



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Educação e Humanidades  
Faculdade de Formação de Professores

Lucas Nunes de Moraes

**Funções Trigonométricas Hiperbólicas: teoria, curiosidades e  
propostas para o trabalho docente**

São Gonçalo

2021

Lucas Nunes de Moraes

**Funções Trigonométricas Hiperbólicas: teoria, curiosidades e propostas para o trabalho docente**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Silva de Souza

São Gonçalo

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/A

M827	<p>Moraes, Lucas Nunes de; Funções Trigonométricas Hiperbólicas: teoria, curiosidades e propostas para o trabalho docente/ Lucas Nunes de Moraes – Rio de Janeiro, 2021; 133 f.: il.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Fábio Silva de Souza Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.</p> <p>1.Funções Hiperbólicas – Teses. 2. Matemática – Estudo e Ensino – Teses. I. Souza, Fábio Silva de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores. III. Título.</p> <p>CDU 519.1</p>
------	---

Rinaldo Magallon CRB - 7 / 5016. Bibliotecário responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

  
ASSINATURA

  
DATA

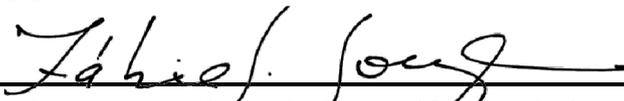
Lucas Nunes de Moraes

**Funções trigonométricas hiperbólicas: teoria, curiosidades e propostas para o trabalho docente**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 25 de agosto de 2021.

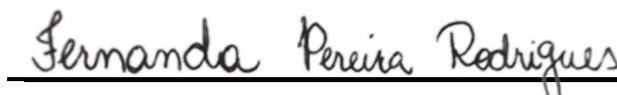
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Fábio Silva de Souza (Orientador)  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ



Prof. Dr. Márcio da Silva Passos Telles  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ



Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Fernanda Pereira Rodrigues  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ



Prof. Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo  
Instituto de Matemática e Estatística – UFF

São Gonçalo

2021

## DEDICATÓRIA

A Deus e a família.

## AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida.

A minha mãe Tânia e irmã Camila pela minha história.

A minha esposa Mayara pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A Maximiliano, meu amigo fiel.

Ao Professor Dr. Fábio Silva de Souza pelas numerosas sugestões, pela excelente orientação, pela dedicação, atenção e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“Confie no Senhor de todo o coração e não se apoie na sua própria inteligência.  
Lembre-se de Deus em tudo o que fizer, e ele lhe mostrará o caminho certo.”

*Provérbios 3: 5-6*

## RESUMO

MORAES, L. N. *Funções Trigonômétricas Hiperbólicas: teoria, curiosidades e propostas para o trabalho docente*. 2021. 130 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2021.

Este trabalho visa apresentar diferentes perspectivas para o estudo das funções trigonométricas hiperbólicas. Nosso objetivo principal é fornecer uma Sequência Didática para o ensino de algumas propriedades das Funções Hiperbólicas e da curva catenária para aplicação em sala de aula. Para tal, fizemos uma breve análise de outros trabalhos do PROFMAT que abordaram ou o estudo das funções hiperbólicas ou da curva catenária. Com esta análise verificamos os pontos que mais despontaram e as lacunas existentes. Por exemplo, observamos que os trabalhos analisados quase sempre citam o Gateway Arch como exemplo de aplicação da catenária. Apesar de estar correto é um exemplo saturado e queremos ir além, explorando e demonstrando propriedades inerentes à catenária como a de possuir menor energia potencial gravitacional, ser o lugar geométrico do centro de uma parábola rolante ou ainda ter seu comprimento de arco numericamente igual à área sob a curva. Fizemos um compêndio com diversas propriedades das funções hiperbólicas e suas respectivas demonstrações com o objetivo de ser um material confiável para consulta do professor. A proposta da Sequência Didática possui três níveis de profundidade para aplicação, em sala de aula, das propriedades desenvolvidas ao longo do trabalho.

Palavras-chave: Funções trigonométricas hiperbólicas. Cosseno Hiperbólico. Catenária. Catenária e Parábola.

## ABSTRACT

MORAES, L. N. *Hyperbolic Trigonometric Functions: theory, curiosities and proposals for teaching work*. 2021. 130 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2021.

This work aims to present different perspectives for the study of hyperbolic trigonometric functions. Our main objective is to provide a Didactic Sequence for teaching some properties of Hyperbolic Functions and the catenary curve for application in the classroom. To this end, we made a brief analysis of other PROFMAT works that addressed either the study of hyperbolic functions or the catenary curve. With this analysis, we verified the points that emerged the most and the existing gaps. For example, we observed that the works analyzed almost always mention the Gateway Arch as an example of application of the catenary. Although it is correct, it is a saturated example and we want to go further, exploring and demonstrating properties inherent to the catenary, such as having a lower gravitational potential energy, being the locus of the center of a rolling parabola or having its arc length numerically equal to the area under the curve. We made a compendium with several properties of hyperbolic functions and their respective demonstrations with the objective of being a reliable material for the teacher to consult. The proposal of the Didactic Sequence has three levels of depth for the application, in the classroom, of the properties developed during the work.

Keywords: Hyperbolic trigonometric functions. Hyperbolic cosine. Catenary. Catenary and Parabola.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CPII	Colégio Pedro II
FUFS	Fundação Universitária Federal do Sergipe
IES	Instituição de Ensino Superior
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
UECE	Universidade Estadual do Ceará
UEM	Universidade Estadual de Maringá
UEMS	Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul
UENF	Universidade Estadual do Norte Fluminense
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFABC	Universidade Federal do ABC
UFAM	Universidade Federal do Amazonas
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sin$	função seno
$\sinh$	função seno hiperbólico
$\cos$	função cosseno
$\cosh$	função cosseno hiperbólico
$\tan$	função tangente
$\tanh$	função tangente hiperbólica
$\sec$	função secante
$\operatorname{sech}$	função secante hiperbólica
$\csc$	função cossecante
$\operatorname{csch}$	função cossecante hiperbólica
$\cot$	função cotangente
$\operatorname{coth}$	função cotangente hiperbólica
$\operatorname{arsinh}$	função arco seno hiperbólico
$\operatorname{arcosh}$	função arco cosseno hiperbólico
$\operatorname{arctanh}$	função arco tangente hiperbólica
$\ln$	logaritmo natural
$e$	número de Euler
$\alpha$	ângulo alfa
$\beta$	ângulo beta
$\gamma$	ângulo gama ou ângulo hiperbólico
$\theta$	ângulo theta
$\cong$	aproximadamente igual a
$\vec{v}$	vetor $v$
$ \vec{v}  = v$	módulo do vetor $v$

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	10
1	<b>FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS (FTH)</b> . . . . .	22
1.1	Conceitos e Noções Preliminares . . . . .	22
1.2	Parametrização da Hipérbole . . . . .	24
1.3	Definindo as Funções Hiperbólicas . . . . .	28
1.3.1	<u>Funções Hiperbólicas Inversas</u> . . . . .	29
1.4	<b>Relações Fundamentais</b> . . . . .	31
1.5	<b>Gráficos</b> . . . . .	32
1.5.1	<u>Assíntotas</u> . . . . .	32
1.5.2	<u>Paridade</u> . . . . .	34
1.6	<b>Soma de Arcos</b> . . . . .	37
1.7	<b>Derivadas e Integrais</b> . . . . .	39
1.8	<b>Extensão Complexa</b> . . . . .	44
2	<b>CURIOSIDADES E APLICAÇÕES</b> . . . . .	46
2.1	Noções Preliminares no Estudo da Corda Suspensa . . . . .	46
2.2	Cabos Suspensos e Catenárias . . . . .	50
2.3	Aproximação de Catenárias por Parábolas . . . . .	63
2.4	Catenárias em outros Planetas . . . . .	67
2.4.1	<u>Uma possível solução algébrica</u> . . . . .	69
2.5	Comprimento de Arco e a Área sob a Curva . . . . .	70
2.6	Minimizando a Energia Potencial Gravitacional . . . . .	73
2.7	Lugar Geométrico do Foco de uma Parábola Rolante . . . . .	77
2.8	Catenária e Tractriz . . . . .	83
3	<b>PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b> . . . . .	91
	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	109
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	111
	<b>APÊNDICE A – Tabelas</b> . . . . .	114
	<b>APÊNDICE B – Demonstrações</b> . . . . .	118
	<b>APÊNDICE C – Links para Construções no Geogebra</b> . . . . .	129
	<b>APÊNDICE D – Formulário Docente da Sequência Didática</b> . . . . .	130

## INTRODUÇÃO

As Funções Trigonométricas Hiperbólicas (FTH), ou apenas Funções Hiperbólicas (FH), são funções oriundas da parametrização da hipérbole, tal como as Funções Trigonométricas Circulares que, usualmente estudadas no Ensino Básico, surgem da parametrização do círculo unitário. Dificilmente encontrar-se-á na literatura o termo Funções Trigonométricas Hiperbólicas, mas decidimos mantê-lo em alguns momentos com objetivo didático de reforçar a analogia existente as funções circulares e as hiperbólicas. Portanto, para este trabalho os termos FTH e FH são idênticos.

A história deste tema não é linear, mas o seu desenvolvimento origina-se do antigo problema de determinar a curva formada por uma corda suspensa. Inclusive Galileu Galilei, entre os séculos XVI e XVII, já havia sugerido que tal curva seria uma parábola o que acabou se provando falso por Christiaan Huygens em 1646.

De forma geral, a semelhança entre as curvas catenária e parábola vem confundindo alunos e professores ao longo dos anos. Com isso, levantamos algumas semelhanças e diferenças entre elas trazendo ao debate os principais *misconceptions*<sup>1</sup> e curiosidades envolvendo as FTH. Esta pesquisa foca em sistematizar definições, conceitos e propriedades das FTH e em apresentar materiais didáticos aos professores que poderão ser utilizados no Ensino Básico e nos primeiros anos do Superior.

O tópico em questão é notadamente pouco trabalhado em qualquer nível de ensino, mas acreditamos que, se bem trabalhado, pode gerar aprendizagens significativas.

As FTH possuem uma gama considerável de aplicações tanto na própria Matemática quanto para os problemas do cotidiano. A catenária, curva que é o gráfico do cosseno hiperbólico, está presente na arquitetura e engenharia em problemas de cabos suspensos, construção de pontes pênséis, arcos invertidos, ancoragem de objetos no fundo do mar e instalação de cabos submarinos. As FTH também podem ser encontradas nas extensões complexas das funções trigonométricas circulares, são soluções de equações diferenciais específicas, medem distâncias na geometria hiperbólica, entre outros exemplos.

Portanto, buscou-se reunir dados e curiosidades diversas com o propósito de responder ao seguinte problema de pesquisa: Como o estudo das Funções Trigonométricas Hiperbólicas pode ser abordado nas instituições de ensino básico e superior e como o uso de materiais didáticos pode auxiliar nessa tarefa?

O objetivo geral deste trabalho é contribuir com a formação inicial e continuada do professor que ensina matemática, fornecendo um material teórico confiável juntamente com atividades inseridas em uma sequência didática para ensinar as FTH. Portanto,

---

<sup>1</sup> São mal-entendidos e interpretações erradas com base em significados incorretos. (OJOSE, 2015)

nosso público-alvo são os professores de Matemática e estudantes de Licenciatura em Matemática.

Um dos passos a ser realizado para alcançar o objetivo geral da pesquisa é fazer uma revisão das principais definições, conceitos e propriedades envolvendo as FTH a fim de sanar eventuais *misconceptions* que possam existir para o leitor. Essa revisão pode ser encontrada no Capítulo 1.

Em seguida, pretendemos mostrar as principais aplicações e algumas curiosidades das FTH com especial atenção àquelas relativas à catenária. Este objetivo será alcançado ao longo do Capítulo 2.

O terceiro dos objetivos específicos da pesquisa é fornecer materiais didáticos, abordagens e jogos que auxiliem o professor que ensina matemática na tarefa de ensinar este conteúdo. Estas atividades serão desenvolvidas no Capítulo 3.

Devido à dificuldade para se ensinar o assunto de Funções Trigonométricas Hiperbólicas nas escolas e universidades, esta pesquisa se justifica por trazer uma revisão, análise e síntese dos principais conceitos e aplicações das FTH.

Assim sendo, este trabalho de pesquisa visa produzir um material confiável e aplicável pelo público-alvo visando incentivar o ensino deste tópico.

Para o desenvolvimento do presente trabalho faremos inicialmente uma breve revisão de outras dissertações do PROFMAT que tangenciam o tema proposto. Levantaremos os principais tópicos abordados e identificaremos possíveis lacunas a serem preenchidas com este trabalho. Foram utilizados livros clássicos de Cálculo e outros sobre Mecânica para Engenharia onde encontramos muitas aplicações.

Esta pesquisa pode ser classificada como exploratória e descritiva visto que girará em torno da revisão de livros que abordam as FTH a fim de encontrar diferentes contextos e produzir uma revisão teórica rica em exemplos e aplicações. Além disso, iremos estudar e pesquisar materiais didáticos que já vêm sendo utilizados procurando adaptá-los e criar materiais para o estudo das FTH.

## **Sobre o autor**

Pretendo utilizar esta seção para esclarecer (em poucas palavras) um pouco para o leitor quem é o autor deste trabalho e quais as motivações me trouxeram até aqui.

Provavelmente minha relação mais próxima com a Matemática se inicia no ano de 2004, quando eu, com meus 13 anos, cursando a 7<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental, ganhei meu primeiro computador PC justamente da minha professora de Matemática Norma Sueli. Para ela, um gesto simbólico. Para mim, sem dúvidas, um divisor de águas.

No ano de 2009, havia passado no vestibular da UFRJ para o curso de Astronomia em último colocado da 1<sup>a</sup> reclassificação. Como todo calouro, sofri muito para me adaptar

ao ritmo de estudos acelerado que o ensino superior exigia. Neste mesmo ano, com 18 anos, consegui meu primeiro emprego e adivinhem quem me contratou? Pois bem, meu antigo professor de Matemática do Ensino Médio, Rodrigo Fernandes Brito, ao qual eu sou muito grato. Trabalhei com reforço escolar.

Em 2010, mudei de curso e passei para Licenciatura em Matemática na própria UFRJ. Com muita dedicação me formei em 2014. Em 2015, iniciei o Mestrado em Ensino de Matemática na UFRJ tendo a honra de ser o primeiro colocado no processo seletivo. Infelizmente, por motivos de força maior, acabei não concluindo o mestrado apesar de ter cursado todas as disciplinas com ótimo aproveitamento e CR de aproximadamente 9,17.

Em 2018, tive a oportunidade de realizar a prova do PROFMAT e novamente a honra de poder passar em primeiro colocado no processo seletivo. Escrevo estas palavras não para me engrandecer ou gabar, mas para exemplificar que toda trajetória terá suas dificuldades e cabe a cada um a força para enfrentá-las e vencê-las.

Na atuação profissional sempre amei o que fazia. Ensinar matemática é uma das coisas que mais gosto de fazer. Tive a oportunidade de ser monitor de várias disciplinas na graduação, fui bolsista no Pré-Vestibular do CEDERJ entre os anos de 2011 e 2014. Trabalhei no Colégio e Curso pH nos anos de 2015 e 2017. Em 2017, fui Professor Substituto no Colégio de Aplicação da UFRJ e em 2018, juntamente com o PROFMAT, tive a honra de passar no processo seletivo para Oficiais Temporários da Marinha do Brasil, onde me encontro até hoje.

Atualmente, trabalho no Centro de Instrução Almirante Graça Aranha. Esta escola tem o propósito de formar, especializar, aperfeiçoar e atualizar o pessoal das categorias profissionais da Marinha Mercante e demais atividades correlatas. Em complemento a diversas funções colaterais, sou responsável por ministrar a disciplina de Cálculo 3 [Funções de Várias Variáveis e EDO's] além de já ter ministrado as disciplinas de Cálculo 1, 2 e Álgebra Linear.

Hoje, depois de muita luta, suor e lágrimas, escrevo este trabalho para findar e iniciar mais um ciclo na minha vida.

## **Revisão de Literatura**

O Ensino de Matemática é um tema muito rico e amplo. Dentre os diversos assuntos, escolhemos desenvolver o estudo das Funções Trigonométricas Hiperbólicas que, apesar de possuir muitas aplicações, é pouco conhecido e conseqüentemente pouco aplicado e ensinado pelos professores no Ensino Básico. Talvez o motivo seja que algumas fórmulas sejam deduzidas com o auxílio do Cálculo ou ainda que as fórmulas cartesianas para as Funções Hiperbólicas envolvam a constante de Euler ( $e$ ) em funções exponenciais, que também são pouco difundidas no Ensino Básico. Sendo estes os reais motivos ou não,

a questão é que acreditamos ser possível trabalhar, mesmo que qualitativamente e com auxílio de *softwares*, estes conteúdos antes do Ensino Superior.

A fim de delimitar nossos estudos fizemos a análise de algumas dissertações já defendidas por colegas de PROFMAT. Os trabalhos analisados foram obtidos através da página eletrônica oficial do PROFMAT <sup>2</sup>, na seção de Dissertações. Primeiramente, foram selecionados para esta pesquisa todos aqueles que tratavam de Funções Hiperbólicas. Encontramos sete (07) dissertações que estão situadas entre os anos de 2013 e 2019. Na segunda análise, procuramos dissertações cujo tema focasse direta ou indiretamente na curva catenária. Nesta última, foram encontradas quatro (04) dissertações, entre os anos de 2016 e 2019. Decidimos incluir ainda a apreciação de duas dissertações com temas afins sendo uma da UFSCAR de 2017 e outra, da USP de 2008.

O objetivo dessa revisão é identificar pontos ainda pouco explorados pelos trabalhos em questão e desenvolvê-los para entregar um material complementar um pouco mais completo ao professor de Matemática.

A análise foi feita considerando os seguintes questionamentos:

- Como, em linhas gerais, os aspectos históricos são abordados?
- Como são definidas as funções trigonométricas hiperbólicas? Ou seja, como são deduzidas suas equações cartesianas?
- Quais são as aplicações desenvolvidas?
- Qual o público-alvo?
- Houve proposta de trabalho para o Ensino Médio? Qual?

Os trabalhos analisados foram divididos em três grupos. O primeiro grupo reúne sete trabalhos do PROFMAT cujos títulos fazem referência geral às funções hiperbólicas. O segundo grupo é composto por quatro trabalhos também de alunos do PROFMAT que tratam mais especificamente da catenária. O terceiro e último grupo engloba dois trabalhos que, apesar de não terem sido escritos por alunos do PROFMAT, consideramos interessantes contribuições para este trabalho. As listas dessas dissertações podem ser encontradas a seguir nas tabelas 1, 2 e 3.

---

<sup>2</sup> <https://www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes/>

## Trabalhos sobre Funções Hiperbólicas

Tabela 1 - Trabalhos sobre Funções Hiperbólicas

<b>Funções Hiperbólicas</b>			
<b>Defesa</b>	<b>Aluno</b>	<b>Título</b>	<b>IES</b>
10/04/2019	CRISTIANE MENEGANTE DA <b>SILVA</b>	As funções hiperbólicas no ensino médio. Apresentação, conceitos e aplicações.	UEMS
10/10/2018	MARIO VICENTE <b>FERRARA</b>	Uma proposta para a abordagem de funções hiperbólicas no ensino médio.	UEM
30/07/2015	JONAS JOSÉ CRUZ DOS <b>SANTOS</b>	Estudo e aplicações das funções hiperbólicas.	UFPB
30/04/2015	MARIA DO BOM CONSELHO DA SILVA BESERRA <b>FREITAS</b>	As funções hiperbólicas e suas aplicações.	UFPB
29/08/2014	KENNEDY FÉLIX <b>RODRIGUES</b>	Ângulos hiperbólicos e funções hiperbólicas.	FUFS
21/08/2013	MÁRCIO DE CASTRO <b>ALHADAS</b>	Funções hiperbólicas no ensino médio.	UENF
05/07/2013	JERRY GLEISON SALGUEIRO FIDANZA <b>VASCONCELOS</b>	Funções hiperbólicas: história, conceito e aplicação.	UFAM

Fonte: O autor, 2021.

### **1 - Como, em linhas gerais, os aspectos históricos são abordados?**

Começaremos nossa revisão de literatura analisando como os trabalhos fizeram a abordagem histórica do assunto de funções hiperbólicas. Podemos perceber que quase todos os trabalhos – exceto Freitas (2015) e Rodrigues (2014) – mencionam ou o desenvolvimento histórico do estudo da catenária ou das funções hiperbólicas. Foi notável que Silva (2019), Ferrara (2018) e Santos (2015) utilizaram Alhadadas (2013) como referência. Alhadadas (2013) escreve pequenas biografias das personagens históricas e identifica o principal papel delas no desenvolvimento das funções hiperbólicas, de forma similar a abordagem adotada por Vasconcelos (2013).

Freitas (2015) e Rodrigues (2014) optam por uma abordagem de crítica aos principais livros didáticos que se propõem a abordar as funções hiperbólicas. Freitas (2015), por

exemplo, faz uma análise de seis livros didáticos onde procura ressaltar que as definições das funções hiperbólicas foram dadas sem nenhuma preocupação em mostrar o porquê de serem definidas em termos de exponenciais.

Podemos sugerir para futuros trabalhos de colegas do PROFMAT um aprofundamento na parte histórica. Poder-se-iam pesquisar as demonstrações originais e traduzi-las para linguagem matemática moderna.

## 2 - Como são definidas as funções trigonométricas hiperbólicas?

Se grande parte das críticas destes trabalhos está voltada diretamente ao modo como as funções hiperbólicas estão sendo apresentadas, então como os autores procuraram definir ou deduzir as equações cartesianas das Funções Hiperbólicas?

Silva (2019) a princípio define as funções hiperbólicas em termos de exponenciais e deduz várias propriedades. Apenas posteriormente traz a parametrização da hipérbole para justificar a definição. Um aspecto interessante notado foi que a paridade das funções hiperbólicas foi explorada através de tabelas no Excel sugerindo uma atividade interessante de ser trabalhada com os alunos.

Ferrara (2018) passa grande parte de seu trabalho escrevendo um capítulo sobre homotetias e transformações de tensão. Ainda antes de definir as funções hiperbólicas passa mais tempo dissertando sobre a hipérbole e suas propriedades. Por fim, define as funções hiperbólicas a partir da parametrização da hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$  seguida de rotação, além de demonstrar algumas propriedades das funções circulares e hiperbólicas.

Santos (2015) inicia seu capítulo segundo fazendo um desenvolvimento do ângulo hiperbólico e posteriormente define as Funções Hiperbólicas como segmentos de reta retirados da hipérbole. Logo depois, trata das propriedades básicas tais como soma de arcos, relações trigonométricas e funções inversas, mas não explica o surgimento das definições em termos de exponenciais. Disserta sobre as derivadas e faz comparação das relações fundamentais circulares e hiperbólicas.

Freitas (2015) tem uma abordagem interessante ao dividir a página em duas colunas e fazer o desenvolvimento das Funções Circulares e das Funções Hiperbólicas simultaneamente. Também deduz as funções exponenciais a partir da área da hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$  seguida de rotação.

Rodrigues (2014) por sua vez tem uma seção desenvolvendo propriedades das funções hiperbólicas, mas não as define em termos de exponenciais. Isso só ocorre posteriormente, quando deduz as funções exponenciais a partir da área da hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$  seguida de uma rotação.

Alhadas (2013) começa definindo as FTH em termos de exponenciais, sem a devida justificativa. Faz passagens rápidas sobre as Funções Circulares e Hiperbólicas, não sendo este o ponto forte do trabalho. Faz uma menção superficial a área do setor hiperbólico para a parametrização além de escrever um capítulo apenas demonstrando algumas identidades

das funções hiperbólicas.

Vasconcelos (2013), em seu capítulo segundo, começa por uma revisão das funções trigonométricas circulares. Mais um autor que escolhe começar pela área do setor hiperbólico de  $xy = \frac{1}{2}$  seguida de rotação. Ao final, demonstra as propriedades de soma de arcos, derivadas e integrais. Demonstrou, aplicando um pouco de Física e Integrais, que a equação do cabo suspenso é o cosseno hiperbólico.

### 3 - Quais são as aplicações desenvolvidas?

Silva (2019) comentou sobre as forças que atuam sobre uma corda em equilíbrio. A aplicação do trabalho se resumiu a resolução de um exercício de corda suspensa com e sem utilização derivada. Foi usado o programa Winplot para esboço e foram feitas algumas perguntas qualitativas sobre os gráficos.

Para Ferrara (2018), a aplicação para o ensino básico é que o professor faça com a turma o que ele fez ao longo do trabalho. Em outras palavras, iniciar por uma revisão histórica, falar de homotetia, rotação e seguir seu passo a passo. As aplicações se resumem em visualizar onde a catenária pode ser encontrada na natureza.

Santos (2015) utiliza como aplicação o cálculo do comprimento do cabo catenário e da velocidade da onda do mar apenas com aplicação de fórmulas. O autor toma como base o livro *Physics of Waves* de Elmore e Heald (1985) resolvendo alguns exercícios de substituição de valores não fazendo outras conexões. A equação da velocidade de uma onda no mar é deduzida no livro em questão a partir da equação diferencial parcial conhecida como Equação de Laplace. Não aprofundamos este tópico pois foge ao escopo deste trabalho.

Freitas (2015) menciona aplicações das Funções Hiperbólicas em geração de curvas de índice local e povoamento equiâneos, fazendo referência ao artigo Binoti et al. (2012) onde este assunto é bem desenvolvido. Ao final, deduz por integrais que a equação da catenária é o cosseno hiperbólico com os conceitos de forças da Física e não utilizando, por exemplo, a parametrização da hipérbole.

Rodrigues (2014) não apresenta nenhuma aplicação das Funções Hiperbólicas. Seu trabalho é um compêndio de definições e demonstrações.

Alhadas (2013) inicia utilizando como definição que a catenária é a curva modelada pela função cosseno hiperbólico, sem demonstrar. Cita a relação flecha-vão como um dos parâmetros para avaliar se uma corda suspensa pode ser aproximada por uma parábola ou catenária. Não utilizou Polinômios de Taylor para justificar a melhor parábola que aproxima a catenária.

Vasconcelos (2013) demonstra que um cabo suspenso será modelado pela equação do cosseno hiperbólico. As aplicações se resumem ao cálculo de integrais com substituição de valores.

#### 4 - Qual o público-alvo?

A questão do público-alvo se mostrou delicada para os trabalhos analisados. Silva (2019), Ferrara (2018) e Alhadadas (2013) explicitamente mencionam que escrevem para o professor de Matemática. Apenas Vasconcelos (2013) escreve para alunos de ensino médio e de graduação. Santos (2015), Freitas (2015) e Rodrigues (2014) não deixam claro no trabalho o seu público-alvo. Todos falaram das Funções Hiperbólicas como um assunto interessante dentro da Matemática. Contudo, os trabalhos analisados poderiam ter delimitado e explorado mais a questão do objetivo da pesquisa.

#### 5 - Houve proposta de trabalho para o Ensino Médio? Qual?

Propostas para o Ensino Médio foram uma grande lacuna em todos os trabalhos. Alguns escreveram especificamente para professores e por isso esperava-se a apresentação de atividades acessíveis como produto além de conceitos e demonstrações. Contudo, não encontramos tais propostas nos trabalhos analisados. Em nosso trabalho procuramos explorar mais este tópico, criando e disponibilizando atividades através de jogos que levem o aluno a ter uma postura investigativa sobre as aplicações das funções hiperbólicas.

Trabalhos sobre Catenária

Tabela 2 - Trabalhos sobre Catenária

<b>Catenária</b>			
<b>Defesa</b>	<b>Aluno</b>	<b>Título</b>	<b>IES</b>
23/02/2016	FRANCISCO EVERTON PEREIRA MAIA	Curvas planas: clássicas, regulares e de preenchimento.	UFABC
25/04/2019	GERLÚCIO SILVA DE LIMA	As formas geométricas nas obras de Gaudí: as superfícies quádricas, as superfícies regradas e a catenária.	UECE
07/05/2019	FELIPE AUGUSTO DE OLIVEIRA MARTINS	Explorando algumas curvas notáveis no ensino médio: história, propriedades e aplicações.	CPII
24/05/2019	MARCELO LUIZ GUERRA OTERO	Galileu Galilei e o conceito da corrente suspensa, uma proposta de investigação no ensino médio.	UFBA

Fonte: O autor, 2021.

É nosso dever lembrar que o trabalho de Maia (2016) não é sobre a Catenária, mas

apresenta as curvas planas. A Catenária é abordada na seção 2.5 de seu trabalho. A curva é definida em termos de corda suspensa e é feita uma breve localização histórica. Maia (2016) deduz de que a corda suspensa é modelada por uma função cosseno hiperbólico seguindo o raciocínio dos corpos estáticos da Física, baseada na solução de Leibniz e Bernoulli apresentada na edição de 1691 da revista alemã *Acta Eruditorum*.

Lima (2019) tem seu trabalho voltado para curvas matemáticas e os trabalhos arquitetônicos de Gaudí. Este também não é um trabalho específico sobre a catenária, mas em seu capítulo quinto o autor reserva um espaço para tratar desta curva. Inicia por um breve relato histórico e deduz a equação utilizando o mesmo raciocínio físico que Maia (2016). Cita o arco catenário invertido como o melhor arco para a arquitetura, segundo os estudos de Robert Hooke. Cita como exemplos o Gateway Arch, o Sótão da Casa Millà, os arcos da sala da Fazenda Güell, as portas do Palácio Güell, os arcos da arcada do Colégio das Teresianas, os arcos no galpão da Cooperativa Obrera Maratonense, os arcos da arcada da Casa Batlló, nas portas da Casa Milà que podem ser apresentados sem problemas aos alunos de quaisquer idades.

Martins (2019) também escreve um trabalho sobre curvas notáveis e dedica sua seção 5.2 ao estudo da Catenária. Seu principal referencial é Markushevich (1980) inclusive na parte histórica. Não deduz nenhuma equação, apenas utiliza as definições citando referências. Foi um dos poucos que estimularam o uso do Geogebra como ferramenta investigativa tal como pretendemos com este trabalho. Organizou uma subseção com as aplicações na arquitetura apresentando vários exemplos similares aos de Lima (2019).

Otero (2019) tem seu trabalho voltado para o estudo da catenária. Como objetivo, propôs três atividades investigativas de caráter qualitativo sobre a catenária e suas propriedades. Na primeira delas, o professor entrega uma lista de pontos que serão desenhados no Geogebra e em seguida questiona os alunos sobre a natureza daquela curva. Como estes ainda não conhecem a catenária, espera-se que conjecturem ser a curva uma parábola tal como Leonardo da Vinci e Galileo acreditavam. Em seguida, começa uma investigação sobre quais polinômios de grau 2, 4 e 6 melhor aproximam a curva apresentada, terminando com o polinômio de Taylor de grau  $n$ . Na segunda atividade, o aluno é levado a investigar como a variação do parâmetro  $a$  na função  $f(x) = ax^2 + 1$  pode melhorar a aproximação da parábola à curva estudada. Na terceira e última atividade, os alunos são levados a construir a catenária a partir das funções exponenciais  $e^x$  e  $e^{-x}$ .

## Dois Trabalhos Interessantes

Tabela 3 - Dois Trabalhos Interessantes

<b>Trabalhos Externos ao PROFMAT</b>			
<b>Defesa</b>	<b>Aluno</b>	<b>Título</b>	<b>IES</b>
04/07/2008	LEDA MARIA BASTONI <b>TALAVERA</b>	Parábola e catenária: história e aplicações.	USP
28/03/2017	MARLON FREITAS <b>MENDES</b>	A curva catenária como aplicação da função exponencial.	UFSCAR

Fonte: O autor, 2021.

Apesar de termos escolhido analisar trabalhos oriundos de alunos do PROFMAT para nossa investigação inicial, foram consideradas também as dissertações de Talavera (2008) da USP, por ter sido citada em quase todos os trabalhos lidos, e Mendes (2017) da UFSCAR por ter sido o único que propôs uma Sequência Didática similar ao modo como pretendemos fazer neste trabalho.

Talavera (2008) inicia seu trabalho fazendo uma comparação entre dois livros de matemática. O primeiro, de 1894, afirma que o formato do cabo de uma ponte pênsil é uma parábola e o segundo, de 1970, contém a figura de uma criança no balanço dando a entender que a corda suspensa neste caso é uma parábola. O trabalho faz extensiva alusão histórica ao início do Cálculo, da Engenharia, das construções de pontes pênsis entre outros assuntos. Ela cita a razão flecha-vão em alguns poucos momentos, mas não apresenta nenhuma explanação aprofundada sobre o assunto. Em seu capítulo quinto a autora trabalha com o *software* Winplot a fim de gerar famílias gráficos de cossenos hiperbólicos e de parábolas para diferentes parâmetros com o objetivo de encontrar uma correspondência entre ambas utilizando-se dos Polinômios de Taylor para tal. O trabalho se encerra com imagens da catenária na arquitetura.

Mendes (2017) foi o último, porém não menos importante, trabalho analisado. Em seu texto, o autor tem como objetivo exibir a catenária aos alunos do Ensino Básico e se propõe a apresentar uma sequência didática que envolve diretamente o uso do *software* Geogebra. No início do capítulo terceiro, o autor também faz uma revisão dos trabalhos já escritos até então, tendo pesquisado nos periódicos da CAPES sobre a Catenária. Sua análise levou em conta cinco dissertações e duas monografias além de mencionar três artigos científicos dos quais alguns possuem pontos em comum com este trabalho, excetuando-se aqueles produzidos a partir de 2018. Foi um trabalho que conseguiu propor muitas atividades interessantes, nas quais certamente iremos nos apoiar neste trabalho.

## Reflexão Geral e Objetivos

Todos os trabalhos lidos e analisados são de excelente qualidade. As observações e críticas aqui contidas foram apresentadas com o único propósito de lapidar o assunto das Funções Hiperbólicas e da Catenária a fim de verificar o que foi escrito pelos colegas e encontrar lacunas de temas ainda pouco explorados.

A parte histórica foi abordada em quase todos os trabalhos sendo que apenas dois não mencionaram a parte histórica preferindo fazer uma análise dos livros-texto clássicos da área. Apesar de sempre abordada, a parte histórica acabou ficando restrita a alguns dados historiográficos e algumas anedotas. Entendemos que um trabalho em História da Matemática requer consulta a fontes primárias ou secundárias e quase sempre é necessário realizar alguma tradução do inglês, grego ou latim. A análise de textos escritos há séculos envolve não somente a dificuldade da tradução, mas também a necessidade de entender o modo de pensar do autor. Em suma, estes trabalhos são muito bonitos e de uma relevância extrema, porém acabou não sendo o objetivo deste trabalho. Fizemos apenas algumas inserções históricas de modo a situar o leitor no espaço-tempo do desenvolvimento das Funções Hiperbólicas.

O início do próximo capítulo trará as definições dos principais conceitos que serão amplamente utilizados ao longo de todo o texto. Se algum conceito descrito logo abaixo for estranho ao leitor, este pode recorrer diretamente à seção 1.1 e depois retornar para melhor compreensão das reflexões gerais deste trabalho.

Foi notório que muitos autores analisados chegaram à expressão em termos de exponenciais partindo da equação da hipérbole  $xy = \frac{1}{2}$  seguida de uma rotação. Aqui optamos pela parametrização da hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$  calculando a área do setor hiperbólico por meio de integrais. Iremos também deduzir que a corda suspensa assume a forma do gráfico da função cosseno hiperbólico utilizando princípios de mecânica estática da Física. Além disso, como não encontramos em nenhum trabalho aqui citado, iremos demonstrar que a curva com menor energia potencial em todos os seus pontos deve ser a catenária, representada também pela função cosseno hiperbólico.

Vale ressaltar que muitos autores utilizaram a obra de Maor (2003) em suas referências. O livro traz em seu capítulo doze uma excelente exposição sobre o problema da corrente suspensa e em seu apêndice sete discute a interpretação do parâmetro gama nas funções hiperbólicas.

Ao observar a dedução da equação da catenária a partir do estudo das forças atuantes sobre o cabo suspenso, nos deparamos com um resultado que parecia depender da força peso, e esta por sua vez não advém da corda em si, mas do meio em que ela se encontra. Assim, surgiu uma pergunta natural e bastante curiosa: Como a corda suspensa se comporta em diferentes gravidades, ou seja, em outros planetas? Com essa indagação em mente, procuramos criar mais uma atividade que auxiliasse os alunos no entendimento

pleno da resposta.

Em seu clássico livro de Estática para Engenharia Mecânica, Meriam, Kraige e Bolton (2016) abordam de maneira clara e objetiva o estudo dos cabos flexíveis e as circunstâncias em que temos um cabo parabólico ou um cabo catenário. Resolvemos trazer essa discussão de forma aprofundada, pois acreditamos ser este um dos pontos cruciais na diferenciação entre parábolas e catenárias.

Procuramos, por fim, trazer algumas curiosidades a respeito da catenária tais como, por exemplo, o fato de ser a curva cujo comprimento de arco é numericamente igual a área em um determinado intervalo ou ainda que a catenária é o lugar geométrico do foco de uma parábola rolante.

Essas aplicações e curiosidades serão posteriormente condensadas em uma Sequência Didática que pode ser utilizada pelo professor do Ensino Básico. Esperamos que ele consiga abordar, pelo menos qualitativamente, algumas propriedades cujas demonstrações precisam de ferramentas sofisticadas do Cálculo Diferencial.

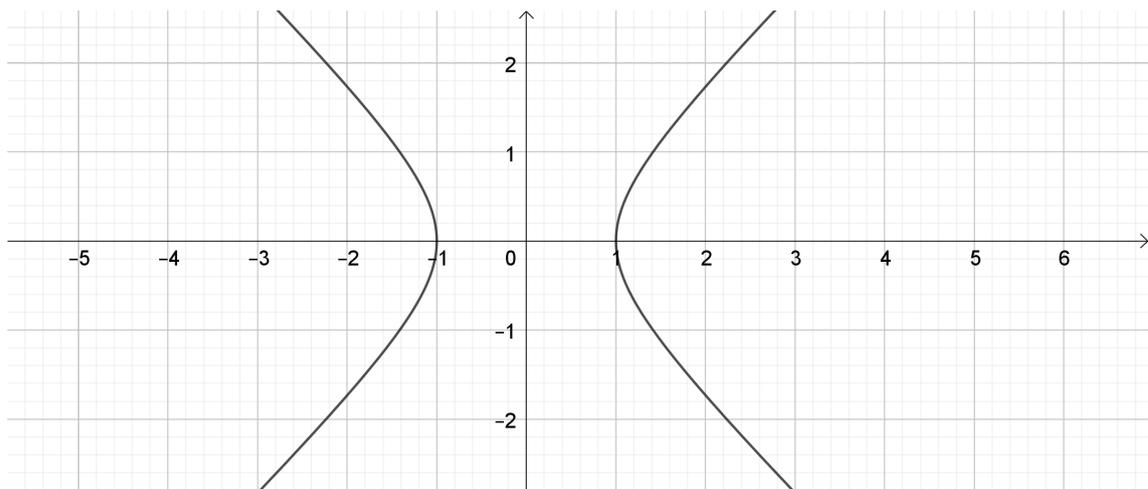
# 1 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS HIPERBÓLICAS (FTH)

## 1.1 Conceitos e Noções Preliminares

Abordaremos neste capítulo a teoria das Funções Trigonométricas Hiperbólicas. Para tal, será necessário introduzir alguns conceitos e definições preliminares. A definição destas novas funções se dará por analogia às Funções Trigonométricas Circulares através parametrização da Hipérbole Unitária.

**Definição 1** (Hipérbole Unitária). *Considere uma curva em  $\mathbb{R}^2$  de equação  $ax^2 - by^2 = c$ . Definimos a hipérbole unitária no caso especial em que  $a = b = c = 1$ . Então, a hipérbole unitária tem equação cartesiana  $x^2 - y^2 = 1$ .*

Figura 1 - Hipérbole Unitária



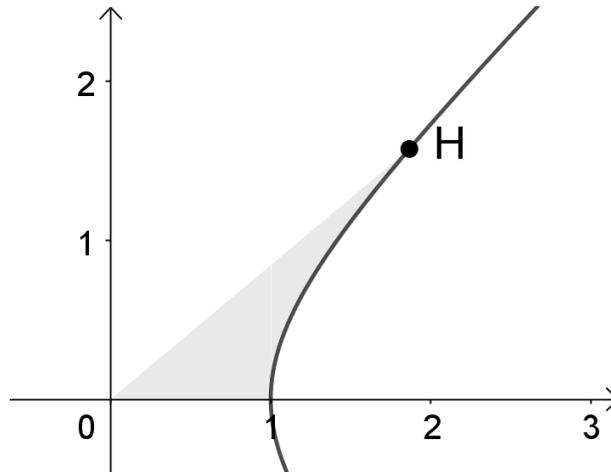
Fonte: O autor, 2021.

**Definição 2** (Setor Hiperbólico). *Seja  $H$  um ponto da hipérbole unitária localizado no primeiro quadrante. O setor hiperbólico gerado pelo ponto  $H$  é a região do plano limitada pelo eixo  $X$ , pela reta que passa pela origem e pelo ponto  $H$  e pela hipérbole unitária. Sua área é denotada por  $A_S(H)$ .*

**Definição 3** (Ângulo Hiperbólico). *O ângulo hiperbólico  $\gamma$  é o dobro da área do setor hiperbólico  $A_S(H)$  delimitado pelo ponto  $H$ . Assim,*

$$\gamma = 2A_S(H)$$

Figura 2 - Ilustração de um Setor Hiperbólico



Fonte: O autor, 2021.

Vale ressaltar que  $\gamma$  não será um ângulo no sentido da Geometria Euclidiana, ou seja, como a região limitada por duas semirretas com origem comum. Contudo, num sentido mais amplo existe uma relação biunívoca entre ângulos e números reais. Neste caso, o ângulo hiperbólico será o objeto sobre o qual a parametrização da hipérbole está referenciada. Como será visto na próxima seção com maiores detalhes, o ângulo hiperbólico recebe esse nome para conservar analogia com a parametrização do círculo unitário cujo ângulo central possui simultaneamente o papel de parâmetro e ângulo do setor circular.

Note que também existe uma relação biunívoca entre o ângulo hiperbólico e a área do setor hiperbólico correspondente. Quando  $H = (1, 0)$  a área do setor hiperbólico é zero e, conseqüentemente,  $\gamma = 0$ . De forma similar, quando a abscissa e a ordenada do ponto  $H$  tendem ao infinito, vemos que  $\gamma \rightarrow \infty$ .

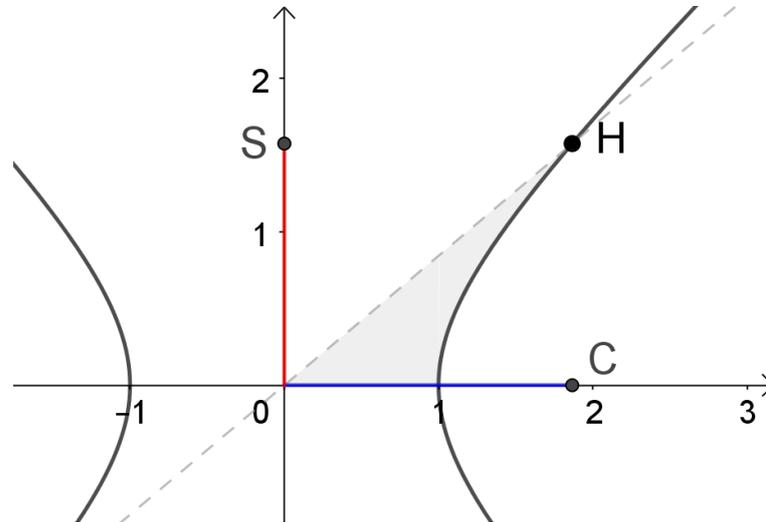
Analogamente, quando o ponto  $H$  de uma hipérbole unitária se encontra no quarto quadrante (eixo  $X$  positivo e eixo  $Y$  negativo) teremos uma área com sinal negativo que estaria associada a um ângulo hiperbólico  $\gamma$  também negativo. Assim sendo, para todo ponto  $H$  pertencente ao ramo direito da hipérbole unitária existe um único ângulo hiperbólico  $\gamma \in \mathbb{R}$  associado.

Este fato nos mostra uma primeira diferença entre as novas funções que começamos a explorar (Funções Hiperbólicas) e as Funções Trigonômicas Circulares (já consagradas no Ensino Básico). Enquanto a primeira observará uma relação biunívoca entre ângulo e setor, a segunda observa periodicidade nos resultados obtidos. Tais conseqüências serão abordadas com detalhes posteriormente.

**Definição 4** (Seno e Cosseno Hiperbólicos). *O cosseno hiperbólico  $\cosh(\gamma)$  e seno hiperbólico  $\sinh(\gamma)$  são, respectivamente, abscissa e ordenada do ponto  $H$  da hipérbole unitária cuja área do setor hiperbólico delimitada por  $H$  é igual a  $\frac{\gamma}{2}$  unidades de área (u.a.).*

Considerando a definição 4, podemos expandi-la a todos os quadrantes apenas alterando o sinal da abscissa e ordenada independentemente.

Figura 3 - Seno Hiperbólico [vermelho] e Cosseno Hiperbólico [azul]

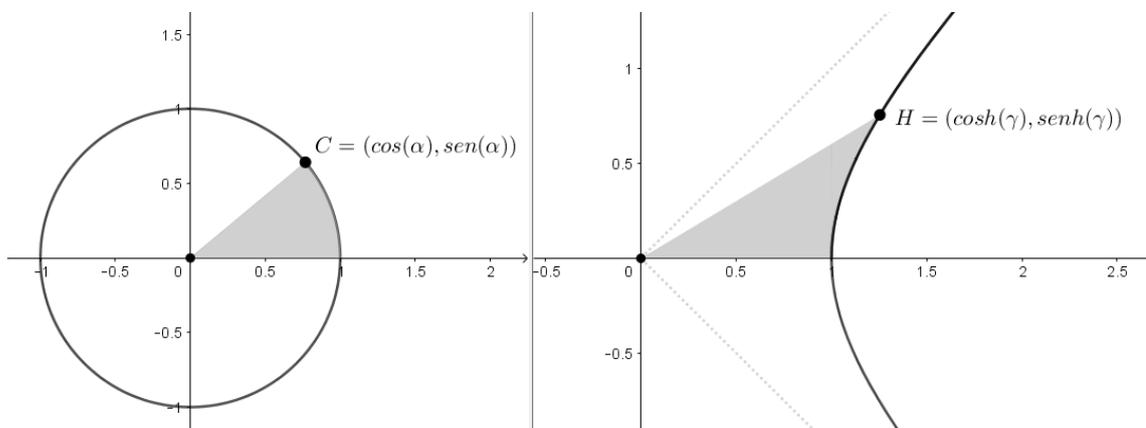


Fonte: O autor, 2021.

## 1.2 Parametrização da Hipérbole

Iremos motivar uma definição em termos de exponenciais para as Funções Trigonométricas Hiperbólicas através da parametrização da hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$  e utilizando-nos da analogia com a área do setor circular no círculo trigonométrico.

Figura 4 - Analogia entre os Setores Circular e Hiperbólico



Fonte: O autor, 2021.

Na comparação com o círculo unitário, atente-se que o ângulo central  $\alpha$  desempenha

papel análogo ao do  $\gamma$  na definição 4. Diz-se que um ponto  $C = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$  pertence ao círculo unitário quando a área do setor circular do ponto  $(1, 0)$  até o ponto  $C$  mede  $\frac{\alpha}{2}$  unidades de área.

Determinaremos uma relação entre as coordenadas cartesianas do ponto  $H$  pertencente a hipérbole unitária e a definição do seno e cosseno hiperbólicos da definição 4.

Devido à simetria, vamos parametrizar apenas este quadrante. Assim, defina-se a função  $f : [1, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  por

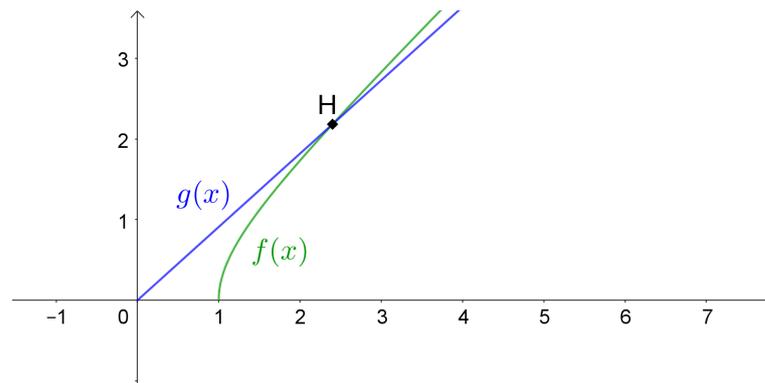
$$y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

que modela o ramo superior direito da hipérbole unitária. E considere ainda a função  $g : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  definida por

$$g(x) = \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)}x$$

com  $\cosh(\gamma) \neq 0$ , que modela a semirreta que se inicia na origem do sistema de coordenadas cartesianas e passa pelo ponto  $H = (\cosh(\gamma), \sinh(\gamma)) = (x, \sqrt{x^2 - 1})$ .

Figura 5 - Esboço dos gráficos das funções  $f(x)$  e  $g(x)$



Fonte: O autor, 2021.

A lei de formação da função  $g(x)$  pode ser brevemente justificada considerando-se a equação geral da reta

$$y = g(x) = mx + n.$$

Note que  $n = 0$  pois a reta passa pela origem. E encontramos o coeficiente  $m$  fazendo

$$y = g(x) = mx + n$$

$$\sinh(\gamma) = m \cosh(\gamma) + 0$$

$$m = \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)}$$

A lei de formação da função  $g(x)$  torna-se

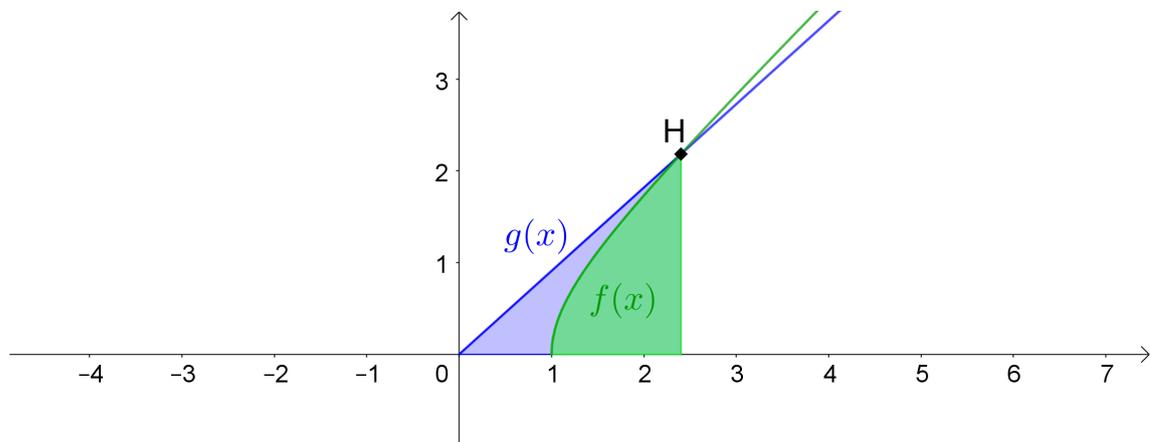
$$y = g(x) = \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)}x.$$

Após a definição das funções cujos gráficos são as curvas que limitam a área do setor hiperbólico, podemos calcular sua área também em termos de integrais.

Com o auxílio da figura 6, observe que a área do setor hiperbólico é a diferença entre as áreas abaixo dos gráficos de  $g(x)$  e  $f(x)$ , respectivamente, no intervalo de  $x = 0$  até a abscissa  $x = \cosh(\gamma)$  do ponto  $H$ .

Como a função  $f$  não está definida no intervalo  $[0, 1[$ , então reescrevemos seu intervalo de integração como aquele que se inicia em  $x = 1$  e termina em  $x = \cosh(\gamma)$ .

Figura 6 - Setor Hiperbólico como diferença de Integrais



Fonte: O autor, 2021.

Assim, expressamos a área do setor hiperbólico em termos de integrais por

$$A_S(H) = \frac{\gamma}{2} = \int_0^{\cosh(\gamma)} g(x)dx - \int_1^{\cosh(\gamma)} f(x)dx$$

$$\frac{\gamma}{2} = \int_0^{\cosh(\gamma)} \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)}x dx - \int_1^{\cosh(\gamma)} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sinh(\gamma)}{\cosh(\gamma)} \frac{[\cosh(\gamma)^2 - 0^2]}{2} - \int_1^{\cosh(\gamma)} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sinh(\gamma) \cosh(\gamma)}{2} - \int_1^{\cosh(\gamma)} \sqrt{x^2 - 1} dx$$

O desenvolvimento de  $\int_1^{\cosh(\gamma)} \sqrt{x^2 - 1} dx$  pode ser encontrado passo a passo no Apêndice B.1.

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} &= \frac{\sinh(\gamma) \cosh(\gamma)}{2} - \left[ \frac{\sinh(\gamma) \cosh(\gamma)}{2} - \frac{\ln(\sinh(\gamma) + \cosh(\gamma))}{2} \right] \\ \frac{\gamma}{2} &= \frac{\ln(\sinh(\gamma) + \cosh(\gamma))}{2} \\ \gamma &= \ln(\sinh(\gamma) + \cosh(\gamma)) \\ e^\gamma &= \cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \end{aligned} \quad (1)$$

Como o ponto  $H = (\cosh(\gamma), \sinh(\gamma))$  pertence à hipérbole de equação  $x^2 - y^2 = 1$  então é correto dizer que

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 \\ \cosh^2(\gamma) - \sinh^2(\gamma) &= 1 \\ [\cosh(\gamma) + \sinh(\gamma)][\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma)] &= 1 \\ e^\gamma[\cosh(\gamma) - \sinh(\gamma)] &= 1 \\ \cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) &= e^{-\gamma} \\ e^{-\gamma} &= \cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \end{aligned} \quad (2)$$

Somando as equações 1 e 2 anteriores, temos:

$$\begin{aligned} e^\gamma + e^{-\gamma} &= 2 \cosh(\gamma) \\ \cosh(\gamma) &= \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Subtraindo as duas equações, temos:

$$\begin{aligned} e^\gamma - e^{-\gamma} &= 2 \sinh(\gamma) \\ \sinh(\gamma) &= \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2} \end{aligned} \quad (4)$$

Encontramos as coordenadas de um ponto  $H$  da hipérbole unitária em termos de exponenciais e assim estamos aptos a definir uma nova classe de funções, a das Funções Hiperbólicas. As relações encontradas nesta seção estão condensadas na tabela 6 no Apêndice A.

### 1.3 Definindo as Funções Hiperbólicas

Na seção anterior determinamos uma relação entre as coordenadas (seno e cosseno hiperbólicos) de um ponto  $H$  da hipérbole unitária e o parâmetro  $\gamma$ . Seria o equivalente a definir as Funções Trigonométricas Circulares em termos de cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa no Ensino Básico.

Nesta seção, vamos expandir essa relação para o conceito de função substituindo o parâmetro  $\gamma$  por um número real  $x$ , criando então, as Funções Hiperbólicas.

**Definição 5** (Função Seno Hiperbólico). *Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

*Então  $f(x)$  é chamada função seno hiperbólico e será denotada por  $f(x) = \sinh(x)$ .*

**Definição 6** (Função Cosseno Hiperbólico). *Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

*Então  $f(x)$  é chamada função cosseno hiperbólico e será denotada por  $f(x) = \cosh(x)$ .*

As funções a seguir são definidas como uma correspondência natural entre as funções trigonométricas circulares e hiperbólicas.

**Definição 7** (Função Tangente Hiperbólica). *Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , definida por*

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

*Então  $f(x)$  é chamada função tangente hiperbólica e será denotada por  $f(x) = \tanh(x)$ .*

**Definição 8** (Função Cotangente Hiperbólica). *Seja a função  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - [-1, 1]$ , definida por*

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

*Então  $f(x)$  é chamada função cotangente hiperbólica e será denotada por  $f(x) = \coth(x)$ .*

**Definição 9** (Função Secante Hiperbólica). *Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1]$ , definida por*

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Então  $f(x)$  é chamada função secante hiperbólica e será denotada por  $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ .

**Definição 10** (Função Cossecante Hiperbólica). *Seja a função  $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ , definida por*

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Então  $f(x)$  é chamada função cossecante hiperbólica e será denotada por  $f(x) = \operatorname{csch}(x)$ .

Os resultados desta seção estão resumidos para consulta na tabela 7.

### 1.3.1 Funções Hiperbólicas Inversas

As funções hiperbólicas inversas são aquelas que retornam o ângulo hiperbólico correspondente ao valor de uma função hiperbólica dada. Tais funções serão importantes no desenvolvimento da seção 2.5 para resolução da equação diferencial  $y = \sqrt{(y')^2 + 1}$ . Como as funções hiperbólicas são expressas em termos das exponenciais, então é natural que funções hiperbólicas inversas sejam expressas em termos de funções logarítmicas.

**Definição 11** (Arco Seno Hiperbólico). *Seja a função  $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

é chamada de função arco seno hiperbólico.

**Justificativa:** Considere

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Como  $e^y > 0$  e  $x < \sqrt{x^2 + 1} \forall x, y \in \mathbb{R}$  desconsideraremos a raiz negativa, ficando apenas

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arsinh}(x).$$

**Definição 12** (Arco Cosseno Hiperbólico). *Seja a função  $\operatorname{arcosh} : [1, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$ , definida por*

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

é chamada de função arco cosseno hiperbólico.

A justificativa para definição da função arco cosseno hiperbólico é análoga à anterior.

**Definição 13** (Arco Tangente Hiperbólica). *Seja a função  $\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2}$$

é chamada de função arco tangente hiperbólica.

**Justificativa:** Considere a expressão da tangente hiperbólica. Assim,

$$f(x) = y = \tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$ye^{2x} + y = e^{2x} - 1$$

$$1 + y = e^{2x} - ye^{2x}$$

$$\frac{1+y}{1-y} = e^{2x}$$

$$2x = \ln(1+y) - \ln(1-y)$$

$$x = \frac{\ln(1+y) - \ln(1-y)}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2}.$$

Os resultados desta seção estão resumidos para consulta na tabela 8.

## 1.4 Relações Fundamentais

Continuando nossa analogia entre as funções hiperbólicas e circulares, chegamos agora ao estudo das relações fundamentais. As relações fundamentais fornecerão uma conexão direta entre duas funções hiperbólicas sendo estas análogas àquelas estudadas na trigonometria do Ensino Básico. Como sabemos, o seno e o cosseno satisfazem a relação fundamental  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  por parametrizarem o círculo unitário. Pode-se justificar tal fato a partir do triângulo retângulo cuja hipotenusa é o raio unitário e os catetos são as funções circulares.

Em contrapartida, espera-se que as funções hiperbólicas satisfaçam a equação da hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$ . Como tais funções podem ser expressas em termos de exponenciais, conseguimos demonstrar sua veracidade a partir de uma manipulação algébrica.

**Relação Fundamental 1:**  $\cosh^2(\gamma) - \sinh^2(\gamma) = 1$

**Demonstração 1:** Seja a equação da hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$ . Tome  $x = \cosh(\gamma)$  e  $y = \sinh(\gamma)$ , na definição 4, obtendo de imediato que

$$\cosh^2(\gamma) - \sinh^2(\gamma) = 1 \quad (5) \quad \blacksquare$$

**Demonstração 2:** Observe que as expressões do seno e cosseno hiperbólicos em termos de exponenciais devem satisfazer tal relação, assim temos

$$\begin{aligned} \left[ \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} \right]^2 - \left[ \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2} \right]^2 &= 1 \\ \left[ \left( \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} \right) + \left( \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2} \right) \right] \left[ \left( \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} \right) - \left( \frac{e^\gamma - e^{-\gamma}}{2} \right) \right] &= 1 \\ \left[ \frac{2e^\gamma}{2} \right] \left[ \frac{2e^{-\gamma}}{2} \right] &= 1 \\ e^\gamma e^{-\gamma} = e^{\gamma-\gamma} = e^0 &= 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Partindo da equação 5, podemos deduzir outras relações fundamentais.

**Relação Fundamental 2:**  $\operatorname{sech}^2(\gamma) + \tanh^2(\gamma) = 1$

**Demonstração:** Considere partir da Relação Fundamental 1 e divida todos os termos por  $\cosh^2(\gamma) \neq 0$ , obtendo

$$\begin{aligned} \cosh^2(\gamma) - \sinh^2(\gamma) &= 1 \\ \frac{\cosh^2(\gamma)}{\cosh^2(\gamma)} - \frac{\sinh^2(\gamma)}{\cosh^2(\gamma)} &= \frac{1}{\cosh^2(\gamma)} \end{aligned}$$

$$1 - \tanh^2(\gamma) = \operatorname{sech}^2(\gamma)$$

$$\operatorname{sech}^2(\gamma) + \tanh^2(\gamma) = 1$$

■

**Relação Fundamental 3:**  $\coth^2(\gamma) - \operatorname{csch}^2(\gamma) = 1$

**Demonstração:** Considere agora partir da Relação Fundamental 1 e divida todos os termos por  $\sinh^2(\gamma) \neq 0$ , obtendo

$$\cosh^2(\gamma) - \sinh^2(\gamma) = 1$$

$$\frac{\cosh^2(\gamma)}{\sinh^2(\gamma)} - \frac{\sinh^2(\gamma)}{\sinh^2(\gamma)} = \frac{1}{\sinh^2(\gamma)}$$

$$\coth^2(\gamma) - 1 = \operatorname{csch}^2(\gamma)$$

$$\coth^2(\gamma) - \operatorname{csch}^2(\gamma) = 1$$

■

Os resultados desta seção estão condensados na tabela 11.

## 1.5 Gráficos

### 1.5.1 Assíntotas

Quando abordamos a parametrização da hipérbole na seção 1.2 concluímos que as funções hiperbólicas podem ser escritas em termos de funções exponenciais. Agora estamos aptos a estudar o que acontece com essas funções em todo seu domínio, além de verificar seu comportamento quando os valores de  $x$  tornam-se arbitrariamente grandes.

#### Assíntotas Horizontais

Uma assíntota horizontal é uma reta do tipo  $y = L$ , onde  $L \in \mathbb{R}$  é o limite da função  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $+\infty$  ou a  $-\infty$ . Como as funções hiperbólicas são combinações de funções exponenciais, então analisar seu comportamento assintótico se resume em analisar o comportamento das funções exponenciais  $e^x$  e  $e^{-x}$ . Assim sendo, utilizaremos o fato que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

Desse modo,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \infty$$

consequentemente, não há assíntotas horizontais.

A história é diferente para a tangente hiperbólica.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

\* Observe que neste passo multiplicamos numerador e denominador por  $e^{-x}$ . Tal fato não altera a igualdade pois  $e^{-x}$  é sempre diferente de zero.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \stackrel{**}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

\*\* Já neste passo multiplicamos numerador e denominador por  $e^x$ . Tal fato também não altera a igualdade pois  $e^x$  é sempre diferente de zero.

Em resumo, não há assíntota horizontal para o gráfico do seno ou cosseno hiperbólico, contudo as retas  $y = \pm 1$  são assíntotas horizontais do gráfico da tangente hiperbólica.

Vamos, resumidamente, investigar as funções secante, cossecante e cotangente hiperbólicas.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sech}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^{\pm\infty} + e^{\mp\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^{\pm\infty} - e^{\mp\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{coth}(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \pm 1$$

Em consequência, há assíntotas horizontais em  $y = 0$  para os gráficos da  $\operatorname{sech}(x)$  e  $\operatorname{csch}(x)$ . Além das retas  $y = \pm 1$  para  $\operatorname{tanh}(x)$  e  $\operatorname{coth}(x)$ .

### Assíntotas Verticais

Uma assíntota vertical é uma reta do tipo  $x = a$ , onde  $a \in \mathbb{R}$  é um ponto de acumulação do domínio tal que pelo menos um dos seus limites laterais quando  $x$  tende a  $a$  é infinito. Em outras palavras,

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Por exemplo, nas funções racionais os pontos de acumulação são, em geral, os valores que zeram o denominador. No caso das exponenciais de base  $e$  pode-se observar que a situação descrita anteriormente não ocorre. Levando em conta que  $e^x$  e  $e^{-x}$  são sempre positivos. Resumidamente, temos

$$\lim_{x \rightarrow a} \sinh(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sech}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{e^a + e^{-a}} \in \mathbb{R}$$

Observe que os limites acima apenas serão infinitos se  $a$  for infinito. De fato, isto se confirma pela continuidade da função exponencial. Verificando as demais funções hiperbólicas, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^0 - e^{-0}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^0 - e^{-0}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{coth}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^0 + 1}{e^0 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{coth}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^0 + 1}{e^0 - 1} = -\infty$$

Em consequência, há assíntotas verticais apenas em  $x = 0$  para o  $\operatorname{csch}(x)$  e  $\operatorname{coth}(x)$ .

### 1.5.2 Paridade

Uma função  $f(x)$  é dita par se satisfaz  $f(x) = f(-x)$  para todos os valores de  $x$  pertencentes ao seu domínio. Analogamente, dita ímpar se  $f(x) = -f(-x)$ . Apesar do estudo da paridade de uma função ser importante para construção do seu gráfico iremos abordar este estudo com a finalidade de nos auxiliar em cálculos de integrais definidas em intervalos simétricos.

De fato, as Funções Hiperbólicas são definidas todas em termos do seno ou cosseno hiperbólicos. A análise destas duas funções é suficiente para determinar a paridade das demais.

Para início da análise tome a função seno hiperbólico,

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Observando que

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x),$$

conclui-se que o seno hiperbólico é uma função ímpar.

Já para a investigação da função cosseno hiperbólico, tome

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

e observe que

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

o que faz do cosseno hiperbólico uma função par.

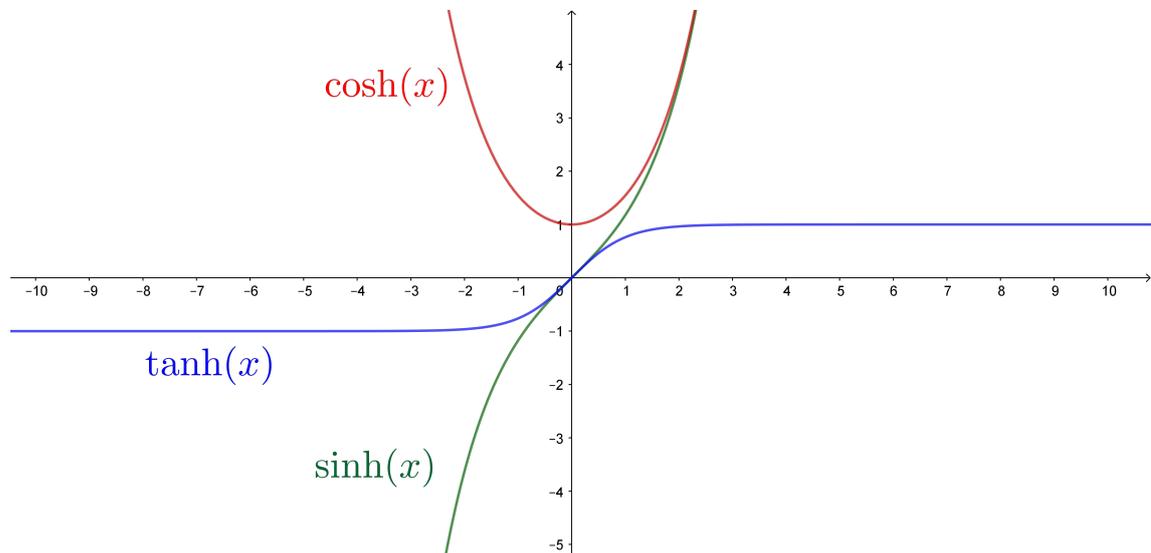
A paridade das demais funções hiperbólicas é imediata. Como a função tangente hiperbólica é a razão das funções seno e cosseno hiperbólicos, então é uma função ímpar. Com o mesmo argumento, vemos que a função cotangente hiperbólica também é ímpar.

A função cossecante hiperbólica é definida como a fração inversa do seno hiperbólico e por isso também será uma função ímpar. De modo análogo, como a função secante hiperbólica é definida como a fração inversa do cosseno hiperbólico, então esta também será uma função par.

Os resultados desta seção se encontram resumidos nas tabelas 9 e 10.

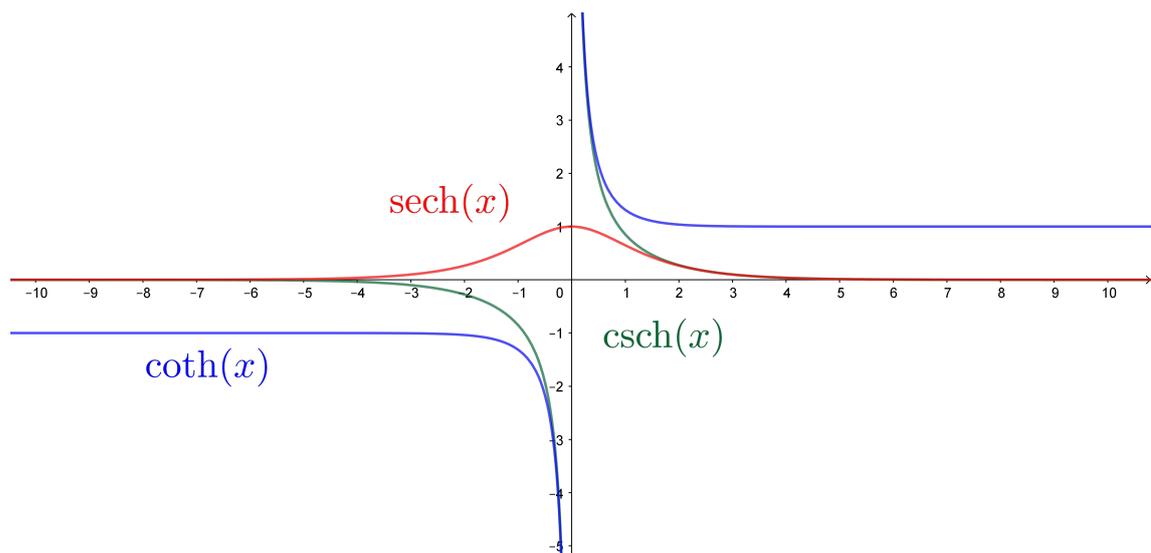
Com as informações obtidas até então, há dados suficientes para um esboço dos gráficos das Funções Hiperbólicas que podem ser observados nas figuras 7 e 8 abaixo. Como o tópico de construção dos gráficos das Funções Hiperbólicas já é bem debatido e trabalhado nos trabalhos consultados tais como Freitas (2015) e Alhadas (2013), então optamos apenas por exibi-los.

Figura 7 - Seno Hiperbólico [verde] e Cosseno Hiperbólico [vermelho] e Tangente Hiperbólica [azul]



Fonte: O autor, 2021.

Figura 8 - Cossecante Hiperbólica [verde] e Secante Hiperbólica [vermelho] e Cotangente Hiperbólica [azul]



Fonte: O autor, 2021.

## 1.6 Soma de Arcos

Com as definições das Funções Hiperbólicas obtidas na seção 1.3 é possível encontrarmos também as expressões para soma de arcos e arcos duplos.

### Seno Hiperbólico

Sabemos que a função seno hiperbólico é dada por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

logo,

$$\sinh(x + y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4}$$

$$\sinh(x + y) = \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{4}$$

Adicionando e subtraindo o termo  $e^{x-y}$  ao numerador,

$$\sinh(x + y) = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}}{4}$$

Adicionando e subtraindo o termo  $e^{-x+y}$  ao numerador,

$$\sinh(x + y) = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}}{4}$$

$$\sinh(x + y) = \frac{e^x (e^y + e^{-y}) - e^{-x} (e^y + e^{-y})}{4} + \frac{e^y (e^x + e^{-x}) - e^{-y} (e^x + e^{-x})}{4}$$

$$\sinh(x + y) = \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right] \left[ \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right] + \left[ \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right] \left[ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]$$

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \sinh(y) \cosh(x) \quad (6)$$

A fórmula para o arco duplo é obtida diretamente fazendo  $x = y$ .

$$\sinh(2x) = \sinh(x) \cosh(x) + \sinh(x) \cosh(x)$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x) \quad (7)$$

### Cosseno Hiperbólico

Como a função cosseno hiperbólico é dada por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

logo,

$$\cosh(x + y) = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} =$$

$$\cosh(x + y) = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{4}$$

Adicionando e subtraindo o termo  $e^{x-y}$ ,

$$\cosh(x + y) = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y}}{4}$$

Adicionando e subtraindo o termo  $e^{-x+y}$ ,

$$\cosh(x + y) = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-x-y}}{4}$$

$$\cosh(x + y) = \frac{e^x (e^y + e^{-y}) + e^{-x} (e^y + e^{-y})}{4} + \frac{e^y (e^x - e^{-x}) - e^{-y} (e^x - e^{-x})}{4}$$

$$\cosh(x + y) = \left[ \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right] \left[ \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right] + \left[ \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right] \left[ \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right]$$

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y) \quad (8)$$

A fórmula para o arco duplo é obtida diretamente fazendo  $x = y$ .

$$\cosh(2x) = \cosh(x) \cosh(x) + \sinh(x) \sinh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \quad (9)$$

As expressões para Tangente, Secante, Cossecante e Cotangente Hiperbólicas são obtidas de forma análoga ao Seno e Cosseno Hiperbólicos. Sugerimos como exercício essas deduções, que podem ser encontradas no apêndice B.6. Tais resultados se encontram resumidos nas tabelas 12 e 13.

## 1.7 Derivadas e Integrais

O fato de as Funções Hiperbólicas poderem ser escritas em termos de exponenciais na base  $e$  facilita o estudo de suas derivadas e integrais. Isto acontece, pois, tais funções possuem a propriedade de serem iguais às suas derivadas a menos de uma constante. Nosso objetivo com esta seção é mostrar ao leitor como calcular derivadas e integrais das funções hiperbólicas, investigar alguns resultados notáveis e criar uma tabela de derivadas, integrais definidas e indefinidas para pronto uso.

Para todos os casos analisados nesta seção, considere que as derivadas e integrais só estarão bem definidas para valores de  $x$  pertencentes aos domínios das funções apresentadas na seção 1.3.

Nos cálculos das derivadas e integrais, lembre-se que para todo  $x$  real

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad ; \quad \int e^x dx = e^x + C \quad e$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x} \quad ; \quad \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

### Seno Hiperbólico

Seja a função  $f(x) = \sinh(x)$ . Então, sua derivada será

$$\frac{d(\sinh(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

E a integral será dada por

$$\int \sinh(x) dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} + C = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C = \cosh(x) + C$$

Sendo a função seno hiperbólico uma função ímpar, calculamos a integral definida no intervalo  $[0, a]$ , via

$$\int_0^a \sinh(x) dx = \cosh(a) - \cosh(0) = \cosh(a) - 1 = \frac{e^a + e^{-a}}{2} - 1$$

### Cosseno Hiperbólico

Seja a função  $f(x) = \cosh(x)$ . Então, sua derivada será

$$\frac{d(\cosh(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

E a integral será dada por

$$\int \cosh(x) dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} + C = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C = \sinh(x) + C$$

Note que a derivada do seno hiperbólico é o cosseno hiperbólico e vice-versa, para todo  $x$  real.

Vamos agora calcular a integral definida no intervalo  $[-a, a]$  utilizando o fato de que a função cosseno hiperbólico é uma função par. Assim,

$$\int_{-a}^a \cosh(x) dx = \sinh(a) - \sinh(-a) = \sinh(a) + \sinh(a) = 2 \sinh(a) = 2 \frac{e^a - e^{-a}}{2} = e^a - e^{-a}$$

### Tangente Hiperbólica

Seja a função  $f(x) = \tanh(x)$ . Então, sua derivada será

$$\frac{d(\tanh(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)$$

Derivando a expressão acima seguindo a Regra do Quociente, temos

$$\frac{d(\tanh(x))}{dx} = \frac{\sinh'(x) \cosh(x) - \sinh(x) \cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh(x) \cosh(x) - \sinh(x) \sinh(x)}{\cosh^2(x)}$$

$$\frac{d(\tanh(x))}{dx} = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x)$$

Calculamos a integral por substituição fazendo  $u = \cosh(x)$  e  $du = \sinh(x) dx$ .

$$\int \tanh(x) dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\cosh(x)| + C = \ln(\cosh(x)) + C$$

Sendo a função tangente hiperbólica uma função ímpar, calcularemos a integral definida no intervalo  $[0, a]$ .

$$\int_0^a \tanh(x) dx = \ln(\cosh(a)) - \ln(\cosh(0)) = \ln(\cosh(a)) - \ln(1) = \ln(\cosh(a)) - 0 = \ln(\cosh(a))$$

### Secante Hiperbólica

Seja a função  $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ . Então, sua derivada será

$$\frac{d(\operatorname{sech}(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\cosh(x)} \right)$$

Derivando a expressão acima seguindo a Regra do Quociente, temos

$$\frac{d(\operatorname{sech}(x))}{dx} = \frac{1' \cosh(x) - 1 \cosh'(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = -\tanh(x)\operatorname{sech}(x)$$

Calculamos a integral por substituição fazendo  $u = \sinh(x)$  e  $du = \cosh(x)dx$ .

$$\int \operatorname{sech}(x)dx = \int \frac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)}dx = \int \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x) + 1}dx = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan(u) + C$$

Analisamos a integral  $\int \frac{du}{u^2+1}$  em detalhes no apêndice B.4. Desfazendo a substituição, temos:

$$\int \operatorname{sech}(x)dx = \arctan(\sinh(x)) + C$$

Sendo a função secante hiperbólica uma função par, podemos calcular a integral definida no intervalo  $[-a, a]$ . Assim,

$$\int_{-a}^{+a} \operatorname{sech}(x)dx = \arctan(\sinh(a)) - \arctan(\sinh(-a))$$

Como a função seno hiperbólico é uma função ímpar, então

$$\int_{-a}^{+a} \operatorname{sech}(x)dx = \arctan(\sinh(a)) - \arctan(-\sinh(a))$$

E como a função arco tangente também é uma função ímpar,

$$\int_{-a}^{+a} \operatorname{sech}(x)dx = \arctan(\sinh(a)) + \arctan(\sinh(a)) = 2\arctan(\sinh(a))$$

Avaliando a integral sobre o conjunto dos números reais, podemos fazer o limite quando  $a$  tende a  $+\infty$ .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(x)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} 2\arctan(\sinh(a)) = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

Um fato curioso evidencia-se com esta integral. A constante  $\pi$  pode ser definida também como a área sob o gráfico da secante hiperbólica ao longo do eixo X, conforme pode ser observado na figura 9.

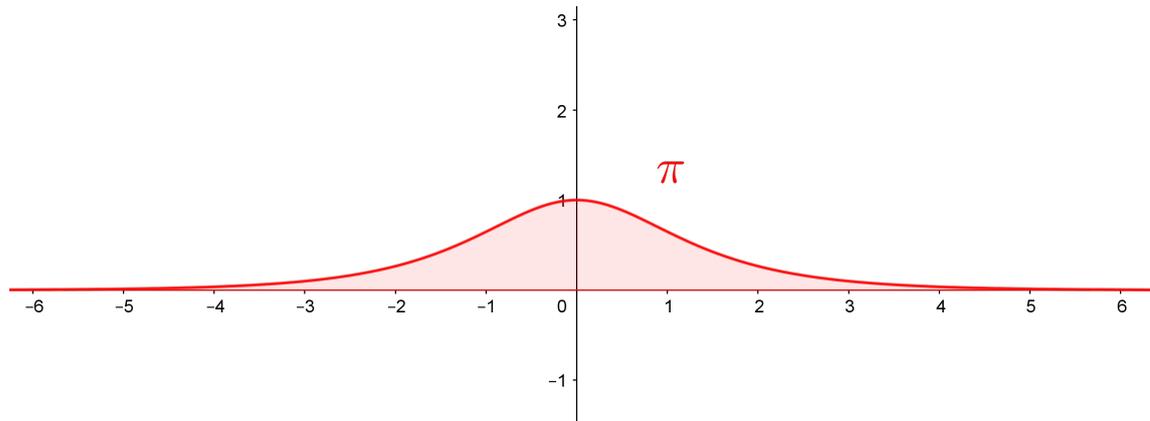
### Cossecante Hiperbólica

Seja a função  $f(x) = \operatorname{csch}(x)$ . Então, sua derivada será

$$\frac{d(\operatorname{csch}(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\sinh(x)} \right)$$

Note que os resultados abaixo serão válidos apenas para valores do domínio da

Figura 9 - Área sob o gráfico da secante hiperbólica



Fonte: O autor, 2021.

função original. Utilizando a Regra do Quociente na função acima, temos

$$\frac{d(\operatorname{csch}(x))}{dx} = \frac{1' \sinh(x) - 1 \sinh'(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{-\cosh(x)}{\sinh^2(x)} = -\coth(x)\operatorname{csch}(x)$$

Calculamos a integral por substituição fazendo  $u = \cosh(x)$  e  $du = \sinh(x)dx$ :

$$\int \operatorname{csch}(x)dx = \int \frac{1}{\sinh(x)}dx = \int \frac{\sinh(x)}{\sinh^2(x)}dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x) - 1}dx = \int \frac{du}{u^2 - 1} = -\int \frac{du}{1 - u^2}$$

O valor da integral acima pode ser encontrada passo a passo no apêndice B.5.

$$\int \operatorname{csch}(x)dx = -\operatorname{arctanh}(u) + C = -\operatorname{arctanh}(\cosh(x)) + C$$

Tendo em mente que a função cossecante hiperbólica é uma função ímpar, vamos calcular sua integral definida no intervalo  $[0, a]$ . Contudo, lembremos que a função cossecante hiperbólica não está definida para  $x = 0$  e por isso calcularemos a integral imprópria

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_k^a \operatorname{csch}(x)dx = -\operatorname{arctanh}(\cosh(a)) - \lim_{k \rightarrow 0} (-\operatorname{arctanh}(\cosh(k))).$$

Contudo, o limite acima não existe visto que  $\cosh(0) = 1$  e a função arco tangente hiperbólica não está definida para  $x = 1$  como visto na seção 1.3.1.

Assim podemos apenas calcular a integral acima no intervalo  $[a, b]$  com  $a, b > 0$ .

$$\int_a^b \operatorname{csch}(x)dx = -\operatorname{arctanh}(\cosh(b)) - (-\operatorname{arctanh}(\cosh(a))) = \operatorname{arctanh}(\cosh(a)) - \operatorname{arctanh}(\cosh(b))$$

### Cotangente Hiperbólica

Seja a função  $f(x) = \coth(x)$ . Então, sua derivada será

$$\frac{d(\coth(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \right)$$

Derivando a expressão acima seguindo a Regra do Quociente, temos

$$\frac{d(\coth(x))}{dx} = \frac{\cosh'(x) \sinh(x) - \cosh(x) \sinh'(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{\sinh(x) \sinh(x) - \cosh(x) \cosh(x)}{\sinh^2(x)}$$

$$\frac{d(\coth(x))}{dx} = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = -\operatorname{csch}^2(x)$$

Calculamos a integral por substituição fazendo  $u = \sinh(x)$  e  $du = \cosh(x)dx$ .

$$\int \coth(x)dx = \int \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sinh(x)| + C$$

Tendo em mente que a função cotangente hiperbólica é uma função ímpar, vamos calcular sua integral definida no intervalo  $[0, a]$ . Contudo, lembremos que a função cotangente hiperbólica não está definida para  $x = 0$  e por isso calcularemos a integral imprópria

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_k^a \coth(x)dx = \ln |\sinh(a)| - \lim_{k \rightarrow 0} \ln |\sinh(k)|.$$

Contudo, o limite acima não existe visto que  $\ln(x)$  não está definido para  $x = 0$ . A integral é calculada então, no intervalo  $[a, b]$  com  $a, b > 0$  e pode ser expressa por

$$\int_a^b \coth(x)dx = \ln |\sinh(b)| - \ln |\sinh(a)| = \ln \left( \frac{\sinh(b)}{\sinh(a)} \right)$$

Os resultados desta seção se encontram condensados nas tabelas 14 e 15.

## 1.8 Extensão Complexa

Vimos na seção 1.3 as definições das funções hiperbólicas cujos domínios estavam no conjunto dos números reais. Mostraremos agora a extensão dessas definições para o conjunto dos números complexos. O ponto de ligação será a fórmula de Euler, que não apenas será responsável por esta extensão, mas acabará também por relacionar as funções trigonométricas hiperbólicas e circulares.

Para relembrar, a fórmula de Euler nos diz que para  $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad \text{onde } i \text{ é a unidade imaginária com } i^2 = -1.$$

Iniciaremos a extensão aos complexos a partir da função cosseno hiperbólico. Assim, tome

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

e substitua  $x$  por  $ix$ , obtendo

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Ao aplicar a fórmula de Euler, temos

$$\cosh(ix) = \frac{[\cos(x) + i \sin(x)] + [\cos(x) - i \sin(x)]}{2}$$

$$\cosh(ix) = \frac{2 \cos(x)}{2}$$

$$\boxed{\cosh(ix) = \cos(x)}$$

Usando ainda o fato do cosseno hiperbólico ser uma função par, temos

$$\cosh(i^2x) = \cos(ix)$$

$$\cosh(-x) = \cos(ix)$$

$$\boxed{\cosh(x) = \cos(ix)}$$

Para o seno hiperbólico o raciocínio é semelhante, assim fazemos

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

$$\sinh(ix) = \frac{[\cos(x) + i \sin(x)] - [\cos(x) - i \sin(x)]}{2}$$

$$\sinh(ix) = \frac{2i \sin(x)}{2}$$

$$\boxed{\sinh(ix) = i \sin(x)}$$

Usando ainda o fato de o seno hiperbólico ser uma função ímpar, temos

$$\sinh(i^2x) = i \sin(ix)$$

$$\sinh(-x) = i \sin(ix)$$

$$-\sinh(x) = i \sin(ix)$$

$$\boxed{\sinh(x) = -i \sin(ix)}$$

As expressões para Tangente, Secante, Cossecante e Cotangente Hiperbólicas são obtidas de forma análoga ao Seno e Cosseno Hiperbólicos. Sugerimos como exercício essas deduções, contudo podem ser encontradas no apêndice B.8. Todos os resultados desta seção se encontram resumidos na tabela 16.

## 2 CURIOSIDADES E APLICAÇÕES

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades e curiosidades das Funções Hiperbólicas. Cada seção, com exceção da primeira, conterà o desenvolvimento de alguma curiosidade ou aplicação. Vale ressaltar ainda que apesar das seções serem independentes procuramos organizá-las visando o melhor encadeamento lógico dos resultados obtidos.

Na segunda seção deduzimos as equações de um cabo catenário e parabólico, na terceira estudamos sob quais circunstâncias uma parábola pode aproximar uma catenária, na quarta estudamos os parâmetros que compõem a equação cartesiana do cabo catenário, na quinta desenvolvemos uma propriedade da catenária envolvendo área e comprimento de curva que necessita da resolução de uma equação diferencial que será necessária para o entendimento da sexta seção. Na sexta, mostramos que a catenária é a curva que minimiza a energia gravitacional, na sétima mostramos a relação das catenárias e parábolas através de curvas rolantes e, por fim, na oitava seção mostramos que a curva tractriz pode ser parametrizada por funções hiperbólicas e mostramos a relação desta curva com a catenária através do conceito de involuta e evoluta.

### 2.1 Noções Preliminares no Estudo da Corda Suspensa

#### Definições Referentes à Corda Suspensa

**Definição 14** (Flecha de uma Corda Suspensa). *Denomina-se flecha ou deflexão de uma corda suspensa a diferença entre a maior e a menor ordenada de pontos pertencentes à corda.*

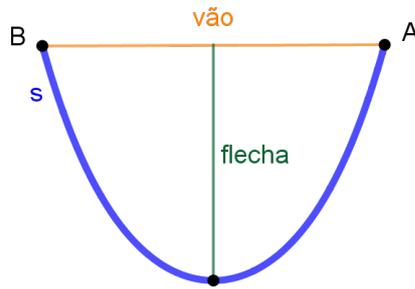
**Definição 15** (Vão de uma Corda Suspensa). *Denomina-se vão de uma corda suspensa a diferença entre a maior e a menor abscissa de pontos pertencentes à corda.*

**Definição 16** (Razão flecha-vão). *Denomina-se Razão flecha-vão de uma corda suspensa a razão entre o valor da flecha e do vão de uma mesma corda suspensa.*

A razão flecha-vão será o parâmetro utilizado para determinar quão esticada ou quão relaxada uma corda se encontra. Uma razão flecha-vão próxima de zero indica uma flecha quase nula e, conseqüentemente, é resultado de uma corda mais esticada. Quanto maior for a flecha ou menor for o vão da corda, interpreta-se que a corda está mais relaxada.

**Definição 17** (Catenária). *Catenária é a curva assumida por um cabo flexível inextensível pendurado por suas extremidades sustentando apenas seu próprio peso.*

Figura 10 - Flecha e Vão de uma Corda Suspensa



Fonte: O autor, 2021.

Ao final deste trabalho, teremos mostrado que a parábola e catenária são curvas distintas e que toda catenária pode ser modelada por uma função cosseno hiperbólico, ou seja, é modelada pela função real  $f(x) = a \cosh(bx + c)$  com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Figura 11 - Um cabo catenário é aquele que sustenta apenas seu próprio peso.



Fonte: <http://hotsite.tvescola.org.br/matematica-em-toda-parte-2/fasciculos/transporte/>

**Definição 18** (Cabo ou corda parabólica). *Denomina-se cabo parabólico, um cabo suspenso por suas extremidades que ou sustenta uma plataforma com peso muito superior ao seu próprio peso ou que possui uma razão flecha-vão muito próxima de zero.*

Figura 12 - Cabo parabólico é aquele que sustenta um peso muito superior ao seu próprio.



Fonte: <http://hotsite.tvescola.org.br/matematica-em-toda-parte-2/fasciculos/transporte/>

### Densidade de força $\vec{p} \times$ Carregamento linear $\vec{w}$

Existem dois conceitos importantes que serão utilizados posteriormente para dedução da equação cartesiana de uma corda suspensa. São os vetores **densidade de força** e **carregamento linear**.

A análise das forças em um ponto qualquer da corda pode ser feita de duas maneiras: a primeira é tomar um elemento infinitesimal de corda  $dx$  na direção do eixo X e a segunda é tomar um elemento  $ds$  na direção da reta tangente à curva naquele ponto, conforme a figura 13.

**Definição 19** (Vetor Densidade de Força). *O vetor densidade de força, denotado por  $\vec{p}$ , é o vetor cujo módulo  $p$  é a razão entre o módulo da força Peso ( $\vec{P}$ ) e o comprimento total ( $s$ ) de uma corda suspensa e sua direção é sempre perpendicular à corda. Em suma,*

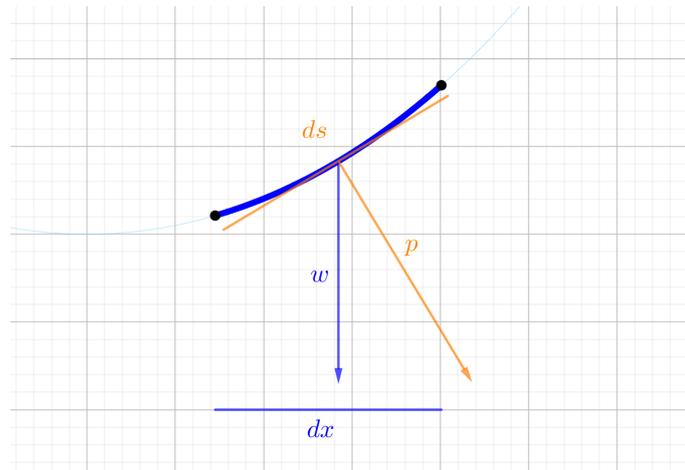
$$p = \frac{P}{s}$$

**Definição 20** (Vetor Carregamento Linear). *O vetor carregamento linear, denotado por  $\vec{w}$ , é o vetor cujo módulo  $w$  é a razão entre o módulo da Força Peso ( $\vec{P}$ ) e o comprimento horizontal ( $x$ ) ou o vão de uma corda suspensa e sua direção é sempre vertical. Em suma,*

$$w = \frac{P}{x}$$

Como trabalhamos sempre com uma corda homogênea, então ainda podemos con-

Figura 13 - Comparação entre  $\vec{p}$  e  $\vec{w}$  num elemento infinitesimal da corda suspensa.



Fonte: O autor, 2021.

cluir que  $p = \frac{P}{s} = \frac{dP}{ds}$  onde a razão  $\frac{dP}{ds}$  não representa a derivada, mas sim a razão de elementos infinitesimais, visto que a força Peso está uniformemente distribuída ao longo da corda. De forma análoga, concluímos que  $w = \frac{P}{x} = \frac{dP}{dx}$ .

É importante ressaltar que em muitas partes do texto trabalhamos com os diferenciais como quantidades muito pequenas e uma razão entre dois diferenciais representa tão somente a razão entre duas quantidades infinitesimais, não necessariamente representando uma derivada. A Análise Não-Standard é uma maneira de formalizar estes raciocínios, intuitivamente claros.

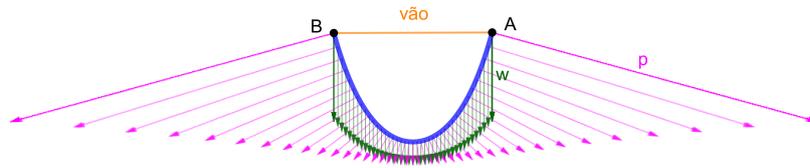
Note que assim, nestes casos, a força peso resultante pode ser expressa por

$$\vec{P} = \int \vec{w}dx = \int \vec{p}ds.$$

Observe também que ao decompor  $\vec{p}$  e somar todos os pontos da curva. Assim, suas componentes horizontais se anularão e as componentes verticais serão iguais a  $\vec{w}$  conforme ilustrado pelas figuras 13 e 14. Perceba ainda, pela figura 15, que para uma pequena razão flecha-vão a corda encontra-se bem esticada fazendo com que  $\vec{p}$  e  $\vec{w}$  se tornem muito próximos a ponto de podermos fazer a aproximação  $\vec{p} \approx \vec{w}$ .

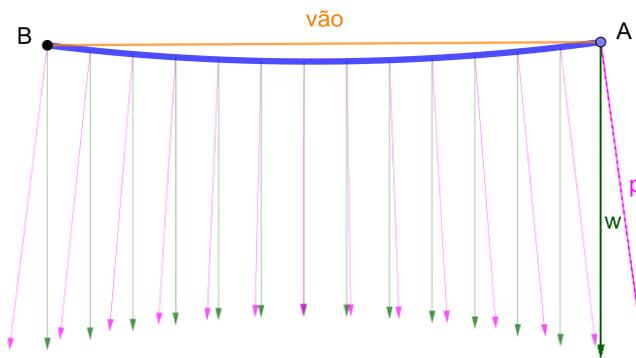
A principal diferença entre ambas é que  $\vec{w}$  aponta na direção vertical, ao longo do eixo X. Por outro lado,  $\vec{p}$  é a densidade de força ao longo do comprimento de cabo, apontando sempre na direção perpendicular de  $s$ .

Figura 14 - Comparação entre  $\vec{p}$  e  $\vec{w}$  para uma razão flecha-vão grande



Fonte: O autor, 2021.

Figura 15 - Comparação entre  $\vec{p}$  e  $\vec{w}$  para uma razão flecha-vão pequena



Fonte: O autor, 2021.

## 2.2 Cabos Suspensos e Catenárias

Como vimos na definição 17 a Catenária é a curva assumida por um cabo flexível inextensível pendurado por suas extremidades sustentando apenas seu próprio peso. O vocábulo *catena* tem origem no Latim e significa cadeia ou corrente. Há relatos de que esta curva já fora estudada por Leonardo da Vinci no século XV como pode ser visto em Truesdell (1960 p.21), porém muitos acreditavam que a Catenária seria uma parábola pela semelhança entre estas curvas. Galileo em seu *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali* chega a afirmar que a corrente suspensa assume a forma de uma parábola, conforme pode ser visto na figura 16 retirada de Crew e Salvio (1954).

O problema de determinar a equação da curva que descreve uma corda suspensa ganhou notoriedade no século XVII quando Jakob Bernoulli apresentou-o oficialmente à comunidade científica como um desafio em artigo de 1690 da *Acta Eruditorum* que pode ser visto na figura 17 e seu texto pode ser aproximadamente traduzido como: “Agora o ato se reduz a isto: encontrar a linha, na qual o cordão suspenso por suas duas extremidades se curva ao próprio peso”. Neste artigo ele resolve o problema da curva isócrona pela qual um corpo cairá na mesma quantidade de tempo partindo de qualquer posição inicial.

Mostraremos nesta seção que nem todo cabo suspenso é uma catenária apesar da

Figura 16 - Galileo afirma que Corda Suspensa é uma Parábola

## SECOND DAY

149

in a nearly upright position, so that the ball in its motion will press slightly upon the mirror and trace out a fine sharp parabolic line; this parabola will grow longer and narrower as the angle of elevation increases. The above experiment furnishes clear and tangible evidence that the path of a projectile is a parabola; a fact first observed by our friend and demonstrated by him in his book on motion which we shall take up at our next meeting. In the execution of this method, it is advisable to slightly heat and moisten the ball by rolling in the hand in order that its trace upon the mirror may be more distinct.

[186]

The other method of drawing the desired curve upon the face of the prism is the following: Drive two nails into a wall at a convenient height and at the same level; make the distance between these nails twice the width of the rectangle upon which it is desired to trace the semiparabola. Over these two nails hang a light chain of such a length that the depth of its sag is equal to the length of the prism. **This chain will assume the form of a parabola,\*** so that if this form be marked by points on the wall we shall have described a complete parabola which can be divided into two equal parts by drawing a vertical line through a point midway between the two nails. The transfer of this curve to the two opposing faces of the prism is a matter of no difficulty; any ordinary mechanic will know how to do it.

Fonte: Dialogues Concerning Two New Sciences. (CREW; SALVIO, 1954)

Figura 17 - Bernoulli propõe o problema da Corda Suspensa

Problema aliud mihi proposuit his verbis: *Analysin Autoris calculo differentiali institutam nunc pando eum in finem, ut ad par officii genus publico praestandum, tentandamque sua methodo problematis deinceps proponendi solutionem invitem.* **Ipsium autem problema huc redit: Invenire lineam, in quam se funis duabus extremitatibus suspensus proprio pondere curvat.** Supponitur autem, funem manere ejusdem longitudinis ut catena, non vero extendi aut contrahi ut filum. Propositum hoc problema inde a Galilaei temporibus celebre, nondum, quod sciam, solutionem accepit. Itaque ab onere imposto jure me possem excusare, praesertim aliis rebus distractissimus. Fecit tamen humanitas clarissimi Viri, ut primae ejus compellationi deesse noluerim. Aggressus itaque sum, quod haecenus ne tentaveram quidem, & occlusos aditus clave mea feliciter referavi.

Fonte: *Acta Eruditorum* de 1690 na página 360. (GROSSE et al., 1690)

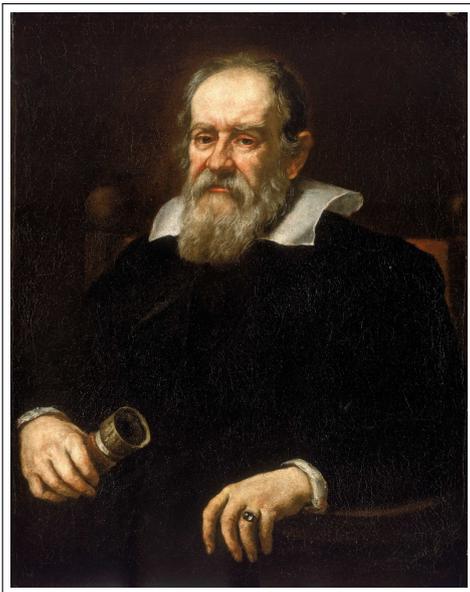
recíproca ser verdadeira: toda catenária modela um cabo suspenso que sustenta apenas seu próprio peso, mas nem todo cabo suspenso é modelado necessariamente por uma catenária. A resposta pode confundir inicialmente, mas observe que a informação crucial será justamente o fato de sustentar o próprio peso ou não. Veremos a seguir sob que circunstâncias um cabo terá o formato de uma catenária ou de uma parábola.

Nesta seção faremos inicialmente uma breve discussão sobre as forças atuantes em qualquer cabo flexível e em seguida faremos uma bifurcação. Vamos estudar sob que circunstâncias um cabo pendurado é uma catenária ou quando é uma parábola. Vale ressaltar que esta seção foi inspirada em grande parte pelo livro *Mecânica para Engenharia - Estática* de Meriam, Kraige e Bolton (2016).

Ao final, faremos uma análise de dois exercícios do mesmo livro utilizando as fórmulas deduzidas para um cabo com as mesmas características físicas tais como massa, vão e deflexão (ou flecha). Verificaremos a diferença entre os resultados e discutiremos como a razão flecha/vão pode ser utilizada como critério de classificação.

Figura 18 - (a) Galileo (1636) e (b) Jakob Bernoulli (1687)

(a)



(b)



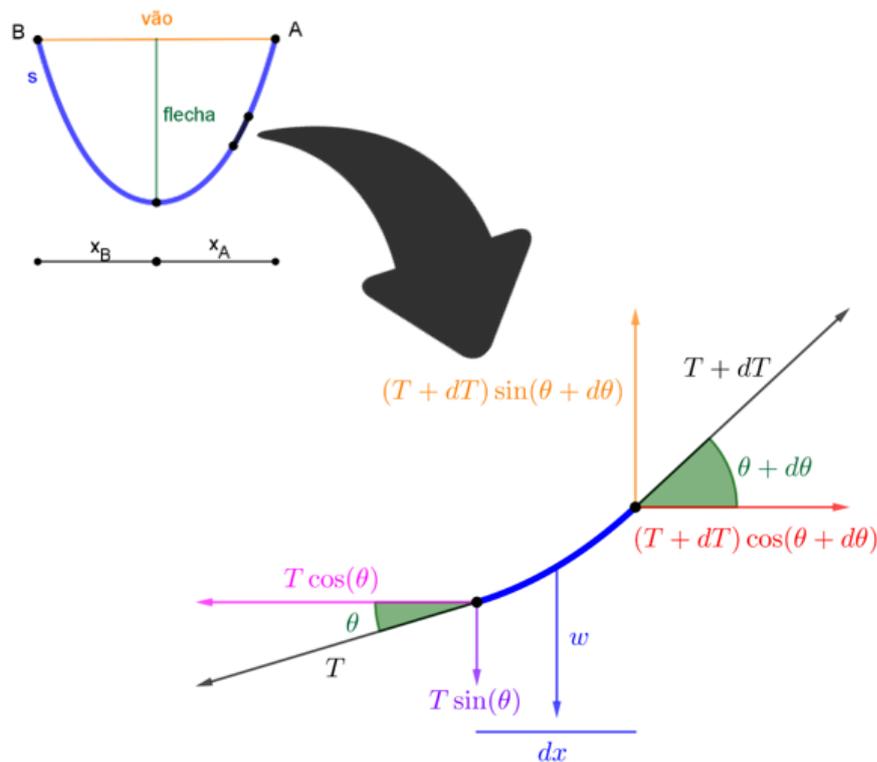
Fonte: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo\\_Galilei](https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei)> e  
<[https://pt.wikipedia.org/wiki/Jakob\\_Bernoulli](https://pt.wikipedia.org/wiki/Jakob_Bernoulli)>

## Respondendo o Problema de Bernoulli

Em uma tentativa de responder o problema proposto por Jakob Bernoulli faremos a seguir uma breve discussão sobre os elementos de um cabo suspenso e as forças atuantes em cada ponto.

Assim, considere um cabo flexível de massa  $m$  cujas extremidades se localizam nos pontos  $A$  e  $B$ . A figura 19 destaca um elemento infinitesimal do cabo flexível e as forças atuantes sobre ele. A intuição é que um elemento infinitesimal é aquele que pode ser tornado tão pequeno quanto se queira, mas sempre diferente de zero. Como o cabo possui massa  $m$  e está sujeito a aceleração da gravidade  $\vec{g}$ , então existe uma força peso  $\vec{P}$  agindo sobre este cabo na direção vertical e sentido para baixo.

Figura 19 - Análise de forças sobre um elemento infinitesimal da corda suspensa.



Fonte: O autor, 2021.

Conforme a força peso  $\vec{P}$  age, a corda se estica e surge a força de tensão ( $\vec{T}$ ) sempre na direção tangente à corda em cada ponto como resultado da reação de forças num corpo em equilíbrio. A força de tensão, segundo Young e Freedman (2016), é a força que uma corda esticada exerce sobre um objeto ao qual ela está amarrada. Pela terceira lei de Newton, existirá uma força que o objeto [ao qual a corda está presa] exerce sobre a corda de mesma intensidade e direção, mas em sentido oposto.

O diagrama considera as forças atuantes em dois pontos suficientemente próximos um do outro. No ponto mais abaixo, atua a força de tensão  $T$  na direção tangente à corda, formando um ângulo  $\theta$  com a horizontal cujo sentido é para o centro da corda. No ponto

imediatamente acima, atua uma força de tensão ligeiramente maior  $T + dT$  na direção da reta tangente a este ponto, formando um ângulo maior  $\theta + d\theta$  com a horizontal devido à curvatura da corda. No diagrama podemos ainda observar suas projeções na direção dos eixos coordenados.

Vale ressaltar ainda que a força de tensão não é constante ao longo do cabo. Considere um ponto qualquer da corda. Quanto mais próximo ele estiver da extremidade mais massa se concentrará abaixo dele, e conseqüentemente, as forças peso e tensão sobre este ponto também serão maiores.

A força peso  $\vec{P}$  não age apenas em um ponto do cabo, mas em todo o seu comprimento. Em escala infinitesimal, foi definido (ver seção 1.1, definição 20) o carregamento linear  $\vec{w}$ , de intensidade variável, como sendo a razão entre a força peso e o vão do cabo. Tal definição é consistente para um cabo suficientemente esticado, de modo que a força peso possa ser distribuída de maneira uniforme ao longo do eixo horizontal. O carregamento é análogo a uma “densidade linear de peso”, e sua resultante pode ser descrita pela equação abaixo.

$$\vec{w} = \frac{\vec{P}}{x} = \frac{d\vec{P}}{dx}$$

$$\boxed{d\vec{P} = \vec{w}dx} \quad (10)$$

Como a corda está em equilíbrio, o somatório das forças na direção de cada um dos eixos coordenados deve ser zero. Assim, podemos escrever as seguintes equações:

$$\text{Direção Horizontal: } T \cos(\theta) = (T + dT) \cos(\theta + d\theta)$$

$$\text{Direção Vertical: } T \sin(\theta) + wdx = (T + dT) \sin(\theta + d\theta)$$

Desenvolvendo a equação das forças atuantes na direção horizontal, temos

$$T \cos(\theta) = (T + dT) \cos(\theta + d\theta)$$

$$T \cos(\theta) = (T + dT)[\cos(\theta) \cos(d\theta) - \sin(\theta) \sin(d\theta)]$$

Vamos considerar que  $\cos(d\theta) \approx 1$  e  $\sin(d\theta) \approx d\theta$ . Tais aproximações são válidas pois  $d\theta$  é um valor muito próximo de zero, e temos que  $\cos(0) = 1$  e  $\sin(0) = 0$ . A expressão anterior então pode ser simplificada como

$$T \cos(\theta) = (T + dT)[\cos(\theta) - \sin(\theta)d\theta]$$

$$T \cos(\theta) = T \cos(\theta) + dT \cos(\theta) - T \sin(\theta)d\theta - \sin(\theta)d\theta dT$$

O termo de segunda ordem  $d\theta dT$  será desprezado. Ou seja, considerado zero como

uma boa aproximação. Então,

$$T \cos(\theta) = T \cos(\theta) + \cos(\theta)dT - T \sin(\theta)d\theta - 0$$

$$\cos(\theta)dT - T \sin(\theta)d\theta = 0$$

Desta última igualdade, observe que o lado esquerdo, pela Regra do Produto das derivadas, é  $[T \cos(\theta)]'$ . Logo,

$$[T \cos(\theta)]' = 0$$

Conclui-se, portanto, que a componente horizontal da força de tensão é constante, sendo aqui denotada por  $T_0$ .

$$T_0 = T \cos(\theta)$$

Desenvolvendo a equação das forças atuantes na direção vertical, temos

$$T \sin(\theta) + w dx = (T + dT) \sin(\theta + d\theta)$$

$$T \sin(\theta) + w dx = (T + dT)[\sin(\theta) \cos(d\theta) + \sin(d\theta) \cos(\theta)]$$

Ainda considerando as aproximações  $\cos(d\theta) \cong 1$  e  $\sin(d\theta) \cong d\theta$ , temos

$$T \sin(\theta) + w dx = (T + dT)[\sin(\theta) + d\theta \cos(\theta)]$$

$$T \sin(\theta) + w dx = T \sin(\theta) + T d\theta \cos(\theta) + dT \sin(\theta) + dT d\theta \cos(\theta)$$

Desprezando o termo de segunda ordem pelos motivos supracitados, temos

$$T \sin(\theta) + w dx = T \sin(\theta) + T d\theta \cos(\theta) + dT \sin(\theta)$$

$$w dx = T d\theta \cos(\theta) + dT \sin(\theta)$$

$$w dx = T \cos(\theta)d\theta + \sin(\theta)dT$$

Desta última igualdade, observe que o lado direito, pela Regra do Produto das derivadas, é  $[T \sin(\theta)]'$ . Logo,

$$w dx = [T \sin(\theta)]'$$

Como  $T_0 = T \cos(\theta)$ , então  $T = \frac{T_0}{\cos(\theta)}$ .

$$w dx = d(T \sin(\theta)) = d\left(\frac{T_0}{\cos(\theta)} \sin(\theta)\right) = d(T_0 \tan(\theta))$$

Como  $T_0$  é constante, temos

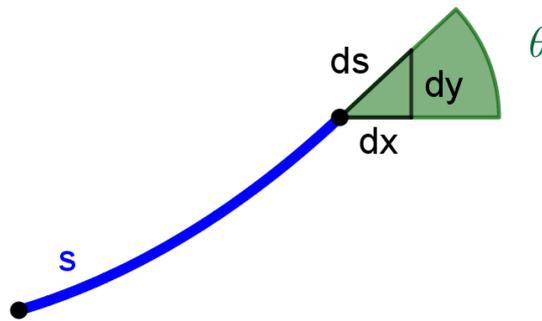
$$\frac{w}{T_0} dx = d(\tan(\theta))$$

$$d(\tan(\theta)) = \frac{w}{T_0} dx$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan(\theta)) = \frac{w}{T_0}} \quad (11)$$

Como dissemos anteriormente, o ângulo  $\theta$  é aquele compreendido entre a direção do eixo horizontal e a direção da força de tensão  $T$ . Na mesma direção de  $T$  consideramos um elemento infinitesimal de corda, cujo comprimento é denotado por  $ds$ .

Figura 20 - Relação entre os diferenciais  $ds$ ,  $dx$  e  $dy$ .



Fonte: O autor, 2021.

O elemento infinitesimal de corda  $ds$  forma um triângulo retângulo, como apresentado na figura 20, com os elementos infinitesimais dos eixos coordenados  $dy$  e  $dx$ . Então, a relação entre os infinitesimais se dá pela tangente do ângulo  $\theta$  e pelo Teorema de Pitágoras, como nas equações a seguir.

$$\boxed{(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2} \quad (12)$$

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{dy}{dx}} \quad (13)$$

Assim substituindo a equação 13 em 11, temos

$$\frac{d}{dx}(\tan(\theta)) = \frac{w}{T_0}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{w}{T_0}$$

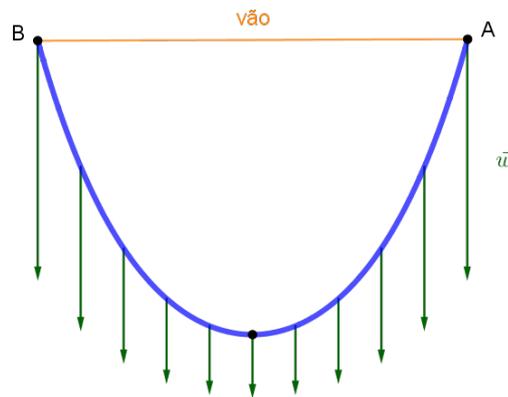
$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0}} \quad (14)$$

A equação 14 é chamada de equação diferencial dos cabos flexíveis. A partir dela, determinaremos as equações para as quais um cabo suspenso é uma catenária ou uma parábola. Como a força de tensão na horizontal  $T_0$  é constante, então a grande questão se dá sobre o que acontece com o carregamento linear  $\vec{w}$ . Se o carregamento linear for variável, teremos um cabo catenário. Contudo, se  $\vec{w}$  for considerado também constante, teremos um cabo que ou sustenta uma plataforma com um peso muito maior que o seu próprio peso ou uma razão flecha-vão é muito próxima de zero. Em outras palavras, ou temos uma ponte pênsil ou um cabo muito esticado. Estes fatores mudam a distribuição de cargas e, conseqüentemente, o formato do cabo de catenário para parabólico. Veremos tudo isso a seguir com maiores detalhes.

### O Cabo Suspenso é uma Catenária

Considere um cabo de comprimento  $s$  e massa  $m$ , que ou sustenta apenas o seu próprio peso ou sustenta uma plataforma cuja massa é desprezível quando comparada à massa da corda. A figura 21 ilustra a situação.

Figura 21 - Cabo suspenso sustentando seu próprio peso.



Fonte: O autor, 2021.

Neste caso, a distribuição de forças ao longo da horizontal não é constante. Para ver isso, considere o módulo do vetor densidade de força  $\vec{p}$ ,

$$|\vec{p}| = p = \frac{P}{s} = \frac{dP}{ds}$$

$$dP = pds$$

Observe que apesar de  $p$  ser constante,  $\vec{p}$  aponta na direção perpendicular da corda e a projeção vertical de  $\vec{p}$  não é constante. Essa projeção vertical do vetor densidade de força  $\vec{p}$  é justamente o que chamamos de carregamento linear  $\vec{w}$ .

Perceba que as projeções horizontais do vetor  $\vec{p}$  se anulam e a igualdade abaixo se confirma.

$$dP = pds = wdx$$

Substituindo  $w$  da equação 14 por  $p\frac{ds}{dx}$ , ficamos com

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{T_0} \frac{ds}{dx}$$

Isolando  $\frac{ds}{dx}$  na equação 12 e substituindo na última equação, temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{T_0} \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}$$

Para facilitar os cálculos iremos chamar  $z = \frac{dy}{dx}$  e conseqüentemente  $\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ .  
Ficando com

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p}{T_0} \sqrt{z^2 + 1}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{p}{T_0} dx$$

Integrando ambos os lados, temos

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \int \frac{p}{T_0} dx$$

A integração do lado esquerdo pode ser vista em detalhes no apêndice B.2. Assim,

$$\ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) = \frac{p}{T_0} x \Rightarrow z + \sqrt{z^2 + 1} = e^{\frac{p}{T_0} x} \Rightarrow \sqrt{z^2 + 1} = e^{\frac{p}{T_0} x} - z \Rightarrow$$

$$z^2 + 1 = e^{\frac{2p}{T_0} x} - 2ze^{\frac{p}{T_0} x} + z^2 \Rightarrow 1 = e^{\frac{2p}{T_0} x} - 2ze^{\frac{p}{T_0} x} \Rightarrow 2ze^{\frac{p}{T_0} x} = e^{\frac{2p}{T_0} x} - 1 \Rightarrow$$

$$z = \frac{e^{\frac{2p}{T_0} x} - 1}{2e^{\frac{p}{T_0} x}} \Rightarrow z = \frac{e^{\frac{p}{T_0} x} - e^{-\frac{p}{T_0} x}}{2} = \sinh\left(\frac{p}{T_0} x\right)$$

Lembrando que  $z = \frac{dy}{dx}$ , voltamos para

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{p}{T_0} x} - e^{-\frac{p}{T_0} x}}{2}$$

Integrando novamente com respeito a  $x$ , temos

$$\int \frac{dy}{dx} = \int \frac{e^{\frac{p}{T_0} x} - e^{-\frac{p}{T_0} x}}{2}$$

$$y = \frac{e^{\frac{p}{T_0} x} + e^{-\frac{p}{T_0} x}}{2 \frac{p}{T_0}} + C = \frac{T_0}{p} \left( \frac{e^{\frac{p}{T_0} x} + e^{-\frac{p}{T_0} x}}{2} \right) + C$$

$$y = \frac{T_0}{p} \cosh\left(\frac{p}{T_0} x\right) + C$$

Vamos calcular  $C$  de modo a fazer coincidir o ponto mais baixo da catenária com a origem do sistema de coordenadas, ou seja, considerando que a equação diferencial possui valor inicial  $y(0) = 0$ .

$$0 = \frac{T_0}{p} \cosh(0) + C$$

$$0 = \frac{T_0}{p} + C$$

$$C = -\frac{T_0}{p}$$

Logo,

$$y = \frac{T_0}{p} \cosh\left(\frac{p}{T_0}x\right) - \frac{T_0}{p}$$

$$\boxed{y = \frac{T_0}{p} \left[ \cosh\left(\frac{p}{T_0}x\right) - 1 \right]} \quad (15)$$

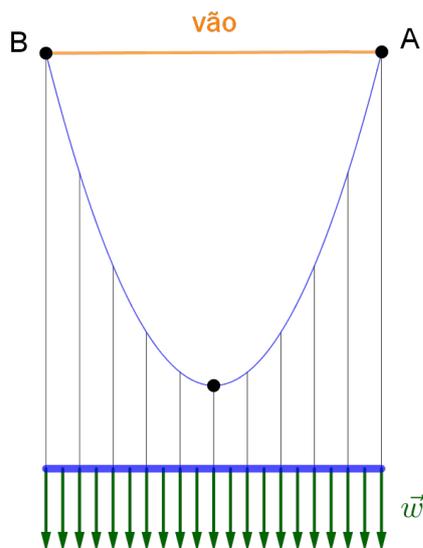
Na seção 2.4 discutiremos como os parâmetros  $T_0$  e  $p$  influenciam no formato da corda suspensa.

Iniciamos esta seção tomando como premissa que o cabo está suspenso pelas extremidades e sujeito apenas ao seu próprio peso, ou seja, é uma catenária. Concluimos que a equação cartesiana 15 é dependente de uma função hiperbólica; no caso, o cosseno hiperbólico. Portanto, os cabos catenários são modelados por funções hiperbólicas.

### O Cabo Suspenso é uma Parábola

Considere um cabo de comprimento  $s$  e massa  $m$ , que ou sustenta uma plataforma cuja massa é muito superior que sua própria massa ou é um cabo cuja razão flecha-vão é muito próxima de zero. Assim, para o primeiro cenário, podemos desprezar a massa do cabo e consideramos apenas a massa da plataforma (representada pelo segmento horizontal em azul na figura 22). Como a massa da plataforma é uniformemente distribuída ao longo da horizontal, então a distribuição de forças  $\vec{w}$  na horizontal também é uniformemente distribuída. A figura 22 exemplifica a situação.

Figura 22 - Cabo suspenso sustentando uma plataforma horizontal (azul). Esquema de uma Ponte Pênsil.



Fonte: O autor, 2021.

Assim, a distribuição de carga ao longo da horizontal é constante. Voltando a

equação 14, temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{w}{T_0}$$

Integrando ambos os lados com relação a  $x$ , temos

$$\int \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) dx = \frac{w}{T_0} \int dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_0}x + C$$

$$dy = \frac{w}{T_0}x dx + C dx$$

E, integrando novamente com relação a  $x$ ,

$$\int dy = \int \frac{w}{T_0}x dx + \int C dx$$

$$y = \frac{w}{T_0} \frac{x^2}{2} + Cx + K$$

As constantes  $C$  e  $K$  podem ser convenientemente escolhidas de acordo com a posição do eixo de coordenadas. Sem perda de generalidade, vamos considerar  $C = K = 0$  de modo que a parábola tenha seu vértice coincidindo com a origem do sistema. Portanto, a equação do cabo parabólico se dá por

$$\boxed{y = \frac{wx^2}{2T_0}} \quad (16)$$

Iniciamos esta seção supondo que ou a corda suspensa está sustentando uma plataforma com massa muito superior à sua própria massa ou a corda está suficientemente esticada de modo que a distribuição de forças ao longo da horizontal possa ser considerada constante. Com estas considerações, encontramos uma equação cartesiana para a corda que envolve uma função cujo gráfico é uma parábola. Por isso, nas condições supracitadas, um cabo suspenso é denominado cabo parabólico.

Em linhas gerais, os cabos suspensos podem ser classificados em dois tipos: catenários ou parabólicos. Os cabos catenários são aqueles que sustentam apenas seu próprio peso ou cuja razão flecha-vão não é próxima de zero. Podemos citar como exemplos clássicos o formato que um cabo elétrico toma quando pendurado entre dois postes ou os cabos de alimentação elétrica de linhas férreas. Também é o formato de um cabo submarino

quando está sendo lançado ao mar.

Já os cabos parabólicos são aqueles que estão sustentando um peso muito superior ao seu próprio peso ou cabos que mesmo não sustentando nenhuma plataforma encontram-se muito esticados, ou seja, que possuem uma razão flecha-vão bem próxima de zero. O exemplo clássico são as pontes pênséis, como a famosa *Golden Gate* em São Francisco nos Estados Unidos.

Figura 23 - Ponte Golden Gate em São Francisco, Estados Unidos



Fonte: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte\\_Golden\\_Gate](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_Golden_Gate)>

### 2.3 Aproximação de Catenárias por Parábolas

Nesta seção faremos uma breve discussão sobre uma boa parábola que aproxima localmente uma catenária. Por aproximar localmente queremos dizer que para os mesmos valores do domínio as funções terão imagens muito próximas.

Utilizaremos o Polinômio de Taylor de grau  $n$  centrado em  $a$  de uma função  $f(x)$  que, segundo Stewart (2013) página 231, é o polinômio que possui as  $n$  primeiras derivadas, calculadas no ponto  $x = a$ , iguais às da função que se quer aproximar.

Levemos em consideração que tanto a equação do cabo catenário quanto a do cabo parabólico foram propositalmente posicionadas de modo que seus vértices coincidisse com a origem do sistema de coordenadas no plano XY. Portanto, faremos a aproximação em torno do ponto  $x = 0$ .

Para tal, tomemos a equação 15, do cabo catenário, onde faremos a substituição  $r = \frac{T_0}{p}$ , apenas para facilitar a manipulação. Assim, temos

$$f(x) = r \left[ \cosh \left( \frac{x}{r} \right) - 1 \right]$$

como a função real que queremos aproximar por uma função polinomial  $p(x)$  do segundo grau, cujo gráfico é uma parábola. Para nos assegurarmos que a função polinomial se assemelha bem ao cosseno hiperbólico exigiremos que, além de coincidirem no ponto  $x = 0$  da catenária, ambas possuam as duas primeiras derivadas iguais.

Como  $p(x)$  é de grau 2, então é da forma  $p(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$  com  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  pertencentes ao conjunto dos números reais. Mas como  $p(x)$  deve ter ponto mínimo em  $(x, y) = (0, 0)$ , então  $c_2 = c_3 = 0$ . Conseqüentemente,  $p(x) = c_1x^2$  e basta determinar o coeficiente  $c_1$ , em termos de  $r$ , que melhor aproxima as funções.

A função  $p(x)$  deverá ser o polinômio de Taylor de grau 2, centrado em  $x = 0$ . Assim,

$$p(x) = \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \frac{f'(0)}{1!}(x - 0)^1 + \frac{f(0)}{0!}(x - 0)^0$$

Podemos verificar que

$$f(0) = r \left[ \cosh \left( \frac{0}{r} \right) - 1 \right] = r[1 - 1] = 0$$

e que

$$f'(0) = r \sinh \left( \frac{0}{r} \right) \frac{1}{r} = 0.$$

Assim,

$$p(x) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 = c_1x^2$$

e, portanto,

$$c_1 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{\frac{1}{r} \cosh\left(\frac{0}{r}\right)}{2} = \frac{1}{2r}.$$

A melhor aproximação de  $f(x)$  por um polinômio  $p(x)$  de grau 2, será

$$p(x) = \frac{x^2}{2r} = \frac{px^2}{2T_0}$$

Perceba que o resultado obtido é equivalente à equação 16 do cabo parabólico.

$$y = \frac{wx^2}{2T_0}$$

Vale a pena ressaltar que, no caso de o cabo ser parabólico, os módulos dos vetores densidade de força  $\vec{p}$  e carregamento linear  $\vec{w}$  podem ser considerados iguais.

### Medindo o Erro Relativo da Aproximação

Com o intuito de mensurar quão boa nossa aproximação é, definiremos o parâmetro  $\varepsilon$  como o erro de aproximação da catenária  $f(x)$  pela sua parábola  $p(x)$  obtida através do Polinômio de Taylor.

**Definição 21** (Erro Relativo). *Considere as funções reais*

$$f(x) = \frac{T_0}{p} \left[ \cosh\left(\frac{p}{T_0}x\right) - 1 \right] \quad e \quad p(x) = \frac{px^2}{2T_0}$$

no intervalo  $[-a, a]$  para  $a \in \mathbb{R}$ , cujos gráficos são as curvas catenária e parábola, respectivamente. O erro relativo  $\varepsilon$  é a razão

$$\varepsilon = \frac{\int_{-a}^a [f(x) - p(x)] dx}{\int_{-a}^a f(x) dx}$$

O numerador representa a diferença entre as áreas abaixo dos gráficos de  $f(x)$  e  $p(x)$  e o denominador, a área sob a curva catenária, que será o nosso referencial. Desta forma, quanto mais próximo  $\varepsilon$  estiver de zero, melhor será a aproximação. No caso em que  $\varepsilon = 0$  ter-se-ia uma sobreposição dos gráficos da catenária e da parábola, significando uma perfeita aproximação.

Podemos ainda desenvolver as integrais e encontrar uma expressão para  $\varepsilon$  em função de  $a$ ,  $p$  e  $T_0$ . Considerando a substituição  $r = \frac{T_0}{p}$ , temos

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a r \left[ \cosh\left(\frac{x}{r}\right) - 1 \right] dx = 2r^2 \left[ \sinh\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{a}{r} \right]$$

$$\int_{-a}^a p(x) dx = \int_{-a}^a \frac{x^2}{2r} dx = \frac{1}{2r} \left[ \frac{a^3}{3} - \frac{(-a)^3}{3} \right] = \frac{1}{2r} \left[ \frac{2a^3}{3} \right] = \frac{a^3}{3r}$$

Assim,  $\varepsilon$  pode ser reescrito como

$$\varepsilon = \frac{2r^2 \left[ \sinh\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{a}{r} \right] - \frac{a^3}{3r}}{2r^2 \left[ \sinh\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{a}{r} \right]}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{a^3}{6r^3 \left[ \sinh\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{a}{r} \right]}$$

Em suma, cada catenária  $f(x)$  é unicamente determinada por sua razão  $r = \frac{T_0}{p}$ , e a parábola  $p(x) = \frac{x^2}{2r}$  é a que melhor a aproxima. Essa aproximação não é perfeita e quanto maior for o intervalo  $[-a, a]$  no qual comparamos as funções, maior será o erro  $\varepsilon$  cometido pela aproximação. O erro  $\varepsilon$  é quantificável em termos de  $a$  e  $r$ . A seguir, discutiremos alguns critérios que podem garantir uma boa aproximação.

### Linha de Corte e a Razão Flecha-Vão

Como visto anteriormente, quanto menor for o erro  $\varepsilon$ , melhor será a aproximação. Podemos considerar que uma boa aproximação é obtida fazendo-se  $a = r$ , pois neste caso temos  $\varepsilon \leq 5\%$ . Como uma primeira tentativa, temos um critério matematicamente simples que nos dá um erro relativamente próximo de zero. Isto pois,

$$\varepsilon = 1 - \frac{a^3}{6a^3 \left[ \sinh\left(\frac{a}{a}\right) - \frac{a}{a} \right]} = 1 - \frac{1}{6[\sinh(1) - 1]} \cong 0.0487 \leq 5\%$$

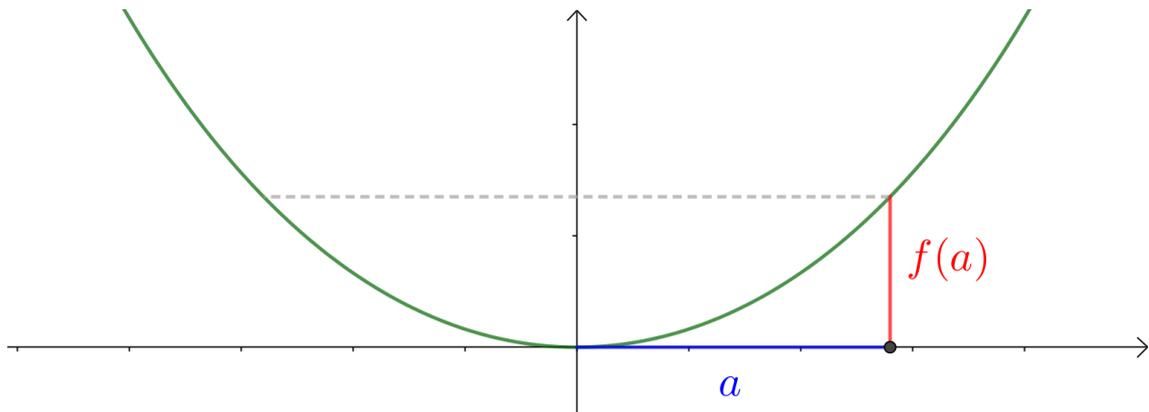
Este até seria um bom método para indicar um erro relativo de aproximação menor do que 5%, caso o cálculo de  $r$  fosse prático ou direto. Isso não acontece, pois  $r$  depende de  $p$  e  $T_0$ , que em geral não são dados diretos de uma corda suspensa. Por isso, consideraremos a razão flecha-vão como um critério que será de mais fácil aplicação. Neste caso, uma corda suspensa pode ter sua flecha e vão sempre bem calculados, o que facilitará as análises de erro.

Considere como vão o comprimento do intervalo  $[-a, a]$ . E seja a flecha igual a imagem  $f(a)$ , lembrando que o ponto mínimo da catenária se encontra na origem do sistema de coordenadas, como pode ser visto na figura abaixo. Neste caso, a corda está suspensa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(-a, f(-a))$ .

Nossa primeira aproximação para o cálculo prático do erro foi considerar a hipótese  $a = r$ . Nesta condição, a razão flecha-vão é igual a 0,27.

$$\frac{f(a)}{2a} = \frac{r \left[ \cosh\left(\frac{x}{r}\right) - 1 \right]}{2a} = \frac{a \left[ \cosh\left(\frac{a}{a}\right) - 1 \right]}{2a} = \frac{\cosh(1) - 1}{2} = 0,27$$

Perceba ainda que para a hipótese de  $a = \frac{r}{2}$ , teremos  $\varepsilon = 1,24\%$  e a razão flecha-vão é igual a 0,13 cujos cálculos são análogos aos anteriores.

Figura 24 - Representação gráfica de um cabo catenário  $f(x)$ .

Fonte: O autor, 2021.

Assim, encontramos uma relação entre o erro  $\varepsilon$  e a razão flecha-vão com os valores descritos anteriormente. Aproximamos os valores 0,27 e 0,13 para 0,25 e 0,10, respectivamente. Logo, para aproximar uma catenária por parábola com erro aproximado entre 1% e 5% verifique se a razão flecha-vão está no intervalo compreendido entre  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{1}{4}$ .

Resumindo, procuramos encontrar a equação da parábola que melhor aproxima uma catenária. Definimos o erro relativo  $\varepsilon$  procurando medir quão boa essa aproximação pode ser. Encontramos a indicação de uma relação entre o erro e a razão flecha-vão, esta última mais prática de ser calculada. Ao final, conseguimos um método prático para determinar uma aproximação com erro entre 1% e 5%.

## 2.4 Catenárias em outros Planetas

Como vimos na seção 2.2, a equação 15 do cabo catenário

$$y = \frac{T_0}{p} \left[ \cosh \left( \frac{p}{T_0} x \right) - 1 \right]$$

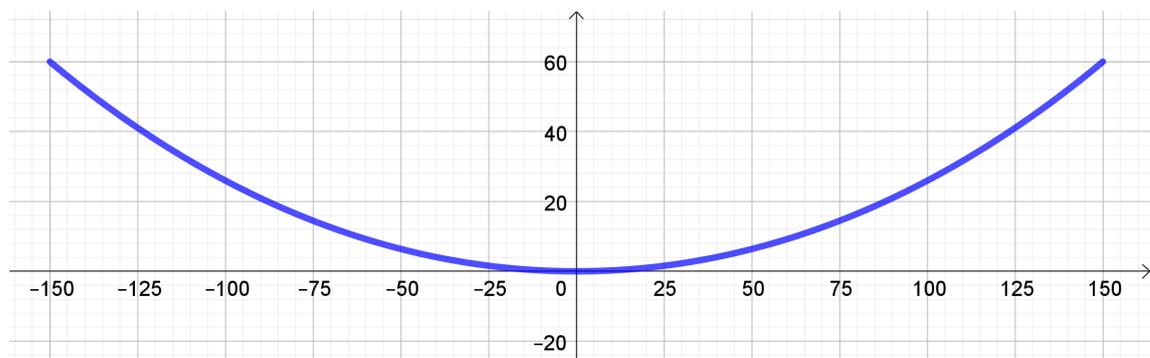
depende dos parâmetros  $p$  e  $T_0$ . A força de tensão na horizontal  $T_0$  surge como reação à corda esticada pela força peso e a densidade de força  $p$ , como visto na definição 19, também depende da força peso. Sabendo que a força peso depende da aceleração da gravidade, então surgem alguns questionamentos:

*O formato do cabo catenário depende da aceleração da gravidade?*

*Uma mesma corda suspensa, em outros planetas, possuirá formatos distintos?*

Para iniciar nossa investigação considere uma corda suspensa pelas extremidades em um vão de 300 metros, sustentando apenas seu próprio peso. Sua massa é de 3600 kg, possui 330 metros de comprimento e uma deflexão de 60 metros. A figura a seguir ilustra a situação, de modo que o ponto mínimo da corda coincida com a origem do sistema de coordenadas.

Figura 25 - Cabo catenário suspenso com 300 metros de vão e 60 metros de flecha.



Fonte: O autor, 2021.

Vamos construir a tabela 4, onde pretendemos observar como diferentes valores da aceleração da gravidade  $\vec{g}$  interferem na razão  $\frac{T_0}{p}$ , que é a principal responsável pelo formato da catenária, conforme a equação 15 do cabo catenário.

A primeira coluna nos dá o nome dos planetas do sistema solar e da Lua, que também levaremos em consideração. Na segunda coluna, temos os valores da aceleração da gravidade obtidos em Halliday, Resnick e Walker (2018), em seu Apêndice C. Na terceira coluna, calculamos os módulos da densidade de força  $p$  através da fórmula  $\frac{mg}{s}$  considerando o valor da massa e comprimento da corda como 3600 kg e 330 m, respectivamente.

Observe que obter os valores da força de tensão mínima  $T_0$  não é tarefa simples. Para tal, as contas são realizadas com auxílio do *software* computacional Wolfram|Alpha (2020) <sup>3</sup>. Para determinar os valores  $x = T_0$  digitamos o código

$$60 = (x/p) * (\cosh(150 * p/x) - 1) \text{ for } p = q$$

trocando apenas o “ $q$ ” acima pelos valores de  $p$  encontrados anteriormente. Cada valor de  $p$  calculado na coluna anterior gera um valor de  $T_0$ , colocado na quarta coluna. Consideramos ainda que o par ordenado  $(x, y) = (150, 60)$  satisfaz a equação acima, de acordo com nosso sistema de coordenadas, pois é a localização de uma das extremidades da corda.

Por fim, calculamos a razão  $\frac{T_0}{p}$  na quinta e sexta colunas com aproximação de quatro casas decimais e uma casa decimal, respectivamente, resultando na tabela abaixo:

Tabela 4 - Catenária Interplanetária

Catenária em Diferentes Planetas					
Planeta / Satélite	Gravidade $g$ [m/s <sup>2</sup> ]	$p$ [N/m]	$T_0$ [N]	$\frac{T_0}{p}$ [m]	$\frac{T_0}{p}$ [m]
Mercúrio	3,78	41,23636	8113,62	196,7589	196,8
Vênus	8,60	93,81818	18459,60	196,7593	196,8
Terra	9,78	106,69091	20992,40	196,7590	196,8
Lua	1,60	17,45455	3434,34	196,7591	196,8
Marte	3,72	40,58182	7984,83	196,7588	196,8
Júpiter	22,90	249,81818	49153,90	196,7587	196,8
Saturno	9,05	98,72727	19425,50	196,7592	196,8
Urano	7,77	84,76364	16678,00	196,7589	196,8
Netuno	11,00	120,00000	23611,10	196,7592	196,8
Plutão	0,50	5,45455	1073,23	196,7588	196,8

Fonte: O autor, 2021.

Ao observar os resultados obtidos na penúltima coluna, constatamos que os valores de  $\frac{T_0}{p}$  apresentaram diferenças abaixo de milésimos. Tal fato reforça a tese que a razão  $\frac{T_0}{p}$  não depende de  $\vec{g}$  e, por consequência, o formato da catenária não depende da aceleração da gravidade.

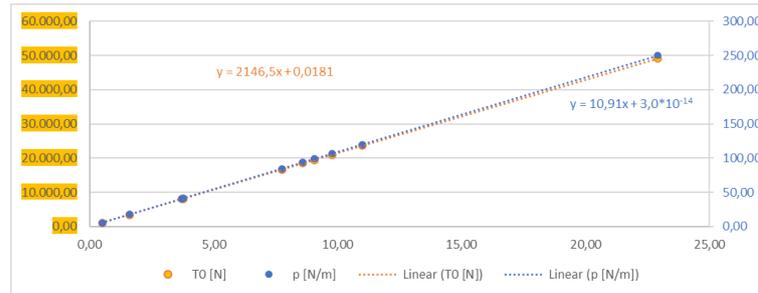
Decidimos então investigar a relação da força de tensão horizontal  $T_0$  e da densidade de força  $p$  com a aceleração da gravidade  $g$ . Como utilizamos a equação 15 para calcular os valores de  $T_0$  a partir dos valores de  $p$ , então é razoável construir um gráfico para verificar

<sup>3</sup> Para maiores informações acesse <<https://www.wolframalpha.com>>

se os valores encontrados seguem um padrão. O resultado encontra-se na figura 26.

Os pontos de cor azul têm o valor de  $g$  no eixo das abscissas e o valor de  $p$  no eixo das ordenadas à direita. Os pontos na cor laranja têm o valor de  $g$  no eixo das abscissas e o valor de  $T_0$  no eixo das ordenadas à esquerda.

Figura 26 - Relação entre os módulos da aceleração da gravidade  $\vec{g}$  [eixo horizontal], a força de tensão horizontal  $\vec{T}_0$  [eixo vertical laranja] e a densidade de força  $\vec{p}$  [eixo vertical azul].



Fonte: O autor, 2021.

Observe que mesmo utilizando escalas diferentes os pontos são quase coincidentes. Ao calcular a equação da reta que melhor aproxima os dois conjuntos de pontos obtemos as expressões  $T_0 = 2146,50g + 0,0181$  e  $p = 10,91g + 3,0 \times 10^{-14}$ .

Os coeficientes lineares  $[0,0181$  e  $3,0 \times 10^{-14}]$  das equações das retas podem ser considerados nulos quando comparados, em ordem de grandeza, aos seus respectivos coeficientes angulares  $[2146,50$  e  $10,91]$ . Assim, as equações podem ser reescritas como  $T_0 = 2146,50g$  e  $p = 10,91g$  e a razão  $\frac{T_0}{p}$  fica

$$\frac{T_0}{p} = \frac{2146,50g}{10,91g} = \frac{2146,50}{10,91} = 196,75.$$

De fato, não provamos que a razão  $\frac{T_0}{p}$  é constante em qualquer situação. Conseguimos verificar que, pelo menos no Sistema Solar, uma corda suspensa sustentando apenas seu próprio peso parece não depender da gravidade, e assim terá sempre este formato.

#### 2.4.1 Uma possível solução algébrica

Como  $T_0$  e  $g$  são constantes, então existe  $T_1$  tal que  $T_0 = gT_1$ . Além disso, o módulo do vetor densidade de força é dado por  $p = \frac{P}{s} = \frac{mg}{s}$ . Portanto, a razão  $\frac{T_0}{p}$  se torna

$$\frac{T_0}{p} = \frac{gT_1}{\frac{mg}{s}} = \frac{gT_1s}{mg} = \frac{T_1s}{m}$$

independente de  $g$ .

## 2.5 Comprimento de Arco e a Área sob a Curva

Nesta seção iremos estudar mais uma propriedade das funções hiperbólicas, mais especificamente, uma ligada ao cosseno hiperbólico.

**Proposição 2.1.** *A área sob a curva  $y = \cosh(x)$  no intervalo real  $[a, b]$  é numericamente igual ao comprimento da curva no mesmo intervalo.*

**Demonstração:** Inicialmente iremos calcular a área  $A$  sob a curva  $y = \cosh(x)$  no intervalo real  $[a, b]$ . Basta avaliar a integral abaixo com os conhecimentos adquiridos na seção 1.7.

$$A = \int_a^b y(x)dx = \int_a^b \cosh(x)dx = \sinh(b) - \sinh(a)$$

Em seguida, calculamos o comprimento  $L$  da mesma curva no intervalo real  $[a, b]$  a partir da fórmula do comprimento de arco (conforme Stewart (2013) página 489):

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[y'(x)]^2 + 1}dx = \int_a^b \sqrt{[\cosh'(x)]^2 + 1}dx = \int_a^b \sqrt{[\sinh(x)]^2 + 1}dx = \\ &= \int_a^b \sqrt{[\cosh(x)]^2}dx = \int_a^b |\cosh(x)|dx = \int_a^b \cosh(x)dx = \sinh(b) - \sinh(a) \end{aligned}$$

Observe que  $A = \sinh(b) - \sinh(a) = L$  como queríamos demonstrar. ■

Com a demonstração da proposição anterior segue, de imediato, que a função  $f(x) = \cosh(x)$  é solução da equação diferencial  $y(x) = \sqrt{[y'(x)]^2 + 1}$ , pois ao integrarmos os dois lados com respeito a  $x$  teremos, respectivamente, as fórmulas da área sob a curva e do comprimento de arco. Contudo, podemos constatar também que a solução verificada não é única, pois a função constante  $f(x) = 1$  também goza da mesma propriedade.

A fim de investigar a existência de outras soluções e, caso existam, suas naturezas vide a seguinte proposição.

**Proposição 2.2.** *As soluções da equação diferencial  $y(x) = \sqrt{[y'(x)]^2 + 1}$ , além da solução trivial  $y = 1$ , são cossenos hiperbólicos da forma  $y = \cosh(x + C)$ .*

**Demonstração:** Consideremos uma função  $y(x) \neq 1$ . Inicialmente, isole  $y'(x)$

$$y(x) = \sqrt{[y'(x)]^2 + 1}$$

$$y^2 = [y']^2 + 1$$

$$y^2 - 1 = [y']^2$$

$$y' = \sqrt{y^2 - 1}$$

e faça a separação das variáveis

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = dx.$$

Observe que o denominador é diferente de zero visto que estamos considerando  $y(x) \neq 1$ . Integre ambos os lados com respeito a  $y$  e  $x$ , respectivamente:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \int dx$$

Para resolução da integral com relação a  $y$  façamos uma mudança de variáveis, via

$$u = \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{e} \quad du = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Como  $y = \sqrt{u^2 + 1}$ , temos ainda

$$du = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \frac{\sqrt{u^2 + 1}dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

de tal forma que as integrais se reescrevem como

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \int dx$$

A integral do lado esquerdo da equação está desenvolvida passo a passo no apêndice B.2. Assim,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \int dx$$

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = x + C$$

e desfazendo a substituição

$$\ln(\sqrt{y^2 - 1} + y) = x + C.$$

O lado esquerdo da equação é justamente a definição da função arco cosseno hiperbólico, conforme a seção 1.3.1. Com isso,

$$\ln(\sqrt{y^2 - 1} + y) = x + C$$

$$\operatorname{arcosh}(y) = x + C$$

$$y = \cosh(x + C)$$

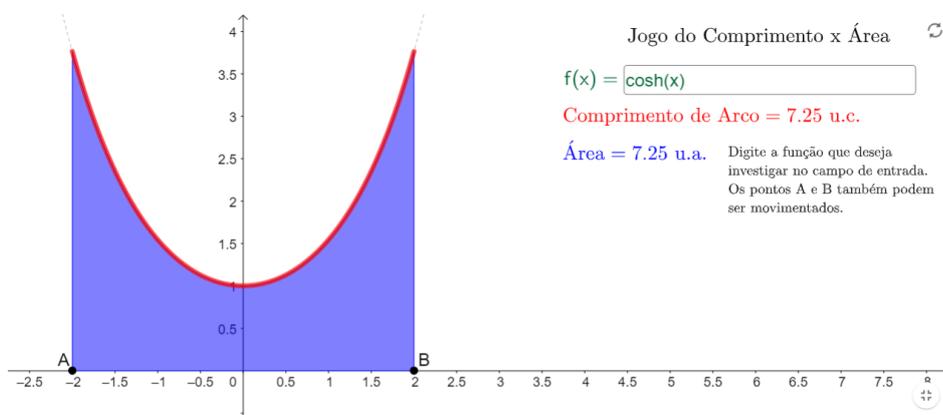
Portanto, as soluções formam uma família de funções cosseno hiperbólico a menos

de uma constante  $C$ , que representa o deslocamento horizontal do gráfico.



Para melhor fixação da propriedade do cosseno hiperbólico, descrita nesta seção, criamos uma atividade no Geogebra (veja a figura 27) que será explorada na sequência didática proposta no Capítulo 3. Chamaremos esta atividade de Jogo do Comprimento x Área, podendo ser encontrada no endereço <<https://www.geogebra.org/m/ajrwpfs2>>. A proposta do jogo em si não é complexa, por isso, em turmas mais avançadas, a própria construção/programação do jogo será mais enriquecedora.

Figura 27 - Jogo do Comprimento x Área



Fonte: O autor, 2021.

## 2.6 Minimizando a Energia Potencial Gravitacional

“Parece razoável que, elevando a pedra no ar, você esteja armazenando energia no sistema, que será mais tarde convertida em energia cinética quando a pedra cair. Esse exemplo aponta para a ideia de que deve existir uma energia associada com a posição dos corpos em um sistema. Esse tipo de energia fornece o potencial ou a possibilidade da realização de um trabalho; quando uma pedra é elevada no ar, existe um potencial para um trabalho sobre ela ser realizado pela força da gravidade; porém, isso só ocorre quando a pedra é liberada. Por esse motivo, a energia associada com a posição denomina-se energia potencial. Nossa discussão sugere que existe uma energia potencial associada com o peso do corpo e com sua altura acima do solo, chamada de energia potencial gravitacional.” (YOUNG; FREEDMAN, 2016)

A citação acima, retirada do livro de Física 1 de Young e Freedman (2016), chama a atenção para um tipo de energia que está associada à altura de um objeto com relação ao solo. Esta energia será chamada de energia potencial gravitacional.

Segundo o dicionário online Michaelis (2021), energia é a capacidade que um corpo tem de realizar trabalho, entendendo-se por trabalho o deslocamento do ponto de aplicação de uma força.

Em nossos estudos, o corpo que armazena energia é a corda suspensa e cada ponto da corda possui uma capacidade de realizar trabalho. A realização do trabalho, de fato, seria o deslocamento daquele ponto suspenso até o solo através da ação da força peso.

Na seção 2.2 deduzimos a equação cartesiana da catenária, que representa um cabo suspenso pelas extremidades sustentando apenas o próprio peso. Nesta seção, pretendemos demonstrar que a catenária é a curva cujos pontos possuem a menor energia potencial gravitacional. Em outras palavras, a catenária é a curva que minimiza a energia do sistema.

Para tal, precisamos definir a energia potencial gravitacional em cada ponto da corda.

**Definição 22** (Energia Potencial Gravitacional). *Considere um corpo puntiforme de massa  $m$  a uma altura  $h$  do solo sujeito à aceleração da gravidade  $\vec{g}$ . Sua energia potencial gravitacional, denotada por  $U_p$ , é a grandeza escalar descrita como*

$$U_p = mgh$$

e sua unidade no Sistema Internacional de Medidas é o Joule  $J$  ou Newton-metro  $Nm$ .

A definição acima se aplica a um corpo puntiforme<sup>4</sup>. Para estendermos a definição a um corpo extenso<sup>5</sup>, vamos calcular a energia potencial gravitacional em cada um de

---

<sup>4</sup> Todo corpo que pode ser considerado adimensional, representado por um ponto no plano ou espaço.

<sup>5</sup> Todo corpo que não pode ser considerado puntiforme.

seus pontos e efetuar o somatório das energias encontradas. Tal procedimento na prática se caracteriza pela análise em um elemento infinitesimal e posterior integração.

Considere um elemento infinitesimal da corda. Este ponto possui massa  $dm$  e está a uma altura  $h = y(x)$ , onde  $x$  é a abscissa do ponto pertencente à corda, no sistema de coordenadas cartesianas. Assim, a energia potencial gravitacional neste elemento infinitesimal de corda é dada por

$$dU_p = dm g y(x).$$

O cabo é homogêneo e, portanto, sua densidade  $\delta$  é constante. A densidade  $\delta$  é a razão entre a massa e o comprimento da corda.

$$\delta = \frac{m}{s} = \frac{dm}{ds}$$

$$dm = \delta ds$$

Lembrando que a partir equação 12 podemos isolar o elemento infinitesimal de corda  $ds$ .

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx = \sqrt{(y')^2 + 1} dx$$

Assim, a energia potencial gravitacional em um elemento infinitesimal de corda pode ser reescrita em função de  $x$ ,  $y(x)$  e  $y'(x)$ , via

$$dU_p = dm g y(x) = \delta ds g y(x) = \delta g y(x) \sqrt{(y'(x))^2 + 1} dx$$

Integrando ambos os lados com relação a  $x$ , onde  $x$  varia no intervalo  $[-a, a]$ , encontraremos a energia potencial gravitacional total da corda suspensa:

$$U_p = \delta g \int_{-a}^a y(x) \sqrt{(y'(x))^2 + 1} dx$$

Observe ainda que

$$\delta g = \frac{m}{s} g = \frac{P}{s} = p$$

onde  $p$  é o módulo do vetor densidade de força definido em 19. Portanto,

$$U_p = p \int_{-a}^a y(x) \sqrt{(y'(x))^2 + 1} dx$$

O problema desta seção pode se resumir na proposição abaixo.

**Proposição 2.3.** *A catenária é a curva cuja energia potencial gravitacional total  $U_p$  é mínima.*

**Demonstração:** Perceba que o problema de minimizar  $U_p$  se resume a minimizar a

integral

$$J(x, y, y') = \int_{-a}^a y(x) \sqrt{(y'(x))^2 + 1} dx.$$

Para solução deste problema recorreremos à Identidade de Beltrami (BRUNT, 2004), um caso especial da Equação de Euler-Lagrange, estudada no Cálculo das Variações, que é obtida quando  $J(x, y, y')$  não depende explicitamente de  $x$ , como é o nosso caso. Seja

$$L(y, y') = y(x) \sqrt{(y'(x))^2 + 1}$$

o integrando que queremos minimizar. A Identidade de Beltrami nos diz que

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C$$

onde  $C$  é uma constante. Desenvolvendo a identidade acima no caso em questão, temos

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = y \sqrt{(y')^2 + 1} - y' \frac{y y'}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = C$$

$$y \frac{(y')^2 + 1}{\sqrt{(y')^2 + 1}} - \frac{y (y')^2}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = C$$

$$\frac{y(y')^2 + y - y(y')^2}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = C$$

$$\frac{y}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = C$$

$$y = C \sqrt{(y')^2 + 1}$$

No caso em que  $C = 0$ , a única solução será a função  $y = 0$ . Este é um caso trivial em que todos os pontos da corda estão no solo e a energia potencial gravitacional total é nula. Consideremos o caso em que  $C \neq 0$ . Isolando  $y'(x)$  na última equação, temos

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}$$

Separando as variáveis para resolver a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}} = dx$$

e integrando os membros com relação a  $y$  e  $x$ , respectivamente, temos

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}} = \int dx$$

A integral do membro esquerdo está resolvida em detalhes no final da seção 2.5. Resultando em

$$C \ln \left( \frac{\sqrt{y^2 - c^2} + y}{C} \right) = x + K$$

onde o lado esquerdo, pela definição 12, é a função arco cosseno hiperbólico. Assim,

$$C \ln \left( \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1} + \frac{y}{C} \right) = x + K$$

$$\operatorname{arcosh} \left( \frac{y}{C} \right) = \frac{x + K}{C}$$

$$\frac{y}{C} = \cosh \left( \frac{x + K}{C} \right)$$

$$y = C \cosh \left( \frac{x + K}{C} \right)$$

Portanto, a curva que minimiza a energia potencial gravitacional total de um sistema é descrita pelo cosseno hiperbólico, cujo gráfico é uma catenária. ■

O Cálculo das Variações é uma área da Matemática que busca máximos e mínimos de funções contínuas definidas sobre um espaço funcional (domínio composto por funções). Além de determinar a curva com menor energia potencial, esta área detém alguns problemas históricos. O problema isoperimétrico consiste em determinar a curva que possui área máxima dado perímetro fixo. Outro é o clássico problema da braquistócrona, que consiste em encontrar a curva que minimiza o tempo para um objeto ir de um ponto mais alto a um ponto mais baixo somente com a aceleração da gravidade. O leitor que se interessar por estes problemas pode consultar os livros *The Calculus of Variations* de Brunt (2004) e *Methods of Mathematical Physics 1* de Courant e Hilbert (2008).

Ao final desta seção determinaremos mais uma propriedade da curva catenária: esta minimiza a energia potencial gravitacional total de um corpo.

## 2.7 Lugar Geométrico do Foco de uma Parábola Rolante

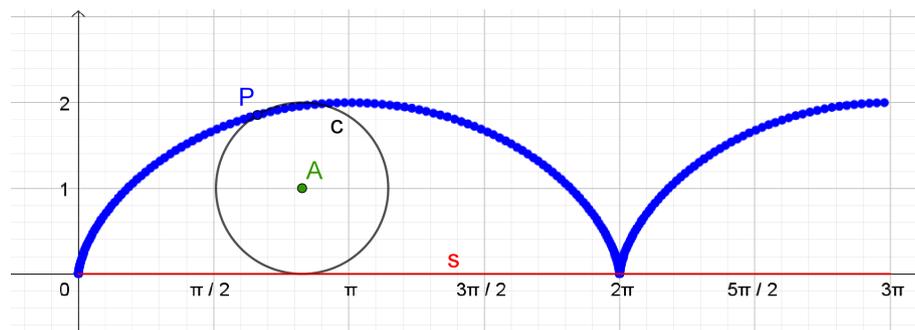
Uma das propriedades mais surpreendentes das catenárias e parábolas vem da Geometria Diferencial e tem relação com Curvas de Rolamento ou Roletas (*Roulettes*). Em seu livro *A Book of the Curves*, Lockwood (1967) define uma roleta como sendo

[...] uma curva que rola, sem deslizar, ao longo de outra curva fixada, qualquer ponto ou reta que se move com a curva de rolamento descreve uma roleta. O lugar geométrico de um ponto pertencente à curva de rolamento é um ponto-roleta e o envelope de uma linha pertencente à curva de rolamento é uma linha-roleta. (LOCKWOOD, 1967)

**Definição 23** (Roleta). *Uma curva  $\alpha$  é denominada roleta quando é um lugar geométrico de um ponto ou reta fixados a uma curva plana  $\beta$  que rola (dita rolante) sobre uma segunda curva plana fixa  $\gamma$ , sem deslizar.*

Na figura abaixo, o cicloide faz o papel da curva  $\alpha$  da definição. A circunferência rolante  $c$  (curva  $\beta$ ) rola, sem deslizar, sobre o segmento  $s$  (curva  $\gamma$ ) no Eixo  $X$ . O ponto fixo  $P$  sobre a circunferência descreve a roleta em azul.

Figura 28 - O Cicloide é uma curva roleta



Fonte: O autor, 2021.

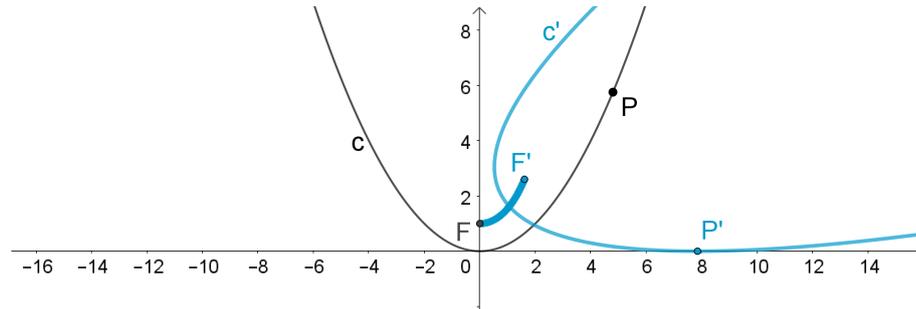
Pretendemos mostrar que, quando uma parábola rola sobre uma reta, então seu foco descreve uma catenária. Nossa demonstração é inspirada no artigo de Agarwal e Marengo (2010).

Sem perda de generalidade, considere a parábola  $c$ , de equação  $y = x^2$ , de foco no ponto  $F$  e ponto genérico  $P \in c$ . Após algum tempo, a parábola  $c$  rola sobre o Eixo  $X$ , transformando-se na parábola  $c'$  e o ponto  $P \in c$  se encontra agora na posição  $P' \in c'$ . O ponto  $F$  percorre uma curva até chegar em  $F'$ . Queremos provar que o trajeto do ponto  $F$  descreve uma curva catenária.

**Proposição 2.4.** *O lugar geométrico do foco da parábola rolante  $y = x^2$  sobre o Eixo  $X$  é uma catenária.*

**Demonstração:** Inicialmente, vamos definir alguns objetos que serão utilizados ao longo desta prova. A figura 30 representa a parábola  $c : y = x^2$  na posição inicial. O foco de  $c$

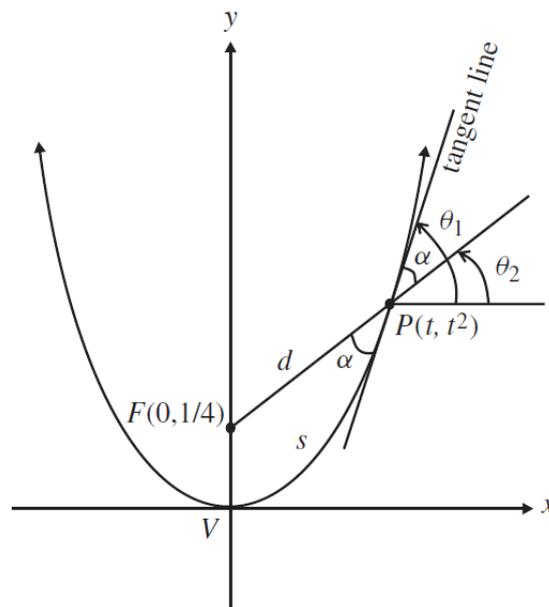
Figura 29 - Exemplo de Parábola Rolante sobre o Eixo X



Fonte: O autor, 2021.

é o ponto  $F = (0, \frac{1}{4})$  e  $P$  um ponto genérico pertencente à parábola. Assim sendo, segue que  $P$  tem coordenadas  $P = (t, t^2)$  para  $t \in \mathbb{R}$ .

Seja  $r_1$  a reta tangente a  $c$  no ponto  $P$  e  $\theta_1$  a inclinação da reta  $r_1$ . Seja ainda  $r_2$  a reta que passa pelos pontos  $F$  e  $P$  e  $\theta_2$  a inclinação da reta  $r_2$ . Por fim, denote por  $\alpha$  o ângulo agudo entre as retas  $r_1$  e  $r_2$ . Observe que  $\alpha = \theta_1 - \theta_2$  e seja  $d$  a distância entre os pontos  $F$  e  $P$ .

Figura 30 - Parábola  $c : y = x^2$  e seus elementos

Fonte: (AGARWAL; MARENGO, 2010)

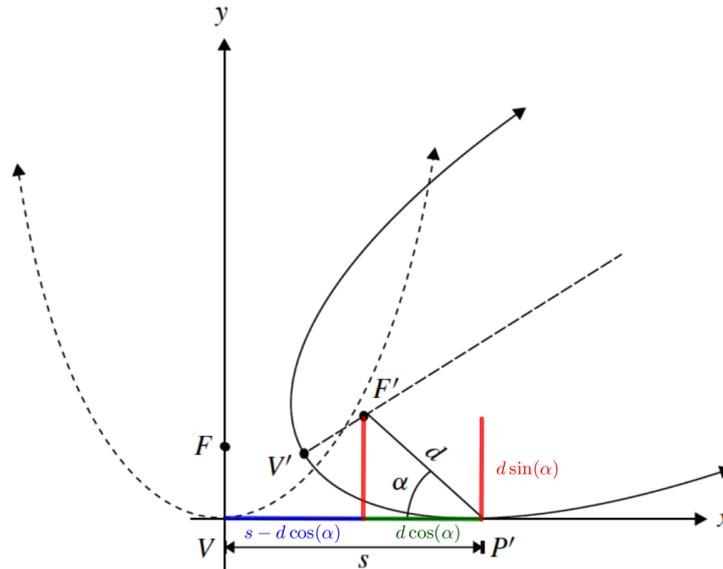
Em algum momento, após começar a rolar, o ponto  $P \in c$  vai se deslocar até o ponto  $P'$  no Eixo X. Se a parábola rola sem deslizar, então a abscissa do ponto  $P'$  será igual ao comprimento  $s$  do arco de parábola do vértice  $V = (0, 0)$  até o ponto  $P = (t, t^2)$ .

Nesta nova situação, ilustrada na figura 31, o Eixo X é a reta tangente a  $c'$  no ponto  $P'$  e a reta que passa pelos pontos  $F'$  e  $P'$  faz um ângulo  $\alpha$  como o Eixo X.

Como este é um movimento rígido, então as distâncias relativas entre os pontos

não se alteram e, portanto,  $d$  também é a distância entre os pontos  $F'$  e  $P'$ .

Figura 31 - Parábolas  $c$  e  $c'$



Fonte: (AGARWAL; MARENGO, 2010). Adaptado.

Com o exposto anteriormente estamos aptos a escrever o ponto  $F'$  em termos de  $d$ ,  $\alpha$  e  $s$ . Em seguida, escreveremos estes termos em função do parâmetro  $t$  e, por fim, escreveremos  $F'$  em termos de  $t$ . Pela figura 31 temos que as coordenadas de  $F'$  são

$$F' = (x(t), y(t)) = (s - d \cos(\alpha), d \sin(\alpha))$$

Primeiro vamos determinar o valor de  $s$ . Para tal, lembremos que  $s$  é o comprimento do arco de parábola do vértice  $V = (0, 0)$  até o ponto  $P = (t, t^2)$  e pode ser descrito pela integral abaixo, cujo desenvolvimento passo a passo se encontra no apêndice B.3.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^t \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^t \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{2t\sqrt{1 + 4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1 + 4t^2})}{4}$$

Para determinar  $d$ , utilizaremos a fórmula da distância entre dois pontos. No caso, os pontos são  $F = (0, \frac{1}{4})$  e  $P = (t, t^2)$ .

$$d = d(F, P) = \sqrt{(t - 0)^2 + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{t^2 + t^4 - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{16}} =$$

$$d = \sqrt{t^4 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = t^2 + \frac{1}{4}$$

Observe que o radicando é sempre positivo.

Por fim, para determinar o ângulo  $\alpha$  bastaria obter a equação da reta que passa pelos pontos  $F'$  e  $P'$ , mas como ainda não sabemos as coordenadas de  $F'$  em função de  $t$  não podemos descrever tal reta ainda. Para resolver o problema, vamos encontrar as equações das retas  $r_1$  e  $r_2$  como ilustradas na figura 30. Ao final, usaremos o fato de que  $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ .

Como a reta  $r_1$  é tangente a parábola  $y = x^2$  no ponto  $P = (t, t^2)$  então sua inclinação é a derivada de  $y$  calculada em  $P$ , portanto

$$\tan(\theta_1) = y'(t) = 2t.$$

A reta  $r_2$  passa pelo ponto  $F = (0, \frac{1}{4})$ , então seu coeficiente linear é  $\frac{1}{4}$ . Como  $r_2$  também passa pelo ponto  $P = (t, t^2)$ , então sua inclinação  $\theta_2$  pode ser expressa como

$$\tan(\theta_2) = \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{t - 0} = \frac{4t^2 - 1}{4t}.$$

Para determinar  $\alpha$ , vamos utilizar a fórmula da soma dos arcos para tangente:

$$\tan(\alpha) = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)} = \frac{2t - \frac{4t^2-1}{4t}}{1 + 2t\left(\frac{4t^2-1}{4t}\right)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{8t^2}{4t} - \frac{4t^2-1}{4t}}{\frac{4t}{4t} + 2t\left(\frac{4t^2-1}{4t}\right)} = \frac{8t^2 - 4t^2 + 1}{4t + 8t^3 - 2t} = \frac{4t^2 + 1}{2t(4t^2 + 1)} = \frac{1}{2t}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{2t}$$

Podemos agora determinar os valores de  $\sin(\alpha)$  e  $\cos(\alpha)$  a partir da  $\tan(\alpha)$ .

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{2t} \rightarrow 2t \sin(\alpha) = \cos(\alpha)$$

Pela relação trigonométrica fundamental, concluímos que

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin^2(\alpha) + 4t^2 \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{4t^2 + 1}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

e que

$$\cos(\alpha) = 2t \sin(\alpha) = \frac{2t}{\sqrt{4t^2 + 1}}.$$

Agora como temos  $s$ ,  $d$  e  $\alpha$  em função de  $t$ , voltamos às expressões para o cálculo de  $F'$  em termos de  $t$ :

$$F' = (x(t), y(t)) = (s - d \cos(\alpha), d \sin(\alpha))$$

Calculemos primeiro  $x(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= s - d \cos(\alpha) \\ x(t) &= \frac{2t\sqrt{1+4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1+4t^2})}{4} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}\right) \\ x(t) &= \frac{2t\sqrt{1+4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1+4t^2})}{4} - \left(\frac{4t^2+1}{4}\right) \left(\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}\right) \\ x(t) &= \frac{2t\sqrt{1+4t^2}}{4} + \frac{\ln(2t + \sqrt{1+4t^2})}{4} - \frac{2t\sqrt{4t^2+1}}{4} \\ x(t) &= \frac{\ln(2t + \sqrt{4t^2+1})}{4} \\ e^{4x} &= 2t + \sqrt{4t^2+1} \\ e^{4x} - 2t &= \sqrt{4t^2+1} \end{aligned}$$

Já a expressão para  $y(t)$  é expressa abaixo.

$$\begin{aligned} y(t) &= d \sin(\alpha) \\ y(t) &= \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} \\ y(t) &= \left(\frac{4t^2+1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} = \frac{\sqrt{4t^2+1}}{4} \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração, vamos encontrar uma relação direta entre  $x$  e  $y$ , eliminando o parâmetro  $t$ . Isto nos dará a curva percorrida por  $F'$ . Assim,

$$\begin{aligned} 4y &= \sqrt{4t^2+1} \\ 4y &= e^{4x} - 2t \\ e^{4x} - 4y &= 2t \end{aligned}$$

elevando os dois membros ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} (e^{4x} - 4y)^2 &= (2t)^2 \\ e^{8x} - 8ye^{4x} + 16y^2 &= 4t^2 \end{aligned}$$

somando uma unidade aos dois membros, temos

$$e^{8x} - 8ye^{4x} + 16y^2 + 1 = 4t^2 + 1$$

$$e^{8x} - 8ye^{4x} + 16y^2 + 1 = 16y^2$$

$$e^{8x} - 8ye^{4x} + 1 = 0$$

$$e^{8x} + 1 = 8ye^{4x}$$

$$y = \frac{e^{8x} + 1}{8e^{4x}}$$

$$y = \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{8} = \frac{1}{4} \frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} = \frac{\cosh(4x)}{4}$$

Portanto, verifica-se que o lugar geométrico dos pontos  $F'$  descreve uma catenária.

Nesta seção, intencionamos provar que o lugar geométrico do foco de uma parábola rolante é uma catenária. No exemplo ilustrativo, a parábola  $y = x^2$  de foco  $F = (0, \frac{1}{4})$  rolou, sem deslizar, sobre o Eixo X. Conseguimos provar que o lugar geométrico de  $F$  é a curva  $y = \frac{\cosh(4x)}{4}$ .

Para confecção desta seção foram consultados também alguns livros tais como de *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica* de Abbena, Salamon e Gray (2017), *Curves and Their Properties* de Yates (1974) e *A Book of the Curves* de Lockwood (1967) que deixamos como sugestão de consulta para o leitor.

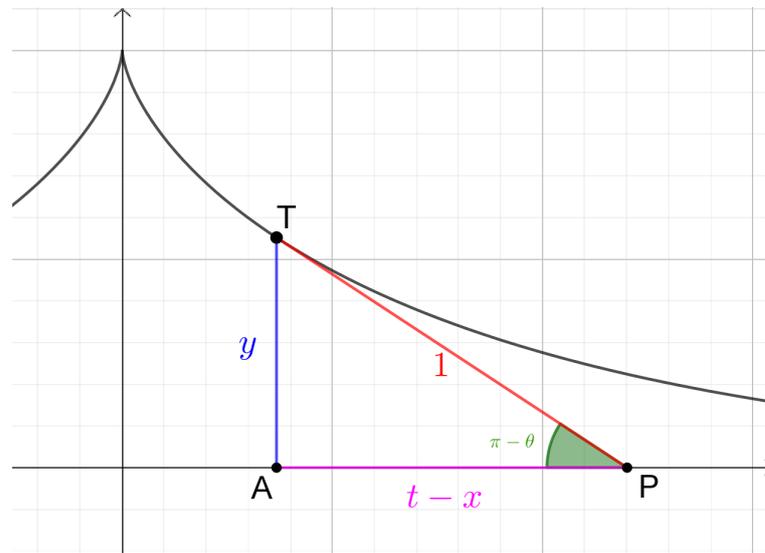
## 2.8 Catenária e Tractriz

Existem diversas maneiras de se encontrar novas curvas a partir de antigas. Na seção anterior, vimos que as roletas são obtidas quando uma curva rola sobre outra sem deslizar. Nesta seção, abordaremos outra propriedade da catenária, mas desta vez ela estará acompanhada de uma nova curva, a tractriz. Veremos que esta nova curva também pode ser descrita em termos das funções hiperbólicas, aumentando assim, nosso acervo de aplicações. A conexão entre estas duas curvas se dará pelos conceitos de evoluta e involuta de uma curva. Iniciaremos esta seção definindo os objetos aqui enunciados e depois verificaremos a relação entre eles.

**Definição 24** (Tractriz Unitária). *A Tractriz Unitária é a curva plana  $\alpha$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que seus pontos  $T(t) = (x(t), y(t))$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , satisfazem as seguintes propriedades:*

1. A distância entre os pontos  $T(t)$  e  $P = (t, 0)$  é constante igual a 1;
2. A reta  $TP$  é tangente a  $\alpha$  no ponto  $T(t)$ ; e
3. O ponto  $(0, 1) \in \alpha$ .

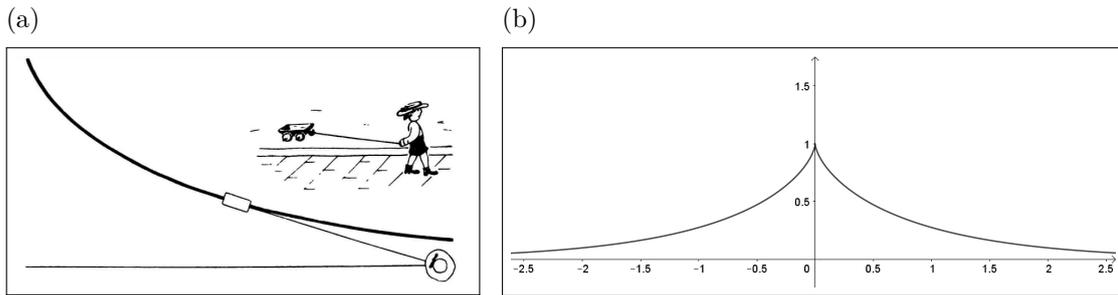
Figura 32 - Parametrização da Tractriz



Fonte: O autor, 2021.

Para ajudar a ilustrar a construção de uma tractriz Steinhaus (1999) faz uma analogia com um menino puxando um carrinho de brinquedo, como pode ser visto na figura 33(a). Assim, ele considera uma criança inicialmente na origem do sistema de coordenadas segurando, por um cabo rígido, um carrinho de brinquedo que se encontra no ponto  $(0, 1)$ . Conforme o menino se desloca ao longo do eixo X o carrinho vai sendo tracionado descrevendo a curva tractriz. Seu formato final pode ser visto na figura 33(b).

Figura 33 - A Tractriz



Legenda: (a) Ilustração da Formação de uma Tractriz e (b) Curva Tractriz.

Fonte: (a) (STEINHAUS, 1999) página 250 e (b) O autor, 2021.

**Proposição 2.5.** *A parametrização da tractriz unitária é*

$$T = (x(t), y(t)) = (t - \tanh(t), \operatorname{sech}(t))$$

para  $t \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Seja  $T = (x, y)$  um ponto qualquer pertencente à tractriz unitária,  $A = (x, 0)$  a projeção de  $T$  sobre o eixo X e  $P = (t, 0)$  um ponto sobre o eixo X tal que a reta  $TP$  é a reta tangente à tractriz no ponto  $T$ . Veja figura 32.

Observe que o ponto  $P$  é o objeto sobre o qual a parametrização se desenvolve. A posição do ponto  $T$ , em verdade, depende de  $P$  e o ponto  $A$ , de  $T$ . Note também que, no primeiro quadrante, a abscissa do ponto  $P$  é sempre maior que a abscissa do ponto  $T$  fazendo com que  $t - x > 0$ .

Sabemos que a derivada  $\frac{dy}{dx}$  da tractriz unitária num ponto qualquer  $T = (x, y(x))$  deve ser a inclinação da reta  $TP$ , que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo X. Assim, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) = -\tan(\pi - \theta) = -\frac{y}{t - x}$$

onde o denominador  $t - x$  pode ser reescrito utilizando-se o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo  $ATP$ . Assim sendo,

$$1^2 = (t - x)^2 + y^2$$

$$t - x = \sqrt{1 - y^2}$$

Portanto, a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

com valor inicial  $y(0) = 1$  será a curva tractriz. Observe que, no ponto de valor inicial,

temos  $t - x = 0$  e isto torna a derivada inexistente neste ponto. Tais condições são esperadas devido à cúspide que se forma no ponto  $(x, y) = (0, 1)$ .

Para resolver a equação diferencial acima, utilizaremos o método de separação das variáveis.

$$dx = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy$$

Integrando ambos os lados com relação a  $x$  e  $y$  respectivamente, vem

$$\int dx = -\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy$$

e, fazendo as substituições  $y = \operatorname{sech}(t)$ ,  $dy = -\tanh(t)\operatorname{sech}(t)dt$  obtemos

$$\int dx = -\int \frac{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2(t)}}{\operatorname{sech}(t)} [-\tanh(t)\operatorname{sech}(t)] dt$$

$$\int dx = \int \frac{\sqrt{\tanh^2(t)}}{\operatorname{sech}(t)} \tanh(t)\operatorname{sech}(t) dt$$

$$x + C = \int \tanh^2(t) dt = \int 1 - \operatorname{sech}^2(t) dt = t - \tanh(t)$$

Nas condições iniciais do problema  $t = 0$  está associado a  $x = 0$ , logo

$$x + C = t - \tanh(t)$$

$$0 + C = 0 - \tanh(0) = 0.$$

Portanto, a parametrização da curva tractriz, para  $t \in \mathbb{R}$ , será:

$$\boxed{T = (x(t), y(t)) = (t - \tanh(t), \operatorname{sech}(t))}$$

■

## Evoluta

Agora iremos exibir dois novos conceitos: as evolutas e involutas. Tais ideias são devidamente trabalhadas e estudadas na Geometria Diferencial e nosso objetivo é focar nas noções intuitivas que nos auxiliarão nas construções geométricas.

Tenha em mente que a involuta e evoluta são operações inversas, ou seja, a involuta de uma evoluta resulta na curva original e vice-versa. Nesta seção, iremos construir a Tractriz como a involuta de uma Catenária. Porém, como a definição rigorosa de involuta possui muito elementos específicos da Geometria Diferencial, então primeiro definiremos a evoluta e apresentaremos apenas a ideia intuitiva da involuta.

**Definição 25** (Vetor Tangente). *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável*

que, a cada  $t \in I$ , associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . O vetor

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$$

é chamado vetor tangente a  $\alpha$  em  $t$ .

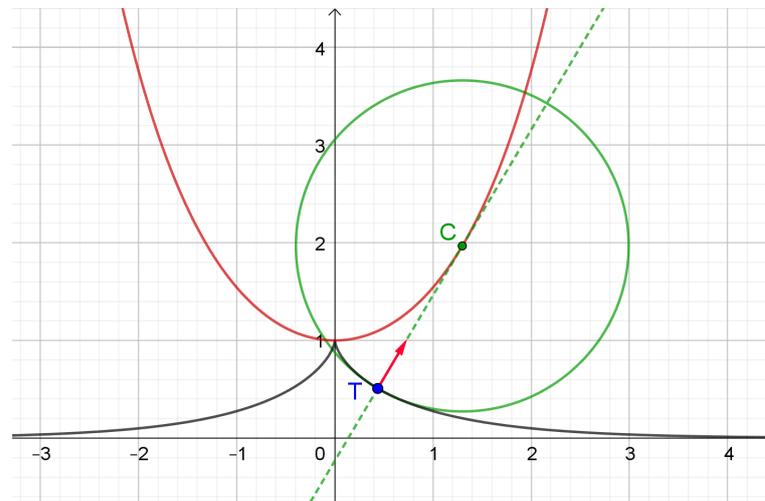
**Definição 26** (Centro de Curvatura). O ponto que está localizado na direção normal <sup>6</sup> de uma curva e a uma distância  $R$  (raio de curvatura) da curva é denominado centro de curvatura. Onde o raio de curvatura é expresso pela fórmula

$$R = \left| \frac{(1 + y')^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|$$

e a curva  $y = f(x)$ , em coordenadas cartesianas, é pelo menos duas vezes diferenciável.

**Definição 27** (Evoluta). Diz-se que a curva  $\beta$  é a Evoluta da curva  $\alpha$  se esta é o lugar geométrico de todos os centros de curvatura.

Figura 34 - A Catenária é a Evoluta da Tractriz



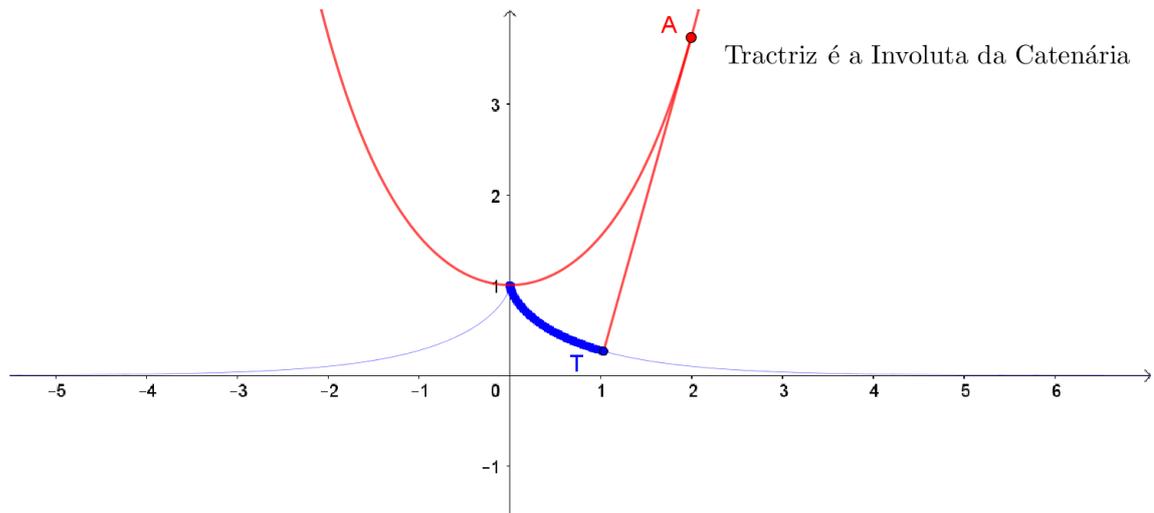
Fonte: O autor, 2021.

### Involuta - Ideia Intuitiva

Considere a função cosseno hiperbólico  $f(x) = \cosh(x)$  cujo gráfico é a catenária. Imagine que essa catenária é contornada por um barbante e este é cortado e esticado a partir do ponto  $(0, 1)$ . O caminho percorrido pela ponta solta do barbante é chamado Involuta da catenária e está ilustrado na figura 35.

<sup>6</sup> Direção normal é a direção perpendicular àquela do vetor tangente.

Figura 35 - A Tractriz é a Involuta da Catenária



Legenda: Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/ekpuzubq>>

Fonte: O autor, 2021.

Para “desembrulhar” esse barbante, tomamos um ponto qualquer  $A$  pertencente a catenária e a reta tangente  $r$  a este ponto. Constrói-se o vetor  $\vec{AT}$  sobre  $r$  iniciado no ponto  $A$  e módulo igual ao comprimento da curva catenária do ponto  $(0, 1)$  ao ponto  $A$ . Conforme o ponto  $A$  percorre a catenária o ponto  $T$  irá descrever a tractriz. Criamos a animação “Desembrulhando a Catenária” que pode ser encontrada no endereço <<https://www.geogebra.org/m/ekpuzubq>> para auxiliar o leitor.

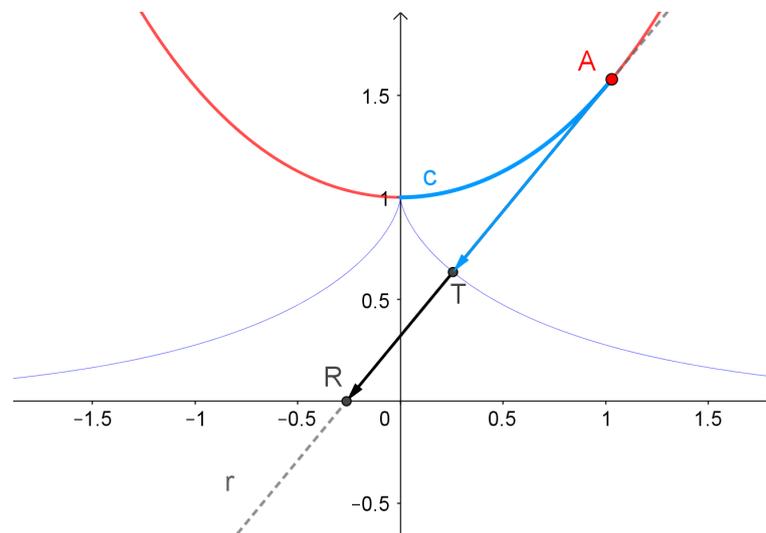
### Parametrização da Tractriz a partir da Catenária

No início desta seção construímos a parametrização da Tractriz por meio da resolução de uma equação diferencial. Contudo, vamos agora realizar a parametrização por um caminho diferente que é pensar na Tractriz como a Involuta da Catenária.

Consideraremos alguns fatos para mostrar que um ponto  $T$  na forma  $T = (t - \tanh(t), \operatorname{sech}(t))$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , é a parametrização da Tractriz, tais como:

1. O ponto  $A = (t, \cosh(t))$  pertence à Catenária.
2. A reta  $r$  é tangente à Catenária no ponto  $A$ .
3. O ponto  $R$  é a interseção de  $r$  com o eixo  $X$ .
4. O comprimento da Catenária do ponto  $(0, 1)$  até o ponto  $A$  é  $c$ .
5. O ponto  $T \in r$ , é tal que:
  - (a)  $T$  está entre  $A$  e  $R$ ;
  - (b)  $|\vec{AT}| = c$ .
6. O fator  $\lambda \in \mathbb{R}$ , é tal que  $\vec{AT} = \lambda \vec{AR}$ .

Figura 36 - Elementos da Parametrização da Tractriz a partir da Catenária



Fonte: O autor, 2021.

A Tractriz será o conjunto dos pontos  $T$  descritos acima. Para provar isso, vamos determinar as coordenadas de  $T$  em termos do parâmetro  $t$ .

Primeiramente, determinaremos a equação da reta tangente  $r$ .

$$r: y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

$$r: y = \sinh(t)(x - t) + \cosh(t)$$

$$r: y = \sinh(t)x + \cosh(t) - t \sinh(t)$$

Como  $R$  é a raiz de  $r$ , então

$$0 = \sinh(t)x + \cosh(t) - t \sinh(t)$$

$$\sinh(t)x = t \sinh(t) - \cosh(t)$$

$$x = t - \coth(t)$$

Portanto, o ponto  $R$  tem coordenadas  $R = (t - \coth(t), 0)$ . A partir de agora conseguimos determinar o vetor  $\vec{AR}$  e o fator  $\lambda$  tal que  $\vec{AT} = \lambda \vec{AR}$ , visto que  $|\vec{AT}| = c = \int_0^t \sqrt{(y')^2 + 1} dx$ .

$$c = \int_0^t \sqrt{(y')^2 + 1} dx$$

$$c = \int_0^t \sqrt{(\sinh(x))^2 + 1} dx$$

$$c = \int_0^t \sqrt{(\cosh(x))^2} dx$$

$$c = \int_0^t \cosh(x) dx = \sinh(t)$$

O vetor  $\vec{AR}$  e seu módulo são

$$\vec{AR} = R - A = (t - \coth(t), 0) - (t, \cosh(t)) = (-\coth(t), -\cosh(t))$$

$$|\vec{AR}| = \sqrt{\coth^2(t) + \cosh^2(t)} = \sqrt{\frac{\cosh^2(t)}{\sinh^2(t)} + \cosh^2(t)} = \sqrt{\frac{\cosh^2(t)(1 + \sinh^2(t))}{\sinh^2(t)}}$$

$$|\vec{AR}| = \sqrt{\frac{\cosh^2(t) \cosh^2(t)}{\sinh^2(t)}} = \frac{\cosh(t) \cosh(t)}{\sinh(t)} = \coth(t) \cosh(t)$$

O cálculo de  $\lambda$  se dá por

$$\lambda = \frac{|\vec{AT}|}{|\vec{AR}|} = \frac{\sinh(t)}{\coth(t) \cosh(t)} = \frac{\tanh(t)}{\coth(t)} = \tanh^2(t)$$

Agora podemos determinar o vetor  $\vec{AT}$  como sendo

$$\vec{AT} = \lambda \vec{AR} = \tanh^2(t)(-\coth(t), -\cosh(t)) = (-\tanh(t), -\tanh(t) \sinh(t))$$

Por fim, a parametrização do ponto  $T$  pertencente à Tractriz será dado por

$$T = A + \vec{AT}$$

$$T = (t, \cosh(t)) + (-\tanh(t), -\tanh(t) \sinh(t))$$

$$T = (t - \tanh(t), \cosh(t) - \tanh(t) \sinh(t))$$

$$T = \left( t - \tanh(t), \cosh(t) - \frac{\sinh^2(t)}{\cosh(t)} \right)$$

$$T = \left( t - \tanh(t), \frac{\cosh^2(t) - \sinh^2(t)}{\cosh(t)} \right)$$

$$T = \left( t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)} \right)$$

$$\boxed{T = (t - \tanh(t), \operatorname{sech}(t))}$$

Percebe-se que a construção da involuta de uma Catenária resulta na curva Tractriz. Acreditamos que estas contas possam ser usadas de exemplo em uma aula de Funções Hiperbólicas no Ensino Superior, mas também que uma construção no Geogebra seja suficiente para uma aula no Ensino Médio que vise falar de novas curvas, introduzindo assim as ideias de involuta e evoluta de uma curva.

### 3 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, temos como objetivo organizar e propor ao docente as diretrizes de uma sequência didática, a fim de nortear o ensino das funções hiperbólicas em sala de aula. Schneuwly e Dolz-Mestre (2004) entendem uma *sequência didática* como um conjunto de atividades escolares organizadas sistematicamente com a finalidade de ajudar o aluno a dominar melhor o conteúdo.

Com essa sequência não pretendemos fornecer nenhuma “fórmula mágica” ou “receita infalível” para ensinar funções hiperbólicas ou qualquer outro conteúdo. Esperamos que o docente tome as sugestões aqui apresentadas como inspirações e seja capaz de inseri-las e adaptá-las à sua realidade de sala de aula.

As tarefas e atividades aqui expostas visarão abranger três dimensões: a dimensão conceitual, procedimental e atitudinal, conforme os trabalhos de Coll et al. (2000). Por sua vez, os objetivos da aprendizagem serão apresentados, sempre que possível, respeitando o nível cognitivo dos alunos. Para melhor nos organizarmos, dividiremos nossas propostas em três níveis, a saber: básico, intermediário e avançado.

O nível básico é o primeiro nível de entendimento do conteúdo, visando os alunos do Ensino Fundamental. Serão apresentados objetivos mais modestos, como conhecer, reconhecer, pensar sobre, usar e descrever as situações iniciais apresentadas.

O nível intermediário é o segundo nível de entendimento do conteúdo, visando os alunos do Ensino Médio. Neste momento, os alunos estão preparados para atividades mais procedimentais, tais como: relacionar, organizar, planejar, manipular e produzir.

O nível avançado é o terceiro nível de entendimento do conteúdo, visando os alunos do Ensino Superior. Espera-se que um aluno nessa situação seja capaz de absorver atividades de qualquer nível, em especial aquelas que demandem maior complexidade cognitiva. Na dimensão atitudinal, o aluno está preparado para atividades que envolvam generalizar, interiorizar e demonstrar os conceitos e propriedades aprendidas.

Vale ressaltar que a separação em níveis é meramente organizacional e não limita nem impede que um aluno do Ensino Fundamental possa avançar, por exemplo, para o nível intermediário ou até mesmo o nível avançado. Isso respeita a individualidade e garante que cada aluno possa evoluir em seu próprio ritmo. O papel do professor deve ser entendido como aquele a garantir que seus alunos tenham a oportunidade de se depararem sempre com novos desafios e maneiras de pensar.

Também é importante destacar que um estudante do Ensino Superior pode, naturalmente, nunca ter ouvido falar em tais funções e por isso pode e deve iniciar sua aprendizagem pelo nível básico. Presumimos que, neste caso, o estudante possa avançar com certa rapidez para o nível avançado.

## A Sequência

Em princípio não haverá orientação sobre um modelo ou formatação pré-estabelecida para as sequências didáticas. Vamos nos ater menos à parte estética/estrutural e focar em diretrizes gerais de trabalho. Nossa sequência será composta de quatro momentos, a saber: a apresentação do projeto, a produção inicial, as atividades e a produção final. Em seguida, falaremos com mais detalhes sobre cada uma delas.

### **1º Momento:** Apresentação do Projeto

A apresentação do projeto é o momento inicial da sequência didática, com duração próxima de vinte minutos. Nesse momento, o professor deverá expor em linhas gerais quais os objetivos do trabalho que se inicia, quantas aulas aproximadamente serão despendidas, o que os alunos irão aprender. Também é o momento oportuno para se fazer uma introdução histórica do tema das Funções Hiperbólicas, mais especificamente da Catenária, através do antigo problema de descrever as equações de uma corda suspensa.

### **2º Momento:** Produção Inicial

Para posteriormente avaliar o aprendizado dos alunos é necessário ter um referencial anterior, ou seja, deve-se fazer uma produção inicial de conhecimento. O objetivo é avaliar o que os alunos sabem sobre este novo tema. Essa produção pode ser oral, mas é interessante que o professor peça aos alunos que a registrem de alguma maneira.

O professor, munido apenas de um pedaço de barbante com comprimento suficientemente grande o pendurará de forma que adquira o formato de uma catenária. Pode-se esticar mais ou relaxar mais o barbante (ou seja, ter uma razão flecha-vão maior ou menor) para investigar diferentes situações e pedir que seus alunos comentem ou escrevam sobre o que veem. Com um pouco de sorte, algum aluno se anima a citar a parábola, e neste momento oficialmente começamos a trabalhar.

Eis a primeira hipótese, talvez um barbante pendurado seja uma parábola. O professor pode ainda pedir que seus alunos identifiquem alguma situação no cotidiano em que se deparam com cordas penduradas. Algumas respostas, como varal de roupas, fiação elétrica e colares são mais propensas a aparecer. Nessa hora, os alunos sempre podem nos surpreender. Esse momento se conecta diretamente com a Atividade 1, que iremos expor mais à frente.

### **3º Momento:** Atividades

Neste terceiro momento, encontramos o núcleo da sequência didática. Este núcleo é formado por um compêndio de construções feitas no *software* Geogebra que, apesar de simples, têm a importante missão de proporcionar os gatilhos mentais e dar suporte ao professor no debate das principais questões norteadoras do assunto das Funções Hiperbó-

licas.

Como orientação geral, vale lembrar que todos os arquivos podem ser baixados gratuitamente, permitindo assim ao professor visualizar os protocolos de construção para modificar, adaptar ou aperfeiçoar conforme sua necessidade.

Além disso, reprogramar os jogos no Geogebra juntamente com os alunos é recomendado para todas as atividades. Pode-se sugerir uma série de vídeos ou preparar um minicurso de Geogebra para que os alunos tirem maior proveito das atividades e não se comportem como meros usuários.

### Atividade 1 - Corda Suspensa

Endereço: <<https://www.geogebra.org/m/twyhnnks>>

Ao apresentar um novo conteúdo, independentemente do nível dos alunos, é importante que se faça uma ambientação, contextualização e familiarização com este novo objeto de estudo. Queremos que nossos alunos conheçam as funções hiperbólicas, suas principais propriedades e aplicações.

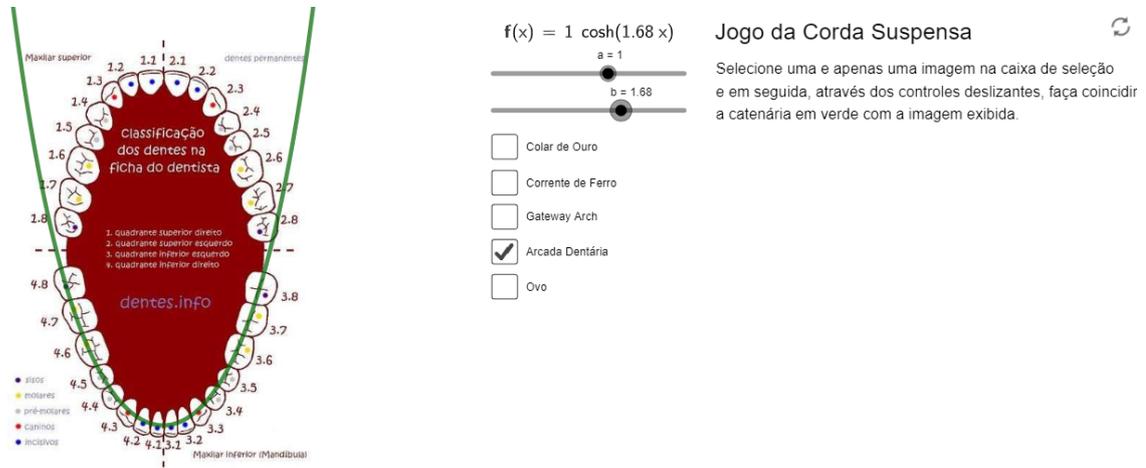
Como vimos ao longo deste trabalho a função cosseno hiperbólico é a aquela que modela uma corda suspensa sustentando apenas seu próprio peso. Contudo, talvez primeiramente seja mais importante convencer os nossos alunos de que esta é uma hipótese plausível do que apenas realizar diversas contas e demonstrações matemáticas imediatamente.

O nível da atividade é predominantemente básico, mas vale lembrar mais uma vez que este fato não limita nem impede que seja abordada em qualquer turma. Contudo, uma tarefa predominantemente de nível intermediário ou avançado nem sempre pode ser aplicada a alunos em nível básico. Nesta atividade pode-se sugerir ainda aos alunos que tirem fotografias de cordas suspensas em seu cotidiano ou busquem imagens na própria *internet* e utilizem-nas no Geogebra para modelar as catenárias, descobrir suas equações e testar suas hipóteses.

São objetivos do Nível Básico: **conhecer** a função real  $f(x) = a \cosh(bx) + c$  e **investigar** sobre como os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  influenciam no formato final do gráfico, e **reconhecer** que a função cosseno hiperbólico modela algumas curvas da natureza.

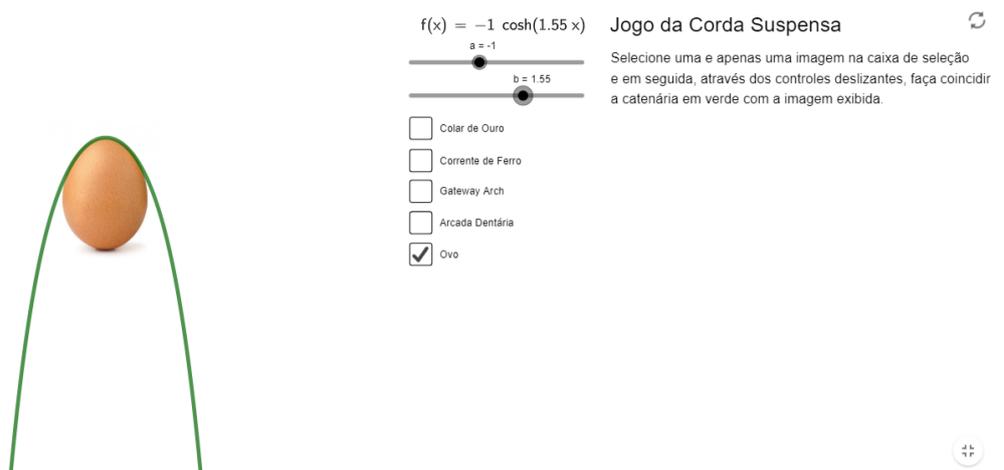
São objetivos do Nível Intermediário: **relacionar** os exemplos do jogo com outros ainda não expostos e **produzir** seus próprios exemplos e inseri-los no jogo.

Figura 37 - Modelagem da Arcada Dentária



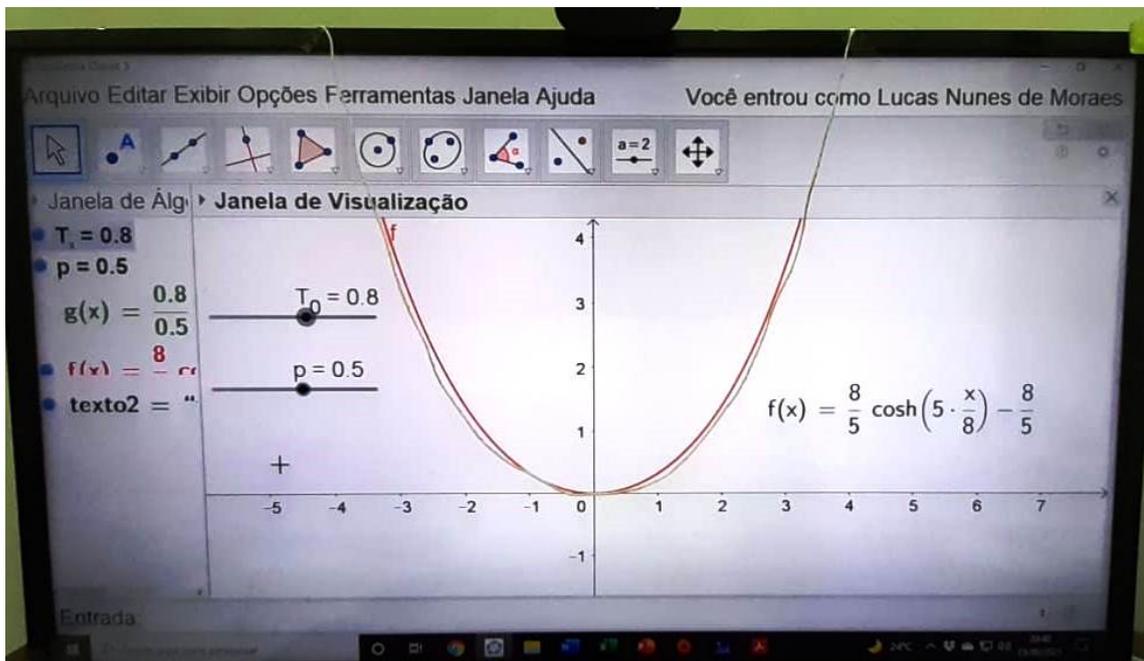
Fonte: O autor, 2021.

Figura 38 - Modelagem da Casca do Ovo



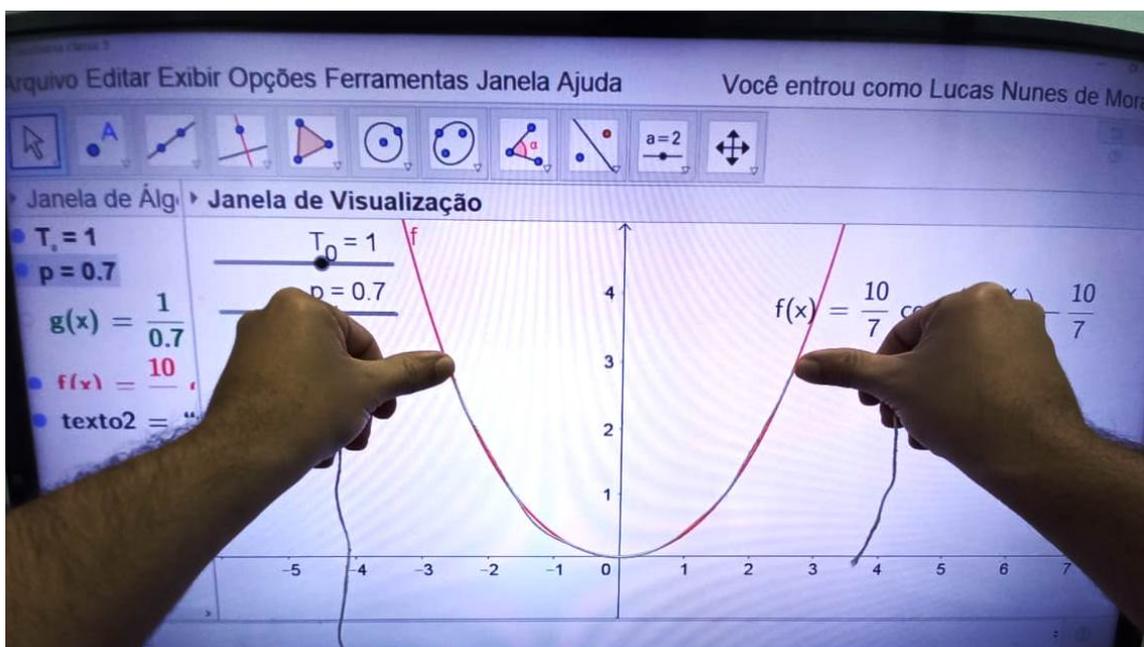
Fonte: O autor, 2021.

Figura 39 - Encontrando a equação de uma corda suspensa



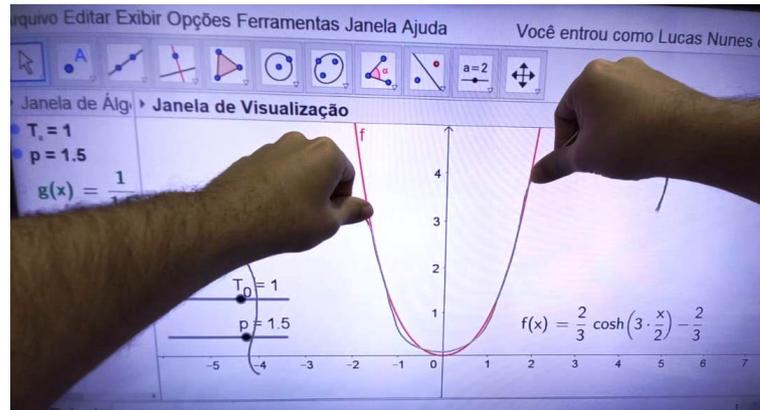
Fonte: O autor, 2021.

Figura 40 - Modelando uma corda suspensa a uma dada catenária 2



Fonte: O autor, 2021.

Figura 41 - Modelando uma corda suspensa a uma dada catenária 2



Fonte: O autor, 2021.

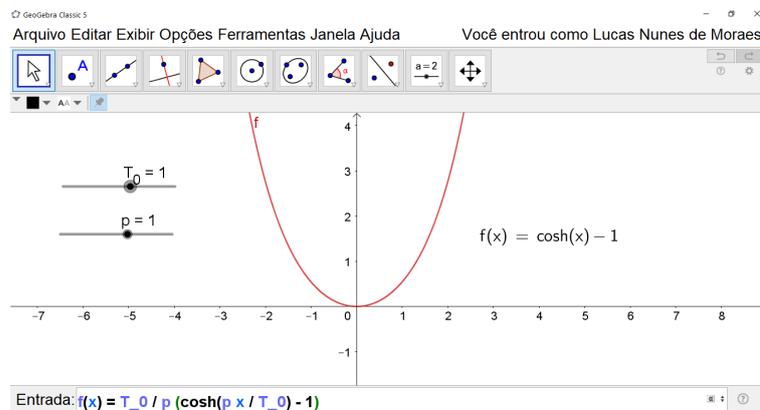
## Atividade 2 - Investigação da Corda Interplanetária

Endereço: <<https://1drv.ms/x/s!Ao4A4XiZWRXLgatMieNJRxFzUm87QQ?e=072qby>>  
 A segunda atividade é baseada na seção 2.4. O professor pode tomá-la como referencial, pois o cerne da tarefa está na construção da tabela 4 para verificação da relação entre os termos  $p$  e  $T_0$  na equação 15 abaixo.

$$y = \frac{T_0}{p} \left[ \cosh\left(\frac{p}{T_0}x\right) - 1 \right]$$

A dedução desta equação é recomendada para turmas de nível avançado. Para uma turma de nível intermediário é suficiente colocarmos esta fórmula no Geogebra para que os alunos entendam a influência dos parâmetros no formato final da catenária.

Figura 42 - Estudo da influência dos parâmetros no formato final da catenária



Fonte: O autor, 2021.

Recorde aos alunos a fórmula do módulo do vetor densidade de força  $p$  como sendo

$$p = \frac{P}{s} = \frac{mg}{s}$$

onde  $m$  é a massa da corda,  $g$  o módulo da aceleração da gravidade e  $s$  o comprimento da corda. Observe com os alunos que  $p$  depende da força peso e esta, por sua vez, da aceleração da gravidade  $g$ . Assim levanta-se a hipótese da atividade:

*“Se o formato da corda parece depender da aceleração da gravidade, qual o formato que uma corda suspensa adquire em outros planetas?”*

Para responder esta pergunta, vamos recorrer à montagem da tabela na figura 43. Os valores de  $g$  devem ser pesquisados, pois são dados universais. A coluna com os valores de  $p$  é calculada automaticamente a partir da fórmula acima.

Figura 43 - Tabela para investigação da relação entre  $p$  e  $T_0$

Catenária em Diferentes Planetas						
Planeta / Satélite	Gravidade $g$ [m/s <sup>2</sup> ]	$p$ [N/m]	$T_0$ [N]	$T_0/p$ [m]	$T_0/p$ [m]	$T_0/p$ [m]
Mercúrio	3,78	41,23636	8113,62	196,7589	196,8	196,8
Vênus	8,60	93,81818	18459,60	196,7593	196,8	196,8
Terra	9,78	106,69091	20992,40	196,7590	196,8	196,8
Lua	1,60	17,45455	3434,34	196,7591	196,8	196,8
Marte	3,72	40,58182	7984,83	196,7588	196,8	196,8
Júpiter	22,90	249,81818	49153,90	196,7587	196,8	196,8
Saturno	9,05	98,72727	19425,50	196,7592	196,8	196,8
Urano	7,77	84,76364	16678,00	196,7589	196,8	196,8
Netuno	11,00	120,00000	23611,10	196,7592	196,8	196,8
Plutão	0,50	5,45455	1073,23	196,7588	196,8	196,8

$p = \frac{mg}{s}$   
 $flecha = \frac{T_0}{p} \left[ \cosh\left(\frac{vão \cdot p}{2 T_0}\right) - 1 \right]$

Fonte: O autor, 2021.

Para encontrar  $T_0$ , devemos recorrer ao auxílio computacional como orientado na figura 44. No código digitado, a incógnita  $x$  faz papel de  $T_0$  e o valor de  $p$  a ser substituído será aquele encontrado na coluna anterior. Após todos os valores encontrados, determinamos a razão  $\frac{T_0}{p}$  e atentamos ao fato de que independentemente dos valores das colunas anteriores a razão será contante. Conclui-se a atividade explicando este resultado. Em suma, se a razão  $\frac{T_0}{p}$  é constante para diferentes valores de  $g$ , então a razão não depende de  $g$  e o formato da catenária com mesma massa, comprimento, flecha e vão será o mesmo em qualquer planeta.

Figura 44 - Encontrando  $T_0$  a partir de  $p$  com o auxílio computacional



The image shows the WolframAlpha logo at the top, with the text "computational intelligence." below it. Below the logo is a search bar containing the equation  $60 = (x/p) * (\cosh(150 * p/x) - 1)$  for  $p=1$ . Below the search bar are several icons: "Extended Keyboard", "Upload", "Examples", and "Random". Below the search bar is a section titled "Input interpretation:" which shows the equation  $60 = \frac{x}{p} \left( \cosh\left(150 \times \frac{p}{x}\right) - 1 \right)$  where  $p = 1$ . At the bottom right of this section, it says "cosh(x) is the hyperbolic cosine function".

Fonte: O autor, 2021.

Objetivos do Nível Intermediário: **Construir** uma tabela em *Excel* ou *LibreOffice Calc* testando, em diversas cordas, como variam os parâmetros  $p$  e  $T_0$  e, em particular, como varia a razão  $\frac{T_0}{p}$ . **Verificar** que a razão  $\frac{T_0}{p}$  é uma constante e conseqüentemente uma corda assumirá o mesmo formato em qualquer planeta.

Objetivos do Nível Avançado: **Encontrar** a equação 14 diferencial dos cabos flexíveis. **Deduzir** a equação 15.

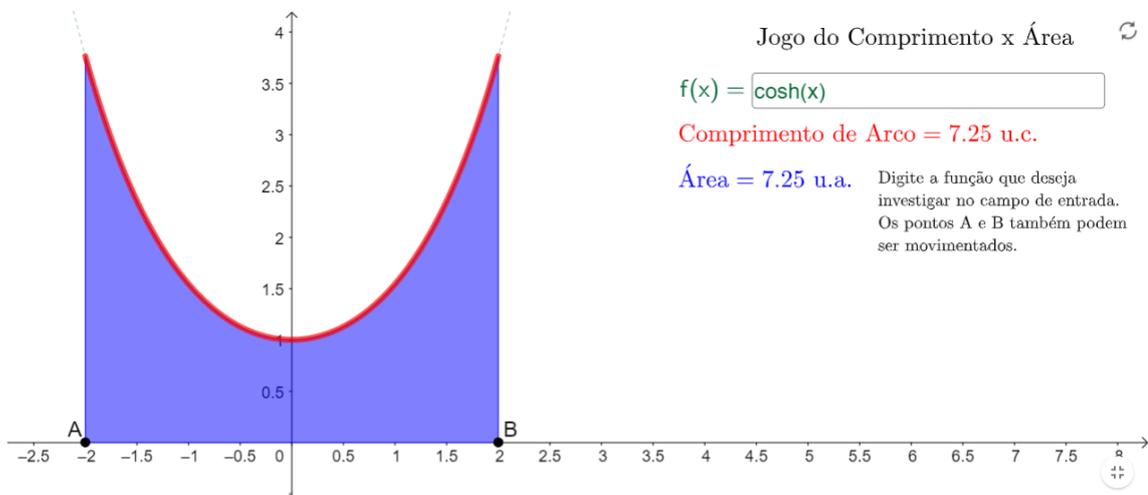
### Atividade 3 - Jogo do Comprimento x Área

Endereço: <<https://www.geogebra.org/m/ajrwpfs2>>

Ao longo do desenvolvimento da seção 2.6, sobre energia potencial gravitacional, nos deparamos com uma expressão cuja solução é uma curva que tem seu comprimento numericamente igual à área sob seu gráfico para qualquer intervalo. Esta curva demonstrou-se ser a catenária.

Escolhemos mais esta propriedade interessante da função cosseno hiperbólico que pode ser trabalhada em qualquer nível de ensino. Para tanto, construímos no Geogebra o “Jogo do Comprimento x Área” que se encontra no endereço acima.

Figura 45 - Tela do Jogo do Comprimento x Área



Fonte: O autor, 2021.

Neste jogo, o aluno pode digitar no campo de entrada em verde qualquer função que ele conheça e pode movimentar os pontos  $A$  e  $B$  livremente. O programa calcula automaticamente o comprimento da curva, em vermelho, entre os pontos indicados e a área abaixo do gráfico em azul.

O professor do Ensino Médio pode sugerir que se digitem as funções mais conhecidas, tais como: funções constantes, afins, quadráticas, cúbicas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas circulares. Os alunos vão descobrindo aos poucos que nenhuma outra função possui essa propriedade, exceto pela função constante  $f(x) = 1$ .

Objetivo do Nível Básico: **Testar** uma lista de funções pré-estabelecidas para verificar como o comprimento de arco e a área variam.

Objetivo do Nível Intermediário: **Construir** a melhor função possível, dependente ou não do intervalo  $[a, b]$ , para tentar solucionar o problema.

Objetivos do Nível Avançado: **Demonstrar** que o cosseno hiperbólico soluciona o problema. **Verificar** se a solução é única.

## Atividade 4 - Aproximação da Catenária por Parábolas

Endereço: <<https://www.geogebra.org/m/myzcbfev>>

Esta atividade visa trabalhar a diferenciação entre a curva catenária e a parábola. O aluno pode dar um valor para a razão  $\frac{T_0}{p}$ , que unicamente define a catenária, e observará como a razão flecha-vão é influenciada por esta razão e pelo intervalo de integração.

Objetivo do Nível Intermediário: **Discutir** os critérios para considerar uma parábola como “boa” aproximação da catenária.

Objetivo do Nível Avançado: **Encontrar**, através do polinômio de Taylor, qual é a melhor parábola que aproxima uma catenária e **calcular** o erro associado.

### Dois Exercícios para Fixação

Após uma discussão sobre as condições iniciais da corda e suas consequências, propomos dois exercícios, que podem ser considerados como aplicações diretas das fórmulas encontradas em 15 e 16. O objetivo é mostrar, em termos numéricos e gráficos, as diferenças entre os cabos catenários e parabólicos.

**Exercício 3.0.1.** *Considere um cabo leve sustentando uma plataforma de 300 metros de comprimento e 3600 kg de massa. Se a deflexão é de 60 metros, obtenha:*

- (a) o carregamento  $w$ .
- (b) a força de tensão horizontal  $T_0$ .
- (c) a força de tensão máxima na extremidade da corda  $T_{máx}$ .
- (d) uma aproximação para o comprimento da corda  $s$ .
- (e) o gráfico.

### Solução 1.

Item (a):

Como o carregamento  $w$  é a razão entre a força e o comprimento horizontal, temos

$$w = \frac{P}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{3600kg \times 9,81m/s^2}{300m} = 117,72N/m$$

Item (b):

Considerando o vértice da parábola na origem do sistema de coordenadas, podemos afirmar que a parábola passa pelo ponto  $A = (150, 60)$ , onde se localiza a extremidade direita da corda suspensa.

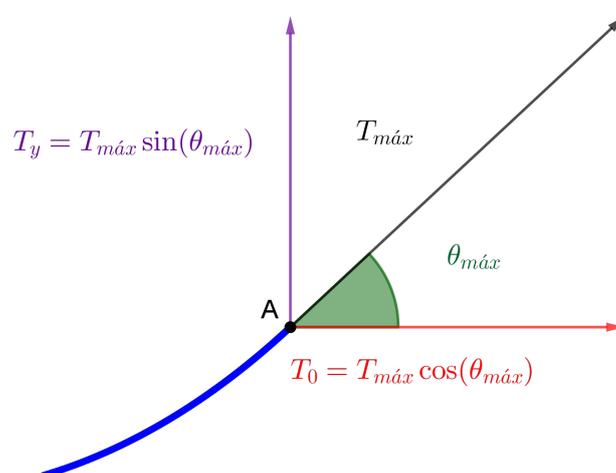
Como  $y = \frac{wx^2}{2T_0}$ , então

$$T_0 = \frac{wx^2}{2y}$$

$$T_0 = \frac{117,72 \times (150)^2}{2 \times 60} \cong 22072,50N$$

Item (c):

Considere a extremidade direita do cabo, conforme o diagrama abaixo.



A força de tensão máxima se encontra justamente na extremidade do cabo, e o ângulo máximo pode ser encontrado a partir da inclinação da reta tangente à curva no ponto A. Assim,

$$\tan(\theta_{máx}) = \frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0} = \frac{117,72 \times 150}{22072,50} = 0,8$$

$$\theta_{máx} \cong 0,6747 \text{ rad}$$

Assim sendo, podemos encontrar  $T_{máx}$ .

$$T_0 = T_{máx} \cos(\theta_{máx})$$

$$T_{máx} = \frac{T_0}{\cos(\theta_{máx})} = \frac{22072,50N}{\cos(0,6747)} \cong 28265,67N$$

Item (d):

O comprimento do cabo pode ser aproximadamente calculado com a fórmula da integral de comprimento de arco.

$$s = 2 \int_0^{150} \sqrt{(y')^2 + 1} dx$$

Como  $y = \frac{wx^2}{2T_0}$ , temos

$$y' = \frac{wx}{T_0}$$

$$(y')^2 = \frac{w^2}{(T_0)^2} x^2$$

Assim,

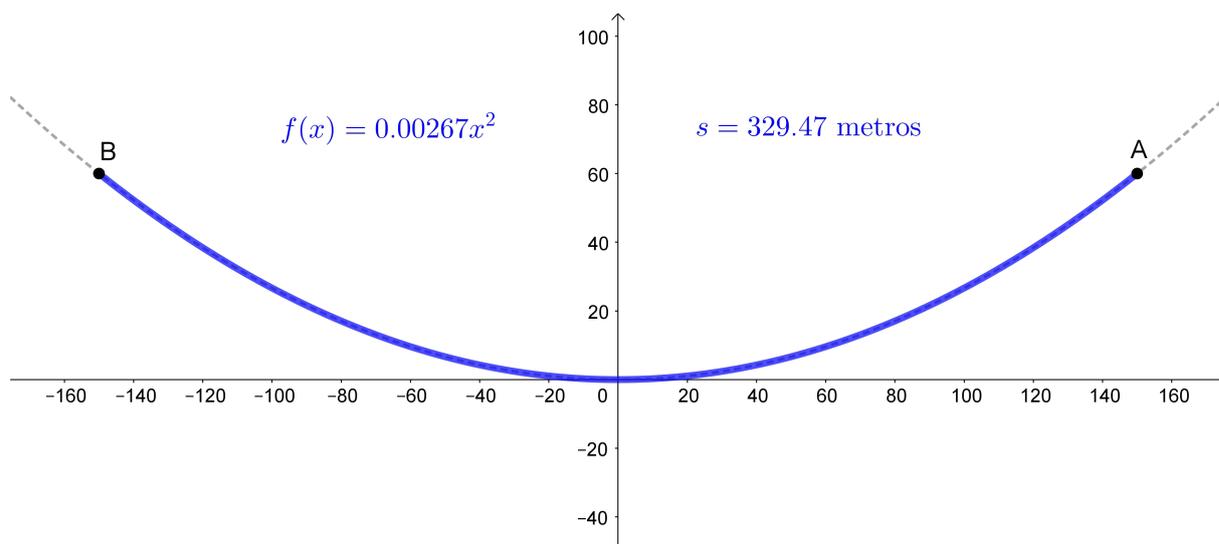
$$s = 2 \int_0^{150} \sqrt{\frac{w^2}{(T_0)^2} x^2 + 1} dx = 2 \int_0^{150} \sqrt{\frac{w^2}{(T_0)^2} x^2 + \frac{(T_0)^2}{(T_0)^2}} dx$$

$$s = \frac{2}{T_0} \int_0^{150} \sqrt{(wx)^2 + (T_0)^2} dx$$

Após substituir os valores de  $T_0 = 22072,50N$  e  $w = 117,72N/m$  na integral acima, utilizamos o sistema computacional Wolfram|Alpha (2020) para encontrar a resposta.

$$s = \frac{2}{22072,50} \int_0^{150} \sqrt{(117,72)^2 x^2 + (22072,50)^2} dx \cong 329,47 \text{ metros.}$$

Item (e):



**Exercício 3.0.2.** Considere um cabo com 3600 kg de massa sustentando apenas seu próprio peso sobre um vão de 300 metros de comprimento. Se a deflexão é de 60 metros, obtenha:

- a densidade de força  $p$ .
- a força de tensão horizontal  $T_0$ .
- a força de tensão máxima na extremidade da corda  $T_{máx}$ .
- uma aproximação para o comprimento da corda  $s$ .
- o gráfico.

**Solução 2.**Item (a):

Como a densidade de força  $p$  é a razão entre a força e o comprimento do cabo e o comprimento do cabo foi aproximadamente calculado no exercício anterior, temos

$$p = \frac{P}{s} = \frac{mg}{s} = \frac{3600kg \times 9,81m/s^2}{329,47m} \approx 107,19N/m$$

Item (b):

Considerando o ponto mais baixo da catenária coincidindo com a origem do sistema de coordenadas, podemos afirmar que a catenária passa pelo ponto  $A = (150, 60)$ , onde se localiza a extremidade direita da corda suspensa.

Como  $y = \frac{T_0}{p} \left[ \cosh\left(\frac{p}{T_0}x\right) - 1 \right]$ , então

$$60 = \frac{T_0}{107,19} \left[ \cosh\left(\frac{107,19}{T_0} \times 150\right) - 1 \right]$$

Com auxílio de recurso computacional encontramos:

$$T_0 \approx 21090,60N$$

Item (c):

Utilizando o mesmo raciocínio do item (c) do exercício 1, temos que a força de tensão máxima se encontra justamente na extremidade do cabo. E o ângulo máximo pode ser encontrado a partir da inclinação da reta tangente à curva no ponto A. Assim,

$$\tan(\theta_{m\acute{a}x}) = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{p}{T_0}x\right) = \sinh\left(\frac{107,19}{21090,60} \times 150\right) \approx 0.8384$$

$$\theta_{m\acute{a}x} \approx 0,6977 \text{ rad}$$

Assim sendo, podemos encontrar  $T_{m\acute{a}x}$ .

$$T_0 = T_{m\acute{a}x} \cos(\theta_{m\acute{a}x})$$

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{T_0}{\cos(\theta_{m\acute{a}x})} = \frac{21090,60N}{\cos(0,6977)} \approx 27521,86N$$

Item (d):

O comprimento do cabo pode ser aproximadamente calculado com a fórmula do comprimento de arco.

$$s = 2 \int_0^{150} \sqrt{(y')^2 + 1} dx$$

$$y = \frac{T_0}{p} \left[ \cosh \left( \frac{p}{T_0} x \right) - 1 \right], \text{ então}$$

$$y' = \frac{T_0}{p} \left[ \sinh \left( \frac{p}{T_0} x \right) \frac{p}{T_0} - 0 \right]$$

$$y' = \sinh \left( \frac{p}{T_0} x \right)$$

$$(y')^2 = \sinh^2 \left( \frac{p}{T_0} x \right)$$

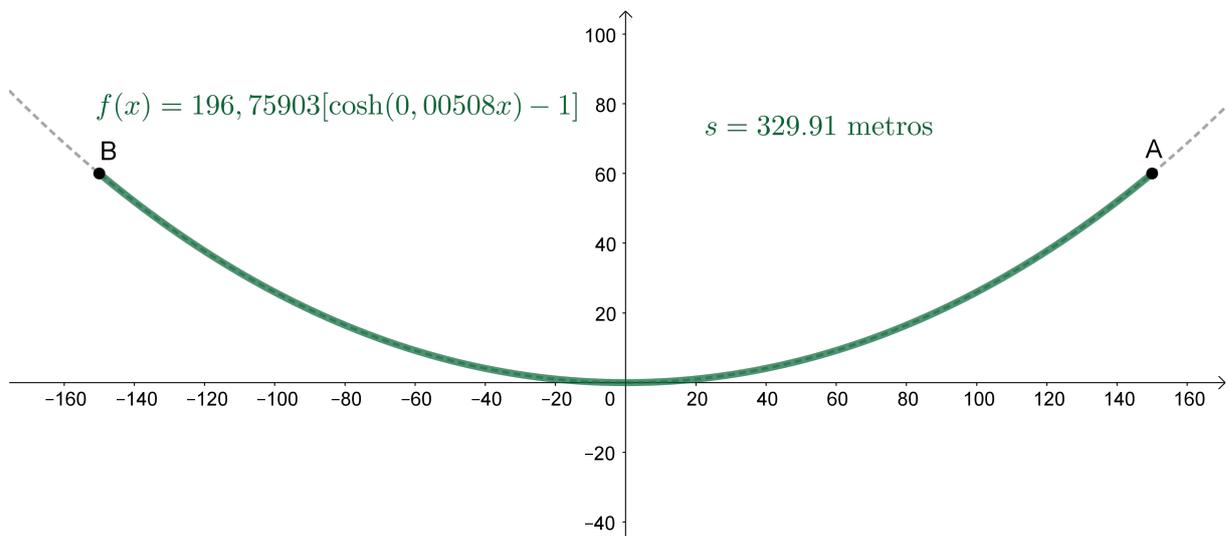
Assim,

$$s = 2 \int_0^{150} \sqrt{\sinh^2 \left( \frac{p}{T_0} x \right) + 1} dx$$

Após substituir os valores de  $T_0 = 21090,60N$  e  $p = 107,19N/m$  na integral acima, utilizamos o sistema computacional Wolfram|Alpha (2020) para encontrar a resposta:

$$s = 2 \int_0^{150} \sqrt{\sinh^2 \left( \frac{107,19}{21090,60} x \right) + 1} dx = 2 \int_0^{150} \cosh \left( \frac{107,19}{21090,60} x \right) \approx 329,91 \text{ metros.}$$

Item (e):



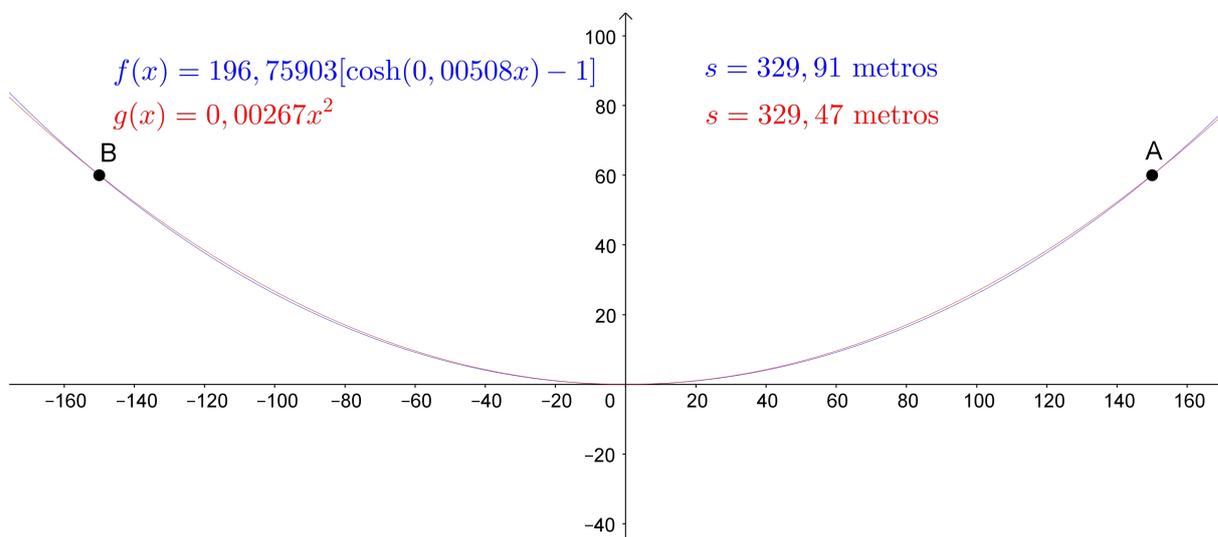
Para efeito de comparação dos resultados, resumimos os dados na tabela 5.

Tabela 5 - Resultados dos Exercícios 1 e 2

Resultados dos Exercícios 1 e 2					
Cabo	$w$ ou $p$ [N/m]	$T_0$ [N]	$T_{m\acute{a}x}$ [N]	$\theta_{m\acute{a}x}$ [rad]	$s$ [metros]
Parabólico	$w = 117,72$	22072,50	28265,67	0,6747	329,47
Catenário	$p = 107,19$	21090,60	27521,86	0,6977	329,91

Fonte: O autor, 2021.

O diagrama abaixo mostra que é quase impossível distinguir a olho nu as situações apresentadas. Convidamos o leitor que está lendo este trabalho de forma digital a dar *zoom* no diagrama para tentar ver a diferença. Também vale ressaltar que nem sempre essa distinção vai ser tão imperceptível.



## Atividade 5 - Parábola Rolante

Endereço: <<https://www.geogebra.org/m/cmrb5rff>>

Outra belíssima propriedade que relaciona a catenária e a parábola é o conceito de Parábola Rolante: se uma parábola rolar sem deslizar sobre o eixo X, então o lugar geométrico do foco desta parábola será uma catenária.

É objetivo do Nível Intermediário: refazer a construção para **revisitar** os conceitos de vetores, rotação e translação.

É objetivo do Nível Avançado: refazer a construção para **revisitar** os conceitos de comprimento de curva, parametrização e reta tangente.

O caso que estudamos na seção 2.7 foi o da parábola com foco no ponto  $F = (0, 1)$  e reta diretriz  $d: y = -1$ . Sua equação cartesiana é dada por  $y = \frac{x^2}{4}$ . Fizemos uma construção animada no Geogebra - que pode ser encontrada no endereço <<https://www.geogebra.org/m/cmrb5rff>> - onde o estudante pode manipular o controle deslizante ou apertar o botão *play* da animação automática.

Como salientamos para as outras construções citadas neste trabalho, o professor pode realizar abordagens com níveis de profundidade bem variados. Pode-se fazer uma abordagem exploratória para alunos do Ensino Básico ou refazer a construção em turmas mais avançadas.

Esta é uma das construções mais complexas, por isso descreveremos em linhas gerais os principais passos utilizados.

PASSO 1 Criar a parábola que sofrerá o rolamento:

$$c = \text{Parábola}((0, 1), y = -1)$$

PASSO 2 Criar o controle deslizante  $a \in [-5, 5]$  e o ponto  $P = (a, a^2/4)$  sobre a parábola  $c$  que utiliza  $a$  como parâmetro.

PASSO 3 Criar a curva  $b$ , que será um segmento de parábola ligando o ponto mínimo  $O = (0, 0)$  ao ponto  $P = (a, a^2/4)$ .

$$b = \text{Curva}(t, t^2/4, t, 0, x(P))$$

PASSO 4 Criar o número  $e$ , que será o comprimento da curva  $b$  de  $O$  até  $P$ . E criar a variável  $s$ , que dará o sinal de  $x(P)$ .

$$e = \text{Comprimento}(b, 0, x(P))$$

$$s = \text{sgn}(x(P))$$

PASSO 5 Criar a reta tangente à parábola  $c$  passando pelo ponto  $P$ .

$$h = \text{Tangente}(P, c)$$

PASSO 6 Criar a parábola  $c'$ , que representa a rotação da parábola  $c$  pelo ângulo de inclinação da reta tangente  $h$  criada anteriormente. Vale ressaltar que o sinal de menos se deve ao fato de que a inclinação de  $h$  tem sentido anti-horário e queremos girar em sentido horário.

$$c' = \text{Girar}(c, \arctan(-\text{Inclinação}(h)))$$

PASSO 7 Criar os pontos  $A$  e  $P'$ , onde  $A$  é o ponto pertencente ao eixo  $X$  cuja abscissa é o comprimento  $e$  calculado no passo 4. É necessário multiplicar por  $s$  para que quando o ponto  $P$  esteja no segundo quadrante, o ponto  $A$  também esteja. Já  $P'$  é o equivalente ao ponto  $P$  na parábola  $c'$ .

$$A = (s * e, 0)$$

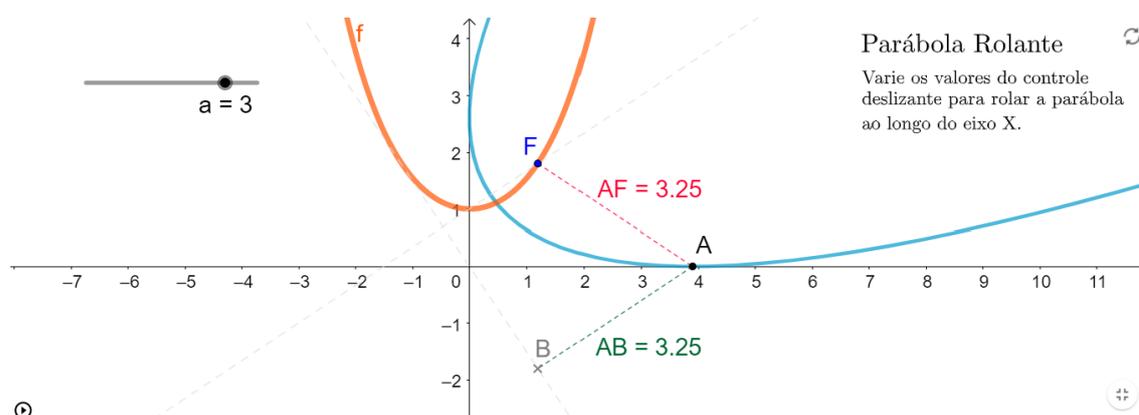
$$P' = \text{Girar}(P, \arctan(-\text{Inclinação}(h)))$$

PASSO 8 Para finalizar a construção, é necessário que  $P'$  e  $A$  coincidam. Assim, criamos a parábola  $p$ , que é a translação de  $c'$  pelo vetor que vai de  $P'$  até  $A$ .

$$p = \text{Transladar}(c', \text{Vetor}(P', A))$$

Para completar a construção, ainda é preciso criar o ponto  $F$ , que será o foco da parábola  $p$  e habilitar seu rastro. Na figura 46, pode-se observar que construímos a função  $f(x) = \cosh(x)$  para comprovar que o rastro de  $F$  vai coincidir com  $f$ .

Figura 46 - Jogo Parábola Rolante



Legenda: Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/cmrb5rff>>

Fonte: O autor, 2021.

## Atividade 6 - Involuta e Evoluta

Endereços: <<https://www.geogebra.org/m/ekpuzubq>>; <<https://www.geogebra.org/m/kknfsde>>

A última atividade é composta de duas construções que trazem a ideia da involuta e evoluta de uma curva, exploradas com mais detalhes na seção 2.8. O tema é complexo e por isso sua proposta está mais voltada para alunos avançados. Contudo, oportunamente, o professor pode construir a Tractriz com papel, caneta e barbante em turmas de nível básico ou intermediário.

É possível construir a Tractriz de duas maneiras. A primeira utiliza a ideia de involuta. Para tanto, o professor pode imprimir uma catenária e em seguida tomar dois pedaços de barbante. Um deles será fixado à folha de papel sobre o traçado da catenária, servindo como guia. O segundo terá uma caneta amarrado em sua ponta e será a casca da catenária que, ao desembrulhada, traçará a tractriz.

A segunda maneira pode ser obtida com um palito ou vareta onde a caneta estará presa em uma das pontas. Para facilitar a visualização, imagine que a vareta se localiza no eixo Y, com a ponta A em  $(0,0)$  e a ponta B em  $(0,1)$  com a caneta. Conforme a ponta A desliza sobre o eixo X, o ponto B será arrastado desenhando a tractriz.

São objetivos do Nível Intermediário: **conhecer** e **reproduzir** a curva tractriz. **Relacionar** esta nova curva com a catenária.

São objetivos do Nível Avançado: **deduzir** a parametrização da tractriz. **Interiorizar** e **generalizar** os conceitos de involuta e evoluta.

### 4º Momento: Produção Final

Esta é a hora do fechamento dos trabalhos. O professor precisa verificar se os alunos alcançaram os objetivos propostos no decorrer das atividades. Naturalmente, a observação da interação dos alunos pode e deve ser levada em consideração na hora da avaliação, mas assim como na produção inicial, é preciso que os alunos façam algum registro, tais como: relatórios guiados, seminários, apresentações, testes, produção de material, entre outros.

Essa produção final, se comparada com a produção inicial, fornecerá um retrato mais fidedigno da evolução dos alunos. Os professores e os alunos devem estar preparados para entender que as atividades podem se encerrar de maneiras não-triviais. O professor pode acreditar que uma demonstração formal simboliza um fechamento, mas isso nem sempre será possível, dependendo do assunto ou da própria turma. Os alunos, por sua vez, podem entender que o fim de uma atividade se dará no encontrar de uma fórmula, mas isso também não é sempre verdade. Deve permanecer acesa a chama do espírito investigativo para resolução de problemas.

## CONCLUSÃO

“Tudo flui, nada persiste, nem permanece o mesmo.”

*Heráclito de Éfeso*

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou verificar como o assunto das Funções Hiperbólicas está sendo abordado nos principais livros didáticos e como as dissertações do PROFMAT vêm propondo novas perspectivas de trabalho deste assunto no Ensino Básico. Foi feita a análise de algumas propriedades pouco disseminadas envolvendo as Funções Hiperbólicas e foi possível propor novas abordagens para a atividade docente.

No início de nosso trabalho, colocamos como um dos objetivos a possibilidade de trazer novas abordagens e novos exemplos das Funções Hiperbólicas, que até então não foram contemplados em Dissertações do PROFMAT. Sem a pretensão de esgotar os assuntos e aplicações dessas Funções, acreditamos que os exemplos aqui desenvolvidos, tais como a catenária sendo curva de menor energia potencial, as aplicações da parábola rolante ou ainda o estudo das catenárias em outros planetas fazem com que tenhamos alcançado êxito nesse objetivo em particular.

De modo geral, verificou-se que é possível tratar o assunto de Funções Hiperbólicas no Ensino Básico, mesmo que este não esteja previsto diretamente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Apesar de ser um assunto complexo, ele pode ser abordado com diferentes níveis de profundidade. Vale ressaltar ainda que houve impossibilidade de verificar na prática como os professores adotariam as propostas de atividades com seus alunos em virtude da pandemia de COVID-19.

Após extensa pesquisa bibliográfica e numerosas revisões, pode-se sustentar que o material produzido apresenta boa qualidade e se anuncia como instrumento confiável a respeito das Funções Hiperbólicas. Ainda assim, sabemos que o presente material pode e deve sofrer complementações e atualizações futuras a partir das contribuições recebidas pelos colegas docentes.

Foram revistas as principais definições, conceitos e propriedades das Funções Hiperbólicas, além de sete curiosidades/propriedades pouco exploradas em outros trabalhos, mas com enorme potencial de aplicação em sala de aula. Por fim, oferecemos uma sequência didática para nortear o trabalho do professor no ensino destas funções.

Algumas oportunidades de continuação deste trabalho se encontram na análise crítica da sequência didática aqui exposta. Ela poderia ocorrer através de professores colaboradores interessados em abordar este assunto em suas turmas por meio de um estudo de caso ou uma pesquisa qualitativa. Nosso objetivo é o aprimoramento constante, nunca considerando nosso trabalho pronto e acabado como resumido pela epígrafe deste

capítulo.

Abrindo parênteses, atrevo-me a sugerir dois tópicos para trabalhos futuros aos colegas que leem este trabalho e ainda se questionam qual rumo seguir em seus projetos. O primeiro deles seria na parte histórica: considero que aqueles que me precederam trabalharam bem a parte histórica e este foi um dos motivos pelos quais não me aprofundei nessa direção. Contudo senti que um caminho ainda faltava: seria interessante comentar as demonstrações originais que provam, por exemplo, que a corda suspensa não é uma parábola ou a dedução da equação da catenária traduzindo-as para linguagem matemática moderna. A segunda sugestão está em se fazer um estudo aprofundado, com o auxílio do Geogebra, de livros como os de Lockwood (1967), Markushevich (1980) e Abbena, Salamon e Gray (2017) com foco em curvas especiais com propriedades surpreendentes, mas que infelizmente não temos a oportunidade de ver no Ensino Básico ou até mesmo no curso de graduação com a frequência que gostaríamos.

Encerrando, concluímos que a utilização do material e atividades aqui propostos vai permitir aos professores orientar suas aulas sobre as Funções Hiperbólicas no sentido de uma aprendizagem mais significativa aos alunos e promover uma profunda transformação na prática do professor.

## REFERÊNCIAS

- ABBENA, E.; SALAMON, S.; GRAY, A. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. [S.l.]: CRC press, 2017.
- AGARWAL, A.; MARENCO, J. The locus of the focus of a rolling parabola. v. 41, n. 2, p. 129–133, March 2010. Disponível em: <<https://www.maa.org/sites/default/files/Argarwal2010.pdf>>.
- ALHADAS, M. d. C. Dissertação PROFMAT, *Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicações*. Campos dos Goytacazes: UENF, 2013. 73 f.
- BINOTI, D. H. B. et al. Aplicação da função hiperbólica na construção de curvas de Índice de local. 2012.
- BRUNT, B. van. *The calculus of variations*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2004. 38-40 p.
- COLL, C. et al. Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes. In: *Os conteúdos na reforma: ensino e aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 182–182.
- COURANT, R.; HILBERT, D. *Methods of mathematical physics: partial differential equations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. 184 p.
- CREW, H.; SALVIO, A. d. *Dialogues Concerning Two New Sciences*. 1. ed. New York, NY: Dover Publications Inc., 1954.
- ELMORE, W. C.; HEALD, M. A. *Physics of waves*. [S.l.]: Courier Corporation, 1985.
- FERRARA, M. V. Dissertação PROFMAT, *Uma Proposta para Abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio*. Maringá: UEM, 2018. 74 f.
- FREITAS, M. d. B. C. d. S. B. Dissertação PROFMAT, *Uma Proposta para Abordagem de Funções Hiperbólicas no Ensino Médio*. João Pessoa: UFPB, 2015. 61 f.
- GROSSE, J. et al. *Acta eruditorum: anno M DC LXXXX publicata*. prostant apud Joh. Grossium ... & J. F. Gleditschium, 1690. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=s4pw4GyHTRcC>>.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentals of Physics*. Wiley, 2018. ISBN 9781119286240. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2L8xswEACAAJ>>.
- LIMA, G. S. d. Dissertação PROFMAT, *As Formas Geométricas nas Obras de Gaudí: As Superfícies Quádricas, As Superfícies Regradas e a Catenária*. Fortaleza: UECE, 2019. 88 f.
- LOCKWOOD, E. H. *A book of curves*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1967.
- MAIA, F. E. P. Dissertação PROFMAT, *Curvas planas: clássicas, regulares e de preenchimento*. Santo André: UFABC, 2016. 71 f.

MAOR, E. *E: a história de um número*. Record, 2003. ISBN 9788501058478. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=aTkeAAAACAAJ>>.

MARKUSHEVICH, A. *Remarkable Curves*. Mir, 1980. (Little mathematics library). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=jnVHnQEACAAJ>>.

MARTINS, F. A. d. O. Dissertação PROFMAT, *Explorando Algumas Curvas Notáveis no Ensino Médio: História, Propriedades e Aplicações*. Rio de Janeiro: Colégio Pedro II, 2019. 121 f.

MENDES, M. F. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, *A Curva Catenária como Aplicação da Função Exponencial*. Sorocaba: UFSCar, 2017. 81 f.

MERIAM, J.; KRAIGE, L.; BOLTON, J. *Statics*. Wiley, 2016. (Engineering mechanics). ISBN 9781119044673. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=n6LbDAEACAAJ>>.

MICHAELIS, D. d. L. P. Dicionário online. *Editora Melhoramentos*, 2021. Disponível em: <<https://michaelis.uol.com.br/>>.

OJOSE, B. Students' misconceptions in mathematics: Analysis of remedies and what research says. Ohio Council of Teachers of Mathematics, 2015.

OTERO, M. L. G. Dissertação PROFMAT, *Galileu Galilei e o Conceito da Corrente Suspensa, uma Proposta de Investigação no Ensino Médio*. Salvador: UFBA, 2019. 56 f.

RODRIGUES, K. F. Dissertação PROFMAT, *Ângulo Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas*. São Cristóvão: UFSF, 2014. 68 f.

SANTOS, J. J. C. d. Dissertação PROFMAT, *Estudo e Aplicações das Funções Hiperbólicas*. João Pessoa: UFPB, 2015. 77 f.

SCHNEUWLY, B.; DOLZ-MESTRE, J. *Gêneros orais e escritos na escola*. [S.l.]: Mercado de Letras, 2004.

SILVA, C. M. d. PROFMAT, *As funções hiperbólicas no ensino médio. Apresentação, conceitos e aplicações*. Dourados: UEMS, 2019. 57 f.

STEINHAUS, H. *Mathematical snapshots*. [S.l.]: Courier Corporation, 1999. 249-251 p.

STEWART, J. *Cálculo. Vol1*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TALAVERA, L. M. B. Programa de Pós-Graduação em Educação, *Parábola e catenária: história e aplicações*. São Paulo: USP, 2008. 97 f.

TRUESDELL, C. *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638–1788, as Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia*. Series ii, volume 11, part 2. Switzerland: Fussli, 1960 p.21.

VASCONCELOS, J. G. S. F. Dissertação PROFMAT, *Funções Hiperbólicas: História, Conceito e Aplicações*. Manaus: UFAM, 2013. 74 f.

WOLFRAM|ALPHA. 2020. Disponível em: <<https://www.wolframalpha.com/>>.

YATES, R. C. Curves and their properties. ERIC, 1974.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física 1 - Mecânica*. [S.l.]: Pearson Universidades, 2016. v. 1.

## APÊNDICE A – Tabelas

Tabela 6 - Funções Hiperbólicas em Termos de Exponenciais

Funções Hiperbólicas em Termos de Exponenciais	
Seno Hiperbólico	Cosseno Hiperbólico
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 7 - Funções Hiperbólicas em Termos de Exponenciais 2

Funções Hiperbólicas em Termos de Exponenciais		Domínio
Seno Hiperbólico	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$
Cosseno Hiperbólico	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$
Tangente Hiperbólica	$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$	$\mathbb{R}$
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	$\mathbb{R}$
Cossecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
Cotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$	$\mathbb{R} - \{0\}$

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 8 - Funções Hiperbólicas Inversas

Funções Hiperbólicas em Termos de Exponenciais		Domínio
Arco Seno Hiperbólico	$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\mathbb{R}$
Arco Cosseno Hiperbólico	$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$[1, +\infty]$
Arco Tangente Hiperbólica	$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2}$	$(-1, 1)$

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 9 - Assíntotas das Funções Hiperbólicas

<b>Assíntotas das Funções Hiperbólicas</b>		
<b>Função</b>	<b>Assíntota Horizontal</b>	<b>Assíntota Vertical</b>
Seno Hiperbólico	Não há	Não há
Cosseno Hiperbólico	Não há	Não há
Tangente Hiperbólica	$y = \pm 1$	Não há
Secante Hiperbólica	$y = 0$	Não há
Cossecante Hiperbólica	$y = 0$	$x = 0$
Cotangente Hiperbólica	$y = \pm 1$	$x = 0$

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 10 - Paridade das Funções Hiperbólicas

<b>Paridade das Funções Hiperbólicas</b>		
Seno Hiperbólico	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	ÍMPAR
Cosseno Hiperbólico	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	PAR
Tangente Hiperbólica	$\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$	ÍMPAR
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	PAR
Cossecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	ÍMPAR
Cotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$	ÍMPAR

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 11 - Relações Fundamentais das Funções Hiperbólicas

<b>Relações Fundamentais das Funções Hiperbólicas</b>
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
$\operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1$
$\operatorname{coth}^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 12 - Soma de Arcos das Funções Hiperbólicas

<b>Soma de Arcos das Funções Hiperbólicas</b>	
<b>Função</b>	<b>Soma de Arcos</b>
Seno Hiperbólico	$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$
Cosseno Hiperbólico	$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$
Tangente Hiperbólica	$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x) \tanh(y)}$
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(x + y) = \frac{\operatorname{sech}(x) \operatorname{sech}(y)}{1 + \tanh(x) \tanh(y)}$
Cossecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(x + y) = \frac{\operatorname{csch}(x) \operatorname{csch}(y)}{\coth(x) + \coth(y)}$
Cotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}(x + y) = \frac{\operatorname{coth}(x) \operatorname{coth}(y) + 1}{\operatorname{coth}(x) + \operatorname{coth}(y)}$

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 13 - Fórmulas de Arco Duplo das Funções Hiperbólicas

<b>Fórmulas de Arco Duplo das Funções Hiperbólicas</b>	
<b>Função</b>	<b>Arco Duplo</b>
Seno Hiperbólico	$\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$
Cosseno Hiperbólico	$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
Tangente Hiperbólica	$\tanh(2x) = \frac{2}{\coth(x) + \tanh(x)}$
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(2x) = \frac{1 - \tanh^2(x)}{1 + \tanh^2(x)}$
Cossecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(2x) = \frac{\operatorname{csch}(x)}{2 \cosh(x)}$
Cotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}(2x) = \frac{\operatorname{coth}(x) + \tanh(x)}{2}$

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 14 - Derivadas e Integrais das Funções Hiperbólicas

<b>Derivadas e Integrais das Funções Hiperbólicas</b>		
<b>Função <math>f(x)</math></b>	<b>Derivada <math>f'(x)</math></b>	<b>Integral <math>\int f(x)dx</math></b>
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\tanh(x)$	$\operatorname{sech}^2(x)$	$\ln(\cosh(x)) + C$
$\operatorname{sech}(x)$	$-\tanh(x)\operatorname{sech}(x)$	$\arctan(\sinh(x)) + C$
$\operatorname{csch}(x)$	$-\coth(x)\operatorname{csch}(x)$	$-\operatorname{arctanh}(\cosh(x)) + C$
$\coth(x)$	$-\operatorname{csch}^2(x)$	$\ln(\sinh(x)) + C$

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 15 - Integrais Definidas das Funções Hiperbólicas

<b>Integrais Definidas das Funções Hiperbólicas</b>		
<b>Função <math>f(x)</math></b>	<b>Intervalo</b>	<b>Integral Definida</b>
$\sinh(x)$	$[0, a]$	$\frac{e^a + e^{-a}}{2} - 1$
$\cosh(x)$	$[-a, a]$	$e^a - e^{-a}$
$\tanh(x)$	$[0, a]$	$\ln(\cosh(a))$
$\operatorname{sech}(x)$	$[-a, a]$	$2 \arctan(\sinh(a))$
$\operatorname{sech}(x)$	$(-\infty, +\infty)$	$\pi$
$\operatorname{csch}(x)$	$[a, b]$	$\operatorname{arctanh}(\cosh(a)) - \operatorname{arctanh}(\cosh(b))$
$\coth(x)$	$[a, b]$	$\ln\left(\frac{\sinh(b)}{\sinh(a)}\right)$

Fonte: O autor, 2021.

Tabela 16 - Funções Hiperbólicas e Números Complexos

<b>Funções Hiperbólicas e Números Complexos</b>		
Seno Hiperbólico	$\sinh(ix) = i \sin(x)$	$\sinh(x) = -i \sin(ix)$
Cosseno Hiperbólico	$\cosh(ix) = \cos(x)$	$\cosh(x) = \cos(ix)$
Tangente Hiperbólica	$\tanh(ix) = i \tan(x)$	$\tanh(x) = -i \tan(ix)$
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(ix) = \sec(x)$	$\operatorname{sech}(x) = \sec(ix)$
Cossecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(ix) = -i \csc(x)$	$\operatorname{csch}(x) = i \csc(ix)$
Cotangente Hiperbólica	$\coth(ix) = -i \cot(x)$	$\coth(x) = i \cot(ix)$

Fonte: O autor, 2021.

## APÊNDICE B – Demonstrações

### B.1 Desenvolvimento da Integral $\int \sqrt{x^2 - 1} dx$

Avaliaremos a integral indefinida

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx$$

utilizando  $x = \sec(u)$  e  $dx = \tan(u) \sec(u) du$ . Temos:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \int \sqrt{\sec^2(u) - 1} \tan(u) \sec(u) du = \int \sqrt{\tan^2(u)} \tan(u) \sec(u) du = \\ &= \int \tan(u) \tan(u) \sec(u) du = \int \tan^2(u) \sec(u) du = \int [\sec^2(u) - 1] \sec(u) du = \\ &= \int \sec^3(u) - \sec(u) du = \int \sec^3(u) du - \int \sec(u) du = \frac{\tan(u) \sec(u)}{2} + \frac{1}{2} \int \sec(u) du - \int \sec(u) du = \\ &= \frac{\tan(u) \sec(u)}{2} - \frac{1}{2} \int \sec(u) du = \frac{\tan(u) \sec(u)}{2} - \frac{\ln(\tan(u) + \sec(u))}{2} \end{aligned}$$

Desfazendo a substituição, temos:

$$\frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{\ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{2}$$

Calculando a integral acima no intervalo  $[1, \cosh(\gamma)]$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} &\frac{[\sqrt{\cosh^2(\gamma) - 1}][\cosh(\gamma)]}{2} - \frac{\ln(\sqrt{\cosh^2(\gamma) - 1} + \cosh(\gamma))}{2} - \left( \frac{[\sqrt{1^2 - 1}][1]}{2} - \frac{\ln(\sqrt{1^2 - 1} + 1)}{2} \right) \\ &= \frac{\sinh(\gamma) \cosh(\gamma)}{2} - \frac{\ln(\sinh(\gamma) + \cosh(\gamma))}{2} - \left( 0 - \frac{\ln(1)}{2} \right) \\ &= \frac{\sinh(\gamma) \cosh(\gamma)}{2} - \frac{\ln(\sinh(\gamma) + \cosh(\gamma))}{2} + 0 \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_1^{\cosh(\gamma)} \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{\sinh(\gamma) \cosh(\gamma)}{2} - \frac{\ln(\sinh(\gamma) + \cosh(\gamma))}{2}$$

■

## B.2 Desenvolvimento da Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Vamos avaliar a integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

utilizando  $x = \tan(u)$  e  $dx = \sec^2(u)du$ . Temos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\sec^2(u)du}{\sqrt{\tan^2(u) + 1}} = \int \frac{\sec^2(u)du}{\sqrt{\sec^2(u)}} = \int \sec(u)du$$

Para integrar  $\sec(u)$ , multiplique o numerador e denominador pelo fator  $\tan(u) + \sec(u)$ .

$$\int \frac{\sec(u)[\tan(u) + \sec(u)]du}{\tan(u) + \sec(u)}$$

Faça uma nova substituição utilizando  $v = \tan(u) + \sec(u)$  e  $dv = \sec^2(u) + \tan(u)\sec(u)du$ , temos:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln(v) + C$$

Desfazendo a segunda substituição:

$$\int \sec(u)du = \ln(\tan(u) + \sec(u)) + C$$

Por fim, desfazendo a primeira substituição:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

■

### B.3 Desenvolvimento da Integral $\int \sqrt{4x^2 + 1} dx$

Vamos avaliar a integral indefinida

$$\int \sqrt{4x^2 + 1} dx$$

utilizando  $x = \frac{\tan(u)}{2}$  e  $dx = \frac{\sec^2(u)}{2} du$ . Temos:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4x^2 + 1} dx &= \int \sqrt{\tan^2(u) + 1} \frac{\sec^2(u)}{2} du = \frac{1}{2} \int \sec^3(u) du = \\ &= \frac{\tan(u) \sec(u)}{4} + \frac{1}{4} \int \sec(u) du = \frac{\tan(u) \sec(u)}{4} + \frac{\ln(\tan(u) + \sec(u))}{4} + C \end{aligned}$$

Desfazendo a substituição, temos:

$$\int \sqrt{4x^2 + 1} dx = \frac{2x\sqrt{4x^2 + 1}}{4} + \frac{\ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})}{4} + C$$

■

**B.4 Desenvolvimento da Integral**  $\int \frac{dx}{x^2 + 1}$ 

Vamos avaliar a integral indefinida

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1}$$

utilizando  $x = \tan(u)$  e  $dx = \sec^2(u)du$ . Temos:

$$\int \frac{\sec^2(u)du}{\tan^2(u) + 1} = \int \frac{\sec^2(u)du}{\sec^2(u)} = \int du = u + C$$

Desfazendo a substituição, temos:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan(x) + C$$

■

**B.5 Desenvolvimento da Integral**  $\int \frac{dx}{1-x^2}$ 

Vamos avaliar a integral indefinida

$$\int \frac{dx}{1-x^2}$$

utilizando  $x = \tanh(u)$  e  $dx = \operatorname{sech}^2(u)du$ . Temos:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{\operatorname{sech}^2(u)du}{1-\tanh^2(u)}$$

Da tabela 11 de Relações Fundamentais, temos

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{\operatorname{sech}^2(u)du}{\operatorname{sech}^2(u)} = \int du = u + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh}(x) + C$$

■

## B.6 Soma de Arcos das Funções Hiperbólicas

Usando o fato que

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$$

e

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$$

iremos determinar as expressões para Tangente, Secante, Cossecante e Cotangente Hiperbólicas.

Para a Tangente Hiperbólica, temos:

$$\tanh(x + y) = \frac{\sinh(x + y)}{\cosh(x + y)} = \frac{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}{\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)}$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}{\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)}$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\frac{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}{\cosh(x) \cosh(y)}}{\cosh(x) \cosh(y)}$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x) \tanh(y)}$$

A fórmula para o arco duplo obtém-se diretamente fazendo  $x = y$ .

$$\tanh(x + x) = \frac{\tanh(x) + \tanh(x)}{1 + \tanh(x) \tanh(x)}$$

$$\tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

$$\tanh(2x) = \frac{2}{\coth(x) + \tanh(x)}$$

Para a Secante Hiperbólica, temos:

$$\operatorname{sech}(x + y) = \frac{1}{\cosh(x + y)} = \frac{1}{\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)}$$

$$\operatorname{sech}(x + y) = \frac{1}{\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)}$$

$$\operatorname{sech}(x + y) = \frac{1}{\frac{\cosh(x) \cosh(y)}{\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)}}$$

$$\operatorname{sech}(x + y) = \frac{\operatorname{sech}(x)\operatorname{sech}(y)}{1 + \tanh(x) \tanh(y)}$$

A fórmula para o arco duplo obtém-se diretamente fazendo  $x = y$ .

$$\operatorname{sech}(x + x) = \frac{\operatorname{sech}(x)\operatorname{sech}(x)}{1 + \tanh(x) \tanh(x)}$$

$$\operatorname{sech}(2x) = \frac{\operatorname{sech}^2(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

$$\operatorname{sech}(2x) = \frac{1 - \tanh^2(x)}{1 + \tanh^2(x)}$$

Para a Cossecante Hiperbólica, temos:

$$\operatorname{csch}(x + y) = \frac{1}{\sinh(x + y)} = \frac{1}{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}$$

$$\operatorname{csch}(x + y) = \frac{1}{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}$$

$$\operatorname{csch}(x + y) = \frac{\frac{1}{\sinh(x) \sinh(y)}}{\frac{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}{\sinh(x) \sinh(y)}}$$

$$\operatorname{csch}(x + y) = \frac{\operatorname{csch}(x)\operatorname{csch}(y)}{\coth(x) + \coth(y)}$$

A fórmula para o arco duplo obtém-se diretamente fazendo  $x = y$ .

$$\operatorname{csch}(x + x) = \frac{\operatorname{csch}(x)\operatorname{csch}(x)}{\coth(x) + \coth(x)}$$

$$\operatorname{csch}(2x) = \frac{\operatorname{csch}^2(x)}{2 \coth(x)}$$

$$\operatorname{csch}(2x) = \frac{\operatorname{csch}(x)}{2 \cosh(x)}$$

Para a Cotangente Hiperbólica, temos:

$$\coth(x + y) = \frac{\cosh(x + y)}{\sinh(x + y)} = \frac{\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)}{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}$$

$$\coth(x + y) = \frac{\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)}{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}$$

$$\coth(x + y) = \frac{\frac{\cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)}{\sinh(x) \sinh(y)}}{\frac{\sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)}{\sinh(x) \sinh(y)}}$$

$$\coth(x + y) = \frac{\coth(x) \coth(y) + 1}{\coth(x) + \coth(y)}$$

A fórmula para o arco duplo obtém-se diretamente fazendo  $x = y$ .

$$\coth(x + x) = \frac{\coth(x) \coth(x) + 1}{\coth(x) + \coth(x)}$$

$$\coth(2x) = \frac{\coth^2(x) + 1}{2 \coth(x)}$$

$$\coth(2x) = \frac{\coth(x) + \tanh(x)}{2}$$

■

## B.7 Integral de Função Ímpar em Intervalo Simétrico

**Proposição B.1.** *Sejam  $a \geq 0$  e  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função ímpar e integrável, então  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ .*

**Demonstração:** Como

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^{-a} -f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

e como  $f(x)$  é uma função ímpar, então

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^{-a} -f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) - f(x)]dx = 0$$

■

## B.8 Funções Hiperbólicas e Números Complexos

Usando o fato que

$$\sinh(x) = -i \sin(ix)$$

e

$$\cosh(x) = \cos(ix)$$

iremos determinar as expressões para Tangente, Secante, Cossecante e Cotangente Hiperbólicas.

Para a Tangente Hiperbólica, temos:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{-i \sin(ix)}{\cos(ix)}$$

$$\boxed{\tanh(x) = -i \tan(ix)}$$

Ou ainda, sabendo que a tangente é uma função ímpar, vem

$$\tanh(x) = -i \tan(ix)$$

$$\tanh(ix) = -i \tan(i^2 x)$$

$$\tanh(ix) = -i \tan(-x)$$

$$\boxed{\tanh(ix) = i \tan(x)}$$

Para a Secante Hiperbólica, temos:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\cos(ix)}$$

$$\boxed{\operatorname{sech}(x) = \sec(ix)}$$

Ou ainda, sabendo que a secante é uma função par, vem

$$\operatorname{sech}(x) = \sec(ix)$$

$$\operatorname{sech}(ix) = \sec(i^2 x)$$

$$\operatorname{sech}(ix) = \sec(-x)$$

$$\boxed{\operatorname{sech}(ix) = \sec(x)}$$

Para a Cossecante Hiperbólica, temos:

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{-i \sin(ix)} = \frac{i}{\sin(ix)}$$

$$\boxed{\operatorname{csch}(x) = i \operatorname{csc}(ix)}$$

Ou ainda, sabendo que a cossecante é uma função ímpar, vem

$$\operatorname{csch}(x) = i \operatorname{csc}(ix)$$

$$\operatorname{csch}(ix) = i \operatorname{csc}(i^2 x)$$

$$\operatorname{csch}(ix) = i \operatorname{csc}(-x)$$

$$\boxed{\operatorname{csch}(ix) = -i \operatorname{csc}(x)}$$

Para a Cotangente Hiperbólica, temos:

$$\operatorname{coth}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{\cos(ix)}{-i \sin(ix)} = \frac{i \cos(ix)}{\sin(ix)}$$

$$\boxed{\operatorname{coth}(x) = i \operatorname{cot}(ix)}$$

Ou ainda, sabendo que a cotangente é uma função ímpar, vem

$$\operatorname{coth}(x) = i \operatorname{cot}(ix)$$

$$\operatorname{coth}(ix) = i \operatorname{cot}(i^2 x)$$

$$\operatorname{coth}(ix) = i \operatorname{cot}(-x)$$

$$\boxed{\operatorname{coth}(ix) = -i \operatorname{cot}(x)}$$



## APÊNDICE C – Links para Construções no Geogebra

### 1. Jogo da Corda Suspensa

<<https://www.geogebra.org/m/twyhnnks>>

### 2. Corda Interplanetária

<<https://1drv.ms/x/s!Ao4A4XiZWRXLgatMieNJRxZfUm87QQ?e=072qby>>

### 3. Jogo do Comprimento x Área

<<https://www.geogebra.org/m/ajrwpfs2>>

### 4. Aproximação de Catenárias por Parábolas

<<https://www.geogebra.org/m/myzcbfev>>

### 5. Parábola Rolante

<<https://www.geogebra.org/m/cmrb5rff>>

### 6. Catenária e Tractriz (Involuta)

<<https://www.geogebra.org/m/ekpuzubq>>

### 7. Catenária e Tractriz (Evoluta)

<<https://www.geogebra.org/m/kkncfsde>>

**APÊNDICE D** – Formulário Docente da Sequência Didática

Prezado professor e colega,

este trabalho foi feito pensando em você. Queremos que estas atividades propostas possam, de fato, te ajudar a enriquecer suas aulas. Como vimos, o assunto de Funções Hiperbólicas é rico de aplicações. Caso tenha se animado em replicar alguma destas atividades com seus alunos, por favor, nos conte sua experiência.

Para compartilhar basta preencher o formulário no link:

<<https://forms.gle/j9j12Ko7tjgY9UFo6>>.

Sua ajuda é fundamental para continuidade de nosso trabalho.

Atenciosamente,

o autor.