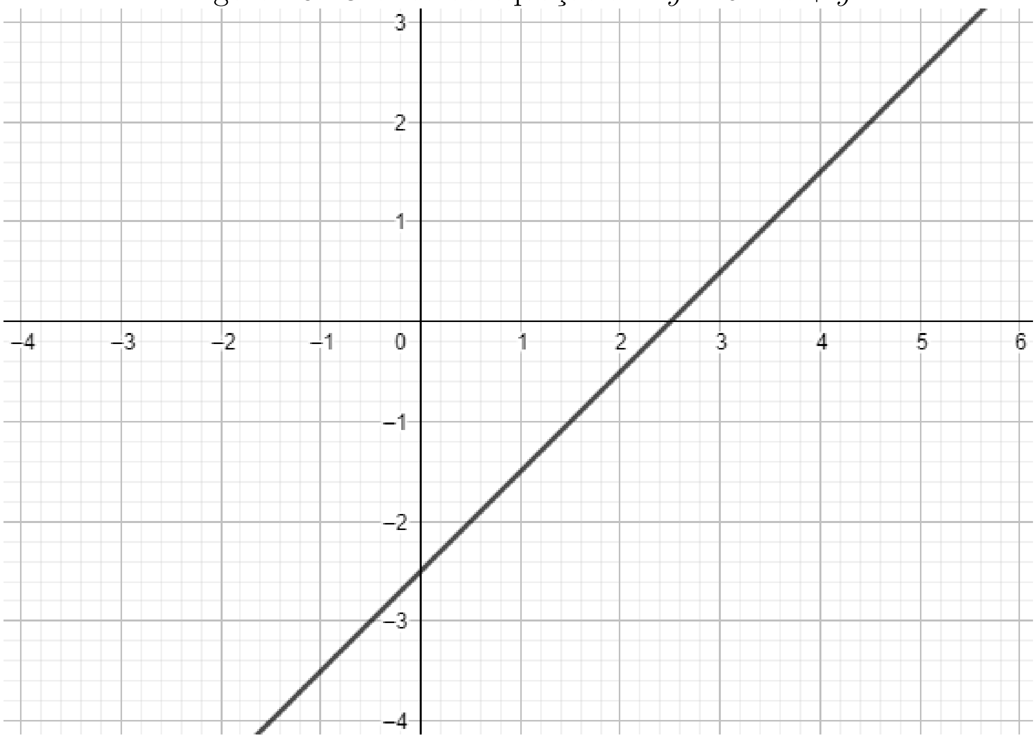
Figura 27: Gráfico da equação $x^2 - xy - yz + z^2 = 1$



Fonte: Autor

(e) $x - y = 5 - x + y$ (*Digitar:* x - y = 5 - x + y)

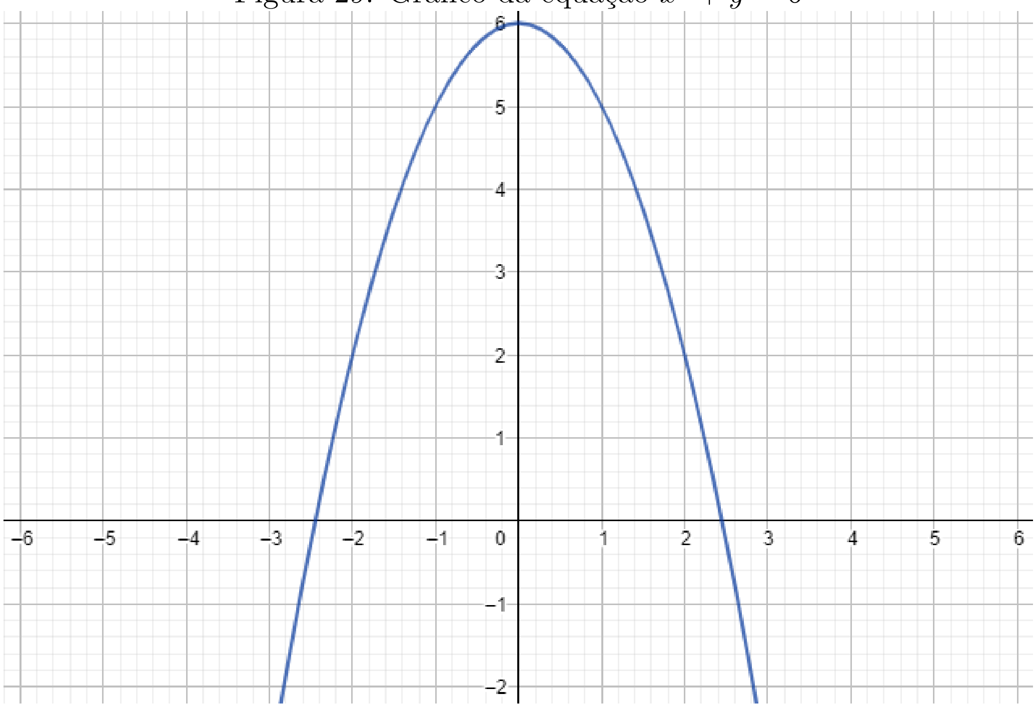
Figura 28: Gráfico da equação $x - y = 5 - x + y$



Fonte: Autor

(f) $x^2 + y = 6$ (*Digitar:* x ∧ 2 + y = 6)

Figura 29: Gráfico da equação $x^2 + y = 6$

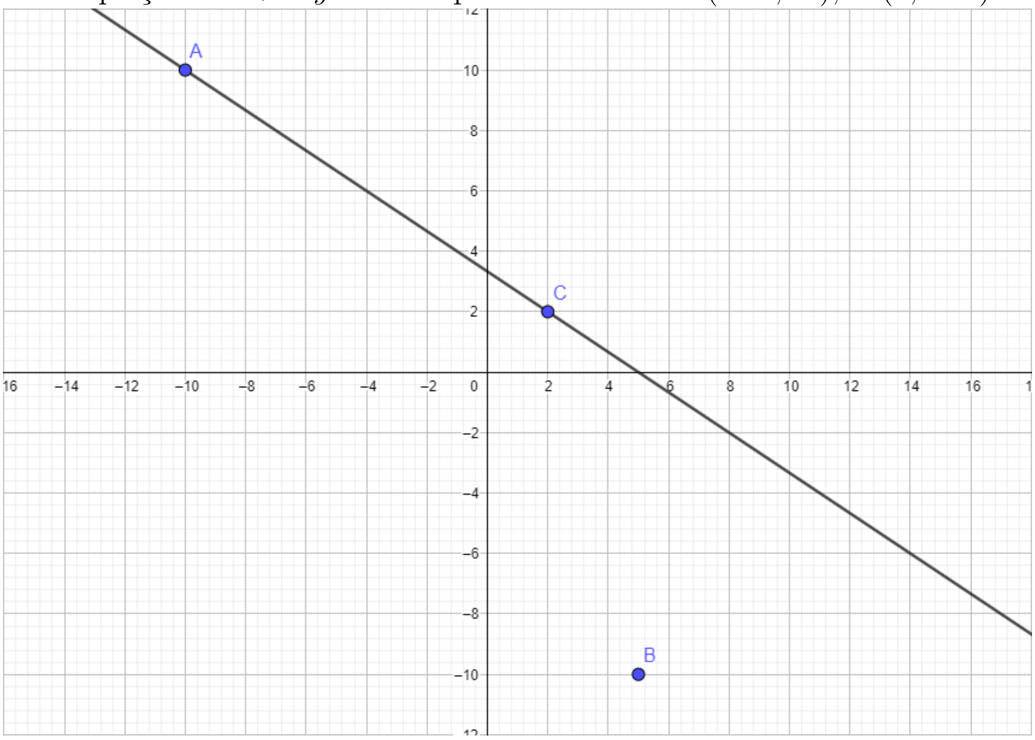


Fonte: Autor

02. Verifique quais dos pares ordenados são soluções das equações lineares abaixo, ou seja, quais pares satisfazem as equações.

- *Inserir a fórmula da equação linear e depois os pares ordenados. Explicar que se um par ordenado (ponto) é solução de uma equação linear de 2 incógnitas (reta) então o ponto pertence à reta.*

Figura 30: Equação $20x + 30y = 100$ e pares ordenados $A(-10, 10)$, $B(5, -10)$ *e* $C(2, 2)$



Fonte: Autor

(a) Equação $-2x + y = 1$ e pares ordenados $(0, -1)$, $(3, -2)$ *e* $(1, 3)$

(b) Equação $5x - 4y = -2$ e pares ordenados $(-1, 2)$, $(2, 3)$ *e* $(4, 6)$

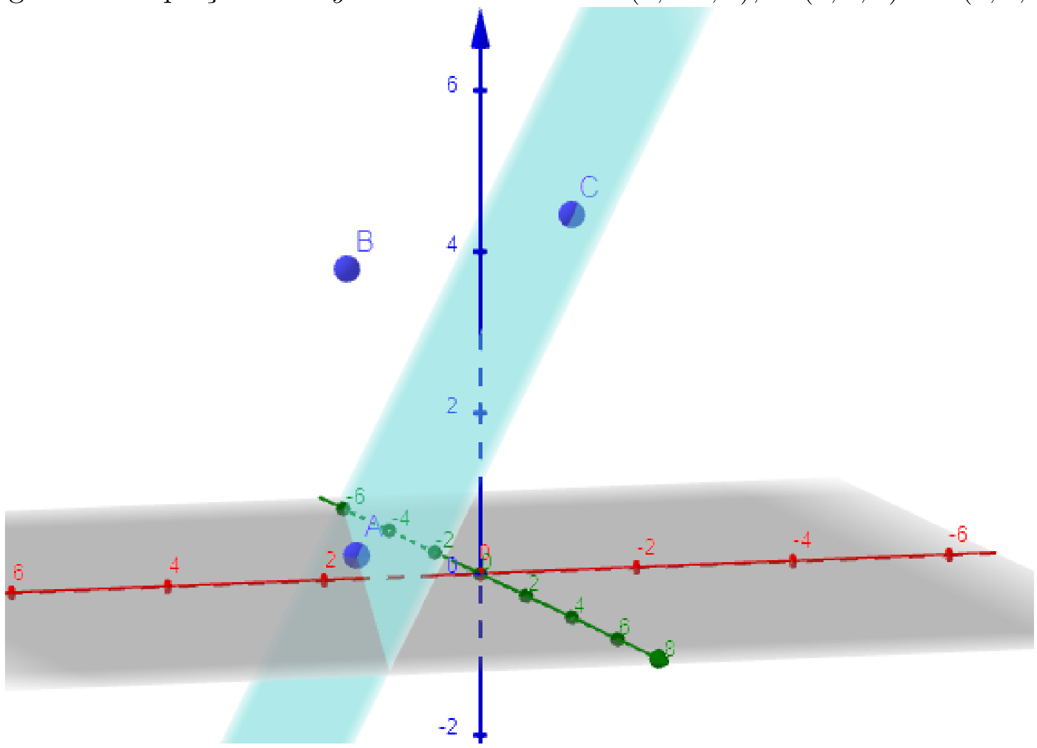
(c) Equação $-x + 10y = 5$ e pares ordenados $(10; 1, 5)$, $(1, 5)$ *e* $(5, 1)$

(d) Equação $20x + 30y = 100$ e pares ordenados $(-10, 10)$, $(5 - 10)$ *e* $(2, 2)$

03. Verifique quais dos ternos ordenados são soluções das equações lineares abaixo, ou seja, quais ternos satisfazem as equações.

- *Inserir a fórmula da equação linear e depois os ternos ordenados. Explicar que se um terno ordenado (ponto) é solução de uma equação linear de 3 incógnitas (plano) então o ponto pertence ao plano.*

Figura 31: Equação $4x - y + 2z = 6$ e ternos $A(1, -2, 0),\ B(2, 1, 4)\ e\ C(0, 4, 5)$



Fonte: Autor

(a) Equação $4x - y + 2z = 6$ e ternos $(1, -2, 0),\ (2, 1, 4)\ e\ (0, 4, 5)$

(b) Equação $5x + 6y + z = 10$ e ternos $(-2, 2, 3),\ (-7, 5, 2)\ e\ (2, -1, 6)$

(c) Equação $-x + 4y + 3z = -4$ e ternos $(4, 2, 1),\ (-3, 0, 2)\ e\ (1, 1, 4)$

(d) Equação $-2x + 3y + 10z = 9$ e ternos $(2, 1, 1),\ (5, 3, 1)\ e\ (1, -3, 2)$

Na terceira etapa, temos o uso das novas tecnologias digitais como ferramenta indispensável ao bom andamento dos conhecimentos e conceitos que estão sendo construídos em sala de aula conforme (Figura 32).

Lino (2014) [17] sugere a divulgação virtual dos conhecimentos já descobertos e formulados pelos alunos. A ideia, aqui, é a troca de experiências e informações para que se possa dar continuidade ao conteúdo programado. Nas próximas aulas, com alunos familiarizados com o GeoGebra e compreendendo sua importância para a fixação dos conceitos, pode-se continuar com a SD e contemplar o conteúdo planejado.

Figura 32: 3º procedimento da Sequência Didática

3º PROCEDIMENTO	ESTRATÉGIAS
Objetivos para estímulo do uso da ferramenta internet como meio de divulgação da leitura realizada	· O objetivo principal do projeto é fazer com que os alunos iniciem a prática da leitura com temas escolhidos. Além de ser mais agradável, a atividade proposta estimula a capacidade de raciocínio e a criatividade. A fotografia é uma das práticas mais presentes no cotidiano atual, e a internet ainda mais. Unindo-as, consegue-se fazer, da leitura cansativa, um material por meio de ilustrações. Fixar a história também é o ideal para a bagagem cultural dos alunos, principalmente na área de conhecimentos gerais. É importante acontecer uma reflexão de novas metodologias e meios de aprendizagem para desmistificação das aulas tradicionais aluno/professor em sala de aula.

Fonte: Lino (2014) [17]

Aula (4/7)

Conteúdo: Equações lineares homogêneas.

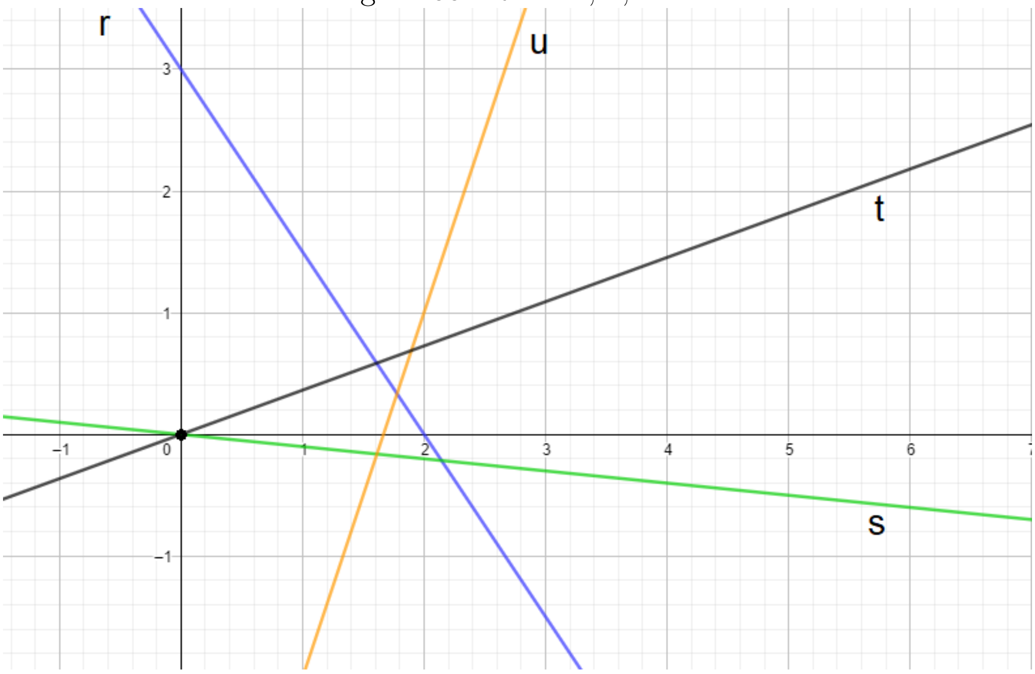
Objetivos: Relacionar a solução de uma equação linear homogênea a seu comportamento no GeoGebra.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Ministrar o conteúdo teórico sobre equações lineares homogêneas.
- Mostrar as equações lineares $r : 3x + 2y = 6$; $s : -x - 10y = 0$; $t : 4x - 11y = 0$ e $u : -9x + 3y = -15$ e solicitar que os alunos identifiquem quais são equações lineares homogêneas. (A este ponto espera-se que eles identifiquem facilmente.)
- Inserir no GeoGebra as equações r, s, t e u e questionar por que algumas retas passam pela origem do plano. Evidenciar que quando uma reta contém a origem $(0, 0)$, esta é uma de suas soluções. E com isso mostrar que um sistema linear homogêneo tem solução na origem, pois todas as equações que o formam aceitam a solução trivial.

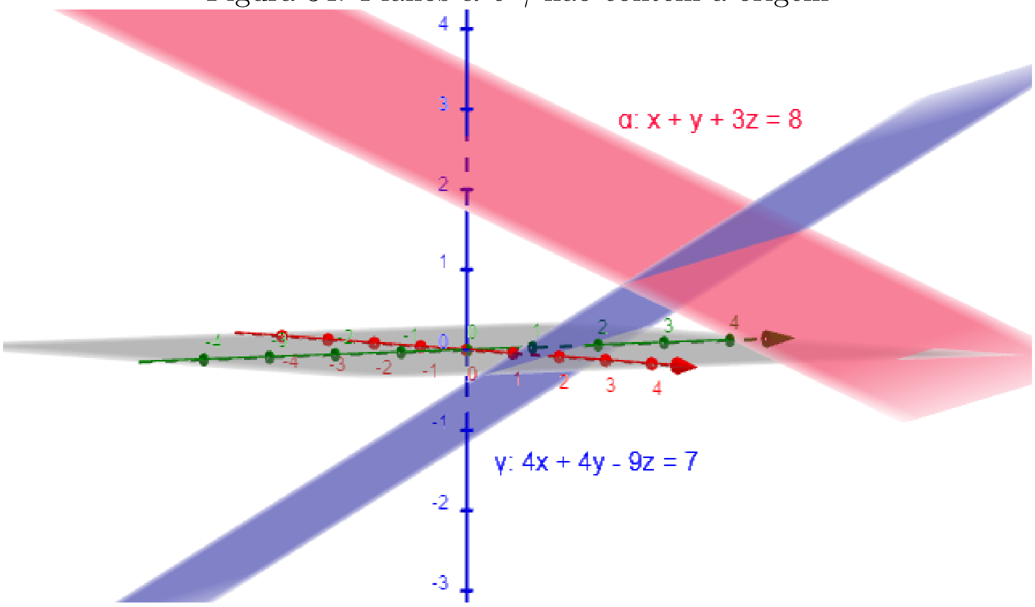
Figura 33: Retas r, s, t e u



Fonte: Autor

- Inserir as equações com três incógnitas $\alpha : x + y + 3z = 8$; $\beta : x - 7y + z = 0$; $\gamma : 4x + 4y - 9z = 7$ e $\delta : -2x + y - 2z = 0$ na Janela de Visualização 3D e mostrar que as equações lineares β (*beta*) e δ (*delta*) contém a origem $(0, 0, 0)$, logo são homogêneas. Expandir este raciocínio para equações com n incógnitas.

Figura 34: Planos α e γ não contêm a origem



Fonte: Autor

Aula (5/7)

Conteúdo: Solução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas (2×2).

Objetivos: Conhecer os métodos de resolução de um sistema linear (2×2) e resolver pelo melhor método para cada caso.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Ministrar o conteúdo teórico sobre resolução de um sistema linear (2×2). Métodos da adição, da comparação e da substituição.

Aula (6/7)

Conteúdo: Sistema de equações lineares (2×2) e suas soluções no GeoGebra.

Objetivos: Relacionar a forma algébrica de equações lineares com duas incógnitas e suas soluções a suas representações no GeoGebra.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Ministrar o conteúdo teórico sobre classificação de um sistema linear (2×2).
- Corrigir a questão 4 da Aula 2. Na impossibilidade de ter um computador para cada aluno ou dupla, pode-se pedir que cada aluno insira uma equação no computador que está projetando no quadro a fim de que todos possam acompanhar.
- A cada fórmula inserida, criar relações com os gráficos gerados no GeoGebra.

04. Resolva os sistemas lineares a seguir pelo método que preferir e classifique-os em SPD, SPI ou SI.

- *Inserir as fórmulas das equações com duas incógnitas e associar que os pontos de intersecção entre as retas são as soluções comuns às equações.*

(a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ *Como as retas têm um único ponto de intersecção (retas concorrentes) o sistema é possível e determinado.* $x = 3$ *e* $y = 1$.

Evidenciar que retas concorrentes no plano têm inclinações diferentes. Por isso ensinamos que com as retas $a_1x + b_1y = c_1$ *e* $a_2x + b_2y = c_2$, *devemos ter* $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ *para um sistema SPD.*

(b) $\begin{cases} x - 2y &= -2 \\ 2x - 4y &= -4 \end{cases}$ *Como as retas têm infinitos pontos de intersecção (retas coincidentes) o sistema é possível e indeterminado.* $x = \alpha$ *e* $y = \dfrac{\alpha}{2} + 1$.

Evidenciar que retas coincidentes no plano têm as mesmas inclinações e alturas (em relação ao eixo y). Por isso ensinamos que com as retas $a_1x+b_1y = c_1$ *e* $a_2x+b_2y = c_2$, *devemos ter* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ *para um sistema SPI.*

(c) $\begin{cases} -4x + 2y &= 8 \\ x - 0,5y &= 3 \end{cases}$ *Como as retas não se cruzam no plano (retas paralelas) o sistema é impossível.* $S = \varnothing$.

Evidenciar que retas paralelas no plano têm a mesma inclinação, mas alturas (em relação ao eixo y) diferentes. Por isso ensinamos que com as retas $a_1x + b_1y = c_1$ *e* $a_2x + b_2y = c_2$, *devemos ter* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ *para um sistema SI.*

Aula (7/7)

Conteúdo: Solução de um sistema linear com três equações e três incógnitas (3×3) pelo método do escalonamento.

Objetivos: Resolver um sistema linear (3×3) pelo método do escalonamento.

Materiais: Computador, projetor e quadro branco.

Desenvolvimento:

- Ministrar o conteúdo teórico sobre resolução de um sistema linear (3×3) por escalonamento.

05. Escalone e classifique o sistema linear a seguir: $\begin{cases} x - 4y + 3z &= -3 \\ -2x + y - 3z &= 5 \\ 4x + 5y + 8z &= 1 \end{cases}$

Passo 1: $\begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix} \begin{cases} x - 4y + 3z &= -3 \\ -2x + y - 3z &= 5 \\ 4x + 5y + 8z &= 1 \end{cases} \Rightarrow$ Substituir (II) por $2(I) + (II)$:

$$\text{Passo 2:} \quad \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left\{ \begin{array}{rcr} x - 4y + 3z & = & -3 \\ -7y + 3z & = & -1 \\ 4x + 5y + 8z & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Substituir } (III) \text{ por } -4(I) + (III):$$

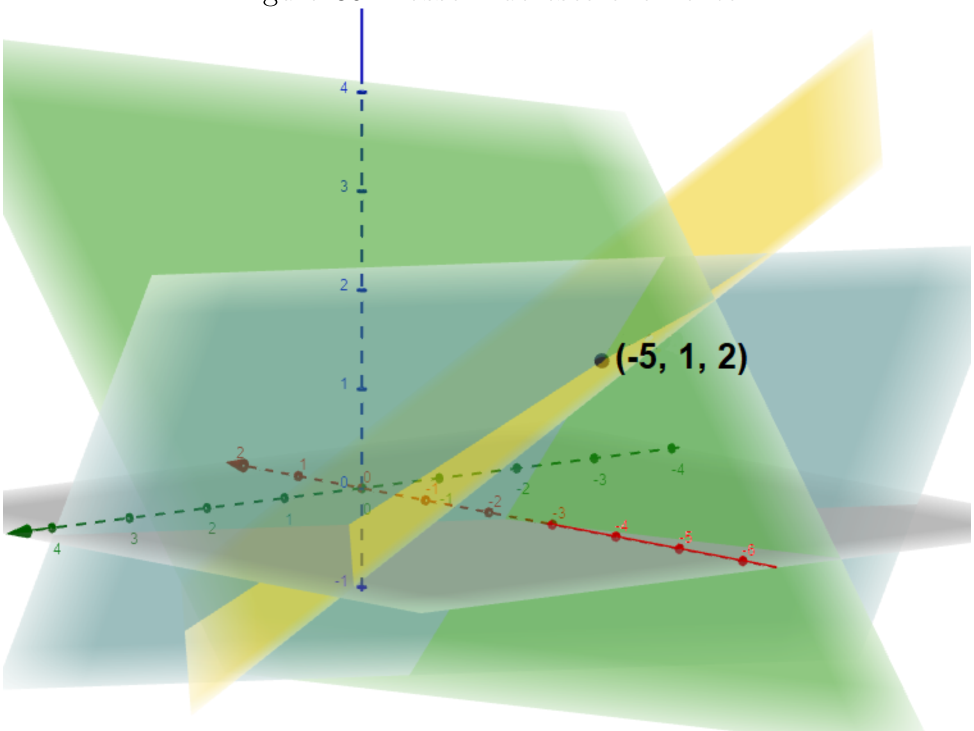
$$\text{Passo 3:} \quad \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left\{ \begin{array}{rcr} x - 4y + 3z & = & -3 \\ -7y + 3z & = & -1 \\ 21y - 4z & = & 13 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Substituir } (III) \text{ por } 3(II) + (III):$$

$$\text{Passo 4:} \quad \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left\{ \begin{array}{rcr} x - 4y + 3z & = & -3 \\ -7y + 3z & = & -1 \\ 5z & = & 10 \end{array} \right. \Rightarrow x = -5,\ y = 1 \text{ e } z = 2$$

Portanto, trata-se de um Sistema Possível e Determinado.

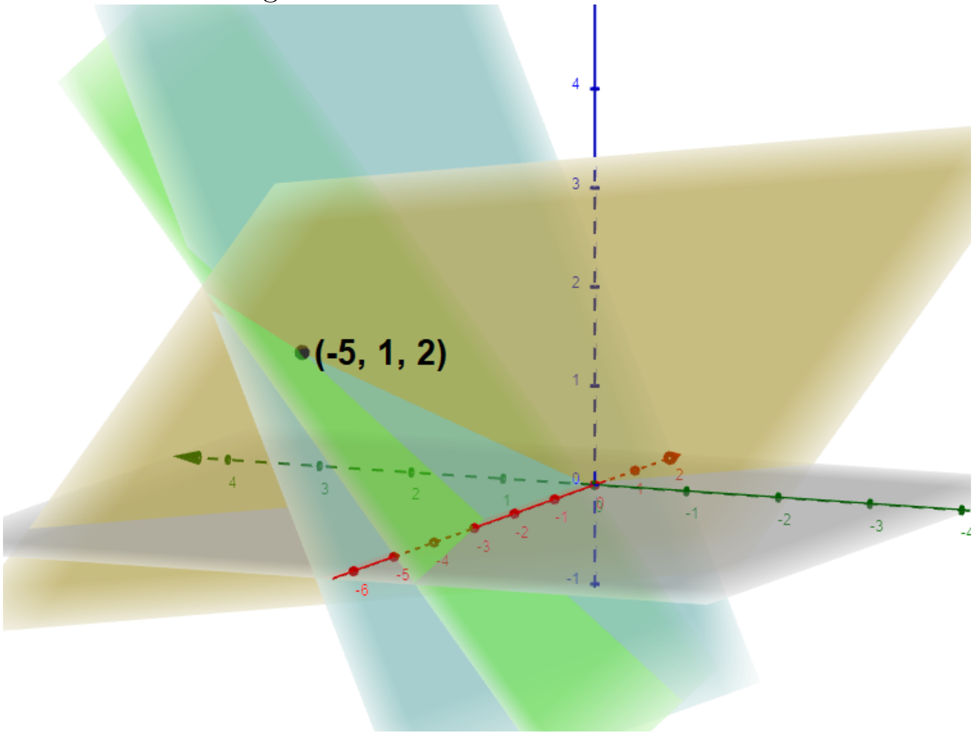
- Solicitar que cada aluno represente no GeoGebra um dos 4 passos do escalonamento e verificar que apesar dos planos serem diferentes a cada passo, o ponto de intersecção entre eles, ou seja, a solução do sistema foi sempre o mesmo. Frizar também, que isso justifica o fato de podermos manipular as equações a fim de escalonar o sistema sem alterar a solução, como podemos constatar nas figuras a seguir.

Figura 35: Passo 1 do escalonamento



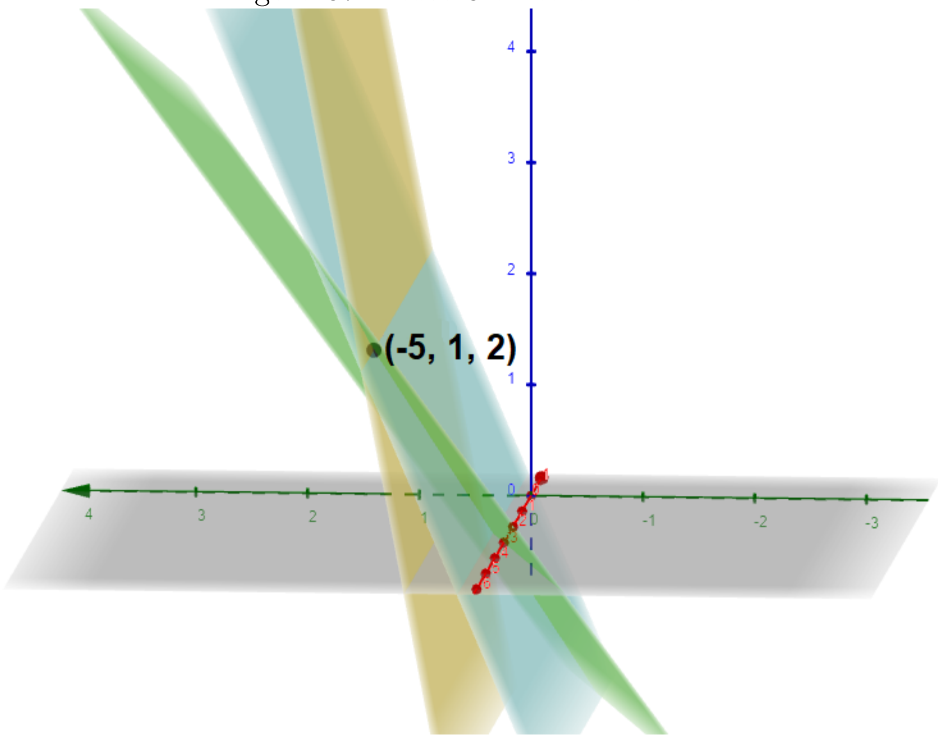
Fonte: Autor

Figura 36: Passo 2 do escalonamento



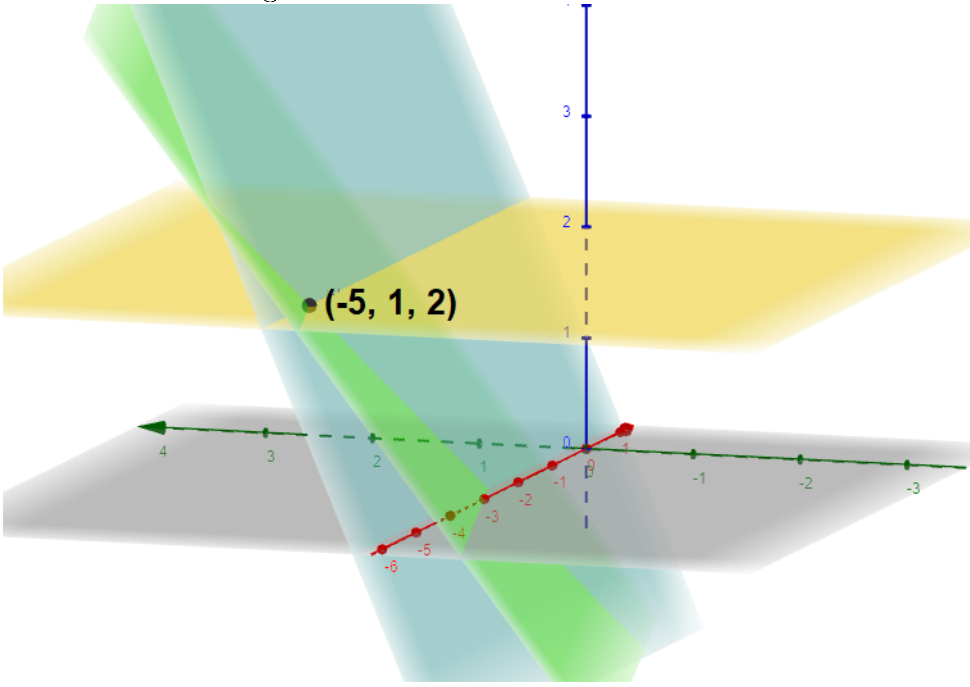
Fonte: Autor

Figura 37: Passo 3 do escalonamento



Fonte: Autor

Figura 38: Passo 4 do escalonamento



Fonte: Autor

Por fim, a quarta etapa (Figura 39) apontada por Lino (2014), que também ser denominada ponto de culminância, tem como estratégia a produção que pode ser de fotos, como sugerido no exemplo de blogs, mas, aplicando ao universo da matemática, temos aqui o lugar ideal para a elaboração e resolução de exercícios e desafios matemáticos, tendo o sistema GeoGebra como ferramenta indispensável às produções dos alunos do ensino médio.

Uma possível concretização desta etapa seria uma exposição dos modelos criados no GeoGebra durante as aulas. Algumas das imagens produzidas podem ser impressas e expostas na sala de aula. Neste momento de ensino remoto, o material pode ser divulgado nas redes sociais da escola.

Sobre a forma de avaliar o desempenho dos alunos, o professor deve levar em consideração todo o período de execução da SD. A vivência transformada em conhecimento e a conquista de novos saberes por muitas vezes não podem ser avaliadas numa avaliação objetiva. No processo de avaliação contínua os conceitos aprendidos desde a ideia inicial de equação linear ou não-linear, o interesse em conhecer uma nova ferramenta tecnológica como o GeoGebra, o aprofundamento nos conceitos até chegar na conclusão do conteúdo devem ser considerados como parte da nota.

Figura 39: 4º procedimento da Sequência Didática

4º PROCEDIMENTO	ESTRATÉGIAS
Apreciação crítica do processo; percepção dos resultados	· As fotos serão feitas da seguinte maneira: – não haverá especificação da câmera fotográfica; – será necessário retirar a ideia principal de cada capítulo; – produzir até cinco fotos (em média) para cada capítulo, desde que o leitor entenda a narrativa e – colocar legenda em cada uma das fotos; · Utilizar o laboratório de informática para abrir as fotos; · Cada aluno criará um blog para postar a narrativa ilustrada; · Os alunos terão acesso aos endereços dos blogs dos colegas, e farão comentários a respeito de cada um;

Fonte: Lino (2014) [17]

Mas uma vez que o aluno adquiriu todas estas competências, ele deve ser capaz de resolver outros exemplos semelhantes na forma de uma avaliação escrita. Assim o professor tem mais de uma modalidade para compor a nota do aluno. Podendo assim, evitar que a avaliação seja o reflexo de um simples momento, o que pode não exprimir o verdadeiro desempenho do aluno.

4.4 Aplicabilidade do GeoGebra em sala de aula

A respeito da aplicabilidade do programa GeoGebra em sala de aula destacamos, especialmente, a possibilidade não apenas de criação, mas principalmente de movimentação, ampliação e redução dos objetos.

Poloni (2018, p. 110) [24] salienta que:

> Ao abrir o GeoGebra aparecerá uma tela dividida em duas janelas, Janela de Álgebra e Janela de Visualização. Para trabalhar com sistemas com 3 incógnitas, usa-se apenas a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização 3D, para isto, no menu principal, escolhe-se a opção Exibir (Figura 7.33), para selecionar as janelas a serem usadas e fechar as quais não serão utilizadas. Neste caso, clica-se na opção Janela de Visualização,

a mesma será fechada e ao clicar na opção Janela de Visualização 3D a mesma será aberta.

O programa pode, portanto, ser configurado de acordo com as orientações do professor ou a necessidade do autor das equações, de modo que a Matemática se torna, para alunos e professores, mais real e integra a realidade virtual que tem no aluno o sujeito principal. O GeoGebra, bastante intuitivo, é de fácil acesso e apresenta diversas ferramentas e possibilidades de usos e criações. Uma vez motivado, aluno certamente fará grandes descobertas ao navegar e utilizar o sistema em foco neste trabalho.

Também importa destacar que a pesquisa doravante mencionada apresenta, para aqueles que ainda desconhecem o programa, todo o processo desde a instalação e configuração até a elaboração de figuras e sua projeção em 2D e 3D. O trabalho apresenta imagens e orienta sobre o passo a passo necessário para a utilização do programa, que pode, uma vez instalado, ser utilizado no modo offline. A pesquisa ainda apresenta situações que envolvem problemas com sistemas lineares sem solução, ou seja, os Sistemas Impossíveis (SI), com uma única solução, os Sistemas Possíveis Determinados (SPD) ou mesmo com infinitas possibilidades de resultados, os Sistemas Possíveis e Indeterminados (SPI).

4.5 Pontos positivos e pontos negativos do GeoGebra

No que diz respeito aos pontos positivos do programa, destacamos a praticidade, a possibilidade de aplicação de conceitos matemáticos de forma prática trabalhando os sentidos e linguagens (verbal e não verbal) pela presença de números, formas geométricas e cores distintas.

Em segundo plano, destacamos o caráter intuitivo do GeoGebra. Todos os ícones e ferramentas aparecem acompanhados de um breve resumo de sua função e aplicabilidade, contudo, eles mesmos são bastante sugestivos, o que facilita a leitura do aluno e o orienta por um caminho de novas descobertas no universo da Matemática.

Pesquisas também confirmam a dinamicidade e aplicabilidade do GeoGebra para o ensino de alunos surdos e de outras pessoas com deficiência física. A pesquisa "Softwares de Geometria Interativa para Deficientes Físicos e Intelectuais: Um Mapeamento Sistemático" [30], realizada pelos pesquisadores João Henrique Sas de Souza, Igor Roberto Guilherme, Simone de Sousa Borges, Ramílio Ramalho Reis Filho, Helena Macedo Reis, da Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga em parceria com o Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC), a Universidade de São Paulo (USP) e a Universidade Tecnológica Federal do Paraná atestam que o uso de softwares de Geometria Interativa pode facilitar o aprendizado e melhorar a qualidade de ensino para pessoas que possuem limitações físicas e intelectuais.

Por fim, destacamos ainda uma das principais e mais importantes características do GeoGebra, a saber, a possibilidade de criação, mas principalmente ampliação e movimentação das figuras geométricas em 2D ou mesmo em 3D. Os alunos ainda podem modificar formatos e cores de modo que, a partir dessa apropriação, a Matemática passa a ser dele, imprime seu gosto e personalidade, e não apenas figura em um livro feito por alguém desconhecido do alunado.

A respeito dos pontos negativos do GeoGebra, dificilmente encontramos trabalhos que apontem defeitos do programa em questão, mas considerando, especialmente, o contexto da situação em questão no Brasil, marcado pela pandemia de COVID-19, importa salientar a ausência de equipamentos eletrônicos e/ou tecnológicos para o desenvolvimento de atividades envolvendo o sistema.

Como foi dito na introdução desta pesquisa, grande parte dos alunos, especialmente aqueles que estão matriculados em escolas públicas da região norte e nordeste não tem nem mesmo acesso à internet. Também é importante destacar a questão da desigualdade social no que diz respeito às escolas localizadas nas regiões interioranas, que, além da falta de internet, não possuem computadores disponíveis para os alunos. Muitas vezes ainda sofrem com a ausência de professores. Valendo ainda mencionar o grande percentual de famílias que nem mesmo tem condições de comprar o mantimento diário. Com a pandemia e o crescimento dos índices de desemprego e o fechamento de diversas empresas de pequeno porte, que geralmente atual nessas regiões, a situação se torna ainda mais alarmante.

4.6 A questão da interdisciplinaridade

Quanto à possibilidade de ações e projetos interdisciplinares enfatizamos que o programa é capaz de promover o diálogo entre as áreas mais diversas do conhecimento, como por exemplo, a Língua Portuguesa com a análise interpretativa dos sentidos das cores e a interpretação dos comandos, inclusive de questões, tendo em vista que tudo é, inicialmente, uma questão de leitura; a História, com a apresentação da história e do legado dos grandes matemáticos para o avanço da humanidade e suas datas; a Geografia com curiosidades acerca dos primeiros equipamentos que utilizaram os sistemas GPS, por exemplo, de que modo e para que ele foi pensado.

Temos ainda alguns pontos de interseção com a Sociologia e o papel social da Matemática e da lógica para a vida em sociedade e questões relacionadas à incompreensão e rejeição sofrida por muitos pesquisadores em seus grupos sociais no processo de descoberta, apresentação e defesa de suas teses; redação com o apontamento da relação entre a lógica e aplicabilidade dos acontecimentos e repertórios que devem sempre ser observados de diversos ângulos, sob diversas perspectivas para o acolhimento de uma tese. Ainda podemos trabalhar com a Química e a Biologia, como nos casos já mencionados, respectivamente, do balanceamento de equações químicas e da relação entre a dieta e as quilocalorias.

Diante disso, embora que de maneira breve, esclarecemos que o trabalho com os sistemas lineares pode ser interativo, dinâmico e ainda realizado em conjunto com os demais professores de diferentes áreas do conhecimento.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa bibliográfica intitulada “A matemática no contexto virtual: estratégias para o aprendizado de sistemas lineares por meio do programa GeoGebra” teve, como objetivo geral, discutir acerca do ensino da Matemática, mais especificamente do conteúdo sistemas lineares, por meio do sistema GeoGebra, considerando não apenas o aspecto numérico ou propriamente matemático, mas também e especialmente o contexto no qual os alunos e professores estão inseridos devido aos terríveis danos causados pela pandemia de COVID-19 e ao fim propor uma Sequência Didática sobre o conteúdo abordado.

Nesta pesquisa, salientamos a persistência da desigualdade social em solo nacional que afeta, especialmente negros, indígenas e pessoas de baixa renda matriculadas no ensino médio das escolas públicas. Por meio de pesquisas e números, destacamos que grande parte dos alunos que estão contidos neste conjunto vivem à margem do funcionamento das aulas remotas ao vivo pelos computadores ou celulares, pela ausência de recursos financeiros e/ou falta de equipamentos eletrônicos ou mesmo ausência de sinal ou acesso à internet em suas localidades. Diante disso, salientamos o efeito de expressões como equidade e igualdade dispostas na BNCC, tendo em vista que estes alunos são privados do acesso ao conhecimento da Matemática em suas localidades.

A pesquisa, de maneira até então implícita, destaca a ausência de políticas públicas verdadeiramente efetivas que gerem resultados de grande impacto positivo nas vidas dos alunos, dando a eles a possibilidade de carreira nas universidades e ascensão social. Também apresentamos um pouco da história dos estudos dos sistemas lineares, como nomes e datas de pesquisadores que marcaram a elaboração desse entendimento atual; a origem, funcionalidade e aplicabilidade do GeoGebra na escola, destinado aos alunos do segundo ano do ensino médio, mas também a diversas áreas sociais que fazem uso deste sistema ou mesmo do conteúdo em suas práticas e/ou ações. Por fim destacamos que o sistema apresentado não é excludente, pois também favorece os alunos com dificuldades físicas e/ou cognitivas.

REFERÊNCIAS

[1] AGUIAR, A. L. de. **MOODLE E GEOGEBRA COMO APOIO VIRTUAL AO ENSINO DE TRIGONOMETRIA SEGUNDO A NOVA PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO**. 2011. 153f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011.

[2] ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. 1998. 295 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

[3] ARAÚJO, F. W. G. de; SILVA, E. M. de A. G; SILVA, R de A. G. **UMA ANÁLISE DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DURANTE A PANDEMIA DE COVID-19**. 2020. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2020/TRABALHO_EV140_MD1_SA13_ID90_01092020003741.pdf. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[4] **As falhas do ensino da matemática expostas pela pandemia do coronavírus**. 2020. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-52914434. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[5] **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[6] BASTOS, C. B; PINHEIRO, L. P. V; ARRUDA, S. C. Q. **O USO DO GEOGEBRA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES - UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO**. 2016. Disponível em: https://jem.unifesspa.edu.br/images/2JEM/ANAIS/CC/O_USO_DO_GEOGEBRA_PARA_O_ENSINO_DE_SISTEMAS.pdf. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[7] BORGES NETO, H. et. al. **MANUAL DO GEOGEBRA**. Disponível em: http://tele.multimeios.ufc.br/geomeios/geogebra/manual.htm. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[8] CATANEO, V. I. **O uso do software Geogebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino aprendizagem da matemática no ensino fundamental séries finais**. 2011. 86 f. Especialização - Centro Universitário Barriga Verde - UNIBAVE, Orleans. 2011.

[9] **Constituição da República Federativa do Brasil**. 1988. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado.htm. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[10] **Derivando a Matemática**. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/ apmat/ sistemas-lineares-algumas-aplicacoes/. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[11] **Durante a pandemia, consumo de internet dobra no Brasil**. 2021. Disponível em: https://olhardigital.com.br/2021/05/13/coronavirus/durante-a-pandemia-consumo-de-internet-dobra-no-brasil/. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[12] **Educação na pandemia: o que avaliar e por quê?**. 2021. Disponível em: https://www.extraclasse.org.br/opiniao/2021/06/educacao-na-pandemia-o-que-avaliar-e-por-que/. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[13] **Enem marcado pelo ensino remoto encancara desigualdades no Brasil**. 2021. Disponível em: https://www.portalviu.com.br/brasil/enem-marcado-pelo-ensino-remoto-escancara-desigualdades-no-brasil. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[14] **Fiocruz alerta para longas internações e síndromes pós-Covid em pacientes jovens**. 2021. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/saude/fiocruz-alerta-para-gravidade-da-covid-19-em-pacientes-mais-jovens/#: :text=Agora%20j%C3%A1%20%C3%A9 %20o%20contr%C3%A1rio,ao%20v%C3%ADrus%E2%80%9D%2C%20explicou%20Villela. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[15] **Impactos Primários e Secundários da COVID-19 em Crianças e Adolescentes.**. 2021.Relatório de análise. 3ª Rodada. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/media/ 15136/file/relatorio_analise_impactos-primarios-e-secundarios-da-covid-19-em-criancas-e-adolescentes_terceira-rodada.pdf.. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[16] **INSTITUTO GEOGEBRA**. Disponível em: https://www.pucsp.br/geogebrasp/ geogebra.html#: :text=O%20GeoGebra%20%C3%A9%20um%20software,e%20c%C3%A1lculo %20numa%20%C3%BAnica%20aplica%C3%A7%C3%A3o.&text=GeoGebra %20foi%20criado %20em%202001,popularidade%20tem%20crescido%20desde%20ent%C3%A3o. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[17] LINO, C. de C. S. **Sequência didática para a motivação da leitura aos estudantes**. 2014. Guaratinguetá: Faculdades Integradas Teresa D'Ávila, 2014. Disponível em: https://blogeducomunicacao.wordpress.com/2014/12/18/sequencia-didatica-para-a-motivacao-da-leitura-aos-estudantes/. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[18] MARCHETTI, J. M; KLAUS, V. L. C. de A. **SOFTWARE GEOGEBRA: UM RECURSO INTERATIVO E DINÂMICO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA**. 2014. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unioeste_mat_artigo_josiane_mazzurana.pdf. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[19] MARQUES, P. P. M. da R; ESQUINCALHA, A. da C. **DESAFIOS DE SE ENSINAR MATEMÁTICA REMOTAMENTE: OS IMPACTOS DA PANDEMIA COVID-19 NA ROTINA DE PROFESSORES**. 2020. Disponível em: http://eventos.sbem.com.br/index.php/spem-rj/ix-spem-rj/paper/viewFile/1399/1167. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[20] MATOS, B. E. de. **O SOFTWARE GEOGEBRA COMO RECURSO PARA O ENSINO DE VOLUMES DE FIGURAS ESPACIAIS: O QUE DIZEM AS PESQUISAS**. 2020. 42 f. Monografia - Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2020.

[21] **O papel das redes sociais durante a pandemia**. 2020. Disponível em: http://www.iff.fiocruz.br/index.php/8-noticias/675-papel-redes-sociais. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[22] ONUCHIC, L. R. ALLEVATO , N. S. G. **Novas Reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas**. 2004. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231

[23] ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. 1999. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP. 1999. p. 199-218.

[24] POLONI, H. L. **Sistemas Lineares, aplicações e representação gráfica**. 2018. 156 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

[25] **População em situação de rua cresce durante pandemia**. 2020. Disponível em: https://diariodonordeste.verdesmares.com.br/metro/populacao-em-situacao-de-rua-cresce-durante-pandemia-1.2960887. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[26] **População em situação de rua cresce e fica mais exposta à Covid-19**. 2020. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/portal/index.php?option=com_content&view=article&id=35811. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[27] SÁ, L. C. e; ROVETTA, O. M. **A pandemia sob outra perspectiva: uma experiência com fotografias no ensino não presencial de geometria espacial**. 2021. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/ripem/article/view/2459/1945. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[28] **Segundo IBGE, 4,3 milhões de estudantes brasileiros entraram na pandemia sem acesso à internet**. 2021. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/educacao/2021/04/segundo-ibge-43-milhoes-de-estudantes-brasileiros-entraram-na-pandemia-sem-acesso-a-internet.shtml#: :text=Segundo%20IBGE%2C%204%2C3%20milh%C3%B5es,04%2F2021%20%2D%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20%2D%20Folha. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[29] SOUZA, D. D e; JUSTULIN, A. M. **A resolução de problemas e suas diversas abordagens em livros didáticos de matemática do 7º ano do ensino fundamental**. 2013. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/353_91_ID.pdf. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[30] SOUZA, J. H. S. de. et. al. **Softwares de Geometria Interativa para Deficientes Físicos e Intelectuais: Um Mapeamento Sistemático**. 2016. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/70664/40101. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[31] **Vício em redes sociais dispara na pandemia, mas há como recuperar o controle e se desintoxicar**. 2020. Disponível em: https://brasil.elpais.com/estilo/2020-10-12/vicio-em-redes-sociais-dispara-na-pandemia-cinco-jeitos-de-recuperar-o-controle-e-se-desintoxicar.html. Acesso em: 26 de setembro de 2021.

[32] ZABALA, A. **A Prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.