

ERIKA CRISTINA DE FREITAS

# Programação Linear: da teoria à aplicação em sala de aula



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE MATEMÁTICA

2021

ERIKA CRISTINA DE FREITAS

# Programação Linear: da teoria à aplicação em sala de aula

**Dissertação** apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE**.

**Área de Concentração:** Matemática.

**Linha de Pesquisa:** Otimização linear.

**Orientador(a):** Prof(a). Dr(a). Elisa Regina dos Santos.

UBERLÂNDIA - MG

2021

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

F866 2022	<p>Freitas, Erika Cristina de, 1980- Programação Linear: da teoria à aplicação em sala de aula [recurso eletrônico] / Erika Cristina de Freitas. - 2022.</p> <p>Orientadora: Elisa Regina dos Santos. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.17">http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.17</a> Inclui bibliografia. Inclui ilustrações.</p> <p>1. Matemática. I. Santos, Elisa Regina dos, 1984-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 51</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 7, PROFMAT				
Data:	dez de dezembro de dois mil e vinte e um	Hora de início:	16:00	Hora de encerramento:	17:40
Matrícula do Discente:	11912PFT008				
Nome do Discente:	Erika Cristina de Freitas				
Título do Trabalho:	Programação Linear: da teoria à aplicação em sala de aula				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Otimização Linear				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), assim composta pelos professores doutores: Régis Leandro Braguim Stábile - IFSP; Ana Carla Piantella - FAMAT/UFU e Elisa Regina dos Santos - FAMAT/UFU, orientadora da candidata.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Elisa Regina dos Santos, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata, e agradeceu os presentes. Posteriormente, concedeu à discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir a senhora presidente concedeu a palavra, pela ordem, sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Regis Leandro Braguim Stabile, Usuário Externo**, em 10/12/2021, às 17:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ana Carla Piantella, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/12/2021, às 17:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Elisa Regina dos Santos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/12/2021, às 17:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3220020** e o código CRC **F0CCA705**.

# Dedicatória

Dedico esse trabalho ao meu pai Célio Faria de Freitas (in memoriam) por me incentivar e me apoiar para a conclusão do mestrado.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus a oportunidade de concluir mais essa etapa na minha carreira profissional. Agradeço ao meu filho, Pedro Vinícius, pela compreensão e parceria de vida. Agradeço à minha mãe Lourdes Aparecida de Freiras e ao meu pai Célio Faria de Freitas pelos valores que me ensinaram, especialmente a persistência. Agradeço a Elisa Regina dos Santos, minha professora orientadora que foi conforto, apoio e dedicação desde o início deste trabalho. Agradeço a todos os meus alunos, que contribuíram para o meu processo de aprendizagem e amadurecimento profissional. Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Agradeço a Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia pelo compromisso com o ensino público, gratuito e de qualidade.

FREITAS, E. C. *Programação Linear: da teoria à aplicação em sala de aula*. 2021. 92 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo de problemas de Programação Linear. Para tanto, investigaremos que tipos de problemas são esses, traremos exemplos de como modelar tais problemas, mostraremos como é possível determinar a solução desses problemas em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  geometricamente, apresentaremos o funcionamento do algoritmo Simplex para a solução de problemas desse tipo, incluindo toda fundamentação teórica necessária, e relataremos uma aplicação desses problemas em uma sala de aula do ensino médio.

*Palavras-chave:* Programação Linear, método gráfico, algoritmo Simplex.

FREITAS, E. C. *Linear programming: from theory to classroom application*. 2021. 92 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Abstract

This work aims to study Linear Programming problems. Therefore, we will investigate what these types of problems are, we will bring examples of how to model such problems, we will show how it is possible to determine the solution of these problems in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$  geometrically, we will present how the Simplex algorithm works to solve problems of this type, including all the necessary theoretical foundation, and we will report an application of these problems in a high school classroom.

*Keywords:* Linear Programming, graphic method, Simplex algorithm.

# Sumário

Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	1
<b>1 Modelos e Forma Padrão</b>	<b>3</b>
1.1 Exemplos de modelos de programação linear . . . . .	3
1.2 Forma padrão de um PPL . . . . .	7
1.3 Notações . . . . .	10
<b>2 Solução gráfica de um PPL</b>	<b>12</b>
2.1 Hiperplanos e semiespaços . . . . .	12
2.2 Solução gráfica . . . . .	13
<b>3 Fundamentação Teórica do Simplex</b>	<b>19</b>
3.1 Caracterização do conjunto de soluções viáveis . . . . .	19
3.2 Caracterização de vértice . . . . .	25
3.3 Existência de vértice ótimo . . . . .	30
<b>4 O Algoritmo Simplex</b>	<b>33</b>
4.1 Primeiras ideias . . . . .	33
4.2 Redução do PPL à forma canônica . . . . .	39
4.3 Determinação de uma nova solução básica viável . . . . .	41
4.4 Determinação de uma solução básica viável inicial . . . . .	51
4.5 Interpretação geométrica do Simplex . . . . .	68
4.6 Fluxograma do algoritmo Simplex . . . . .	73
<b>5 Aplicação em sala de aula</b>	<b>74</b>

5.1	Primeira aula . . . . .	74
5.2	Segunda aula . . . . .	78
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>81</b>

# Introdução

A *Programação Linear* consiste em determinar a melhor solução para problemas cujos modelos possam ser representados por expressões lineares. A tarefa da Programação Linear é maximizar ou minimizar uma função linear, denominada *Função Objetivo*, respeitando um sistema linear de equações ou inequações que recebem o nome de *Restrições*. Tais restrições geram uma região chamada *Conjunto de Soluções Viáveis*. A solução viável que maximiza ou minimiza a função objetivo é chamada *Solução Ótima*. O objetivo da programação linear é determinar essa solução.

Segundo Bazaraa et al. [2], os primeiros problemas de programação linear são creditados ao matemático George B. Dantzig e foram obtidos por volta de 1947 enquanto ele trabalhava para a Força Aérea dos Estados Unidos. Embora o matemático e economista L. V. Kantorovich tenha formulado e resolvido problemas desse tipo por volta de 1939, seu trabalho permaneceu desconhecido até 1959, e por essa razão o crédito pelos primeiros problemas é dado a Dantzig.

O termo “programação linear” foi cunhado pelo matemático e economista T. C. Koopmans em 1948. Um problema de programação linear é frequentemente denominado *PPL*.

Para resolver um PPL são necessários dois passos. O primeiro é a *Modelagem* do problema e o segundo é o método de resolução do modelo. De acordo com Bregalda et al. [1], o método mais utilizado para a resolução de um PPL é o *Método Simplex*, cuja primeira versão foi publicada por Dantzig em 1949 e aperfeiçoada posteriormente por diversos pesquisadores.

Os problemas de programação linear surgem em diversas áreas, entre eles encontramos o problema da dieta, o problema da alocação de recursos e o problema de transporte.

Neste trabalho serão apresentados exemplos e modelos de alguns PPLs clássicos, a resolução gráfica de um PPL, o Método Simplex, e por fim, a aplicação de problemas de Programação Linear em uma sala de aula de ensino médio. Para isso, estruturamos a dissertação da seguinte forma.

No capítulo 1, a ênfase será sobre a modelagem de problemas de Programação Linear através de exemplos e sobre como colocar um PPL no que chamaremos de forma padrão.

No capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos preliminares e estudaremos a representação gráfica de problemas de Programação Linear onde descreveremos um procedimento geométrico para resolver um PPL. Veremos que resolver graficamente o PPL consiste em encontrar, entre

o conjunto de pontos ou soluções viáveis, o ponto que otimiza o valor da função objetivo. Veremos também que graficamente a solução ótima do PPL encontra-se sempre em um vértice e por esse motivo devemos focar em procurar por um vértice que otimize a função objetivo.

No capítulo 3, será apresentada a teoria básica para o desenvolvimento do algoritmo Simplex. Vamos caracterizar o PPL quanto ao conjunto  $M$  de soluções viáveis e quanto aos vértices. Por fim, provaremos a existência de um vértice ótimo para problemas com solução.

No capítulo 4, vamos mostrar a base do funcionamento do algoritmo Simplex. A partir de uma solução básica viável inicial, mostraremos como gerar novas soluções básicas viáveis cada vez melhores até chegarmos a uma que não pode mais ser melhorada, já que entre as soluções básicas viáveis se encontra uma que é a ótima.

O último capítulo registra como foi a aplicação de problemas de Programação Linear em sala de aula para alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola de Uberlândia-MG. Acreditamos que essa atividade foi importante, pois conhecer e aprender Programação Linear no Ensino Médio contribui ativamente para a vida dos jovens, seja por capacitá-los para o desenvolvimento de diferentes atividades no mercado de trabalho, como por exemplo em farmácias, indústrias, empresas, entre outros, mas também de subsidiá-los para o enfrentamento da era digital e do mundo tecnológico atual.

Erika Cristina de Freitas

Uberlândia-MG, 10 de dezembro de 2021.

# Capítulo 1

## Modelos e Forma Padrão

Em geral, um PPL é dado por um conjunto de restrições do tipo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (1.1)$$

ou

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad (1.2)$$

ou

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad (1.3)$$

com  $i = 1, \dots, m$ , e uma função objetivo

$$Q(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

onde os  $a_{ij}$ 's, os  $b_i$ 's e os  $c_j$ 's são constantes fixas e estamos interessados em determinar valores para as variáveis  $x_1, \dots, x_n$  que maximizem ou minimizem a função objetivo, de acordo com o problema considerado.

Conforme dito na Introdução, para resolver um PPL são necessários dois passos: a modelagem do problema e o método de resolução do modelo. Neste capítulo, apresentaremos exemplos de como modelar um PPL, falaremos sobre como colocar um PPL na forma padrão, que será essencial para a aplicação do método Simplex, e fixaremos algumas notações que serão utilizadas ao longo do trabalho. O texto aqui apresentado foi baseado no Capítulo 2 do livro [1].

### 1.1 Exemplos de modelos de programação linear

É importante ressaltar que não existem técnicas precisas para a modelagem de um problema, para isto, é necessário experiência e capacidade de analisar e interpretar o problema para que o modelo possa ser consistente com a situação real e assim produzir uma solução viável condizente com a realidade. Apresentaremos nesta seção alguns exemplos de como obter o modelo de um problema de programação linear.

**Exemplo 1.1** (Problema da dieta). *Um nutricionista precisa estabelecer uma dieta contendo, pelo menos, 10 unidades de vitamina A, 30 unidades de vitamina B e 18 unidades de vitamina C. Essas vitaminas estão contidas em quantidades variadas em cinco alimentos que vamos chamar de  $S_1, S_2, S_3, S_4$  e  $S_5$ . O quadro a seguir mostra o número de unidades das vitaminas A, B e C em cada unidade desses cinco alimentos bem como seu custo por unidade.*

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
A	0	1	5	4	3
B	2	1	0	3	2
C	3	1	0	9	0
Custo	4	2	1	10	5

*Vamos determinar um modelo para calcular as quantidades dos cinco alimentos que devem ser incluídas na dieta diária, a fim de encontrarmos esses teores de vitaminas com o menor custo.*

Sejam  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $x_5$  o número de unidades dos alimentos  $S_1, S_2, S_3, S_4$  e  $S_5$ , respectivamente, de uma dieta diária. O teor mínimo de cada vitamina pode ser expresso da seguinte forma:

$$0x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 \geq 10$$

$$2x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 2x_5 \geq 30$$

$$3x_1 + x_2 + 0x_3 + 9x_4 + 0x_5 \geq 18.$$

Como não podemos consumir uma quantidade negativa de unidades dos alimentos, temos também:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0.$$

O custo por dia dessa dieta, em unidades monetárias, será expresso pela função:

$$Q(x) = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 10x_4 + 5x_5.$$

O problema consiste em determinar  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  (ponto ótimo) tal que todas as restrições (inequações) sejam satisfeitas e, ao mesmo tempo, o valor da função objetivo  $Q(x)$  seja minimizado.

Sendo assim, podemos modelar o problema da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 2x_5 \geq 30 \\ 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 9x_4 + 0x_5 \geq 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 10x_4 + 5x_5 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{array} \right.$$

**Exemplo 1.2** (Problema de alocação de recursos). *Uma empresa para fabricar  $n$  produtos  $P_j$  necessita de  $m$  recursos  $F_i$ . Para cada unidade de produto  $P_j$  são necessárias  $a_{ij}$  unidades do recurso  $F_i$ . De cada recurso  $F_i$  só existe a quantidade  $b_i$  com  $b_i \geq 0$ . Sabendo que cada unidade do produto  $P_j$  fornece lucro  $c_j$ , qual a quantidade  $x_j$  que deve ser produzida de cada produto  $P_j$  para que o lucro seja o maior possível?*

Para cada recurso  $F_i$  temos uma restrição:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m. \end{aligned}$$

Como não podemos fabricar uma quantidade negativa temos:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0.$$

A função lucro  $Q(x)$ , que é a nossa função objetivo, pode ser representada por:

$$Q(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Esse problema consiste em determinar  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  (ponto ótimo) que satisfaça as  $m$  restrições dos recursos  $F_i$ , as  $n$  restrições de não negatividade das quantidades a serem produzidas e, ao mesmo tempo, maximize a função objetivo  $Q(x)$ .

Então, o modelo do problema é:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = Q(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{array} \right.$$

Podemos também representar o modelo de forma mais compacta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n c_jx_j = Q(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{array} \right.$$

**Exemplo 1.3** (Problema da formação de ligas metálicas). *Queremos formar  $l$  ligas  $L_s$ , a partir de  $r$  matérias-primas  $R_j$ . Sabemos que:*

- a) uma unidade de matéria-prima  $R_j$  contém  $a_{ij}$  unidades do metal  $M_i$ ;
- b) uma unidade da liga  $L_s$  contém  $b_{is}$  unidades do metal  $M_i$ ;
- c) uma unidade da matéria-prima  $R_j$  custa  $P_j$  unidades monetárias;
- d) uma unidade da liga  $L_s$  é vendida a  $q_s$  unidades monetárias;
- e) de cada matéria-prima  $R_j$  só existem  $k_j$  unidades disponíveis.

Qual a quantidade  $x_j$  da matéria-prima  $R_j$  a ser comprada e qual a quantidade  $y_s$  da liga  $L_s$  a ser vendida para que o lucro seja máximo?

Como o metal contido nas matérias-primas deve ser no mínimo igual ao contido nas ligas, que é o produto final, temos

$$\sum_{j=1}^r a_{ij}x_j \geq \sum_{s=1}^l b_{is}y_s,$$

para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Como de cada matéria-prima  $R_j$  temos somente  $k_j$  unidades disponíveis, teremos

$$x_j \leq k_j,$$

para todo  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ .

Como não podemos comprar e nem vender quantidades negativas:

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, r\}$$

$$y_s \geq 0, \quad \forall s \in \{1, 2, \dots, l\}.$$

Como o lucro é igual ao preço de venda menos o preço de custo, a função lucro  $Q(x)$ , que é nossa função objetivo, é representada por:

$$Q(x) = \sum_{s=1}^l q_s y_s - \sum_{j=1}^r p_j x_j.$$

Logo, esse problema consiste em determinar o ponto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_l)$  (ponto ótimo) que satisfaça a todas as restrições e maximize a função objetivo.

Portanto, o modelo do problema é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^r a_{ij}x_j \geq \sum_{s=1}^l b_{is}y_s \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \leq k_j \quad (j = 1, 2, \dots, r) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r) \\ y_s \geq 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l) \\ \sum_{s=1}^l q_s y_s - \sum_{j=1}^r p_j x_j = Q(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{array} \right.$$

## 1.2 Forma padrão de um PPL

A elaboração de um método (ou algoritmo) que determine a solução de um PPL torna necessário que o problema seja colocado em uma forma que permita a aplicação direta desse algoritmo. No caso de programação linear, o algoritmo mais utilizado é o **Algoritmo Simplex** e, para que o Simplex seja empregado, é necessário reduzir o PPL à forma padrão definida a seguir.

**Definição 1.4.** Dizemos que o modelo de um PPL encontra-se na **forma padrão** quando ele é formulado da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \text{ onde } b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n c_jx_j = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Os dois primeiros conjuntos de equações usualmente são denominados **restrições** do PPL, o segundo denomina-se **condições de não negatividade** e a última equação representa a **função objetivo**.

O modelo (1.4) também pode ser representado matricialmente, conforme definimos a seguir. Considere:

$A \rightarrow$  matriz  $m \times n$ , formada pelos elementos  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ ;

$a_k \rightarrow$  vetor  $m \times 1$ , formado pelos elementos  $a_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , referentes à  $k$ -ésima coluna da matriz  $A$ ;

$b \rightarrow$  vetor  $m \times 1$ , formado pelos elementos  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;

$c \rightarrow$  vetor  $n \times 1$ , formado pelos elementos  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;

$x \rightarrow$  vetor  $n \times 1$ , formado pelos elementos  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

A **forma padrão** de um PPL pode ser representada da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_jx_j = b, \text{ onde } b \geq 0 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n c_jx_j = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Ou então:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b, \text{ onde } b \geq 0 \\ x \geq 0 \\ c^T x = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Vejamos agora como reduzir um PPL qualquer à forma padrão definida em (1.4). Vamos analisar todos os casos que podem ocorrer e mostrar como eles podem ser reduzidos à forma padrão.

a) Ocorrência de desigualdades

Qualquer desigualdade pode ser convertida em uma equação se subtrairmos ou adicionarmos variáveis positivas denominadas **variáveis de folga**.

a.1) Considere a inequação linear  $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k$ , que pode ser escrita na forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \leq b_k.$$

Introduzindo uma variável de folga positiva  $x_{n+1}$ , essa inequação é equivalente à equação:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + x_{n+1} = b_k.$$

a.2) Considere a inequação linear

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \geq b_k.$$

Introduzindo uma variável de folga positiva  $x_{n+1}$ , essa inequação é equivalente à equação:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j - x_{n+1} = b_k.$$

b) Ocorrência de  $b_i < 0$

Neste caso, basta multiplicar a restrição  $i$  por  $-1$ , pois os coeficientes  $a_{ij}$  podem ter qualquer sinal.

c) Ocorrência de variáveis livres

Chamaremos de **variáveis livres** as variáveis que podem assumir valores positivos, negativos ou nulo. Considere  $x_k$  uma variável livre. Podemos substituir  $x_k$  por duas variáveis,  $x'_k$  e  $x''_k$ , de forma que  $x_k = x'_k - x''_k$ , sendo  $x'_k \geq 0$  e  $x''_k \geq 0$ . Assim:

$$x_k > 0 \Leftrightarrow x'_k > x''_k;$$

$$x_k = 0 \Leftrightarrow x'_k = x''_k;$$

$$x_k < 0 \Leftrightarrow x'_k < x''_k.$$

Dessa forma, trocamos uma variável livre por duas variáveis positivas.

d) Ocorrência de variável não positiva

Se o modelo possuir uma variável  $x_k \leq 0$ , basta trocá-la por sua simétrica, isto é, basta tomar  $x'_k = -x_k$  e substituir  $x_k$  por  $x'_k$  nas equações do problema. Então, obteremos  $x'_k \geq 0$ .

e) A função objetivo é de maximização

Neste caso, basta trocar a função objetivo dada por sua simétrica, passando a minimizar a nova função objetivo, pois  $\max\{Q(x)\} = \min\{-Q(x)\}$ . Assim, se temos uma função objetivo do tipo

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Máx!},$$

basta considerarmos

$$Q'(x) = -\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Mín!},$$

já que  $Q(x) = -Q'(x)$ .

**Exemplo 1.5.** *Vamos reduzir o seguinte modelo à forma padrão.*

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 \geq 5 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0 \\ -2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -9 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \geq 0, x_3 \leq 0 \text{ e } x_4 \text{ qualquer} \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = Q(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{array} \right.$$

Multiplicando a terceira restrição por  $-1$  e introduzindo as variáveis de folga nas desigualdades, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - x_6 = 5 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + x_7 = 0 \\ 2x_3 - x_4 - 2x_5 + x_8 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0, x_3 \leq 0 \text{ e } x_4 \text{ qualquer} \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = Q(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{array} \right.$$

Fazendo  $x_3 = -x'_3$ ,  $x_4 = x'_4 - x''_4$  e  $Q(x) = -Q'(x)$ , obtemos a forma padrão:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x'_3 + x'_4 - x''_4 + 4x_5 - x_6 = 5 \\ 2x_1 - x'_3 - 2x'_4 + 2x''_4 - x_5 + x_7 = 0 \\ -2x'_3 - x'_4 + x''_4 - 2x_5 + x_8 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - x'_4 + x''_4 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x'_3, x'_4, x''_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \\ -2x_1 - x_2 - x'_3 - 3x'_4 + 3x''_4 + x_5 = Q'(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{array} \right.$$

Para colocar o sistema na forma (1.6), considere:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x''_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 9 \\ 4 \end{vmatrix}.$$

Obtemos então:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases}$$

### 1.3 Notações

Fixaremos aqui algumas notações referentes a um PPL. Representaremos as variáveis por  $x_j$  e os principais parâmetros por  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c_j$ . O índice  $i$  indica a equação ou restrição onde o parâmetro aparece e o índice  $j$  indica a variável a qual o parâmetro está associado.

Para representar os vetores coluna omitiremos um dos índices. Assim:

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, \quad a_j = \begin{vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}.$$

Quando necessitarmos do vetor linha, utilizaremos a simbologia  $a_{i^*}$ . Dessa forma:

$$a_{i^*} = \left| a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in} \right|.$$

A solução ótima do PPL será representada por  $x^*$ . Quando for necessário diferenciar diversas soluções utilizaremos índices superiores  $x^1, x^2, \dots$ . Para nos referir a uma certa solução poderemos utilizar também o símbolo  $\hat{x}$ .

Para diferenciar a forma padrão da forma originalmente dada no problema, utilizaremos a seguinte simbologia:  $\bar{A}$  será a matriz composta pelos coeficientes  $a_{ij}$  originalmente dados no problema e  $A$  será a matriz referente à forma padrão. Da mesma forma, definiremos  $\bar{c}$ ,  $c$ ,  $\bar{x}$  e  $x$ . Quando não houver dúvidas em relação a forma considerada, utilizaremos  $A$ ,  $x$  e  $c$  no lugar de  $\bar{A}$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{c}$ , respectivamente.

Assim, dado o problema

$$\begin{cases} \bar{A}\bar{x} = b \\ \bar{x} \geq 0 \\ \bar{c}^T \bar{x} \rightarrow \text{Mín!} \end{cases}$$

uma vez colocado na forma padrão, ele será dado por:

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ c^T x = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases}$$

# Capítulo 2

## Solução gráfica de um PPL

Descreveremos neste capítulo um procedimento geométrico para resolver um PPL. Embora essa técnica possa ser aplicada apenas para problemas com um número reduzido de variáveis, ela permite uma visualização do método algébrico utilizado para determinar a solução do problema. Antes de apresentar tal procedimento, apresentaremos alguns conceitos preliminares. O texto aqui apresentado foi baseado no Capítulo 3 do livro [1].

### 2.1 Hiperplanos e semiespaços

**Definição 2.1.** Em  $\mathbb{R}^2$ , a **equação da reta** é da forma  $ax + by + c = 0$  com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Uma reta separa o plano em duas regiões chamadas **semiplanos**. A inequação  $ax + by + c < 0$  representa um semiplano e a inequação  $ax + by + c > 0$  representa o outro semiplano.

**Exemplo 2.2.** Para determinarmos o semiplano com inequação  $2x + 5y - 10 > 0$ , tomamos um ponto qualquer para teste. Considere o ponto  $(5, 5)$ . Se o substituirmos na inequação, teremos  $2 \cdot 5 + 5 \cdot 5 - 10 = 25 > 0$ . Como o ponto  $(5, 5)$  satisfaz à inequação  $2x + 5y - 10 > 0$ , então pertence ao semiplano por ela representado. Assim, o semiplano  $2x + 5y - 10 > 0$  encontra-se acima da reta  $2x + 5y - 10 = 0$ .

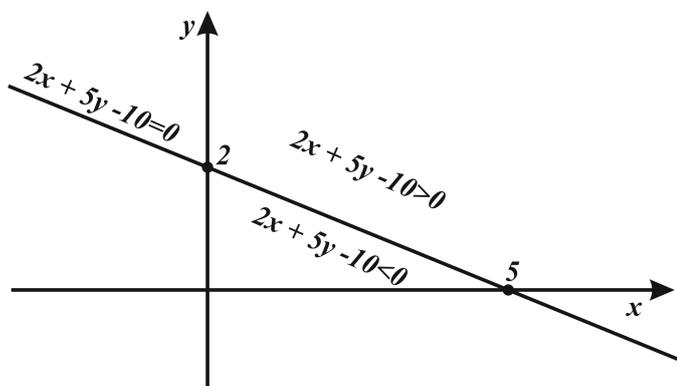


Figura 2.1: Semiplanos. Fonte: Elaborado pela autora.

**Definição 2.3.** Em  $\mathbb{R}^3$ , a **equação do plano** é da forma  $ax + by + cz + d = 0$  com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Um plano separa o  $\mathbb{R}^3$  em duas regiões que denominamos **semiespaços**. A inequação  $ax + by + cz + d < 0$  representa um semiespaço e a inequação  $ax + by + cz + d > 0$  representa o outro semiespaço.

**Exemplo 2.4.** O plano  $6x + 4y + 3z = 12$  divide o  $\mathbb{R}^3$  em dois semiespaços, que são representados pelas inequações  $6x + 4y + 3z < 12$  e  $6x + 4y + 3z > 12$ .

Considere o ponto  $(0, 3, 4)$ . Se o substituirmos na inequação, teremos  $6 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24 > 12$ . Como o ponto  $(0, 3, 4)$  satisfaz à inequação  $6x + 4y + 3z > 12$ , então pertence ao semiespaço por ela representado. Assim, o semiespaço  $6x + 4y + 3z > 12$  encontra-se acima do plano  $6x + 4y + 3z = 12$  e o semiespaço  $6x + 4y + 3z < 12$  encontra-se abaixo.

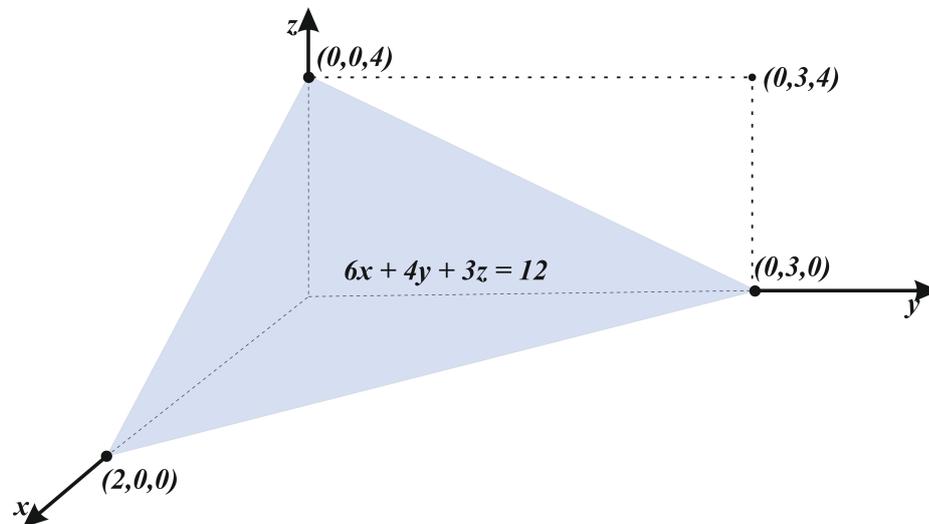


Figura 2.2: Semiespaços. Fonte: Elaborado pela autora.

**Definição 2.5.** Generalizando as definições anteriores para o  $\mathbb{R}^n$ , podemos definir **hiperplano** como o conjunto de pontos da forma  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tais que  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a_0$  com  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Podemos dizer que o hiperplano divide o  $\mathbb{R}^n$  em dois **semiespaços** representados pelas inequações ou desigualdades lineares:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > a_0$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n < a_0.$$

Note que a reta é o hiperplano no  $\mathbb{R}^2$  e o plano é o hiperplano no  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.2 Solução gráfica

Sabemos que um PPL é dado por um conjunto de restrições do tipo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n > (\text{ou } < \text{ ou } =) b_i, \quad (2.1)$$

sujeito as condições de não negatividade

$$x_i \geq 0 \quad (2.2)$$

e uma função objetivo

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = Q(x). \quad (2.3)$$

As restrições (2.1) e as condições de não negatividade (2.2) podem ser representadas por um conjunto de hiperplanos e semiespaços que determinam um conjunto de pontos do espaço denominado **conjunto de soluções viáveis**.

A função objetivo representa uma família de hiperplanos paralelos entre si ao considerarmos os possíveis valores que podem ser assumidos por  $Q(x)$ . A cada ponto do conjunto de soluções viáveis está associado um único hiperplano da família (2.3).

Resolver graficamente o PPL consiste em determinar o(s) ponto(s) do conjunto de soluções viáveis que otimiza(m) (minimiza ou maximiza) o valor de  $Q(x)$ . A solução gráfica de um PPL é possível apenas em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Conforme comentamos no início do capítulo, o método gráfico permite a visualização do método algébrico, do qual o método Simplex, que será desenvolvido a partir do próximo capítulo, é o mais conhecido. Veremos que a solução ótima de um PPL, quando existe, sempre ocorre em um **vértice** ou **ponto extremo** do conjunto de soluções viáveis. Assim, nos exemplos a seguir iremos procurar por um vértice que otimize a função objetivo.

**Exemplo 2.6.** *Considere o seguinte modelo de um PPL com duas variáveis:*

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{cases}$$

*Vamos determinar a solução ótima deste problema.*

Cada restrição e cada condição de não negatividade representa um semiplano no  $\mathbb{R}^2$ . O conjunto de soluções viáveis é determinado pela interseção de tais semiplanos e está representado na Figura 2.3.

Desejamos determinar qual (ou quais) ponto(s) de tal conjunto fornece(m) o maior valor para a função objetivo  $Q(x) = 2x_1 + x_2$ . Como a função objetivo representa uma família de retas paralelas, vamos escolher uma dessas retas e deslocá-la paralelamente no sentido de obter o(s) ponto(s) que propicia(m) o maior valor para  $Q(x)$  dentre os pontos do conjunto de soluções viáveis.

Fazendo  $Q(x) = 6$ , obtemos a reta  $2x_1 + x_2 = 6$ , que aparece na figura a seguir.

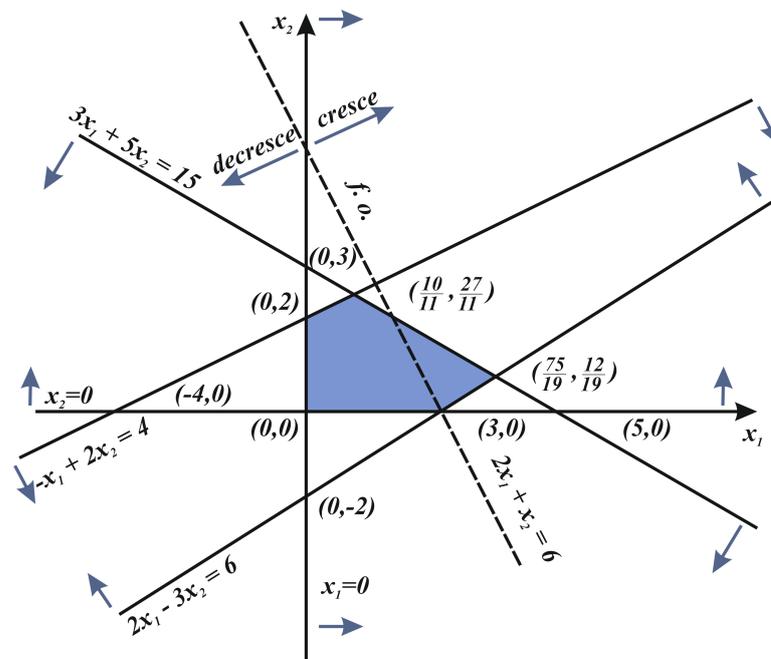


Figura 2.3: Representação gráfica do problema. Fonte: Elaborado pela autora.

Podemos ver que ao deslocar tal reta paralelamente para a direita aumentamos o valor de  $Q(x)$ . Devemos determinar então o ponto do conjunto de soluções viável que está contido na reta mais a direita paralela a reta  $2x_1 + x_2 = 6$ .

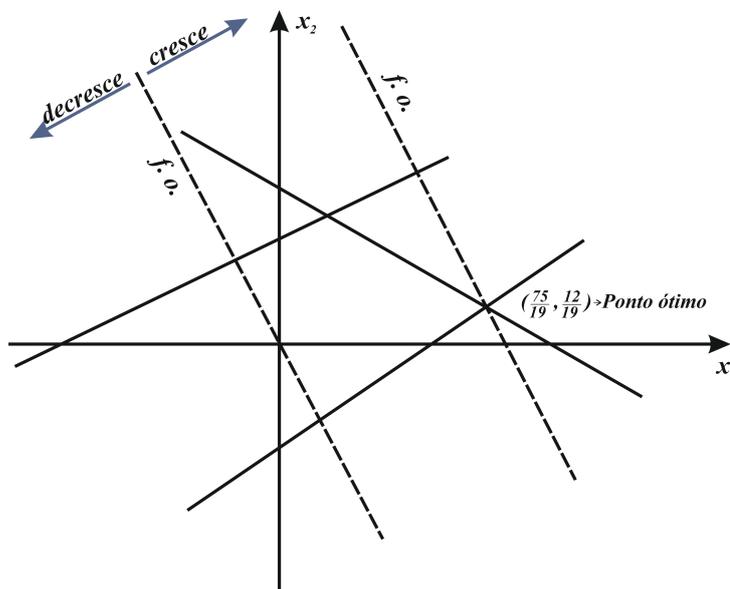


Figura 2.4: Solução ótima. Fonte: Elaborado pela autora.

Logo, a solução ótima é determinada pelo ponto  $(x_1, x_2) = \left(\frac{75}{19}, \frac{12}{19}\right)$ , onde  $Q(x_1, x_2) = \frac{162}{19}$ .

Sabemos que o gradiente de uma função  $f$  num ponto  $x$ , ou seja, o vetor  $\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$ , formado pelas derivadas parciais de  $f$  em  $x$ , aponta na direção de maior crescimento de  $f$ , e que qualquer direção que faz um ângulo menor que  $90^\circ$  com o gradiente implica no crescimento

da função.

Vamos supor a função objetivo passando por uma solução viável  $P$ . Qualquer ponto no semiplano à direita do plano determinado pela função objetivo determina uma direção que faz um ângulo menor que  $90^\circ$  com o gradiente (figura abaixo). Assim, nesse ponto percebemos o crescimento da função objetivo.

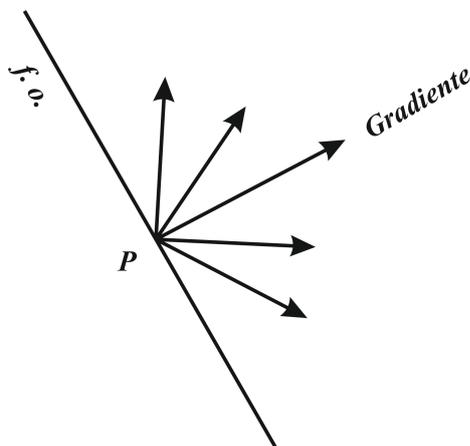


Figura 2.5: Direção de maior crescimento da função objetivo. Fonte: Elaborado pela autora.

Logo, se  $P$  for tal que não existe nenhuma solução viável situada no semiplano à direita do plano determinado pela função objetivo, então não será possível melhorar, ou seja, aumentar o valor da função objetivo. Nesse caso, o ponto  $P$  é solução ótima do PPL.

Esse fato nos mostra que a solução ótima, quando existe, localiza-se em pelo menos um ponto extremo ou vértice do conjunto de soluções viáveis.

Vejamos a seguir um exemplo com três variáveis. Note que esse exemplo exige uma boa visão espacial.

**Exemplo 2.7.** Considere o seguinte modelo de um PPL com três variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_3 \leq 10 \\ x_2 \leq 6 \\ x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = Q(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{array} \right.$$

Vamos determinar a solução ótima desse problema.

Neste caso, cada restrição e cada condição de não negatividade representa um semiespaço no  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto de soluções viáveis, determinado pela interseção de tais semiespaços, está representado na figura a seguir.

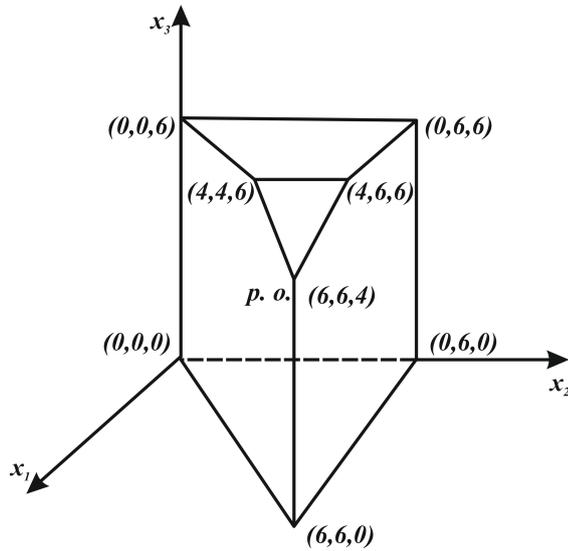


Figura 2.6: Representação gráfica do problema. Fonte: Elaborado pela autora.

A função objetivo representa uma família de planos paralelos. Escolhendo um desses planos e deslocando-o paralelamente, podemos obter o ponto que propicia o maior valor para  $Q(x)$  dentre os pontos do conjunto de soluções viáveis. Logo, a solução ótima é determinada pelo ponto  $(x_1, x_2, x_3) = (6, 6, 4)$ , onde  $Q(x_1, x_2, x_3) = 46$ .

Vamos ilustrar mais um último exemplo de solução gráfica de um PPL.

**Exemplo 2.8.** Considere o seguinte modelo de um PPL:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \\ 6x_1 + 10x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{cases}$$

Vamos determinar a solução ótima desse problema.

O conjunto das soluções viáveis é definido pela interseção das quatro restrições do modelo e está representado na figura a seguir.

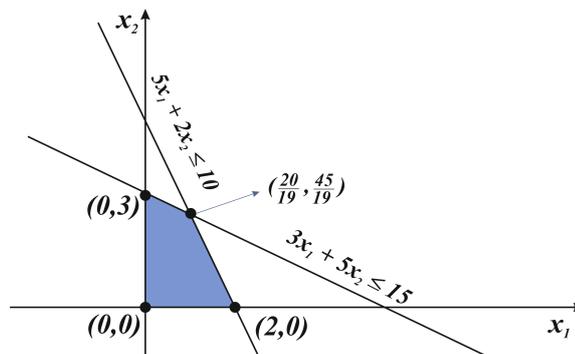


Figura 2.7: Representação gráfica do problema. Fonte: Elaborado pela autora.

Notamos que ao atribuir um valor para  $Q(x)$  e deslocar tal reta paralelamente para a direita aumentamos o valor de  $Q(x)$ . Logo, a solução ótima é determinada pelo ponto  $(\frac{20}{19}, \frac{45}{19})$ , onde  $Q(x_1, x_2) = 30$ .

# Capítulo 3

## Fundamentação Teórica do Simplex

Neste capítulo, apresentaremos a fundamentação teórica necessária para justificarmos a validade do método Simplex. Procuramos sempre que possível fazer um paralelo entre conceitos algébricos e geométricos. O texto aqui apresentado foi baseado no Capítulo 4 do livro [1].

### 3.1 Caracterização do conjunto de soluções viáveis

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos necessários para caracterizarmos o conjunto de soluções viáveis de um PPL. Para tanto, vamos começar recapitulando alguns conceitos já apresentados.

Um problema de programação linear pode ser sempre reduzido à forma:

$$\begin{cases} Ax = b & (3.1) \\ x \geq 0 & (3.2) \\ Q(x) = c^T x \rightarrow \text{Mín!} & (3.3) \end{cases}$$

O conjunto de equações e inequações (3.1) e (3.2) é denominado o conjunto de **restrições** do problema e (3.3) é a **função objetivo**.

O conjunto  $M$  de pontos que satisfazem o sistema de restrições (3.1) e (3.2) é denominado **conjunto de soluções viáveis**. Neste capítulo, vamos denominar  $M$  o conjunto das soluções viáveis do PPL escrito na forma padrão.

A solução viável  $x^*$  que minimiza a função objetivo  $Q(x)$  é denominada **solução ótima** do PPL.

Consideraremos a matriz  $A$  com tamanho  $m \times n$ . Assim, as dimensões de  $x$ ,  $b$  e  $c$  serão  $n$ ,  $m$  e  $n$ , respectivamente. Vamos supor ainda que  $\text{posto}(A) = m \leq n$ , pois caso  $\text{posto}(A) = r < m$  temos  $(m - r)$  equações redundantes que podem ser eliminadas. Vamos supor então eliminadas as equações redundantes, o que não altera o conjunto de soluções viáveis.

**Definição 3.1.** Uma **métrica** num conjunto não vazio  $M$  é uma função  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^*$  que

associa a cada par ordenado  $(x, y)$  de pontos de  $M$  um número real  $d(x, y)$ , chamada **distância** do ponto  $x$  ao ponto  $y$ , de tal modo que

$$i) \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y;$$

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow x \neq y;$$

$$ii) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$iii) \quad d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z);$$

para todos  $x, y, z \in M$ . Um **espaço métrico** é um par  $(M, d)$  formado por um conjunto  $M$  e uma métrica  $d$  em  $M$ .

**Definição 3.2.** Um subconjunto  $A$  de um espaço métrico  $M$  é dito **limitado**, se existir um número real  $a$  tal que  $d(x, y) \leq a$  para todos  $x, y \in A$ .

**Exemplo 3.3.** Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  dois pontos quaisquer do  $\mathbb{R}^n$ . O conjunto  $\mathbb{R}^n$  munido da métrica

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

é um espaço métrico.

Nesse espaço, o conjunto

$$X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \leq K; x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

é limitado. Note que o número real  $K$  é tal que  $d(x, y) \leq K$  para quaisquer  $x, y$  em  $X$ .

O conjunto de soluções viáveis de um PPL pode ou não ser limitado.

**Definição 3.4.** Sejam  $M$  um espaço métrico,  $r$  um número real positivo e  $p$  um ponto de  $M$ . A **bola aberta** de centro  $p$  e raio  $r$  é o conjunto

$$B(p, r) = \{x \in M : d(x, p) < r\}.$$

**Definição 3.5.** Sejam  $M$  um espaço métrico,  $N$  um subconjunto de  $M$  e  $p$  um ponto de  $M$ . Diremos que  $p$  é um **ponto interior** de  $N$ , se existir uma bola aberta  $B(p, r)$  inteiramente contida em  $N$ , e diremos que  $p$  é um **ponto de aderência** de  $N$ , se para toda bola aberta existir  $x \in N$  tal que  $x \in B(p, r)$ . O conjunto de todos os pontos de aderência de  $N$ , denominado **fecho** de  $N$ , contém todos os pontos interiores. Pontos do fecho de  $N$ , que não são interiores, são chamados de **pontos de fronteira** de  $N$ . Assim, o fecho de  $N$  é dado pelos pontos interiores e pelos pontos de fronteira de  $N$ .

**Exemplo 3.6.** O conjunto  $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$  tem o zero como ponto de aderência, embora ele não pertença ao conjunto.

**Definição 3.7.** Sejam  $A$  e  $N$  subconjuntos do espaço métrico  $M$  e  $\overline{N}$  o conjunto dos pontos de aderência de  $N$ . Diremos que  $N$  é **fechado** em  $M$ , se  $\overline{N} = N$ . Diremos que  $A$  é **aberto** em  $M$ , se o seu complementar  $M - A$  é fechado em  $M$ .

Pode parecer que os conceitos de aberto e fechado exprimem ideias mutuamente contraditórias. Entretanto, é possível verificar que o  $\mathbb{R}^n$  e o conjunto vazio são simultaneamente abertos e fechados (veja [3]).

A seguir apresentamos ilustrações dos conceitos de aberto, fechado, limitado e ilimitado:

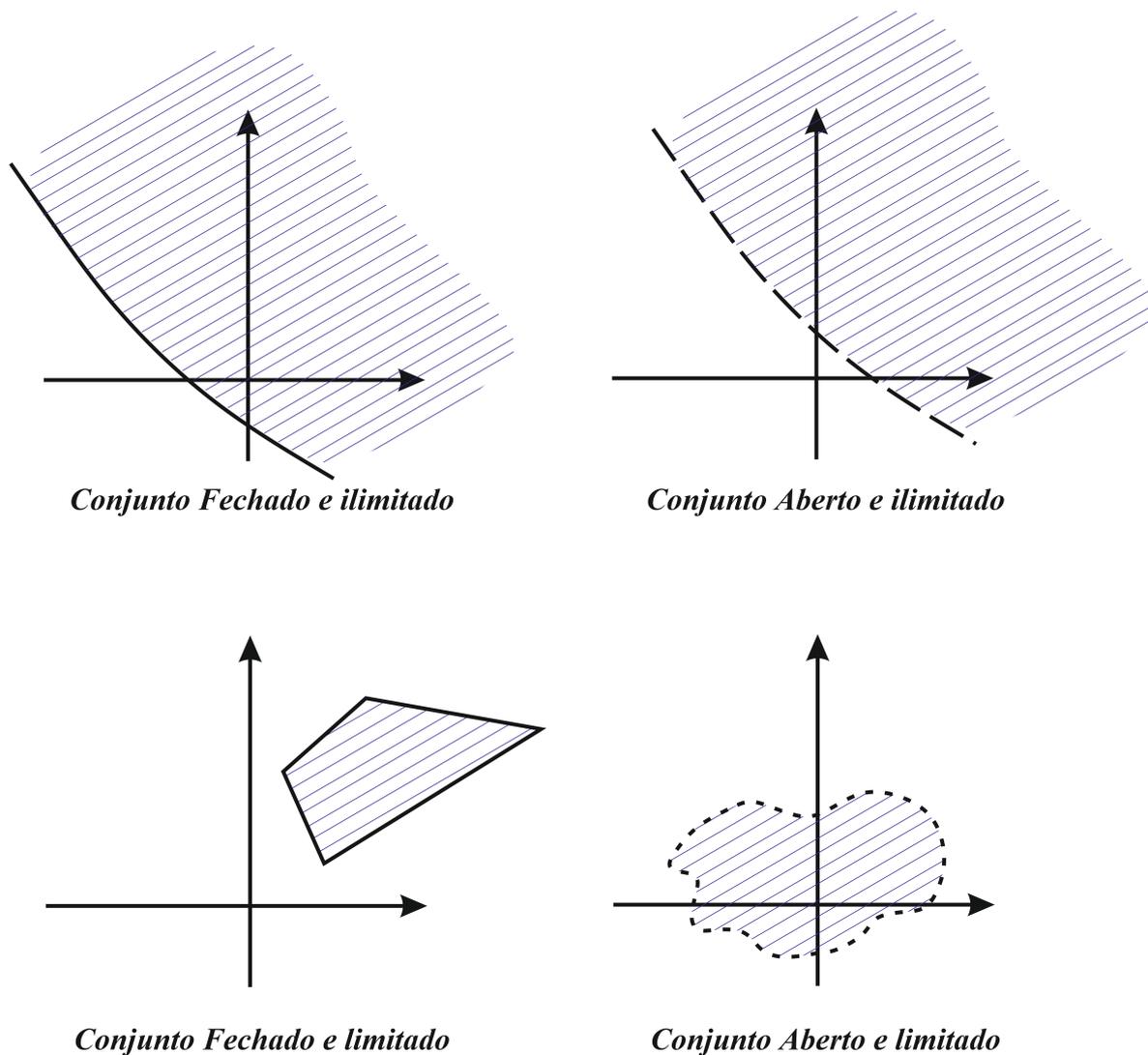


Figura 3.1: Ilustrações dos conceitos. Fonte: Elaborado pela autora.

Nas figuras acima, consideramos as linhas cheias e tracejadas representando pontos que pertencem e não pertencem ao conjunto, respectivamente.

**Observação 3.8.** a) O semiespaço dado pela inequação  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j$  é fechado, pois o conjunto dos pontos de aderência desse semiespaço é o próprio semiespaço.

b) Seja  $M$  o conjunto formado pela interseção de semiespaços fechados da forma

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, & \text{para todo } i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ x_j \geq 0, & \text{para todo } j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

É possível verificar que a interseção de uma família qualquer (finita ou infinita) de subconjuntos fechados de um espaço métrico é um subconjunto fechado desse espaço (veja [3]). Como o conjunto de soluções viáveis de um PPL é descrito por um modelo que pode sempre ser reduzido à forma acima, temos que esse conjunto é sempre fechado.

c) Um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  é dito **compacto** se ele for fechado e limitado. Esse tipo de conjunto possui propriedades especiais. Uma delas é que toda função real e contínua, definida num conjunto compacto não vazio, possui máximo e mínimo nesse conjunto (veja [3]). Como o conjunto de soluções viáveis de um PPL é fechado, temos que um PPL cujo conjunto de soluções viáveis é limitado (não vazio) sempre possui solução ótima.

Seja  $M$  o conjunto de soluções viáveis de um PPL. Temos os seguintes possíveis casos:

- 1)  $M = \emptyset$ : o PPL não tem solução viável e não possui solução ótima.
- 2)  $M \neq \emptyset$  e limitado: o PPL tem solução ótima.
- 3)  $M \neq \emptyset$  e não limitado (dois possíveis casos):

3.1)  $Q(x)$  possui ponto ótimo em  $M$ . Neste caso, o PPL possui solução ótima.

3.2)  $Q(x)$  não possui ponto ótimo em  $M$ , ou seja,  $Q(x)$  pode crescer ou decrescer ilimitadamente. Neste caso, o PPL não possui solução ótima.

**Definição 3.9.** Sejam  $x^1, x^2, \dots, x^k$  vetores de  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  números reais. Dizemos que  $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i$  é uma **combinação linear convexa** se  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) e se  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ . Se  $\alpha_i > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , temos uma **combinação linear convexa legítima**.

**Exemplo 3.10.** Sejam  $x^1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ ,  $x^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$  e  $x^3 = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$ . O vetor  $x = \frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} + \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{6} \end{vmatrix}$  é uma combinação linear convexa dos vetores  $x^1, x^2$  e  $x^3$ .

Geometricamente, uma combinação linear convexa de dois pontos,  $x^1$  e  $x^2$ , é um ponto contido no segmento de reta de  $x^1$  a  $x^2$ .

**Definição 3.11.** Um conjunto de pontos  $M$  é dito **convexo**, se toda combinação linear convexa de qualquer par de pontos  $x^1$  e  $x^2$  em  $M$  também pertence a  $M$ .

**Exemplo 3.12.** Em  $\mathbb{R}^n$ , uma reta, um hiperplano e um semiespaço são conjuntos convexos.

**Exemplo 3.13.** a) O conjunto vazio é convexo.

De fato, se o conjunto vazio não fosse convexo deveria existir uma combinação linear convexa de um par de pontos do vazio que não pertencesse ao vazio. Como não existe um par de pontos no conjunto vazio, a afirmação acima é verdadeira.

b) Todo conjunto unitário é convexo.

Considere um conjunto unitário  $A = \{a\}$ . Como  $A$  contém apenas um elemento, então qualquer combinação linear convexa de dois pontos de  $A$  é da forma  $x = \alpha a + (1 - \alpha)a = a$ . Logo,  $x \in A$ .

Apresentamos a seguir algumas ilustrações de conjuntos convexos e não convexos.

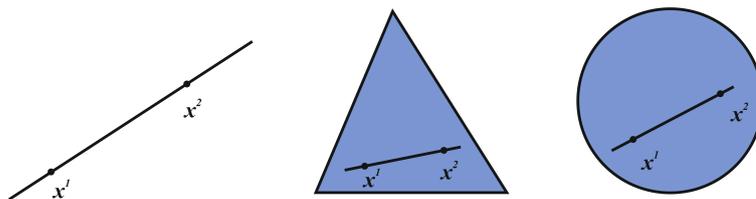


Figura 3.2: Conjuntos convexos. Fonte: Elaborado pela autora.

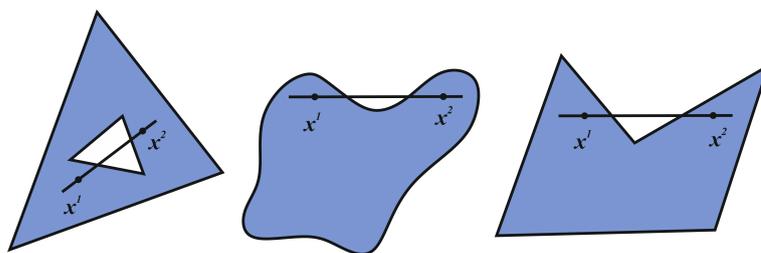


Figura 3.3: Conjuntos não convexos. Fonte: Elaborado pela autora.

Provaremos a seguir que o conjunto de soluções viáveis de um PPL é um conjunto convexo.

**Teorema 3.14.** O conjunto  $M$  das soluções viáveis de um PPL é convexo.

*Demonstração.* Sejam  $x^1, x^2 \in M$ . Então  $x^1 \geq 0$ ,  $x^2 \geq 0$ ,  $Ax^1 = b$  e  $Ax^2 = b$ . Mostremos que toda combinação linear convexa de  $x^1$  e  $x^2$  também pertence a  $M$ . Considere  $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$ , com  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Note que:

a)  $A(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2) = A(\alpha_1 x^1) + A(\alpha_2 x^2) = \alpha_1 Ax^1 + \alpha_2 Ax^2 = \alpha_1 b + \alpha_2 b = (\alpha_1 + \alpha_2)b = b$ .

b) Como  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ ,  $x^1 \geq 0$  e  $x^2 \geq 0$ , segue que  $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \geq 0$ .

Logo, toda combinação linear convexa de um par de pontos de  $M$  também pertence a  $M$ . Portanto, o conjunto de soluções viáveis  $M$  é convexo.  $\square$

O Teorema 3.14 é grande importância para a programação linear, pois ele permite provar uma série de resultados bem gerais e que dizem respeito à otimização de funções côncavas e convexas em conjuntos convexos (para mais informações, veja [2] e [4]).

Neste momento, vamos procurar caracterizar melhor um PPL. Para isto, necessitaremos de uma série de definições apresentadas a seguir.

**Definição 3.15.** Dado um semiespaço fechado  $ax \leq b$ , o hiperplano  $ax = b$  é chamado de **hiperplano gerador** do semiespaço.

**Definição 3.16.** Definimos um **politopo** ou **politopo convexo** como o conjunto de pontos  $\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_j a_{ij}x_j \leq b_i\}$  para  $i = \{1, 2, \dots, m\}$ , isto é, como a interseção de um número finito de semiespaços fechados. Uma demonstração análoga a demonstração do Teorema 3.14 mostra que todo politopo é um conjunto convexo.

Quando todo  $b_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), isto é, quando todos os hiperplanos geradores dos semiespaços passam pela origem, denominamos a interseção dos semiespaços de **cone poliédrico convexo**.

Não é difícil mostrar que um cone poliédrico convexo é um caso particular de cone convexo. A seguir apresentamos a definição do cone convexo.

**Definição 3.17.** Um **cone** é um conjunto  $G$  de pontos, tal que, se  $x \in G$  e  $\lambda \geq 0$ , então  $\lambda x \in G$ . Um **cone convexo** é um cone que é um conjunto convexo.

Um caso particular bastante importante de politopo convexo é o poliedro convexo.

**Definição 3.18.** Um politopo convexo limitado é denominado **poliedro convexo**.

O conjunto de todas as possíveis combinações lineares convexas de pontos de um conjunto  $S$  é denominado **envoltória convexa** de  $S$ . É possível provar que a envoltória convexa de um número finito de pontos é um poliedro convexo (veja [5]).

Pela Definição 3.16, temos que o conjunto  $M$  de soluções viáveis de um PPL é um politopo convexo. Caso  $M$  seja limitado, teremos que  $M$  é um poliedro convexo.

É possível mostrar que o politopo convexo dado por  $M$  é a soma de um poliedro convexo  $P$  e um cone poliédrico convexo  $Q$ , onde  $P$  é a envoltória convexa dos vértices de  $M$  (veja [6]). Isto é,  $M = P + Q = \{x : x = p + q, p \in P, q \in Q\}$ . Tal fato é ilustrado na figura abaixo.

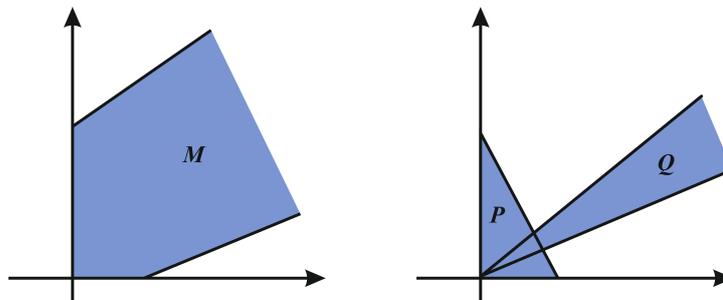


Figura 3.4: Politopo convexo como soma de um poliedro convexo e um cone poliédrico convexo. Fonte: Elaborado pela autora.

Na figura a seguir ilustramos alguns exemplos dos conceitos que acabamos de definir.

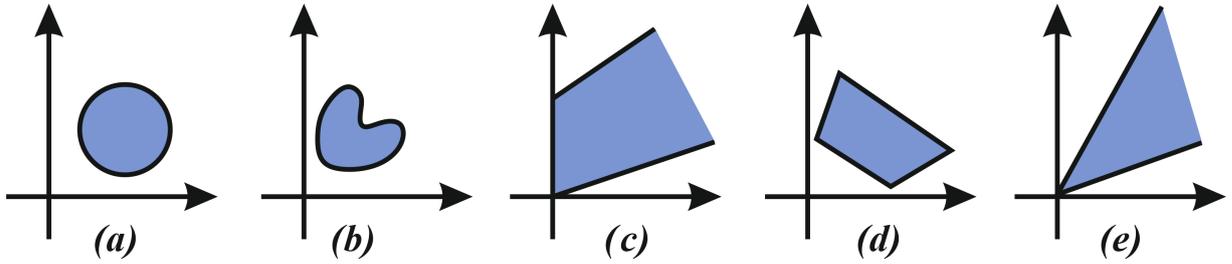


Figura 3.5: Exemplos dos conceitos recém apresentados. Fonte: Elaborado pela autora.

Na figura acima, (a) é um conjunto convexo, (b) é um conjunto não convexo, (c) é um polítopo convexo, (d) é um poliedro e (e) é um cone poliédrico convexo.

## 3.2 Caracterização de vértice

Vamos caracterizar nesta seção o conceito de vértice. Mostraremos mais adiante que, quando um PPL possui solução ótima, ao menos um vértice é solução ótima do PPL. Para mostrar esse fato, precisaremos compreender bem o conceito de vértice. Além disso, será necessário entender como vamos determinar tais vértices no conjunto de soluções viáveis do PPL.

**Definição 3.19.** Um ponto  $x$  de um conjunto convexo  $M$  é denominado **vértice** (ou **ponto extremo**) de  $M$ , quando ele não pode ser obtido como combinação linear convexa legítima de nenhum par de pontos distintos de  $M$ .

Tendo definido o conceito de vértice, desejamos caracterizá-lo algebricamente em um PPL. Isso será feito no Teorema 3.22. Com essa caracterização, será mais fácil elaborar um algoritmo que determine os vértices do PPL. O objetivo será encontrar o vértice que é a solução ótima do problema.

Vejam no exemplo a seguir, como encontrar os vértices dentre o conjunto de soluções do sistema  $Ax = b, x \geq 0$ .

**Exemplo 3.20.** Considere o conjunto de soluções viáveis, definido da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 \leq 2 & \rightarrow R_1 \\ x_2 \leq 2 & \rightarrow R_2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 & \rightarrow R_3 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 9 & \rightarrow R_4 \\ x_1 \geq 0 & \rightarrow R_5 \\ x_2 \geq 0 & \rightarrow R_6 \end{array} \right.$$

Vamos determinar os vértices de tal conjunto.

O conjunto pode ser representado graficamente pela figura a seguir.

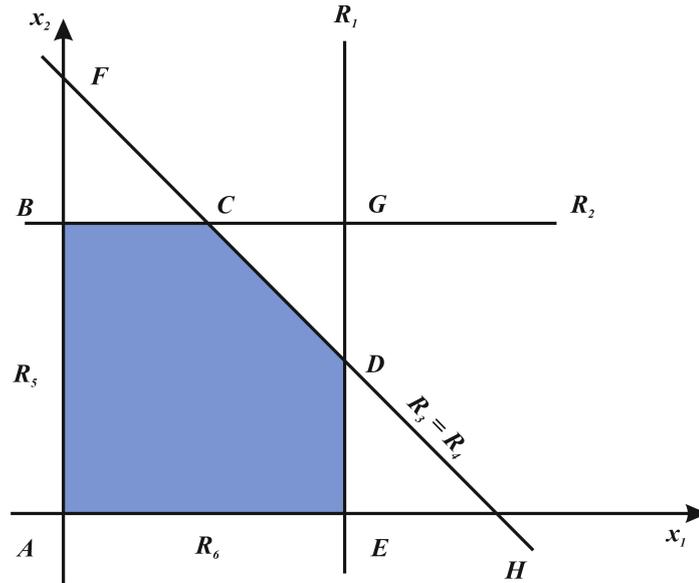


Figura 3.6: Conjunto de soluções viáveis. Fonte: Elaborado pela autora.

Adicionando variáveis de folga, obtemos:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_6 = 9 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

O sistema acima, que pode ser escrito na forma  $Ax = b$ , é um sistema indeterminado. A resolução de  $Ax = b$  consiste na escolha de variáveis  $x^B$  e  $x^R$ , de maneira que podemos escrever o sistema na forma

$$Bx^B + Rx^R = b,$$

onde  $B$  é uma matriz invertível. A solução do sistema é dada quando escrevemos as variáveis  $x^B$  em função das variáveis  $x^R$ :

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R.$$

Para obter uma solução do sistema basta então atribuir valores numéricos a  $x^R$ .

Vejamos o que devemos fazer para obter um vértice. Observando a figura anterior, notamos que um vértice é dado pela interseção de um número suficiente de hiperplanos definidos pelas restrições e pelas condições de não negatividade (denominados **hiperplanos restrição**). Vemos que o ponto  $B$  é dado pela interseção de  $R_2$  e  $R_5$ , o ponto  $A$  é dado pela interseção de  $R_5$  e  $R_6$ , o ponto  $E$  é dado pela interseção  $R_1$  e  $R_6$ , o ponto  $D$  é dado pela interseção  $R_3 = R_4$  e  $R_1$ , e o ponto  $C$  é dado pela interseção  $R_2$  e  $R_3 = R_4$ .

Por outro lado, podemos ver que, para que um ponto pertença a um certo hiperplano restrição, ao menos uma variável deve ser anulada. Por exemplo, se anularmos  $x_3$ , então o ponto está em  $R_1$ . Anulando  $x_1$ , o ponto está em  $R_5$ , e anulando  $x_5$  e  $x_6$ , o ponto está em  $R_3 = R_4$ .

Assim, temos que um vértice pode ser obtido pela anulação de um certo número de variáveis tal que o problema se torne determinado. No sistema  $Bx^B + Rx^R = b$ , tomando  $x^R = 0$ , obtemos um sistema determinado  $Bx^B = b$ , onde  $x^B = B^{-1}b$ . Claramente, teremos um vértice apenas se a solução for viável, isto é, se tivermos  $x^B = B^{-1}b \geq 0$ . Note que, quando fazemos  $x_3 = x_4 = 0$ , temos  $x_5 = -1$  e  $x_6 = -3$ , isto significa que o ponto  $G = (2, 2)$  não é solução viável, ou seja, não é vértice.

Podemos também inverter a ordem de tal processo, escolhendo primeiro a matriz  $B$  e obtendo os vértices da seguinte maneira:

- i) escolha uma matriz invertível  $B$  de forma que  $Bx^B + Rx^R = b$ ;
- ii) tome  $x^R = 0$ ;
- iii) obtenha  $x^B = B^{-1}b \geq 0$ .

Dessa forma, obteremos como resultado uma solução que vamos chamar de solução básica viável e que vamos definir a seguir.

**Definição 3.21.** *Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  tal que  $\text{posto}(A) = m$ . Um conjunto de  $m$  vetores coluna  $a_j$  de  $A$  linearmente independentes é denominado **base** associada à  $A$ , **base** de  $A$  ou simplesmente **base**. Os vetores  $a_j$  que formam a base são denominados **vetores base** de  $A$  e o conjunto de seus índices é denominado **conjunto de índices base** de  $A$ .*

*Considere o PPL formado por (3.1), (3.2) e (3.3). As  $m$  componentes de  $x$  correspondentes aos vetores base são denominadas **variáveis básicas** (VB). As demais  $(n-m)$  componentes são as **variáveis não básicas** (VNB). Anulando as  $(n-m)$  variáveis não básicas, obtemos um sistema compatível e determinado, constituído de  $m$  equações e  $m$  incógnitas. Resolvendo esse sistema de equações, isto é, determinando o valor das VB, obtemos uma **solução básica**. Uma solução básica onde as VB são não negativas é denominada **solução básica viável**. Enquanto a solução básica obedece apenas às restrições (3.1), a solução básica viável obedece às restrições (3.1) e (3.2). Uma solução básica viável onde existe ao menos uma VB nula é denominada **solução básica degenerada**. A solução viável que minimiza  $Q(x)$  recebe o nome de **solução ótima**.*

A seguir mostraremos que os conceitos de solução básica viável e vértice são equivalentes.

**Teorema 3.22.** *Sejam  $M$  o conjunto de soluções viáveis de um PPL e  $x \in M$ . O ponto  $x$  é vértice de  $M$  se, e somente se,  $x$  for solução básica viável.*

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Seja  $x$  uma solução básica viável. Suponhamos, sem perda de generalidade, que apenas as primeiras  $r$  componentes  $x_1, \dots, x_r$  sejam positivas. Tais componentes são VB associadas aos vetores linearmente independentes  $a_1, \dots, a_r$  de  $A$ . Para provar que  $x$  é vértice de  $M$ , basta mostrar que  $x$  não é combinação linear convexa legítima de dois pontos distintos  $x^1$  e  $x^2$  de  $M$ . Considere

$$x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2, \quad (3.4)$$

onde  $0 < \alpha < 1$  e  $x^1, x^2 \in M$ . Então necessariamente  $x^1 = x^2 = x$ . De fato, como  $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0$  e como  $x^1 \geq 0$  e  $x^2 \geq 0$ , temos por (3.4) que

$$x_j^1 = x_j^2 = 0, \quad j = r + 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Já que  $x^1, x^2 \in M$ , temos  $Ax^1 = Ax^2 = b$ . Por (3.5), segue que

$$\sum_{j=1}^r a_j x_j^k = b, \quad k = 1, 2. \quad (3.6)$$

Como  $a_1, \dots, a_r$  são l.i., temos que (3.6) possui uma única solução. Daí,  $x_j^1 = x_j^2$  para  $j = 1, \dots, r$ . Assim, por (3.5), segue que  $x^1 = x^2$ .

( $\Rightarrow$ ) Seja  $(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)^T$  um vértice de  $M$ . Suponha, sem perda de generalidade, que as  $r$  primeiras componentes desse vértice são positivas. Vamos mostrar primeiramente que  $a_1, \dots, a_r$  são l.i. Para tanto, vamos verificar que a hipótese de que  $a_1, \dots, a_r$  são l.d. levam a uma contradição com o fato de  $x$  ser vértice. De fato, se  $a_1, \dots, a_r$  são l.d., então existem constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  não todas nulas tais que

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j a_j = 0. \quad (3.7)$$

Daí, podemos definir através do vetor coluna  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)^T$  dois pontos distintos,  $x^1 = x + \alpha\lambda$  e  $x^2 = x - \alpha\lambda$ . Por (3.7), segue que

$$Ax^1 = \sum_{j=1}^r a_j (x_j + \alpha\lambda_j) = b + 0 = b.$$

De forma análoga, temos que  $Ax^2 = b$ . Por outro lado, para que  $x^1 \geq 0$ , ou seja,  $x_j + \alpha\lambda_j \geq 0$  para  $j = 1, \dots, r$ , basta que  $\alpha \geq -\frac{x_j}{\lambda_j}$  para  $\lambda_j > 0$ , assim como  $\alpha \leq -\frac{x_j}{\lambda_j}$  para  $\lambda_j < 0$ . Assim, para  $x^1 \geq 0$ , devemos ter

$$\max \left\{ -\frac{x_j}{\lambda_j} : j = 1, \dots, r, \lambda_j > 0 \right\} \leq \alpha \leq \min \left\{ -\frac{x_j}{\lambda_j} : j = 1, \dots, r, \lambda_j < 0 \right\}. \quad (3.8)$$

Além disso, para que  $x^2 \geq 0$ , ou seja,  $x_j - \alpha\lambda_j \geq 0$  para  $j = 1, \dots, r$ , basta que  $\alpha \geq \frac{x_j}{\lambda_j}$  para  $\lambda_j < 0$ , assim como  $\alpha \leq \frac{x_j}{\lambda_j}$  para  $\lambda_j > 0$ . Logo, para  $x^2 \geq 0$ , devemos ter

$$\max \left\{ \frac{x_j}{\lambda_j} : j = 1, \dots, r, \lambda_j < 0 \right\} \leq \alpha \leq \min \left\{ \frac{x_j}{\lambda_j} : j = 1, \dots, r, \lambda_j > 0 \right\}. \quad (3.9)$$

Claramente pode ser que um dos limites à esquerda ou à direita em (3.8) e (3.9) não exista. Isso ocorre se todos os  $\lambda_j$  possuem o mesmo sinal. Portanto, temos que  $x^1, x^2 \geq 0$  desde que tenhamos

$$|\alpha| \leq \min \left\{ \left| \frac{x_j}{\lambda_j} \right| : j = 1, \dots, r, \lambda_j \neq 0 \right\}. \quad (3.10)$$

Então, se tivermos (3.10) satisfeita, segue que  $x^1, x^2 \in M$ . Agora, como

$$x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2, \quad (3.11)$$

se supusermos  $a_1, \dots, a_r$  l.d., então  $x$  será uma combinação linear convexa legítima de dois pontos distintos  $x^1$  e  $x^2$  de  $M$ , o que é uma contradição pois  $x$  é vértice de  $M$ . Logo,  $a_1, \dots, a_r$  são l.i. Portanto,  $x$  é solução básica viável, pois temos duas possibilidades. Se  $r = m$ , temos uma base formada pelos vetores  $a_1, \dots, a_m$ , as variáveis positivas  $x_1, \dots, x_m$  são as VB e as demais variáveis nulas são as VNB. Daí, temos uma solução básica viável. O outro caso seria  $r < m$ . Como  $\text{posto}(A) = m$ , existem  $m$  vetores  $a_j$  linearmente independentes e podemos formar uma base com tais vetores. Além disso, a partir do conjunto de vetores  $a_1, \dots, a_r$ , podemos escolher mais  $(m - r)$  vetores coluna de  $A$ , de maneira a formar uma base. As variáveis associadas a essa base são as VB, sendo positivas ou nulas. Como, para este caso, existe ao menos uma VB nula, estamos num caso de degeneração. As demais variáveis nulas são as VNB. Novamente, temos uma solução básica viável.  $\square$

É importante compreender a interpretação geométrica do vetor  $\lambda$  do teorema anterior. Esse vetor define uma direção tal que, para qualquer novo ponto  $x + \alpha\lambda$  ou  $x - \alpha\lambda$  gerado a partir de  $x$ , continuam nulas as componentes que eram nulas para  $x$ . Como cada componente nula corresponde a um hiperplano restrição, então, se  $x$  pertence a  $(n - r)$  hiperplanos restrição, os pontos  $x + \alpha\lambda$  e  $x - \alpha\lambda$  também pertencem a esses hiperplanos. Quanto maior o número de componentes nulas em  $x$ , menor o número de componentes  $\lambda_j$  em (3.7), ou seja, mais determinado fica  $\lambda$ , pois é menor a dimensão da interseção a qual  $\lambda$  deve pertencer.

Além disso, para cada um dos novos pontos gerados são obedecidas as restrições  $A(x + \alpha\lambda) = A(x - \alpha\lambda) = b$ . Mas não teremos necessariamente  $x + \alpha\lambda \geq 0$  ou  $x - \alpha\lambda \geq 0$ , dependendo dos valores atribuídos a  $\alpha$ . Os valores limite de  $\alpha$  para que  $x + \alpha\lambda$  e  $x - \alpha\lambda$  satisfaçam as condições de não negatividade foram obtidos em (3.8) e (3.9). Como no Teorema 3.22 estamos apenas interessados em dois pontos quaisquer  $x^1, x^2 \in M$ , tais que sua combinação linear convexa nos forneça o ponto  $x$ , basta que  $\alpha$  satisfaça as desigualdades (3.8) e (3.9). No Teorema 3.24, estaremos interessados em um desses valores limites para  $\alpha$  especificamente.

Mostraremos a seguir que um conjunto de soluções viáveis de um PPL possui sempre um número finito de vértices. Esse fato é importante, pois garante que o processo de otimização que utilizaremos e que consiste em gerar vértices é finito.

**Teorema 3.23.** *Um PPL possui um número finito de soluções básicas viáveis, isto é, o conjunto  $M$  de soluções viáveis de um PPL tem um número finito de vértices.*

*Demonstração.* Considere um PPL definido por (3.1), (3.2) e (3.3), onde  $A$  é uma matriz  $m \times n$ . Sabemos que  $\text{posto}(A) = m$ . Dos  $n$  vetores coluna  $a_i$ , existem no máximo  $\binom{n}{m}$  conjuntos de  $m$  vetores linearmente independentes. Assim, temos no máximo  $\binom{n}{m}$  soluções básicas. Como as soluções básicas viáveis são um subconjunto das soluções básicas, existem no máximo  $\binom{n}{m}$  soluções básicas viáveis, isto é, vértices do conjunto  $M$ .  $\square$

### 3.3 Existência de vértice ótimo

Na seção anterior, mostramos que os conceitos de solução básica viável e vértice são equivalentes e estabelecemos um limite superior quanto ao número de vértices. Nesta seção, vamos mostrar que a solução ótima pode ser encontrada entre os vértices.

Vamos começar demonstrando um resultado auxiliar.

**Teorema 3.24.** *Seja  $M$  o conjunto de soluções viáveis de um PPL, definido por  $Ax = b$  e  $x \geq 0$ . Todo ponto  $x \in M$  pode ser escrito como combinação linear convexa  $x = \beta \hat{x} + (1 - \beta)\bar{x}$ ,  $0 < \beta \leq 1$ , onde  $\hat{x}$  é vértice de  $M$  e  $\bar{x} \in M$ .*

*Demonstração.* Seja  $(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)^T$  um ponto de  $M$ . Suponha, sem perda de generalidade, que as  $r$  primeiras componentes desse ponto são positivas. Mostraremos o teorema por indução finita sobre  $r$ .

Considere  $r = 0$ . Como  $\text{posto}(A) = m$ , sempre podemos determinar uma base à qual seja possível associar a solução básica viável  $x$ , ou seja, o vértice  $x$ . Assim, temos  $x = \hat{x}$ , ou seja  $\beta = 1$ .

Considere agora  $r > 0$ . Suponha que o teorema é válido para o caso em que  $x$  possui no máximo  $(r - 1)$  componentes positivas. Provemos que a afirmação é válida para o caso em que  $x$  possua no máximo  $r$  componentes positivas. Temos dois casos possíveis:

a)  $a_1, \dots, a_r$  são l.i.

Neste caso, podemos adicionar às colunas  $a_1, \dots, a_r$ ,  $(m - r)$  colunas de  $A$  de forma a obter uma base à qual podemos associar a solução básica viável  $x$ , isto é, o vértice  $x$ . Assim, temos  $x = \hat{x}$ , ou seja,  $\beta = 1$ .

b)  $a_1, \dots, a_r$  são l.d.

Neste caso, existem constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ , não todas nulas tais que

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j a_j = 0. \quad (3.12)$$

De maneira análoga a parte b) da demonstração do Teorema 3.22, podemos definir, por meio do vetor  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)^T$ , pontos  $x^1 = x + \alpha \lambda$  e  $x^2 = x - \alpha \lambda$  tais que

$$x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2. \quad (3.13)$$

Conforme vimos na demonstração do Teorema 3.22,  $x^1, x^2 \in M$ , desde que tenhamos

$$|\alpha| \leq \left| \frac{x_k}{\lambda_k} \right| = \min \left\{ \left| \frac{x_j}{\lambda_j} \right| : j = 1, \dots, r, \lambda_j \neq 0 \right\}.$$

Tome  $\alpha = -\frac{x_k}{\lambda_k}$ . Assim, temos que

$$x_k^1 = x_k + \alpha \lambda_k = x_k - \frac{x_k}{\lambda_k} \lambda_k = 0.$$

Dessa forma,  $x_k^1 = x_{r+1}^1 = x_{r+2}^1 = \dots = x_n^1 = 0$ , isto é,  $x^1$  tem no máximo  $(r - 1)$  componentes positivas. Pela hipótese de indução, segue então que

$$x^1 = \gamma \hat{x} + (1 - \gamma) \bar{x} \tag{3.14}$$

para  $0 < \gamma \leq 1$ , onde  $\hat{x}$  é vértice de  $M$  e  $\bar{x} \in M$ . Substituindo (3.14) em (3.13), temos

$$x = \frac{\gamma}{2} \hat{x} + \frac{1 - \gamma}{2} \bar{x} + \frac{1}{2} x^2 = \frac{\gamma}{2} \hat{x} + \frac{2 - \gamma}{2} \left( \frac{1 - \gamma}{2 - \gamma} \bar{x} + \frac{1}{2 - \gamma} x^2 \right).$$

Tomando  $\tilde{x} = \frac{1 - \gamma}{2 - \gamma} \bar{x} + \frac{1}{2 - \gamma} x^2$ , temos que  $\tilde{x} \in M$ . Basta notar que  $\tilde{x}$  é combinação linear convexa de dois pontos  $\bar{x}$  e  $x^2$  de  $M$ , pois  $\frac{1 - \gamma}{2 - \gamma} + \frac{1}{2 - \gamma} = 1$ ,  $\frac{1 - \gamma}{2 - \gamma} \geq 0$  e  $\frac{1}{2 - \gamma} \geq 0$ . Como  $M$  é convexo, toda combinação linear convexa de dois pontos de  $M$  pertence a  $M$ . Fazendo  $\beta = \frac{\gamma}{2}$ , temos  $x = \beta \hat{x} + (1 - \beta) \tilde{x}$ , onde  $0 < \beta \leq 1$ ,  $\hat{x}$  é vértice de  $M$  e  $\tilde{x} \in M$ .

Assim, supondo a afirmação verdadeira para  $(r - 1)$  componentes positivas, foi possível demonstrá-la para  $r$  componentes positivas. Como a hipótese é verdadeira para  $r = 0$ , o teorema fica demonstrado.  $\square$

Em decorrência do teorema anterior, obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 3.25.** *Se o conjunto  $M$  for não vazio, existirá ao menos um vértice de  $M$ .*

Com esse corolário percebemos que faz sentido procurarmos pela solução ótima entre os vértices, pois sabemos que  $M$  possuirá ao menos um vértice se for não vazio.

Mostraremos agora que no caso do PPL ter ótimo, ele será atingido em ao menos um vértice de  $M$ . Vamos considerar o caso de minimização de  $Q(x)$  e a demonstração para o caso de maximização é análoga.

**Teorema 3.26.** *Considere um PPL cujo conjunto  $M$  de soluções viáveis é definido por  $Ax = b$  e  $x \geq 0$ , e seja  $Q(x)$  a função objetivo que tem um mínimo em  $M$ . Então esse mínimo será atingido ao menos em um vértice de  $M$ .*

*Demonstração.* Seja  $x^*$  solução ótima do PPL, isto é,  $Q(x^*)$  é o valor mínimo atingido pela função objetivo de  $M$ . Pelo Teorema 3.24,

$$x^* = \beta \hat{x} + (1 - \beta) \bar{x},$$

$0 < \beta \leq 1$ , onde  $\hat{x}$  é vértice de  $M$  e  $\bar{x} \in M$ . Pela linearidade de  $Q(x)$ , segue que

$$Q(x^*) = \beta Q(\hat{x}) + (1 - \beta)Q(\bar{x}). \quad (3.15)$$

Já que  $x^*$  é solução ótima, temos  $Q(x^*) \leq Q(\bar{x})$ . Substituindo essa informação em (3.15), obtemos

$$Q(x^*) \geq \beta Q(\hat{x}) + (1 - \beta)Q(x^*).$$

Daí,

$$Q(x^*) \geq Q(\hat{x}). \quad (3.16)$$

Porém, como  $x^*$  é solução ótima, segue que

$$Q(x^*) \leq Q(\hat{x}). \quad (3.17)$$

De (3.16) e (3.17), temos  $Q(x^*) = Q(\hat{x})$ . Podemos ter  $x^* = \hat{x}$ , isto é,  $x^*$  é vértice. Caso  $x^* \neq \hat{x}$ , existe mais de uma solução ótima dentre as quais ao menos uma é um vértice.  $\square$

Para encerrar esta seção apresentaremos um teorema e dois corolários sobre problemas que possuem mais de uma solução ótima. As demonstrações desses resultados são diretas e, por essa razão, não serão apresentadas aqui.

**Teorema 3.27.** *Cada combinação linear convexa de soluções ótimas do PPL é também solução ótima.*

Como consequência do teorema anterior obtemos dois corolários.

**Corolário 3.28.** *O conjunto das soluções ótimas de um PPL é um conjunto convexo.*

**Corolário 3.29.** *Se um PPL possuir mais de uma solução ótima, possuirá uma infinidade de soluções ótimas.*

# Capítulo 4

## O Algoritmo Simplex

Neste capítulo, apresentaremos em detalhes o algoritmo Simplex. Iniciaremos analisando um PPL com um formato especial que nos permite entender as primeiras ideias do método. A partir desse ponto investigaremos como o método deve ser adaptado para resolvermos um PPL geral. Ao fim do capítulo, teremos compreendido o algoritmo para um PPL geral e interpretado geometricamente suas ideias. O texto aqui apresentado foi baseado no Capítulo 5 do livro [1].

### 4.1 Primeiras ideias

Considere um PPL na forma:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \text{ onde } b_i \geq 0 & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n c_jx_j = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases} \quad (4.1)$$

Reduzindo o problema à forma padrão, obtemos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1s}x_s + \dots + a_{1n}x_n & +x_{n+1} & = b_1 \\ & \vdots & \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rs}x_s + \dots + a_{rn}x_n & +x_{n+r} & = b_r \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{ms}x_s + \dots + a_{mn}x_n & +x_{n+m} & = b_m \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n+m) & \\ c_1x_1 + \dots + c_sx_s + \dots + c_nx_n & & = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases} \quad (4.2)$$

O sistema acima pode ser representado na forma matricial

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ Q(x) = c^T x \rightarrow \text{Mín!} \end{cases} \quad (4.3)$$

As  $m$  primeiras equações do Sistema (4.2) e a função objetivo podem ser representadas através do seguinte **quadro** ou **tableau**:

$x_1$	$\cdots$	$x_s$	$\cdots$	$x_n$	$x_{n+1}$	$\cdots$	$x_{n+r}$	$\cdots$	$x_{n+m}$	$b$
$a_{11}$	$\cdots$	$a_{1s}$	$\cdots$	$a_{1n}$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$b_1$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$a_{r1}$	$\cdots$	$a_{rs}$	$\cdots$	$a_{rn}$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$b_r$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$a_{m1}$	$\cdots$	$a_{ms}$	$\cdots$	$a_{mn}$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$b_m$
$c_1$	$\cdots$	$c_s$	$\cdots$	$c_n$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$Q(x)$

Tabela 4.1: Quadro ou Tableau. Fonte: Elaborado pela autora.

Para determinar uma **solução básica viável**, vamos estabelecer as seguintes condições:

- a) As  $n$  variáveis arbitrárias são as VNB, as quais vamos atribuir o valor zero.
- b) As  $m$  variáveis restantes são VB e são obtidas a partir das  $m$  primeiras equações do sistema. As VNB devem ser escolhidas de forma que as VB sejam não negativas.
- c) Os vetores coluna  $a_j$  associados às VBs devem ser linearmente independentes, de maneira a formarem uma base associada à matriz  $A = (a_{ij})$ .

Segundo o que foi apresentado no capítulo anterior, essas três condições asseguram que obteremos sempre uma solução básica viável. O método Simplex constitui-se em um conjunto de etapas que mantêm satisfeitas as condições acima e adicionalmente a seguinte condição:

- d) As soluções básicas viáveis são obtidas de forma a otimizar a função objetivo.

Apresentamos a seguir o passo a passo para obter soluções básicas viáveis, sempre com o propósito de otimizar a função objetivo. Para tanto, iremos nos basear no PPL (4.1).

**Passo 1:** Determinar solução básica viável inicial  $\hat{x}$ .

Escolhemos as  $n$  primeiras variáveis do Sistema (4.2) como VNB, tomando-as como zero. Obtemos então:

$$\text{VNB: } \hat{x}_1 = \cdots = \hat{x}_n = 0$$

$$\text{VB: } \hat{x}_{n+1} = b_1, \dots, \hat{x}_{n+m} = b_m.$$

**Passo 2:** Melhorar a solução, caso possível, selecionando nova VB.

Para a solução básica inicial  $\hat{x}$ , temos

$$Q(\hat{x}) = c_1\hat{x}_1 + \cdots + c_n\hat{x}_n = 0,$$

pois  $\hat{x}_1 = \dots = \hat{x}_n = 0$ . Vamos então criar uma nova solução básica viável  $x$  tal que  $x_s$  seja a nova VB e as demais VNB sejam mantidas. Observe que

$$Q(x) = c_s x_s.$$

Assim,

$$Q(x) - Q(\hat{x}) = c_s x_s.$$

Como queremos minimizar  $Q(x)$ , vamos escolher  $x_s$  tal que  $c_s < 0$  seja o menor possível, ou seja,

$$c_s = \min_{c_j < 0} \{c_j\}.$$

Caso não exista coeficiente negativo, ou seja,  $c_j \geq 0$  para todo  $j$ , então será impossível diminuir o valor de  $Q$ . Portanto,  $Q(\hat{x})$  é o valor mínimo de  $Q$  e  $\hat{x}$  é solução ótima do PPL.

Se  $c_j \geq 0$  para todo  $j$  e existir ao menos uma VNB  $x_s$  tal que  $c_s = 0$ , então tornando  $x_s$  VB, ou seja, fazendo ela não negativa, obtemos uma nova solução básica viável  $x$  tal que  $Q(x) = Q(\hat{x})$ . Daí, temos mais de uma solução ótima. Pelo Corolário 3.29, teremos infinitas soluções ótimas.

**Passo 3:** Atribuir valor à nova VB e selecionar nova VNB.

Seja  $x$  a nova solução básica viável, onde escolhemos  $x_s$  como nova VB e mantivemos as VNB  $x_j = \hat{x}_j = 0$  para  $j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$ . Precisamos escolher uma nova VNB. Observe que fazendo  $x_s > 0$ , temos

$$x_{n+i} = b_i - a_{is} x_s$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ . Devido às condições de não negatividade, precisamos ter

$$b_i - a_{is} x_s \geq 0$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Temos então dois casos são possíveis:

i)  $a_{is} \leq 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ .

Neste caso as condições de não negatividade são satisfeitas para qualquer valor  $x_s > 0$ . Fazendo  $x_s \rightarrow \infty$ , obtemos  $Q(x) \rightarrow -\infty$ , pois temos  $c_s < 0$  pelo Passo 2. Logo,  $Q(x)$  não tem mínimo, isto é, o PPL não possui solução.

ii) Existe ao menos um  $a_{is} > 0$ .

Seja  $K^+ = \{i = 1, \dots, m : a_{is} > 0\}$ . Como para  $a_{is} \leq 0$  a condição de não negatividade para  $x_{n+i}$  é satisfeita, precisamos nos preocupar com o caso em que  $a_{is} > 0$ , ou seja,  $i \in K^+$ . Desejamos

$$b_i - a_{is} x_s \geq 0 \quad \text{para } i \in K^+,$$

ou seja,

$$x_s \leq \frac{b_i}{a_{is}} \text{ para } i \in K^+. \quad (4.4)$$

Para anular uma variável  $x_{n+i}$  e torná-la uma VNB, basta tomar  $x_s = \frac{b_i}{a_{is}}$  para algum  $i \in K^+$ . Para garantir que (4.4) seja satisfeita para todo  $i \in K^+$ , tomamos

$$x_s = \frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{i \in K^+} \left( \frac{b_i}{a_{is}} \right).$$

Assim, as condições de não negatividade são satisfeitas e obtemos uma nova VNB  $x_{n+r}$ .

Precisamos agora apenas verificar se é possível substituir o vetor  $a_{n+r}$ , que sai da base ( $x_{n+r}$  se torna VNB), pelo vetor  $a_s$ , que entra na base ( $x_s$  se torna VB). Mas isso é possível, pois

$$a_s = \sum_{i=1}^m a_{is} a_{n+i} \text{ e } a_{rs} \neq 0.$$

A entrada  $a_{rs}$  é chamada **pivô**, a  $r$ -ésima linha é dita **linha pivô** e a  $s$ -ésima coluna é denominada **coluna pivô**.

Em resumo, tendo escolhido a nova VB no Passo 2, fazemos

$$x_s = \frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{i \in K^+} \left( \frac{b_i}{a_{is}} \right).$$

Se  $K^+$  for um conjunto vazio, o PPL não possui solução.

Isso garante que as condições a), b) e c), citadas anteriormente, são satisfeitas. Além disso, a condição d) é garantida pelo Passo 2.

**Passo 4:** Reduzir o PPL à forma canônica.

Diremos que o PPL está na **forma canônica** se:

- i) são nulos os coeficientes das VB na função objetivo (isso permite a verificação imediata da alteração no valor da função objetivo pela introdução da nova VB  $x_s$  (Passo 2));
- ii) a base estiver na forma canônica, ou seja, é igual a uma matriz identidade.

Para passar de uma solução básica viável inicial  $\hat{x}$  para uma nova solução básica viável  $x$  será importante que o PPL esteja na forma canônica para aplicarmos os passos 2 e 3. Para tanto, realizaremos as operações de **pivoteamento**, apresentadas abaixo, no Quadro 4.1.

- i) Dividir a linha pivô pelo pivô  $a_{rs}$
- ii) Anular os demais elementos da coluna pivô subtraindo da  $i$ -ésima linha ( $i = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, m, m+1$ ) a nova linha pivô, multiplicada por  $a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{r-1,s}, a_{r+1,s}, \dots, a_{ms}, c_s$ , respectivamente.

Dessa forma, o vetor  $a_{n+r}$  sai da base e o vetor  $a_s$ , que entra na base, se torna um vetor unitário. Ainda, o coeficiente de  $x_s$  (nova VB) na função objetivo é anulado e obtemos o quadro a seguir:

$x_1$	$\dots$	$x_s$	$\dots$	$x_n$	$x_{n+1}$	$\dots$	$x_{n+r}$	$\dots$	$x_{n+m}$	
$a_{11} - \frac{a_{r1}a_{1s}}{a_{rs}}$	$\dots$	0	$\dots$	$a_{1n} - \frac{a_{rn}a_{1s}}{a_{rs}}$	1	$\dots$	$-\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	$\dots$	0	$b_1 - \frac{b_r a_{1s}}{a_{rs}}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$	0	$\dots$	$\frac{1}{a_{rs}}$	$\dots$	0	$\frac{b_r}{a_{rs}}$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$a_{m1} - \frac{a_{r1}a_{ms}}{a_{rs}}$	$\dots$	0	$\dots$	$a_{mn} - \frac{a_{rn}a_{ms}}{a_{rs}}$	0	$\dots$	$-\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	$\dots$	1	$b_m - \frac{b_r a_{ms}}{a_{rs}}$
$c_1 - \frac{a_{r1}c_s}{a_{rs}}$	$\dots$	0	$\dots$	$c_n - \frac{a_{rn}c_s}{a_{rs}}$	0	$\dots$	$-\frac{c_s}{a_{rs}}$	$\dots$	0	$Q(x) - \frac{b_r c_s}{a_{rs}}$

Para que o quadro acima tenha a mesma forma do Quadro 4.1 basta trocar a coluna  $n+r$  pela coluna  $s$ .

O método Simplex foi apresentado aqui levando em conta apenas a primeira iteração, ou seja, a partir da solução básica viável inicial  $\hat{x}$ , construímos uma nova solução  $x$ . Mas o método não é interrompido nesse ponto, pois novas soluções básicas viáveis serão geradas, de modo a otimizar a função objetivo, até determinarmos a solução ótima, caso ela exista. Para isso, após realizarmos o pivoteamento no Passo 4, voltaremos ao Passo 2, na tentativa de determinar uma melhor solução. O algoritmo irá parar, quando determinarmos a solução ótima ou quando for possível concluir que o problema não possui solução.

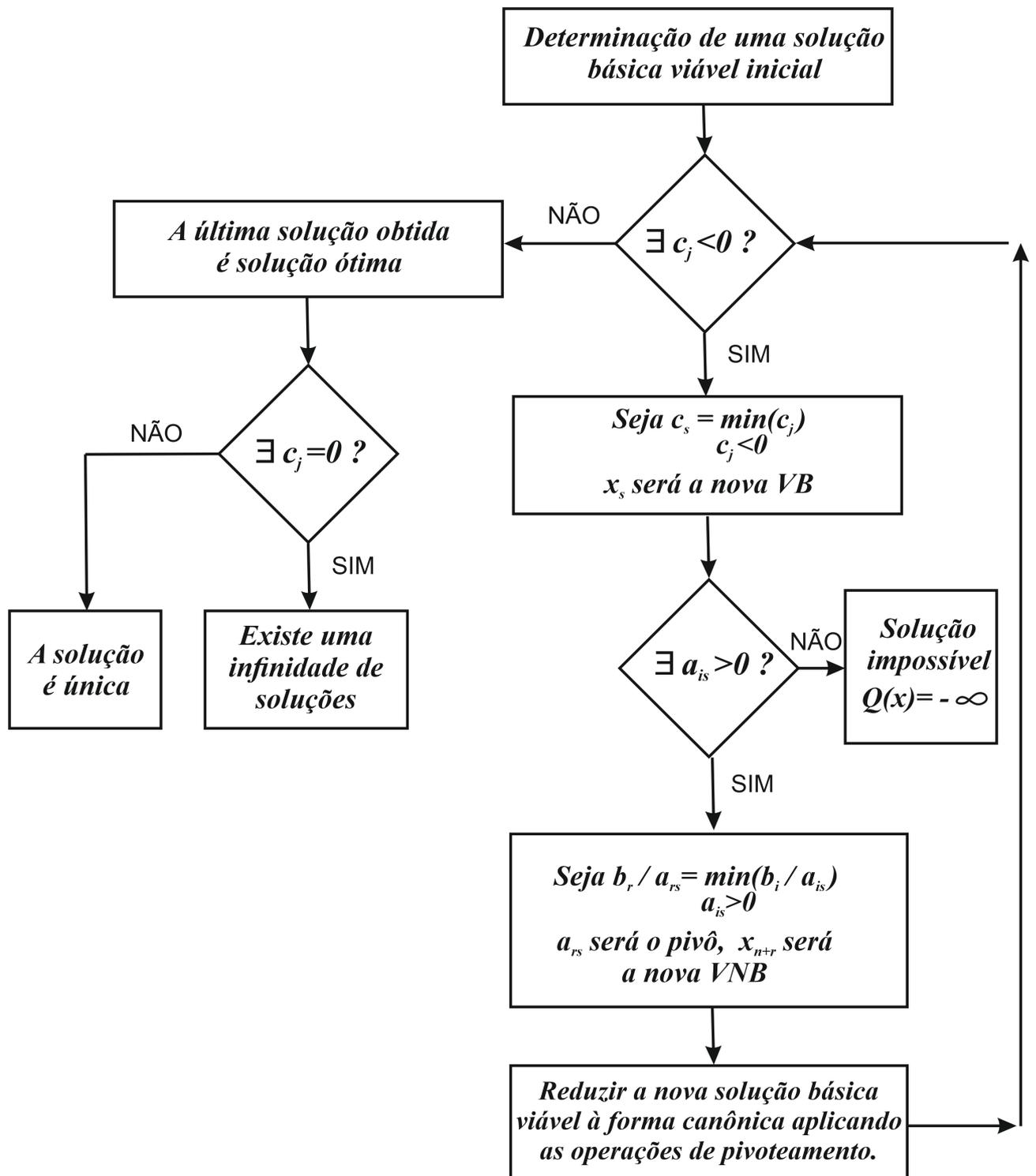
Nas próximas iterações devemos utilizar o algoritmo com muito cuidado com a simbologia, pois essa foi apresentada levando em consideração a primeira iteração do algoritmo e, por essa razão, nas próximas iterações não teremos mais  $a_{ij}$ ,  $b_i$  ou  $c_j$  originais do PPL.

O fluxograma da página a seguir resume o algoritmo.

A versão simplificada do método que apresentamos nesta seção possui alguns inconvenientes que precisaremos tratar, são eles:

- i) Todas as restrições são do tipo  $\leq$  com  $b_i \geq 0$ .
- ii) A notação é excessivamente baseada na primeira iteração.
- iii) O raciocínio é demasiadamente baseado no quadro ou tableau.

As ideias básicas do algoritmo Simplex estão todas contidas na versão simplificada, mas precisaremos desenvolver ferramentas mais avançadas para continuar o desenvolvimento da teoria. Nas próximas seções, desenvolveremos tais ferramentas que nos permitirão dar um tratamento mais abstrato e livre do quadro Simplex.



Vamos fixar algumas notações antes de iniciar a próxima seção.

Considere o PPL dado pelo Sistema (4.3), onde  $A$  é uma matriz  $m \times n_0$  e  $x$  é um vetor  $n_0 \times 1$ . Suponha que seja possível obter uma solução básica viável. Então:

$N = \{1, 2, \dots, n_0\}$	$\rightarrow$	conjunto de todos os índices das variáveis.
$I = \{j_1, \dots, j_m\}$	$\rightarrow$	conjuntos de índices base, isto é, $I \subseteq N$ é o conjunto de todos os índices das VB.
$J = N - I = \{j_{m+1}, \dots, j_{n_0}\}$	$\rightarrow$	conjunto dos índices não base, isto é, $J \subseteq N$ é conjunto de todos os índices das VNB;
$B = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$	$\rightarrow$	matriz $m \times m$ , formada pelos vetores coluna $a_{j_i}$ , onde $j_i \in I$ são associados às VB.
$R = (a_{j_{m+1}}, \dots, a_{j_{n_0}})$	$\rightarrow$	matriz $m \times (n_0 - m)$ , formados pelos vetores coluna $a_{j_i}$ , onde $j_i \in J$ são associados às VNB.
$C^B = \begin{bmatrix} c_{j_1} \\ \vdots \\ c_{j_m} \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	vetor $m \times 1$ , constituído pelos coeficientes das VB na função objetivo.
$C^R = \begin{bmatrix} c_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ c_{j_{n_0}} \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	vetor $(n_0 - m) \times 1$ , constituído pelos coeficientes das VNB na função objetivo.
$x^B = \begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	vetor $m \times 1$ , constituído pelas VB.
$x^R = \begin{bmatrix} x_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ x_{j_{n_0}} \end{bmatrix}$	$\rightarrow$	vetor $(n_0 - m) \times 1$ , constituído pelas VNB.

## 4.2 Redução do PPL à forma canônica

Nesta seção, vamos generalizar a obtenção da forma canônica para uma solução básica viável genérica  $\hat{x}$ .

Suponhamos dada uma solução básica viável  $\hat{x}$ , associada à uma base B. Então o sistema  $Ax = b$  pode ser escrito na forma

$$Bx^B + Rx^R = b. \quad (4.5)$$

Multiplicando (4.5) por  $B^{-1}$ , obtemos

$$x^B + B^{-1}Rx^R = B^{-1}b. \quad (4.6)$$

Assim, a solução básica viável  $\hat{x}$  é obtida quando fazemos  $x^R = 0$ . Nesse caso, obtemos

$\hat{x}^B = B^{-1}b$  por (4.6). Por outro lado, substituindo  $\hat{Y} = B^{-1}R$  em (4.6), temos

$$x^B + \hat{Y}x^R = x^B + \sum_{j \in J} \hat{y}_j x_j = \hat{x}^B. \quad (4.7)$$

Daí,

$$x_i + \sum_{j \in J} \hat{y}_{ij} x_j = \hat{x}_i \quad (4.8)$$

para todo  $i \in I$ , onde  $\hat{y}_j = (\hat{y}_{j1j}, \dots, \hat{y}_{jmj})^T$  é um vetor coluna de  $\hat{Y}$ .

Vamos entender melhor  $\hat{Y}$ . Observe que  $R = B\hat{Y}$ , ou seja,

$$a_j = B\hat{y}_j = \sum_{i \in I} a_i \hat{y}_{ij}$$

para todo  $j \in J$ . Logo,

$$[(\hat{y}_{ij})_{i \in I}]_B = \sum_{i \in I} a_i \hat{y}_{ij} = a_j,$$

ou seja, o vetor com coordenadas  $(\hat{y}_{ij})_{i \in I}$  na base  $B$  é igual ao vetor  $a_j$ . Assim, para determinar  $\hat{y}_j$ , basta determinar as coordenadas de  $a_j$  na base  $B$ .

As equações (4.7) e (4.8) permitem determinar os valores de  $x^B$ , a partir dos valores de  $\hat{x}^B$  e dos novos valores atribuídos a  $x^R$ .

Vejamos o que ocorre com a função objetivo. Vamos considerá-la na forma:

$$Q(x) = (C^B)^T x^B + (C^R)^T x^R. \quad (4.9)$$

Substituindo (4.7) em (4.9), temos

$$\begin{aligned} Q(x) &= (C^B)^T (\hat{x}^B - \hat{Y}x^R) + (C^R)^T x^R \\ &= (C^B)^T \hat{x}^B - (C^B)^T \hat{Y}x^R + (C^R)^T x^R \\ &= (C^B)^T \hat{x}^B + ((C^R)^T - (C^B)^T \hat{Y})x^R. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Observe que, fazendo  $x^R = 0$ , obtemos

$$Q(\hat{x}) = (C^B)^T \hat{x}^B.$$

Façamos  $\hat{z} = (C^B)^T \hat{y}$ , ou seja,

$$\hat{z}_j = (C^B)^T \hat{y}_j$$

para todo  $j \in J$ . Substituindo esses valores em (4.10), obtemos

$$Q(x) = (C^B)^T \hat{x}^B + ((C^R)^T - \hat{z})x^R.$$

Daí,

$$Q(x) - Q(\hat{x}) = ((C^R)^T - \hat{z})x^R = \sum_{j \in J} (c_j - \hat{z}_j)x_j.$$

Assim, conhecida uma solução básica viável  $\hat{x}$ , o PPL na forma canônica é dado por

$$\begin{cases} x^B + \hat{Y}x^R = \hat{x}^B \\ Q(x) - Q(\hat{x}) = ((C^R)^T - \hat{z})x^R. \end{cases}$$

Na prática, começamos representando o PPL pelo quadro:

$$\begin{array}{c|cc|c} & (x^R)^T & (x^B)^T & \\ \hline x^B & R & B & b \\ \hline & (C^R)^T & (C^B)^T & Q(x) \end{array}$$

Em seguida, multiplicamos R, B e b por  $B^{-1}$ :

$$\begin{array}{c|cc|c} & (x^R)^T & (x^B)^T & \\ \hline x^B & \hat{Y} & I & \hat{x}^B \\ \hline & (C^R)^T & (C^B)^T & Q(x) \end{array}$$

Por fim, subtraímos da última linha  $\hat{Y}$ , I e  $\hat{x}^B$  multiplicados por  $(C^B)^T$ :

$$\begin{array}{c|cc|c} & (x^R)^T & (x^B)^T & \\ \hline x^B & \hat{Y} & I & \hat{x}^B \\ \hline & (C^R)^T - \hat{z} & 0 & Q(x) - Q(\hat{x}) \end{array}$$

Na aplicação do método Simplex, não será necessário passarmos sempre de uma forma inicial para a forma canônica, o que pode ser feito pelo método de Gauss-Jordan. Veremos que a forma canônica para uma solução básica viável  $x$  será sempre obtida se iniciarmos o processo com uma solução básica viável  $\hat{x}$  na forma canônica.

### 4.3 Determinação de uma nova solução básica viável

Aprendemos na Seção 4.2 como escrever uma solução básica viável na forma canônica. O objetivo disso é colocar o PPL num formato que permita determinar critérios para obter uma nova solução básica viável. Esta seção visa estabelecer tais critérios.

**Teorema 4.1.** *Seja dada uma solução básica viável  $\hat{x}$ , à qual está associada uma base  $B$ . Se tivermos  $c_s - \hat{z}_{js} < 0$  e  $\hat{y}_s \leq 0$ , para algum  $s \in J$ , então, para qualquer  $x_s \geq 0$ , continuamos obtendo uma solução viável  $x$ . Fazendo  $x_s \rightarrow \infty$ , temos que  $Q(x) \rightarrow -\infty$ . A determinação da solução ótima do PPL é impossível.*

*Demonstração.* Seja  $\hat{x}_s = 0$  uma VNB de  $\hat{x}$  nas condições especificadas pelo enunciado do teorema. Vamos considerar uma nova solução básica viável tornando  $x_s$  uma nova VB, ou seja, tornado  $x_s$  positivo e vamos manter as demais VNB, isto é,

$$x_j = \hat{x}_j = 0 \quad \forall j \in J, j \neq s \tag{4.11}$$

Substituindo (4.11) em

$$x^B + \widehat{Y}x^R = \widehat{x}^B$$

temos

$$x^B = \widehat{x}^B - \widehat{y}_s x_s.$$

E substituindo (4.11) em

$$Q(x) - Q(\widehat{x}) = \sum_{j \in J} (c_j - \widehat{z}_j) x_j$$

temos

$$Q(x) = Q(\widehat{x}) + (c_s - \widehat{z}_s) x_s.$$

Como  $y_s \leq 0$ , temos  $-\widehat{y}_s x_s \geq 0$ . Assim, podemos aumentar o valor de  $x_s$  o quanto quisermos sem correr o risco de alguma componente de  $x^B$  assumir valores negativos. Agora, fazendo  $x_s \rightarrow \infty$ , temos  $(c_s - \widehat{z}_s) x_s \rightarrow -\infty$ , pois  $c_s - \widehat{z}_s < 0$ , donde segue que  $Q(x) \rightarrow -\infty$ . Portanto, o PPL não tem solução.  $\square$

**Teorema 4.2.** *Seja  $\widehat{x}$  uma solução básica viável. Se tivermos  $c_s - \widehat{z}_s < 0$ , para algum  $s \in J$ , tal que existe  $\widehat{y}_{is} > 0$  ao menos para algum  $i \in I$ , e*

$$\frac{\widehat{x}_r}{\widehat{y}_{rs}} = \min_{\widehat{y}_{is} > 0} \left\{ \frac{\widehat{x}_i}{\widehat{y}_{is}} \right\},$$

então, tomando  $x_s = \frac{\widehat{x}_r}{\widehat{y}_{rs}}$  como nova VB e  $x_r = 0$  como VNB, obtemos uma nova solução básica viável  $x$  tal que  $Q(x) \leq Q(\widehat{x})$ .

*Demonstração.* Seja  $x$  a nova solução obtida de  $\widehat{x}$  fazendo  $x_s = \frac{\widehat{x}_r}{\widehat{y}_{rs}}$  e  $x_r = 0$ . Vamos mostrar que  $x$  é solução básica viável. Nessa nova solução mantemos as VNB, com exceção de  $x_s$ , ou seja,

$$x_j = \widehat{x}_j = 0 \quad \forall j \in J, j \neq s \quad (4.12)$$

e fazemos

$$x_s = \frac{\widehat{x}_r}{\widehat{y}_{rs}} \geq 0. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.12) e (4.13) em (4.8), obtemos

$$x_i = \widehat{x}_i - \sum_{j \in J} \widehat{y}_{ij} x_j = \widehat{x}_i - \widehat{y}_{is} x_s = \widehat{x}_i - \widehat{y}_{is} \frac{\widehat{x}_r}{\widehat{y}_{rs}} \quad \forall i \in I. \quad (4.14)$$

Por hipótese,

$$\frac{\widehat{x}_i}{\widehat{y}_{is}} \geq \frac{\widehat{x}_r}{\widehat{y}_{rs}} \quad \forall i \in I, \widehat{y}_{is} > 0.$$

Assim,

$$x_i = \widehat{x}_i - \widehat{y}_{is} \frac{\widehat{x}_r}{\widehat{y}_{rs}} \geq \widehat{x}_i - \widehat{y}_{is} \frac{\widehat{x}_i}{\widehat{y}_{is}} = 0$$

para todo  $i \in I$  com  $\widehat{y}_{is} > 0$ .

Para  $\widehat{y}_{is} \leq 0$ , temos por (4.13) e (4.14) que

$$x_i = \widehat{x}_i - \widehat{y}_{is}x_s \geq 0.$$

Logo,  $x_i \geq 0$  para todo  $i \in I$ . Portanto,  $x \geq 0$ .

Observe que  $x_r = 0$  satisfaz (4.14). Como todas as variáveis satisfazem (4.14) e esse sistema é equivalente ao sistema  $Ax = b$ , temos satisfeitas as restrições do PPL.

Para mostrar que  $x$  é uma solução básica viável, falta mostrar que podemos associar uma base às VB. Vimos anteriormente que podemos escrever

$$a_s = \sum_{i \in I} a_i \widehat{y}_{is}.$$

Como  $\widehat{y}_{rs} \neq 0$ , obtemos uma nova base se trocarmos  $a_r$  por  $a_s$  na base antiga. Logo,  $x$  é uma solução básica viável.

Além disso, temos que

$$Q(x) - Q(\widehat{x}) = \sum_{j \in J} (c_j - \widehat{z}_j)x_j = (c_s - \widehat{z}_s)x_s \leq 0.$$

□

**Teorema 4.3.** *Seja uma solução básica viável  $\widehat{x}$ . Se  $c_j - \widehat{z}_j \geq 0$ , para todo  $j \in J$ , então  $\widehat{x}$  é solução ótima.*

*Demonstração.* Temos que

$$Q(x) = Q(\widehat{x}) + \sum_{j \in J} (c_j - \widehat{z}_j)x_j.$$

Se  $c_j - \widehat{z}_j > 0$  para todo  $j \in J$ , a melhor solução  $x$  será obtida tomando  $x_j = 0$  para todo  $j \in J$ , caso contrário, teremos  $Q(x) > Q(\widehat{x})$ . Assim, obteremos exatamente  $\widehat{x}$ . Como não é possível melhorar  $\widehat{x}$ , ela deve ser a solução ótima. Caso tenhamos  $c_j - \widehat{z}_j \geq 0$ , com  $c_s - \widehat{z}_s = 0$  para algum  $s \in J$ , então tomando  $x_s > 0$  e anulando as demais VNB, obtemos uma nova solução básica viável  $x$  tal que  $Q(x) = Q(\widehat{x})$ . E nesse caso, também não é possível melhorar a solução  $\widehat{x}$ . Logo,  $\widehat{x}$  é solução ótima. □

**Corolário 4.4.** *Seja  $\widehat{x}$  uma solução básica viável. Se  $c_j - \widehat{z}_j \geq 0$ , para todo  $j \in J$ , e se  $c_s - \widehat{z}_s = 0$ , para algum  $s \in J$ , então teremos uma infinidade de soluções ótimas.*

*Demonstração.* Segundo a demonstração do teorema anterior, podemos tomar  $x_s > 0$  e obter uma nova solução ótima  $x$ . Assim, o PPL possui infinitas soluções ótimas, pelo Corolário 3.29. □

Vimos no Teorema 4.2, que ao procurarmos por uma nova solução básica viável, escolhemos a nova VB  $x_s$  de forma que  $c_s - \widehat{z}_s < 0$ . Mas o que fazer se tivermos  $c_j - \widehat{z}_j < 0$  para mais de um  $j$ ? Sabemos que devemos ter

$$x_s = \frac{\widehat{x}_r}{\widehat{y}_{rs}} = \min_{\widehat{y}_{is} > 0} \left\{ \frac{\widehat{x}_i}{\widehat{y}_{is}} \right\}.$$

Daí,

$$Q(x) - Q(\hat{x}) = \sum_{j \in J} (c_j - \hat{z}_j)x_j = (c_s - \hat{z}_s) \frac{\hat{x}_r}{\hat{y}_{rs}},$$

onde  $\hat{x}$  é antiga e  $x$  é a nova solução básica viável. Assim, faz sentido tomar  $x_s$  tal que

$$(c_s - \hat{z}_s) \frac{\hat{x}_r}{\hat{y}_{rs}} = \min_{c_j - \hat{z}_j < 0} \left\{ (c_j - \hat{z}_j) \min_{\hat{y}_{ij} > 0} \left\{ \frac{\hat{x}_i}{\hat{y}_{ij}} \right\} \right\},$$

pois dessa forma teríamos o maior decréscimo possível.

No entanto, nada garante que tal escolha seja melhor do que qualquer outra que leve a uma melhoria da função objetivo. O importante é que ocorra uma redução do valor da função objetivo. Usaremos então um critério mais simples, tomando a nova VB  $x_s$  tal que

$$c_s - \hat{z}_s = \min_{c_j - \hat{z}_j < 0} \{c_j - \hat{z}_j\}.$$

Na próxima página apresentamos um fluxograma com o resumo dos conceitos estudados até o momento.

Vejamos agora três exemplos de aplicação do algoritmo Simplex.

**Exemplo 4.5.** *Seja o PPL dado pelo modelo:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 5x_1 + 3x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{cases}$$

Vamos determinar a solução deste problema.

Resolução Gráfica:

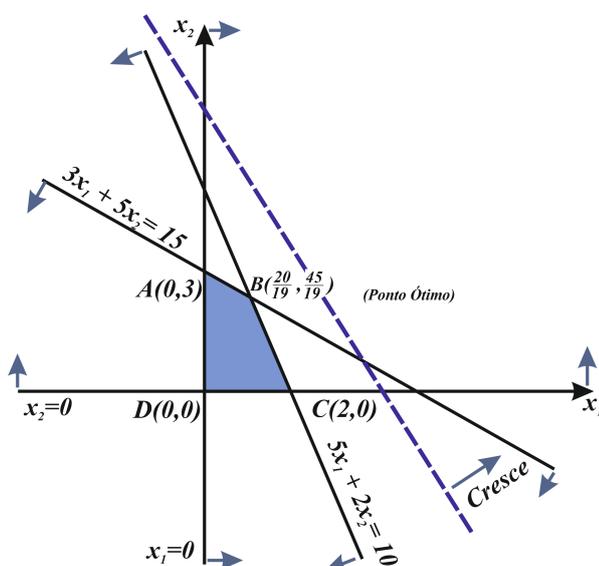
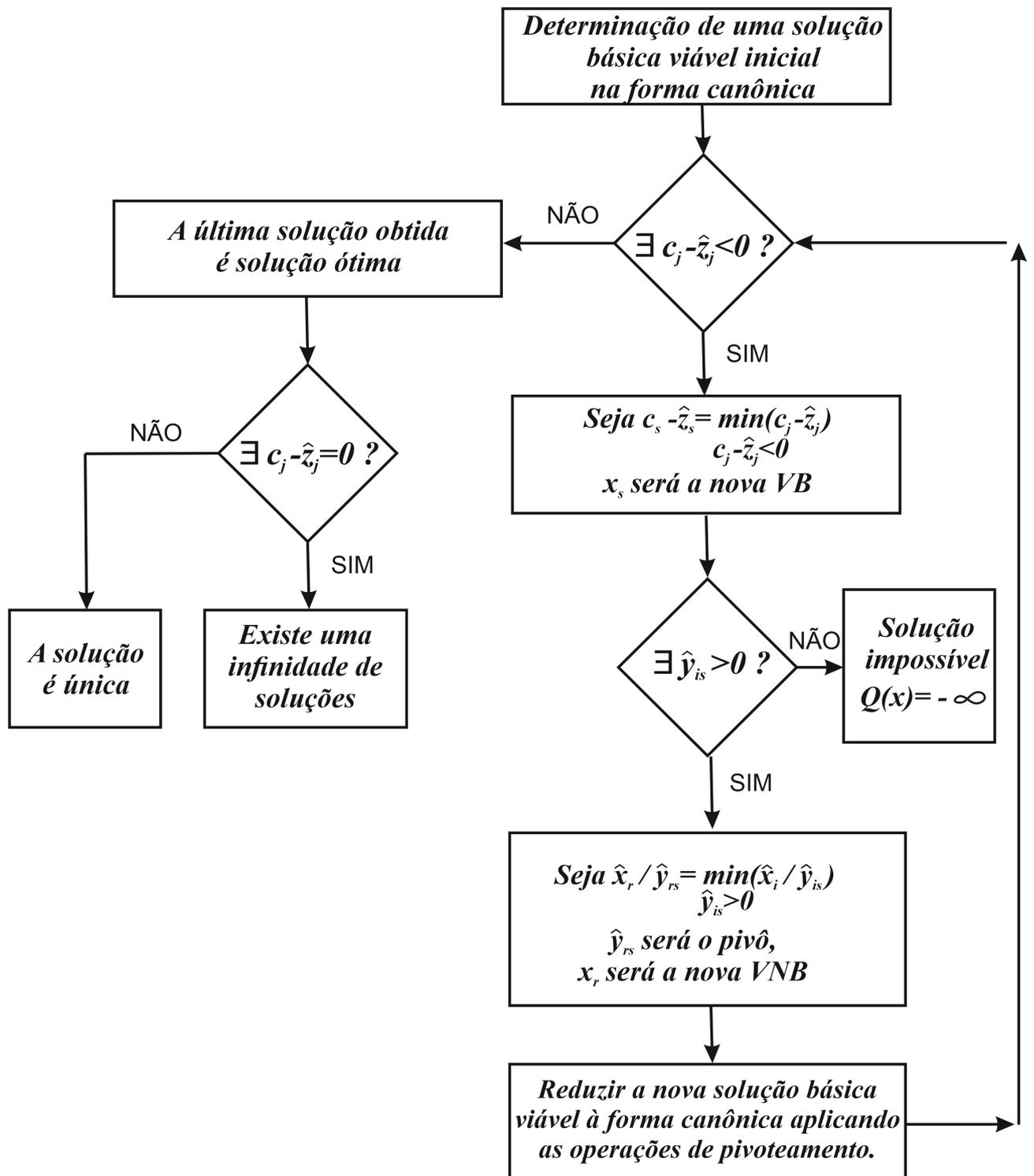


Figura 4.1: Solução do Exemplo 4.5. Fonte: Elaborado pela autora.



Solução pelo método Simplex:

Colocando o modelo em forma padrão, temos

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ -5x_1 - 3x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases}$$

Primeiro quadro:

		↓					
		VB	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	
(L <sub>1</sub> )		x <sub>3</sub>	3	5	1	0	15
(L <sub>2</sub> )	←	x <sub>4</sub>	5	2	0	1	10
(L <sub>3</sub> )			-5	-3	0	0	Q(x)

Na primeira solução básica viável, temos  $x_1 = x_2 = 0$  (VNB),  $x_3 = 15, x_4 = 10$  (VB) e  $Q(x) = 0$ . Tal solução corresponde ao vértice  $D = (0, 0)$ .

Para simplificar, na primeira coluna do quadro apresentamos as VB relativas a cada linha, isto é, a cada equação. Denominamos cada uma das linhas do quadro  $L_1, L_2$  e  $L_3$ .

A solução ( $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 15$  e  $x_4 = 10$ ) não é ótima, pois a linha  $L_3$  da função objetivo apresenta coeficientes negativos. A VNB que passa a ser VB é aquela que possui o menor coeficiente negativo na linha  $L_3$  da função objetivo, ou seja, a variável  $x_1$ . Pelo Teorema 4.2, determinamos o pivô e o valor de  $x_1$  anulando uma VB, que se torna VNB. Observe que

$$x_1 = \min \left\{ \frac{15}{3}, \frac{10}{5} \right\} = 2.$$

Note que o mínimo ocorre na linha  $L_2$ , então o pivô será 5 e fazendo  $x_1 = 2$  anulamos  $x_4$ , que se torna VNB.

Obtemos então uma nova solução básica viável, onde  $x_1$  e  $x_3$  são VB e  $x_2$  e  $x_4$  são VNB.

Vamos reduzir o PPL à forma canônica para a nova solução básica viável, obtendo um segundo quadro. Isto pode ser feito através das seguintes operações efetuadas sobre o primeiro quadro do Simplex:

$$-\frac{3}{5}L_2 + L_1 \rightarrow L_1, \quad \frac{1}{5}L_2 \rightarrow L_2, \quad L_3 + L_2 \rightarrow L_3.$$

Segundo quadro:

		↓					
		VB	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	
(L <sub>1</sub> )	←	x <sub>3</sub>	0	19/5	1	-3/5	9
(L <sub>2</sub> )		x <sub>1</sub>	1	2/5	0	1/5	2
(L <sub>3</sub> )			0	-1	0	1	Q(x) + 10

Na segunda solução básica viável, temos  $x_2 = x_4 = 0$  (VNB),  $x_1 = 2$ ,  $x_3 = 9$  (VB) e  $Q(x) = -10$ . Tal solução correspondente ao vértice  $C = (2, 0)$ .

Essa solução ( $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 9$  e  $x_4 = 0$ ) não é ótima, pois a linha da função objetivo ainda possui coeficiente negativo. Vamos então gerar uma nova solução básica viável.

A VNB que vai entrar na base é  $x_2$ , pois ela é a única que possui coeficiente negativo na função objetivo. A VNB que vai sair da base é  $x_3$ , pois  $9 \div \frac{19}{5} < 2 \div \frac{2}{5}$ . O pivô será  $\frac{19}{5}$ .

O próximo quadro é obtido realizando as operações:

$$\frac{5}{19}L_1 \rightarrow L_1, \quad L_2 - \frac{2}{19}L_1 \rightarrow L_2, \quad L_3 + \frac{5}{19}L_1 \rightarrow L_3.$$

Terceiro quadro:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_2$	0	1	$\frac{5}{19}$	$-\frac{3}{19}$	$\frac{45}{19}$
$x_1$	1	0	$-\frac{2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
	0	0	$\frac{5}{19}$	$\frac{16}{19}$	$Q(x) + \frac{235}{19}$

Na terceira solução básica viável, temos  $x_3 = x_4 = 0$  (VNB),  $x_1 = \frac{20}{19}$ ,  $x_2 = \frac{45}{19}$  (VB) e  $Q(x) = -\frac{235}{19}$ . Tal solução correspondente ao vértice  $B = (\frac{20}{19}, \frac{45}{19})$ .

Note que essa é a solução ótima, pois a linha da função objetivo não possui mais coeficientes negativos. Logo, a solução ótima do problema é dada por

$$x_1 = \frac{20}{19}, \quad x_2 = \frac{45}{19}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Além disso,

$$\text{Mín } Q(x) + \frac{235}{19} = 0 \implies \text{Mín } Q(x) = -\frac{235}{19} \implies \text{Máx } Q'(x) = \frac{235}{19}.$$

**Exemplo 4.6.** *Seja o PPL dado pelo modelo:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 6x_1 + 10x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{cases}$$

*Vamos mostrar que este problema possui infinitas soluções.*

Resolução Gráfica:

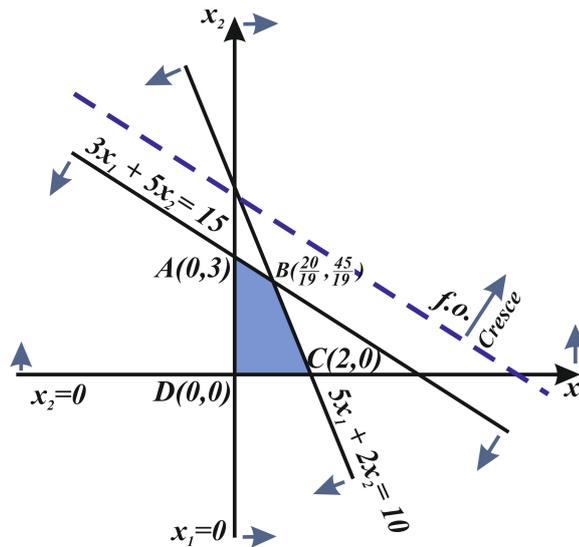


Figura 4.2: Solução do Exemplo 4.6. Fonte: Elaborado pela autora.

Solução pelo método Simplex:

Colocando o modelo em forma padrão, temos

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ -6x_1 - 10x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Min!} \end{cases}$$

Primeiro quadro:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{c|cccc|c} \text{VB} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline \leftarrow x_3 & 3 & \boxed{5} & 1 & 0 & 15 \\ x_4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 10 \\ \hline & -6 & -10 & 0 & 0 & Q(x) \end{array} \end{array}$$

Na primeira solução básica viável, temos  $x_1 = x_2 = 0$  (VNB),  $x_3 = 15$ ,  $x_4 = 10$  (VB) e  $Q(x) = 0$ . Tal solução corresponde ao vértice  $D = (0, 0)$ .

Tomando 5 como pivô, obtemos a segunda solução básica viável.

Segundo quadro:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{c|cccc|c} \text{VB} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline x_2 & \frac{3}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 3 \\ \leftarrow x_4 & \boxed{\frac{19}{5}} & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & 4 \\ \hline & 0 & 0 & 2 & 0 & Q(x) + 30 \end{array} \end{array}$$

Na segunda solução básica viável, temos  $x_1 = x_3 = 0$  (VNB),  $x_2 = 3$ ,  $x_4 = 4$  (VB) e  $Q(x) = -30$ . Tal solução correspondente ao vértice  $A = (0, 3)$ .

Essa é uma solução ótima, pois temos todos os coeficientes das variáveis da função objetivo não negativos. Como temos um coeficiente de uma VNB ( $x_1$ ) nulo, então existe mais de uma solução ótima, segundo o Corolário 4.4. Para determinar uma outra solução ótima, basta colocar  $x_1$  na base. Tomando  $\frac{19}{5}$  como pivô, obtemos a próxima solução básica viável.

Terceiro quadro:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_2$	0	1	$\frac{5}{19}$	$-\frac{3}{19}$	$\frac{45}{19}$
$x_1$	1	0	$-\frac{2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$
	0	0	2	0	$Q(x) + 30$

Na terceira solução básica viável, temos  $x_3 = x_4 = 0$  (VNB),  $x_1 = \frac{20}{19}$ ,  $x_2 = \frac{45}{19}$  (VB) e  $Q(x) = -30$ . Tal solução correspondente ao vértice  $B = (\frac{20}{19}, \frac{45}{19})$ .

Essa solução também é ótima, pois todos os coeficientes das variáveis da função objetivo são não negativos.

Logo, o PPL possui infinitas soluções ótimas, pelos Corolários 4.4 e 3.29.

Além disso, o conjunto de soluções ótimas do problema é dado pelo conjunto de todas as combinações lineares convexas das duas soluções ótimas determinadas, isto é, toda solução ótima é da forma

$$x^* = \alpha(0, 3, 0, 4) + (1 - \alpha) \left( \frac{20}{19}, \frac{45}{19}, 0, 0 \right),$$

onde  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Ainda,  $Q(x^*) = -30$  e  $Q'(x^*) = 30$ .

**Observação 4.7.** *A solução gráfica mostra que qualquer ponto do segmento  $AB$  é solução ótima do PPL, pois as retas, determinadas ao igualarmos a função objetivo a uma constante, são paralelas a esse segmento. De fato, o segmento  $AB$  contém todas as combinações lineares convexas dos dois vértices ótimos  $A$  e  $B$ .*

**Exemplo 4.8.** *Seja o PPL dado pelo modelo:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{cases}$$

*Vamos mostrar que este problema não possui soluções.*

Resolução Gráfica:

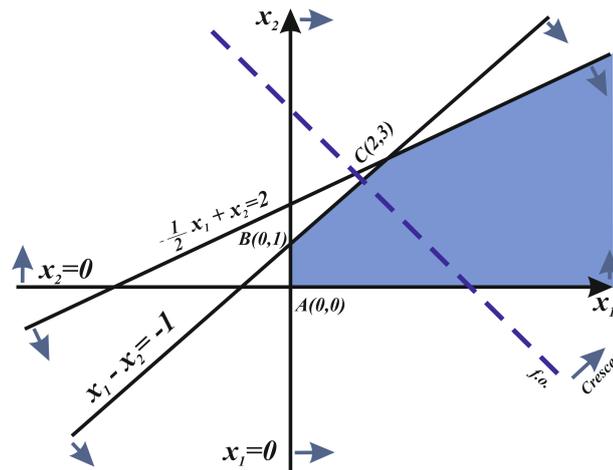


Figura 4.3: Solução do Exemplo 4.8. Fonte: Elaborado pela autora.

Solução pelo método Simplex:

Colocando o modelo em forma padrão, temos

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Min!} \end{cases}$$

Primeiro quadro:

		↓					
		VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
←	$x_3$	-1	1	1	0	1	
	$x_4$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	2	
		-2	-2	0	0	$Q(x)$	

Na primeira solução básica viável, temos  $x_1 = x_2 = 0$  (VNB),  $x_3 = 1, x_4 = 2$  (VB) e  $Q(x) = 0$ . Tal solução corresponde ao vértice  $A = (0, 0)$ .

Tomando o número em destaque no quadro como pivô, obtemos a segunda solução básica viável.

Segundo quadro:

		↓					
		VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	$x_2$	-1	1	1	0	1	
←	$x_4$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1	1	
		-4	0	2	0	$Q(x) + 2$	

Na segunda solução básica viável, temos  $x_1 = x_3 = 0$  (VNB),  $x_2 = 1, x_4 = 1$  (VB) e  $Q(x) = -2$ . Tal solução corresponde ao vértice  $B = (0, 1)$ .

Tomando o número em destaque no quadro como pivô, obtemos a terceira solução básica viável.

Terceiro quadro:

			↓		
VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
$x_2$	0	1	-1	2	3
$x_1$	1	0	-2	2	2
	0	0	-6	8	$Q(x) + 10$

Na terceira solução básica viável, temos  $x_3 = x_4 = 0$  (VNB),  $x_1 = 2, x_2 = 3$  (VB) e  $Q(x) = -10$ . Tal solução corresponde ao vértice  $C = (2, 3)$ .

Note que  $x_3$  deve entrar na base, pois seu coeficiente na função objetivo é negativo. Porém, como  $y_{13} = -1 < 0$  e  $y_{23} = -2 < 0$ , temos que  $x_3$  pode assumir qualquer não negativo, e quanto maior for o valor de  $x_3$ , menor será o valor de  $Q(x)$ . Assim, o PPL não tem solução.

## 4.4 Determinação de uma solução básica viável inicial

Na seção anterior, vimos que partindo do Sistema (4.1) era sempre possível obter uma solução básica inicial na forma canônica. Era suficiente adicionar variáveis de folga, reduzindo o problema à forma padrão (4.2), tomar as variáveis de folga como VB e as demais  $n$  variáveis como VNB, atribuindo a elas o valor 0. Obtínhamos então uma solução básica viável inicial na forma canônica que podia ser representada pelo Quadro (4.1). Isso foi possível, pois o PPL era constituído por inequações do tipo

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

onde  $b_i \geq 0$ . Entretanto, se tivermos restrições do tipo

$$\sum_j a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ou} \quad \sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$$

tal que  $b_i \geq 0$ , como vamos resolver o problema? Vejamos a seguir um exemplo dessas situações.

**Exemplo 4.9.** *Seja o PPL dado pelo modelo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 13 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 6x_1 - x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{array} \right.$$

*Vejamos que não poderemos proceder como nos exemplos anteriores.*

Colocando o modelo em forma padrão, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 13 \\ -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ -6x_1 + x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{array} \right.$$

Segue o quadro desse modelo:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
4	1	1	0	21
2	3	0	-1	13
-1	1	0	0	1
-6	1	0	0	$Q(x)$

Note que tomando as variáveis de folga como VB e anulando as demais variáveis, não obtemos uma solução básica viável, pois  $x_4$  fica negativo.

Vamos agora analisar tal questão de maneira mais genérica. Considere um PPL com  $m$  restrições e  $n$  incógnitas. Suponha  $b_i \geq 0$  para todo  $i$ . Isto será sempre possível, pois se  $b_j < 0$ , para algum  $j$  basta multiplicar a restrição por  $-1$ . Considere o PPL reduzido à forma padrão e introduzidas as variáveis de folga.

Se tomarmos as variáveis de folga como VB e anularmos as demais, podem surgir os seguintes problemas:

- i) No caso de existência de uma igualdade.

Como a igualdade não origina uma variável de folga, teremos menos de  $m$  variáveis de folga, ou seja, teremos menos de  $m$  VB e, portanto, deixamos de ter uma solução básica inicial.

ii) No caso de existência de uma desigualdade  $\geq$ .

Neste caso, introduzimos uma variável de folga acompanhada do sinal negativo. Tomando tal variável de folga como VB, criaremos uma VB negativa, pois temos  $b_i \geq 0$ . Então as condições de não negatividade não seriam satisfeitas, ou seja, obteríamos uma solução inicial não viável.

Como devemos proceder em tais casos? Para resolver tal problema vamos gerar inicialmente uma **solução básica artificial**. Ela será chamada artificial pois não pertencerá ao conjunto de soluções viáveis do PPL.

Começando por essa solução básica artificial, caminharemos por soluções básicas até chegar em uma solução básica viável do problema. Essa será a primeira fase do que chamamos de **Método das duas fases**. Em seguida, prosseguiremos normalmente com a aplicação do método Simplex, que será a segunda fase do método.

Na primeira fase, a busca por uma solução básica viável a partir de uma solução artificial será realizada com ajuda do Simplex.

Vejamos como gerar uma solução básica artificial inicial.

Suponhamos que o PPL foi modificado, de forma que  $b_i \geq 0$  para todo  $i$ . Em cada igualdade  $i$  introduzimos uma variável artificial positiva  $x_i^a$ . Além disso, em cada desigualdade  $\geq$  introduzimos, a variável de folga e uma variável artificial positiva acompanhada de sinal positivo, da seguinte forma:

$$\sum_j a_{ij}x_j = b_i \quad \rightarrow \quad \sum_j a_{ij}x_j + x_i^a = b_i$$

e

$$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i \quad \rightarrow \quad \sum_j a_{ij}x_j - x_{f_i} + x_i^a = b_i$$

onde  $x_i^a \geq 0$ .

Vejamos como isso se aplica no exemplo anterior.

**Exemplo 4.10.** *Seja o PPL dado no Exemplo 4.9:*

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 13 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 6x_1 - x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{cases} \quad (4.15)$$

*Vejamos que as variáveis artificiais possibilitarão a construção de uma solução básica.*

Introduzindo as variáveis de folga e as variáveis artificiais, temos

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_1^a = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_2^a = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_1^a \geq 0, x_2^a \geq 0 \\ -6x_1 + x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases} \quad (4.16)$$

Tal sistema pode ser representado pelo quadro:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
4	1	1	0	0	0	21
2	3	0	-1	1	0	13
-1	1	0	0	0	1	1
-6	1	0	0	0	0	$Q(x)$

Fazendo  $x_3$ ,  $x_1^a$  e  $x_2^a$  como VB e anulando as demais variáveis (VNB), obtemos

$$\text{VB: } x_3 = 21, x_1^a = 13, x_2^a = 1$$

e

$$\text{VNB: } x_1 = x_2 = x_4 = 0.$$

Já que todas as variáveis são não negativas e temos uma base composta de vetores unitários, associada às VB, conseguimos uma solução básica  $\hat{x}$  na forma canônica e podemos iniciar à aplicação do método Simplex.

Mas note que os valores obtidos para  $x_1$  e  $x_2$  não satisfazem todas as restrições do Sistema (4.15), ou seja, a solução básica artificial  $\hat{x}$  não representa uma solução viável para o PPL dado.

Quando inserimos ao problema variáveis artificiais e tornamos elas VB com valores positivos, infringimos as restrições do PPL, pois ao inserir numa igualdade  $i$  uma variável artificial positiva  $x_i^a$ , deixamos de ter uma igualdade e passamos a ter uma desigualdade, e ao inserir numa desigualdade  $\geq$  uma variável de folga nula  $x_{f_j}$  (VNB) e uma variável artificial positiva  $x_i^a$ , deixamos de ter uma desigualdade  $\geq$  e passamos a ter uma desigualdade  $\leq$  (considerando  $b_j \geq 0$ ). Ocorre que infringimos as restrições de forma a ampliar o conjunto de soluções viáveis do PPL, englobando a possibilidade da solução trivial ( $x_1 = \dots = x_n = 0$ ).

Assim, inserindo variáveis artificiais, criamos um novo PPL, que será denominado  $P'$  e será diferente do PPL dado  $P$ . A solução básica artificial gerada inicialmente ao tornarmos as variáveis artificiais positivas é uma solução básica viável de  $P'$ , mas não de  $P$ .

Não é difícil ver que às soluções viáveis de  $P'$ , com  $x_i^a = 0$  para todo  $i$ , correspondem às soluções viáveis de  $P$ . Assim, ao eliminarmos as variáveis artificiais, verificamos que as variáveis restantes satisfazem às restrições do PPL.

Partindo de uma solução básica viável inicial de  $P'$  e utilizando o Simplex, vamos gerar novas soluções básicas viáveis de  $P'$ , até obter uma solução cujas variáveis artificiais sejam todas nulas. A essa última solução poderemos associar uma solução básica viável de  $P$ , eliminando as variáveis artificiais. Essa será a primeira fase do método.

Tendo construído uma solução básica viável inicial para o problema  $P$ , procedemos como anteriormente, com o objetivo de otimizar o valor da função objetivo  $Q(x)$  dada. Essa será a segunda fase do método.

Mas como faremos para obter uma solução básica viável de  $P'$  com todas as variáveis artificiais nulas na primeira fase? Para tanto, no lugar de minimizar  $Q(x)$ , na primeira fase vamos considerar como função objetivo:

$$Q^a(x) = \sum_i x_i^a \rightarrow \text{Mín!}$$

Como  $x_i^a \geq 0$  para todo  $i$ , o menor valor possível será obtido quando  $x_i^a = 0$  para todo  $i$ .

Após a primeira fase, deixamos de lado  $Q^a(x)$  e passamos a trabalhar com a função objetivo dada  $Q(x)$ .

Vejamos a seguir um exemplo de aplicação do método das duas fases.

**Exemplo 4.11.** *Seja o PPL dado no Exemplo 4.9:*

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 13 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 6x_1 - x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{cases}$$

*Vamos determinar a solução deste problema pelo método das duas fases.*

Utilizando o quadro do exemplo anterior, após introduzir as variáveis artificiais, e considerando a função objetivo artificial  $Q^a(x) = x_1^a + x_2^a$ , temos:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_3$	4	1	1	0	0	0	21
$x_1^a$	2	3	0	-1	1	0	13
$x_2^a$	-1	1	0	0	0	1	1
	0	0	0	0	1	1	$Q^a(x)$
	-6	1	0	0	0	0	$Q(x)$

Iniciando a primeira fase do método, tomemos como solução básica inicial:

$$\text{VB: } x_3 = 21, x_1^a = 13, x_2^a = 1$$

$$\text{VNB: } x_1 = x_2 = x_4 = 0.$$

Mas por que colocamos duas funções objetivo no quadro? Na primeira fase trabalhamos apenas com a função objetivo  $Q^a(x)$ . A função objetivo  $Q(x)$  é incluída no quadro apenas porque isso mantém o PPL na forma canônica e permite a passagem direta à segunda fase, uma vez finalizada a primeira.

Note que os coeficientes de  $x_1^a$  e  $x_2^a$  (VB) em  $Q^a(x)$  são não nulos. Assim, para reduzir a solução básica à forma canônica, vamos precisar zerá-los. Para tanto, basta substituir a quarta linha por ela menos a segunda e a terceira linha. Obtemos então:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{c|cccccc|c} \text{VB} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a & \\ \hline x_3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 \\ x_1^a & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 13 \\ \leftarrow x_2^a & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & -1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & Q^a(x) - 14 \\ & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q(x) \end{array} \end{array}$$

Vamos aplicar o Simplex levando em conta apenas a função objetivo artificial  $Q^a(x)$ . A variável  $x_2$  se torna VB e  $x_2^a$  se torna VNB. O pivô será o 1 em destaque no quadro. Temos então o quadro a seguir.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{c|cccccc|c} \text{VB} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a & \\ \hline x_3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 20 \\ \leftarrow x_1^a & \boxed{5} & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 10 \\ x_2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & Q^a(x) - 10 \\ & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & Q(x) - 1 \end{array} \end{array}$$

Nesse caso, temos  $x_1 = x_4 = x_2^a = 0$  (VNB),  $x_3 = 20$ ,  $x_1^a = 10$ ,  $x_2 = 1$  (VB),  $Q(x) = 1$  e  $Q^a(x) = 10$ .

Como a função objetivo artificial contém coeficientes negativos, damos continuidade à primeira fase. A variável  $x_1$  se torna VB e  $x_1^a$  se torna VNB. O pivô será o 5 em destaque no quadro. Obtemos assim o seguinte quadro.

$$\begin{array}{c|cccccc|c} \text{VB} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a & x_2^a & \\ \hline x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 10 \\ x_1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 3 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & Q^a(x) \\ & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & Q(x) + 9 \end{array}$$

Nesse caso, temos  $x_4 = x_1^a = x_2^a = 0$  (VNB),  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 10$  (VB),  $Q(x) = -9$  e  $Q^a(x) = 0$ .

Como nenhum outro coeficiente da função objetivo artificial é negativo, chegamos ao fim da primeira fase. Como temos  $x_1^a = x_2^a = 0$  e  $Q^a(x) = 0$ , podemos desconsiderar as variáveis artificiais e a função objetivo artificial  $Q^a(x)$ .

Vamos iniciar agora a segunda fase do método, a partir do seguinte quadro:

				↓		
	VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
←	$x_3$	0	0	1	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	10
	$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	2
	$x_2$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	3
		0	0	0	-1	$Q(x) + 9$

Nesse caso, temos  $x_4 = 0$  (VNB),  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 10$  (VB) e  $Q(x) = -9$ .

Como a função objetivo possui coeficientes negativos, damos continuidade à segunda fase. A variável  $x_4$  se torna VB e  $x_3$  se torna VNB. O pivô será o 1 em destaque no quadro. Passamos então ao seguinte quadro.

	VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	$x_4$	0	0	1	1	10
	$x_1$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	4
	$x_2$	0	1	$\frac{1}{5}$	0	5
		0	0	1	0	$Q(x) + 19$

Nesse caso, temos  $x_3 = 0$  (VNB),  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_4 = 10$  (VB) e  $Q'(x) = -Q(x) = 19$ .

Como nenhum coeficiente da função objetivo é negativo, obtemos a solução ótima, chegando ao fim da segunda fase do método.

Vejamos graficamente o que foi feito ao aplicarmos o método das duas fases.

Considere a representação gráfica do PPL dado por (4.15):

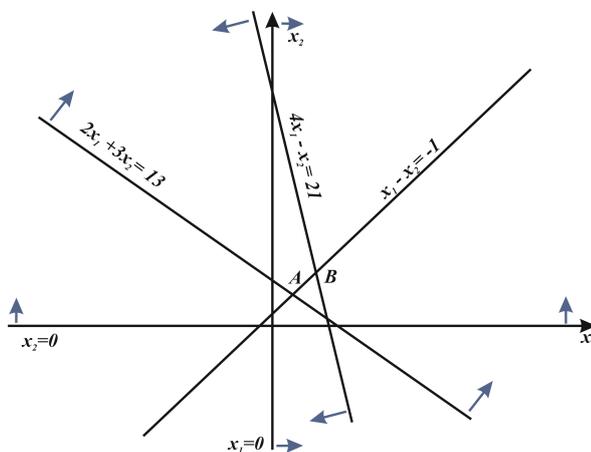


Figura 4.4: Representação gráfica. Fonte: Elaborado pela autora.

O conjunto de soluções viáveis do PPL é o segmento  $AB$  da reta  $x_1 - x_2 = -1$ . Chamamos esse de problema  $P$ .

Agora, representemos o PPL  $P'$ , dado por (4.16), no mesmo plano. O Sistema (4.16) poderá ser representado pelo seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq (\text{ou } \geq) 13 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ -6x_1 + x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases} \quad (4.17)$$

A segunda equação não vai mais representar uma restrição para  $x_1$  e  $x_2$ , pois é sempre possível tomar  $x_4 = 2x_1 + 3x_2$  e  $x_1^a = 13$ , por exemplo, e a equação será válida para quaisquer valores de  $x_1$  e  $x_2$ .

Apresentamos a seguir a representação gráfica do problema (4.17):

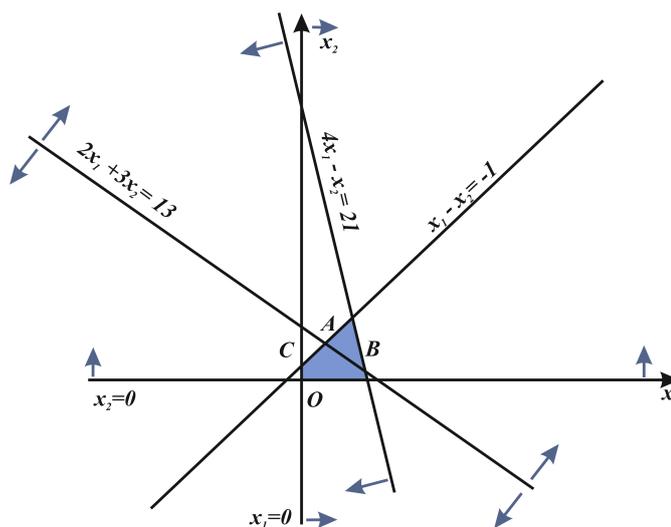


Figura 4.5: Representação gráfica. Fonte: Elaborado pela autora.

Como dissemos anteriormente, o conjunto de soluções viáveis do problema  $P'$  contém o conjunto de soluções viáveis do problema  $P$ . Na primeira fase, iniciamos com a origem como solução inicial, pois tomamos  $x_1 = x_2 = 0$ . Na primeira iteração, obtemos o ponto  $C(x_1 = 0, x_2 = 1)$  e na iteração seguinte chegamos ao ponto  $A(x_1 = 2, x_2 = 3)$ . Neste ponto, encerramos a primeira fase do método, pois o ponto  $A$  pertence ao conjunto de soluções viáveis do problema  $P$ . O ponto  $A$  é o ponto inicial da segunda fase. Na segunda fase, obtemos o ponto  $B$  que é a solução ótima do problema dado.

Na figura a seguir visualizamos as iterações realizadas pelo Simplex.

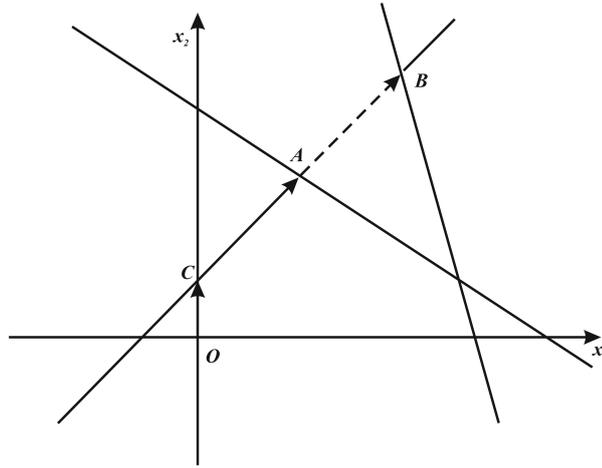


Figura 4.6: Iterações realizadas pelo Simplex. Fonte: Elaborado pela autora.

**Observação 4.12.** *Através da representação gráfica, notamos que existe uma certa inexatidão em considerarmos o ponto  $A$  com solução básica viável, isto é, como vértice de  $P'$ , pois  $A$  não é vértice de  $P'$ , mas sim a projeção no espaço  $\mathbb{R}^2$  das variáveis  $x_1$  e  $x_2$  de um vértice de  $P'$ . Isso ocorre pois estamos representando apenas as variáveis  $x_1$  e  $x_2$  sem considerar as variáveis de folga e as variáveis artificiais.*

No exemplo anterior, investigamos uma aplicação do método de duas fases em que era possível zerar a função objetivo artificial  $Q^a(x)$  e determinar uma solução básica viável. Mas será que é sempre possível anular  $Q^a(x)$ ? E se ao anularmos  $Q^a(x)$ , continuarmos com uma variável artificial na base, o que devemos fazer? Vejamos as respostas para essas perguntas.

Sejam  $P$  o PPL dado e  $P'$  o PPL obtido depois de inseridas as variáveis artificiais. Considere a função objetivo artificial  $Q^a(x)$  dada pela soma das variáveis artificiais. Suponha que a primeira fase do método de duas fases tenha terminado, ou seja, alcançamos o menor valor possível para  $Q^a(x)$  num ponto  $x^*$ . Vejamos quais possibilidades temos para  $Q^a(x^*)$ .

a)  $Q^a(x^*) = \sum_i x_i^{*a} > 0$ .

Neste caso, existe  $x_i^{*a} > 0$ , ou seja, não conseguimos obter uma solução básica viável de  $P$  pela regra dada, pois não existem vértices de  $P'$  em que todas as variáveis artificiais sejam nulas. De fato, como a todos os vértices de  $P$  correspondem vértices de  $P'$ , isto significa que não existe vértice de  $P$ , isto é, não existe solução básica viável de  $P$ .

Pelo Corolário 3.25, segue que o conjunto de soluções viáveis de  $P$  é um conjunto vazio. Portanto, o PPL não tem solução.

Vejamos esta possibilidade no seguinte exemplo.

**Exemplo 4.13.** *Seja o PPL dado pelo modelo:*

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases}$$

Vejamos que este problema não possui solução.

Podemos representar esse problema graficamente por:

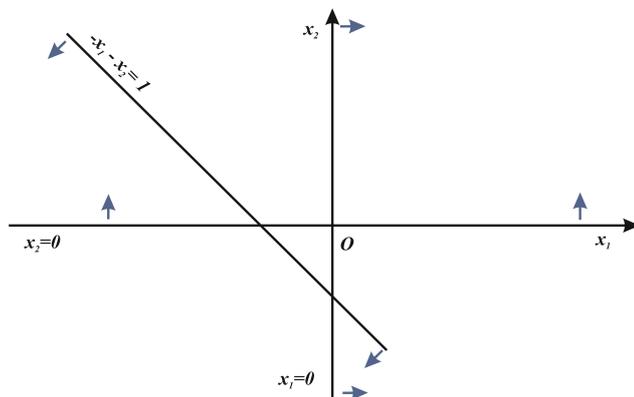


Figura 4.7: Representação gráfica. Fonte: Elaborado pela autora.

É fácil ver que o conjunto de soluções viáveis é vazio. Vamos comprovar tal fato aplicando o método das duas fases.

Insira uma variável de folga e uma variável artificial na primeira restrição. Obtemos um problema  $P'$ , dado por:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_1^a = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1^a \geq 0 \\ x_1 + 3x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases}$$

Primeiro quadro (referente à solução básica artificial inicial):

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	
$x_1^a$	-1	-1	-1	1	1
	0	0	0	1	$Q^a(x)$
	1	3	0	0	$Q(x)$

Anulando o coeficiente de  $x_1^a$  na função objetivo artificial, damos início à primeira fase do método.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	
$x_1^a$	-1	-1	-1	1	1
	1	1	1	0	$Q^a(x) - 1$
	1	3	0	0	$Q(x)$

Observe que já obtemos a solução ótima que minimiza a função objetivo artificial, pois os coeficientes de  $Q^a(x)$  são todos positivos. Nesse caso, temos  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  (VNB),  $x_1^a = 1$  (VB) e  $Q^a(x^*) = 1$ .

Assim, vemos que não é possível anular a variável artificial, o que significa que não existe solução básica viável para o problema dado. Logo, o problema dado não tem solução.

b)  $Q^a(x^*) = \sum_i x_i^{*a} = 0$

Neste caso,  $x_i^{*a} = 0$  para todo  $i$ , ou seja, conseguimos obter uma solução básica viável de  $P$ , eliminando as variáveis artificiais. Aqui temos os seguintes possíveis casos:

**b.1)** Todas as variáveis artificiais são VNB.

Já que as variáveis artificiais não têm significado, podemos desconsiderar tais variáveis e também a função objetivo artificial. Seguimos então para a segunda fase do método.

**b.2)** Existe variável artificial que é VB.

Primeiramente, desconsidere todas as variáveis artificiais que são VNB e os respectivos coeficientes em  $Q(x)$  e  $Q^a(x)$ , sobrando apenas as variáveis artificiais que são VB.

Este é um caso de degeneração pois, como as variáveis artificiais são todas nulas ( $Q^a(x)$  foi anulada), existe uma VB nula, o que caracteriza uma degeneração.

Nesta situação não podemos eliminar as variáveis artificiais que estão na base, pois teríamos um número menor de VB do que é necessário para compor uma solução básica viável.

Vamos utilizar o quadro abaixo para compreender o que acontecerá neste caso.

VB	Variáveis dadas		Variáveis de folga	Variáveis artificiais			
	...	$x_s$	...	...	$x_j^a$	...	
					0		
⋮		⋮			⋮		⋮
					0		
$x_j^a$	...	$y_{js}$	...	0 ... 0	1	0 ... 0	0
					0		
⋮		⋮			⋮		⋮
					0		
					0		
					0		

Considere  $x_j^a$  uma variável artificial nula que é VB. Temos dois casos possíveis:

**b.2.1)** Existe  $y_{js} \neq 0$  na linha referente à variável artificial  $x_j^a$ .

Neste caso, é suficiente realizar uma mudança de base, tornando  $x_s$  uma VB e retirando  $x_j^a$  da base. O pivô será  $y_{js}$ . Se existir mais de uma possibilidade de  $y_{js} \neq 0$ , a escolha de  $x_s$  pode ser feita de maneira arbitrária, pois qualquer  $x_s$  que entrar na base assumirá o valor 0 para não alterar o valor da função objetivo.

A seguir apresentamos um exemplo deste caso.

**Exemplo 4.14.** Seja o PPL dado pelo modelo:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{cases}$$

Vamos determinar a solução deste problema.

Resolução Gráfica:

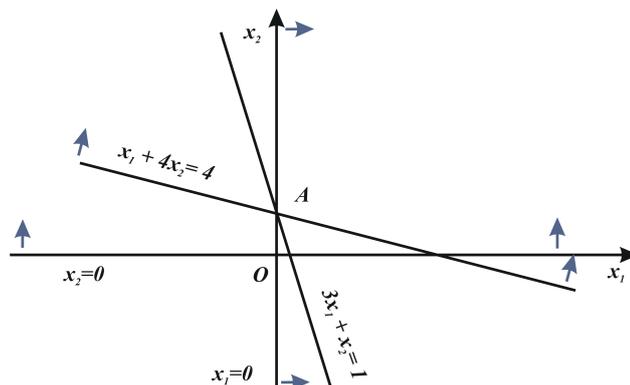


Figura 4.8: Solução do Exemplo 4.14. Fonte: Elaborado pela autora.

Reduzindo o PPL à forma padrão e introduzindo as variáveis artificiais, temos

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_1^a = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_2^a = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^a \geq 0, x_2^a \geq 0 \\ x_1^a + x_2^a = Q^a(x) \rightarrow \text{Mín!} \\ -x_1 - x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases}$$

Esse sistema é representado pelo seguinte quadro:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_1^a$	1	4	-1	1	0	4
$x_2^a$	3	1	0	0	1	1
	0	0	0	1	1	$Q^a(x)$
	-1	-1	0	0	0	$Q(x)$

Aplicando a primeira fase do método, temos:

		$\downarrow$					
	VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	$x_2^a$	
	$x_1^a$	1	4	-1	1	0	4
$\leftarrow$	$x_2^a$	3	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	0	0	1	1
		-4	-5	1	0	0	$Q^a(x) - 5$
		-1	-1	0	0	0	$Q(x)$

Nesse caso, temos  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  (VNB),  $x_1^a = 4$ ,  $x_2^a = 1$  (VB),  $Q^a(x) = 5$  e  $Q(x) = 0$ .

Como a função objetivo artificial contém coeficientes negativos, damos continuidade à primeira fase. A variável  $x_2$  se torna VB e  $x_2^a$  se torna VNB. O pivô será o 1 em destaque no quadro.

Obtemos assim o seguinte quadro:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_1^a$	-11	0	-1	1	-4	0
$x_2$	3	1	0	0	1	1
	11	0	1	0	5	$Q^a(x)$
	2	0	0	0	1	$Q(x) + 1$

Nesse caso, temos  $x_1 = x_3 = x_2^a = 0$  (VNB),  $x_1^a = 0$ ,  $x_2 = 1$  (VB),  $Q^a(x) = 0$  e  $Q(x) = -1$ .

Assim, chegamos ao fim da primeira fase e obtemos:

$$Q^a(x) = 0, \quad x_1^a = x_2^a = 0.$$

Primeiramente, vamos eliminar a variável artificial  $x_2^a$  que é VNB e a linha referente à  $Q^a(x)$ .

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	
$x_1^a$	-11	0	-1	1	0
$x_2$	3	1	0	0	1
	2	0	0	0	$Q(x) + 1$

Como a variável artificial  $x_1^a$  é VB, não podemos simplesmente eliminá-la. Já que na linha referente a ela temos elementos não nulos, vamos fazer uma mudança de base. Tome  $x_3$  para entrar na base.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	
$x_3$	11	0	1	-1	0
$x_2$	3	1	0	0	1
	2	0	0	0	$Q(x) + 1$

Nesse caso, temos  $x_1 = x_1^a = 0$  (VNB),  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$  (VB) e  $Q(x) = -1$ .

Note que também poderíamos ter escolhido  $x_1$  para entrar na base.

Como agora a variável artificial é VNB, podemos eliminá-la e iniciar a segunda fase.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$x_3$	11	0	1	0
$x_2$	3	1	0	1
	2	0	0	$Q(x) + 1$

Nesse caso, temos  $x_1 = 0$  (VNB),  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0$  (VB) e  $Q'(x) = -Q(x) = 1$ . Como os coeficientes da função objetivo não são negativos, chegamos a solução ótima do PPL.

**b.2.2)** Na linha referente à variável artificial  $x_j^a$  temos  $y_{js} = 0$  para todo  $s$ .

Neste caso, temos uma linha de zeros no quadro, com exceção do elemento relativo à variável artificial que é 1.

Considere o sistema  $Ax = b$  de  $m$  equações, do PPL dado  $P$ , onde foram introduzidas as variáveis de folga, mas não constam as variáveis artificiais. Como  $y_{js} = 0$  para todo  $s$ , obtemos uma equação nula no sistema  $Ax = b$ , ou seja, essa era uma equação redundante que pode ser eliminada do sistema.

Assim, se no final da primeira fase tivermos uma variável artificial  $x_j^a$  na base, tal que  $y_{js} = 0$  para todo  $s$ , podemos eliminar a linha e a coluna a ela relativas, ou seja, podemos eliminar  $x_j^a$  e a equação onde essa se encontra.

A seguir apresentamos um exemplo desta situação.

**Exemplo 4.15.** *Seja o PPL dado pelo modelo:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ -6x_1 - 9x_2 = -15 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{cases} \quad (4.18)$$

*Vamos determinar a solução deste problema.*

Resolução Gráfica:

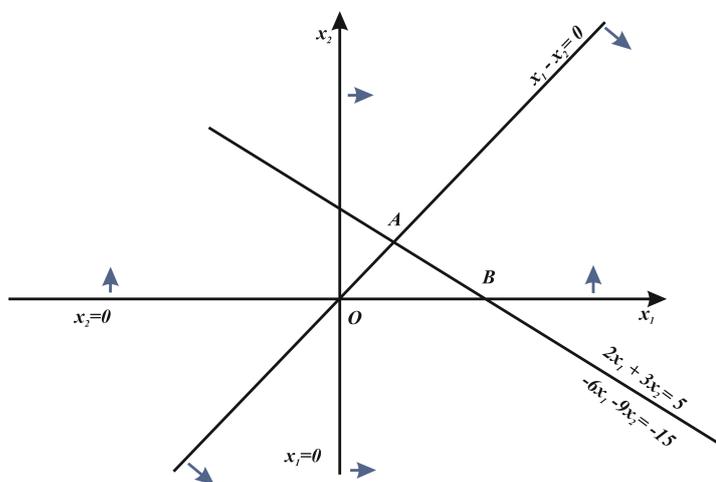


Figura 4.9: Solução do Exemplo 4.15. Fonte: Elaborado pela autora.

Reduzindo o PPL à forma padrão e introduzindo as variáveis artificiais, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_1^a = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_2^a = 15 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1^a \geq 0, x_2^a \geq 0 \\ x_1^a + x_2^a = Q^a(x) \rightarrow \text{Mín!} \\ -x_1 - x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Aplicando a primeira fase do método, temos:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_1^a$	2	3	0	1	0	5
$x_2^a$	6	9	0	0	1	15
$x_3$	-1	1	1	0	0	0
	0	0	0	1	1	$Q^a(x)$
	-1	-1	0	0	0	$Q(x)$

Reduzindo a solução básica a forma canônica, obtemos:

			↓			
VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_1^a$	2	3	0	1	0	5
$x_2^a$	6	9	0	0	1	15
← $x_3$	-1	1	1	0	0	0
	-8	-12	0	0	0	$Q^a(x) - 20$
	-1	-1	0	0	0	$Q(x)$

Nesse caso, temos  $x_1 = x_2 = 0$  (VNB),  $x_3 = 0, x_1^a = 5, x_2^a = 15$  (VB),  $Q^a(x) = 20$  e  $Q(x) = 0$ .

Como a função objetivo artificial contém coeficientes negativos, damos continuidade à primeira fase. A variável  $x_2$  se torna VB e  $x_3$  se torna VNB. O pivô será o 1 em destaque no quadro.

Obtemos então:

			↓			
VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	$x_2^a$	
← $x_1^a$	5	0	-3	1	0	5
$x_2^a$	15	0	-9	0	1	15
$x_2$	-1	1	1	0	0	0
	-20	0	12	0	0	$Q^a(x) - 20$
	-2	0	1	0	0	$Q(x)$

Nesse caso, temos  $x_1 = x_3 = 0$  (VNB),  $x_2 = 0, x_1^a = 5, x_2^a = 15$  (VB),  $Q^a(x) = 20$  e  $Q(x) = 0$ .

Como a função objetivo artificial contém coeficientes negativos, damos continuidade à primeira fase. A variável  $x_1$  se torna VB e  $x_1^a$  se torna VNB. O pivô será o 5 em destaque no quadro.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1^a$	$x_2^a$	
$x_1$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1
$x_2^a$	0	0	0	-3	1	0
$x_2$	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	1
	0	0	0	4	0	$Q^a(x)$
	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$Q(x) + 2$

Nesse caso, temos  $x_3 = x_1^a = 0$  (VNB),  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_2^a = 0$  (VB),  $Q^a(x) = 0$  e  $Q(x) = -2$ .

Como não temos mais coeficientes negativos na função objetivo artificial, chegamos ao fim da primeira fase e obtemos:

$$Q^a(x) = 0, \quad x_1^a = x_2^a = 0.$$

Primeiramente, vamos eliminar a variável artificial  $x_1^a$  que é VNB e a linha referente à  $Q^a(x)$ .

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_2^a$	
$x_1$	1	0	$-\frac{3}{5}$	0	1
$x_2^a$	0	0	0	1	0
$x_2$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	1
	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$Q(x) + 2$

Temos aqui uma variável artificial ( $x_2^a$ ) que é VB. Note que a linha referente a essa variável artificial é composta por zeros (com exceção do elemento referente à própria variável artificial). Esse é portanto um exemplo do caso **b.2.2**. Assim, existe uma equação redundante no Sistema (4.18). Logo, podemos eliminar a linha e a variável artificial a ela relativas. O que nos dá o quadro:

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$x_1$	1	0	$-\frac{3}{5}$	1
← $x_2$	0	1	$\frac{2}{5}$	1
	0	0	$-\frac{1}{5}$	$Q(x) + 2$

Podemos seguir com a segunda fase. Como a função objetivo possui coeficientes negativos, vamos tornar  $x_3$  uma VB e  $x_2$  uma VNB. O pivô será o  $\frac{2}{5}$  em destaque no quadro acima.

VB	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$x_1$	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
$x_2$	0	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
	0	$\frac{1}{2}$	0	$Q(x) + \frac{5}{2}$

Nesse caso, temos  $x_2 = 0$  (VNB),  $x_1 = x_3 = \frac{5}{2}$  (VB) e  $Q'(x) = -Q(x) = \frac{5}{2}$ . Como agora os coeficientes da função objetivo são não negativos, obtemos a solução ótima do problema.

Vejamos que o caso **b.2.2** é justamente um caso de degeneração, onde o modelo do PPL possui restrições sob a forma de igualdades linearmente dependentes.

Seja dado um PPL com um conjunto de  $m$  restrições dos tipos:

$$\overline{A}\overline{x} = b$$

ou

$$\overline{A}\overline{x} \leq b \tag{4.20}$$

ou

$$\overline{A}\overline{x} \geq b.$$

Introduza as variáveis de folga. Assim, o conjunto de restrições passa a assumir a forma:

$$Ax = b. \tag{4.21}$$

Em seguida, introduza variáveis artificiais para obter uma solução básica inicial. Podemos então escrever o conjunto de restrições como

$$\overline{A}\overline{x} = b.$$

A matriz  $\overline{A}$  é obtida a partir de  $A$  pela introdução das colunas referentes às variáveis artificiais. Além disso,  $\overline{x}$  é obtido a partir de  $x$ , acrescentando-se as variáveis artificiais.

Suponha que, aplicado o método das duas fases, chegamos ao final da primeira fase e conseguimos anular  $Q^a(x)$ .

Vamos provar que existem igualdades l.d. em (4.20) se, e somente se, estamos no caso **b.2.2**.

( $\Rightarrow$ ) Se existem igualdades l.d. em (4.20), essas serão mantidas sem alteração em (4.21). Daí,  $\text{posto}(A) < m$ . Se estivéssemos nos casos **b.1** ou **b.2.1**, poderíamos eliminar as variáveis artificiais, e obteríamos um sistema do tipo (4.21). Teríamos para esses casos  $m$  VB, o que não pode ocorrer, já que  $\text{posto}(A) < m$ . Assim, estamos necessariamente no caso **b.2.2**.

Antes de provar a volta da afirmação, note que apenas igualdades l.d. em (4.20) geram igualdades l.d. em (4.21), pois as desigualdades sempre originarão igualdades l.i. em (4.21), devido às variáveis de folga.

( $\Leftarrow$ ) Se estamos no caso **b.2.2**, podemos anular uma linha em (4.21). Isso implica que temos igualdades l.d. em (4.21). Nesse caso, temos respectivas igualdades l.d. em (4.20), pois, como acabamos de ver, desigualdades dão origem a igualdades l.i. em (4.21).

**Observação 4.16.** *É possível eliminar as variáveis artificiais conforme que essas se tornam VNB ao longo da primeira fase.*

Apresentamos na próxima página um fluxograma do método das duas fases.

Para encerrar esta seção, listamos todos os casos possíveis quando aplicamos o método das duas fases.

- a) O sistema de equações dado no PPL é incompatível. O PPL não tem solução, pois o conjunto de soluções viáveis é vazio.
- b) O sistema de equações dado no PPL é compatível. É possível eliminar as variáveis artificiais, gerando uma solução básica viável inicial para o problema dado. No final da primeira fase poderemos ter as seguintes situações:

b.1) As variáveis artificiais são VNB. É possível eliminá-las diretamente.

b.2) Existem variáveis artificiais que são VB. É possível eliminá-las de duas maneiras (supomos já eliminadas as variáveis artificiais que são VNB):

b.2.1) Se a linha referente à variável artificial contém elementos não nulos, podemos substituí-la na base por outra variável, eliminando assim a variável artificial.

b.2.2) Se a linha referente à variável artificial só contém elementos nulos, exceto o 1 relativo à própria variável artificial, podemos eliminá-la, bem como a coluna correspondente.

## 4.5 Interpretação geométrica do Simplex

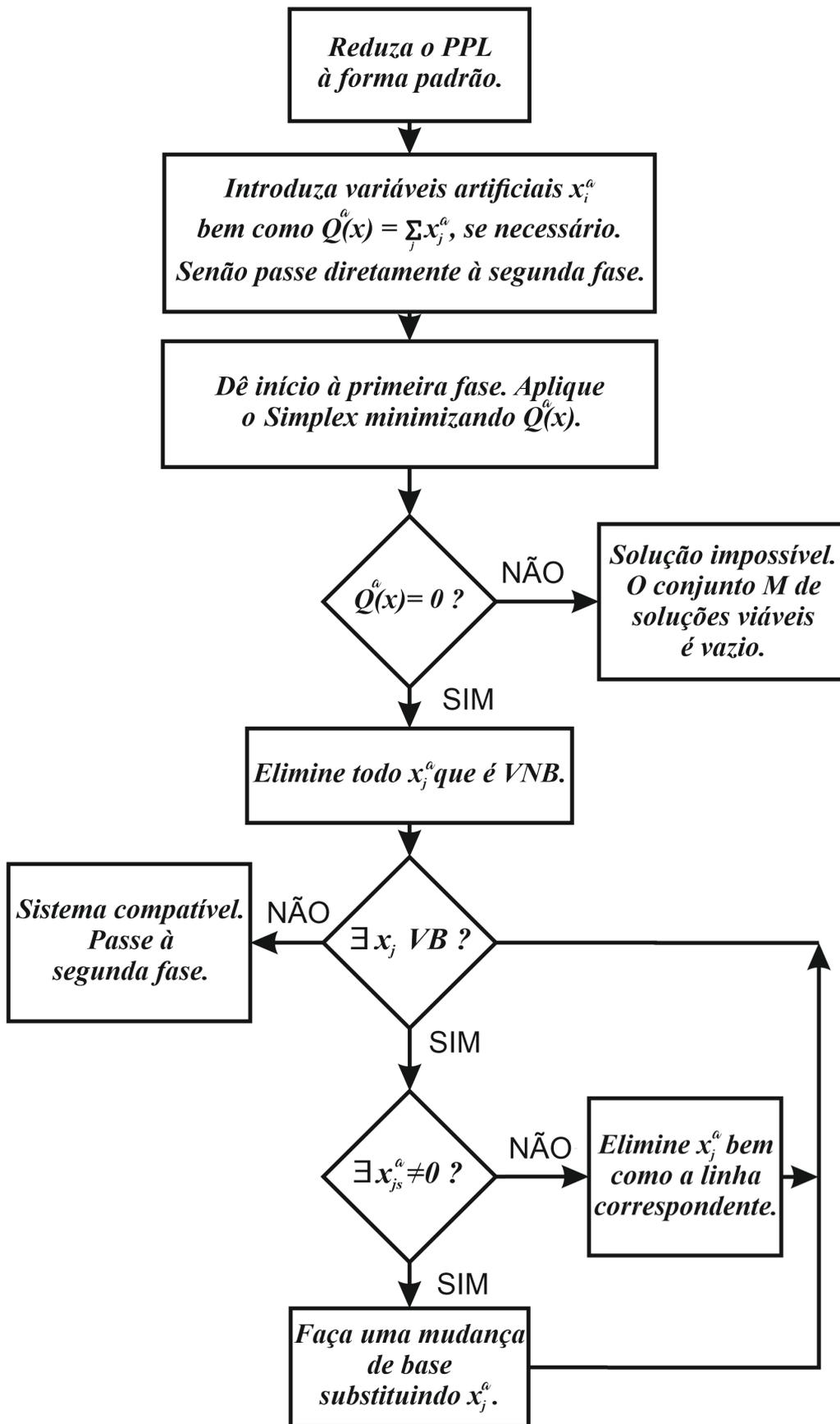
Considere um PPL geral:

$$(4.22) \left\{ \begin{array}{l} \bar{A}_1 \bar{x} \leq (\text{ou } \geq) b_1 \rightarrow m_1 \text{ desigualdades} \\ \bar{A}_2 \bar{x} = b_2 \rightarrow m_2 \text{ igualdades} \\ \bar{x} \geq 0 \rightarrow n \text{ variáveis dadas} \\ Q(\bar{x}) \rightarrow \text{Mín!} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.22a) \\ (4.22b) \\ (4.22c) \end{array}$$

Considere  $\bar{A}$  a matriz  $m \times n$  composta pelas matrizes  $\bar{A}_1$  e  $\bar{A}_2$  da seguinte forma:

$$\bar{A} = \left| \begin{array}{c} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{array} \right|,$$

onde  $m = m_1 + m_2$ .



Cada desigualdade  $\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$  ou  $\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$  do tipo (4.22a) origina um semiespaço, cujo hiperplano gerador é  $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$ . As condições de não negatividade  $x_i \geq 0$  também geram um semiespaço cujo o hiperplano gerador é  $x_i = 0$ . Finalmente, cada igualdade do tipo (4.22b) também origina um hiperplano. Assim, os seguintes conjuntos de hiperplanos

$$\begin{cases} \bar{A}_1 \bar{x} = b_1 \rightarrow m_1 \text{ hiperplanos} & (4.23a) \\ \bar{A}_2 \bar{x} = b_2 \rightarrow m_2 \text{ hiperplanos} & (4.23b) \\ \bar{x} = 0 \rightarrow n \text{ hiperplanos} & (4.23c) \end{cases}$$

que delimitam o conjunto de soluções viáveis do PPL. No total, temos  $m_1 + m_2 + n = m + n$  hiperplanos.

As interseções de tais hiperplanos dão origem a um conjunto de pontos, sendo que nem todos correspondem a soluções viáveis para o PPL em questão. Mostraremos que cada iteração do Simplex pode ser vista como a escolha de  $n$  dentre os  $m+n$  hiperplanos citados anteriormente, gerando um vértice, isto é, a uma solução básica viável.

Ao reduzirmos o PPL dado à forma padrão, introduzindo variáveis de folga relativas às desigualdades (4.22a), obtemos um sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} Ax = b \rightarrow m \text{ igualdades} & (4.24a) \\ x \geq 0 \rightarrow n_0 = n + m_1 \text{ variáveis} & (4.24b) \\ Q(\bar{x}) \rightarrow \text{Mín!} \end{cases}$$

A matriz  $A$  é obtida através da matriz  $\bar{A}$  adicionando  $m_1$  colunas, referentes às variáveis de folga das desigualdades (4.22a). Ainda, o vetor  $x$  é formado por  $\bar{x}$  adicionando-se  $m_1$  variáveis de folga.

Suponha que em (4.22b) não há igualdades l.d. Então a matriz  $A$  é a composta de  $m$  linhas l.i., isto é,  $\text{posto}(A) = m$ .

Suponha também que o PPL não possui nenhum vértice degenerado. Assim, não teremos VB nula.

Considere  $m < n_0$ . Daí, cada solução básica viável é obtida pela escolha de  $m$  VB, de forma que, ao atribuímos valor 0 para as  $n_0 - m$  demais variáveis (VNB) e resolvermos o Sistema (4.24a), encontramos valores positivos para as VB. Vejamos o que isso significa geometricamente.

Vamos mostrar, primeiramente, que cada VNB corresponde à escolha de um hiperplano.

Temos que  $x = \begin{vmatrix} \bar{x} \\ x_f \end{vmatrix}$  é um vetor  $(n_0 \times 1)$ , onde  $\bar{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$  e  $x_f = \begin{vmatrix} x_{f_1} \\ x_{f_2} \\ \vdots \\ x_{f_{m_1}} \end{vmatrix}$  são vetores  $(n \times 1)$  e  $(m_1 \times 1)$  relativos às variáveis do PPL (4.22).

Considere  $\mathbb{R}^n$  o espaço das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Então cada equação de (4.23a), (4.23b)

ou (4.23c) pode ser representada por um hiperplano nesse espaço. Temos os seguintes possíveis casos:

a)  $x_i = 0$

A escolha de uma variável  $x_i$  como VNB pode ser interpretada como a escolha do hiperplano  $x_i = 0$ .

b)  $x_{f_i} = 0$

A escolha de uma variável de folga  $x_{f_i}$  para VNB pode ser interpretada como a escolha do hiperplano  $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$ .

c) Quanto aos hiperplanos (4.23b), temos que cada solução viável deve pertencer aos hiperplanos definidos por estas restrições.

Vejamos agora qual é a quantidade de hiperplanos escolhidos em cada iteração. Vamos considerar os hiperplanos dos tipos a) e b) em conjunto. Como temos  $n_0 - m$  VNB e como

$$n_0 = n + m_1 \quad \text{e} \quad m = m_1 + m_2,$$

podemos dizer que contamos com  $n_0 - m = n - m_2$  hiperplanos do tipo a) e b) correspondentes às VNB escolhidas em cada solução básica viável.

Por outro lado, como temos  $m_2$  igualdades (4.22b), obtemos  $m_2$  hiperplanos tipo c).

Assim, para cada solução básica viável, temos  $n - m_2 + m_2 = n$  hiperplanos que vão determinar o vértice no  $\mathbb{R}^n$ .

Para enfatizar os conceitos apresentados nesta seção, vamos revisar o PPL do Exemplo 4.5.

**Exemplo 4.17.** *Seja o PPL dado no Exemplo 4.5:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 5x_1 + 3x_2 = Q'(x) \rightarrow \text{Máx!} \end{array} \right.$$

Reduzindo o PPL à forma padrão, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \\ -5x_1 - 3x_2 = Q(x) \rightarrow \text{Mín!} \end{array} \right.$$

Resolução Gráfica:

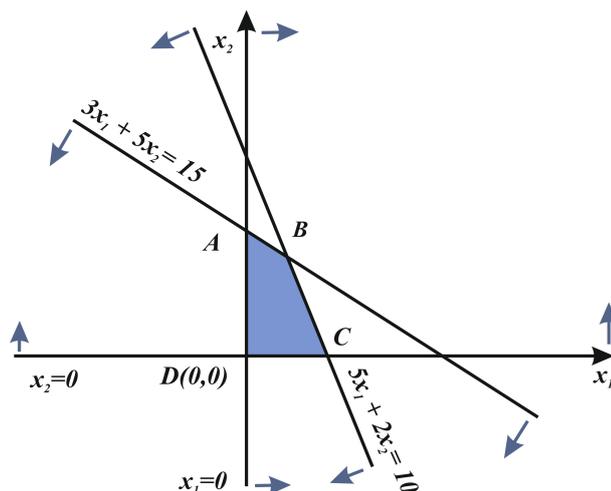


Figura 4.10: Solução do Exemplo 4.17. Fonte: Elaborado pela autora.

Vamos realizar uma interpretação geométrica das iterações do algoritmo Simplex apresentadas no Exemplo 4.5.

1ª Solução básica viável:

$$\text{VB: } x_1 = x_2 = 0, \quad \text{VNB: } x_3 = 15, x_4 = 10.$$

Note que a cada VNB corresponde um dos hiperplanos  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ , que são os eixos coordenados, e cuja interseção resulta no vértice  $D$ .

2ª Solução básica viável:

$$\text{VB: } x_2 = x_4 = 0, \quad \text{VNB: } x_1 = 2, x_3 = 9.$$

Ao anular  $x_4$ , forçamos a solução básica viável a pertencer à reta  $5x_1 + 2x_2 = 10$ . Mantemos  $x_2 = 0$ . A interseção dessas retas resulta no ponto  $C$ .

3ª Solução básica viável:

$$\text{VB: } x_3 = x_4 = 0, \quad \text{VNB: } x_1 = \frac{20}{19}, x_2 = \frac{45}{19}.$$

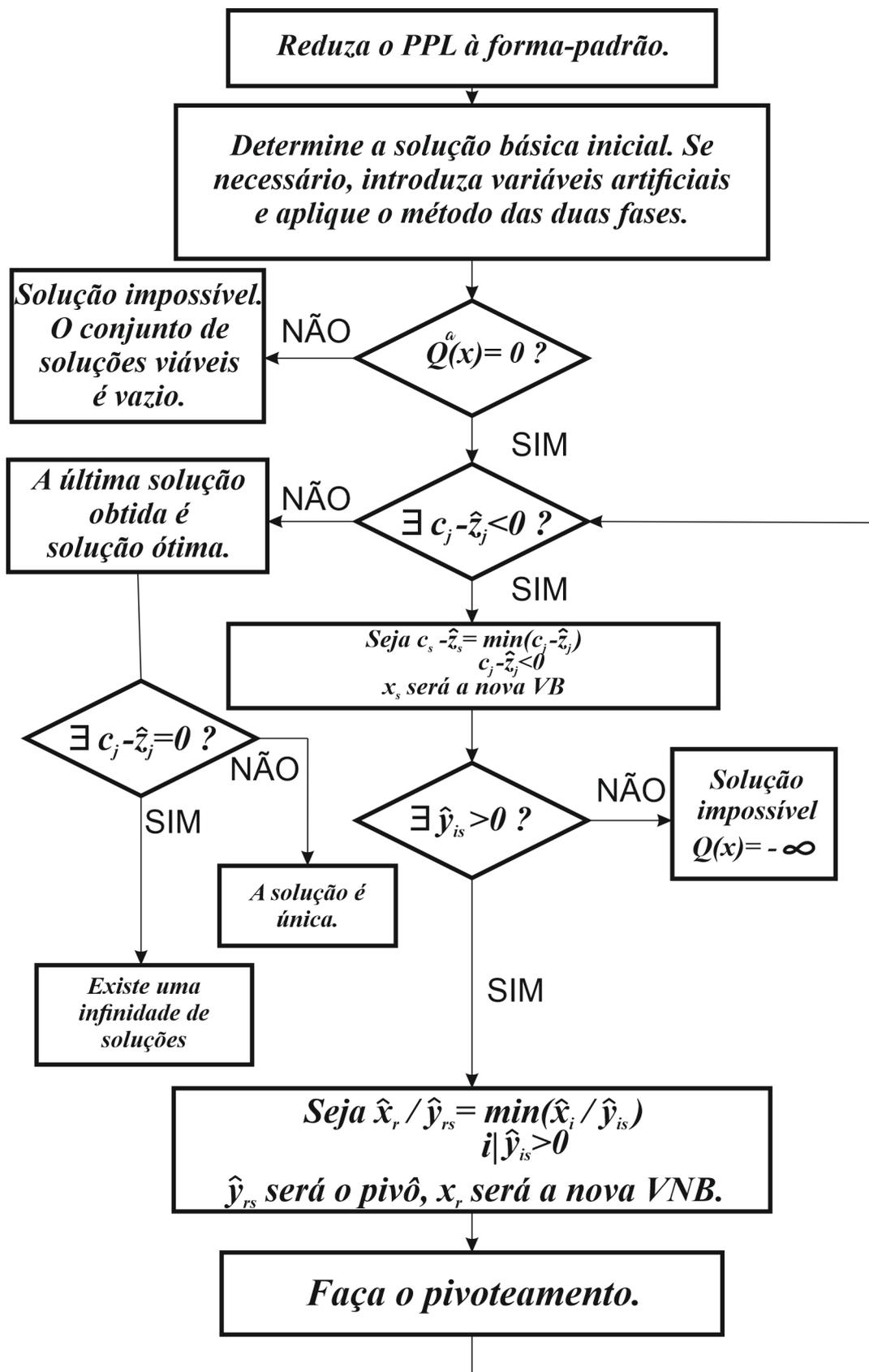
Ao anular  $x_3$  e  $x_4$ , forçamos a solução básica viável a pertencer às retas  $5x_1 + 2x_2 = 10$  e  $3x_1 + 5x_2 = 15$ . A interseção dessas retas resulta no ponto  $B$ , que é a solução ótima do PPL.

Vemos, portanto, que cada solução básica viável está associada à escolha de dois dentre os quatro hiperplanos que delimitam o PPL. A interseção desses dois hiperplanos fornece o vértice correspondente.

Claramente, a interseção dos hiperplanos  $x_2 = 0$  e  $3x_1 + 5x_2 = 15$  geram um ponto que não é uma solução viável. O mesmo ocorre com a interseção das retas  $x_1 = 0$  e  $5x_1 + 2x_2 = 10$ . Entretanto, como o método Simplex respeita as condições de não negatividade, geramos apenas soluções viáveis durante suas iterações, isto é, a escolha dos dois hiperplanos leva sempre a um vértice do conjunto de soluções viáveis do PPL.

## 4.6 Fluxograma do algoritmo Simplex

Apresentamos nesta última seção um fluxograma que descreve resumidamente todas as etapas do método Simplex.



# Capítulo 5

## Aplicação em sala de aula

Neste capítulo descrevemos duas atividades aplicadas em sala de aula de forma on-line. Tais atividades foram propostas para alunos do primeiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Uberlândia na cidade de Uberlândia-MG. A atividade foi dividida em partes: uma breve introdução sobre programação linear, apresentação dos problemas, modelagem matemática, apresentação do GeoGebra e resolução dos problemas. A mestrandia enviou o link da sala de videoconferência para os alunos interessados com antecedência. A atividade foi dividida em dois dias. Apresentaremos a seguir a primeira e segunda aula, respectivamente.

### 5.1 Primeira aula

Na primeira aula, houve a participação de 7 alunos. A aula foi iniciada com uma breve introdução sobre Programação Linear e, logo após, o primeiro problema foi apresentado.

**Problema 1:** Uma empresa pode fabricar dois produtos, produto *I* e produto *II*. Na fabricação do produto *I* a empresa gasta 9 horas-homem e 3 horas-máquina. Na fabricação do produto *II* a empresa gasta 1 hora-homem e 1 hora-máquina. Sendo  $x$  e  $y$  as quantidades fabricadas dos produtos *I* e *II*, sabendo que a empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina e ainda que os lucros dos produtos são 4 reais e 1 real, respectivamente, quanto deve fabricar de cada produto para obter o máximo de lucro possível?

Nesse momento foi importante a mestrandia explicar todas as informações contidas no problema. A modelagem do problema foi feita em conjunto com os alunos participantes. Foi pedido para que eles falassem sobre as restrições do problema, conduzidos por perguntas da mestrandia.

As seguintes restrições foram obtidas:

$$\begin{cases} 9x + y \leq 18 \\ 3x + y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

A função objetivo foi identificada:

$$f(x, y) = 4x + y \rightarrow \text{Máx!}$$

Em seguida, o GeoGebra on-line foi apresentado para os alunos.

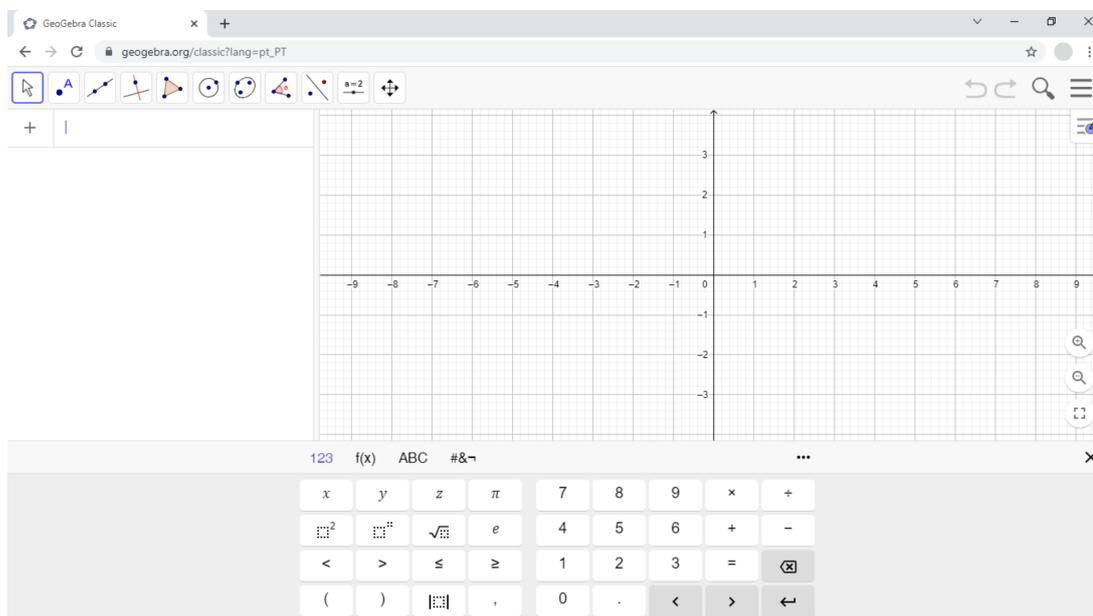


Figura 5.1: GeoGebra on-line. Fonte: Elaborado pela autora.

Para a primeira restrição foi feita a construção da reta  $9x + y = 18$  escolhendo pontos e depois localizados os pontos tais que  $9x + y \leq 18$ . Identificando assim onde estaria representada a primeira restrição. Essa construção foi apresentada no GeoGebra.

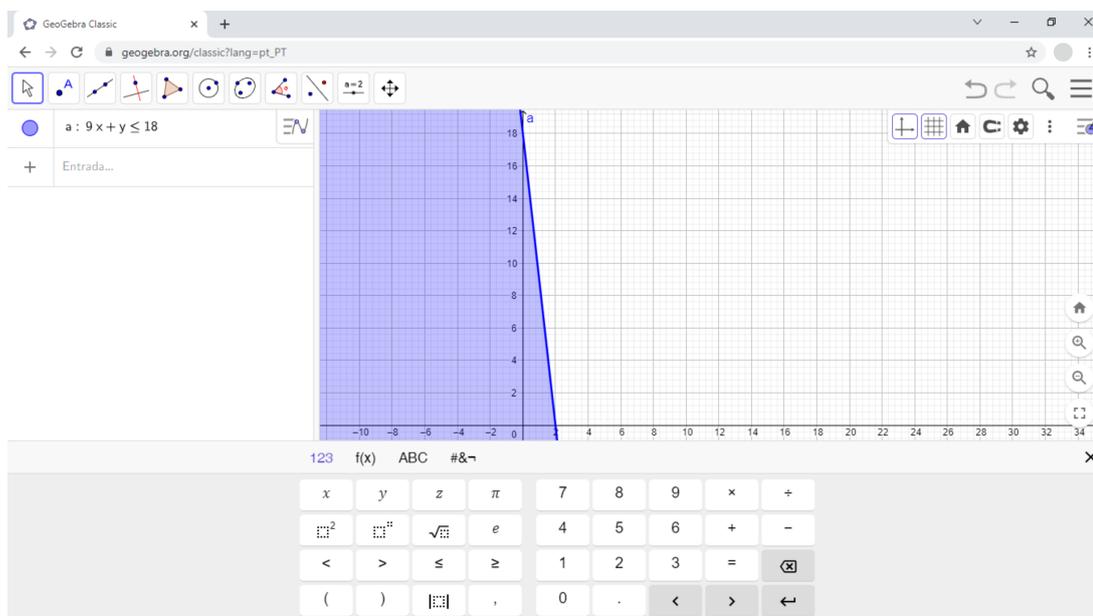


Figura 5.2: Primeira restrição. Fonte: Elaborado pela autora.

Na segunda restrição, os alunos sozinhos disseram à mestranda como deveria ser construído o gráfico no GeoGebra. Para a primeira restrição, os alunos fizeram a escolha de vários

pontos, pois não estava claro para eles a definição de reta. Já para a segunda restrição escolheram apenas dois pontos, orientados pela mestranda sobre os pontos mais práticos a serem escolhidos. Foi então representado  $3x + y \leq 12$ , que é a segunda restrição.

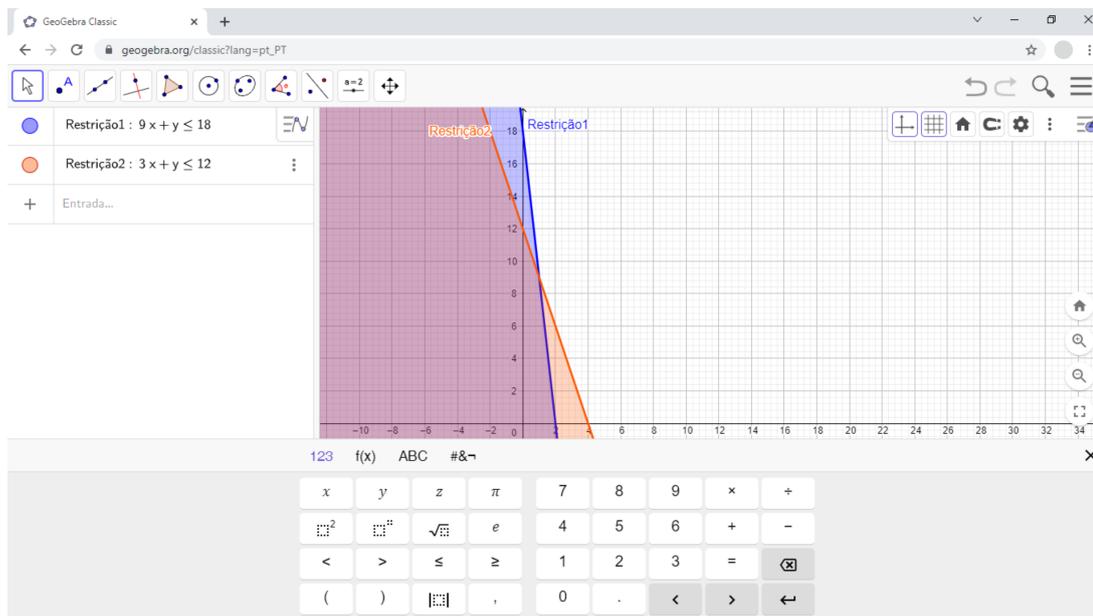


Figura 5.3: Segunda restrição. Fonte: Elaborado pela autora.

Nesse momento, a mestranda perguntou sobre as outras duas restrições. Foi explicado aos alunos o que é um critério de não negatividade. Assim, diante da explicação da mestranda, ficou claro qual região representava  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

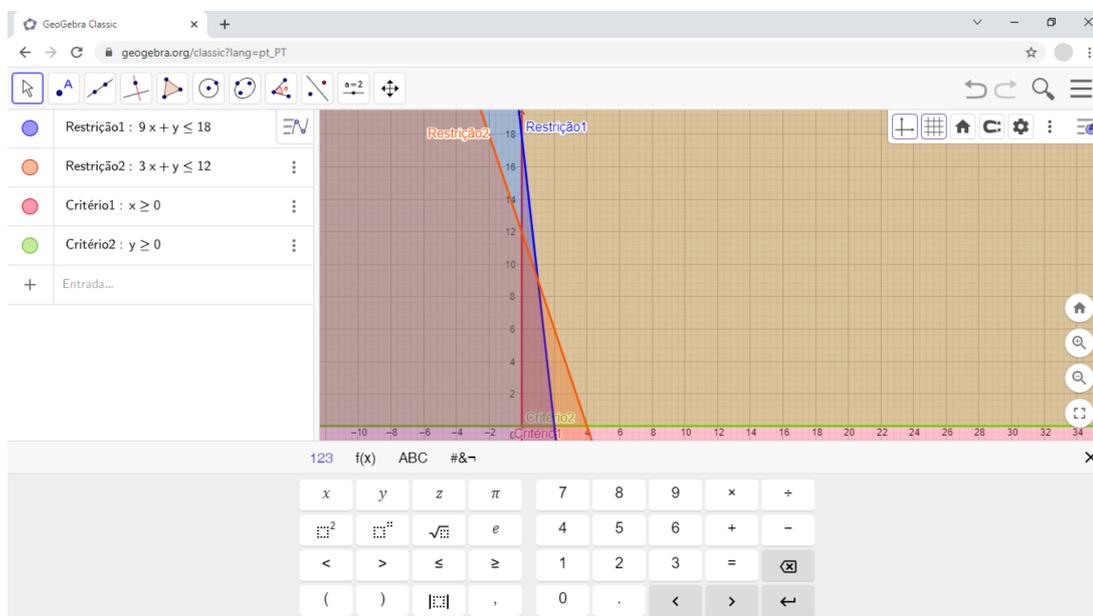


Figura 5.4: Condições de não negatividade. Fonte: Elaborado pela autora.

Em seguida, foi feita uma breve explicação sobre a solução ótima de um PPL e informado, que quando tal solução existe, ela sempre ocorre em um vértice do conjunto de soluções viáveis. Estabelecendo então a intenção de procurar por um vértice que otimize a função objetivo.

Voltando ao gráfico, a mestranda perguntou quais seriam os vértices. Os pontos  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  e  $(0, 12)$  foram identificados rapidamente pelos alunos, mas para o ponto de interseção de  $9x + y = 18$  e  $3x + y = 12$  houve uma tentativa de descobrir suas coordenadas apenas olhando para o gráfico. Como o gráfico não fornecia informações suficientes, não foi possível encontrar o ponto dessa maneira. Os alunos questionaram então à mestranda sobre como iriam encontrar aquele ponto em questão. A mestranda, através de perguntas, mostrou para os alunos que se tratava de um ponto de interseção entre duas retas, logo, encontrando esse ponto teriam o vértice que faltava.

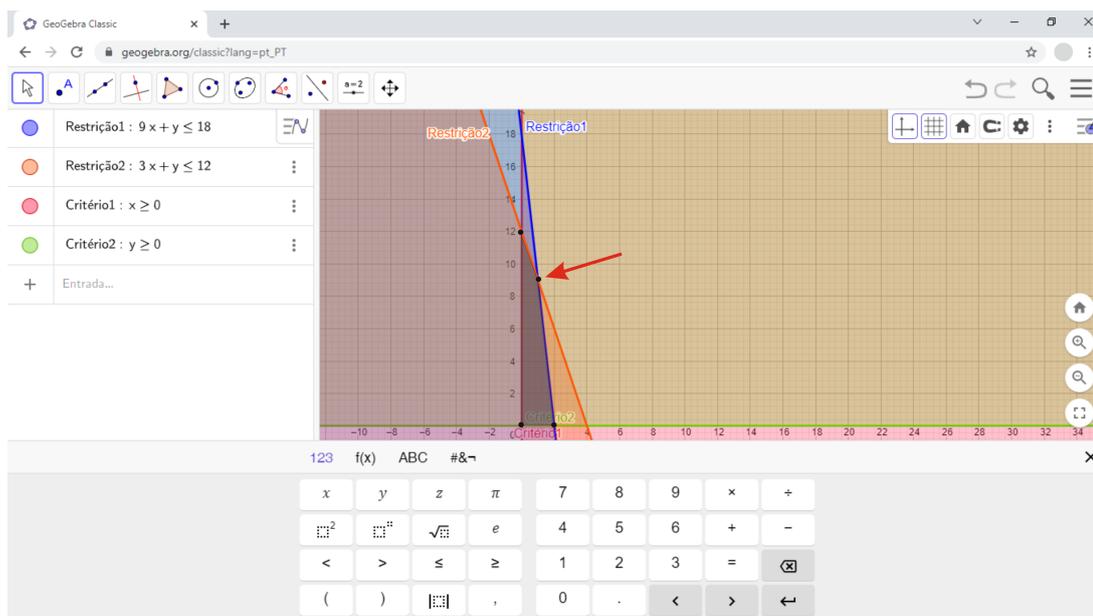


Figura 5.5: Vértices. Fonte: Elaborado pela autora.

Foi necessário explicar como montar e resolver um sistema linear. Essa parte da apresentação foi mais longa, pois alguns alunos pediram tempo para resolver o sistema após a explicação. Encontrado o ponto, esse então foi listado junto com os demais.

Para finalizar a análise, restou apenas testar todos os vértices na função objetivo e verificar para qual deles o valor da função seria o maior, já que o objetivo do problema era maximizar o lucro. A mestranda deu um tempo para que os alunos testassem os pontos. Os seguintes valores foram encontrados.

$(x, y)$	$f(x, y) = 4x + y$
$A = (0, 0)$	0
$B = (2, 0)$	8
$C = (0, 12)$	12
$D = (1, 9)$	13

Assim, foi determinado que o ponto ótimo do problema é o ponto  $D$  e que o valor máximo da função é 13.

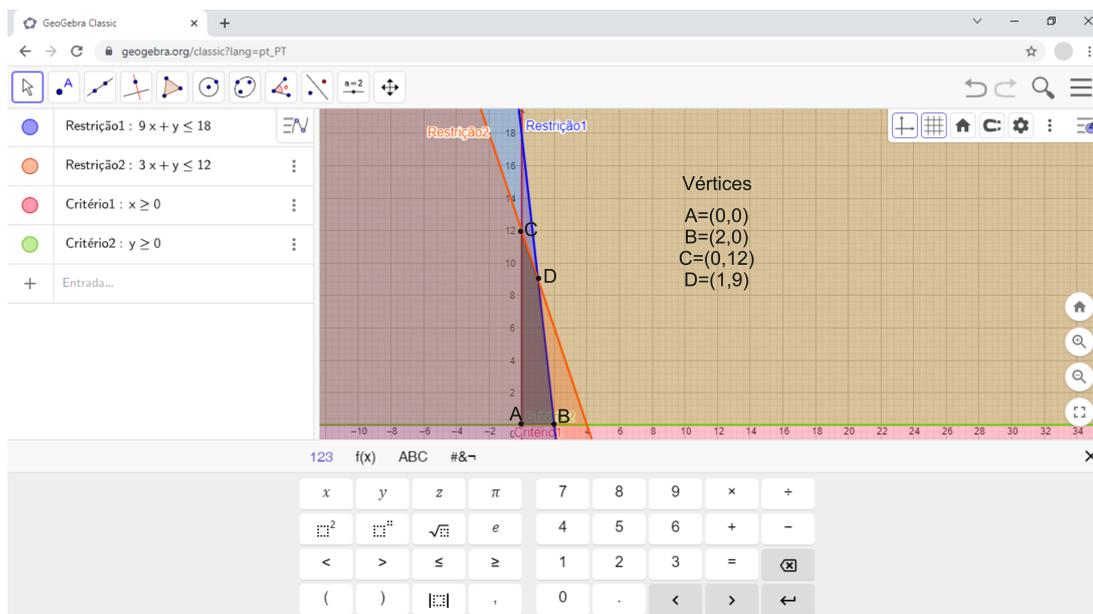


Figura 5.6: Análise final. Fonte: Elaborado pela autora.

## 5.2 Segunda aula

Na segunda aula, houve a participação de 5 alunos. Durante a aula foi trabalhado um segundo problema com os alunos.

**Problema 2:** Uma granja deseja alimentar seus frangos com uma dieta mais econômica. A dieta deve conter quatro tipos de nutrientes. Vamos chamá-los de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Esses componentes encontram-se em dois tipos de ração:  $J$  e  $K$ . A quantidade, em gramas, de cada componente por quilo desses alimentos para os frangos é dada na tabela a seguir:

Rações	A	B	C	D
J	100	0	100	200
K	0	100	200	100

A dieta diária do frango deve ser composta por pelo menos 0,4 Kg do componente  $A$ , 0,6 Kg do componente  $B$ , 2 Kg do componente  $C$  e 1,7 Kg do componente  $D$ . O composto  $J$  custa 0,2 reais por Kg e o composto  $K$  custa 0,08 reais por Kg. Qual quantidade deve ser adquirida das rações  $J$  e  $K$  para que o gasto em alimentos seja o menor possível?

As informações do problema foram analisadas com atenção. Lembrando do problema anterior os alunos identificaram as restrições com a ajuda da mestrandia, principalmente o critério de não negatividade.

$$\begin{cases} 0,1x + 0y \geq 0,4 \\ 0x + 0,1y \geq 0,6 \\ 0,1x + 0,2y \geq 2 \\ 0,2x + 0,1y \geq 1,7 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

A função objetivo também foi identificada:

$$f(x, y) = 0,2x + 0,08y \rightarrow \text{Mín!}$$

Foi solicitado que os alunos fizessem os cálculos das restrições e, logo após, foi utilizado o GeoGebra para análise da região (conjunto de soluções viáveis). Assim, foram representadas as retas  $x = 4$ ,  $y = 6$ ,  $y = 10 - 0,5x$  e  $y = 17 - 2x$ , e também identificadas as restrições  $x \geq 4$ ,  $y \geq 6$ ,  $y \geq 10 - 0,5x$  e  $y \geq 17 - 2x$ .

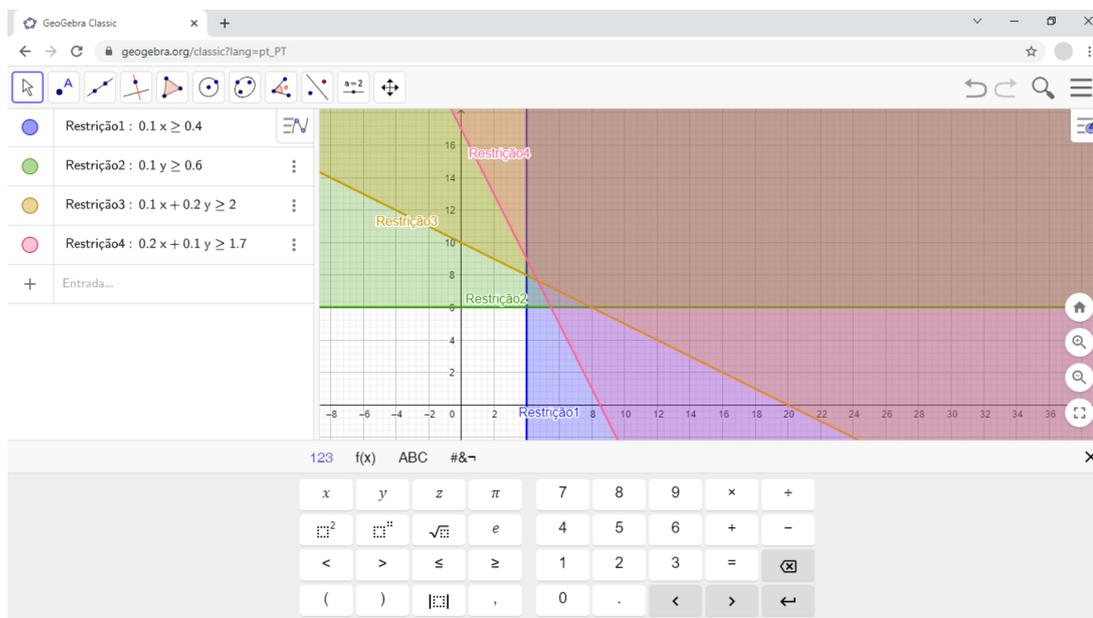


Figura 5.7: Restrições. Fonte: Elaborado pela autora.

O próximo passo foi procurar por um vértice que minimizasse a função objetivo, testando os pontos e analisando os resultados.

Assim como no exemplo anterior, foi perguntado aos alunos quais eram os vértices. Com facilidade eles os localizaram no gráfico. Dessa vez, os alunos pensaram na estratégia para encontrar os pontos sozinhos, já que seria necessário encontrar os pontos de interseção de  $x = 4$  e  $y = 17 - 2x$ ,  $y = 6$  e  $y = 10 - 0,5x$ , e também  $y = 17 - 2x$  e  $y = 10 - 0,5x$ . Nesse momento, foi possível notar uma dificuldade dos alunos quanto as operações com números decimais. Finalizados os cálculos os pontos foram testados na função objetivo e os seguintes resultados foram obtidos.

$(x, y)$	$f(x, y) = 0,2x + 0,08y$
$A = (4, 9)$	1,52
$B = (8, 6)$	2,08
$C = (4, 67; 7, 66)$	1,54

Assim, como o objetivo era minimizar o custo, o ponto com o menor valor na função objetivo foi encontrado. Logo, foi determinado que o ponto ótimo do problema é o ponto  $A$  e que o valor mínimo da função é 1,52.

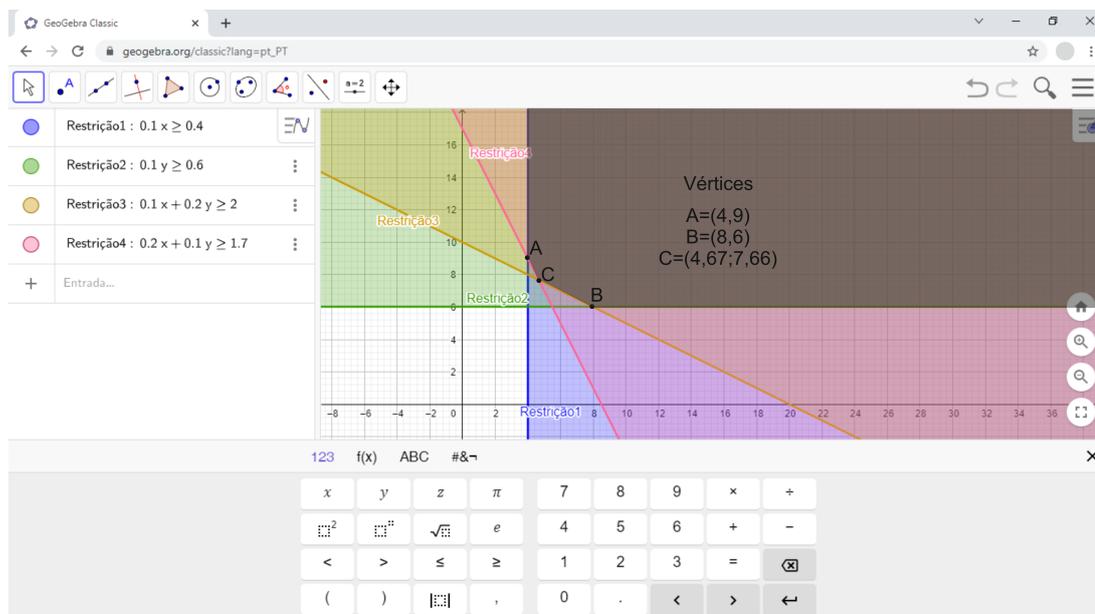


Figura 5.8: Análise final. Fonte: Elaborado pela autora.

Essa atividade foi importante para que os alunos interpretassem a modelagem de problemas e a utilização de softwares na aprendizagem de conteúdos. Vale destacar que os alunos demonstraram compreender bem a modelagem dos problemas, mas no segundo problema tiveram dificuldade para localizar a solução ótima, devido ao maior número de restrições e ao uso de números decimais. Considerando tudo que foi apresentado, essa atividade foi relevante para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos jovens, além de capacitá-los para a solução de problemas do dia-a-dia de forma mais rápida e eficiente.

O algoritmo Simplex não foi apresentado para discentes do primeiro ano do Ensino Médio, pois eles ainda não aprenderam o conteúdo necessário para realizar operações com matrizes. Tal aplicação poderia ser realizada em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio, porém optamos por não realizá-la pois não seria possível justificar a validade do método.

# Referências Bibliográficas

- [1] BREGALDA, P. F., OLIVEIRA, A. A. F. e BORNSTEIN, C. T. Introdução à programação linear. 3.ed. Rio de Janeiro: Campus, 1988.
- [2] BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J. e SHERALI, H. D. Linear programming and network flows. 2.ed. John Wiley & Sons, 1990.
- [3] LIMA, E. L. Espaços Métricos. 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [4] LUENBERGER, D. G. Linear and Nonlinear Programming. Addison Wesley, 1984.
- [5] ROCKAFELLAR, R. T. Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970.
- [6] SIMONNARD, M. Linear Programming. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966.