UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ADRIANO RUI PINTO DOS REIS

OS ANTIGOS ALGORITMOS DE MULTIPLICAÇÃO E UMA PROPOSTA DE ADAPTAÇÃO AO MÉTODO GELOSIA

BELÉM – PA
2020

ADRIANO RUI PINTO DOS REIS

OS ANTIGOS ALGORITMOS DE MULTIPLICAÇÃO E UMA PROPOSTA DE ADAPTAÇÃO AO MÉTODO GELOSIA

Dissertação apresentada ao Programa De Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Pará – UFPA, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento

BELÉM – PA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBDSistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R375a REIS, ADRIANO RUI PINTO DOS.
OS ANTIGOS ALGORITMOS DE MULTIPLICAÇÃO EUMA PROPOSTA DE ADAPTAÇÃO AO MÉTODO GELOSIA / ADRIANO RUI PINTO DOS REIS. — 2021.
87 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Belém, 2021.

1. MÉTODO DE GELOSIA. 2. ALGORITMOS DA MULTIPLICAÇÃO. 3. ENSINO DA MULTIPLICAÇÃO. I.Título.

CDD 510.9

ADRIANO RUI PINTO DOS REIS

OS ANTIGOS ALGORITMOS DE MULTIPLICAÇÃO E UMA PROPOSTA DE ADAPTAÇÃO AO MÉTODO GELOSIA

Dissertação apresentada ao Programa De Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Pará – UFPA, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Rubia Gonçalves Nascimento

Data de aprovação: 23/04/2021

Conceito: APROVADO

Banca Examinadora

Prof.ª Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento
Orientadora
PROFMAT – UFPA – BELÉM

Prof. Dr. Joao Cláudio Brandemberg Quaresma
Membro Externo
PPGECM – UFPA

Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes
Membro Interno
PROFMAT – UFPA – BELÉM

BELÉM – PA
2021

Adriano Rui Pinto dos Reis graduou-se em Matemática e Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Pará. Atualmente, trabalha como professor de Matemática do Ensino Básico na Secretaria de Educação do Governo do Estado do Pará.

DEDICATÓRIA

Dedico em especial a minha esposa **Maria Helena Ramos Corrêa**, que teve total paciência e serenidade diante de minhas ausências como marido.

Dedico este trabalho a minha filha, **Angra Luzia Corrêa dos Reis**, a qual tenho admiração por sua inteligência e talento.

Agradeço muito por entender todos os momentos em que fiquei encavernado em meu quarto durante a pandemia e não pude atendê-las.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a DEUS por mais esta montanha escalada.

Aos meus pais Amarante e Sé, pelo carinho e apoio.

À minha irmã Andrezza e cunhado Dayved.

À minha tia Milagres.

À minha esposa família Helena, Angra e Victória, por me ajudarem nos momentos mais difíceis.

Às minhas diretoras e vice-diretoras, Dorimar, Milene, Leia, Rosilene das escolas públicas onde trabalho, pela paciência e contribuição teórica.

À minha orientadora Professora Doutora Rúbia, que sempre foi disponível e me deu todo alicerce teórico e metodológico.

Agradeço ao Colegiado e Secretaria do Profmat pelo atendimento dedicado e cordial.

Agradeço aos meus amigos de banda de rock Superself, Rael, Thiago e Anderson.

RESUMO

Pesquisa-se sobre os antigos algoritmos de multiplicação e propõe-se uma adaptação ao método Gelosia, a fim de analisar e descrever os antigos algoritmos de multiplicação. Para tanto, é necessário disponibilizar métodos alternativos de multiplicação aos professores e alunos do Ensino Básico, conceder um contexto histórico sobre os algoritmos, descrever gradativamente os métodos, justificar a funcionalidade destes e propor uma adaptação ao método Gelosia. Realiza-se, então, uma pesquisa descritiva. Diante disso, verifica-se que nações diversas produzem métodos diversos para solucionar problemas multiplicativos, que os métodos são realmente funcionais e que adaptação ao método Gelosia é viável, os algoritmos foram analisados e descritos de maneira detalhada em relação a suas técnicas de obtenção de produtos, o que impõe a constatação de que é possível criar interesse e curiosidade nos alunos do Ensino Básico sobre métodos alternativos de multiplicação.

Palavras-chave: Algoritmos da multiplicação. Método de Gelosia. Ensino da Multiplicação.

ABSTRACT

Bearing in mind that Basic Education students in general only know the usual method of Multiplication, research is done on the old multiplication algorithms and proposes an adaptation to the Gelosia method, in order to analyze and describe the old multiplication algorithms. Therefore, it is necessary to provide alternative methods of multiplication to teachers and students of Basic Education, grant a historical context about the algorithms, gradually describe the methods, justify their functionality and propose an adaptation to the Lattice method. Then, a descriptive research is carried out. Therefore, it appears that different nations produce different methods to solve multiplicative problems, that the methods are really functional and that adaptation to the Lattice method is feasible, the algorithms were analyzed and described in detail in relation to their techniques for obtaining products, which imposes the observation that it is possible to create interest and curiosity in Basic Education students about alternative multiplication methods.

Keywords: Multiplication algorithms. Glaze Method. Teaching of Multiplication.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO ... 1

1 REFERENCIAL TEÓRICO ... 4

1.1 Breve Histórico da Multiplicação ... 4

1.1.1 O Algoritmo Usual ... 6

1.2 A Multiplicação e os PCN's ... 9

1.3 A Multiplicação Atual no Ensino Básico ... 14

1.3.1 O Fracasso do Ensino Tradicional na Matemática ... 14

1.3.2 O Advento da BNCC e O Ensino da Multiplicação ... 18

2 ALGUNS MÉTODOS ANTIGOS DE MULTIPLICAÇÃO ... 24

2.1 A Multiplicação Egípcia ... 24

2.1.1 Histórico do Método Egípcio ... 24

2.1.2 Descrição do Método Egípcio ... 25

2.1.3 Justificativa do método egípcio ... 33

2.2 A Multiplicação Russa ... 35

2.2.1 Histórico do Método Russo ... 35

2.2.2 Descrição do Método Russo ... 35

2.2.3 Justificativa do Método Russo ... 40

2.3 A Multiplicação Chinesa ... 43

2.3.1 Histórico do Método Chinês ... 43

2.3.2 Descrição do Método Chinês ... 44

2.4 A Multiplicação Francesa ... 54

2.4.1 Histórico do Método Francês ... 54

2.4.2 Descrição do Método Francês ... 55

2.4.3 Justificativa do Método Francês ... 56

2.5 A Multiplicação Grega ... 58

2.5.1 Histórico do Método Grego ... 58

2.5.2 Descrição do Método Grego ... 58

3 O MÉTODO GELOSIA ... 62

3.1 Histórico do Método Gelosia ... 62

3.2 Etimologia da palavra Gelosia ... 62

3.3 Descrição do Método Gelosia ... 63

3.4 Proposta de Adaptação ao Método Gelosia ... 70

3.5 Justificativa do método Gelosia 78
CONSIDERAÇÕES FINAIS... 82
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 84

INTRODUÇÃO

A seleção do argumento sobre métodos multiplicativos, a princípio, foi concebida na primeira da década dos anos 2000 após uma leitura em um livro didático da 5.ª série do Ensino Fundamental de Matemática do professor Luiz Roberto Dante, em que o autor cita um método muito antigo de multiplicação utilizado em países árabes, cuja estruturação se dava em torno de uma grade em que o usuário efetuava produtos e posicionava os resultados dentro das células desta grade. Porém, o autor não mencionava o seu nome. Era justamente o método Gelosia, o qual fui descobrir mais sobre ele anos depois quase que sem querer em livros de graduação. Ao consultar mais sobre este método realmente fiquei surpreso em seguida sobre a existência de outros algoritmos de multiplicação.

O algoritmo usual, geralmente, é o único a ser apresentado aos alunos do Ensino Básico dando impressão de que é o único existente no estudo da multiplicação.

É esperançoso que a abordagem com os diferentes procedimentos multiplicativos pode trazer uma perspectiva diferente para ser trabalhada na sala de aula, sendo uma oportunidade para que o aluno da escola básica perceba o desenvolvimento tecnológico da humanidade através de uma abordagem histórica investigativa da matemática. É neste âmbito que o aluno da educação básica terá oportunidade de encontrar ao longo do processo, meios motivacionais para o para o avanço da construção do conhecimento.

PROBLEMÁTICA

Os questionamentos observados durante a construção deste trabalho foram sobre a origem desses métodos, a indagação acerca de sua funcionalidade precisa e sobre a possibilidade de o método Gelosia ter maior praticidade e acessibilidade ao aluno do Ensino Básico.

HIPÓTESES

Este trabalho apresenta como hipóteses:

a) O desenvolvimento de uma percepção de que professores de Matemática do Ensino Básico desconhecem os antigos métodos de multiplicação ou não possuem interesse em aplica-los e os seus alunos nunca tiveram acesso a outros algoritmos além do usual, considerado padrão para a multiplicação.

b) A limitação que leva o aluno a executar estratégias repetitivas e com pouca reflexão sobre o significado do método. Em muitos casos, próprio professor não conhece ou não dá muita importância para a existência de algoritmos alternativos de multiplicação.
c) Contextualizar os algoritmos em relação às suas origens;
d) Justificar os algoritmos utilizando cálculos aritméticos e algébricos;
e) Disponibilizar este trabalho em mídias e redes digitais para acesso público.
f) Construir uma versão mais prática e acessível ao método Gelosia.

Os métodos multiplicativos que serão abordados nesta dissertação são:

a) o Algoritmo Egípcio;
b) o Algoritmo Russo;
c) o Algoritmo Chinês;
d) o Algoritmo Francês;
e) o Algoritmo Grego;
f) e o Gelosia.

Esta dissertação é descrita em três capítulos:

No Capítulo 1 denominado Referencial Teórico apresentaremos um breve histórico da multiplicação no mundo e como seus símbolos foram construídos, a abordagem proposta na multiplicação nos Parâmetros Curriculares Nacionais, BNCC e o ensino da multiplicação atual no Ensino Básico.

No Capítulo 2 intitulado Alguns Métodos de Multiplicação apresentaremos alguns algoritmos de multiplicação, suas funcionalidades, justificativas e características que foram impregnadas pelos povos que os desenvolveram.

No Capítulo 3, cujo título é O Método Gelosia, será dedicado a este método em especial, devido suas características peculiares e também será apresentado uma adaptação a este método.

OBJETIVO GERAL

Esta dissertação possui como objetivo geral analisar e descrever os antigos algoritmos de multiplicação.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Possui também como objetivos específicos disponibilizar métodos alternativos de multiplicação aos professores e alunos do Ensino Básico, conceder um contexto histórico sobre os algoritmos, descrever gradativamente os métodos, justificar a funcionalidade destes e propor uma adaptação ao método Gelosia.

METODOLOGIA

A Metodologia aplicada neste trabalho foi a científica básica e estratégica quanto à sua finalidade, descritiva quanto ao seu objetivo, uma abordagem qualitativa, um método hipotético-dedutivo e um procedimento bibliográfico e documental.

O trabalho é concluído apresentando as considerações finais onde é descrito as reflexões a respeito do objeto de pesquisa.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 Breve Histórico da Multiplicação

A Matemática é disciplina reverenciada na atual sociedade. Com a ascensão da ciência moderna e da tecnologia, principalmente a partir do século XVIII a relevância da Matemática no sistema escolar obteve um importante espaço na educação quando se atingiu a modernidade europeia (D'AMBRÓSIO, 1993).

O sujeito que sabe resolver problemas que envolvam números, realizar cálculos mentalmente, encontrar respostas para situações do dia-a-dia, obtém uma condição privilegiada, proclamando a sapiência em um conhecimento valorizado pelos povos desde a Antiguidade (D'AMBRÓSIO, 1993)

O surgimento da palavra Matemática tem origem grega. A palavra "matemata" possui o seguinte sentido:

> "explicação, entendimento, manejo da realidade, objetivos muito mais amplos que o simples contar e medir" (D'AMBRÓSIO, 1993, p.9)

e seus instrumentistas buscavam um estágio elevado, aprendendo suas técnicas e orientando as elites no intuito de comandar a sociedade.

No início do processo de escolarização, as crianças eram levadas a priorizar o conhecimento sobre números mais do que a leitura e a escrita. Os indícios preliminares de técnicas multiplicativas estão diretamente relacionados com a história da construção ou invenção da escrita numérica. A história da multiplicação se agrega com a da origem dos números. A contagem por associação, a execução de cálculos utilizando ferramentas braçais, a vinda da tecnologia digital são fatos que não podem ser dissociados.

Os egípcios já demonstravam ter um domínio em 1650 a.C. de cálculos multiplicativos, observados no papiro de Rhind (Boyer,1996). Constituíam um sistema de relação com o dobro de forma sequencial e depois faziam a decomposição do valor cogitado para esses dobros. A multiplicação entre 11 e 30 seria resolvida assim:

Uma vez o trinta = 30

Duas vezes de (o dobro de) trinta = 60

Quatro vezes de (o dobro do dobro de) trinta = 120

Oito vezes de (o dobro do dobro do dobro de) trinta = 240.

Daí, para se obter onze vezes o trinta, basta somar, oito vezes o trinta + duas vezes o trinta + uma vez o trinta ou seja 240 + 60 + 30. E onze vezes o trinta resulta em 330.

A multiplicação como é conhecida atualmente tem basicamente três sinais admitidos. São eles: (x), (.) e o (*). Muitos nomes são associados à evolução do uso de símbolos multiplicativos:

- O advogado e matemático francês François Viète (1540 – 1603) é conhecido como o pai moderno do cálculo literal e a ele também é atribuído à convenção dos sinais operatórios usados atualmente (Tahan, 2014, p. 53). Representou a multiplicação por *in*.
- Willian Oughtred (1574 – 1660), no seu livro Clavis Matematicae, girou o sinal da adição (que já era em forma de cruz) em torno do centro em 45° para a direita, originando a "Cruz de Santo André", ou "sinal de dimensão".
- Thomas Harriot (1560 – 1621), num período adjacente, inseriu um ponto entre os fatores para simbolizar o produto a ser feito.
- René Descartes, em 1637, descreveu os fatores justapostos para sintetizar qualquer produto.
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), no século XVII, sugeriu com maior praticabilidade a utilização do ponto para substituir a cruz.

Após a instauração da internet e da linguagem computacional, o asterisco (*) passou a representar o sinal da multiplicação em linguagens de programação, em textos e mensagens curtas digitadas em aparelhos móveis, como celulares e tablets, com a finalidade do ponto admitir somente a categoria ortográfica.

São destacadas as seguintes propriedades da multiplicação:

- **Propriedade 1.1**. Propriedade fechamento da multiplicação: Quaisquer que sejam os números naturais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, temos que o produto $\boldsymbol{a \cdot b}$ é um número natural.
- **Propriedade 1.2**. Propriedade comutativa da multiplicação: Quaisquer que sejam os números naturais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, temos que:

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$$

- **Propriedade 1.3**. Propriedade associativa da multiplicação: Quaisquer que sejam os números naturais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, temos que:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

- **Propriedade 1.4**. Elemento neutro da multiplicação: Qualquer que seja o número natural $\boldsymbol{a}$, temos que:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{1} = \boldsymbol{a}$$

- **Propriedade 1.5.** Propriedade distributiva em relação à adição: Quaisquer que sejam os números naturais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, temos que:
  - $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

➢ Proposição 1.1. Qualquer que seja o número inteiro a, temos:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

1.1.1 O Algoritmo Usual

Antes de mostrar o estudo dos antigos algoritmos é interessante que se retome ao algoritmo usual (também chamado de convencional) de multiplicação.

O algoritmo usual da multiplicação que é ensinado na Educação Básica foi originalmente trazido para a Europa pelos povos árabes e africanos, onde se efetua o produto de cada dígito do multiplicando por cada um do multiplicador e, em seguida, soma-se adequadamente todos os resultados. Este método requer memorização dos fatos básicos de multiplicação embora tenha outros algoritmos alternativos que os alunos possam achar mais interessante e descomplicado de operar em relação ao método tradicional. Em geral é o único método ensinado aos alunos da Educação Básica.

O Processo Usual da Multiplicação é realizado da direita para esquerda, multiplicando-se em cada ordem, o dígito do multiplicador pelo dígito do multiplicando. O último algarismo deste resultado é colocado no produto parcial, se houver mais de um dígito, o outro será acrescido ao produto da próxima ordem do multiplicando, ou também no produto parcial se não houver mais dígitos no multiplicando. A cada ordem do multiplicador, o resultado parcial é deslocado uma posição à direita refletindo a posição relativa do algarismo do multiplicador. E finalmente todos os produtos parciais são somados a fim de obtermos o produto final da multiplicação.

Figura 1.1

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 23 \\ \hline 375 \\ 250 \\ \hline 2875 \end{array}$$

Autoria: Fonte própria.

Exemplo 1.1: Multiplicar 12 por 3.

De preferência, ao construir o cálculo, mantemos o menor fator embaixo do maior.

Figura 1.2

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Autoria: Fonte própria.

Multiplica-se o 3 em cada um dos algarismos do número 12:

$2 \times 3 = 6$

$1 \times 3 = 3$

Figura 1.3

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline 36 \end{array}$$

Autoria: Fonte própria.

Logo o produto de 12×3 é 36.

Exemplo 1.2: Multiplicar 24 por 5.

Figura 1.4

$$\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ \times & 5 \\ \hline \end{array}$$

Autoria: Fonte própria.

Multiplica-se o 5 em cada um dos algarismos do número 24

4 × 5 = 20

2 × 5 = 10

É possível observar que a multiplicação por 4 resultou no número 20, que possui dois algarismos. O procedimento, neste caso, é manter o algarismo 0 (zero) sob o algarismo 5 do segundo fator e adicionar o 2 a próxima multiplicação. Geralmente, ao explicar este passo, diz-se “subir o 2”.

Em seguida, ao multiplicar o 5 pelo número 2, o resultado é 10. É somado este resultado ao 2 da multiplicação anterior: 10 + 2 = 12.

Figura 1.5

$$\begin{array}{ccc} & {\scriptstyle 2} & \\ & 2 & 4 \\ & \times & 5 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array}$$

Autoria: Fonte própria.

Portanto, o produto de 24 × 5 é 120.

Exemplo 3: Multiplicar 21 por 13.

Nesse exemplo, observa-se dois algarismos no segundo fator, o 13. O procedimento inicial será multiplicar o 3 a cada algarismo do número 21.

1 × 3 = 3

2 × 3 = 6

Figura 1.6

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 1 \\ \times & 1 & 3 \\ \hline & 6 & 3 \end{array}$$

Autoria: Fonte própria.

Em seguida, multiplica-se o 1 a cada algarismo do número 21.

$1 \times 1 = 1$

$2 \times 1 = 2$

Escreve-se o resultado sob o número 63, pulando a casa das unidades, ou seja, deixando um espaço vazio.

Figura 1.7

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 1 \\ \times & 1 & 3 \\ \hline & 6 & 3 \\ 2 & 1 & \end{array}$$

Autoria: Fonte própria.

Soma-se os valores formados, 63 e 21.

Figura 1.8

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 1 \\ \times & 1 & 3 \\ \hline & 6 & 3 \\ 2 & 1 & \\ \hline 2 & 7 & 3 \end{array}$$

Autoria: Fonte própria.

Portanto, o produto de 21×13 é 273.

1.2 - A Multiplicação e os PCN's

Uma abordagem frequente no trabalho com a operação multiplicação é o ajustamento de uma relação entre ela e a operação adição. Nesse caso, a multiplicação é apresentada como um caso particular da adição porque as parcelas envolvidas são todas iguais (PCN **-** Brasil, 1997, 1998). Por exemplo:

"Tenho que tomar 3 comprimidos por dia, durante 6 dias.
Quantos comprimidos preciso comprar?"

A essa situação vincula-se a escrita 6 x 3, na qual o 3 é interpretado como o número que se repete e o 6 como o número que indica a quantidade de repetições. Ou seja, tal escrita apresenta-se como uma forma abreviada da escrita 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3.

A partir dessa interpretação, definem-se papéis diferentes para o multiplicando (o número que se repete) e para o multiplicador (o número de repetições), não sendo possível tomar um pelo outro.

No exemplo dado, não se pode tomar o número de comprimidos pelo número de dias. Saber evidenciar o valor que se repete do número de repetições é um aspecto importante para a resolução de problemas como este. No entanto, essa abordagem não é suficiente para que os discentes compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação, mas apenas aquelas que são essencialmente situações aditivas.

Em relação à multiplicação e seus significados, os PCN's (Brasil, 1997, 1998) tratam que a multiplicação pode ser explorada em quatro situações, de acordo com o Quadro 1 a seguir.

Tabela 1.1

Quadro 1: Situações envolvendo multiplicação de acordo com os PCN (1997,1998). **Situações**	**Situação-Problema**
Comparativa	Um prédio tem duas caixas d'água com capacidades de 5.000 litros cada. Uma delas está com 1/4 de sua capacidade e a outra está com três vezes mais. De quantos litros de água o prédio dispõe?
Comparação entre razões/proporcionalidade	Se 8 metros de tela custam R$ 5,80, quanto pagarei por 16 metros de tela? Um pacote pesa 4kg. Quantos quilos pesará 3 pacotes?
Produto de medidas	Qual é a área em centímetros quadrados de um retângulo cujos lados medem 6 cm e 9 cm?
Combinatória	Em uma festa havia 3 moças e 4 rapazes. Quantos casais diferentes podem ser formados para dançar?

Fonte: adaptado dos PCN (BRASIL, 1998)

As resoluções dos problemas acima envolvem distintos modos de operar. Alguns deles podem ser considerados habituais, como, o algoritmo da multiplicação e a regra de três e outros como não-convencionais, como é o caso de técnicas próprias de cálculo.

Em toda atividade envolvendo a multiplicação e as demais operações, os PCN's (BRASIL, 1997; 1998) sugerem o trabalho com problemas associados a diferentes contextos, como os internos ou externos à realidade escolar, pelo fato de dar ensejo ao convívio com os diferentes significados das operações e dos números e a aprovação em que um mesmo problema pode ser resolvido por diferentes operações, assim como uma mesma operação pode estar associada a diferentes problemas.

É evidenciado nos PCNs de que o trabalho com a multiplicação deve ser realizado através de um conjunto de problemas, devido às estreitas junções entre as circunstâncias que os envolvem (BRASIL, 1997, p. 109); logo modifica-se o panorama do ensino de conceitos relacionados à operação de multiplicação, para o ensino de conceitos ligados a um campo conceitual, o campo multiplicativo. Este campo se refere às situações que requerem para a sua resolução a realização de uma multiplicação. (FRANCHI, 2008, p. 189)

Em relação ao estudo dos antigos algoritmos de multiplicação, existe um estereótipo na educação básica no Brasil de que a Matemática é uma ciência a qual não é passível de evolução em termos de conceitos e ideias. Esta convicção pode ser mudada com a abordagem da própria história da matemática, fazendo com que os professores, e consequentemente os alunos, mudem sua visão inerte sobre a própria como disciplina. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enaltecem que

> A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática. (BRASIL, 1997, p.45).

Um professor de Matemática que não desenvolve uma metodologia em suas aulas está exposto a improvisações e erros, fazendo assim que seus alunos não manifestem curiosidade pelos seus conteúdos. A história da Matemática serve de instrumento de combate à estagnação científica, sendo que esta última impede que os professores produzam instrumentações progressistas para o ensino da disciplina. Os antigos métodos de multiplicação estão contidos nesta ideia de que os povos da época buscavam o aprimoramento teórico para seu próprio benefício.

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos (BRASIL, 1997, p.38).

É possível observar que é necessário que o professor de Matemática utilize didaticamente materiais e/ou ferramentas metodológicas para construir um trabalho distinto e qualitativo, mas que também se ampare em documentos oficiais e/ou trabalhos de pesquisa para instigar o aluno para a busca do conhecimento científico. Para isto acontecer, é importante que o professor que faça uma investigação histórica e assim perceber que as teorias matemáticas são frutos do costume e da evolução de um povo. O estudo dos antigos algoritmos de multiplicação pode ser inserido neste contexto. A História da Matemática é um dispositivo que resgata a identidade cultural de uma nação. Os Parâmetros Curriculares Nacionais BRASIL (1998, p.43) especificam que ao

> [...] verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração. BRASIL (1998, p.43).

Uma sociedade é passível de desenvolvimento se ela produzir iniciativas que direcionem o seus interesses e suas necessidades. Isto implica que as tecnologias estão a serviço para a melhoria da qualidade de vida de um povo. Portanto, quem busca e constrói conhecimento, possui um papel relevante para a evolução de seu próprio ambiente social. Logo, entender as operações matemáticas, assim como a multiplicação, torna o aluno indivíduo importante no meio em que vive.

É possível observar em torno das operações matemáticas, que todo trabalho a ser realizado com relação às operações deverá

> “se concentrar na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, na relação existente entre elas e no estudo reflexivo do cálculo, contemplando diferentes tipos – exato e aproximado, mental e escrito” (BRASIL, 1997, p. 39)

sempre no sentido de evolução do entendimento de cada uma das operações e do desdobramento da noção de número.

1.2 A Multiplicação Atual no Ensino Básico

1.2.1 O Fracasso do Ensino Tradicional na Matemática

Historicamente, a aplicação da matemática na sala de aula aconteceu somente depois da Revolução Industrial (final do século XVIII). Devido a ela a administração e os sistemas bancários e de produção passavam a ter um nível maior de exigência da sociedade. O estudo da matemática nessa época era baseado no raciocínio dedutivo do grego Euclides (séc. III a.C.). Após as Guerras Mundiais, mais crianças passaram a ter acesso à escola e a educação matemática continuava sob os chamados métodos tradicionais de ensino. Como consequência, as reprovações aumentavam e originava-se uma aversão à disciplina, pois o ensino não era aplicado à realidade do aluno. No século XX as aulas tradicionais persistiram e com ela os problemas. Após a década de 30 e com a Guerra Fria os avanços tecnológicos fizeram com que os estadunidenses se interessassem na formação de novos cientistas nas escolas. Para isso formularam um novo currículo para a matemática, que foi nomeada como Matemática Moderna e que não foi seguida adiante por falta de didática. Não era viável o seu estudo para os alunos do ensino fundamental. (Danielle de Miranda, Site Brasil Escola)

Os transtornos causados pelo ensino tradicional da matemática atingiram tal proporção que foi necessário que especialistas da área iniciassem um estudo, na década de 70, sobre Educação Matemática, que atingiu os matemáticos do mundo inteiro. Soluções e técnicas de como aplicar métodos diferenciados de avaliação foram estudadas, fazendo relação com a vida do aluno, relacionando a matemática com a psicopedagogia. Esse movimento atingiu o Brasil com o surgimento, em 1997, do Parâmetro Curricular Nacional (PCN). Os participantes do movimento da Educação Matemática acreditam que esse documento contém informações necessárias para uma melhoria do ensino da matemática.

As discussões sobre a concepção tradicional de ensino ganharam espaço no Brasil a partir da década de 1950. As instituições escolares trabalhavam com o método tradicional. Justina Maccarini relata a função do professor e do aluno no ensino tradicional:

> Do professor que ensina, avalia, pergunta, cobra, enfim, detém o saber, o poder e o controle sobre o que ensina e deve ser ensinado; do aluno – que aprende, busca o saber que não possui, responde. Reproduz o que o professor ensina, somente é avaliado (não participa do processo de avaliação), enfim, é um ser passivo que só recebe o saber. A responsabilidade pela aprendizagem recai toda sobre o aluno (Maccarini, 2010, p. 12).

A concepção do ensino tradicional ainda está enraizada em muitas escolas. Há até hoje a visão de que o professor ensina, avalia e detém o saber, enquanto o aluno reproduz o que é ensinado pelo educador. Nesse processo, o aluno não reflete sobre seu aprendizado e o professor permanece com sua metodologia retrógrada, o que faz com que o aluno não o questione e nem participe das aulas.

Na década de 1960, as discussões sobre o ensino de matemática foram mais contundentes em relação às práticas educacionais que persistiam no ensino tradicional. Com apoio de educadores matemáticos, foram criados grupos de estudo para atender às novas exigências do Movimento da Matemática Moderna nos Estados Unidos e no Brasil.

No Brasil, o Movimento da Matemática Moderna esteve sob a coordenação do professor Osvaldo Sangiorgi, que difundiu as ideias do movimento. O objetivo era reformular e atualizar os currículos escolares. Essas questões eram discutidas nos encontros, que reuniam grandes pesquisadores para debater como melhorar o ensino da Matemática trazendo-o para o contexto social dos indivíduos (Maccarini, 2010).

A prioridade era promover o ensino da Matemática baseado na Lógica, Álgebra, Topologia e na Teoria dos Conjuntos. De acordo com Fiorentini (1995, apud Maccarini, 2010, p. 14),

> “a Matemática foi tratada como se neutra, pronta e acabada, e não tivesse relação alguma com questões sociais e políticas”.

Dentro dessa perspectiva, o Movimento da Matemática Moderna também recebeu críticas pertinentes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), a partir desse movimento que priorizou a linguagem e a simbologia que não eram adequadas às crianças em diferentes faixas etárias, não observando a fase de desenvolvimento psicológico e neurológico infantil. Para alguns estudiosos e pesquisadores, isso foi considerando o fracasso do Movimento da Matemática Moderna, que também obteve avanços na perspectiva de reformular os currículos escolares quanto às novas formas de conduzir o ensino de Matemática em sala de aula. Segundo D'Ambrosio (2012, p. 55),

> “desse movimento ficou um outro modo de conduzir as aulas, com muita participação dos alunos, com uma percepção da importância de atividades, eliminando a ênfase antes exclusiva em contas e carroções”.

Essa proposta também trouxe pontos negativos quanto ao detalhamento dos conteúdos e nos algoritmos das operações e na formação dos professores dos anos iniciais, que,

> “em sua maioria, tinham uma formação em nível médio – antigo curso de habilitação ao magistério – que lhes dava certificação para atuar na Educação Infantil e nas séries iniciais do Ensino Fundamental” (Nacarato; Mengali; Passos, 2009, p. 17).

Em relação ao ensino da multiplicação, os problemas envolvendo o campo multiplicativo foram divididos em categorias pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud. Com essa organização é possível trabalhar os conceitos de multiplicação já nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Exemplos:

a) **Proporcionalidade:**

Problema 1 – Na festa de aniversário de Carolina, cada criança levou 2 refrigerantes. Ao todo, 8 crianças compareceram à festa. Quantos refrigerantes havia?

Problema 2 – Marta tem 4 selos. João tem 3 vezes mais do que ela. Quantos selos tem João?

b) Organização Retangular

Problema 3 – Um salão tem 5 fileiras com 4 cadeiras em cada uma. Quantas cadeiras há nesse salão?

c) Combinatória

Problema 4 – Uma menina tem 2 saias e 3 blusas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode se arrumar combinando as saias e as blusas?

Vergnaud teorizou que a possibilidade de mudança no ensino se baseia principalmente na Teoria dos Campos Conceituais, que teve suas primeiras inserções no Brasil no fim dos anos 1980. Segundo o próprio, em uma entrevista, resume a teoria assim:

> “O resultado de muita pesquisa com estudantes, que nos leva a compreender como eles constroem conhecimentos matemáticos. Ela é fundamental para ensinar a disciplina, pois permite prever formas mais eficientes de trabalhar os conteúdos. Quero mostrar a relação entre essa teoria e a prática escolar.” (Nova Escola, 2008).

Os conceitos relacionados à multiplicação (e também a divisão) estão contidos em um conjunto de situações denominado campo conceitual multiplicativo,

> “cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações [...]” (VERGNAUD, 1990, p. 8, tradução Neiva Ignês Grando e Flávia de Andrade Niemann).

O Campo Conceitual Multiplicativo abrange diversos conceitos, dentre eles: a multiplicação, a divisão, dobro, metade, triplo, a fração, funções linear, bilinear e não linear, razão, taxa, proporção, espaço vetorial, isomorfismo, combinação, produto cartesiano, área, volume.

As situações pertencentes ao campo conceitual multiplicativo, ou seja, problemas cuja solução é definida por meio de uma multiplicação, segundo Vergnaud (2014) são classificados em duas grandes categorias de relações: isomorfismo de medidas e produto de medidas. Essas categorias são subdivididas em classes conforme a posição da incógnita na situação, os tipos de grandezas (contínuas e descontínuas) e o conjunto a que os números pertencem.

De acordo com Vergnaud (1990) não se pode teorizar a aprendizagem da matemática somente a partir do simbolismo ou das situações. É necessário considerar o sentido das situações e dos símbolos e levar em conta a ação do sujeito na situação e a organização de sua conduta. Portanto, a utilização da representação simbólica é um dos elementos que compõem a aprendizagem de um conceito matemático.

1.2.2 O Advento da BNCC e O Ensino da Multiplicação

Com o objetivo de garantir aos estudantes o direito de aprender um conjunto fundamental de conhecimentos e habilidades comuns, reduzir as desigualdades educacionais existentes no Brasil, nivelando e, elevando a qualidade do ensino, foi criada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

O documento da BNCC foi homologado pelo Ministério da Educação (MEC), em sua terceira versão, no dia 20 de dezembro de 2017 para as etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental. Em 14 de dezembro de 2018, o documento foi homologado para a etapa do Ensino Médio. Juntas, a Base da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio integram um único documento: a BNCC da Educação Básica.

A BNCC teve como temas prioritários adequação dos currículos, capacitação da equipe docente e atualização dos materiais e recursos didáticos utilizados.

A Base Nacional Comum Curricular determina as competências (gerais e específicas), as habilidades e as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante cada etapa da educação. Determina inclusive que essas competências, habilidades e conteúdos devem ser os mesmos, independentemente de onde as crianças, os adolescentes e os jovens moram ou estudam. A Base também é um conjunto de orientações que direciona as equipes pedagógicas na elaboração dos currículos locais tanto por escolas públicas quanto particulares.

Em relação às habilidades de Matemática, muitos conteúdos foram reorganizados e alguns novos foram inseridos dentro do proposto pela BNCC. Álgebra e Probabilidade e Estatística passam a fazer parte do cotidiano do Fundamental 1 e habilidades relacionadas a tecnologia, robótica e programação passaram a figurar no currículo.

O documento não propôs uma ruptura com a visão sobre a disciplina observada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). A Matemática é conceituada como "ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos" e, ainda, "uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções". A Base foca no que o aluno precisa desenvolver, para que o conhecimento matemático seja uma ferramenta para ler, compreender e transformar a realidade.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o conteúdo matemático apresenta as unidades:

- **Números**;
- **Geometria**;
- **Grandezas e Medidas**;
- **Álgebra;**
- **Probabilidade e Estatística**.

Para o Ensino Fundamental, a BNCC propõe uma progressão múltipla de aprendizagens, articulando o trabalho do professor com as experiências já vivenciadas pelos estudantes, valorizando as situações lúdicas de aprendizagem para estimular o pensamento lógico e criativo, proporcionando o desenvolvimento das capacidades de perguntar, argumentar, interagir e ampliar a compreensão do mundo. No documento da BNCC se encontra que:

> Ao longo do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a progressão do conhecimento ocorre pela consolidação das aprendizagens anteriores e

> pela ampliação das práticas de linguagem e da experiência estética e intercultural das crianças, considerando tanto seus interesses e suas expectativas quanto o que ainda precisam aprender. (BRASIL, 2017b, p.59)

No Quadro a seguir, são descritos os objetos de conhecimento e habilidades relacionados à multiplicação, do 2º ao 5º ano do EF, de acordo com a BNCC:

Tabela 1.2

Ano	**Objetos de conhecimento**	**Habilidades**
2º	Problemas envolvendo adição de parcelas iguais(multiplicação).	(EF02MA07)* Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.
	Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte.	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
3º	Construção de fatos fundamentais da [...] multiplicação.	(EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos [...] da multiplicação para o cálculo mental ou escrito.
	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação [...]: adição deparcelas iguais, configuração retangular, [...].	(EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentadosem disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.
	Composição e decomposição de um número natural de até cinco ordens, por meio de adiçõese multiplicações por potências de 10.	(EF04MA02) Mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo.
	Propriedades das operaçõespara o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais.	(EF04MA04) Utilizar as relações entre [...] multiplicaçãoe divisão, para ampliar as estratégias de cálculo. (EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.

4º	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação [...]: adição deparcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, [...]	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativas, cálculo mental e algoritmos.
	Problemas de contagem.	(EF04MA08) Resolver, com suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
5º	Problemas: multiplicação [...] de números racionais cuja representação decimalé finita por números naturais.	(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação [...] com números naturais [...], utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
	Problemas de contagem dotipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleçãoB, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?”.	(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, comoa determinação do número de agrupamentos possíveisao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Fonte: Adaptado de Brasil (2017b).

Obs.: * Cada habilidade é identificada com um código alfanumérico, cuja composição é a seguinte: o primeiro par de letras indica a etapa Ensino Fundamental, o primeiro par de números indica o ano (2º ano), o segundo par de letras indica o componente curricular Matemática e o último par de números indica a posição da habilidade na numeração sequencial do ano (habilidade 07).

É possível observar que o nível de complexidade das situações propostas, envolvendo a multiplicação, progride ano a ano.

- Para o 2º ano do EF estão previstas as situações do Campo Conceitual Multiplicativo envolvendo a multiplicação aditiva e a comparação entre razões, explorando-se os significados da multiplicação com adição de parcelas iguais e proporcionalidade.
- No 3º ano, acrescentam-se situações do Campo Conceitual Multiplicativo envolvendo a configuração retangular.

- E no 4º ano do EF, além das situações multiplicativas anteriores, explora-se o raciocínio combinatório.

Dessa forma, espera-se que, ao final do ciclo dos anos iniciais do EF, tenham sido abordadas as quatro situações multiplicativas do Campo Conceitual Multiplicativo e os quatro significados da multiplicação: adição de parcelas iguais, proporcionalidade, configuração retangular e combinação. Logo, o professor tem um papel fundamental na construção da aprendizagem do estudante, sendo necessário realizar um planejamento de aulas com atividades problematizadoras e contextualizadas, para a progressiva exploração dos conceitos multiplicativos. Além disso, a expectativa é de “que o estudante desenvolva diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras.” (BRASIL, 2017b, p.270). Para que o estudante construa as habilidades propostas, a BNCC foca na explanação dos objetos de conhecimento através de situações argumentativas e desafiadoras (BRASIL, 2017b). Os objetos de conhecimento e habilidades indicados pela BNCC no ensino da multiplicação nos anos iniciais do EF destacam o uso de problemas para o desenvolvimento de habilidades pelo estudante, por meio da utilização de diferentes estratégias em sua resolução.

É possível que o ensino da multiplicação se torne ineficaz diante de obstáculos enfrentados nas escolas, como a falta de recursos, infraestrutura e professores qualificados. Os métodos de ensino precisam deixar de ser uma simples repetição, uma aula sem objetivo. O desenvolvimento de habilidades na resolução de operações matemáticas deve levar o estudante a desafiar sua capacidade, instigando-o a pensar e desenvolver estratégias na resolução de problemas relacionados ao seu cotidiano.

Dante (1994, p.13) complementa que

> “não basta saber fazer mecanicamente as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. É preciso saber como e quando usá-las convenientemente na resolução de situações-problema”.

Para a ocorrência de uma aprendizagem significativa, a BNCC indica que a proposta pedagógica da escola deva promover momentos de planejamento coletivos, oportunizando aos professores “decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem.” (BRASIL, 2017b, p.18).

Uma dificuldade encontrada pelos professores dos anos iniciais está na resistência em mudar as estratégias pedagógicas. O ensino da multiplicação, na maioria dos casos, se faz somente pela associação com a soma de parcelas iguais, limitando a aprendizagem do estudante. Precisam-se explorar os outros significados da multiplicação, relacionando esse estudo a objetos de convívio dos estudantes, fazendo-os utilizar diferentes estratégias e procedimentos para resolver as situações multiplicativas.

2 - Alguns Métodos Antigos de Multiplicação

2.1 - A Multiplicação Egípcia

2.1.1 - Histórico do Método Egípcio

A contribuição histórica que os egípcios deram ao desenvolvimento da Matemática já foi comprovada há séculos. As pirâmides são exemplos. Uma obra fantástica de engenharia feita praticamente sem recursos. Os egípcios formaram um sistema de numeração totalmente baseado em símbolos (figura 2.1) e agrupamentos, para satisfazer suas necessidades. Os hieróglifos a seguir equivalem, respectivamente, a 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000 e 1.000.000.

Figura 2.1

Fonte: Wikipedia

Apesar dos egípcios possuírem um grande conhecimento matemático, os únicos escritos encontrados da época foram os papiros. Um dos mais famosos e antigos documentos matemáticos, O Papiro de Rhind ou papiro de Ahmes, é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de matemática.

Pensando estritamente em um entendimento matemático, a multiplicação é uma adição repetida e tal noção possivelmente apareceu bastante precocemente na história dos homens. Em registros datados de 1650 a. C. tem-se notícia dos métodos de multiplicação. No papiro de Rhind existem problemas que relatam o método em que os egípcios tomavam sempre o dobro de números sucessivos e, então, somavam os múltiplos adequados a fim de obter o resultado. Dessa forma, a multiplicação dependia exclusivamente da possibilidade de que se pudesse somar.

A palavra multiplicação é originada do latim "*multiplicatio*" que está relacionada ao ato de aumentar, tornar algo várias vezes maior. É a junção de "*multus*"- muitos – com "*plex*" – dobra. O ato de efetuar sucessivas dobras é a regra principal do algoritmo utilizado pelos egípcios.

> A operação aritmética fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas ‘duplicações’. Nossa palavra de multiplicação na verdade sugere o processo egípcio. (BOYER, 1996, p.10)

O antigo método de multiplicação egípcio não depende do sistema de numeração, e pode ser aplicado a sistemas não posicionais. Fato este implicar na utilização extensa no mundo antigo. A multiplicação era resolvida pelos egípcios usando a técnica baseada em achar o dobro. A operação aritmética fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas "duplicações".

2.1.2 - Descrição do Método Egípcio

A técnica consiste em escolher um dos fatores da multiplicação desejada. É recomendado escolher o maior em valor absoluto.

- **Passo 1**: Em duas colunas, escreve-se o número 1 na primeira coluna e o fator escolhido na outra.
- **Passo 2:** O próximo passo é ir dobrando os valores das duas colunas até que a coluna que se iniciou pelo algarismo 1 seja igual ou maior ao outro fator da multiplicação.
- **Passo 3:** Na primeira coluna, escolher as linhas cuja soma seja igual ao menor ao outro fator da multiplicação.
- **Passo 4**: Determinada as linhas, somar os valores correspondentes as linhas selecionadas da segunda coluna. Esta soma total das linhas selecionadas da segunda coluna é o resultado procurado, ou seja, o produto da multiplicação.

No sistema egípcio, vale o princípio aditivo. Este caráter aditivo da numeração usada pelos egípcios reflete-se nos processos de cálculo que eles desenvolveram. Isto fica evidenciado no método observado: para multiplicar, depois das multiplicações sucessivas, faz-se uma adição.

Exemplo 2.1 – Realizar a multiplicação 4×17 .

É possível observar que, multiplicar um número por quatro é dobrar duas vezes o seu valor, pois 4 = 2 × 2. É escolhido um dos fatores da multiplicação desejada. Neste exemplo é tomado o 17, seguindo a observação de escolher o maior número em valor absoluto.

Assim tem-se:

- **Passo 1:** Escrever duas colunas. A da esquerda sempre começando pelo número 1 e a da direita, o fator escolhido. Nesse caso o 17.

Tabela 2.01

1	17

- **Passo 2**: Dobrar os valores das duas colunas até que a coluna que se iniciou pelo algarismo 1 seja igual ou maior ao outro fator da multiplicação, que nesse exemplo é o 4.

Tabela 2.02

1	17
2	34

Tabela 2.03

1	17
2	34
4	68

- **Passo 3:** Escolher na coluna da esquerda os valores cuja soma seja igual ao outro fator da multiplicação, ou seja, 4. Observar que neste caso o valor escolhido é somente o 4.

Tabela 2.04

1	17
2	34
4	68

- **Passo 4:** Somar os valores correspondentes as linhas selecionadas da coluna à direita. Neste caso é somente 68.

Tabela 2.05

1	17
2	34
4	68

Portanto,

$$4 \times 17 = 68.$$

Exemplo 2.2 - Multiplicar um número por 8 é dobrar o seu valor três vezes, uma vez que 8 = 2 × 2 × 2. Assim, para obter 8 × 21 segue-se os passos:

- **Passo 1:** Escrever duas colunas. De modo semelhante ao exemplo 2.1, escreve-se na primeira linha, na coluna esquerda o número 1 e na coluna direita, o fator escolhido. Nesse caso o 21.

Tabela 2.06

1	21

- **Passo 2**: Dobrar os valores das duas colunas até que a coluna que se iniciou pelo algarismo 1 seja igual ou maior ao outro fator da multiplicação, que nesse exemplo é o 8.

Tabela 2.07

	1	21	
$\times 2$	2	42	$\times 2$

Tabela 2.08

	1	21	
	2	42	
$\times 2$	4	84	$\times 2$

Tabela 2.09

	1	21	
	2	42	
	4	84	
$\times 2$	8	168	$\times 2$

- **Passo 3:** Escolher na coluna da esquerda os valores cuja soma seja igual ao outro fator da multiplicação, ou seja, 8. Observar que neste caso o valor escolhido é somente o 8.

Tabela 2.10

1	21
2	42
4	84
8	168

- **Passo 4:** Somar os valores correspondentes as linhas selecionadas da coluna à direita. Neste caso é somente 168.

Tabela 2.11

1	21
2	42
4	84
8	168

Portanto,

$$8 \times 21 = 168.$$

Exemplo 2.3 – Calcular 32 × 13.

Multiplicar um número por 32 é multiplicar seu valor por 2 cinco vezes.

- **Passo 1:** Analogamente aos exemplos anteriores, escreve-se na primeira linha, na coluna esquerda o número 1 e na coluna direita, o outro fator. Nesse caso o 13.

Tabela 2.12

1	13

- **Passo 2**: Dobrar os valores das duas colunas até que a coluna que se iniciou pelo algarismo 1 seja igual ou maior ao outro fator da multiplicação, que nesse exemplo é o 32.

Tabela 2.13

$\times 2$	1	13	$\times 2$
$\times 2$	2	26	$\times 2$
$\times 2$	4	52	$\times 2$
$\times 2$	8	104	$\times 2$
$\times 2$	16	208	$\times 2$
	32	416	

- **Passo 3:** Escolher na coluna da esquerda os valores cuja soma seja igual ao outro fator da multiplicação, ou seja, 32. Observar que neste caso o valor escolhido é somente o 32.

Tabela 2.14

1	13
2	26
4	52
8	104
16	208
32	416

- **Passo 4:** Somar os valores correspondentes as linhas selecionadas da coluna à direita. Neste caso é somente 416.

Tabela 2.15

1	13
2	26
4	52
8	104
16	208
32	416

Portanto, $32 \times 13 = 416$.

Nos exemplos anteriores, todos foram multiplicados por números que estão dentro da sequência de potências de 2: **4, 8, 16, 32, 64**, etc. Para os exemplos seguintes, serão usados fatores que não pertencem a esta sequência.

Exemplo 2.4 – Calcular o produto de 14 × 23.

- **Passo 1:** De maneira semelhante aos exemplos anteriores, escreve-se na primeira linha, na coluna esquerda o número 1 e na coluna direita, o outro fator. Nesse caso o 23.

Tabela 2.16

1	23

- **Passo 2**: Dobrar os valores das duas colunas até que a coluna que se iniciou pelo algarismo 1 seja igual ou maior ao outro fator da multiplicação, que nesse exemplo é o 14.

Tabela 2.17

1	23
2	46
4	92
8	184
16	368

Como 16 é maior que 14, o processo de dobrar é encerrado

- **Passo 3:** Escolher na coluna da esquerda os valores cuja soma seja igual ao outro fator da multiplicação, ou seja, 14. Observar que neste caso os valores escolhidos são 2, 4 e 8 pois $2 + 4 + 8 = 14$.

Tabela 2.18

1	23
2	46
4	92
8	184
16	368

- **Passo 4:** Somar os valores correspondentes as linhas selecionadas da coluna à direita. Neste caso são os números 46, 92 e 184.

Tabela 2.19

1	23
2	46
4	92
8	184
16	368

$$46 + 92 + 184 = 322$$

Portanto, $14 \times 23 = 322$.

Exemplo 2.5 – Efetuar multiplicação 37 × 45.

- **Passo 1:** De maneira semelhante aos exemplos anteriores, escreve-se na primeira linha, na coluna esquerda o número 1 e na coluna direita, o outro fator. Nesse caso o 45.

Tabela 2.20

1	45

- **Passo 2**: Dobrar os valores das duas colunas até que a coluna que se iniciou pelo algarismo 1 seja igual ou maior ao outro fator da multiplicação, que nesse exemplo é o 37.

Tabela 2.21

$\times 2$	1	45	$\times 2$
$\times 2$	2	90	$\times 2$
$\times 2$	4	180	$\times 2$
$\times 2$	8	360	$\times 2$
$\times 2$	16	720	$\times 2$
$\times 2$	32	1440	$\times 2$
	64	2880	

Como 64 é maior que 37, o processo de dobrar é encerrado

- **Passo 3:** Escolher na coluna da esquerda os valores cuja soma seja igual ao outro fator da multiplicação, ou seja, 37. Neste caso os valores escolhidos são 1, 4 e 32 pois $1+4+32=37$.

Tabela 2.22

1	45
2	90
4	180
8	360
16	720
32	1440
64	2880

- **Passo 4:** Somar os valores correspondentes as linhas selecionadas da coluna à direita. Neste caso são os números 45, 180 e 1440.

Tabela 2.23

1	45
2	90
4	180
8	360
16	720

32	1440
64	2880

$$45 + 180 + 1440 = 1665$$

Portanto, $37 \times 45 = 1665$.

2.1.3 - Justificativa do método egípcio

É importante ressaltar que não há registros do modo como os escribas realizavam essas dobras, eles simplesmente anotavam a resposta. O que se sabe é que existem evidências de que este método, das dobras, era utilizado em algumas regiões da África até o sul do Egito e que, portanto, os egípcios teriam aprendido com seus vizinhos. Os escribas egípcios tinham de alguma forma consciência de que cada número inteiro positivo poderia ser expresso como a soma de potências de dois e é justamente esse fato que fornece a justificativa para que eles soubessem e utilizassem o procedimento das dobras. Possivelmente o método foi descoberto pela experimentação e depois foi transmitido de geração em geração (Katz, 2008).

O método pode ser justificado por duas propriedades: A decomposição de um número natural em uma soma de potências distintas de base 2 que é uma propriedade do sistema binário e na propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição. De forma intuitiva os egípcios já usavam o sistema binário

Exemplo 2.6 – Seja a expansão binária do número 13, aplicada na multiplicação 13 × 131:

$$13 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0;$$

$$13 = 8 + 4 + 1$$

Agora, aplica-se a propriedade distributiva

$$13 \times 131 = (2^3 + 2^2 + 2^0) \times 131 =$$

$$= 8 \times 131 + 4 \times 131 + 1 \times 131$$

$$= 1048 + 524 + 131$$

$$= 1703$$

Tabela 2.24

1	131
2	262
4	524
8	1048

Generalizando o método egípcio, consideram-se números naturais *a* e *b*. Seja:

$$a = 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

a expansão de *a* no sistema binário. Nota-se que 2^n é a maior potência de 2 que não ultrapassa *a*, e os coeficientes $\boldsymbol{a_i}$ podem ser 1 ou 0. Se $\boldsymbol{a_i}$ = 1, então a potência 2^i comparece na expansão binária de *a*. Se $\boldsymbol{a_i}$ = 0, a potência 2^i não comparece. Observa-se agora que:

$$a \cdot b = (2^b \cdot b) + a_{n-1} \cdot (2^{n-1} \cdot b) + \ldots + a_1 \cdot (2 \cdot b) + a_0 \cdot (b)$$

E os termos que aí comparecem são aqueles que correspondem aos termos $a_i \neq 0$. Estes termos são aqueles cujas linhas são assinaladas em colorido nas tabelas anteriores. De maneira genérica, tem-se:

Tabela 2.25

1	b
2	$2b$
4	$4b$
...	...
...	...
2^{n-1}	$2^{n-1}b$
2^n	$2^n b$
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a \cdot b}$

2.2 - A Multiplicação Russa

2.2.1 - Histórico do Método Russo

Os procedimentos para cálculos matemáticos mais básicos (tais como multiplicação e divisão) sofreram influencias dos sistemas de notação utilizados e dos tipos de materiais existentes para escrita. O uso de ábacos ao longo da história evidencia este fato e indica uma possível preferência por métodos mecânicos do que escritos por parte dos povos. Um método de multiplicação bastante interessante é conhecido por **Multiplicação Russa**. Ele foi bastante usado na Europa Medieval e este nome é devido ao uso pelos camponeses russos até meados na Primeira Grande Guerra. Este método é chamado também de “dobrar e mear”. Segundo dicionário Priberam, o verbo “mear” possui o seguinte significado:

> me·ar
> *verbo transitivo*
> 1. Dividir ao meio; apronta r metade de.
> *verbo intransitivo e pronominal*
> 2. Chegar ao meio; partir-se ao meio.
> Confrontar: miar.

2.2.2 - Descrição do Método Russo

A Multiplicação Russa possui semelhanças com método de Multiplicação Egípcia. Multiplicações e divisões sucessivas por 2 são realizadas e, ao final, apenas quocientes ímpares são somados. A vantagem da Multiplicação Russa é que estes quocientes são escolhidos de forma automática.

A origem e sobre o período histórico em que o Método da Multiplicação Russa foi desenvolvido e utilizado é pouco conhecido. É suposto por historiadores e matemáticos que ele foi criado pelos antigos camponeses russos a partir da necessidade de contabilizar a produção agrícola e de realizar outros cálculos relativos à colheita, troca e comercialização de produtos. Em relação à operacionalização de tal método, Bolt (1992, p. 105) garante que

> “[...] no passado, os camponeses russos usavam um método de multiplicação que só requeria o conhecimento da tabuada de 2”.

Assim, para a realização do processo, utilizava-se a ideia de dobro (multiplicação por 2) e, também, a ideia de metade (divisão por 2). Finalmente conciliava-se a estas ideias a operação de adição, por meio da qual se obtinha o produto desejado. Trata-se este de “[...] um processo especial de multiplicação, processo que nada tem de simples, mas que não deixa de apresentar uma face curiosa” (SOUZA, 2003, p. 64).

Exemplo 2.7: aplicar o sistema russo para obter o produto do número 36 pelo número 13.

Escreve-se os dois fatores (36 e 13), um ao lado do outro em colunas diferentes:

- **Passo 1:** Os dois fatores (36 e 13) são escritos um ao lado do outro em colunas diferentes:

Tabela 2.26

36	13

- **Passo 2:** Dobra-se o valor da coluna da direita, e divide-se a coluna da esquerda a metade até que se obtenha como resposta o número 1. Assim obtém-se que:

Tabela 2.27

	36	13	
$\div 2$	18	26	$\times 2$

Tabela 2.28

	36	13	
$\div 2$	18	26	$\times 2$
$\div 2$	9	52	$\times 2$

- **Passo 3:** Foi obtido um número ímpar (que no caso é 9) na coluna esquerda. Assim, subtrai-se uma unidade e toma-se a metade do resultado, ou seja, de 9, tirando 1 fica 8, cuja metade é 4. E assim procede-se até chegar ao termo igual a 1 na coluna à esquerda.

Tabela 2.29

÷ 2	36	13	× 2
÷ 2	18	26	× 2
÷ 2	9	52	× 2
	4	104	

Tabela 2.30

÷ 2	36	13	× 2
÷ 2	18	26	× 2
÷ 2	9	52	× 2
÷ 2	4	104	× 2
	2	208	

Tabela 2.31

÷ 2	36	13	× 2
÷ 2	18	26	× 2
÷ 2	9	52	× 2
÷ 2	4	104	× 2
÷ 2	2	208	× 2
	1	416	

- **Passo 4:** Somam-se os números da coluna à direita (52 e 416) que correspondem aos **números ímpares** (neste caso os números 9 e 1) da coluna à esquerda.

Tabela 2.32

36	13
18	26
9	52
4	104
2	208
1	416

ÍMPARES

Essa soma será: $52 + 416 = 468$.

Portanto, o resultado obtido (468) é o produto do número 36 por 13.

Exemplo 2.8: multiplicar o número 45 por 32.

- **Passo 1:** Os dois fatores (45 e 32) são escritos um ao lado do outro em colunas diferentes:

Tabela 2.33

45	32

- **Passo 2:** Dobra-se o valor da coluna da direita, e divide-se a coluna da esquerda a metade até que se obtenha como resposta o número 1. Neste caso, como 45 é ímpar, subtrai-se 1 de seu valor e obtém-se a metade ($45 - 1 = 44\ e\ 44 \div 2 = 22$):

Tabela 2.34

	45	32	
÷ 2	22	64	× 2

Tabela 2.35

	45	32	
÷ 2	22	64	× 2
÷ 2	11	128	× 2

- **Passo 3:** Foi obtido um outro número ímpar (que no caso é 11) na coluna esquerda. Assim, subtrai-se uma unidade e toma-se a metade do resultado, ou seja, de 11, tirando 1 fica 10, cuja metade é 5.

Tabela 2.36

	45	32	
÷ 2	22	64	× 2
÷ 2	11	128	× 2
÷ 2	5	256	× 2

- **Passo 4:** Mais um número ímpar foi obtido (que no caso é 5) na coluna esquerda. Assim, subtrai-se uma unidade e toma-se a metade do resultado, ou seja, de 5, tirando 1 fica 4, cuja metade é 2. E assim procede-se até chegar ao termo igual a 1 na coluna à esquerda.

Tabela 2.37

÷ 2	45	32	× 2
÷ 2	22	64	× 2
÷ 2	11	128	× 2
÷ 2	5	256	× 2
	2	512	

Tabela 2.38

÷ 2	45	32	× 2
÷ 2	22	64	× 2
÷ 2	11	128	× 2
÷ 2	5	256	× 2
÷ 2	2	512	× 2
	1	1024	

- **Passo 5:** Somam-se os números da coluna à direita (32,128, 256 e 1024) que correspondem aos **números ímpares** (neste caso os números 45, 11, 5 e 1) da coluna à esquerda.

Tabela 2.39

ÍMPARES

45	32
22	64
11	128
5	256
2	512
1	1024

Somando os números assinalados nas células azuis, que correspondem aos termos ímpares da coluna à esquerda, obtemos o resultado que exprime o produto de 45 por 32. Essa soma será: $32 + 128 + 256 + 1024 = 1440$.

Portanto, o resultado obtido (1440) é o produto do número 45 por 32.

2.2.3 - Justificativa do Método Russo

O chamado "processo dos camponeses russos" é hoje considerado uma curiosidade aritmética, pois em comparação ao processo usual ensinado nas escolas, este último não deixa de ser bastante simples e mais prático. O exemplo a seguir pode indicar uma justificativa ao método:

Exemplo 2.9: multiplicar 21 por 76

Aplicando o método russo, obtém-se:

Tabela 2.40

	21	76	
$\div 2$	10	156	$\times 2$
$\div 2$	5	304	$\times 2$
$\div 2$	2	608	$\times 2$
$\div 2$	1	1216	$\times 2$

Tabela 2.41

21	76
10	156
5	304
2	608
1	1216

Obtendo a soma: $76 + 304 + 1216 = 1596$.

Logo, o resultado obtido (1596) é o produto do número 21 por 76.

Um argumento para a efetividade deste processo se dá pela notação binária dos números. Neste caso, o número 21 é assim escrito:

$$21 = (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (0 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

Representação binária de 21: 10101

Percebe-se que as parcelas da coluna esquerda da tabela 2.41 selecionadas indicam as posições do 1 na representação binária do número 21. Por isso, as linhas com número ímpar são as escolhidas para as parcelas da soma que dará o resultado final. Pode-se observar nos cálculos a seguir:

Tabela 2.42

$2^0 = 1$	21	76	$2^0 \times 76 = 1 \times 76 = 76$
$2^1 = 2$	10	152	
$2^2 = 4$	5	304	$2^2 \times 76 = 4 \times 76 = 304$
$2^3 = 8$	2	608	
$2^4 = 16$	1	1216	$2^4 \times 76 = 16 \times 76 = 1216$
			$21 \times 76 = 1596$

Ou seja,

$$21 = 2^0 + 2^2 + 2^4$$

$$21 \times 76 = (2^0 + 2^2 + 2^4) \times 76$$

$$21 \times 76 = (2^0 \times 76) + (2^2 \times 76) + (2^4 \times 76)$$

$$= 1 \times 76 + 4 \times 76 + 16 \times 76$$

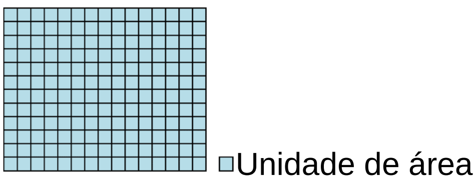
$$= 76 + 304 + 1296$$

$$= 1596$$

Outra forma de justificar este método é utilizar a unidade de área para demonstrar. Esta justificativa pode ser considerada mais didática e é lúdica. Propõe-se um exemplo para ilustrar.

Exemplo 2.4: Considera-se uma figura geométrica com 15 unidades de comprimento e 12 unidades de largura. A área da figura é o produto 15 × 12, ou seja, 180 unidades de área. Segue figura 2.2:

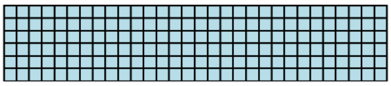
Figura 2.2



Área inicial
Fonte: Própria do autor

Como no algoritmo russo, dobra-se a medida de um lado e reduzir à metade o outro lado da figura 2.3.

Figura 2.3



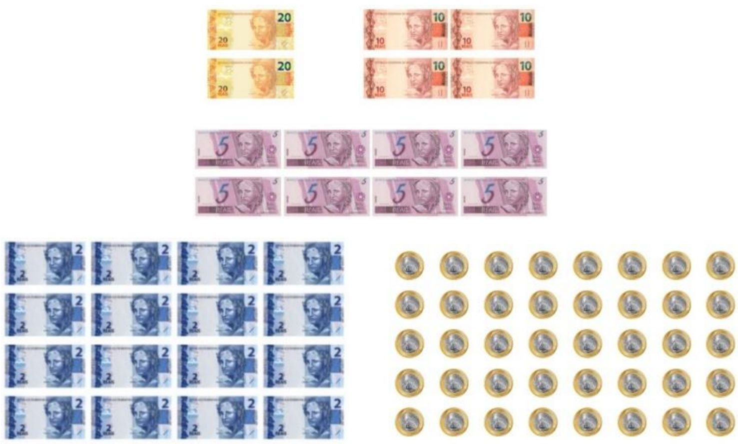
Nova área: dobro do comprimento
e a metade da largura
Fonte: Própria do autor

É verificado que a área continua sendo a mesma já que 6 × 30 = 180, o que assegura fazer este processo sucessivas vezes. O processo de duplicar a quantidade de retângulos e reduzir à metade a altura desses retângulos não altera a área do retângulo original da figura, e tampouco altera as áreas dos retângulos subsequentes que têm exatamente a mesma área do retângulo original. Toma-se nota que quando há necessidade de subdividir um retângulo na representação geométrica, o que está acontecendo no algoritmo é justamente o arredondamento para o menor inteiro mais próximo. A parte restante da subdivisão está escrita abaixo da figura subsequente ao processo de subdividir.

Outra ideia que pode ser associada ao processo de duplicar e reduzir à metade é a de usar cédulas de dinheiro.

Exemplo 2.5: supor a quantidade de 2 notas de 20 reais e seguindo o procedimento de dobrar e tomar a metade teríamos 4 notas de 10 reais e repetindo o processo obtém-se 8 notas de 5 reais. É de fácil percepção que a cada etapa do processo obtém-se a mesma quantia de 40 reais, só que com o dobro de notas de metade do valor das notas da etapa anterior.

Figura 2.4



2.3 - A Multiplicação Chinesa

2.3.1 - Histórico do Método Chinês

A civilização chinesa desenvolveu na antiguidade uma Matemática bastante complexa.

> “Na literatura matemática chinesa, podem ser encontrados métodos para a resolução de equações lineares, quadráticas, cúbicas e de graus ainda maiores. Também foram encontradas equações envolvendo duas, três, quatro ou mais incógnitas” (NICOSIA, 2010, p. 83).

China é uma das civilizações humanas de tradição antiga, contudo, pouco se sabe sobre sua história devido aos povos da época fazerem seus registros em tiras de bambu, um material perecível que se desgasta com o tempo. O sistema numérico chinês tinha como característica, ser decimal, posicional e ser trabalhado em barras: utilizava arranjos com varetas de bambu (que justamente era o material usado para obter produtos em multiplicações) e representava o zero por um espaço em branco. Para Boyer (1996, pág. 133)

> “datar os documentos matemáticos da China não é nada fácil; as estimativas quanto ao Chou Pei Suang Ching, geralmente considerado o mais antigo dos clássicos matemáticos, diferem por quase mil anos”.

De acordo com Eves (p. 241, 2011), pouco material de natureza primária oriundo da china antiga chegou até nós. Isso em virtude de os povos da época fazerem muitos de seus registros em bambu, material perecível. E, para agravar, o imperador Shi Huang-ti ordenou em 213 a.C. uma lamentável queima de livros. Muito do conhecimento acessível sobre a Matemática chinesa primitiva baseia-se em informações orais e interpretações posteriores de textos originais.

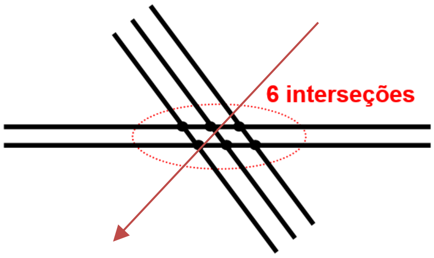
2.3.2 - Descrição do Método Chinês

Acredita-se que este método descrito a seguir teve origem na China, de acordo com Fernandes (p. 4, 2013), até hoje este método é utilizado em escolas no Japão. Segundo Casanova (p. 12, 2011), os chineses usavam varetas de bambu para multiplicar números inteiros. Colocando varetas paralelas e outras transversais, que serviam para representar os fatores. As varetas que ficam dispostas na horizontal representam o multiplicador, e em diagonal as varetas representam o multiplicando. Para chegar ao produto os pontos de interseção das varetas são levados em consideração e contados. Os pontos de interseção das varetas são contados na diagonal, começando pela direita. Se o resultado da soma for maior que nove, é somado o valor da dezena na próxima diagonal.

Exemplo 2.6: Multiplicar 2 por 3 pelo método chinês.

Representa-se o 2 por duas linhas horizontais e o 3 por três linhas em diagonais transversais às anteriores. A quantidade de interseções indica o valor do produto

Figura 2.5



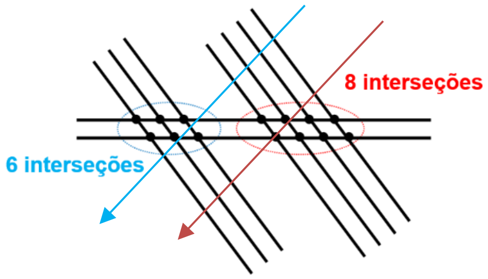
Fonte própria do autor

Como se determinou 6 interseções entre as varetas, o produto de 2×3 é 6.

Exemplo 2.7: Multiplicar 2 por 34 pelo método chinês.

Neste caso, representa-se 34 = 30 + 4 por três traços (representando as dezenas), um espaço e quatro traços (representando as unidades) como na figura a seguir. Contabilizam-se as quantidades de interseções das linhas horizontais e diagonais.

Figura 2.6



6 8

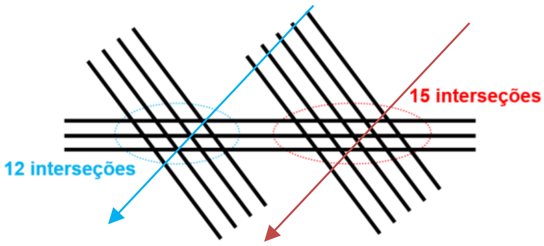
Fonte própria do autor

Para cada área tem-se um valor posicional. 6 para as dezenas e 8 para as unidades. Logo o produto é 68.

Exemplo 2.8: Multiplicar 3 por 45.

Notando-se que 45 = 40 + 5, representa-se por quatro traços (representando as dezenas), um espaço e cinco traços (representando as unidades) como na figura a seguir. Novamente contabilizam-se as quantidades de interseções das linhas horizontais e diagonais.

Figura 2.7



12 15

Fonte própria do autor

Neste caso obtém-se na área das dezenas o valor 12 e na área das unidades o valor 15. Logo se transfere o valor 1 para as dezenas.

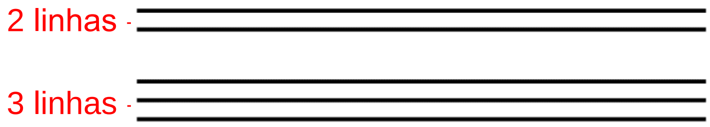
$$12 \;\; 15 \rightarrow (12+1) \;\; 5 \rightarrow 13 \;\; 5$$

Assim obtém-se o produto 135.

Exemplo 2.9: Multiplicar pelo método chinês 23 por 14.

Para fazer essa multiplicação representa-se o número 23 = 20 + 3 por **duas linhas** (representando as dezenas), um espaço e **três linhas** para representar as unidades, como na figura 2.8 a seguir.

Figura 2.8

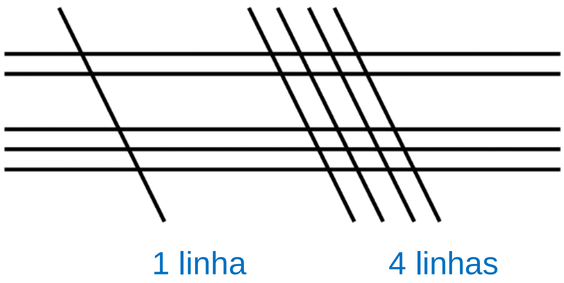


Representação do fator 23 no formato
de traços horizontais para a multiplicação chinesa

Fonte própria do autor

A seguir, representa-se o número 14 = 10 + 4, por **uma linha diagonal** (representando a dezena), e **4 linhas diagonais** representando as unidades, conforme a figura 2.9 a seguir

Figura 2.9

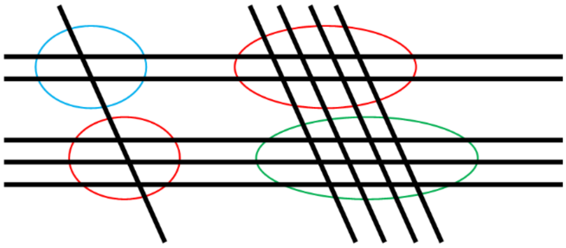


Representação do fator 14 com traços
diagonais para a multiplicação chinesa

Fonte própria do autor

Faz-se a contagem dos pontos formados pela intersecção das linhas horizontais e diagonais, obtendo assim o valor de nossa multiplicação desejada. Para cada área da figura tem-se um valor posicional, nesse caso, unidade, dezena ou centena, conforme mostrado a seguir na figura 2.10.

Figura 2.10



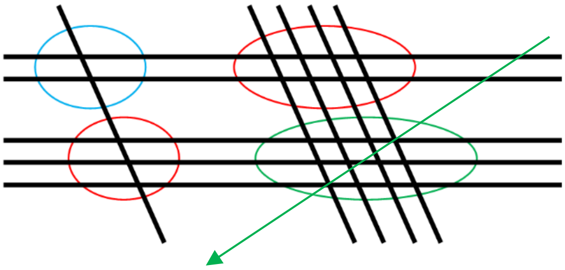
A contagem dos pontos de interseção
da multiplicação chinesa

Fonte própria do autor

Deve-se contar o número de interseções nas diagonais, iniciando pela diagonal da direita, que dará o algarismo da unidade do produto procurado.

Calcula-se a contagem dos pontos na área verde das unidades.

Figura 2.11

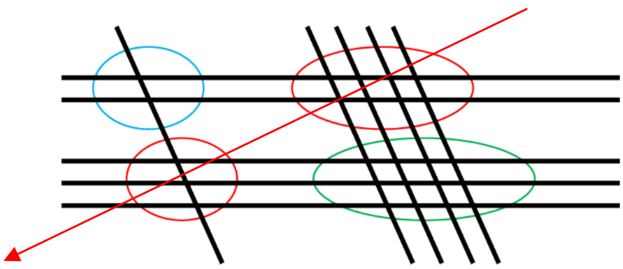


12 interseções

Fonte própria do autor

São 12 interseções na área das unidades.

Figura 2.12

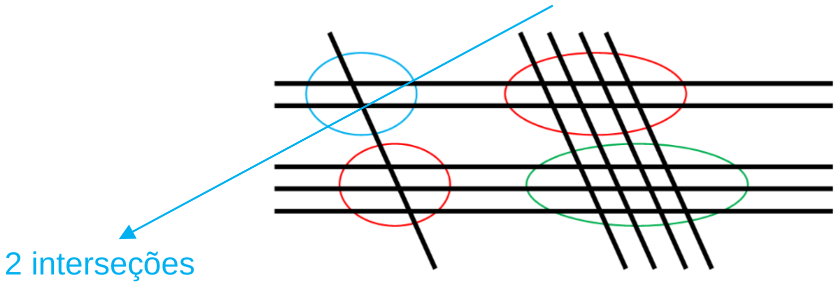


11 interseções

Fonte própria do autor

Tem-se na área das dezenas, 8 + 3 = 11.

Figura 2.13



Fonte própria do autor

Na área das centenas têm-se 2 interseções.

Neste exemplo observa-se que a soma da diagonal das unidades excede a classe das unidades. Então o algarismo que representa a dezena deve ser somado a próxima diagonal a esquerda, das dezenas, assim obtém-se:

$$2\ 11\ 12 \rightarrow 2\ (11 + 1)\ 2 \rightarrow 2\ 12\ 2$$

Soma-se com 1 na área azul (centenas) pois a áreas das dezenas excedeu de 9. Portanto, na área das centenas têm-se 2 + 1 = 3 pontos das centenas. Logo temos:

$$2\ 12\ 2 \rightarrow (2 + 1)\ 2\ 2 \rightarrow 3\ 2\ 2$$

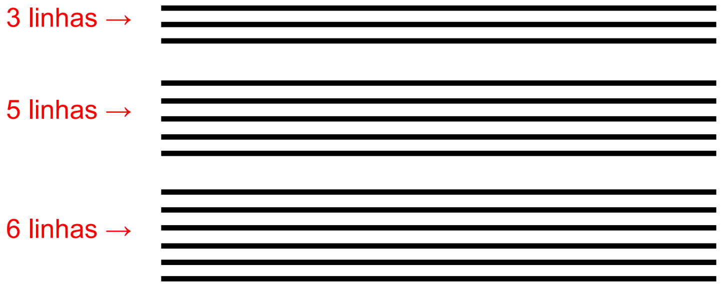
Finalmente, o produto de 23 × 14 é 322.

Exemplo 2.10: A multiplicação 356 × 163.

Em notação chinesa a multiplicação é formada da seguinte maneira:

Representa-se o primeiro fator 356 com **3 linhas** horizontais representando as centenas, **5 linhas** horizontais representando as dezenas e **6 linhas** horizontais representando as unidades, justapostas de cima para baixo e cada grupo de linhas separadas devidamente.

Figura 2.14

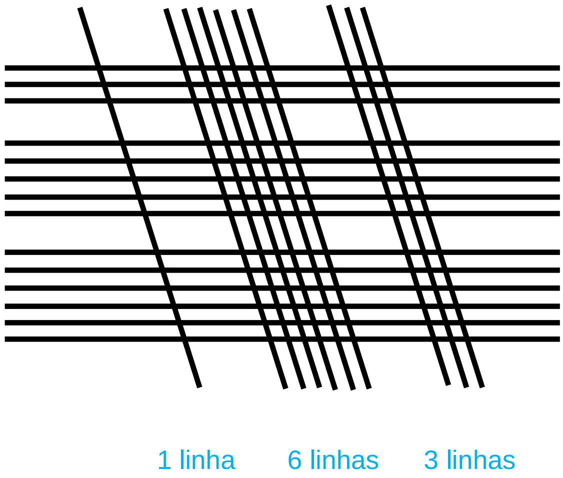


Representação da multiplicação chinesa
para o fator 356

Fonte própria do autor

O outro fator, 153, será representado pelas linhas diagonais. Serão organizadas da esquerda para direita iniciando com **1 linha** diagonal representando as centenas, **5 linhas** diagonais representando as dezenas e **3 linhas** diagonais representando as unidades, sendo que cada grupo de linhas separadas devidamente.

Figura 2.15



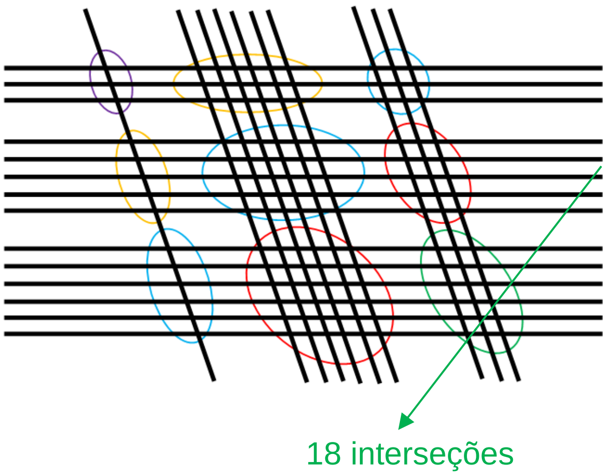
Representação da multiplicação chinesa
para o fator 163

Fonte própria do autor

Este algoritmo possui uma semelhança com método Gelosia (que será apresentado no capítulo seguinte) onde são somados os valores parciais em diagonal.

Deve-se contar o número de interseções nas diagonais, iniciando pela diagonal da direita, que dará o algarismo da unidade do produto procurado. Calcula-se a contagem dos pontos na área verde das unidades.

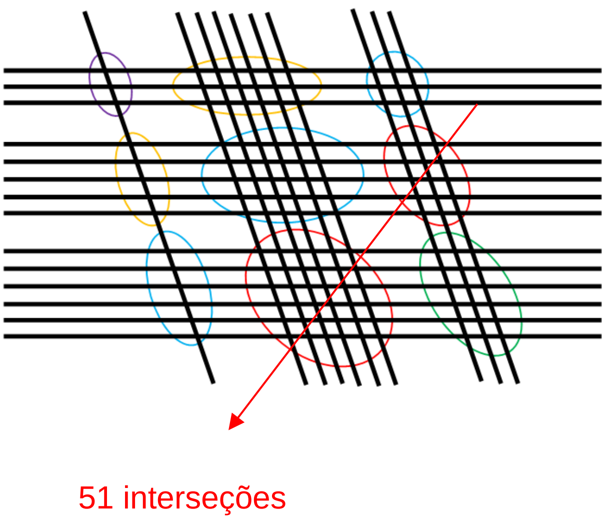
Figura 2.16



Fonte própria do autor

A seguir, contabiliza-se a quantidade de interseções nas áreas vermelhas para a casa das dezenas.

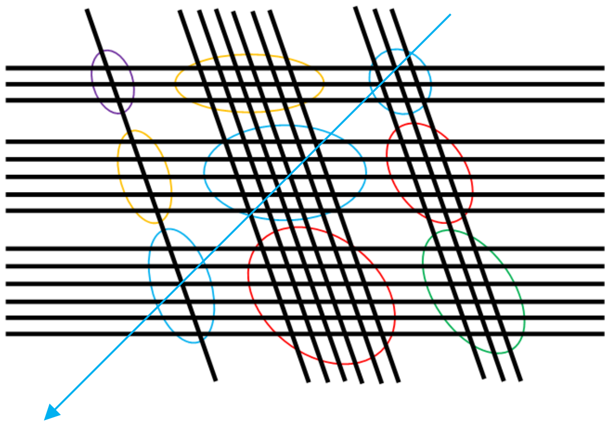
Figura 2.17



Fonte própria do autor

Contabiliza-se a quantidade de interseções nas áreas azuis para a casa das centenas.

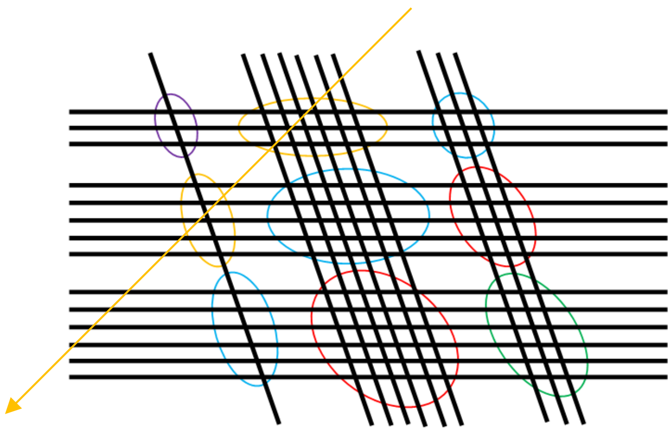
Figura 2.18



Fonte própria do autor

Conta-se a quantidade de interseções nas áreas amarelas para a casa dos milhares.

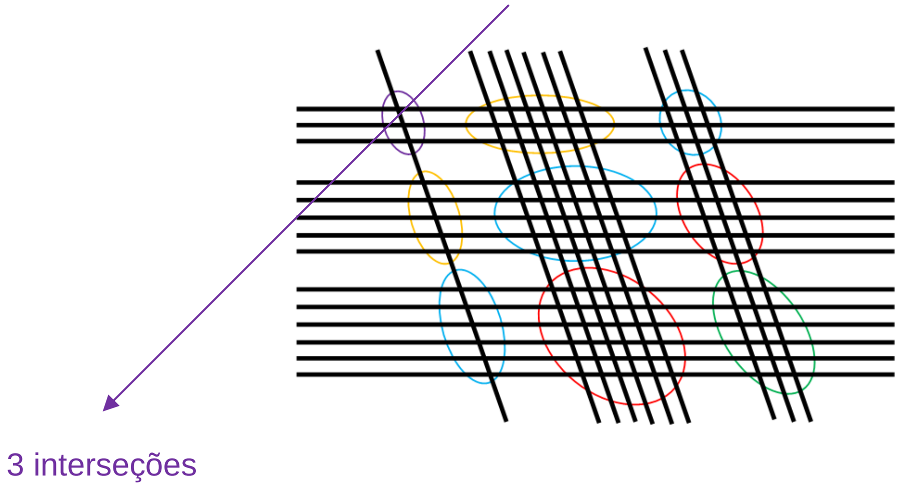
Figura 2.19



Fonte própria do autor

Por fim, determina-se a quantidade de interseções nas áreas roxas para a casa das dezenas de milhares.

Figura 2.20



Faz-se a contabilidade de cada área circulada na figura anterior, calculando-se o número de interseções de cada uma das áreas. Portanto:

- **Unidades**: foi contabilizado 18 interseções; o resultado é Y8, onde Y representa todos os algarismos das dezenas em diante. Para as dezenas adiciona-se mais 1.
- **Dezenas**: tem-se 51 interseções. Transferindo 1 dezena do valor anterior 18, é obtido 51 + 1 = 52 dezenas; o resultado é X28, onde X representa os algarismos das centenas em diante. Para as centenas adicionam-se mais 5.
- **Centenas**: foi obtido 45 interseções. Acrescentando 5 do valor anterior, obtém-se 45 + 5 = 50 centenas; o resultado passa a ser Z028, onde Z representa os algarismos a partir das unidades de milhar. Para a unidade de milhar adicionam-se mais 5.
- **Unidades de milhar**: foi calculado 23 interseções. Acrescentando 5 do valor anterior, tem-se 23 + 5 = 28 unidades de milhar; o resultado é K8028, onde K representa os algarismos a partir das dezenas de milhar. Para as dezenas de milhar adicionam-se mais 2.
- **Dezenas de milhar**: Foi contabilizado 3 interseções. Acrescentando 2 do valor anterior, obtém-se 3 + 2 = 5 dezenas de milhar. O resultado é 58028.

Portanto, pelo método chinês de multiplicar, tem-se que 356 × 163 = 58028. De maneira ilustrada, é possível ver o processo:

$$3\ 23\ 45\ 51\ 18 \rightarrow 3\ 23\ 45\ 52\ 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\ 23\ 50\ 2\ 8 \rightarrow 3\ 28\ 0\ 2\ 8 \rightarrow$$

$$5\ 8\ 0\ 2\ 8$$

O método chinês possui uma vantagem em relação aos outros algoritmos, pois basta que a pessoa saiba contar. Porém, ao multiplicar algarismos maiores, como 9 por 9, deve-se construir 9 retas paralelas e 9 retas concorrentes e depois contar os pontos de interseção delas. Isso leva um certo tempo. Para as práticas na escola pode-se recorrer ao uso de varetas do jogo “pega vareta” ou recorrer ao uso de fios coloridos trazidos pelos próprios alunos. É percebido que este método é muito rico, em informações e conceitos matemáticos relacionados à geometria, como retas paralelas, concorrentes, oblíquas e perpendiculares, interseções entre retas, ângulos, etc.

2.4 - A Multiplicação Francesa

2.4.1 - Histórico do Método Francês

Multiplicações com os dedos das mãos não deixa de ser um método no mínimo insólito. Era usado por camponeses França central (Auvergne), na época da Idade Média e no Renascimento e ainda hoje é utilizado em certas zonas rurais da Europa e da Rússia. Os camponeses conheciam somente até a tabuada do 5 e, para multiplicar números compreendidos entre 6 e 10, usavam os dedos. Ao se referir ao uso dos dedos das mãos para representação dos números, Eves (2011), afirma:

> Além dos números falados, numa certa época usaram-se largamente os números digitais (representados por meio de dedos). Com efeito, a expressão de números por meio de várias posições dos dedos e das mãos talvez preceda os símbolos numéricos ou os nomes dos números. Assim, os símbolos escritos primitivos para 1, 2, 3 e 4 eram invariavelmente o número conveniente de riscos verticais ou horizontais, representando o número correspondente de dedos levantados ou estendidos, remontando a palavra digito (isto, e “dedo”), para indicar os algarismos de 1 a 9, a mesma origem (EVES, 2011, p. 29).

Tobias Dantzig, no livro “Número, a linguagem da ciência” (Editora Zahar), esclarece um pouco da história dos números. No capítulo intitulado “Impressões Digitais”, o autor destaca a relevância que as mãos possuem no desenvolvimento da contagem falando justamente sobre o processo de multiplicar com as mãos. Também assegura que artifícios semelhantes foram encontrados em diversos lugares, longínquos entre si, como Bessarábia, Sérvia e Síria. Como estes países pertenciam ao Império Romano é possível que este método tenha origem romana.

2.4.2 - Descrição do Método Francês

Exemplo 2.11: Calcular 6 × 8 com as mãos.

Enumera-se os dedos das mãos, a partir dos polegares, de 10 até 6, como na imagem a seguir:

Figura 2.21

Enumeração dos fatores nos dedos.

Fonte própria do autor.

Em seguida, junta-se o dedo do 6 da mão esquerda com o dedo do 8 da mão direita.

Figura 2.22

Calculando 6 × 8.

Fonte própria do autor.

Anota-se a quantidade de dedos na junção do 6 com o 8 e abaixo da junção. Neste caso tem-se **4 dedos** (1 dedo na mão esquerda e 3 na mão direita). Este será o valor das dezenas. Para calcular as unidades, multiplicam-se as quantidades de dedos que estão acima da junção. Neste caso 4 dedos da mão esquerda e 2 dedos da mão direita. Tem-se 4 × 2 = **8**. Logo 4 e 8 formam o resultado 48. Portanto 6 × 8 = **48**.

Exemplo 2.12: Calcular 7 × 9 pelo método francês.

Com os dedos das mãos devidamente enumerados, junta-se o dedo do 7 da mão esquerda com o dedo do 9 da mão direita.

Figura 2.23

Calculando 7 × 9 com as mãos.

Fonte própria do autor.

Determina-se a quantidade de dedos na junção do 6 com o 8 e abaixo da junção. Neste caso tem-se **6 dedos** (2 na mão esquerda e 4 na mão direita). Representará o valor das dezenas. Para calcular as unidades, multiplicam-se as quantidades de dedos que estão acima da junção. Neste caso 3 dedos da mão esquerda e 1 dedo da mão direita. Tem-se 3 × 1 = **3**. Logo 6 e 3 formam o resultado 63. Logo 7 × 9 = **63**.

2.4.3 - Justificativa do Método Francês

Apresenta-se aqui uma proposta de explicação matemática dessa técnica. O objetivo é de se multiplicar dois números quaisquer, A e B, onde A e B são números naturais iguais a 6, 7, 8, 9 ou 10, e admitindo já ter aprendido as multiplicações com os números 1, 2, 3, 4 e 5. Considera-se então:

- $A = a + 5$ e $B = b + 5$, onde a e b indicam a quantidade de dedos em cada mão na junção e abaixo da junção.
- Assim, $5 - a$ e $5 - b$, representam a quantidade de dedos em cada mão acima da junção.

A técnica mostrada consiste em se multiplicar a quantidade de dedos que estiverem na junção e abaixo por 10 e somar esse valor ao produto da quantidade dos dedos que estão acima da junção. Calculando obtém-se:

$$10 \cdot (a + b) + (5 - a) \cdot (5 - b) \text{ Expressão 2.1}$$
$$= 10a + 10b + 25 - 5a - 5b + ab$$
$$= ab + 5a + 5b + 25$$
$$= (a + 5) \cdot (b + 5)$$
$$= A \cdot B$$

Portanto, conclui-se que $A \cdot B = 10 \cdot (a + b) + (5 - a) \cdot (5 - b)$ que representa a validade da técnica que é a proposta didática deste trabalho.

Exemplo 2.13: Verificar a expressão 2.1 para a multiplicação 6 × 8.

Neste caso A = 6 e B = 8. É possível escrever que A = **1** + 5 e B = **3** + 5.

Pela figura 2.22, é possível perceber que 1 corresponde ao primeiro da mão esquerda de baixo pra cima e 3 é o terceiro dedo da mão direita, também de baixo para cima. Logo a = 1 e b = 3.

- 5 – a = 5 – 1 = 4. Representa a quantidade de dedos da mão esquerda acima da junção.
- 5 – b = 5 – 3 = 2. Representa a quantidade de dedos da mão direita acima da junção.

Quando se aplica o método, calcula-se a seguinte expressão:

$$10 \cdot (a + b) + (5 - a) \cdot (5 - b) = 10 \cdot (1 + 3) + (5 - 1) \cdot (5 - 3) =$$
$$= 10 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 25 - 5 \cdot 3 - 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 25 =$$
$$= 1 \cdot (3 + 5) + 5 \cdot (3 + 5) = (1 + 5) \cdot (3 + 5) =$$
$$= 6 \cdot 8$$

2.5 - A Multiplicação Grega

2.5.1 - Histórico do Método Grego

Os babilônios, por volta de 2000 a.C., já produziam cálculos multiplicativos com base em tabuadas próprias, que possivelmente foram compiladas por adição. Já na Grécia antiga, existem registros na obra “A medição do Círculo de Arquimedes” em que a multiplicação era realizada expressando-se os numerais em forma alfabética (Wall, 2014).

O filósofo e matemático Nicômaco de Gerasa viveu entre 60 e 120 d.C., aproximadamente. Ele forneceu uma das primeiras tabelas de multiplicação greco-romanas, enquanto a mais antiga tabela de multiplicação grega existente é encontrada em uma tábua de cera datada do século I, guardada atualmente no Museu Britânico (Smith, 1958).

> A diferença entre a matemática dos egípcios e a dos gregos era que, para os primeiros, tratava-se de uma arte que os auxiliava em seus trabalhos de engenharia e de agrimensura, enquanto que, com os segundos, assumia um caráter científico, dada a atitude filosófica e especulativa que os gregos tinham face à vida. (HEFEZ, A., Aritmética., SBM, Coleção PROFMAT, 2013).

O algoritmo grego é o que possui maior semelhança ao algoritmo convencional usado atualmente. A diferença entre ambos é que no convencional a anotação dos produtos é feita de maneira mais simples.

2.5.2 - Descrição do Método Grego

Este método utiliza a decomposição e a propriedade distributiva da multiplicação. Consiste em multiplicar cada algarismo do multiplicador, iniciando com o de maior ordem, com o multiplicando também de maior ordem. Feitas as multiplicações, deve-se somar os valores anteriormente obtidos. A seguir, será exemplificado o método para melhor compreensão.

Exemplo 2.14 – Calcular 135 × 23:

Passo 1: Multiplicar cada algarismo do multiplicador (iniciando da esquerda para a direita), com o multiplicando de maior ordem.

Multiplicador – 135

Multiplicando – 23

Assim, obtém-se a seguinte ordem de multiplicação:

- 100 (o valor posicional do 1 é 100) multiplicado por 20 (o valor posicional do 2, no multiplicando é 20).

$$100 \times 20 = 2000$$

- 30(o valor posicional do 3 é 30) multiplicado por 20.

$$30 \times 20 = 600$$

- 5 (o valor posicional do 7 é 7) multiplicado por 20.

$$5 \times 20 = 100$$

Alternando para a multiplicação do algarismo 3 (cujo valor posicional é 3), segue-se o seguinte:

- 100 multiplicado por 3

$$100 \times 3 = 300$$

- 30 multiplicado por 3

$$30 \times 3 = 90$$

- 5 multiplicado por 3

$$5 \times 3 = 15$$

Passo 2: Somar todos os valores obtidos anteriormente.

$1\,3\,5$ $\times\,2\,3$	Produtos
2000	100×20
600	30×20
100	5×20
300	100×3
90	30×3

15	5×3
3105	**Total**

Portanto 135 × 23 é igual a 3105.

Exemplo 2.15 – Calcular 642 × 531:

Passo 1: Multiplicar cada algarismo do multiplicador (iniciando da esquerda para a direita), com o multiplicando de maior ordem.

Multiplicador – 642

Multiplicando – 531

Assim, obtém-se a seguinte ordem de multiplicação:

- 600 (o valor posicional do 6 é 600) multiplicado por 500 (o valor posicional do 5, no multiplicando é 500).

$$600 \times 500 = 300.000$$

- 40(o valor posicional do 4 é 40) multiplicado por 500.

$$40 \times 500 = 20.000$$

- 2 (o valor posicional do 2 é 2) multiplicado por 500.

$$2 \times 500 = 1.000$$

Alternando para a multiplicação do algarismo 3 (cujo valor posicional é 30), segue-se o seguinte:

- 600 multiplicado por 30.

$$600 \times 30 = 300$$

- 40 multiplicado por 30.

$$40 \times 30 = 90$$

- 2 multiplicado por 30.

$$2 \times 30 = 15$$

Agora para a multiplicação do algarismo 1 (cujo valor posicional é 1), tem-se:

- 600 multiplicado por 1.

$$600 \times 1 = 600$$

- 40 multiplicado por 1.

$$40 \times 1 = 40$$

- 2 multiplicado por 1.

$$2 \times 1 = 2$$

Passo 2: Somar todos os valores obtidos anteriormente.

$\begin{array}{r} 6\,4\,2 \\ \times\,5\,3\,1 \end{array}$	**Produtos**
300.000	600×500
20.000	40×500
1.000	2×500
18.000	600×30
1.200	40×30
60	2×30
600	600×1
40	40×1
$+ \quad 2$	2×1
340.902	**Total**

Portanto 642 × 531 é igual a 340902.

Por fim, entende-se que o algoritmo grego possui semelhanças com o algoritmo convencional utilizado atualmente, tendo como diferença o fato de que os produtos parciais serem registrados de forma mais compacta e sintética. É um procedimento parecido com o realizado pela propriedade distributiva.

Basta observar que:

$$642 \times 531 \;=\; 642 \times (500 + 30 + 1) \;=\; 321.000 + 19.260 + 642$$

que é a soma das parciais ser observadas no algoritmo.

3 - O Método Gelosia

3.1 - Histórico do Método Gelosia

O Homem ainda não tinha pensado na invenção das máquinas para fazer cálculos, quando os matemáticos e aqueles que usavam a matemática (mercadores, cobradores de impostos e outros) já tinham inventado processos para fazer multiplicações e divisões. A introdução progressiva do sistema de numeração indo-arábico e o abandono do sistema de numeração romano promoveram, na Europa medieval, a partir do século XIII d.C., a expansão de processos para efetuar operações escritas em papel.

O método da grade (ou multiplicação em reticulado, ou em célula, ou quadrilateral) é um desses processos e talvez tenha sido o mais popular destes tempos. Consiste simplesmente em resolver multiplicações usando apenas somas parciais. É conhecido principalmente como Gelosia (em francês "*jalousie*", que significa persiana).

O método é muito antigo e especula-se que tenha surgido na Índia, já que aparece em muitos registros daquela região. Provalvelmente foi desenvolvido pela necessidade de fazer contas rápidas pelos mercadores, por volta do século XII d.C., já que não se tinham máquinas de calcular. Da Índia, sua trajetória seguiu por regiões árabes, persas e chineses até chegar para a Europa Ocidental através da expansão do comércio das especiarias, onde foi bastante utilizado. Chegou na Itália nos séculos XIV e XV d.C. e lá o nome Gelosia lhe foi associado por causa da semelhança com os gradeados colocados em frente às janelas em Veneza e em outros lugares.

O método de gelosia foi introduzido na Europa por Fibonacci (1170 – 1250) que a partir do conhecimento do sistema de numeração hindu-arábico tornou o cálculo bastante simples. Este procedimento aparece no primeiro livro de aritmética impresso em Treviso (a Itália) em 1478.

3.2 - Etimologia da palavra Gelosia

Gelosia é uma estrutura com forma de treliças de madeira, utilizada em janelas, que são capazes de vedar, formando uma espécie de gaiola, cujo objetivo principal era proteger as mulheres casadas em suas casas. A gelosia evita que quem está fora consiga ver quem está dentro. Este tipo de janela era muito utilizado pelos maridos árabes como forma de resguardar suas esposas dos olhares de outros homens, ou de pessoas que passavam nas ruas[1].

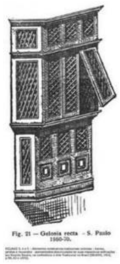
Segundo o dicionário Priberam[2] da Língua Portuguesa, “gelosia” é:

“1. Grade de fasquias de madeira que se coloca no vão de janelas ou portas, para proteger da luz e do calor, e através da qual se pode ver sem ser visto;

2. Estrutura para fechar janela, porta ou varanda através de uma espécie de grade de malha fina que permite iluminação parcial e arejamento;

3. Persiana que pode ser enrolada no topo”.

Figura 3.1



Gelosia reta de 1860-1870, São Paulo

Fonte Wikipedia

[1] MÉTODO GELOSIA: FACILITANDO A MULTIPLICAÇÃO, CLEUDIANA DOS SANTOS FEITOZA ZONZINI

[2] O **Dicionário Priberam da Língua Portuguesa** (DPLP), anteriormente conhecido como **Dicionário da Língua Portuguesa On-Line** (DLPO), é um dicionário de língua portuguesa em linha, desenvolvido e mantido pela Priberam, cuja nomenclatura compreende o vocabulário geral, bem como os termos mais comuns das principais áreas científicas e técnicas da língua portuguesa contemporânea. Para além das funcionalidades avançadas de consulta e pesquisa assentes na plataforma lexicográfica da Priberam, o DPLP inclui a ligação para os auxiliares de tradução do FLiP (Ferramentas para a Língua Portuguesa), que permitem a tradução de um número significativo de palavras e expressões de e para espanhol, francês e inglês. (Wikipedia)

3.3 - Descrição do Método Gelosia

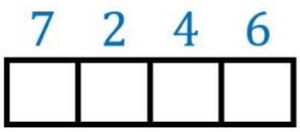
O método exige do operador o domínio da tabuada, ao contrário dos métodos egípcio e russo que exigiam apenas saber multiplicar e dividir por 2. A simplicidade da sua aplicação é um argumento forte e convincente pelo que poderia justificar o seu uso até aos dias de hoje. Contudo, como exige a inscrição de linhas e grades, isso torna o processo menos prático (em comparação com a disposição numérica que é ensinado atualmente). Alguns autores o denominam de método árabe de multiplicação. A seguir, o método será detalhado dividindo-o em alguns casos.

1.º caso: Multiplicação de um número por outro de um algarismo.

Exemplo 3.01: deseja-se calcular o resultado de 7246×8.

Começando por desenhar uma tabela 1×4 , quer dizer uma linha e quatro colunas, uma vez que o fator 8 é composto por um único algarismo e o fator 7246 é formado por quatro algarismos (se dispor esta tabela em ordem contrária, 4×1, implicará em ocupação maior de linhas para efetuar a multiplicação). Logo acima da tabela ou grade dispõe-se horizontalmente os algarismos 7, 2, 4 e 6 na primeira, segunda, terceira e quarta coluna, respetivamente, como na figura a seguir.

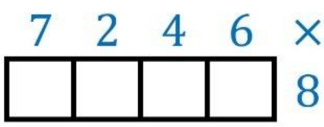
Figura 3.02



Fonte própria do autor.

Em seguida, escreve-se o algarismo 8 do lado direito (verticalmente), de modo a ficar ao lado do quadrado relativo ao algarismo 6.

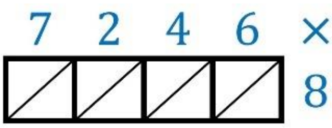
Figura 3.03



Fonte própria do autor

Prosseguindo, traçando-se em cada quadrado a diagonal do canto inferior esquerdo para o canto superior direito.

Figura 3.04

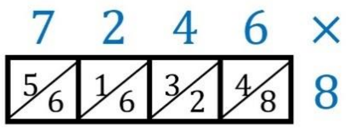


Fonte própria do autor

Multiplica-se cada par de algarismos, escrevendo o produto em cada célula. Os produtos a serem considerados na linha e da esquerda para a direita são:

$7 \times 8 = 56$; $2 \times 8 = 16$; $4 \times 8 = 32$ e $6 \times 8 = 48$. Preenche-se cada quadrado com o produto correspondente de modo que o algarismo das dezenas fique na parte superior da diagonal e o das unidades na parte inferior.

Figura 3.05



Fonte própria do autor.

Utiliza-se as diagonais para indicar somas convenientes dos algarismos obtidos, registrando os resultados na parte inferior e esquerda da tabela. Deste modo, adicionando os algarismos ao longo de linhas paralelas às diagonais e começando da direita para a esquerda, obtêm-se a soma de cada posição.

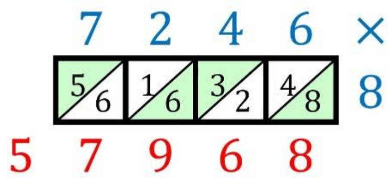
Da direita para a esquerda (ver figura a seguir) tem-se:

- na 1.ª linha diagonal 8 (unidades);
- na 2.ª linha diagonal $4 + 2 = 6$ (dezenas);
- na 3.ª linha diagonal $3 + 6 = 9$ (centenas);
- na 4.ª linha diagonal $1 + 6 = 7$ (unidades de milhar);
- e finalmente na 5.ª linha diagonal tem-se somente o algarismo 5 que corresponde às dezenas de milhar.

Se a soma ao longo das linhas diagonais for um número formado por dois algarismos, ou seja, um número maior ou igual a 10, registra-se apenas o algarismo das unidades e adiciona-se o das dezenas à próxima linha diagonal.

Por último, recorrendo à notação posicional, escreve-se sequencialmente os algarismos relativos às somas parciais obtidas em cada linha diagonal, obtendo-se 57968.

Figura 3.06



Fonte própria do autor.

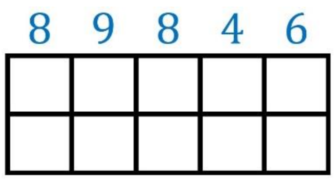
Portanto $7246 \times 8 = 57968$.

2.º caso: Multiplicação de um número por outro de dois algarismos.

Exemplo 3.02: calcular o produto de 89846×74.

Semelhantemente ao que foi aplicado no exemplo anterior, desenha-se uma tabela com 2 linhas (pois o fator 74 é formado por 2 algarismos) e 5 colunas (pois o fator 89846 é formado por 5 algarismos). Acima desta tabela, escreve-se os algarismos 8, 9, 8, 4 e 6 na primeira, segunda, terceira, quarta e quinta coluna, respetivamente.

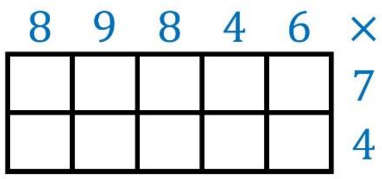
Figura 3.07



Fonte própria do autor.

Do lado direito da tabela e verticalmente de cima para baixo, escreve-se os algarismos 7 e 4, na primeira e segunda linha, respetivamente.

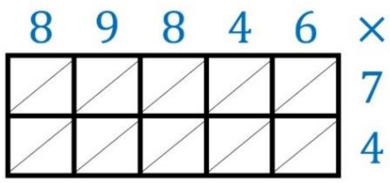
Figura 3.08



Fonte própria do autor.

Como feito no exemplo anterior, traça-se em cada quadrado a diagonal do canto inferior esquerdo para o canto superior direito.

Figura 3.09



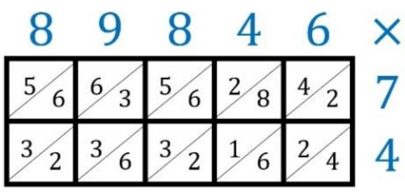
Fonte própria do autor.

É preenchido cada entrada desta tabela com os produtos correspondentes.

- Na 1.ª linha temos $8 \times 7 = 56$; $9 \times 7 = 63$; $8 \times 7 = 56$; $4 \times 7 = 28$ e $6 \times 7 = 42$.

- Por sua vez, na 2.ª linha os produtos são: $8 \times 4 = 32$; $9 \times 4 = 36$; $8 \times 4 = 32$; $4 \times 4 = 16$ e $6 \times 4 = 24$.

Figura 3.10

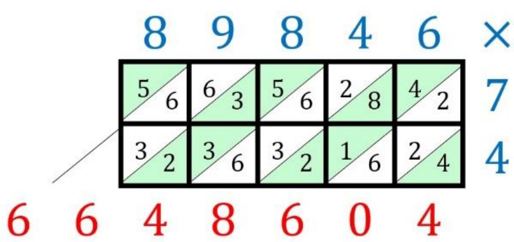


Fonte própria do autor.

- Adicionando os algarismos ao longo de linhas paralelas às diagonais e começando da direita para a esquerda, iremos obter: na 1.ª linha diagonal 4 unidades;
- na 2.ª linha diagonal $2 + 2 + 6 = 10$, pelo que se registrou o algarismo das unidades e passando o das dezenas para a linha diagonal seguinte;
- na 3.ª linha diagonal $1 + 4 + 8 + 1 + 2 = 16$, de novo escreve-se 6 e adiciona-se 1 à linha diagonal seguinte;
- na 4.ª linha diagonal tem-se $1 + 2 + 6 + 3 + 6 = 18$ (registra-se 8 e adiciona-se 1 à próxima linha diagonal);
- na 5.ª linha diagonal tem-se $1 + 5 + 3 + 3 + 2 = 14$ (registra-se 4 e adiciona-se 1 à linha diagonal seguinte);
- 6.ª linha diagonal tem-se $1 + 6 + 6 + 3 = 16$ (registra-se 6 e adiciona-se 1 à próxima linha diagonal);
- finalmente na 7.ª linha diagonal tem-se $1 + 5 = 6$.

Recorrendo à notação posicional escreve-se o resultado 6648604.

Figura 3.11



Fonte própria do autor.

Logo, 89846 × 74 = 6.648.604

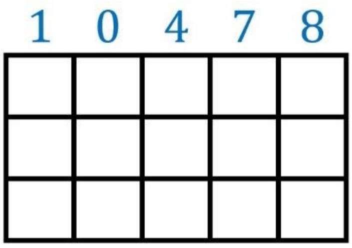
3.º caso: Multiplicação de um número por outro de mais de dois algarismos.

Exemplo 3.03: admite-se que a quantidade de reais em uma conta bancária é 10478×957. Qual o valor real dessa fortuna?

Neste caso deve-se construir uma tabela 3×5 e proceder de forma análoga aos exemplos anteriores.

Dispõe-se o número 10478 acima da tabela de modo que cada algarismo se posicione em cada coluna.

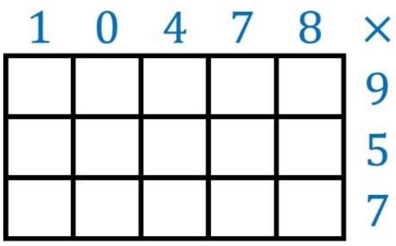
Figura 3.12



Fonte própria do autor.

Escreve-se o número 957 à esquerda da tabela de modo que cada algarismo se posicione respectivimamente em cada coluna.

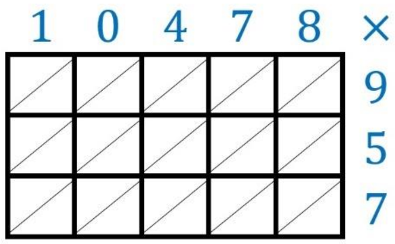
Figura 3.13



Fonte própria do autor.

Como no exemplo anterior, traça-se em cada quadrado a diagonal do canto inferior esquerdo para o canto superior direito. Neste caso linhas diagonais são maiores.

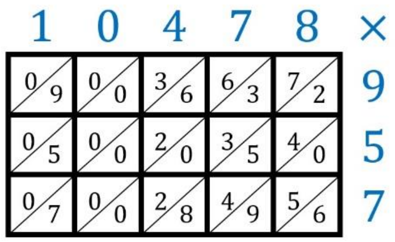
Figura 3.14



Fonte própria do autor.

É preenchido cada entrada desta tabela com os produtos correspondentes.

Figura 3.15

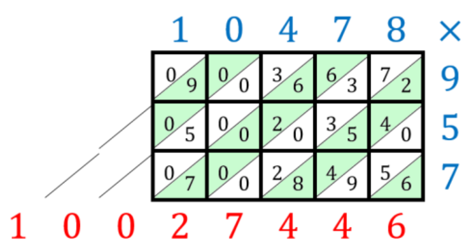


Fonte própria do autor.

Da direita para a esquerda da tabela tem-se:

- na 1.ª linha diagonal tem-se 6;
- na 2.ª linha diagonal tem-se $0 + 5 + 9 = 14$, registrando 4 e adiciona-se 1 à próxima linha;
- na 3.ª linha diagonal adiciona-se $2 + 4 + 5 + 4 + 8 = 22$ (registrando 2 e adiciona-se 2 à linha diagonal seguinte);
- faça-se assim em todas as linhas;
- na penúltima linha diagonal tem-se $0 + 9 + 0 = 9$;
- na última linha diagonal só há 0.
- Conclui-se escrevendo o total 10.027.446.

Figura 3.16



Fonte própria do autor.

Isto significa que teoricamente que a fortuna seria de dez milhões, vinte e sete mil e quatrocentos e quarenta e seis reais.

3.4 - Proposta de Adaptação ao Método Gelosia

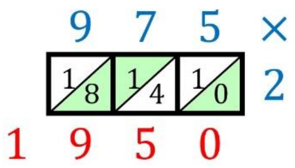
Em virtude da dificuldade em construir a grade com linhas diagonais, é apresentado aqui uma adaptação ao método Gelosia permitindo ao aluno que organize os produtos em tabelas sem linhas diagonais.

1.º caso: Multiplicação de um número por outro de um algarismo.

Exemplo 3.04: efetuar 975×2.

Pelo método Gelosia tradicional temos:

Figura 3.17

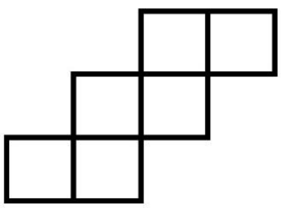


Fonte própria do autor.

Proposta de adaptação:

Usa-se o dispositivo constituído de seis quadrados, sendo dois adjacentes na 1.ª linha à direita, dois adjacentes na 2.ª linha ao centro e dois adjacentes na 3.ª linha à esquerda, como na figura a seguir. Observa-se que este dispositivo possui quatro colunas pois 975 e 2 possuem ao todo quatro algarismos.

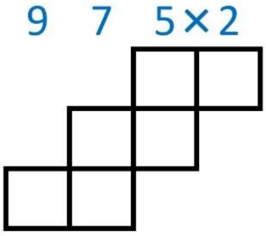
Figura 3.18



Fonte própria do autor.

Escreve-se os números 975 e 2 acima do dispositivo da esquerda para a direita, sendo que cada algarismo fica disposto em cada coluna como na figura seguir.

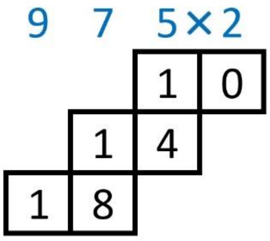
Figura 3.19



Fonte própria do autor.

A cada linha do dispositivo registra-se o produto de cada algarismo de 975 por 2. A 1.ª linha corresponde ao produto de $5 \times 2 = 10$. A 2.ª linha corresponde ao produto de $7 \times 2 = 14$. A 3.ª linha corresponde ao produto de $9 \times 2 = 18$.

Figura 3.20



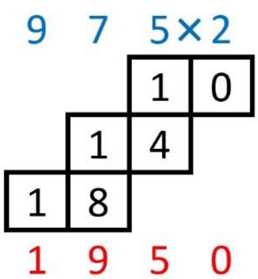
Fonte própria do autor.

Registra-se em cada quadrado começando pelo algarismo das unidades e depois dezenas.

É observado que o algarismo da unidade do produto de 5 por 2 é escrito na mesma coluna do algarismo do fator 2.

Os outros produtos pulam uma casa à esquerda a cada multiplicação nas linhas posteriores. Então soma-se os produtos conforme a ordem dos algarismos nos quadrados.

Figura 3.21



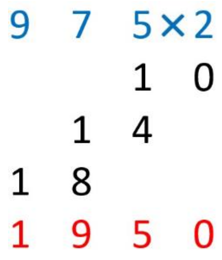
Fonte própria do autor.

Obtém-se o resultado 1950.

Apesar desta adaptação requerer mais linhas horizontais para efetuar a multiplicação, não há necessidade de se usar linhas diagonais no cálculo.

O aluno dominando este algoritmo, pode efetuá-lo sem o dispositivo.

Figura 3.22

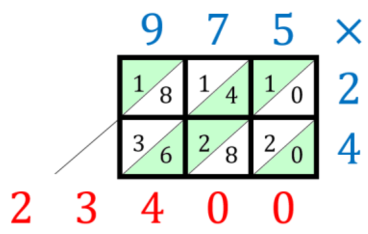


Fonte própria do autor.

2.º caso: Multiplicação de um número por outro de dois algarismos.

Exemplo 3.05: efetuar 975×24. Pelo método gelosia tradicional tem-se:

Figura 3.23

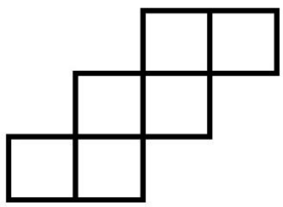


Fonte própria do autor.

Pela adaptação:

Repete-se o dispositivo do exemplo anterior para multiplicar 975 por 2

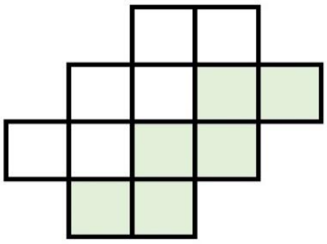
Figura 3.24



Fonte própria do autor.

Então é acrescentado outra grade para que seja possível multiplicar 975 por 4.

Figura 3.25

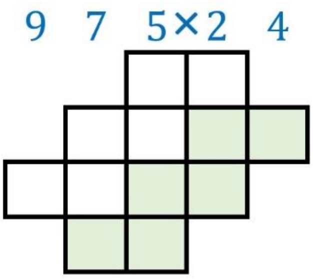


Fonte própria do autor.

É um dispositivo constituído de doze quadrados, sendo dois adjacentes na 1.ª linha, quatro quadrados adjacentes 2.ª linha iniciando na 3.ª coluna (da esquerda para a direita em relação à 1.ª linha), quatro quadrados adjacentes 3.ª linha iniciando na 4.ª coluna (da esquerda para a direita em relação à 1.ª linha) e dois adjacentes na 4.ª linha iniciando na 3.ª coluna (da esquerda para a direita em relação à 1.ª linha. Observa-se que este dispositivo possui no total cinco colunas pois 975 e 24 possuem ao todo cinco algarismos.

Dispõe-se os números 975 e 24 acima do dispositivo de acordo que cada algarismo seja escrito da esquerda para a direita em cada coluna.

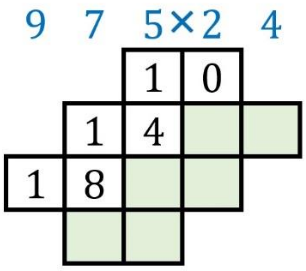
Figura 3.26



Fonte própria do autor.

Efetua-se as multiplicações dos algarismos de 975 por 2 nos quadrados brancos. Mais uma vez é observado que o algarismo da unidade do produto de 5 por 2 é escrito na mesma coluna do algarismo 2 do fator 24. Os outros produtos pulam uma casa à esquerda a cada multiplicação nas linhas posteriores.

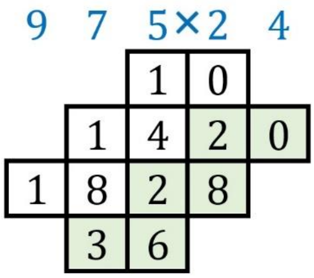
Figura 3.27



Fonte própria do autor.

Nos quadrados verdes efetua-se as multiplicações dos algarismos de 975 por 4. A 2.ª linha corresponde ao produto de $5 \times 4 = 20$. A 3.ª linha corresponde ao produto de $7 \times 4 = 28$. A 4.ª linha corresponde ao produto de $9 \times 4 = 36$.

Figura 3.28

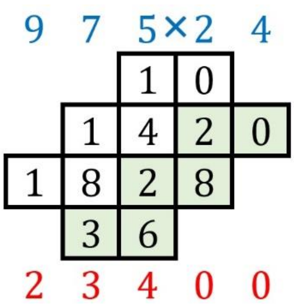


Fonte própria do autor.

É observado que o algarismo da unidade do produto é escrito na mesma coluna do algarismo do fator 4. A multiplicação não começa na 1.ª linha que pois os algarismos do produto da multiplicação por 4 poderiam se sobrepor ao produto da multiplicação por 2 na 1.ª linha.

Em seguida soma-se os produtos conforme a ordem dos algarismos nos quadrados.

Figura 3.29



Fonte própria do autor.

Com o algoritmo sendo dominado pelo aluno, pode efetuá-lo sem o dispositivo.

Figura 3.30

9	7	5 ×	2	4
		1	0	
	1	4	2	0
1	8	2	8	
	3	6		
2	3	4	0	0

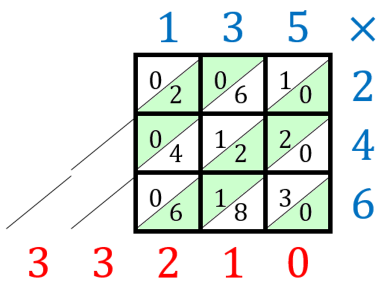
Fonte própria do autor.

Exemplo 3.06: Multiplicar 135 por 246:

Analogamente, a multiplicação é feita como nos exemplos anteriores.

Pelo método gelosia tradicional tem-se:

Figura 3.31



Fonte própria do autor.

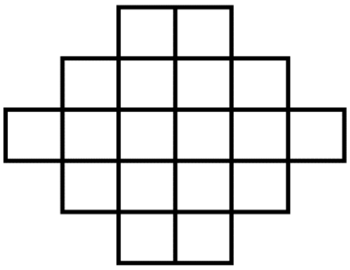
Pela adaptação:

Usa-se o dispositivo constituído de dezoito quadrados:

- Dois quadrados adjacentes na 1.ª linha e 5.ª linha e 3.ª e 4.ª colunas.
- Quatro adjacentes na 2.ª linha e 4.ª linhas, 2.ª, 3.ª, 4.ª e 5.ª colunas.
- Seis adjacentes na 3.ª linha ocupando todas as colunas.

Observa-se que este dispositivo possui seis colunas pois 135 e 246 possuem ao todo seis algarismos.

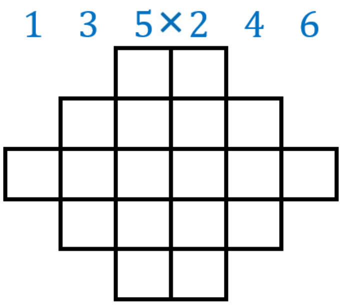
Figura 3.32



Fonte própria do autor.

Dispõe-se os números 135 e 246 acima do dispositivo de acordo que cada algarismo seja escrito da esquerda para a direita em cada coluna.

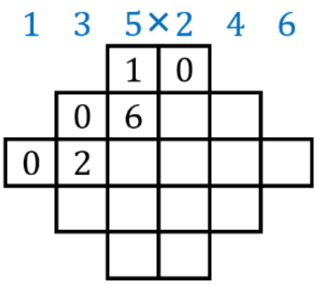
Figura 3.33



Fonte própria do autor.

Efetua-se as multiplicações dos algarismos de 135 por 2 de maneira que o algarismo das unidades do primeiro produto se localize na mesma coluna do algarismo 2. Os outros produtos seguem nas linhas abaixo e pulando uma casa à esquerda.

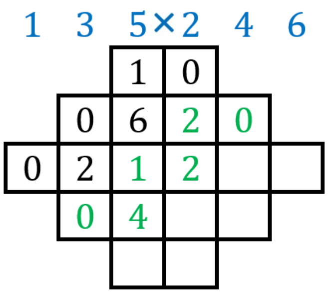
Figura 3.34



Fonte própria do autor.

Efetua-se as multiplicações dos algarismos de 135 por 4 de maneira que o algarismo das unidades do primeiro produto se localize na 2.ª linha na mesma coluna do algarismo 4 do fator 246. Os outros produtos seguem nas linhas abaixo e pulando uma casa à esquerda

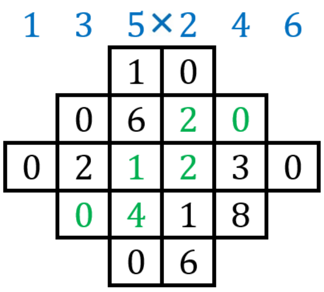
Figura 3.35



Fonte própria do autor.

Efetua-se as multiplicações dos algarismos de 135 por 6 de maneira que o algarismo das unidades do primeiro produto se localize na 3.ª linha na mesma coluna do algarismo 6 do fator 246. Os outros produtos seguem nas linhas abaixo e pulando uma casa à esquerda

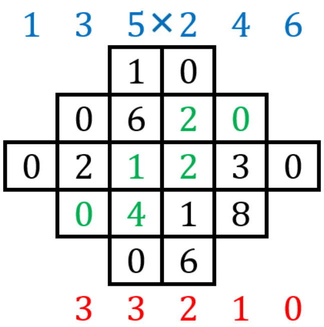
Figura 3.36



Fonte própria do autor.

Em seguida soma-se os produtos conforme a ordem dos algarismos nos quadrados.

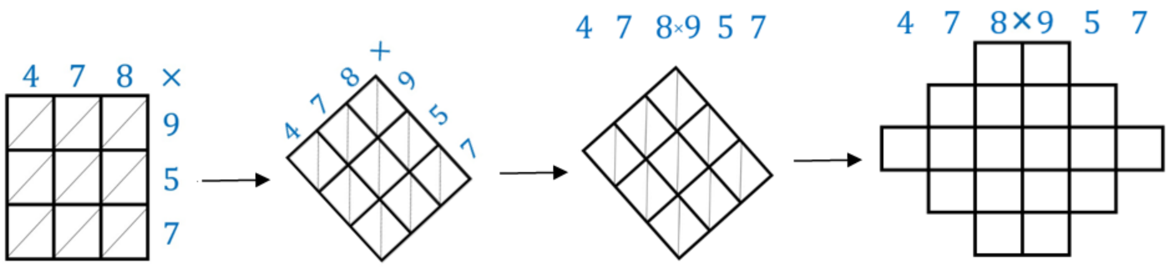
Figura 3.37



Fonte própria do autor.

Esta adaptação pode ser entendida girando o dispositivo original no sentido anti-horário até que as diagonais fiquem posicionadas em vertical, como na ilustração a seguir (A MULTIPLICAÇÃO EM DIFERENTES MOMENTOS HISTÓRICOS, Andréa Zander Vaiano, Rosa García Márquez, Kellen Lessa Moraes).

Figura 3.38



Fonte própria do autor.

É possível observar na rotação das grades que as diagonais se tornam colunas. Cada célula, na primeira grade, foi dividida em duas partes pelas diagonais. Cada parte então se torna um quadrado na última grade.

3.5 - Justificativa do método Gelosia

Ao efetuar o método, observa-se que as multiplicações entre cada algarismo são usadas devido aplicação da propriedade distributiva da multiplicação.

1.º caso: Multiplicação de um número por outro de um algarismo.

Exemplo 3.07: Efetuar 975×2.

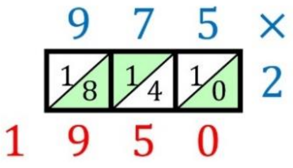
Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e a decomposição dos algarismos, tem-se:

$$975 \times 2 = (900 + 70 + 5) \times 2 = 900 \times 2 + 70 \times 2 + 5 \times 2 =$$

$$1800 + 140 + 10 = 18 \times 100 + 14 \times 10 + 5 = 1950$$

Observa-se que os produtos 1800, 140 e 10 equivalem aos produtos 18, 14 e 10 na grade do Gelosia. 18 na grade das centenas, 14 na grade das dezenas e 10 na grade das unidades.

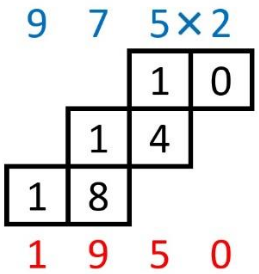
Figura 3.39



Fonte própria do autor.

Sendo assim a adaptação também fica justificada pela questão posicional dos algarismos.

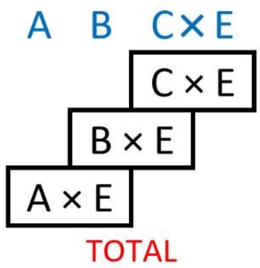
Figura 3.40



Fonte própria do autor.

Portanto generaliza-se para a multiplicação de um número por outro de um algarismo. Supondo um número de três algarismos ABC multiplicado por um número de um algarismo E, então representa-se na grade adaptada:

Figura 3.41



Fonte própria do autor.

Algebricamente, obtém-se:

$$\mathrm{ABC} \cdot \mathrm{E} = (100 \cdot \mathrm{A} + 10 \cdot \mathrm{B} + \mathrm{C}) \cdot \mathrm{E} = 100 \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{E} + 10 \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{E} + \mathrm{C} \cdot \mathrm{E}$$

Logo os produtos $A \cdot E$, $B \cdot E$ e $C \cdot E$ são posicionados nas casas das centenas, dezenas e unidades respectivamente.

2.º caso: Multiplicação de um número por outro de dois algarismos.

Exemplo 3.08: Efetuar 975×24.

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e a decomposição dos, tem-se:

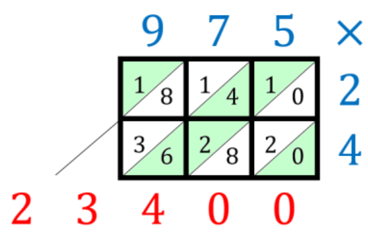
$$975 \times 24 = (900 + 70 + 5) \times (20 + 4) =$$
$$= 900 \times 20 + 70 \times 20 + 5 \times 20 + 900 \times 4 + 70 \times 4 + 5 \times 4 =$$
$$= 18000 + 1400 + 100 + 3600 + 280 + 20 =$$
$$= 18 \times 1000 + 14 \times 100 + 10 \times 10 + 36 \times 100 + 28 \times 10 + 20 =$$
$$= 18 \times 1000 + (14 + 36) \times 100 + (10 + 28) \times 10 + 20 = 23400$$

Observa-se que:

- O produto 18 se posiciona na casa dos milhares.
- Os produtos 14 e 36 se posicionam nas casas das centenas.
- Os produtos 10 e 28 se posicionam na casa das dezenas.
- O produto 20 se posiciona na casa das unidades.

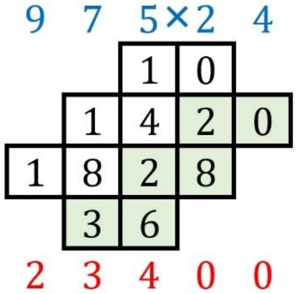
Estas situações são observadas na grade do método Gelosia e na adaptação proposta ao método.

Figura 3.41



Fonte própria do autor.

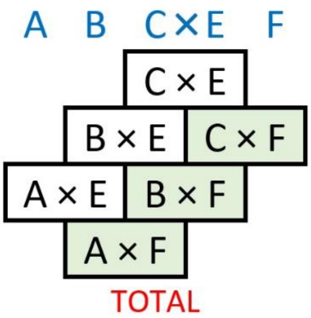
Figura 3.42



Fonte própria do autor.

Portanto generaliza-se para a multiplicação de um número por outro de dois algarismos. Supondo um número de três algarismos ABC multiplicado por um número de dois algarismos EF, a multiplicação representa-se na grade adaptada:

Figura 3.43



Fonte própria do autor.

Algebricamente, tem-se:

$$ABC \cdot EF = (100 \cdot A + 10 \cdot B + C) \cdot (10 \cdot E + F) =$$
$$= 1000 \cdot A \cdot E + 100 \cdot B \cdot E + 10 \cdot C \cdot E + 100 \cdot A \cdot F + 10 \cdot B \cdot F + C \cdot F =$$
$$= 1000 \cdot A \cdot E + 100 \cdot (B \cdot E + A \cdot F) + 10 \cdot (C \cdot E + B \cdot F) + C \cdot F$$

Logo, em relação a cada produto, observa-se que:

- $A \cdot E$ é posicionado na casa dos milhares,
- $B \cdot E$ e $A \cdot F$ são posicionados na casa das centenas;
- $C \cdot E$ e $B \cdot F$ são posicionados na casa das dezenas;
- $C \cdot F$ é posicionado na casa das unidades

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a pesquisa, percebi que os métodos multiplicativos são respostas plurais a problemas similares pois, apesar das complexidades defrontadas por diversas sociedades serem correspondentes, os recursos que estas desenvolvem podem ser distintos entre si. Povos diferentes desenvolvem soluções diferentes para um mesmo problema. Mas não é necessariamente uma regra para todos. Nações diversas também encontrarão soluções parecidas para uma mesma adversidade. O que este estudo proporciona é que métodos de multiplicação apresentados aqui são associados a povos de pátrias distintas. Porém estes mesmos métodos também eram aplicados em outros países.

Os métodos surpreendem principalmente em relação a sua funcionalidade. Quando você efetua uma multiplicação, independentemente do método aqui explanado eles sempre funcionam. E neste trabalho todos os algoritmos tiveram as suas justificativas provadas.

O método Gelosia foi adaptado de maneira prática e ilustrada. A adaptação foi apresentada de maneira gradual para que tanto o professor e o aluno da Escola Básica saibam manuseá-lo pedagogicamente.

Em relação ao objetivo geral, os algoritmos foram analisados e descritos de maneira detalhada em relação às suas técnicas de obtenção de produtos. Em relação aos objetivos específicos, os métodos foram estudados perante um contexto histórico em que eram esclarecidos a presença dos algoritmos no cotidiano de diversas culturas. A descrição de cada método foi explanada gradualmente de modo mais acessível para o aluno. A proposta adaptação do método Gelosia foi construída de maneira ilustrada e apropriada para o uso docente da Escola Básica.

É impossível não comentar neste trabalho sobre o fato dele ter sido construído durante a terrível pandemia do Covid-19 iniciada em 2020 em todo o planeta. Realmente foi problemático ter que estudar métodos multiplicativos sem sair de casa e impossibilitado de apresentá-los, de maneira pedagógica, aos meus alunos. Antes de começar a minha quarentena no mesmo ano cheguei a expor alguns métodos aos meus alunos de 6.º ano do Ensino Fundamental na Escola Estadual Cônego Batista Campos e de 4.º Etapa do Ensino de Jovens e Adultos (EJA) na Escola Estadual Ministro Alcides Carneiro. Posso aqui relatar de que foi uma experiência satisfatória pois a maioria dos alunos demonstrou um grande interesse e curiosidade em relação aos métodos egípcio, chinês e Gelosia (adaptado) de multiplicação. Infelizmente não fiz nenhum registro digital de imagem ou vídeo na época das tarefas realizadas. Foram aulas experimentais e não havia indícios claros de que a uma peste global estava por vir e de que afastaria os alunos das escolas por mais de um ano. No momento de finalização deste trabalho, os professores trabalhavam com aulas remotas, o que prejudica um melhor planejamento e viabilidade dos algoritmos. Porém, é de minha pretensão de que esta pesquisa esteja disponível em portais digitais e redes sociais para maior acesso possível aos professores e alunos da Escola Básica.

Sugiro aqui para estudos futuros, que outros professores e estudantes de mestrado elaborem adaptações para outros métodos multiplicativos afim de que estes algoritmos não se percam com o tempo e que os alunos possam ter acesso contínuo a estes dispositivos alternativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLT, Brian. **MAIS ATIVIDADES MATEMÁTICAS**. Lisboa, Gradiva.1992. (Coleção O prazer da Matemática).

BOYER, C.B. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**, tradução: Elza F. Gomide. 2a ed. São Paulo: Blücher, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: MATEMÁTICA** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF,1998.

D'AMBROSIO, U. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO**. História e Educação Matemática. 1ª ed. Campinas, SP: Papirus,1996, p.7-17.

DANTE, Luiz Roberto. **MATEMÁTICA DANTE**. Volume Único. São Paulo. Editora Ática. 1ª edição. 2009.

DANTZIG, Tobias. **NÚMERO, A LINGUAGEM A CIÊNCIA** - Editora Zahar. 1970.

EVES, Howard. **INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

GIOVANNI, Jose Ruy. **A CONQUISTA DA MATEMÁTICA**, 6_ ano / José Ruy Giovanni, Benedicto Castrucci, José Ruy Giovanni Júnior. -São Paulo: FTD, 2012.

GONSALVES, E.P. **CONVERSAS SOBRE A INICIAÇÃO À PESQUISA CIENTÍFICA**. 4. Ed. Campinas, SP: Editora Alínea, 2005.

https://escolaeducacao.com.br/multiplicacao-algoritmo-usual-e-de-decomposicao/

http://cienciadebar.blogspot.com/2011/10/metodo-chines-de-multiplicar.html

http://matematicarev.blogspot.com/2010/10/multiplicacao-russa.html http://professoraju-mat.blogspot.com/2010/07/jura-multiplicacao-egipcia.html

http://questaomatematica.blogspot.com/2013/12/multiplicacao-russa_5.html

http://topicosmatematicos.blogspot.com/2008/11/multiplicando-com-as-mos.html

http://topicosmatematicos.blogspot.com/2008/11/multiplicao-russa.html

http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6966_4030_ID.pdf

https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/16/13/a-prtica-do-professor-de-matemtica-dos-anos-iniciais-da-formao-inicial-ao-cotidiano-da-ao-educativa

https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/a-historia-ensino-matematica-na-sala-aula.htm

https://novaescola.org.br/conteudo/2662/multiplicacao-e-divisao-ja-nas-series-iniciais

https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica

https://sae.digital/bncc-o-que-e-qual-e-o-seu-objetivo/

https://sites.google.com/site/matematicakemet/a-multiplicacao-e-divisao-dos-egipcios

https://www.researchgate.net/publication/313128348_MULTIPLICANDO_COM_O_USO_DAS_MAOS_COMO_ALTERNATIVA_A_MEMORIZACAO_DA_TABUADA

IMHAUSEN In KATZ, V. (ed.) **THE MATHEMATICS OF EGYPT**, Mesopotamia, china, India e islam. A sourcebook. New Jersey: Princeton University Press, 2007.

JESUS, Carmem Lucia Santos de. “**SEM TRAMELAS E SEM GELOSIAS**”: comportamento feminino na bahia setecentista (1750- 1800). IV Encontro Estadual de História/BA-2013.

JÚNIOR, Edmar Luiz Gomes, **O SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO E SEUS ALGORÍTMOS**, IFMG – OuroPretoedmarlgj@hotmail.comDavidson Paulo de Azevedo Oliveira IFMG – OuroPretodavidson.oliveira@ifmg.edu.br

JUNIOR, Lourival Carlos Cunha, **MATEMÁTICA LÚDICA NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS DO CENTRO DE PROGRESSÃO PENITENCIÁRIA DO DISTRITO FEDERAL** -

KATZ, Victor J. **A HISTORY OF MATHEMATICS**. New York, Addison Wesley, 3.ed., 2008.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **ENSINO DA MATEMÁTICA POR MEIO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: POSSÍVEIS ARTICULAÇÕES COM A ETNOMATEMÁTICA**. Vidya, v. 33, n. 2, p. 51-62, jul./dez., 2013.

MARTINS, Maria do Carmo, **A ARTE DO MÉTODO DA GELOSIA,** Correio dos Açores, 14 de Maio de 2015. Professora do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, mika@uac.pt.

MIGUEL, Antônio. (1997). **AS POTENCIALIDADES PEDAGÓGICAS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM QUESTÃO: ARGUMENTOS REFORÇADORES E QUESTIONADORES**. Zetetiké. v.5, n.8, p.73-115

MIGUEL, Antônio; MIORIN, Maria Ângela. (2008). **HISTÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: PROPOSTAS E DESAFIOS**. Coleção: Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **MATEMÁTICA DISCRETA**. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

PATERLINI, Roberto Ribeiro, **ARITMÉTICA DOS NÚMEROS INTEIROS**, UFSCar, 2008.

REIS, Ismael. **FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA**. Volume 6. Editora Moderna, 1996.

SMITH, David E. (1958), **HISTORY OF MATHEMATICS, VOLUME I: GENERAL SURVEY OF THE HISTORY OF ELEMENTARY MATHEMATICS**, New York: Dover Publications (a reprint of the 1951 publication).

SOARES, Filomena Baptista; NUNES, Maria Paula Sousa. **DIFERENTES FORMAS DE MULTIPLICAR**. XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática. Caminha, p. 17-19, abril, 2005.

SOUZA, J. C. M. **MATEMÁTICA DIVERTIDA E CURIOSA**. 19ª Ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

WALL, E.S., **TEORIA DOS NÚMEROS PARA PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL**, AMGH, 2014.

ZONZINI, Cleudiana dos Santos Feitoza, **ALGORITMOS DE MULTIPLICAÇÃO: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre. Julho de 2016.

ZONZINI, Cleudiana dos Santos Feitoza**, MÉTODO GELOSIA: FACILITANDO A MULTIPLICAÇÃO**. Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Letramento e práticas interdisciplinares nos Anos Finais (6ª a 9ª Ano) como requisito parcial para obtenção do título de especialista em Letramento e práticas interdisciplinares. Dezembro, 2015.