

**Universidade Federal de Uberlândia**

**Faculdade de Matemática**

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Bilateração e Geometria de Distâncias**

**Antonielle Gomes Bezerra**



**Uberlândia-MG**

**2021**

**Antonielle Gomes Bezerra**

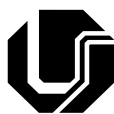
## **Bilateração e Geometria de Distâncias**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de concentração:** Matemática

**Linha de pesquisa:** Geometria de Distâncias

**Orientador(a):** Germano Abud de Rezende



**Uberlândia-MG**

**2021**



*À minha família e aos que veem na Matemática não apenas uma ciência para ajudar a entender o universo, mas sim para buscar entender, mesmo com grandes limitações, a infinita inteligência que emana de Deus.*

## **Agradecimentos**

Meus sinceros agradecimentos à Universidade Federal de Uberlândia pela oportunidade de participar da construção e da conclusão dessa pesquisa, em especial ao Professor, Dr. Germano Abud de Rezende: sem a sua dedicação, atenção e disponibilidade seria praticamente impossível ter concluído esse trabalho.

## **Resumo**

Recentemente, os problemas de geometria de distâncias euclidianas do tipo  $DMDGP_2$  tem sido resolvidos por técnicas de cálculo que utilizam variáveis discretas para o completamento de matrizes, aplicando-se os determinantes de Cayley-Menger à resolução desse tipo de problema . O trabalho que segue descrito objetiva, por sua vez, delinear a construção de algoritmos que permitam utilizar bilaterações sucessivas aplicadas aos pontos que dão origem à matriz incompleta associada a problemas da classe  $DMDGP_2$ , a fim de completar a matriz dada. O algoritmo se pauta por uma linha de raciocínio similar à que é utilizada no algoritmo *BP: Branch-And-Prune*, explorando a árvore de possibilidades gerada pelas bilaterações sucessivas e utilizando técnicas de recursividade do tipo *backtracking* para obter as soluções. Em termos da validação do algoritmo proposto, esse se mostrou eficaz, elencando todas as matrizes-soluções esperadas, em conformidade com os respectivos cálculos realizados via determinantes de Cayley-Menger.

**Palavras-chave:** Bilateração, Geometria de Distâncias, Distâncias Euclidianas, Completamento de Matrizes.

## **Abstract**

Recently, the euclidean distance geometry problem of DMDGP<sub>2</sub> type have been solved by calculation techniques based on discrete variables for matrices completion, applying the Cayley-Menger determinants to solve this kind of problem. In this work we delineate algorithms using successive bilaterations to complete the partial matrix associated to the DMDGP<sub>2</sub> instance. The algorithm is similar to the *BP: Branch-And-Prune* algorithm, exploring the tree of possibilities generated by bilaterations and making use of recursivity techniques of *back-tracking* type to found the solutions. On respect to the proposed algorithm validation, all the expected solution-matrices was founded, in compliance to the respective obtained Cayley-Menger determinants calculations.

**Keywords:** Bilateration, Distance Geometry, Euclidean Distances, Matrix Completion.

---

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	O Problema de Geometria de Distâncias . . . . .	1
1.2	O DMDGP . . . . .	2
1.2.1	Sobre a “Dualidade” entre o DGP e o EDMCP . . . . .	4
1.2.2	Sobre o número de soluções do DMDGP . . . . .	6
1.3	Determinantes de Cayley-Menger . . . . .	13
1.3.1	Aplicações ao EDMCP <sub>2</sub> . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Bilateração</b>	<b>17</b>
2.0.1	Bilaterações Sucessivas Aplicadas ao DMDGP <sub>2</sub> . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Um Algoritmo para o Completamento de Matrizes</b>	<b>32</b>
3.1	Um Exemplo com $n=6$ . . . . .	32
3.1.1	Cálculo dos valores possíveis para $D(1,4)$ . . . . .	34
3.1.2	Cálculo dos valores possíveis para $D(2,5)$ . . . . .	36
3.1.3	Cálculo dos valores possíveis para $D(1,5)$ . . . . .	37
3.1.4	Cálculo dos valores possíveis para $D(3,6)$ . . . . .	39



3.1.5	Cálculo dos valores possíveis para $D(2,6)$ . . . . .	40
3.1.6	Cálculo dos valores possíveis para $D(1,6)$ . . . . .	42
3.1.7	Completamentos da Matriz de Distâncias . . . . .	47
3.1.8	Descrição do Algoritmo de Bilaterações para o Completamento de Matrizes de Distâncias Incompletas em problemas do tipo $DMDGP_2$ . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>57</b>
	<b>Referências</b>	<b>60</b>

---

# Lista de Figuras

---

1.1	Possibilidades para a realização do vértice 4 em $\mathbb{R}^2$ .	4
1.2	Uma quase-clique sobre 4 vértices admite duas realizações incongruentes no plano.	15
2.1	Pontos no plano e vetores posição no sistema de coordenadas dado.	18
2.2	Dois triângulos com uma aresta em comum.	20
2.3	Vetor $p_{14}$ como uma soma vetorial de $p_{12}$ , $p_{23}$ e $p_{34}$ .	21
2.4	Vetor $p_{15}$ como soma vetorial de $p_{12}$ , $p_{23}$ , $p_{34}$ e $p_{45}$ .	23
2.5	Reflexões em termos da variação do sinal em $Z_{pqr}$ .	26
2.6	Vetor $p_{16}$ como soma vetorial de $p_{12}$ , $p_{23}$ , $p_{34}$ , $p_{45}$ e $p_{56}$ .	27
2.7	Vetor $p_{lm}$ como soma vetorial de $p_{l,l+1}$ , $p_{l+1,l+2}$ , $\dots$ , $p_{m-1,m}$ .	30
3.1	Observe que $D(1,4)_{[M_2M_1]} = D(1,4)_{[m_2m_1]}$ e $D(1,4)_{[M_2m_1]} = D(1,4)_{[m_2M_1]}$ .	35
3.2	Árvore de possibilidades para o completamento de uma matriz de ordem 6.	49

---

# Lista de Tabelas

---

2.1	Correspondência entre distâncias calculadas, para complemento da matriz de distâncias	
	<i>D</i> . . . . .	25
2.2	Correspondência entre distâncias calculadas, para complemento da matriz de distâncias	
	<i>D</i> . . . . .	29

---

# Lista de Símbolos

---

DDGP Discretizable Distance Geometry Problem

DGP Distance Geometry Problem

DMDGP Discretizable Molecular Distance Geometry Problem

EDMCP Euclidean Distances Matrix Completion Problem

NMR Nuclear Magnetic Resonance

## Introdução

---

Menger caracterizou vários conceitos geométricos (congruência, convexidade, etc.) em termos de distâncias. Os resultados de Menger e algumas complementações apresentadas posteriormente por Blumenthal [3] deram origem a um ramo de estudo denominado Geometria de Distâncias. Em [10], os autores estabelecem uma “dualidade” entre o DGP (Distance Geometry Problem) e o EDMCP (Euclidean Distances Matrix Completion Problem). Neste trabalho, trataremos de uma subclasse de problemas: o Problema de Geometria de Distâncias Moleculares Discretizável, em dimensão  $K = 2$ .

Mostraremos como o teorema sobre o número de soluções (em [2, 11]) pode ser utilizado em conjunto com a bilateração, para o cálculo de certas distâncias desconhecidas, para o qual faz sentido aplicar o método de bilateração. Em complementação ao estudo apresentado em [1], implementaremos um algoritmo para os cálculos das distâncias desconhecidas.

### 1.1 O Problema de Geometria de Distâncias

Em termos clássicos, o DGP, ou "Problema de Geometria de Distâncias", consiste em determinar se uma dada matriz é ou não uma matriz de distâncias euclidianas.

Conforme as explanações de Lavor (2014) em [7]: “Naquela época, a principal questão era encontrar condições necessárias e suficientes para decidir se uma dada matriz  $D$  é uma matriz de distâncias euclidianas, ou seja, se  $D$  é uma matriz simétrica, tal que existe um número inteiro  $K$  e um conjunto de pontos em  $\mathbb{R}^K$ , onde as distâncias euclidianas entre esses pontos correspondem às entradas da matriz  $D$ .”

Mais recentemente, a Geometria de Distâncias se estruturou em uma área de pesquisa que envolve conceitos tanto algébricos quanto geométricos na busca por determinar distâncias desconhecidas entre pontos, tomando como referência e base de cálculo, algumas outras distâncias que já estejam determinadas *a priori*.

Segundo Lavor, (2014) em: [7], "Atualmente, o problema fundamental da GD (Geometria de Distâncias) é determinar um conjunto de pontos em um dado espaço geométrico, cujas distâncias entre alguns deles são conhecidas."

O DDGP (Discretizable Distance Geometry Problem), ou "Problema de Geometria de Distâncias Discretizável", por sua vez, consiste em um caso particular do DGP. Diferencia-se deste peculiarmente, porque o DGP clássico utiliza uma técnica de otimização contínua para resolver o problema, ao passo que no DDGP a técnica de resolução prioriza o cálculo de soluções de vários sistemas lineares que, neste caso, podem apresentar: nenhuma, uma ou no máximo duas soluções. Ou seja, tem-se um caso discretizado de abordagem via sistemas de equações, com universo de soluções finito.

De acordo com Lavor (2014) em [7]: "Além da teoria matemática associada à GD, o interesse por esse tópico de pesquisa explica-se pela riqueza e variedade de suas aplicações. Podemos citar, como exemplo, aplicações em astronomia, bioquímica, estatística, nanotecnologia, robótica e telecomunicações."

Uma outra subclasse do DGP com aplicações práticas de suma importância, principalmente para as ciências químicas e biológicas é o DMDGP (Discretizable Molecular Distance Geometry Problem), ou Problema de Geometria de Distâncias Moleculares Discretizável.

O foco deste trabalho será analisar o DMDGP em dimensão 2. Entretanto não adotaremos a abordagem clássica, que determina as realizações no plano euclidiano. Iremos determinar o completamento da matriz parcial de distâncias, a partir das distâncias conhecidas, através do método de bilateração.

## 1.2 O DMDGP

De acordo com Abud (2014) em [2]: "A relação entre moléculas e grafos é provavelmente a mais profunda existente entre química e matemática discreta."

Conforme elucida Lavor (2014) em [7]: "Atualmente, a aplicação de maior destaque para a GD está relacionada à Geometria Molecular, de forma mais específica, ao problema de determinar estruturas tridimensionais de moléculas de proteínas, utilizando dados de ressonância magnética nuclear, que

abreviamos por RMN."

Segundo os autores de [8]: "Experiências em NMR (Nuclear Magnetic Resonance) ou Ressonância Magnética Nuclear, podem ser usadas para se determinar um conjunto de certas distâncias euclidianas entre átomos numa molécula. Estas, por sua vez, podem ser usadas para determinar a sua estrutura, isto é, as posições relativas dos átomos em  $\mathbb{R}^3$ ."

No *K-Problema de Geometria de Distâncias Molecular Discretizável* (DMDGP<sub>K</sub>), existe uma ordem sobre  $V$  tal que quaisquer  $(K+1)$  vértices consecutivos induzem uma clique em  $G$ , ou seja, o conjunto  $U_v$  dos vértices adjacentes ao vértice  $v$  (vizinhos de  $v$ ), deve ser constituído dos  $K$  predecessores imediatos de  $v$ . Particionamos o conjunto de aresta  $E$  em dois subconjuntos disjuntos  $E_D$  e  $E_P$ . As **arestas de discretização** podem ser descritas como  $E_D = \{\{u, v\} \in E : |u - v| \leq K\}$  e as **arestas de poda** são dadas por  $E_P = E \setminus E_D$ . Tal problema surgiu de um interesse prático em conformação molecular e, por este motivo, vamos (re)defini-lo formalmente para  $K = 3$ :

*Problema de Geometria de Distâncias Moleculares Discretizável (DMDGP)*: Dado um grafo  $G = (V, E, d)$ ,  $|V| = n$ , tal que existe uma ordem

$$\rho: V \rightarrow \{1, \dots, n\}, \quad (1.1)$$

sobre  $V$  satisfazendo:

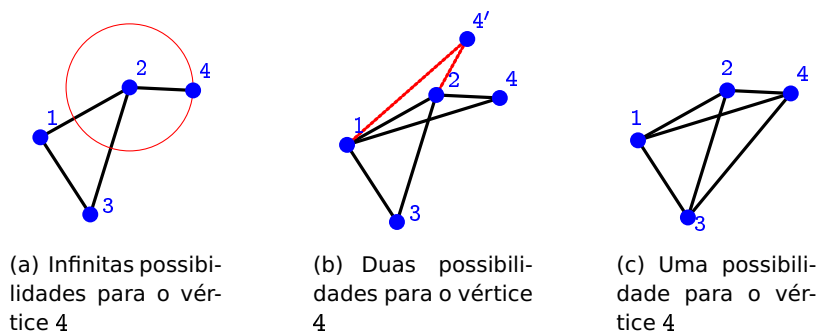
- (i)  $E$  contém todas as 4-cliques de vértices consecutivos:  $\forall i \in \{4, \dots, n\}, \forall j, k \in \{i - 3, \dots, i\} \Rightarrow (\{j, k\}) \in E$ ;
- (ii) as seguintes desigualdades triangulares são satisfeitas:  $d_{i-1, i+1} < d_{i-1, i} + d_{i, i+1}, \forall i \in \{2, \dots, n - 1\}$ .

Perguntamos: existe uma realização  $x: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\|x_u - x_v\| = d_{uv}$  para cada  $\{u, v\} \in E$ ?

Duas soluções  $x$  e  $y$  são incongruentes se geram conjuntos de distâncias distintos, isto é,  $\|x_u - x_v\| \neq \|y_u - y_v\|$  para quaisquer  $u, v \in V$ . Pode ser mostrado que o número de soluções incongruentes do problema é sempre uma potência de 2, com probabilidade 1.

Dentre os métodos que se destacam para a resolução deste tipo de problema temos o algoritmo combinatorial "BP"(Branch-and-Prune).

Ilustraremos o caso  $K = 2$ , por este elucidar muito bem a situação geométrica. Consideramos  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  (veja a Figura 1.1).



**Figura 1.1:** Possibilidades para a realização do vértice 4 em  $\mathbb{R}^2$ .

À esquerda, temos  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$  e existe uma quantidade não enumerável de posições para o vértice 4. No centro, adicionamos a aresta  $\{1, 4\}$ , e temos exatamente duas possíveis posições para o vértice 4. À direita, adicionamos agora a aresta  $\{3, 4\}$ , e temos uma única possibilidade.

Assim, se usamos uma única distância  $(d_{24})$  para realizar  $x_4$ , temos incontáveis soluções, mas se usamos duas  $(d_{14}$  e  $d_{24})$  ou três  $(d_{14}, d_{24}$  e  $d_{34})$ , teremos um número finito de soluções.

Observe que para o  $\text{DMDGP}_K$ , temos uma situação típica da figura (b): na ordem dada, temos duas realizações possíveis para um vértice  $v$ , para cada realização dos vértices anteriores, já que conhecemos  $K$  distâncias do vértice  $v$  aos seus predecessores imediatos. Portanto, assumindo uma realização dos primeiros  $K + 1$  vértices como parte dos dados de entrada, teremos duas possíveis posições para  $v_{K+2}$ , quatro para  $v_{K+3}$  e assim por diante, de forma que  $|X| = 2^{n-K-1}$ . A situação fica mais interessante quando temos arestas adicionais em  $E$ , isto é, se conhecemos valores extras de distâncias além daqueles exigidos no DMDGP. Tais valores podem, eventualmente, tornar algumas realizações infactíveis.

O algoritmo BP encontra todas as soluções do DMDGP. A cada passo do BP, podemos localizar o  $i$ -ésimo átomo em duas posições  $x_i$  e  $x'_i$ . Entretanto, alguma ou ambas as posições podem ser infactíveis, com respeito a certas restrições sobre as distâncias. A busca se ramifica em todas as posições atômicas que são factíveis com relação a todas as restrições e, se uma posição não é factível, ocorre a poda.

O algoritmo acima pode ser encontrado em [9] e leva em consideração as duas posições para o quarto vértice, ou seja, o número de soluções encontrado será o dobro do número de realizações incongruentes.

### 1.2.1 Sobre a “Dualidade” entre o DGP e o EDMCP

O problemas de completamento de matrizes de distâncias euclidianas (EDMCP) está, por sua natureza matemática, correlacionado com o problema de geometria de distâncias DGP.



Seguindo o raciocínio de Laurent (2009), em [6], "No EDMCP, é dada uma matriz parcial de distâncias (isto é, certas entradas são desconhecidas)  $A$ , e desejamos obter como solução um par  $(\bar{A}, K)$ , onde  $\bar{A}$  é um completamento simétrico de  $A$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , tais que:

- (a)  $\bar{A}$  é uma matriz de distâncias euclidianas em  $\mathbb{R}^K$  e;
- (b)  $K$  é o menor valor possível.

Em algumas aplicações a dimensão  $K$  é dada, e nos referimos ao problema como EDMCP $_K$ .

Conforme descrito nesta seção, é possível verificar-se a existência de uma dualidade entre o Problema de Geometria de Distâncias (DGP) e o Problema de Completamento de Matrizes de Distâncias Euclidianas (EDMCP).

Segundo as explicações de Liberti e Lavor, em: [10], no que tange à solução de um DGP, emprega-se um modelo generalizado para esse tipo de problema, a partir do qual procura-se por uma realização em  $\mathbb{R}^k$ , de um grafo simples, ponderado, não direcionado,  $G = (V, E, d)$ , onde se assume, para evitar o caso trivial, que  $n = |V| > K$ .

Assim, dado um inteiro positivo  $K$  e um grafo, simples, ponderado, não-direcionado,  $G = (V, E, d)$ , o Problema de Geometria de Distâncias (DGP) questiona se existe uma realização  $x : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ , tal que:

$$\forall \{u, v\} \in E, \|x_u - x_v\|^2 = d_{u,v}^2,$$

onde a norma é assumida como sendo a norma euclidiana.

De acordo com os autores de [4], citados pelos autores de [10], "é fácil perceber que o EDMCP $_K$  está fortemente relacionado com o DGP $_K$ : se  $x$  é uma realização válida de  $G$ , então a matriz parcial de distâncias pode ser completada em tempo polinomial, e se  $\bar{A}$  é um completamento válido de  $A$ , então o grafo do DGP correspondente é um clique, cuja realização em  $\mathbb{R}^k$  pode ser encontrada em tempo polinomial."

Nesse sentido, segundo os autores de [10]: "Formalmente, temos dois operadores:  $M(G) = A$  para um grafo  $G$  e sua matriz parcial correspondente  $A$ , e  $G(A) = G$  para uma matriz parcial  $A$  e seu grafo correspondente  $G$ . É fácil perceber que  $M \circ G = G \circ M = I$ , onde  $I$  é o operador identidade. Assim, os grafos ponderados e as matrizes simétricas parciais são "duais" um do outro através das aplicações  $M$  e  $G$ ."

Para exemplificar tal correspondência, vamos considerar um exemplo. Seja  $G = (V, E, a)$  um grafo

simples, não direcionado, onde  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$ ,  $a : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  dada por  $a(v_i, v_j) = a(\{v_i, v_j\}) = |i - j|$ . Neste caso, obtemos a seguinte matriz para  $G$ :

$$\mathcal{M}(G) = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & ? \\ 1 & 0 & 1 & ? \\ 2 & 1 & 0 & ? \\ ? & ? & ? & 0 \end{bmatrix}.$$

Reciprocamente,  $\mathcal{G}(A) = G = (V, E, a)$ , onde  $V, E, a$  são definidos como acima.

A partir das definições feitas anteriormente, percebemos que o  $\text{DMDGP}_K$  está fortemente conectado a um  $\text{EDMCP}_K$ : cada instância  $G = (V, E, d)$  do  $\text{DMDGP}_K$  pode ser transformada em tempo linear em uma instância de um  $\text{EDMCP}_K$ . Assim, dada uma instância do  $\text{DMDGP}_K$ , definimos a *forma padrão* da matriz parcial dos quadrados de distâncias euclidianas  $Q$  do  $\text{EDMCP}_K$  associado, como sendo a matriz parcial  $Q = [d_{ij}^2]$ , tal que  $d_{ij}$  é a distância associada aos vértices  $i = \rho(u)$  e  $j = \rho(v)$ . Tal forma padrão garante que todos os elementos do conjunto  $\{d_{ij}^2 : |i - j| \leq K\}$  são conhecidos. Assim, por exemplo, a forma padrão de uma matriz parcial do  $\text{EDMCP}_2$  associado a um  $\text{DMDGP}_2$  com  $|V| = 5$ , tal que apenas as distâncias necessárias pela definição do  $\text{DMDGP}_2$  (três vértices consecutivos induzem uma clique) são conhecidas é a seguinte:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & ? & ? \\ & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & ? \\ & & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ & & & 0 & d_{45}^2 \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

onde omitimos os elementos abaixo da diagonal principal por se tratar de uma matriz simétrica.

### 1.2.2 Sobre o número de soluções do DMDGP

Em [2] o Corolário 3.1.5 fornece uma importante propriedade sobre os complementos das matrizes de distâncias associadas a um DMDGP:

#### **Teorema 1.1: (Corolário 3.1.5 em [2])**

Considere uma instância do  $K$ DMDGP com  $n > K + 2$  pontos, tal que a distância  $d_{1n}$  do primeiro ao último ponto é desconhecida e tal que existe mais de um complemento para a matriz parcial de distâncias euclidianas  $Q = [d_{ij}]$ . Então, com probabilidade 1, cada conjunto de valores possíveis para as distâncias desconhecidas  $\{d_{ij} : (i, j) \neq (1, n)\}$  gera valores (possíveis) distintos para

$d_{1n}$ . Ou seja, com probabilidade 1, não existem completamentos distintos  $Q_1$  e  $Q_2$  de  $D$  tais que  $Q_1(1, n) = Q_2(1, n)$ .

Para exemplificar a utilidade do resultado acima, vamos considerar uma instância de um DMDGP<sub>2</sub> com  $n = 5$  vértices e  $E_P = \emptyset$ . A matriz de distâncias associada tem a forma padrão:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & ? & ? \\ & 0 & \bullet & \bullet & ? \\ & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & 0 & \bullet \\ & & & & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $\bullet$  indica valores de distâncias conhecidos, e omitimos as entradas abaixo da diagonal por se tratar de uma matriz simétrica. Existem dois valores distintos para a entrada  $Q(1, 4)$  que correspondem às duas realizações incongruentes da 4-clique associada aos vértices 1,2,3,4. Analogamente, existem dois valores distintos para a entrada  $Q(2, 5)$  que correspondem às duas realizações incongruentes da 4-clique associada aos vértices 2,3,4,5. Logo temos quatro possibilidades para o par  $(Q(1, 4), Q(2, 5))$ . Para cada um destes pares existe um único valor para  $Q(1, 5)$  que corresponde a realização da 5-clique associada aos vértices 1,2,3,4,5, onde apenas  $Q(1, 5)$  é desconhecida. Logo temos quatro possibilidades para  $Q(1, 5)$  e cada possibilidade está associada a um único par  $(Q(1, 4), Q(2, 5))$ . Podemos garantir que estes quatro valores possíveis para  $Q(1, 5)$  são distintos? De acordo com o teorema acima, eles são distintos com probabilidade 1.

Em [2] os autores apresentam um resultado sobre o número de soluções de uma instância  $G = (V, E, d)$  de um DMDGP<sub>K</sub> e a contagem será feita a partir da matriz parcial do EDMCP<sub>K</sub> associado.

Seja  $Q = [d_{ij}^2]$  a matriz parcial de quadrados de distâncias do EDMCP<sub>K</sub> associado a um DMDGP<sub>K</sub> dado. Devido à simetria, consideramos apenas  $i \leq j$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ .

Definimos a  **$k$ -ésima diagonal** (ou simplesmente  **$k$ -diagonal**) como o conjunto de elementos  $Q(i, j)$  de  $Q$  que satisfazem  $j - i = k$ , para  $k = 0, \dots, n - 1$ .

Chamaremos de  **$(i, j)$ -submatriz principal de  $Q$**  a submatriz  $\hat{Q}_{i,j}$ , de ordem  $j - i + 1$ , dada por  $(d_{rs}^2)_{r,s=i}^j$ , ou seja, constituída pelas linhas  $i \leq r \leq j$  e colunas  $i \leq s \leq j$  de  $Q$ . Abaixo, uma matriz  $Q$  e,

em destaque, uma  $(i, j)$ -submatriz principal de  $Q$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & d_{1,i+1}^2 & \cdots & d_{1j}^2 & \cdots & d_{1n}^2 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \boxed{0} & d_{i,i+1}^2 & \cdots & d_{ij}^2 & \cdots & d_{in}^2 \\ & & & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \ddots & d_{j-1,j}^2 & \cdots & d_{j-1,n}^2 \\ & & & & & 0 & \cdots & d_{jn}^2 \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste trabalho, iremos sempre considerar instâncias que ocorrem com probabilidade 1, ou seja, para cada entrada desconhecida na  $(K + 1)$ -diagonal, temos dois possíveis valores. Além disso, valores distintos para a  $(K + 1)$ -diagonal geram valores distintos para a  $k$ -diagonal ( $k \geq (K + 2)$ ).

Em [9], os autores provaram que, se a última distância  $d_{1n}$  é conhecida, existe um único completamento para a matriz incompleta  $Q$  associada. Assim, dada uma distância de poda  $d_{ij}$  (ou seja,  $\{i, j\} \in E_P$ ), aplicamos tal resultado à  $(i, j)$ -submatriz principal de  $Q$  e concluímos que tal submatriz admite um único completamento.

Antes de enunciarmos o resultado sobre a contagem do número de completamentos da matriz de distâncias associada ao  $\text{DMDGP}_K$  vamos considerar um exemplo.

Considere uma instância do  $\text{DMDGP}_2$ , com 6 vértices, cuja matriz parcial de distâncias associada (na forma padrão) é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & ? & ? & ? \\ & 0 & \bullet & \bullet & ? & ? \\ & & 0 & \bullet & \bullet & ? \\ & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $\bullet$  indica as distâncias conhecidas.

Para cada 4-clique, associada às  $(i, i + 3)$ -submatrizes principais, obtemos duas possibilidades distintas para o elemento  $d_{i,i+3}^2$  na 3-diagonal,  $i = 1, 2, 3$ , conforme indicado (em vermelho) abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & 2 & ? & ? \\ & 0 & \bullet & \bullet & 2 & ? \\ & & 0 & \bullet & \bullet & 2 \\ & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Considere agora uma posição qualquer  $d_{i,i+4}^2, i = 1, 2$ , na 4-diagonal. Cada  $(i, i + 4)$ -submatriz principal contém duas entradas da 3-diagonal e, ao todo, temos 4 combinações de possibilidades para estas duas posições. Assim, para cada  $(i, i + 4)$ -submatriz principal (de ordem 5), obtemos um valor para  $d_{i,i+4}^2$ . Tais valores são distintos com probabilidade 1. Logo, temos 4 valores distintos possíveis para cada posição na 4-diagonal, conforme indicado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & 2 & 4 & ? \\ & 0 & \bullet & \bullet & 2 & 4 \\ & & 0 & \bullet & \bullet & 2 \\ & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que, escolhido um valor de distância para um elemento na 4-diagonal, os dois elementos da 3-diagonal que deram origem a este valor ficam determinados (e vice-versa). Assim, ao considerarmos a  $(1, 6)$ -submatriz principal (que é a própria matriz  $A$ ), esta contém três entradas da 3-diagonal e, ao todo, temos 8 combinações de possibilidades para estas três posições. Escolhida uma destas combinações de possibilidades, os elementos da 4-diagonal desta submatriz estão determinados obtemos um valor para  $d_{1,6}^2$ .

Procedendo desta maneira obtemos, via princípio multiplicativo, as seguintes possibilidades (dis-

tintas) para cada entrada desconhecida:

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & 2 & 4 & 8 \\ & 0 & \bullet & \bullet & 2 & 4 \\ & & 0 & \bullet & \bullet & 2 \\ & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe agora que, fixados (escolhidos) os elementos da 3-diagonal, os demais ficam determinados, de acordo com o processo acima. Sendo assim, o total de completamentos distintos (com probabilidade 1) é igual a 8. Cada matriz completa está associada a uma única realização possível em  $\mathbb{R}^2$ . Assim, o total de realizações para a instância, cuja matriz associada é a matriz  $A$  acima, é  $8 = 2^3$ .

Vamos considerar agora uma instância do DMDGP<sub>2</sub> com 7 vértices, cuja matriz parcial de distâncias é:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & ? & ? & \bullet & ? \\ & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & ? & ? \\ & & 0 & \bullet & \bullet & ? & ? \\ & & & 0 & \bullet & \bullet & ? \\ & & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que conhecemos a entrada  $(1, 6)$  da matriz  $B$ . Logo, só teremos uma possibilidade para as entradas  $(1, 4)$ ,  $(3, 6)$  (a entrada  $(2, 5)$  já está fixada). De fato, de acordo com a análise feita no exemplo anterior aplicada à  $(1, 6)$ -submatriz principal, o número de possibilidades para a entrada  $(1, 6)$  é o produto das possibilidades para cada elemento do conjunto  $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ , como destacado abaixo:

$$\hat{B}_{1,6} = \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & 1 & ? & \bullet \\ & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & ? \\ & & 0 & \bullet & \bullet & 1 \\ & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Continuando o raciocínio, como o conjunto de entradas  $\{(1,5), (3,6)\}$  da 3-diagonal está unicamente determinado, obtemos uma única possibilidade para as entradas  $(1,5)$  e  $(2,6)$ .

Para a entrada  $(4,7)$ , obtemos duas possibilidades distintas que correspondem às duas realizações incongruentes da 4-clique associada aos vértices 4,5,6,7. Consequentemente, via princípio multiplicativo, temos também duas possibilidades para cada entrada restante na sétima coluna (basta multiplicar as possibilidades para os elementos da 3-diagonal na  $(i,7)$ -submatriz correspondente,  $i = 1,2,3,4$ ). Resumindo, obtemos as seguintes possibilidades para o complemento de  $B$  (em vermelho):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & 1 & 1 & \bullet & 2^1 \\ & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & 2^1 \\ & & 0 & \bullet & \bullet & 1 & 2^1 \\ & & & 0 & \bullet & \bullet & 2^1 \\ & & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, temos 2 complementos distintos para  $B$  e, consequentemente, duas realizações incongruentes em  $\mathbb{R}^3$ .

Finalizaremos com um último exemplo. Para uma matriz parcial de quadrados de distâncias  $Q$ , associada a um  $\text{DMDGP}_2$  com  $|V| = 8$ , onde  $E_P = \emptyset$  obtemos as seguintes possibilidades para cada entrada desconhecida de  $D$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \bullet & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ & 0 & \bullet & \bullet & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ & & 0 & \bullet & \bullet & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ & & & 0 & \bullet & \bullet & 2^1 & 2^2 \\ & & & & 0 & \bullet & \bullet & 2^1 \\ & & & & & 0 & \bullet & \bullet \\ & & & & & & 0 & \bullet \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

O teorema a seguir, que pode ser encontrado em [2], generaliza as ideias acima.

**Teorema 1.2: (Teorema 3.1.10 em [2])**

Dada uma instância de um  $K$ DMDGP,  $G = (V, E, d)$ , com  $|V| = n$ , considere a matriz parcial  $D$  do EDMCP $_K$  associado, dada de acordo com a ordem em  $V$  que garante que todas as distâncias  $d_{ij}$ , com  $|i - j| \leq K$ , são conhecidas (a matriz  $D = [d_{ij}]$  está na forma padrão). Assim, com probabilidade 1, temos que:

1. Se o valor de uma entrada  $d_{ij}$ , com  $|i - j| \geq K + 2$ , é conhecido, então existe apenas um completamento para a  $(i, j)$ -submatriz principal  $\hat{D}_{i,j}$ .
2. Existem no máximo 2 possíveis valores reais distintos para cada entrada desconhecida  $d_{\ell, \ell+(K+1)}$ ,  $\ell = 1, \dots, n - (K + 1)$ , na  $(K + 1)$ -diagonal da matriz incompleta  $D = [d_{ij}]$ . Mais ainda, existirá exatamente um valor possível para uma certa entrada desconhecida  $d_{\ell, \ell+(K+1)}$  se, e somente se, existir uma entrada conhecida  $d_{ij}$  com  $i \leq \ell < \ell + (K + 1) \leq j$ .
3. Se uma  $(i, j)$ -submatriz principal  $\hat{D}_{i,j}$  é tal que todas as distâncias na  $(K + 1)$ -diagonal são conhecidas, então existe um único completamento possível para  $\hat{D}_{i,j}$ .
4. O número de possibilidades distintas para uma entrada desconhecida  $d_{ij}$  de  $D$ , com  $|i - j| \geq K + 2$ , é igual ao produto do número de possibilidades para cada elemento da  $(K + 1)$ -diagonal da submatriz principal  $\hat{D}_{i,j}$ .

Finalizamos esta seção, destacando que os resultados sobre o números de soluções de um DMDGP apresentados acima, possuem uma versão que utiliza a Teoria de grupos e pode ser encontrado em [12]. Esta abordagem foge um pouco do objetivo principal deste trabalho, que é o tratamento “dual” do DMDGP e por este motivo preferimos fazer a “contagem” a partir das matrizes de distâncias.



### 1.3 Determinantes de Cayley-Menger

Segundo Blumenthal (1953), citado por Havel em [5]: “A Geometria de Distâncias pode ser definida como a classificação e o estudo de espaços geométricos através dos significados das métricas que podem ser neles definidas.”

Neste contexto, os determinantes de Cayley-Menger desempenham um papel de grande importância no estudo dos espaços euclidianos.

Definimos o **bideterminante de Cayley-Menger** associado às seqüências de pontos  $P_{i_1}, \dots, P_{i_n}$  e  $P_{j_1}, \dots, P_{j_n}$ , em algum espaço euclidiano, por

$$\text{CM}(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d_{i_1, j_1}^2 & \cdots & d_{i_1, j_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{i_n, j_1}^2 & \cdots & d_{i_n, j_n}^2 \end{vmatrix}, \quad (1.2)$$

onde  $d_{i,j}^2 = \|P_i - P_j\|^2$ . Quando as seqüências de pontos são as mesmas, escrevemos simplesmente  $\text{CM}(i_1, \dots, i_n)$  e nos referimos a este determinante como o **determinante de Cayley-Menger** associado ao subconjunto de pontos  $P_{i_1}, \dots, P_{i_n}$ . Assim, temos:

$$\text{CM}(i_1, \dots, i_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & d_{i_1, i_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{i_n, i_1}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

Devido ao significado geométrico, alguns autores acrescentam o fator  $\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$  na definição acima. Para fazer uso deste artifício e evitar confusões futuras, definimos:

$$D(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \text{CM}(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n); \quad (1.4)$$

$$D(i_1, \dots, i_n) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \text{CM}(i_1, \dots, i_n); \quad (1.5)$$

e quando utilizarmos a notação CM iremos dizer **(bi)determinante de Cayley-Menger com sinal**.

Para nos familiarizarmos com os determinantes de Cayley-Menger, observemos inicialmente que,

para um par de pontos  $\{P_1, P_2\}$ , em algum espaço euclidiano, vale:

$$D(1,2) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 \end{vmatrix} = d_{12}^2.$$

Logo,  $D(i, j)$  é igual ao quadrado da distância entre os pontos  $P_i$  e  $P_j$ .

Para três ou mais pontos, vamos considerar o simplex  $\Delta$  com vértices em  $P_1, \dots, P_{k+1}$  ( $K \geq 2$ ) e  $P_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}) \in \mathbb{R}^k$ ,  $1 \leq i \leq (k+1)$ . O determinante  $D(1, 2, \dots, k+1)$  é proporcional ao quadrado do  $k$ -volume do simplex definido por estes  $k+1$  pontos.

Ainda, para três pontos  $P_i, P_j, P_k$ , o bideterminante  $D(i, j; i, k)$  é igual ao produto interno entre os vetores  $(P_j - P_i)$  e  $(P_k - P_i)$ .

Mais detalhes e outros significados geométricos relacionados a tais determinantes podem ser encontrados em [2].

Uma consequência direta dessa propriedade é que, dados três pontos distintos  $P_1, P_2, P_3$  não colineares, para determinar se ao adicionarmos quarto ponto  $P_4$  a este conjunto de pontos, tal conjunto ainda é imersível em  $\mathbb{R}^2$ , é suficiente verificar se o determinante de Cayley-Menger calculado sobre esses quatro pontos é nulo, ou seja,  $CM(P_1, P_2, P_3, P_4) = 0$ .

Em [3] podemos encontrar condições necessárias e suficientes para a imersibilidade de pontos em  $\mathbb{R}^k$ , a partir dos determinantes de Cayley-Menger.

### 1.3.1 Aplicações ao EDMCP<sub>2</sub>

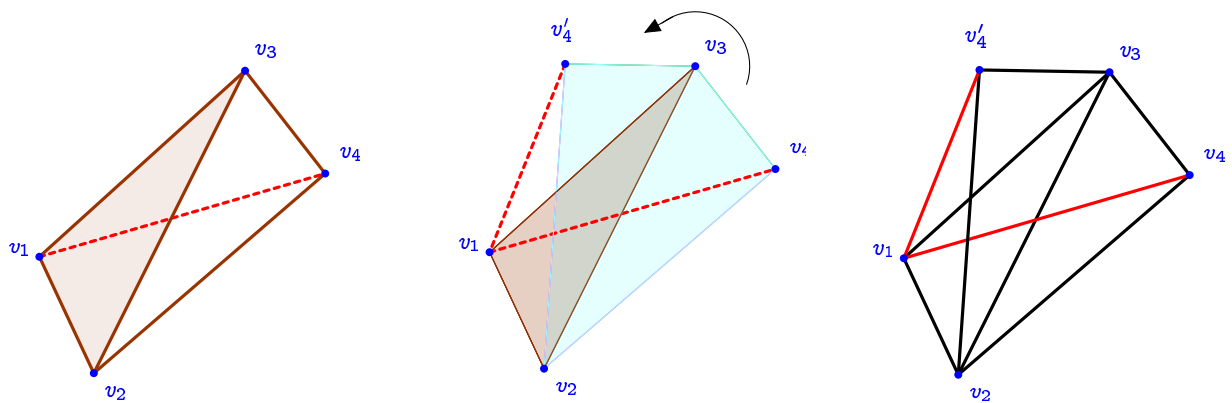
As demonstrações ou referências para os resultados enunciados nesta seção podem ser encontradas em [2], na seção 2.3.

Considere uma matriz parcial de distâncias de um EDMCP<sub>2</sub> associado a um DMDGP, tal que a distância  $d_{14}$  é desconhecida. Façamos  $\delta = d_{14}^2$  e consideremos a matriz  $Q$  dos quadrados das distâncias:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & \delta \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ \delta & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação quadrática  $CM(Q, \delta) = 0$  (os valores de  $\delta$  que anulam  $CM(Q)$ ) tem solução real se, e somente se,  $Q$  é uma matriz de distâncias euclidianas em  $\mathbb{R}^2$ . Neste caso, ela tem duas soluções distintas  $\delta^1, \delta^2$ , que são dois valores válidos para a distância desconhecida  $d_{14}^2$ .

Este resultado acima continua válido se considerarmos a realização em  $\mathbb{R}^K$  de uma quase-clique (uma clique com uma aresta faltante) sobre  $K + 2$  vértices de um DMDGP $_K$ . Enfatizamos a dependência do número de vértices em relação ao espaço euclidiano  $\mathbb{R}^K$ , isto é, para uma quase-clique sobre  $K + r$  vértices,  $r \geq 3$ , o resultado não é válido (e tal caso será tratado mais adiante). É essencial que tenhamos  $r = 2$ . No caso  $K = 2$ , cada possibilidade para a distância desconhecida dá origem a duas realizações em  $\mathbb{R}^2$ . Ilustramos os casos  $K = 2$  na Figura 1.2.



(a) Uma quase-clique sobre 4 vértices. A princípio, sabemos que podemos realizar os 4 vértices no espaço. (b) Se exigimos 3-volume nulo, imagine que  $v_4$  pode se mover, “preso” a  $v_2$  e  $v_3$ . (c) Obtemos duas posições de modo a obter 3-volume nulo (realização em  $\mathbb{R}^2$ ), que correspondem aos dois possíveis valores de  $d_{15}$ .

**Figura 1.2:** Uma quase-clique sobre 4 vértices admite duas realizações incongruentes no plano.

Considere agora uma matriz parcial de distâncias associada a uma instância de um DMDGP, tal que apenas a distância  $d_{15}$  é desconhecida. Seja  $Q$  a matriz dos quadrados das distâncias e façamos  $\delta = d_{15}^2$ :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & \delta \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & d_{25}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & d_{35}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & d_{45}^2 \\ \delta & d_{52}^2 & d_{53}^2 & d_{54}^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, a equação quadrática  $CM(Q, \delta) = 0$  tem uma única solução real, que é o único valor válido para a distância desconhecida  $d_{15}$ .

O resultado acima também é válido se considerarmos uma matriz de distâncias de ordem  $n$  com

$n \geq 6$ . Ou seja, se consideramos uma matriz parcial de distâncias  $Q = [d_{ij}^2]$  associada a uma instância de um  $\text{DMDGP}_2$ , tal que apenas a distância  $d_{1n}$  é desconhecida e fazemos  $\delta = d_{1n}^2$  então, a equação quadrática  $\text{CM}(Q, \delta) = 0$  tem uma única solução real, que é o único valor válido para a distância desconhecida  $d_{1n}$ .

No próximo capítulo veremos uma aplicação muito importante dos determinantes de Cayley-Menger na dedução das fórmulas de bilateração, que são o foco principal do nosso trabalho.

## Bilateração

Dada uma instância de um DMDGP<sub>2</sub>, com  $|V| = n$  e  $E_P = \emptyset$ , vimos que podemos associar a ela uma matriz incompleta de distâncias  $Q = [d_{ij}]$ , onde as entradas  $d_{ij}^2$  com  $|i - j| \geq 3$  são desconhecidas. Neste capítulo, apresentaremos uma formulação que nos permitirá colocar o quadrado de uma distância  $d_{ij}^2$  desconhecida, em função do quadrado da distância  $d_{i,i+1}^2$ , para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n - 3\}$ ,  $j \in \{i + 3, n\}$ .

Denotaremos por  $p_i$  o vetor posição de um ponto  $P_i$  (no plano euclidiano), e por  $p_{i,j}$  o vetor  $\overrightarrow{P_i P_j}$ . Seja

$$D(1, \dots, n) = 2 \left( -\frac{1}{2} \right)^n \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & d_{1,n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{n,1}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

o determinante de Cayley-Menger da sequência de pontos  $P_1, \dots, P_n$ , onde  $d_{k,\ell} = \|p_\ell - p_k\|$ .

Lembramos algumas propriedades geométricas dos determinantes de Cayley-Menger apresentadas no capítulo anterior:

- O valor absoluto de  $D(i_1, \dots, i_n)$  é igual a  $(n - 1)!^2$  vezes o quadrado do hipervolume do simplex gerado pelos pontos  $P_{i_1}, \dots, P_{i_n}$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$ .
- $D(i_1, i_2; j_1, j_2)$  é equivalente ao produto interno entre os vetores  $p_{i_1, i_2}$  e  $p_{j_1, j_2}$ .
- $D(i, j)$  é o quadrado da distância entre  $P_i$  e  $P_j$ .

O problema da bilateração em  $\mathbb{R}^2$  consiste em encontrar posições factíveis para o ponto  $P_k$ , dadas as distâncias de  $P_k$  até dois outros pontos, digamos  $P_i$  e  $P_j$ , cujas posições são conhecidas. Então, de

acordo com a figura 2.1, o vetor posição da projeção ortogonal de  $P_k$  sobre a reta por  $P_i$  e  $P_j$  pode ser expresso como [14]:

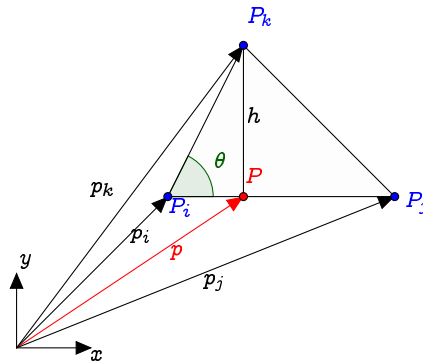


Figura 2.1: Pontos no plano e vetores posição no sistema de coordenadas dado.

$$p = p_i + \sqrt{\frac{D(i, k)}{D(i, j)}} \cos \theta (p_j - p_i) = p_i + \frac{D(i, j; i, k)}{D(i, j)} (p_j - p_i) \tag{2.2}$$

Além disso, a posição do vetor  $P_k$  pode ser expressa como:

$$p_k = p \pm \frac{\sqrt{D(i, j, k)}}{D(i, j)} S(p_j - p_i), \tag{2.3}$$

onde o sinal de  $\pm$  aponta para as duas localizações simétricas possíveis para  $P_k$ , em relação à reta determinada pelos pontos  $P_i$  e  $P_j$ , e  $S$  é dado por:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, substituindo 2.2 em 2.3 e expressando o resultado na forma matricial, obtemos [14]:

$$(p_k - p_i) = Z_{ijk}(p_j - p_i) \tag{2.4}$$

onde  $Z_{ijk} = \frac{1}{D(i, j)} \begin{bmatrix} D(i, j; i, k) & \mp \sqrt{D(i, j, k)} \\ \pm \sqrt{D(i, j, k)} & D(i, j; i, k) \end{bmatrix}$  é dita **matriz de bilateração**.

O produto de matrizes de bilateração é comutativo, visto que as matrizes do tipo  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ , formam um grupo abeliano (matrizes ortogonais). Além disto, pode ser verificado [14] que se  $v = Zw$ , onde  $Z$  é

uma matriz de bilateração, então

$$\|v\|^2 = \det(Z)\|w\|^2 \quad (2.5)$$

Podemos colocar  $Z_{ijk}$  em função apenas das distâncias entre os pontos  $P_i, P_j, P_k$  conforme [13]:

$$Z_{ijk} = \frac{1}{2D(i,j)} \cdot \begin{pmatrix} D(i,j) + D(i,k) - D(j,k) & -4A_{ijk} \\ 4A_{ijk} & D(i,j) + D(i,k) - D(j,k) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

onde  $A_{ijk} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{(D(i,j) + D(i,k) + D(j,k))^2 - 2(D(i,j)^2 + D(i,k)^2 + D(j,k)^2)}$ . Em [13], os autores destacam algumas propriedades importantes das matrizes de bilateração. Seja  $I$  a matriz identidade de ordem 2. Temos 6 fórmulas de bilateração possíveis no triângulo com vértices em  $P_i, P_j, P_k$ :

$$p_{i,k} = Z_{ijk}p_{i,j} \quad (2.7)$$

$$p_{j,k} = Z_{jik}p_{j,i} \quad (2.8)$$

$$p_{i,j} = Z_{ikj}p_{i,k} \quad (2.9)$$

$$p_{k,i} = Z_{kji}p_{k,j} \quad (2.10)$$

$$p_{k,j} = Z_{kij}p_{k,i} \quad (2.11)$$

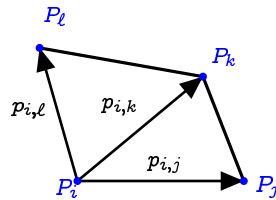
$$p_{j,i} = Z_{jki}p_{j,k}. \quad (2.12)$$

A partir das equações acima, podemos obter as seguintes propriedades [13]:

1.  $Z_{ijk} = I - Z_{jik}$ ,
2.  $Z_{ijk}Z_{ikj} = I$ ,
3.  $Z_{ijk} = -Z_{kji}Z_{jik}$ .

A partir de identidades como acima, podemos aplicar a propriedade 2.5 para relacionar distâncias desconhecidas com distâncias dadas.

Por exemplo, vamos considerar dois triângulos com uma aresta em comum, como na Figura 2.2:



**Figura 2.2:** Dois triângulos com uma aresta em comum.

Observe que, aplicando duas bilaterações consecutivas, podemos obter  $p_{i,\ell}$  em termos de  $p_{i,j}$ :

$$p_{i,\ell} = Z_{ik\ell} p_{i,k} = Z_{ik\ell} Z_{ijk} p_{i,j}. \quad (2.13)$$

De fato, qualquer vetor definido por dois pontos no conjunto  $\{P_i, P_j, P_k, P_\ell\}$  pode ser expresso em função de  $p_{i,j}$ , por matrizes de bilateração. Por exemplo:

$$p_{j,\ell} = p_{i,\ell} - p_{i,j} = (Z_{ik\ell} Z_{ijk} - I) p_{i,j},$$

e pela propriedade 2.5, obtemos:

$$d_{j,\ell}^2 = \det(Z_{ik\ell} Z_{ijk} - I) d_{i,j}^2.$$

Podemos generalizar este procedimento para uma “faixa” de triângulos tal que dois triângulos consecutivos compartilham uma aresta. Este é o caso típico de um grafo que representa um  $\text{DMDGP}_2$ .

### 2.0.1 Bilaterações Sucessivas Aplicadas ao $\text{DMDGP}_2$

Em [2] os autores apresentam fórmulas de bilateração que podem se aplicadas ao  $\text{DMDGP}_2$  com o objetivo de antecipar “podas” no algoritmo BP e assim, acelerar o processo de obtenção da solução. Assume-se que a cada nível do algoritmo, um certo número de soluções parciais é obtido pelo BP, e através das fórmulas de bilateração apresentadas, um teste de poda (futura) pode ser antecipado, eliminando soluções ineficazes em um nível inferior ao nível em que ocorreria a poda na formulação tradicional.

Neste trabalho, o nosso objetivo é completar a matriz de quadrados de distâncias  $Q$  associada a um  $\text{DMDGP}_2$ , utilizando-se apenas os valores de distâncias conhecidos. Trataremos de instâncias onde  $E_P = \emptyset$  e desejamos obter todas as possíveis matrizes completas.

Na matriz incompleta de distâncias de um  $\text{DMDGP}_2$ , utilizando bilaterações sucessivas, é possível determinar  $D(l, m)$  (o quadrado da distância entre dois pontos  $P_l$  e  $P_m$ ) em função dos quadrados de



distâncias que estão na 1-diagonal ou 2-diagonal da matriz incompleta de distâncias, ou seja, valores de distância conhecidos (pelas hipóteses do problema).

Para exemplificar essa técnica de cálculo, vamos inicialmente considerar alguns casos mais simples.

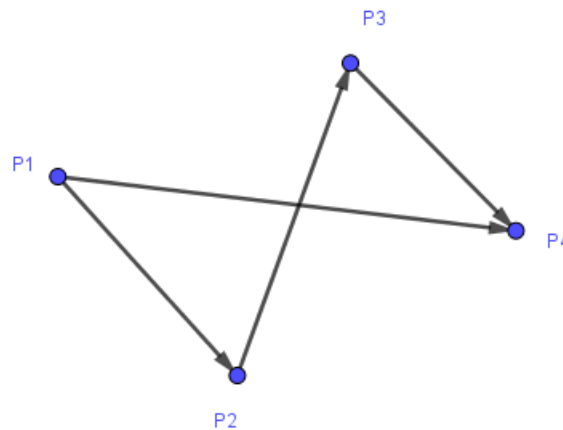
### **Bilateração para o caso $|V| = 4$**

Considere uma instância de um DMDGP<sub>2</sub>, com  $|V| = 4$  e  $E_P = \emptyset$ . A matriz incompleta de quadrados de distâncias  $Q$  tem apenas uma entrada desconhecida:  $Q(1, 4) = D(1, 4) = d_{14}^2$ .

Vamos aplicar bilaterações sucessivas para expressar  $D(1, 4)$  em função de  $D(1, 2)$ , supondo conhecidas as distâncias:  $D(1, 2)$ ,  $D(1, 3)$ ,  $D(2, 1)$ ,  $D(2, 3)$ ,  $D(2, 4)$ ,  $D(3, 1)$ ,  $D(3, 2)$ ,  $D(3, 4)$ ,  $D(4, 2)$ ,  $D(4, 3)$ .

Com o intuito de alcançar esse objetivo, considere a seguinte soma vetorial

$$p_{14} = p_{12} + p_{23} + p_{34} \quad (2.14)$$



**Figura 2.3:** Vetor  $p_{14}$  como uma soma vetorial de  $p_{12}$ ,  $p_{23}$  e  $p_{34}$ .

Utilizando as fórmulas de bilateração em 2.7 obtemos:

$$p_{23} = Z_{213}p_{21} \Rightarrow p_{23} = -Z_{213}p_{12} \quad (2.15)$$

$$p_{34} = Z_{324}p_{32} \Rightarrow p_{34} = -Z_{324}p_{23} \quad (2.16)$$

Substituindo-se 2.15 e 2.16 na equação 2.14 obtemos

$$p_{14} = p_{12} + p_{23} - Z_{324}p_{23} = p_{12} + (I - Z_{324})p_{23} = p_{12} + (I - Z_{324})(-Z_{213}p_{12}) \quad (2.17)$$

Portanto

$$p_{14} = p_{12} - (I - Z_{324})Z_{213}p_{12} \quad (2.18)$$

Ou seja:

$$p_{14} = (I - (I - Z_{324})Z_{213})p_{12} \quad (2.19)$$

Agora, aplicando a propriedade 2.5 obtemos a seguinte expressão, que relaciona  $D(1,4)$  com  $D(1,2)$ :

$$D(1,4) = \det(I - (I - Z_{324})Z_{213})D(1,2) \quad (2.20)$$

Observe que nas matrizes  $Z_{pqr}$  que aparecem na expressão acima, todas as entradas são valores de distâncias conhecidos. Uma vez que existem duas possibilidades para cada matriz de bilateração do tipo  $Z_{pqr}$  (sinal da entrada  $A_{pqr}$ ) então a equação 2.22 retorna 4 possibilidades de valores para  $D(1,4)$ , sendo apenas dois valores distintos. Esta repetição de valores ocorre devido à simetria das soluções.

Com o intuito de determinar os valores distintos para  $D(1,4)$ , torne fixo o sinal de  $A_{213}$  em  $Z_{213}$ , por exemplo, tomando o sinal negativo, e varie apenas o sinal de  $A_{324}$  em  $Z_{324}$ . Geometricamente isto equivale a fixar a posição do triângulo de vértices  $P_1, P_2, P_3$  em  $\mathbb{R}^2$ . Também poderíamos fixar o sinal de  $A_{324}$  em  $Z_{324}$ , o que corresponde a fixar a posição do triângulo de vértices  $P_2, P_3, P_4$  em  $\mathbb{R}^2$ .

### Bilateração para o caso $|V| = 5$

Considere uma instância de um DMDGP<sub>2</sub>, com  $|V| = 5$  e  $E_P = \emptyset$ . A matriz incompleta de quadrados de distâncias  $Q$  tem as seguintes entradas desconhecidas:  $D(1,4)$ ,  $D(2,5)$  e  $D(1,5)$ .

Vamos aplicar bilaterações sucessivas para expressar  $D(1,5)$  em função de  $D(1,2)$  e  $D(2,5)$  em função de  $D(2,3)$ , supondo conhecidas as distâncias:  $D(1,2)$ ,  $D(1,3)$ ,  $D(2,1)$ ,  $D(2,3)$ ,  $D(2,4)$ ,  $D(3,1)$ ,  $D(3,2)$ ,  $D(3,4)$ ,  $D(3,5)$ ,  $D(4,2)$ ,  $D(4,3)$ ,  $D(4,5)$ ,  $D(5,3)$  e  $D(5,4)$ .

Já conhecemos a expressão para  $D(1,4)$  em função de  $D(1,2)$  (veja 2.20). Podemos obter de forma análoga, uma expressão para  $D(2,5)$  em função de  $D(2,3)$ , considerando a soma vetorial

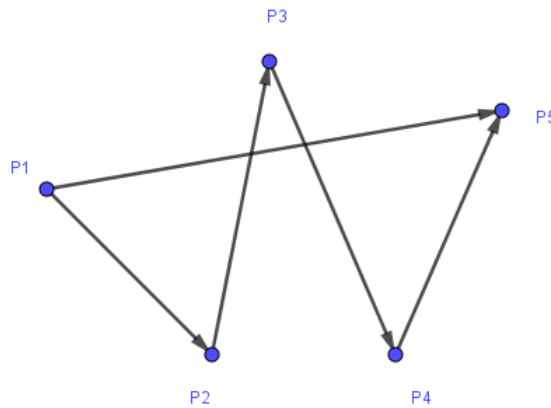
$$p_{25} = p_{23} + p_{34} + p_{45} \tag{2.21}$$

É fácil perceber que vale a relação

$$D(2,5) = \det(I - (I - Z_{435})Z_{324})D(2,3) \tag{2.22}$$

Com o intuito de obter  $D(1,5)$  em função de  $D(1,2)$ , considere a seguinte soma vetorial

$$p_{15} = p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{45} \tag{2.23}$$



**Figura 2.4:** Vetor  $p_{15}$  como soma vetorial de  $p_{12}$ ,  $p_{23}$ ,  $p_{34}$  e  $p_{45}$ .

Por outro lado, temos

$$p_{23} = Z_{213}p_{21} \Rightarrow p_{23} = -Z_{213}p_{12} \tag{2.24}$$

$$p_{34} = Z_{324}p_{32} \Rightarrow p_{34} = -Z_{324}p_{23} \tag{2.25}$$

$$p_{45} = Z_{435}p_{43} \Rightarrow p_{45} = -Z_{435}p_{34} \quad (2.26)$$

Substituindo-se as expressões 2.25 e 2.26 na equação 2.23, obtemos:

$$p_{15} = p_{12} + p_{23} + p_{34} - Z_{435}p_{34} = p_{12} + p_{23} + (I - Z_{435})p_{34} \quad (2.27)$$

Assim,

$$p_{15} = p_{12} + p_{23} + (I - Z_{435})(-Z_{324}p_{23}) = p_{12} + p_{23} - (I - Z_{435})Z_{324}p_{23} \quad (2.28)$$

Ou seja:

$$p_{15} = p_{12} + (I - (I - Z_{435})Z_{324})p_{23} \quad (2.29)$$

Finalmente substituindo 2.24 na equação: 2.29, obtemos:

$$p_{15} = p_{12} + (I - (I - Z_{435})Z_{324})(-Z_{213}p_{12}) = p_{12} - (I - (I - Z_{435})Z_{324})Z_{213}p_{12} \quad (2.30)$$

Portanto

$$p_{15} = (I - (I - (I - Z_{435})Z_{324})Z_{213})p_{12} \quad (2.31)$$

Consequentemente vale a relação

$$D(1, 5) = \det(I - (I - (I - Z_{435})Z_{324})Z_{213})D(1, 2) \quad (2.32)$$

Uma vez que existem duas possibilidades (sinal de  $A_{pqr}$ ) para cada matriz de bilateração  $Z_{pqr}$ , obtemos 8 possibilidades de valores para  $D(1, 5)$ . Com o intuito de determinar apenas os valores distintos para  $D(1, 5)$ , torne fixo o sinal de  $A_{213}$  em  $Z_{213}$ , por exemplo, tomando o sinal negativo.

A questão que surge é: como os valores obtidos para  $D(1, 4)$ ,  $D(2, 5)$  e  $D(1, 5)$  estão relacionados para obtermos cada uma das quatro matrizes completas de distâncias que são as soluções factíveis para o problema?

Pelo Teorema 1.2 na seção 1.2, para cada valor de  $D(1,5)$  corresponde um único complemento da matriz  $D$ . Assim, cada par de distâncias  $\{D(1,4), D(2,5)\}$  está associado a uma única possibilidade de distância  $D(1,5)$ . Vamos revisar as fórmulas de bilateração obtidas:

$$D(1,4) = \det(I - (I - Z_{324})Z_{213})D(1,2)$$

$$D(2,5) = \det(I - (I - Z_{435})Z_{324})D(2,3)$$

$$D(1,5) = \det(I - (I - (I - Z_{435})Z_{324})Z_{213})D(1,2)$$

A correspondência entre as possibilidades obtidas para um dado par de distâncias é feita partir da análise da sequência de sinais no termo  $A_{pqr}$  nas matrizes  $Z_{pqr}$  comuns às duas expressões para este par de distâncias. Veja as tabelas a seguir

	$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$		$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$
$D(1,4)$	-	-		$D(1,4)$	-	+	
$D(2,5)$	-	-	-	$D(2,5)$	-	+	-
$D(1,5)$	-	-	-	$D(1,5)$	-	+	-

	$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$		$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$
$D(1,4)$	-	-		$D(1,4)$	-	+	
$D(2,5)$	-	-	+	$D(2,5)$	-	+	+
$D(1,5)$	-	-	+	$D(1,5)$	-	+	+

**Tabela 2.1:** Correspondência entre distâncias calculadas, para complemento da matriz de distâncias  $D$ .

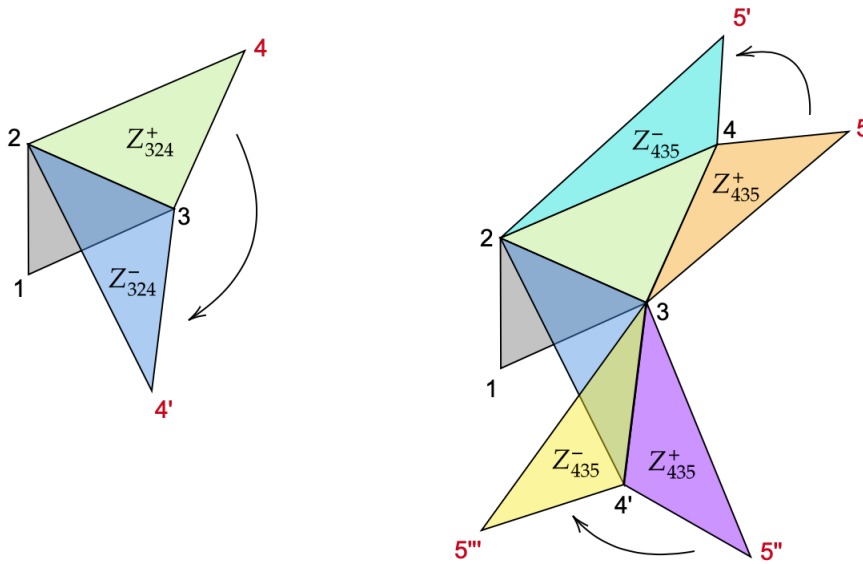
Observe que optamos por fixar o sinal de  $Z_{213}$ . Ao variar este sinal obtemos mais 4 soluções idênticas às soluções obtidas acima. A variação de sinal em  $Z_{324}$  corresponde às duas posições simétricas de  $P_4$  em relação à reta por  $P_2$  e  $P_3$  e a variação de sinal em  $Z_{435}$  corresponde às duas posições simétricas de  $P_5$  em relação à reta por  $P_3$  e  $P_4$ .

**Bilateração para o caso  $|V| = 6$**

Considere uma instância de um DMDGP<sub>2</sub>, com  $|V| = 6$  e  $E_P = \emptyset$ . A matriz incompleta de quadrados de distâncias  $Q$  tem as seguintes entradas desconhecidas:  $D(1,4), D(2,5), D(3,6), D(2,6), D(1,5)$  e  $D(1,6)$ .

Vamos aplicar bilaterações sucessivas para expressar tais valores em função dos valores conhecidos na 1-diagonal e na 2-diagonal da matriz incompleta de distâncias.

Por analogia aos cálculos das expressões para  $D(1,4)$  e  $D(2,5)$ , podemos obter uma expressão



**Figura 2.5:** Reflexões em termos da variação do sinal em  $Z_{pqr}$ .

para  $D(3, 6)$ . A partir da soma vetorial

$$p_{36} = p_{34} + p_{45} + p_{56} \tag{2.33}$$

É fácil perceber que vale a relação

$$D(3, 6) = \det(I - (I - Z_{546})Z_{435})D(3, 4) \tag{2.34}$$

Da mesma forma, por analogia aos cálculos da expressão para  $D(1, 5)$  podemos obter uma expressão para  $D(2, 6)$ . A partir da soma vetorial

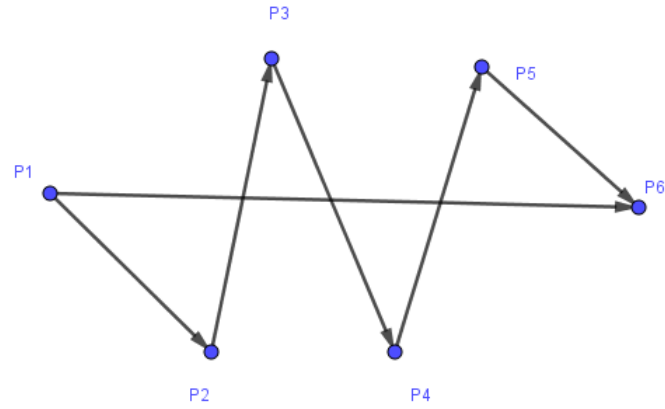
$$p_{26} = p_{23} + p_{34} + p_{45} + p_{56} \tag{2.35}$$

É fácil perceber que vale a relação

$$D(2, 6) = \det(I - (I - (I - Z_{546})Z_{435})Z_{324})D(2, 3) \tag{2.36}$$

Com o intuito de obter  $D(1, 6)$ , considere a seguinte soma vetorial

$$p_{16} = p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{45} + p_{56} \tag{2.37}$$



**Figura 2.6:** Vetor  $p_{16}$  como soma vetorial de  $p_{12}$ ,  $p_{23}$ ,  $p_{34}$ ,  $p_{45}$  e  $p_{56}$ .

Por outro lado, temos:

$$p_{23} = -Z_{213}p_{12} \quad (2.38)$$

$$p_{34} = -Z_{324}p_{23} \quad (2.39)$$

$$p_{45} = -Z_{435}p_{34} \quad (2.40)$$

$$p_{56} = -Z_{546}p_{45} \quad (2.41)$$

Assim, obtemos

$$p_{16} = p_{12} + p_{23} + p_{34} + p_{45} - Z_{546}p_{45} = p_{12} + p_{23} + p_{34} + (I - Z_{546})p_{45} \quad (2.42)$$

E logo,

$$p_{16} = p_{12} + p_{23} + p_{34} + (I - Z_{546})(-Z_{435}p_{34}) = p_{12} + p_{23} + p_{34} - (I - Z_{546})Z_{435}p_{34} \quad (2.43)$$

Ou seja,

$$p_{16} = p_{12} + p_{23} + (I - (I - Z_{546})Z_{435})p_{34} \quad (2.44)$$

E assim,

$$p_{16} = p_{12} + p_{23} + (I - (I - Z_{546})Z_{435})(-Z_{324}p_{23}) = p_{12} + p_{23} - (I - (I - Z_{546})Z_{435})Z_{324}p_{23} \quad (2.45)$$

Ou seja:

$$p_{16} = p_{12} + (I - (I - (I - Z_{546})Z_{435})Z_{324})p_{23} \quad (2.46)$$

Finalmente,

$$p_{16} = p_{12} + (I - (I - (I - Z_{546})Z_{435})Z_{324})(-Z_{213}p_{12}) = p_{12} - (I - (I - (I - Z_{546})Z_{435})Z_{324})Z_{213}p_{12} \quad (2.47)$$

E portanto,

$$p_{16} = (I - (I - (I - (I - Z_{546})Z_{435})Z_{324})Z_{213})p_{12} \quad (2.48)$$

Assim, obtemos uma expressão que relaciona  $D(1, 6)$  com  $D(1, 2)$  e todas as matrizes  $Z_{pqr}$  envolvidas estão determinadas (valores conhecidos de distâncias):

$$D(1, 6) = \det(I - (I - (I - (I - Z_{546})Z_{435})Z_{324})Z_{213})D(1, 2) \quad (2.49)$$

Existem duas possibilidades para cada matriz  $Z_{pqr}$  e assim, obtemos 16 possibilidades de valores para  $D(1, 6)$ . Com o intuito de determinar apenas os valores distintos para  $D(1, 6)$ , torne fixo o sinal de  $Z_{546}$ , por exemplo, tomando o sinal negativo.

A correspondência entre as possibilidades obtidas para um dado par de distâncias é feita partir da análise da sequência de sinais no termo  $A_{pqr}$  nas matrizes  $Z_{pqr}$  comuns às duas expressões para este



par de distâncias. Veja as tabelas a seguir

	$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$	$Z_{546}$		$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$	$Z_{546}$
$D(1,4)$	-	-	-	-	$D(1,4)$	+	-	-	-
$D(2,5)$	-	-	-	-	$D(2,5)$	-	-	-	-
$D(3,6)$	-	-	-	-	$D(3,6)$	-	-	-	-
$D(1,5)$	-	-	-	-	$D(1,5)$	+	-	-	-
$D(2,6)$	-	-	-	-	$D(2,6)$	-	-	-	-
$D(1,6)$	-	-	-	-	$D(1,6)$	+	-	-	-

	$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$	$Z_{546}$		$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$	$Z_{546}$
$D(1,4)$	-	+	-	-	$D(1,4)$	+	+	-	-
$D(2,5)$	-	+	-	-	$D(2,5)$	-	+	-	-
$D(3,6)$	-	-	-	-	$D(3,6)$	-	-	-	-
$D(1,5)$	-	+	-	-	$D(1,5)$	+	+	-	-
$D(2,6)$	-	+	-	-	$D(2,6)$	-	+	-	-
$D(1,6)$	-	+	-	-	$D(1,6)$	+	+	-	-

	$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$	$Z_{546}$		$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$	$Z_{546}$
$D(1,4)$	-	-	-	-	$D(1,4)$	+	-	-	-
$D(2,5)$	-	-	+	-	$D(2,5)$	-	-	+	-
$D(3,6)$	-	-	+	-	$D(3,6)$	-	-	+	-
$D(1,5)$	-	-	+	-	$D(1,5)$	+	-	+	-
$D(2,6)$	-	-	+	-	$D(2,6)$	-	-	+	-
$D(1,6)$	-	-	+	-	$D(1,6)$	+	-	+	-

	$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$	$Z_{546}$		$Z_{213}$	$Z_{324}$	$Z_{435}$	$Z_{546}$
$D(1,4)$	-	+	-	-	$D(1,4)$	+	+	-	-
$D(2,5)$	-	+	+	-	$D(2,5)$	-	+	+	-
$D(3,6)$	-	-	+	-	$D(3,6)$	-	-	+	-
$D(1,5)$	-	+	+	-	$D(1,5)$	+	+	+	-
$D(2,6)$	-	+	+	-	$D(2,6)$	-	+	+	-
$D(1,6)$	-	+	+	-	$D(1,6)$	+	+	+	-

**Tabela 2.2:** Correspondência entre distâncias calculadas, para completamento da matriz de distâncias  $D$ .

Observe que fixamos o sinal de  $Z_{213}$ . Ao variar este sinal obtemos mais 8 soluções idênticas às soluções obtidas acima. A variação de sinal em  $Z_{324}$  corresponde às duas posições simétricas de  $P_4$  em relação à reta por  $P_2$  e  $P_3$ , a variação de sinal em  $Z_{435}$  corresponde às duas posições simétricas de  $P_5$  em relação à reta por  $P_3$  e  $P_4$  a variação de sinal em  $Z_{546}$  corresponde às duas posições simétricas de  $P_6$  em relação à reta por  $P_4$  e  $P_5$ .

**Bilateração para o caso geral  $|V| = n, n \in \mathbb{N}/n \geq 5$**

A partir dos resultados obtidos até aqui, torna-se possível determinar uma fórmula geral de bilateração que permita expressar uma entrada  $D(l, m)$  de uma matriz parcial de quadrados de distâncias  $Q$

em função de uma entrada  $D(l, k)$  que seja previamente conhecida.

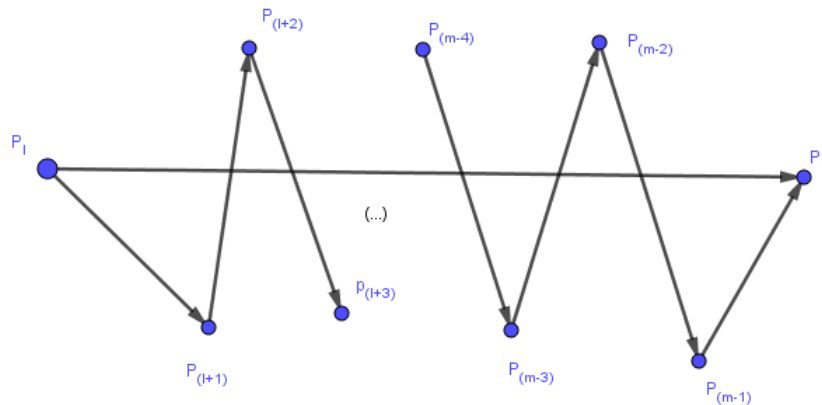
Considere uma instância de um  $DMDGP_2$ , com  $|V| = n$  e  $E_P = \emptyset$ . A matriz incompleta de quadrados de distâncias  $Q$  tem as seguintes entradas desconhecidas:  $\{Q(i, j) = D(i, j) = d_{ij}^2 : |i - j| \geq 3\}$ .

Vamos aplicar bilaterações sucessivas para expressar tais valores em função dos valores conhecidos na 1-diagonal e na 2-diagonal da matriz incompleta de distâncias.

Visando expressar  $D(l, m)$  em função de  $D(l, l + 1)$ , onde  $l + 2 < m \leq n$  e  $l \geq 1$ , vamos considerar a soma vetorial:

$$p_{lm} = p_{l,l+1} + p_{l+1,l+2} + \dots + p_{m-1,m}$$

Vamos aplicar bilaterações sucessivas para expressar tais valores em função dos valores conhecidos na 1-diagonal e na 2-diagonal da matriz incompleta de distâncias.



**Figura 2.7:** Vetor  $p_{lm}$  como soma vetorial de  $p_{l,l+1}, p_{l+1,l+2}, \dots, p_{m-1,m}$ .

Observe que:

$$p_{l+1,l+2} = -Z_{l+1,l,l+2} p_{l,l+1} \tag{2.50}$$

$$p_{l+2,l+3} = -Z_{l+2,l+1,l+3} p_{l+1,l+2} \tag{2.51}$$

⋮

$$p_{m-2,m-1} = -Z_{m-2,m-3,m-1}p_{m-3,m-2} \quad (2.52)$$

$$p_{m-1,m} = -Z_{m-1,m-2,m}p_{m-2,m-1} \quad (2.53)$$

Assim, obtemos

$$p_{lm} = (I - (I - (I - (I - Z_{m-1,m-2,m})Z_{m-2,m-3,m-1}) \cdots)Z_{l+2,l+1,l+3})Z_{l+1,l,l+2})p_{l,l+1} \quad (2.54)$$

Assim, obtemos uma expressão que relaciona  $D(l, m)$  com  $D(1, l + 1)$ , onde todas as matrizes de bilateração  $Z_{pqr}$  envolvidas estão determinadas (valores conhecidos de distâncias nas 3-cliques de vértices consecutivos):

$$D(l, m) = \det(I - (I - (I - (I - Z_{m-1,m-2,m})Z_{m-2,m-3,m-1}) \cdots)Z_{l+2,l+1,l+3})Z_{l+1,l,l+2})D(l, l + 1) \quad (2.55)$$

Existem duas possibilidades para cada matriz  $Z_{pqr}$  e assim, obtemos  $2^{m-l-1}$  possibilidades de valores para  $D(l, m)$ . Com o intuito de determinar apenas os valores distintos para  $D(l, m)$ , torne fixo o sinal de  $Z_{l+1,l,l+2}$ , por exemplo, tomando o sinal negativo.

A correspondência entre as possibilidades obtidas para um dado par de distâncias é feita partir da análise da sequência de sinais no termo  $A_{pqr}$  nas matrizes  $Z_{pqr}$  comuns às duas expressões para este par de distâncias.

A partir dessa linha de raciocínio, torna-se possível determinar um algoritmo de bilaterações sucessivas que permite obter todos os complementos de matrizes de distancias associadas a um DMDGP<sub>2</sub>. Este será o assunto do próximo capítulo.

# Um Algoritmo para o Completamento de Matrizes

---

### 3.1 Um Exemplo com $n=6$

Vamos inicialmente considerar uma matriz de distâncias euclidianas satisfazendo as hipóteses mínimas que caracterizam um  $\text{DMDGP}_2$ , isto é, apenas as distâncias associadas a 3-cliques de vértices consecutivos são conhecidas.

Para construir tal exemplo, iremos gerar aleatoriamente seis pontos em  $\mathbb{R}^2$ , e gerar uma matriz completa de distâncias euclidianas, de ordem 6.

Em seguida, serão apagadas as distâncias:  $D(1,4)$ ,  $D(1,5)$ ,  $D(1,6)$ ,  $D(2,5)$ ,  $D(2,6)$ ,  $D(3,6)$  e suas respectivas correspondentes simétricas em relação à diagonal principal, gerando a matriz incompleta de quadrados das distâncias que, por sua vez, . Aplicaremos as técnicas apresentadas no Capítulo 2 para obter todos os completamentos desta matriz. Obviamente, um destes completamentos deve corresponder à matriz completa original.

Utilizamos o software Mathematica (Wolfram) para gerar aleatoriamente os 6 pontos em  $(-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ , conforme disposto na tabela a seguir:

Pontos de $\mathbb{R}^2$	Abcissas (x)	Ordenadas (y)
$P_1$	-0,690547512	0,579518616
$P_2$	0,301948011	0,014017642
$P_3$	-0,79949002	0,045352757
$P_4$	0,86261934	0,37353617
$P_5$	-0,856445835	0,949556649
$P_6$	0,524868429	-0,038504527

A matriz completa de quadrados das distâncias euclidianas associada a estes seis pontos é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 2,454756038 & 0,164450399 & 1,859188513 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 2,217109535 & 0,052452091 \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,820828643 & 1,760957345 \\ 2,454756038 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 0,164450399 & 2,217109535 & 0,820828643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 1,859188513 & 0,052452091 & 1,760957345 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora consideramos a seguinte matriz parcial de quadrados das distâncias, que tem a forma padrão de uma matriz associada a um DMDGP<sub>2</sub>:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 0 & 0 & 0 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 0 & 0 \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,820828643 & 0 \\ 0 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 0 & 0 & 0,820828643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 0 & 0 & 0 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

onde os zeros fora da diagonal principal correspondem a valores desconhecidos de distâncias.

A seguir, aplicaremos as técnicas de bilaterações sucessivas e, ao final, obteremos todos os completamentos possíveis para a matriz acima.

Uma vez que a matriz de distâncias euclidianas é simétrica em relação à diagonal principal, procederemos ao completamento das entradas que estão acima da diagonal principal. As entradas abaixo da

diagonal principal serão completadas imediatamente, por simetria.

Sob essas condições, a sequência de quadrados de distâncias  $D_{i,j}$  a serem calculadas, é dada por:

Linha	Valores de $D_{i,j}$ a calcular
1	$D(1,4), D(1,5), D(1,6)$
2	$D(2,5), D(2,6)$
3	$D(3,6)$

Iremos completar a matriz por colunas sempre do elemento da linha mais inferior até o elemento da primeira linha. Assim, nossa sequência de cálculos será a seguinte:

$$D(1,4) \rightarrow D(2,5) \rightarrow D(1,5) \rightarrow D(3,6) \rightarrow D(2,6) \rightarrow D(1,6)$$

### 3.1.1 Cálculo dos valores possíveis para $D(1,4)$

Sejam  $M_q$  e  $m_q$  cada uma das duas possibilidades de sinais do termo  $A_{pqr}$  na matriz  $Z_{pqr}$  que surge nas fórmulas de bilaterações, conforme demonstrado no capítulo anterior. Assumiremos que  $M$  é o sinal positivo e  $m$  é o sinal negativo. Aplicando-se bilaterações sucessivas aos pontos  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ , existem dois valores distintos possíveis para  $D(1,4)$ , que correspondem a duas sequências de sinais na fórmula de bilateração:

$$D(1,4)_{[M_2M_1]} = \det(I - (I - Z_{324}^+)Z_{213}^+)D(1,2) \quad (3.1)$$

$$D(1,4)_{[M_2m_1]} = \det(I - (I - Z_{324}^+)Z_{213}^-)D(1,2) \quad (3.2)$$

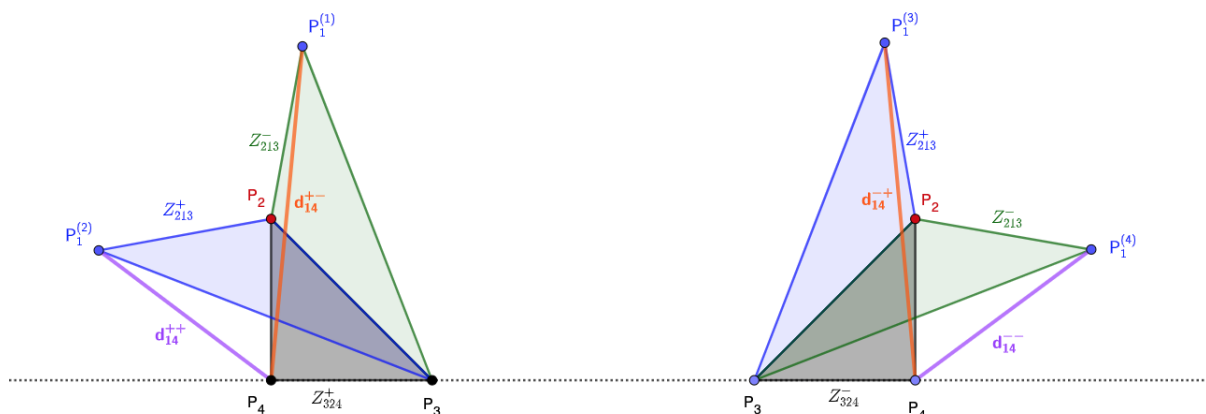
Aplicando as definições para os cálculos das matrizes  $Z_{pqr}$  contidas nas equações: 3.1 e 3.2, obtemos:

Possibilidades para $Z_{pqr}$ no cálculo de $D(1,4)$ :			
Possibilidade 1:			
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614	
	0,340614	1,499346	
$Z_{213}^+$	0,851364	-0,453515	
	0,453515	0,851364	
Possibilidade 2:			
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614	
	0,340614	1,499346	
$Z_{213}^-$	0,851364	0,453515	
	-0,453515	0,851364	

Procedendo aos cálculos indicados pelas equações: 3.1, 3.2, obtemos:

Valores possíveis para $D(1,4)$ :	
$D(1,4)_{[M_2M_1]}$	2,45476
$D(1,4)_{[M_2m_1]}$	3,26101

Observe que fixamos o sinal positivo para a matriz  $Z_{324}$ . Por simetria, valem as igualdades  $D(1,4)_{[M_2M_1]} = D(1,4)_{[m_2m_1]}$  e  $D(1,4)_{[M_2m_1]} = D(1,4)_{[m_2M_1]}$ . A Figura 3.1 ilustra a situação geométrica.



**Figura 3.1:** Observe que  $D(1,4)_{[M_2M_1]} = D(1,4)_{[m_2m_1]}$  e  $D(1,4)_{[M_2m_1]} = D(1,4)_{[m_2M_1]}$ .

Observe que os sinais iguais em  $Z_{324}$  e  $Z_{213}$  correspondem a valores de distâncias  $d_{14}$  entre pontos

$P_1$  e  $P_4$  que estão do mesmo lado da reta que passar por  $P_2$  e  $P_3$ . Por outro lado sinais contrários em  $Z_{324}$  e  $Z_{213}$  correspondem a valores de distâncias  $d_{14}$  entre pontos  $P_1$  e  $P_4$  que estão de lados opostos à reta que passa por  $P_2$  e  $P_3$ .

### 3.1.2 Cálculo dos valores possíveis para $D(2, 5)$

Aplicando-se bilaterações sucessivas aos pontos  $P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ , existem dois valores possíveis distintos para  $D(2, 5)$ , dados por:

$$D(2, 5)_{[M_3 M_2]} = \det(I - (I - Z_{435}^+) Z_{324}^+) D(2, 3) \quad (3.3)$$

$$D(2, 5)_{[M_3 m_2]} = \det(I - (I - Z_{435}^+) Z_{324}^-) D(2, 3) \quad (3.4)$$

Aplicando as definições para os cálculos das matrizes  $Z_{pqr}$  contidas nas equações: 3.3 e 3.4, obtemos:

<b>Possibilidades para <math>Z_{pqr}</math> no cálculo de <math>D(2, 5)</math>:</b>			
Possibilidade 1:			
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109	
	0,530109	0,929597	
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614	
	0,340614	1,499346	
Possibilidade 2:			
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109	
	0,530109	0,929597	
$Z_{324}^-$	1,499346	0,340614	
	-0,340614	1,499346	

Procedendo aos cálculos indicados pelas equações: 3.3, 3.4, obtemos:



**Valores possíveis para  $D(2, 5)$ :**

$D(2, 5)_{[M_3 M_2]}$ :	1, 34019
$D(2, 5)_{[M_3 m_2]}$ :	2, 21711

Observe que fixamos o sinal positivo para a matriz  $Z_{435}$ . Por simetria, valem as igualdades  $D(2, 5)_{[M_3 M_2]} = D(2, 5)_{[m_3 m_2]}$  e  $D(2, 5)_{[M_3 m_2]} = D(2, 5)_{[m_3 M_2]}$ .

**3.1.3 Cálculo dos valores possíveis para  $D(1, 5)$** 

Agora, tomando  $M_q$  e  $m_q$  como cada uma das duas possibilidades de sinais do termo  $A_{pqr}$  na matriz  $Z_{pqr}$  que surge nas fórmulas de bilaterações, conforme demonstrado no capítulo 02, aplicando bilaterações sucessivas aos pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ , verifica-se que existem quatro valores possíveis distintos para  $D(1, 5)$ , tais que:

$$D(1, 5)_{[M_3 M_2 M_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{435}^+) Z_{324}^+) Z_{213}^+) D(1, 2) \quad (3.5)$$

$$D(1, 5)_{[M_3 M_2 m_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{435}^+) Z_{324}^+) Z_{213}^-) D(1, 2) \quad (3.6)$$

$$D(1, 5)_{[M_3 m_2 M_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{435}^+) Z_{324}^-) Z_{213}^+) D(1, 2) \quad (3.7)$$

$$D(1, 5)_{[M_3 m_2 m_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{435}^+) Z_{324}^-) Z_{213}^-) D(1, 2) \quad (3.8)$$

Aplicando as definições para os cálculos das matrizes  $Z_{pqr}$  contidas nas equações: 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, obtemos:

Possibilidades para $Z_{pqr}$ no cálculo de $D(1,5)$ :			
Possibilidade 1:			
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109	
	0,530109	0,929597	
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614	
	0,340614	1,499346	
$Z_{213}^+$	0,851364	-0,453515	
	0,453515	0,851364	
Possibilidade 2:			
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109	
	0,530109	0,929597	
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614	
	0,340614	1,499346	
$Z_{213}^-$	0,851364	0,453515	
	-0,453515	0,851364	
Possibilidade 3:			
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109	
	0,530109	0,929597	
$Z_{324}^-$	1,499346	0,340614	
	-0,340614	1,499346	
$Z_{213}^+$	0,851364	-0,453515	
	0,453515	0,851364	
Possibilidade 4:			
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109	
	0,530109	0,929597	
$Z_{324}^-$	1,499346	0,340614	
	-0,340614	1,499346	
$Z_{213}^-$	0,851364	0,453515	
	-0,453515	0,851364	

Procedendo aos cálculos indicados pelas equações: [3.5](#), [3.6](#), [3.7](#), [3.8](#), obtemos:

Valores possíveis (distintos) para $D(1, 5)$ :	
$D(1, 5)_{[M_3 M_2 M_1]}$ :	1, 97125
$D(1, 5)_{[M_3 M_2 m_1]}$ :	0, 146637
$D(1, 5)_{[M_3 m_2 M_1]}$ :	2, 10259
$D(1, 5)_{[M_3 m_2 m_1]}$ :	0, 16445

### 3.1.4 Cálculo dos valores possíveis para $D(3, 6)$

Agora, considere  $M_q$  e  $m_q$  como cada uma das duas possibilidades de sinais do termo  $A_{pqr}$  na matriz  $Z_{pqr}$  que surge nas fórmulas de bilaterações, para o cálculo das possibilidades de  $D(3, 6)$ .

Aplicando-se bilaterações sucessivas aos pontos  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  e  $P_6$ , existem dois valores possíveis distintos para  $D(3, 6)$ , tais que:

$$D(3, 6)_{[M_4 M_3]} = \det(I - (I - Z_{546}^+) Z_{435}^+) D(3, 4) \quad (3.9)$$

$$D(3, 6)_{[M_4 m_3]} = \det(I - (I - Z_{546}^+) Z_{435}^-) D(3, 4) \quad (3.10)$$

Aplicando as definições para os cálculos das matrizes  $Z_{pqr}$  contidas nas equações: [3.9](#), [3.10](#), obtemos:

Possibilidades para $Z_{pqr}$ no cálculo de $D(3, 6)$ :			
Possibilidade 1:			
$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682	
	0,274682	0,895566	
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109	
	0,530109	0,929597	
Possibilidade 2:			
$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682	
	0,274682	0,895566	
$Z_{435}^-$	0,929597	0,530109	
	-0,530109	0,929597	

Procedendo aos cálculos indicados pelas equações: 3.9, 3.10, obtemos:

Valores possíveis para $D(3, 6)$ :	
$D(3, 6)_{[M_4 M_3]}$ :	1, 76096
$D(3, 6)_{[M_4 m_3]}$ :	3, 43276

### 3.1.5 Cálculo dos valores possíveis para $D(2, 6)$

Agora considere  $M_q$  e  $m_q$  como cada uma das duas possibilidade de sinais do termo  $A_{pqr}$  na matriz  $Z_{pqr}$  que surge nas fórmulas de bilaterações, para o cálculo das possibilidades de  $D(2, 6)$ .

Aplicando bilaterações sucessivas aos pontos  $P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$ , tomando como referência as fórmulas desenvolvidas no capítulo 02, existem quatro valores possíveis distintos para  $D(2, 6)$ , tais que:

$$D(2, 6)_{[M_4 M_3 M_2]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^+)Z_{324}^+)D(2, 3) \quad (3.11)$$

$$D(2, 6)_{[M_4 M_3 m_2]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^+)Z_{324}^-)D(2, 3) \quad (3.12)$$

$$D(2, 6)_{[M_4 m_3 M_2]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+) Z_{435}^-) Z_{324}^+) D(2, 3) \quad (3.13)$$

$$D(2, 6)_{[M_4 m_3 m_2]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+) Z_{435}^-) Z_{324}^-) D(2, 3) \quad (3.14)$$

Aplicando as definições para os cálculos das matrizes  $Z_{pqr}$  contidas nas equações: 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, obtemos:

<b>Possibilidades para <math>Z_{pqr}</math> no cálculo de <math>D(2, 6)</math>:</b>			
Possibilidade 1:			
$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682	
	0,274682	0,895566	
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109	
	0,530109	0,929597	
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614	
	0,340614	1,499346	
Possibilidade 2:			
$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682	
	0,274682	0,895566	
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109	
	0,530109	0,929597	
$Z_{324}^-$	1,499346	0,340614	
	-0,340614	1,499346	
Possibilidade 3:			
$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682	
	0,274682	0,895566	
$Z_{435}^-$	0,929597	0,530109	
	-0,530109	0,929597	
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614	
	0,340614	1,499346	

<b>Possibilidades para <math>Z_{pqr}</math> no cálculo de <math>D(2, 6)</math>:</b>			
Possibilidade 4:			
$Z_{546}^+$		0,895566	-0,274682
		0,274682	0,895566
$Z_{435}^-$		0,929597	0,530109
		-0,530109	0,929597
$Z_{324}^-$		1,499346	0,340614
		-0,340614	1,499346

Procedendo aos cálculos indicados pelas equações: 3.11, 3.12 e 3.13 e 3.14 obtemos:

<b>Valores possíveis para <math>D(2, 6)</math>:</b>	
$D(2, 6)_{[M_4 M_3 M_2]}$ :	0,383267
$D(2, 6)_{[M_4 M_3 m_2]}$ :	$5,24521 \cdot 10^{-2}$
$D(2, 6)_{[M_4 m_3 M_2]}$ :	1,08635
$D(2, 6)_{[M_4 m_3 m_2]}$ :	0,572373

### 3.1.6 Cálculo dos valores possíveis para $D(1, 6)$

Seguindo a linha de raciocínio das fórmulas demonstradas no capítulo 02, considere  $M_q$  e  $m_q$  como cada uma das duas possibilidades de sinais do termo  $A_{pqr}$  na matriz  $Z_{pqr}$  que surge nas fórmulas de bilaterações, para o cálculo das possibilidades de  $D(1, 6)$ .

Aplicando bilaterações sucessivas aos pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$ , verifica-se que existem oito valores possíveis distintos para  $D(1, 6)$ , tais que:

$$D(1, 6)_{[M_4 M_3 M_2 M_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+) Z_{435}^+) Z_{324}^+) Z_{213}^+) D(1, 2) \quad (3.15)$$

$$D(1, 6)_{[M_4 M_3 M_2 m_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+) Z_{435}^+) Z_{324}^+) Z_{213}^-) D(1, 2) \quad (3.16)$$

$$D(1,6)_{[M_4M_3m_2M_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^+)Z_{324}^-)Z_{213}^+)D(1,2) \quad (3.17)$$

$$D(1,6)_{[M_4M_3m_2m_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^+)Z_{324}^-)Z_{213}^-)D(1,2) \quad (3.18)$$

$$D(1,6)_{[M_4m_3M_2M_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^-)Z_{324}^+)Z_{213}^+)D(1,2) \quad (3.19)$$

$$D(1,6)_{[M_4m_3M_2m_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^-)Z_{324}^+)Z_{213}^-)D(1,2) \quad (3.20)$$

$$D(1,6)_{[M_4m_3m_2M_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^-)Z_{324}^-)Z_{213}^+)D(1,2) \quad (3.21)$$

$$D(1,6)_{[M_4m_3m_2m_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^-)Z_{324}^-)Z_{213}^-)D(1,2) \quad (3.22)$$

Aplicando as definições para os cálculos dos  $Z_{pqr}^{\sigma(i,j)}$  contidos nas equações: [3.15](#), [3.16](#), [3.17](#), [3.18](#), [3.19](#), [3.20](#), [3.21](#), [3.22](#), obtemos:

**Possibilidades para  $Z_{pqr}$  no cálculo de  $D(1,6)$ :**

## Possibilidade 1:

$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682
	0,274682	0,895566
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109
	0,530109	0,929597
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614
	0,340614	1,499346
$Z_{213}^+$	0,851364	-0,453515
	0,453515	0,851364

## Possibilidade 2:

$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682
	0,274682	0,895566
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109
	0,530109	0,929597
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614
	0,340614	1,499346
$Z_{213}^-$	0,851364	0,453515
	-0,453515	0,851364

## Possibilidade 3:

$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682
	0,274682	0,895566
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109
	0,530109	0,929597
$Z_{324}^-$	1,499346	0,340614
	-0,340614	1,499346
$Z_{213}^+$	0,851364	-0,453515
	0,453515	0,851364



**Possibilidades para  $Z_{pqr}$  no cálculo de  $D(1,6)$ :**

## Possibilidade 4:

$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682
	0,274682	0,895566
$Z_{435}^+$	0,929597	-0,530109
	0,530109	0,929597
$Z_{324}^-$	1,499346	0,340614
	-0,340614	1,499346
$Z_{213}^-$	0,851364	0,453515
	-0,453515	0,851364

## Possibilidade 5:

$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682
	0,274682	0,895566
$Z_{435}^-$	0,929597	0,530109
	-0,530109	0,929597
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614
	0,340614	1,499346
$Z_{213}^+$	0,851364	-0,453515
	0,453515	0,851364

## Possibilidade 6:

$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682
	0,274682	0,895566
$Z_{435}^-$	0,929597	0,530109
	-0,530109	0,929597
$Z_{324}^+$	1,499346	-0,340614
	0,340614	1,499346
$Z_{213}^-$	0,851364	0,453515
	-0,453515	0,851364

Possibilidades para $Z_{pqr}$ no cálculo de $D(1,6)$ :			
Possibilidade 7:			
$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682	
	0,274682	0,895566	
$Z_{435}^-$	0,929597	0,530109	
	-0,530109	0,929597	
$Z_{324}^-$	1,499346	0,340614	
	-0,340614	1,499346	
$Z_{213}^+$	0,851364	-0,453515	
	0,453515	0,851364	
Possibilidade 8:			
$Z_{546}^+$	0,895566	-0,274682	
	0,274682	0,895566	
$Z_{435}^-$	0,929597	0,530109	
	-0,530109	0,929597	
$Z_{324}^-$	1,499346	0,340614	
	-0,340614	1,499346	
$Z_{213}^-$	0,851364	0,453515	
	-0,453515	0,851364	

Procedendo aos cálculos indicados pelas equações: [3.15](#), [3.16](#), [3.17](#), [3.18](#), [3.19](#), [3.20](#), [3.21](#), [3.22](#), obtemos:

Valores possíveis para $D(1, 6)$ :	
$D(1, 6)_{[M_4 M_3 M_2 M_1]}$ :	1, 7758
$D(1, 6)_{[M_4 M_3 M_2 m_1]}$ :	2, 49791
$D(1, 6)_{[M_4 M_3 m_2 M_1]}$ :	1, 76002
$D(1, 6)_{[M_4 M_3 m_2 m_1]}$ :	1, 85919
$D(1, 6)_{[M_4 m_3 M_2 M_1]}$ :	2, 45312
$D(1, 6)_{[M_4 m_3 M_2 m_1]}$ :	4, 4012
$D(1, 6)_{[M_4 m_3 m_2 M_1]}$ :	3, 25479
$D(1, 6)_{[M_4 m_3 m_2 m_1]}$ :	3, 51211

### 3.1.7 Completamentos da Matriz de Distâncias

Dado que a matriz de distâncias incompleta à qual se visa o completamento das distâncias desconhecidas é de ordem 6, existe um total de  $2^{6-3} = 2^3 = 8$  completamentos distintos.

Em relação às possibilidades de distâncias que foram calculadas na seção anterior, essas mesmas distâncias precisam ser vinculadas entre si de modo a comporem exatamente o total das 8 matrizes possíveis.

A pergunta que precisa ser respondida nesse momento é: qual é o fator de vínculo existente entre as várias possibilidades de distâncias que foram calculadas, que garanta que a matriz obtida por completamento seja uma das 8 soluções?

A resposta se encontra na própria estruturação algébrica das fórmulas de bilaterações sucessivas que propiciaram o cálculo de cada uma das distâncias desconhecidas.

De acordo com o item (3) do Teorema 1.2.2, se uma  $(i, j)$ -submatriz principal  $\hat{D}_{i,j}$  é tal que todas as distâncias na  $(K + 1)$ -diagonal são conhecidas, então existe um único completamento possível para  $\hat{D}_{i,j}$ . Assim, fixados os elementos da 3-diagonal da matriz incompleta de distâncias, os elementos das diagonais superiores ficam unicamente determinados.

Ao fixarmos, por exemplo, os elementos  $D(1, 4)$  e  $D(2, 5)$ , o elemento  $D(1, 5)$  que corresponde a este par é aquele elemento que foi gerado pelas mesmas matrizes  $Z_{pqr}$  (mesma sequência de sinais)

que compõem  $D(1,4)$  e  $D(2,5)$ . Por exemplo, se escolhemos:

$$D(1,4)_{[M_2M_1]} = \det(I - (I - Z_{324}^+)Z_{213}^+)D(1,2)$$

$$D(2,5)_{[m_3M_2]} = \det(I - (I - Z_{435}^-)Z_{324}^+)D(2,3)$$

então o elemento  $D(1,5)$  que corresponde a este par é dado por

$$D(1,5)_{[m_3M_2M_1]} = \det(I - (I - (I - Z_{435}^-)Z_{324}^+)Z_{213}^+)D(1,2)$$

Observe ainda que conforme se caminha em uma coluna da matriz incompleta, de uma linha inferior para uma linha imediatamente superior, as fórmulas de bilaterações sucessivas “aproveitam” o produto matricial acumulado no cálculo imediatamente anterior. Por exemplo, ao calcularmos a sequência de valores de distâncias para a coluna 6 da matriz incompleta temos:

$$D(3,6)_{[M_4M_3]} = \det(I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^+)D(3,4)$$

$$D(2,6)_{[M_4M_3M_2]} = \det(I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^+)Z_{324}^+)D(2,3)$$

$$D(1,6)_{[M_4M_3M_2M_1]} = \det(I - (I - (I - (I - Z_{546}^+)Z_{435}^+)Z_{324}^+)Z_{213}^+)D(1,2)$$

Como consequência imediata, se procedermos aos completamentos da matriz incompleta por colunas, da linha mais inferior até a primeira linha, é possível aproveitar os cálculos realizados nas linhas inferiores para obter os resultados esperados para os elementos localizados nas linhas superiores.

### 3.1.8 Descrição do Algoritmo de Bilaterações para o Completamento de Matrizes de Distâncias Incompletas em problemas do tipo $DMDGP_2$

A resolução de problemas do tipo  $DMDGP_2$  pressupõe que sejam previamente conhecidos os quadrados das distâncias que estão localizados na 1-diagonal e na 2-diagonal da matriz simétrica incompleta dada. Conforme está descrito no decorrer deste trabalho, uma técnica de completamento das matrizes de distâncias incompletas pertencentes a problemas do tipo  $DMDGP_2$  ocorre percorrendo-se as colunas que contém distâncias desconhecidas, do elemento mais inferior na coluna até o primeiro elemento da coluna.

Um fato que precisa ser destacado é que, nas fórmulas de bilaterações sucessivas, a definição de cada possibilidade de distância calculada se dá em função da variação dos sinais do termo  $A_{pqr}$  que, por sua vez, determinam as duas possibilidades para cada matriz  $Z_{pqr}$  nas fórmulas de bilaterações. Dado que, cada entrada desconhecida  $D(l, m)$  é calculada em função de uma entrada conhecida  $D(l, k)$ , exis-

tem  $m - k$  fatores  $Z_{pqr}$  na expressão correspondente. Logo, em cada fórmula de bilaterações sucessivas para o cálculo de possibilidades de  $D(l, m)$  em função de  $D(l, k)$ , existem  $2^{m-k-1}$  possibilidades distintas de valores para  $D(l, m)$ . Observe que dividimos o total de possibilidades por 2 visto que, por simetria, existem pares de possibilidades idênticas.

Na busca por um algoritmo que permita obter um completamento de uma matriz pertencente à classe de problemas do tipo  $DMDGP_2$ , devemos considerar os seguintes aspectos:

Primeiramente, é preciso sistematizar uma técnica para o cálculo que contemple as variações de sinais possíveis nos  $A_{pqr}$  de cada  $Z_{pqr}$  que surge nas fórmulas de bilaterações sucessivas. A partir daí, é calculada, então, uma possibilidade para cada distância desconhecida a partir das fórmulas de bilaterações sucessivas, estruturando as sequências de variações de sinais, de modo a se obter uma matriz completas que seja solução do problema. O algoritmo explora a árvore de possibilidades, descrita na Figura 3.2 a seguir.

Cada vértice  $c_i$  corresponde a uma possibilidade de completamento da coluna  $i$  da matriz incompleta. Uma ramificação no nível  $i$  corresponde à variação de sinal na sequência de matrizes de bilateração correspondente.

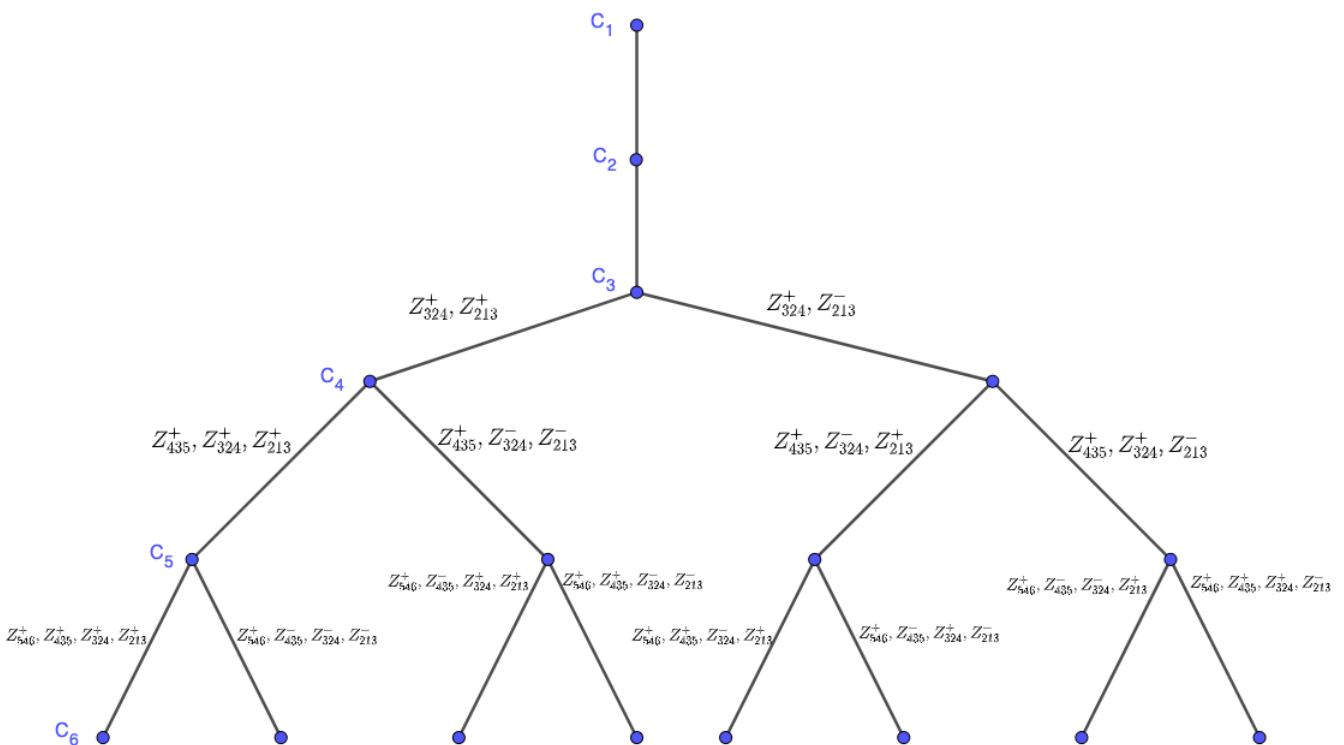


Figura 3.2: Árvore de possibilidades para o completamento de uma matriz de ordem 6.

O Algoritmo 1 corresponde à função  $Bilatera()$ , que recebe como argumentos os valores de  $i, j$  e  $s$ , onde:  $i$  é o índice do nível de cálculo, que corresponde ao índice coluna da matriz incompleta que será

completada, menos um,  $j$  corresponde ao índice da matriz-solução atual, em completamento e  $s$  é vetor de sinais, obtido de acordo com as matrizes que serão completadas.

Os valores dos sinais de  $s$  definem, por sua vez, o sinal do  $A_{pqr}$  de cada  $Z_{pqr}$  utilizado nas fórmulas de bilateração.

A função *Bilatera()* inicia sua sequência de cálculos, atribuindo os valores  $i+1$ , ao índice  $c$  da inicial da matriz atual  $M_j$ , em completamento,  $c-3$ , ao índice  $r$  da linha inicial e  $r+1$  ao índice  $k$  do elemento  $D(l, k)$  que será utilizado como referência para o cálculo das distâncias  $D(l, m)$ , onde  $m$  corresponde ao índice das colunas em preenchimento.

Em seguida, a função testa a condição  $if(i = 3) \dots$

Caso o teste anterior retorne verdadeiro, O sinal de  $s[1]$  é, então, atribuído à variável  $\sigma_1$ . E o sinal de  $s[2]$  é, então, atribuído à variável  $\sigma_2$ . A Matriz  $Q_1$  recebe, então o valor de:  $(I - (I - Z_{(k+1,k,k+2)}^{\sigma_1})Z_{(k,k-1,k+1)}^{\sigma_2}))$  que, por sua vez, corresponde aos cálculos de bilaterações necessárias para definir a primeira distância  $D(r, k)$  a ser calculada.

Caso contrário,  $i > 3$ , e as instruções aninhadas no próximo  $\{else \dots end if\}$  são executadas. Essa sequência de instruções se inicia atribuindo o valor 3 ao contador *count*, que, por sua vez, indexa as matrizes de fatores de bilateração  $Q_{count}$ .

Em seguida, é feito um teste, se a condição  $if(r \geq 2) \dots$  é verdadeira.

Em caso afirmativo, a sequência de comandos, então, adentra um laço  $\{for() \dots end for\}$  que varre as colunas da matriz em completamento,  $M_j$ , atual, desde a linha  $r$  até a linha 1, completando as respectivas colunas.

A característica fundamental da estrutura de comandos aninhados nesse laço  $\{for() \dots end for\}$  consiste no fato de que, ao calcular uma distância genérica  $D(l, m)$  localizada em uma linha superior da mesma coluna, são aproveitados os cálculos já efetuados e armazenados em memória, relativos às linhas inferiores.

Dessa forma os algoritmo de completamento de matrizes, quando feito por colunas, otimiza e reduz os esforços computacionais inerentes a esse tipo de cálculo.

Vale observar que, a cada passagem completa pelos comandos da função *Bilatera()*, o algoritmo gera o completamento de uma das colunas da matriz incompleta  $M_j$  em questão.

Sendo assim, variando  $i$  de 3 a  $n-1$ , e percorrida a sequência de testes do tipo  $\{if \dots end if\}$ , a

função *Bilatera()* retorna a matriz  $M_j$  obtida por completamentos via bilaterações, que, por sua vez, após todas essas passagens, corresponde a uma das matrizes-soluções esperadas.

A seguir, estão dispostos os detalhes referentes ao algoritmo que foi descrito nessa seção.

---

**Algorithm 1** Algoritmo para a obtenção das matrizes-soluções via completamentos por bilateração

---

**Require:**  $n \geq 4, 3 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq 2^{n-3}$

```

1: function Bilatera( $M_j, i, j, s$ ) :  $M_j$ 
2:    $M_j \leftarrow$  matriz de quadrado de distâncias incompleta, atual
3:    $i \leftarrow$  nível atual de cálculo, igual ao índice da coluna a ser completada, menos um
4:    $j \leftarrow$  índice da matriz incompleta atual
5:    $s \leftarrow$  vetor de sinais, de acordo com as matrizes-completas a serem geradas
6:    $c \leftarrow i + 1$ 
7:    $r \leftarrow c - 3$ 
8:    $k \leftarrow r + 1$ 
9:   if ( $i=3$ ) then
10:     $\sigma_1 \leftarrow s[1]$ 
11:     $\sigma_2 \leftarrow s[2]$ 
12:     $Q_1 \leftarrow (I - (I - Z_{(k+1,k,k+2)}^{\sigma_1})Z_{(k,k-1,k+1)}^{\sigma_2})$ 
13:     $M_j[r, c] \leftarrow \det(Q_1) * D(r, k)$ 
14:   else
15:      $count \leftarrow 3$ 
16:     if ( $r \geq 2$ ) then
17:       for ( $(w = r) \rightarrow 1, w_{--}$ ) do
18:          $k \leftarrow w + 1$ 
19:          $\sigma_1 \leftarrow s[count]$ 
20:          $B \leftarrow Z_{(k,k-1,k+1)}^{\sigma_1}$ 
21:          $B \leftarrow Q_{count-1} \times B$ 
22:          $Q_{count} \leftarrow I - B$ 
23:          $M_j[w, c] \leftarrow \det(Q_{count}) * D(r, k)$ 
24:          $count_{+=1}$ 
25:       end for
26:     end if
27:   end if
28:   Bilatera() =  $M_j$ 
29: end function

```

---

Seguem descritas as respectivas matrizes-soluções encontradas:

Matriz Completa  $M_1$ :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & D(1,4)_{[M_2M_1]} & D(1,5)_{[M_3M_2M_1]} & D(1,6)_{[M_4M_3M_2M_1]} \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & D(2,5)_{[M_3M_2]} & D(2,6)_{[M_4M_3M_2]} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & D(3,6)_{[M_4M_3]} \\ D(1,4)_{[M_2M_1]} & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ D(1,5)_{[M_3M_2M_1]} & D(2,5)_{[M_3M_2]} & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ D(1,6)_{[M_4M_3M_2M_1]} & D(2,6)_{[M_4M_3M_2]} & D(3,6)_{[M_4M_3]} & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 2,45476 & 1,97125 & 1,17758 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 1,34019 & 0,38327 \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & 1,76096 \\ 2,45476 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 1,97125 & 1,34019 & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 1,17758 & 0,38327 & 1,76096 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante de Cayley-Menger, calculado para a matriz-solução  $M_1$ : aproximadamente  $10^{-45}$ .

Matriz Completa  $M_2$ :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & D(1,4)_{[M_2m_1]} & D(1,5)_{[M_3M_2m_1]} & D(1,6)_{[M_4M_3M_2m_1]} \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & D(2,5)_{[M_3M_2]} & D(2,6)_{[M_4M_3M_2]} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & D(3,6)_{[M_4M_3]} \\ D(1,4)_{[M_2m_1]} & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ D(1,5)_{[M_3M_2m_1]} & D(2,5)_{[M_3M_2]} & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ D(1,6)_{[M_4M_3M_2m_1]} & D(2,6)_{[M_4M_3M_2]} & D(3,6)_{[M_4M_3]} & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 2,26101 & 0,14664 & 2,49791 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 1,34019 & 0,38327 \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & 1,76096 \\ 2,26101 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 0,14664 & 1,34019 & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 2,49791 & 0,38327 & 1,76096 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante de Cayley-Menger, calculado para a matriz-solução  $M_2$ : aproximadamente  $10^{-30}$ .



Matriz Completa  $M_3$ :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & D(1,4)_{[M_2m_1]} & D(1,5)_{[M_3m_2M_1]} & D(1,6)_{[M_4M_3m_2M_1]} \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & D(2,5)_{[M_3m_2]} & D(2,6)_{[M_4M_3m_2]} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & D(3,6)_{[M_4M_3]} \\ D(1,4)_{[M_2m_1]} & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ D(1,5)_{[M_3m_2M_1]} & D(2,5)_{[M_3m_2]} & 0,820828643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ D(1,6)_{[M_4M_3m_2M_1]} & D(2,6)_{[M_4M_3m_2]} & D(3,6)_{[M_4M_3]} & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 2,26101 & 2,10259 & 1,76002 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 2,21711 & 5,24241 \cdot 10^{-2} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & 1,76096 \\ 2,26101 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 2,10259 & 2,21711 & 0,820828643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 1,76002 & 5,24241 \cdot 10^{-2} & 1,76096 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante de Cayley-Menger, calculado para a matriz-solução  $M_3$ : aproximadamente  $10^{-31}$ .

Matriz Completa  $M_4$ :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & D(1,4)_{[M_2M_1]} & D(1,5)_{[M_3m_2m_1]} & D(1,6)_{[M_4M_3m_2m_1]} \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & D(2,5)_{[M_3m_2]} & D(2,6)_{[M_4M_3m_2]} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & D(3,6)_{[M_4M_3]} \\ D(1,4)_{[M_2M_1]} & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ D(1,5)_{[M_3m_2m_1]} & D(2,5)_{[M_3m_2]} & 0,820828643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ D(1,6)_{[M_4M_3m_2m_1]} & D(2,6)_{[M_4M_3m_2]} & D(3,6)_{[M_4M_3]} & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 2,45476 & 0,16445 & 1,85919 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 2,21711 & 5,24241 \cdot 10^{-2} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & 1,76096 \\ 2,45476 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 0,16445 & 2,21711 & 0,820828643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 1,85919 & 5,24241 \cdot 10^{-2} & 1,76096 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante de Cayley-Menger, calculado para a matriz-solução  $M_4$ : aproximadamente  $10^{-45}$ .

Matriz Completa  $M_5$ :

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & D(1,4)_{[M_2M_1]} & D(1,5)_{[M_3m_2m_1]} & D(1,6)_{[M_4m_3M_2M_1]} \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & D(2,5)_{[M_3m_2]} & D(2,6)_{[M_4m_3M_2]} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & D(3,6)_{[M_4m_3]} \\ D(1,4)_{[M_2M_1]} & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ D(1,5)_{[M_3m_2m_1]} & D(2,5)_{[M_3m_2]} & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ D(1,6)_{[M_4m_3M_2M_1]} & D(2,6)_{[M_4m_3M_2]} & D(3,6)_{[M_4m_3]} & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 2,45476 & 0,16445 & 2,45312 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 2,21711 & 1,08635 \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & 2,43276 \\ 2,45476 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 0,16445 & 2,21711 & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 2,45312 & 1,08635 & 2,43276 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante de Cayley-Menger, calculado para a matriz-solução  $M_5$ : aproximadamente  $10^{-45}$ .

Matriz Completa  $M_6$ :

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & D(1,4)_{[M_2m_1]} & D(1,5)_{[M_3m_2M_1]} & D(1,6)_{[M_4m_3M_2m_1]} \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & D(2,5)_{[M_3m_2]} & D(2,6)_{[M_4m_3M_2]} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & D(3,6)_{[M_4m_3]} \\ D(1,4)_{[M_2m_1]} & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ D(1,5)_{[M_3m_2M_1]} & D(2,5)_{[M_3m_2]} & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ D(1,6)_{[M_4m_3M_2m_1]} & D(2,6)_{[M_4m_3M_2]} & D(3,6)_{[M_4m_3]} & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 2,26101 & 2,10259 & 4,4012 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 2,21711 & 1,08635 \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & 2,43276 \\ 2,26101 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 2,10259 & 2,21711 & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 4,4012 & 1,08635 & 2,43276 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante de Cayley-Menger, calculado para a matriz-solução  $M_6$ : aproximadamente  $10^{-30}$ .

Matriz Completa  $M_7$ :

$$M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & D(1,4)_{[M_2m_1]} & D(1,5)_{[M_3M_2m_1]} & D(1,6)_{[M_4m_3m_2M_1]} \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & D(2,5)_{[M_3M_2]} & D(2,6)_{[M_4m_3m_2]} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & D(3,6)_{[M_4m_3]} \\ D(1,4)_{[M_2m_1]} & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ D(1,5)_{[M_3M_2m_1]} & D(2,5)_{[M_3M_2]} & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ D(1,6)_{[M_4m_3m_2M_1]} & D(2,6)_{[M_4m_3m_2]} & D(3,6)_{[M_4m_3]} & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 2,26101 & 0,14664 & 3,25479 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 1,34019 & 0,57237 \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & 2,43276 \\ 2,26101 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 0,14664 & 1,34019 & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 3,25479 & 0,57237 & 2,43276 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante de Cayley-Menger, calculado para a matriz-solução  $M_7$ : aproximadamente  $10^{-30}$ .

Matriz Completa  $M_8$ :

$$M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & D(1,4)_{[M_2M_1]} & D(1,5)_{[M_3M_2M_1]} & D(1,6)_{[M_4m_3m_2m_1]} \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & D(2,5)_{[M_3M_2]} & D(2,6)_{[M_4m_3m_2]} \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & D(3,6)_{[M_4m_3]} \\ D(1,4)_{[M_2M_1]} & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ D(1,5)_{[M_3M_2M_1]} & D(2,5)_{[M_3M_2]} & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ D(1,6)_{[M_4m_3m_2m_1]} & D(2,6)_{[M_4m_3m_2]} & D(3,6)_{[M_4m_3]} & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1,304838715 & 0,297201635 & 2,45476 & 1,97125 & 3,51211 \\ 1,304838715 & 0 & 1,214147626 & 0,443605912 & 1,34019 & 0,57237 \\ 0,297201635 & 1,214147626 & 0 & 2,870311879 & 0,82082643 & 2,43276 \\ 2,45476 & 0,443605912 & 2,870311879 & 0 & 3,286984669 & 0,283853214 \\ 1,97125 & 1,34019 & 0,82082643 & 3,286984669 & 0 & 2,88429398 \\ 3,51211 & 0,57237 & 2,43276 & 0,283853214 & 2,88429398 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinante de Cayley-Menger, calculado para a matriz-solução  $M_8$ : aproximadamente  $10^{-45}$ .

Conforme pode ser observado, das matrizes-soluções que foram elencadas, a matriz  $M_4$  corres-

ponde à matriz completa inicial que foi apagada parcialmente e deu origem ao problema de completamento distâncias proposto, considerando-se uma precisão de cinco casas decimais após a vírgula, para efeito de comparação numérica.

## Considerações Finais

---

O desenvolvimento dessa pesquisa proporcionou a oportunidade de lançar um novo olhar sobre as possibilidades de cálculo de distâncias em espaços euclidianos, a partir da aplicação de técnicas de bilaterações sucessivas sobre pontos cujas distâncias são previamente conhecidas, obtendo distâncias ainda não conhecidas *a priori*.

O trabalho propõe combinar as respectivas técnicas de bilaterações sucessivas com varreduras dos níveis da matriz a ser completada por meio de um algoritmo que propicia a resolução de problemas de geometria de distâncias da classe  $DMDGP_2$ .

As habilidades requisitadas para a estruturação do algoritmo proposto se revelaram de fundamental importância para a melhora da percepção do possível funcionamento computacional das estruturas matemáticas envolvidas, o que propiciou otimizar as técnicas de programação do autor da dissertação, sob tutela constante do seu orientador.

Dado que essa dissertação ocorre nos âmbitos de um Mestrado Profissional, em termos do aperfeiçoamento profissional do autor da dissertação, vale ressaltar que os ganhos foram notórios: no decorrer da pesquisa, foram aplicadas técnicas de análise e de síntese dos conceitos matemáticos correlatos ao tema proposto, relacionando fórmulas algébricas com a visualização geométrica de estruturas relacionadas, exercitando a elaboração de textos científicos consistentes, que por sua vez, tratam-se de habilidades fundamentais para os profissionais do magistério.

Apesar de a proposta de um modelo diferenciado de técnica de cálculo para problemas do tipo  $DMDGP_2$  ter logrado êxito, o trabalho proposto abre campo para o desenvolvimento de novas pesquisas visando a generalização de resultados, construção de algoritmos mais gerais e implementações mais

eficientes que, com certeza, poderão agregar novos conhecimentos, desvendando novas perspectivas a serem acrescentadas aos vieses que foram elencados.

---

# Referências Bibliográficas

---

- [1] Abud, G., Alencar, J. e Lavor, C.: *Bilateração e geometria de distâncias*. Em *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, V.3, n.1. SBMAC, 2015. <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/issue/view/3>.
- [2] Abud, G. e Lavor, C.: *Explorando a Dualidade em Geometria de Distâncias*. Tese de Doutorado, Universidade de Campinas, 2014.
- [3] Blumenthal, L.: *Theory and Applications of Distance Geometry*. Oxford University Press, 1953.
- [4] Dong Q., W.Z.: *A linear-time algorithm for solving the molecular distance geometry problem with exact inter-atomic distances*. *J. Global Optim.*, pp. 365–375, 2002.
- [5] Havel, T.F.: *Some Examples of the use of distances as coordinates for euclidean geometry*. Institute of science and technology: University of Michigan.
- [6] Laurent, M.: *Matrix Completion Problems*. Springer, 2009.
- [7] Lavor, C.: *Um Convite à Geometria de Distâncias*. SBMAC, 2014.
- [8] Lavor, C., Liberti, L. e Maculan, N.: *Molecular distance geometry problem*. *Encyclopedia of Optimization*, pp. 2304–2311, 2009.
- [9] Lavor, C., Liberti, L., Maculan, N. e Mucherino, A.: *The discretizable molecular distance geometry problem*. *Computational Optimization and Applications*, 52:115–146, 2012.
- [10] Liberti, L. e Lavor, C.: *On a relationship between graph realizability and distance matrix completion*. *Optimization Theory, Decision Making, and Operations Research Applications*, pp. 39–48, 2013.
- [11] Liberti, L., Lavor, C., Alencar, J. e Abud, G.: *Counting the number of solutions of K-DMDGP instances*. *Lecture Notes in Computer Science*, 8085:224–230, 2013.
- [12] Liberti, L., Lavor, C., Alencar, J. e Abud, G.: *Counting the number of solutions of K-DMDGP instances*. *Lecture Notes in Computer Science*, 8085:224–230, 2013.

- [13] N., R.: *Distance-based formulations for the position analysis of Kinematics chains*. Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de Catalunya, 2012.
- [14] Rojas N., T. F.: *The forward kinematics of 3-RPR planar robots: a review and a distance-based formulation*. IEEE Transactions on Robotics, pp. 143–150, 2011.