UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

FABRÍCIO OLIVEIRA SOUZA

O TEOREMA DE PICK:

UMA NOVA ABORDAGEM SOBRE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS PARA O ENSINO BÁSICO

VITÓRIA, 2013

FABRÍCIO OLIVEIRA SOUZA

O TEOREMA DE PICK:

UMA NOVA ABORDAGEM SOBRE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS PARA O ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional – PROFMAT na Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Florêncio Guimarães Filho

VITÓRIA, 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"O Teorema de Pick: Uma nova Abordagem sobre Áreas de Figuras Planas para o Ensino Básico"

Fabrício Oliveira Souza

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 16/08/2013 por:

Florêncio Ferreira Guimarães Filho - UFES

Moacir Rosado Filho - UFES

Sérgio Luiz Silva – UERJ

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

Souza, Fabrício Oliveira, 1979-

Teorema de Pick : uma nova abordagem sobre áreas de figuras planas para o ensino básico / Fabrício Oliveira Souza. – 2013.

31 f. : il.

Orientador: Florêncio F. Guimarães Filho

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Triângulo. 2. Geometria plana. 3. Polígonos. 4. Teorema de Pick. I. Guimarães Filho, Florêncio F. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

RESUMO

Nas séries iniciais do 2° segmento do ensino fundamental introduzem-se cálculos sobre áreas de figuras planas elementares tais como: paralelogramos, trapézios, retângulos, triângulos e círculo apresentando assim muitas fórmulas. De modo invariante, tais fórmulas dependem de medidas de seus lados, raios e etc. O objetivo deste trabalho é mostrar que todas as áreas destas figuras podem ser calculadas por uma única fórmula, desde que consigamos sobrepô-las num reticulado de tal modo que seus vértices coincidam com pontos deste reticulado.

O cálculo destas áreas será feito com o uso do teorema de Pick, um matemático austríaco que desenvolveu trabalhos e publicou artigos científicos sobre vários domínios da Matemática. Esta fórmula é construída aos poucos com raciocínio baseado em conhecimentos prévios sobre triângulos, começando do básico até a sua demonstração formal.

Ao final deste trabalho fazemos uma abordagem sobre área de círculos e com o uso do teorema de Pick conseguimos uma boa aproximação do número π (pi).

Palavras-chaves: Áreas, triângulos fundamentais, figuras planas, polígonos reticulados, malha reticulada, Teorema de Pick.

ABSTRACT

In the initial series of the 2nd segment of the school are introduced calculations on elementary areas of plane figures such as parallelograms, trapezoids, rectangles, triangles and circle featuring so many formulas. So invariant formulas such measures depend on their sides, rays and so on. The objective of this work is to show that all areas of these figures can be calculated by a single formula, provided that we can superimpose them on a lattice such that its vertices coincide with points of this lattice.

The calculation of these areas will be done using the theorem Pick an Austrian mathematician who developed scientific papers and published articles on various areas of mathematics. This formula is built gradually with reasoning based on prior knowledge about triangles, starting from basic to its formal demonstration.

At the end of this study we approach area on circles and using Pick's theorem we get a good approximation of the number π (pi).

Keywords: areas, triangles fundamental plane figures, polygons reticulated, reticulated mesh, Pick's Theorem.

LISTA DE FIGURAS

Sumário

1. Introdução

Nas séries iniciais do 2° segmento do ensino fundamental introduzem-se as figuras planas elementares tais como: paralelogramos, trapézios, retângulos, triângulos e círculos bem como as respectivas fórmulas para suas áreas. De modo invariante, tais fórmulas dependem de medidas de seus lados, raios e etc. No máximo, ensinam-se figuras planas que, de modo conveniente, são decomponíveis naquelas. Pode-se afirmar que, de um modo geral, a Geometria na escola básica brasileira não avança além disso, nesse tópico particular.

O cálculo de áreas de figuras planas desempenha um papel fundamental nos mais diversos ramos da Matemática e em muitas aplicações a outros ramos do conhecimento. Desde muito cedo o estudante se depara com o conceito de cálculo de áreas e no laboratório o pesquisador ainda tem necessidade de calcular áreas. Quando tais figuras planas são polígonos regulares não é tão difícil calcular sua área, em contrapartida se torna um tanto complicado quando estas figuras são polígonos com muitos lados e não regulares.

George Alexander **Pick** foi um matemático, que nasceu em 1859, em Viena, Áustria. Morreu em 1942, com 83 anos, num campo de concentração, durante e II Guerra Mundial. A sua carreira profissional decorreu, essencialmente, na Universidade de Praga, embora tenha trabalhado e estado ligado a outras universidades da Europa. Pick desenvolveu trabalhos e publicou artigos científicos sobre vários domínios da Matemática, mas aquele que o tornou mais conhecido foi o Teorema com o seu nome, que permite calcular a área de polígonos simples, desenhados sobre uma malha reticular (em rede), pela simples contagem de pontos.

Definição 1.1: Os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são números inteiros são chamados de pontos reticulados. Um reticulado é, portanto, um conjunto de tais pontos. Um polígono reticulado é aquele cujos vértices são pontos reticulados.

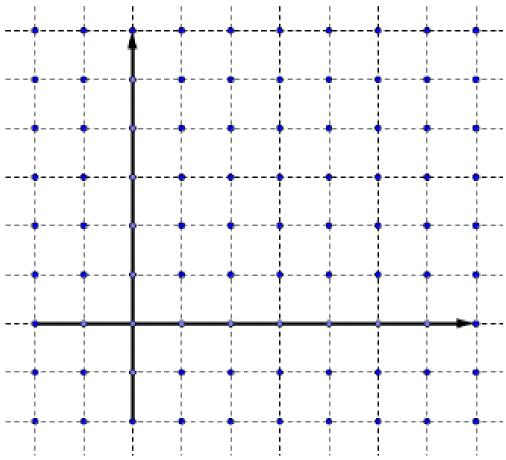

Figura 1.1 – Uma malha reticular.

2. Calculando Áreas Contando Pontos

Antes de conhecer esta fórmula, vamos calcular de uma maneira mais trabalhosa, a área de um polígono particular cujos vértices estão sobre pontos de uma malha.

Problema 2.1: Na figura 2.1 temos um pentágono não regular ABCDE cujos vértices são pontos de uma malha. Como calcular a área deste pentágono?

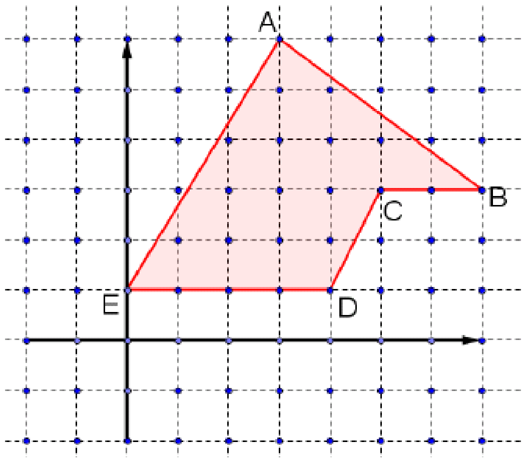

Figura 2.1 – Pentágono não regular ABCDE com vértices sobre uma malha.

Uma solução seria completar esta figura de modo que ela forme um retângulo, ver figura 2.2.

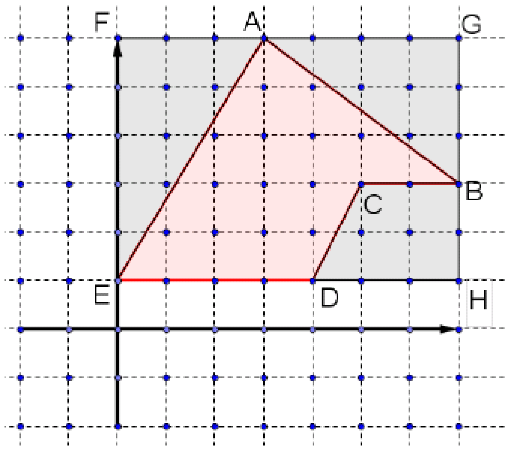

Figura 2.2 – Completando o pentágono de modo que este forme um retângulo.

Agora repare que, a área do retângulo EFGH é a soma das áreas dos triângulos EFA e AGB com a área do trapézio BHDC mais a área do pentágono ABCDE, ou seja,

$$A_{EFGH} = A_{EFA} + A_{AGB} + A_{BHDC} + A_{ABCDE}$$

Calculando estas áreas, temos que,

$$7 \times 5 = \frac{3 \times 5}{2} + \frac{4 \times 3}{2} + \frac{(3+2)}{2} \times 2 + A_{ABCDE}$$

$$35 = 7{,}5 + 6 + 5 + A_{ABCDE}$$

$$A_{ABCDE} = 35 - 7{,}5 - 6 - 5 = 16{,}5\ u^2$$

Não é o método mais eficiente mas resolveu nosso problema.

O que faremos agora é pensar num método para calcular a área de um retângulo de dimensões 4 por 6 sobre uma malha quadriculada (ver fig. 2.3) usando apenas o número de pontos em seu bordo e em seu interior.

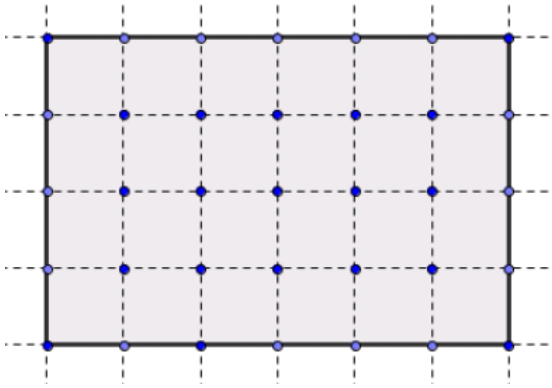

Figura 2.3 - Retângulo

O seguinte problema nos oferece uma proposta de solução para calcular esta área:

Problema 2.2: Um terreno retangular, ver figura 2.3, será repartido entre posseiros da seguinte forma: Quem for construir no interior (Região Vermelha) terá direito a um lote completo (100%), quem for construir nas laterais (Região Azul) terá direito a apenas metade de um lote (50%) e ficou combinado que ninguém construirá nos cantos (Região Verde) que representa um quarto de lote (25%). Vamos escrever o total **A** de lotes deste terreno em função do número de lotes em cada região.

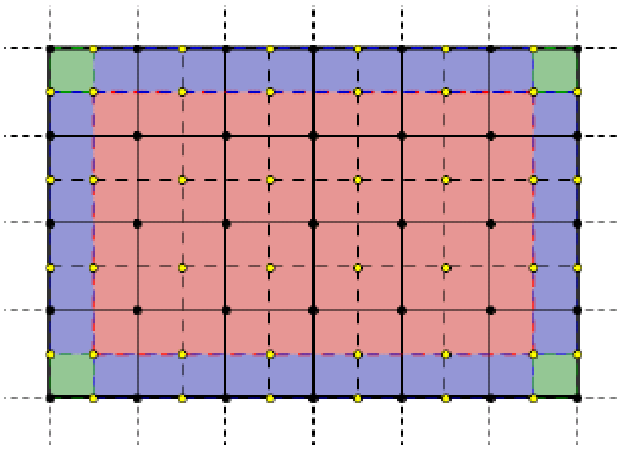

Figura 2.4 – A divisão dos lotes

Seja **I** o número de lotes que tem no **Interior** e **B** o número de lotes no **Bordo** do terreno, assim teremos **I** lotes com áreas 100%, **(B – 4)** lotes com 50% de área e **4** lotes com 25% de área, logo,

$$A = I + \frac{(B-4)}{2} + 4.\frac{1}{4}$$

$$A = I + \frac{B}{2} - \frac{4}{2} + 1$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{I} + \frac{\mathrm{B}}{2} - 1$$

Se fizermos uma correspondência onde cada ponto representa um lote e o total de lotes representa a área total do terreno teremos na fórmula acima uma relação para calcular a área do retângulo de dimensões 4 por 6.

Nesta relação, substituímos I = 15 e B = 20 e teremos:

$$\mathrm{A} = \mathrm{I} + \frac{\mathrm{B}}{2} - 1$$

$$\mathrm{A} = 15 + \frac{20}{2} - 1 = 24$$

Acabamos de mostrar que a relação vale para retângulos com lados sobre o reticulado.

O **objetivo deste trabalho** é mostrar que ela vale para todo polígono reticulado, evitando assim o uso de várias fórmulas que são usadas no ensino básico para calcular área de figuras planas.

A relação encontrada no problema 2.2 é conhecida como **Fórmula de Pick** e pode ser interpretada da seguinte forma: A área **A** de um polígono qualquer com vértices sobre pontos de uma malha reticulada é dada pela soma dos **I** pontos desta malha que estão no interior deste polígono com a metade dos **B** pontos que estão sobre os seus lados, inclusive os vértices, menos **1**.

Voltando no problema 2.1, vamos calcular a área do polígono ABCDE usando a relação,

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

Observe que no interior deste polígono temos 13 pontos (I = 13) e sobre seus lados temos 9 pontos da malha (B = 9), logo,

$$A = 13 + \frac{9}{2} - 1 = 16{,}5$$

Coincidindo com o resultado encontrado no problema 2.1.

Exercícios Resolvidos:

1) Calcular a área do heptágono não regular da figura 2.5 usando a fórmula de Pick.

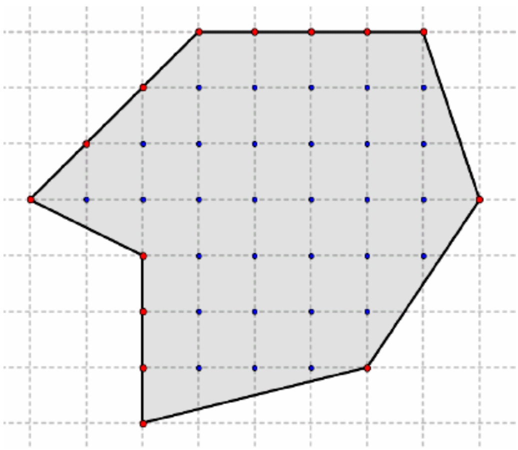

Figura 2.5 – Heptágono não regular com vértices sobre pontos de uma malha.

Solução:

Observe que existem 30 pontos da malha no interior (I = 30) e 14 pontos da malha sobre o bordo deste polígono (B = 14). Portanto sua área A é igual a,

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1$$

$$A = 30 + \frac{1}{2}.14 - 1$$

$$A = 36\,u$$

2) Vamos calcular a área da "ESTRELA" da figura 2.6.

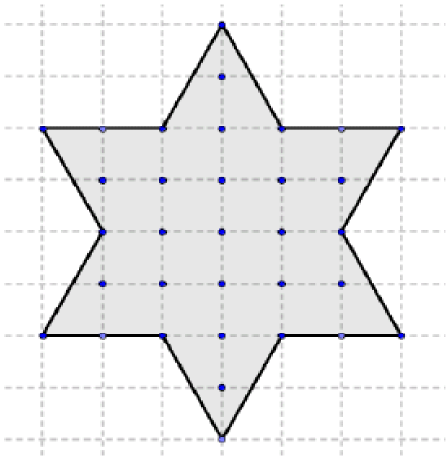

Figura 2.6 – A Estrela;

Solução:

Podemos contar 17 pontos em seu interior (I = 17) e 16 pontos sobre o bordo desta "estrela" (B = 16). Logo, pela fórmula de Pick, temos que sua área A é igual a,

$$A = I + \frac{1}{2}B - 1$$

$$A = 17 + \frac{1}{2}.16 - 1$$

$$A = 24\, u^2$$

3. Calculando Áreas por Contagem Triângulos

Nessa seção vamos aprender a calcular áreas de polígonos reticulados decompondo-os em **triângulos fundamentais**. Más para isso, precisamos entender o que é um triângulo fundamental.

Definição 3.1: Triângulo Fundamental (ou Primitivo) é um triângulo cujos vértices estão no reticulado e nenhum ponto deste está em seu interior ou em seu perímetro, exceto os vértices.

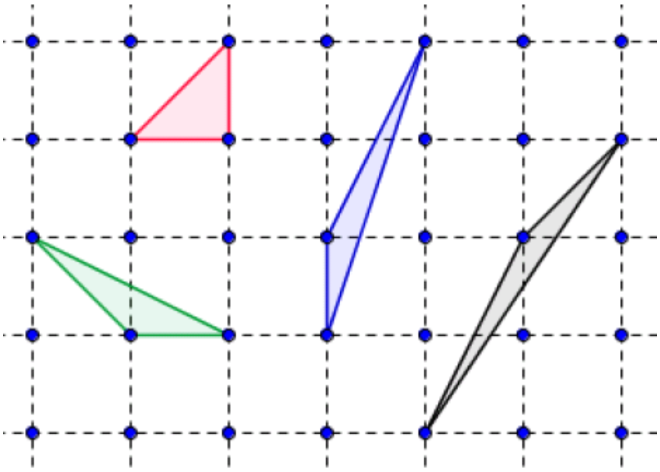

Figura 3.1 – Triângulos Fundamentais

Pela definição 3.1, todos os triângulos da figura 3.1 são fundamentais. Observe que os triângulos de cores vermelha, verde e azul tem área igual a $\frac{1}{2}$, pois podemos ver que uma das bases tem medida 1 e a altura relativa a esta base também é 1. Já o triângulo de cor preta tem uma área não tão direta de calcular, porém afirmamos que sua área também é igual a $\frac{1}{2}$.

De fato, na figura 3.2 temos que a área do triângulo AGC é a soma das áreas dos triângulos AGE e AEC. O triângulo AGE tem base e altura medindo 1 e o triângulo AGC tem base medindo 1 e altura medindo 2, deste modo:

$$A(AGC) = A(AGE) + A(AEC)$$

$$\frac{1 \times 2}{2} = \frac{1 \times 1}{2} + A(ACE)$$

$$A(ACE) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

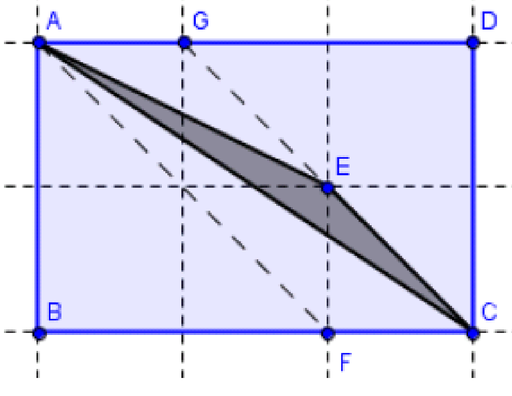

Figura 3.2 – A área do triângulo fundamental é ½;

Um triângulo fundamental ACE pode sempre ser “encaixado” num retângulo ABCD de tal modo que dois de seus vértices A e C coincidam com os vértices opostos do retângulo e o terceiro vértice E fique no interior ou sobre um dos lados deste retângulo.

Para ver isto, considere um triângulo fundamental. Vamos denominar por A o vértice do triângulo que está mais à esquerda e mais acima no reticulado. Sem perda de generalidade, podemos supor que os demais vértices do triângulo estão no mesmo nível ou abaixo do vértice A. Seja C o vértice do triângulo situado mais à direita e mais abaixo no reticulado. Assim o lado AC é a diagonal de um único retângulo que vamos denominar por $ABCD$. O terceiro ponto do triângulo será denominado por E, que não pode estar situado à esquerda de A, nem acima de A e nem à direita de B. Caso o ponto E fique fora do retângulo ele estará abaixo do lado BC do retângulo, veja a Figura 3.3. Se este for o caso, a reta vertical que passa por E encontra o lado BC um ponto F que pertence ao reticulado e fica no interior do triângulo $ACE,$ mas isto não pode ocorrer pois ACE é um triângulo fundamental. Portanto o ponto E pertence ao retângulo $ABCD$, como havíamos afirmado acima.

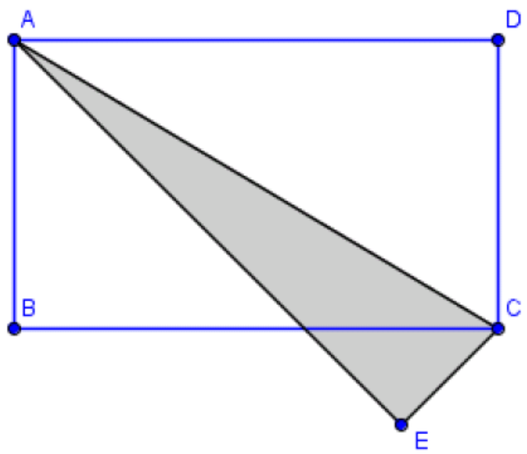

Figura 3.3 – O caso em que o ponto E é externo ao retângulo;

Teorema 3.1: A área de todo triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$ **.**

A prova deste teorema é feita com base em Liu [2]

Demonstração:

Na figura 3.4, seja D a origem dos eixos coordenados e seja AEC um triângulo fundamental tal que,

$$A = (0, s), \qquad E = (p, r) \;\; e \;\; C = (q, 0).$$

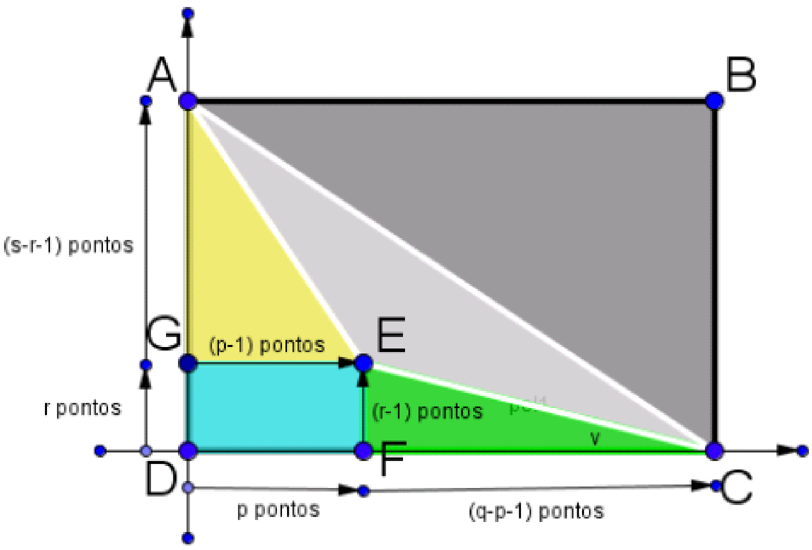

Figura 3.4 – A área do triângulo AEC é 1/2.

Deste modo, a quantidade de pontos no interior dos triângulos AGE, EFC são respectivamente,

$$\frac{1}{2}.(p - 1).(s - r - 1) \quad e \quad \frac{1}{2}.(q - p - 1).(r - 1)$$

e a quantidade de pontos no interior e sobre os lados GE e EF, exceto os pontos G e F, do retângulo GEFD é:

$$(p.r)$$

Como o triângulo AEC é fundamental, então não existem pontos da malha em seu interior nem em seu perímetro, exceto os vértices. Por outro lado, a quantidade de pontos da malha no interior do triângulo ADC é:

$$\frac{1}{2}.(q-1).(s-1),$$

logo,

$$\frac{1}{2}.(q-1).(s-1) = \frac{1}{2}.(p-1).(s-r-1) + \frac{1}{2}.(q-p-1).(r-1) + (p.r)$$

de onde resulta que:

$$qs - ps - qr = 1$$

Em relação as áreas A(R) das regiões da figura 3.2 podemos dizer que :

$$A(ADC) = A(AEC) + A(AGE) + A(GEFD) + A(EFC)$$

$$\frac{1}{2}(sq) = A(AEC) + \frac{1}{2}p(r-s) + ps + \frac{1}{2}(q-p)s$$

$$A(AEC) = \frac{1}{2}(qs-ps-qr) = \frac{1}{2}.1$$

$$A(AEC) = \frac{1}{2}$$

Como exemplo do que acabamos de ver vamos então calcular a área do polígono da figura 3.5

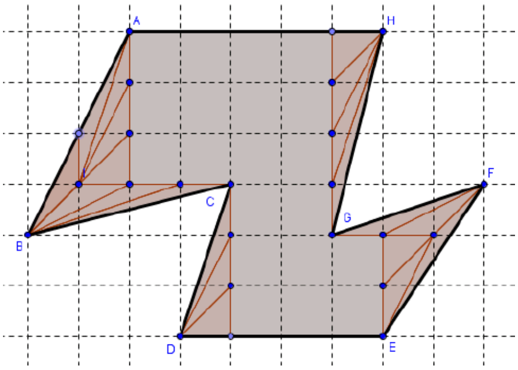

Figura 3.5 – Polígono decomposto em triângulos e retângulos fundamentais.

Observe que o polígono foi decomposto em 20 triângulos fundamentais e em 20 quadrados unitários, logo sua área é:

$$A = \frac{1}{2} . 20 + 1 . 20 = 30$$

Exercício Resolvido

1) Calcule a área do polígono ABCDEF da figura 3.6 usando triângulos fundamentais.

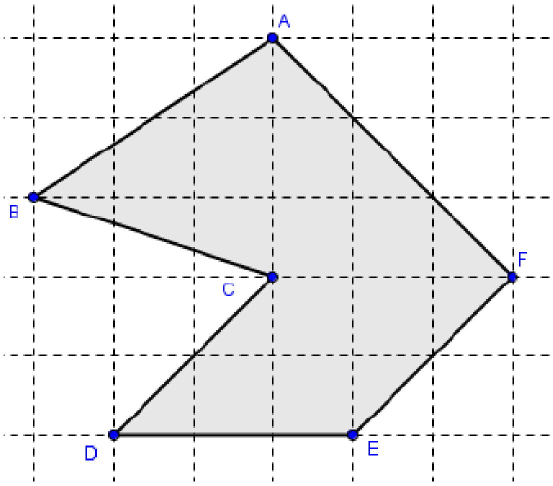

Figura 3.6 - Polígono ABCDEF

Solução: Observe que o polígono pode ser decomposto em 30 triângulos fundamentais, logo, a área deste polígono será:

$$A = \frac{1}{2} . 30 = 15$$

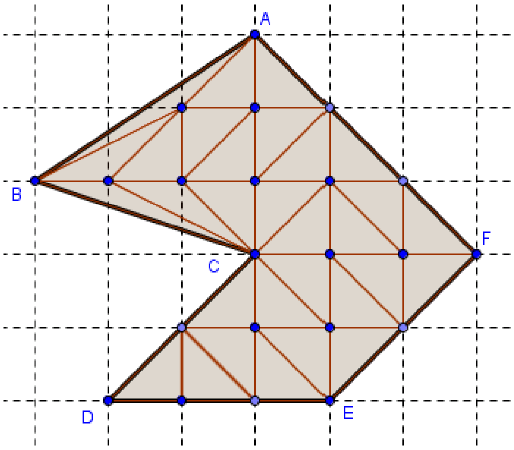

Figura 3.7 – Polígono ABCDEF decomposto em triângulos fundamentais.

4. Decompondo um Polígono em Triângulos Justapostos

Trataremos nesta seção uma forma de decompor polígonos em triângulos justapostos, ou seja, triângulos que não possuem pontos internos em comum. A figura 4.1 mostra um polígono ABCDEFG com 7 lados que foi decomposto em 5 triângulos justapostos cujos vértices são os vértices deste polígono.

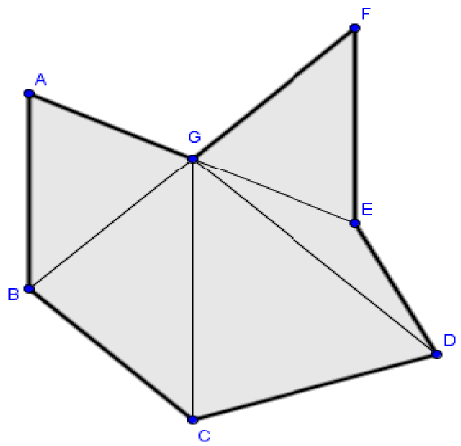

Figura 4.1 – Polígono decomposto em triângulos.

Teorema 4.1: Todo polígono com n lados pode ser decomposto em $(n - 2)$ triângulos justapostos cujos vértices são vértices do polígono dado.

Faremos uma demonstração deste teorema com base na demonstração de Melo e Pereira [3].

Demonstração: Supondo, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, seja n o menor número natural tal que existe um polígono P, com n lados, o qual não pode ser decomposto em $(n - 2)$ triângulos. Tomemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que nenhum lado de P seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja A um ponto de maior abscissa em P. Como nenhum lado de P é vertical, então A deve ser um vértice. Sejam B e C dois vértices adjacentes a A. Temos agora duas possibilidades:

1ª) O triângulo ABC não contém outros vértices de P, além de A, B e C.

2ª) O triângulo ABC contém algum outro vértice de P, além de A, B e C.

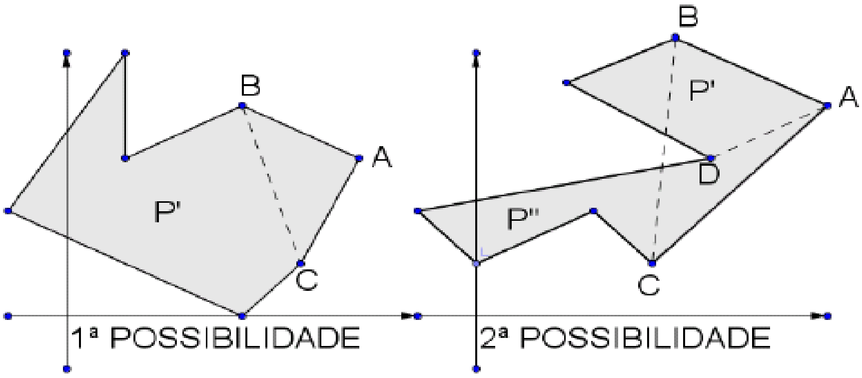

Figura 4.2 - Possibilidades

Na primeira possibilidade, o polígono P', obtido pela substituição de dos lados AB e AC por BC, tem $(n - 1)$ lados. Como $(n - 1) \geq 3$ e n é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, então para (n – 1) lados o teorema é verdadeiro e portanto pode ser decomposto em $(n - 1 - 2) = (n - 3)$ triângulos. Logo, adjuntando o triângulo ABC resulta que o polígono P pode ser decomposto em (n – 2) triângulos, o que é uma contradição.

Por outro lado, na segunda possibilidade, seja D o vértice de P, situado no interior do triangulo ABC que está mais distante do lado BC. Então o segmento de reta AD está contido no polígono P, portanto decompõe P em outros dois polígonos P' e P", o primeiro com n' e o segundo com n" lados, assim:

$$n' + n'' = n + 2$$

Como n' e n" são ambos maiores ou iguais a 3, então n' e n" são também ambos menores do que n. Deste modo, o teorema vale para P' e P" que podem ser decompostos em $(n' - 2)$ e $(n'' - 2)$ triângulos, respectivamente. Dai temos que P pode ser decomposto em $(n' + n'' - 4)$ triângulos, ou seja,

$(n + 2 - 4) = (n - 2)$ triângulos, o que é uma contradição. Completando assim a prova do Teorema 4.1.

Como consequência do Teorema 4.1 e sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° temos o seguinte teorema:

Teorema 4.2: A soma **S** dos ângulos internos de um polígono de **n** lados é igual a $\boldsymbol{S = (n-2).180°}$.

Cada um dos $(n - 2)$ triângulos na decomposição de um polígono com n lados, ou é fundamental ou possui pontos em seu interior ou em seu bordo.

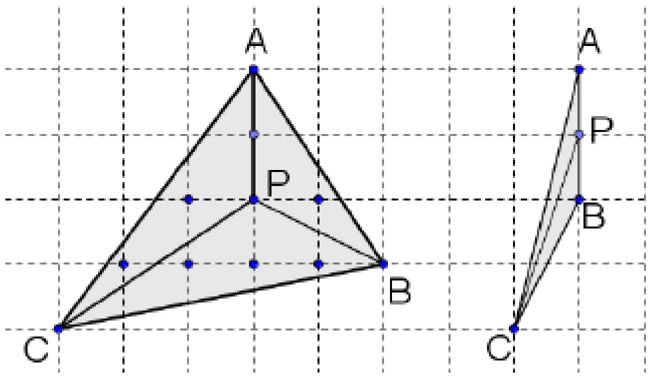

Figura 4.3 – Decomposição de triângulos em triângulos fundamentais.

Seja ABC um dos triângulos dessa decomposição. Se existir algum ponto P da rede no interior de ABC, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices A, B e C e deste modo decompomos ABC em três triângulos. Caso esse ponto esteja sobre um dos lados, digamos AB, de ABC, traçamos um segmento de reta ligando-o ao vértice oposto C e assim o decompomos em dois triângulos. Prosseguindo desta forma, com um número finito de vezes, decompomos cada triângulo da decomposição do polígono em triângulos fundamentais. Portanto, concluímos o seguinte resultado:

Teorema 4.3: Todo polígono com vértices no reticulado pode ser decomposto em triângulos fundamentais.

Exemplo: O polígono "cara de gato" da figura 4.4 pode ser decomposto em 28 triângulos fundamentais justapostos, o que implica dizer que sua área é 14.

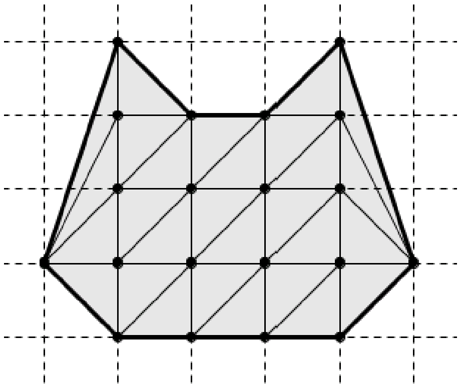

Figura 4.4 – Cara de gato;

Queremos agora, através do número de pontos internos e sobre o perímetro de um polígono, poder calcular sua área.

Pensaremos assim:

1) A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é de 180°.
2) O polígono pode ser decomposto em triângulos fundamentais justapostos.
3) Cada ponto da malha interno ao polígono é encontro de ângulos internos de triângulos fundamentais somando 360°.
4) Cada ponto sobre o bordo, exceto os vértices, são encontros de ângulos internos de triângulos fundamentais somando 180°.
5) Como todo polígono com n lados é decomposto em $(n - 2)$ triângulos justapostos, então, como consequência, a soma de todos os ângulos com vértices no vértice desse polígono é $180°(n - 2)$.

Vejamos um caso particular:

O polígono ABCDE da figura 4.5 tem 12 pontos em seu interior, contribuindo assim com 12 ângulos de 360°, e 3 pontos em seu bordo, somando mais 3 ângulos de 180°. Como ABCDE tem 5 lados, então a soma de seus ângulos internos é $(5 - 2).180° = 3\,.\,180° = 540°$.

Portanto a soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais contidos em ABCDE é $12\,.\,360° + 3\,.\,180° + 540° = 5400°$.

Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo fundamental é 180°, logo existem $5400°/180° = 30$ triângulos fundamentais contidos nesse polígono, e consequentemente sua área é $30\,.\;1/2 = 15$.

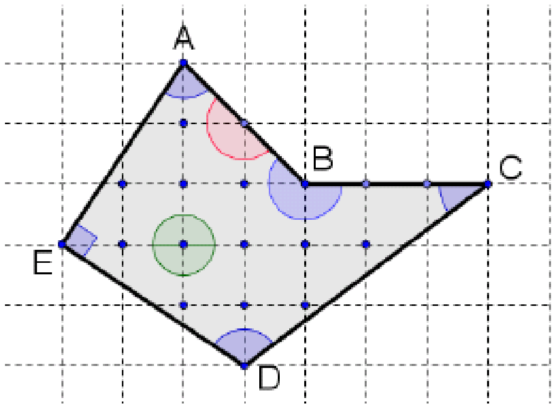

Figura 4.5 – Contando ângulos;

1) Use os pontos que estão internos e sobre o perímetro do polígono "coração" da figura 4.6 para calcular sua área.

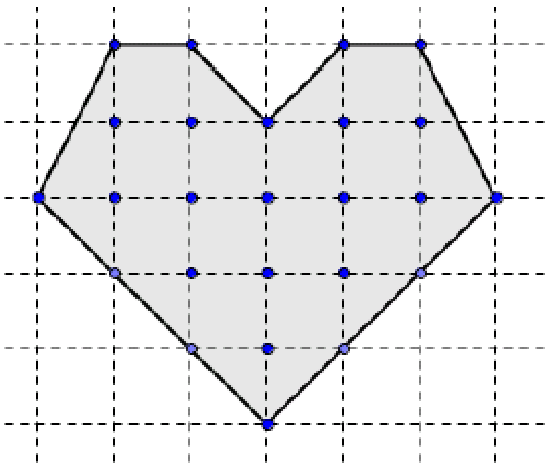

Figura 4.6 – O coração;

Solução:

Note que no seu interior temos 13 pontos que são interseções de triângulos fundamentais justapostos somando um ângulo de 360°, note também que em seu perímetro temos 4 pontos que não são vértices e que são interseções de triângulos fundamentais justapostos somando um ângulo de 180º e finalmente, observe que a soma dos ângulos cujos vértices são vértices do polígono é $6.180° = 1080°$. Logo, se somarmos os ângulos internos de todos os triângulos fundamentais justapostos que decompõe este polígono teremos $13 . 360° + 4 . 180° + 1080° = 6480°$. Portanto, podemos concluir que este polígono é decompostos em $\frac{6480°}{180°} = 36$ triângulos fundamentais justapostos e que sua área é de 18 unidades quadradas.

5. A Demonstração do Teorema de Pick

Teorema 5.1: Seja **P** um polígono reticulado simples sobre uma malha. Seja **B** o número de pontos da malha sobre o perímetro deste polígono e **I** o número de pontos da malha internos ao polígono. A área **A** do polígono **P** será dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{B} - \mathbf{1}$$

A seguinte demonstração foi feita com base em Lima [1].

Demonstração: Seja **B** o número de pontos sobre o bordo de um polígono **P** com n lados. Assim teremos uma contribuição em ângulos de $(B - n)\ 180°$ dos pontos sobre os lados e de $(n - 2)\ 180°$ dos pontos sobre os vértices, ou seja, um total de:

$$(B - n)\ 180° + (n - 2)\ 180° = 180°\, B - 360°$$

Seja agora **I** o número de pontos internos a **P**. Sendo assim, teremos uma contribuição em ângulos de $360°\, I$.

As duas contribuições em ângulos acima resulta na soma dos ângulos internos de todos os triângulos fundamentais justapostos contidos em **P**.

Sendo **T** o número de triângulos fundamentais contidos neste polígono, temos:

$$T.180° = 180°.B - 360° + 360° I \implies T = B - 2 + 2.I$$

Como a área de cada triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$, concluímos que a área **A** do polígono é,

$$A = \frac{1}{2}T$$

$$A = \frac{1}{2} \times (B - 2 + 2.I)$$

$$\boldsymbol{A = I + \frac{1}{2}B - 1}$$

concluindo assim a demonstração.

6. A Definição do Número Pi e a Área do Círculo

Como todas as circunferências são semelhantes entre si, ou seja, todas pertencem ao mesmo centro, concluiu-se que a razão entre os comprimentos de qualquer circunferência pelo seu respectivo diâmetro será sempre uma mesma constante.

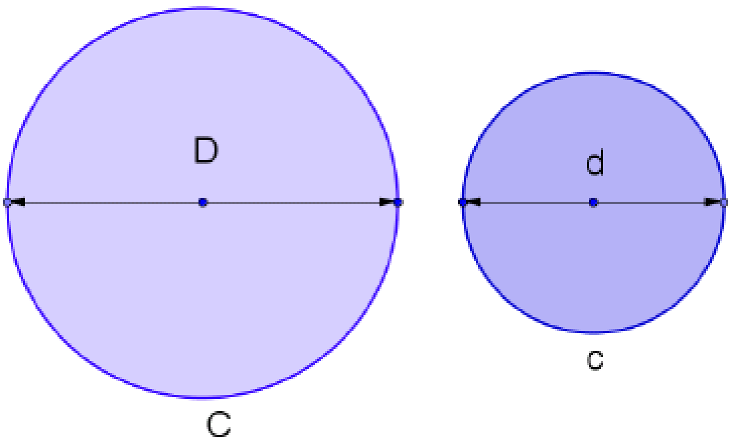

Figura 6.1 – A razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo é sempre constante.

Sendo **C** e **D** os respectivos comprimento e diâmetro da circunferência maior e **c** e **d** os respectivos comprimento e diâmetro da circunferência menor, então temos que:

$$\frac{C}{D} = \frac{c}{d} = k$$

onde k é uma constante real. Essa constate foi provada pelo matemático grego Arquimedes de Siracura (287 a.C.–212 a.C.) ele mostrou que o valor da razão entre o diâmetro e o comprimento da circunferência estava entre $3 + 1/7$ e $3 + 10/71$ que é aproximadamente 3,14, e foi estipulado que poderia ser representado pela letra do alfabeto grego $\boldsymbol{\pi}$ (pi), facilitando os cálculos.

Deste modo, podemos concluir que o comprimento **C** de uma circunferência pode ser calculada fazendo a multiplicação do comprimento de seu diâmetro **D = 2.r** pela constante $\boldsymbol{\pi}$.

Teorema 6.1: A área **A** de um círculo é calculada em função de seu raio **r** pela expressão $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\pi}.\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{2}}$.

Demonstração: Imagine uma circunferência como um polígono regular com $\boldsymbol{n}$ lados e $\boldsymbol{n}$ tão grande quanto você queira, ver figura 6.2. Pensando assim, você deve perceber que seu comprimento C se aproxima muito do perímetro P do polígono.

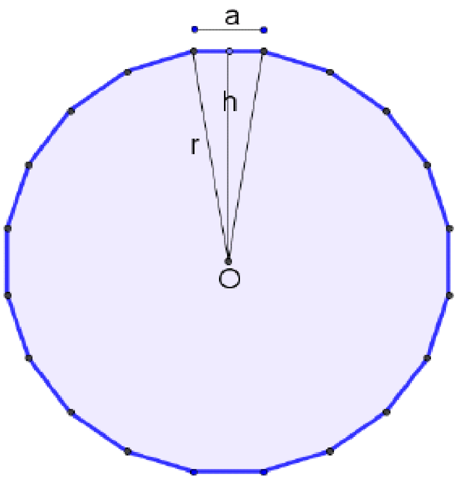

Figura 6.2 – Um círculo é um polígono regular com infinitos lados.

Deste modo, temos que:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{na}$$

onde $\boldsymbol{a}$ é a medida de cada lado deste polígono. Logo, quando $\boldsymbol{n}$ tende ao infinito, P tende ao comprimento da circunferência.

$$\lim_{\boldsymbol{n} \to \infty} (\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{r}$$

Observe na figura 7.2 que o círculo pode ser “fatiado” em n triângulos isósceles de base a e altura h e que, quando $\boldsymbol{n}$ tende para o infinito, sua medida fica muito próxima do raio $\boldsymbol{r}$ do círculo, assim:

$$\lim_{n\to\infty} h = r$$

Podemos agora aproximar a área A do círculo somando as áreas dos n triângulos que o decompõe, ou seja,

$$A = \frac{n.(a.h)}{2} = \frac{P.h}{2}$$

Fazendo o limite desta área quando n tende para o infinito.

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{Ph}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(na).h}{2}$$

$$A = \frac{(2.\pi.r).r}{2}$$

$$A = \pi.r^2$$

Concluindo assim o resultado.

7. Pick e o número Pi

O Teorema de Pick pode ser utilizado para dar uma aproximação da área de uma figura plana não necessariamente poligonal. Neste contexto, podemos então, aproximar a área de regiões circulares e esta será tão próxima da área real quanto menor for a distância entre os pontos da malha.

Podemos aproximar a área da elipse da figura 7.1 calculando a área da poligonal em azul a partir do teorema de Pick, para isso, contamos a quantidade de pontos da malha que estão em seu interior (I = 34) e contamos a quantidade de pontos que estão em seu perímetro (B = 17).

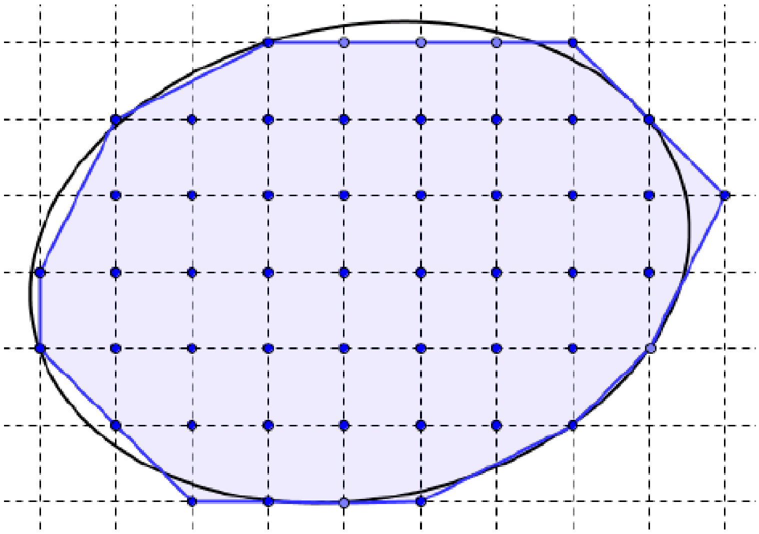

Figura 7.1 – Aproximando a área da elipse por uma poligonal.

Aplicando na fórmula de Pick,

$$A = \frac{17}{2} + 34 - 1 = 41{,}5$$

Faremos agora um estudo mais detalhado para podermos aproximar com mais precisão a área de um círculo de raio 1. Sua área certamente é maior que $2u^2$ e menor que $4u^2$, para que você entenda isso, basta contar os triângulos fundamentais que cabem dentro do círculo.

$$2u^2 < A < 4u^2$$

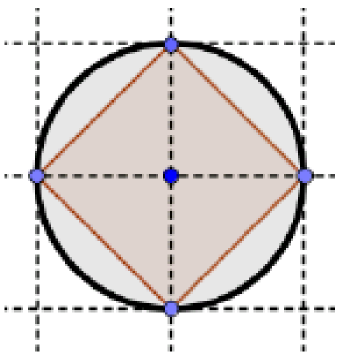

Figura 7.2 – Aproximando a área do círculo por um quadrado.

Vamos agora diminuir a distância entre os pontos da malha para $\frac{1}{3}$ e permanecer com o raio do círculo em $1u$, ver figura 7.3.

A área do círculo agora será aproximada pela área do polígono não regular de oito lados de cor avermelhada. Observe que a nossa unidade de área agora é $u^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

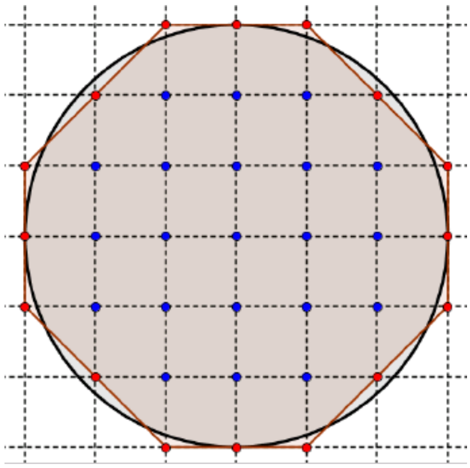

Figura 7.3 – Aproximando a área do círculo por um octógono;

Usando a Fórmula de Pick, fazemos $B = 16$ e $i = 21$, temos que a área A deste polígono é,

$$A = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}B + i - 1\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}.16 + 21 - 1\right)$$

$$A = \frac{1}{9}.28\,u^2 \approx 3{,}11u^2$$

Que como vimos no exemplo anterior é maior que $2u^2$ e menor que $4u^2$.

Já percebemos que, quanto menor a distância entre os pontos da malha onde está o círculo melhor será a aproximação de sua área. Usando agora a distância entre os pontos da malha de $\frac{1}{10}$, teremos como unidade de área:

$$u^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

Na figura 7.4 temos uma poligonal não regular de 32 lados cuja área é bem próxima da área do círculo de raio $1u$.

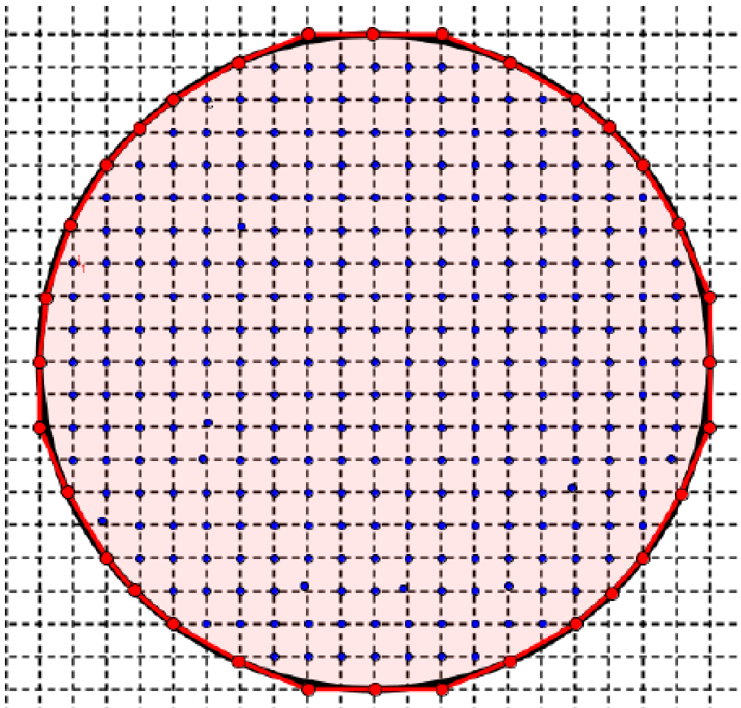

Figura 7.4 – Área do círculo aproximada um polígono não regular de 32 lados.

Para calcular a área da região cercada pela poligonal de 32 lados, observe que sobre seu perímetro temos 32 pontos e no seu interior temos 299 pontos da malha, dai pela fórmula de Pick,

$$A = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{2}B + i - 1\right) = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{2} \times 32 + 299 - 1\right)$$

$$A = \frac{1}{100} \times 314\ u^2 = 3{,}14u^2$$

Percebemos que o valor da área do círculo vai se aproximando cada vez mais de seu valor real. Poderíamos continuar com uma quantidade de pontos cada vez maior para melhor aproximação, no entanto as ferramentas que dispomos são totalmente manuais, gerando um trabalho enorme! Mas vejam que é natural que quando a quantidade de pontos tende ao infinito, o valor aproximado da área do círculo tende ao seu valor real que é o número $\boldsymbol{\pi}$ (pi).

Referências Bibliográficas

[1] Lima, Elon Lages, Meu Professor de Matemática e outras histórias, p. 102-104, Coleção Professor de Matemática, 5ª Ed., 2006, Sociedade Brasileira de Matemática.

[2] Liu, Andy C. F. Lattice Points and Pick's Theorem, Mathematcs Magazine 52 (1979) 232-235.

[3] Melo, Severino Toscano e Pereira, Antônio Luiz. Contando áreas – O Teorema de Pick, Revista do Professor de Matemática 78 (2012) 36-42.