



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL



QUATÉRNIOS E ROTAÇÕES NO ESPAÇO

Outubro de 2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL - PROFMAT

QUATÉRNIOS E ROTAÇÕES NO ESPAÇO

Marta Schaeffer Butzge

Dissertação apresentada ao programa de pós graduação em matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Banca examinadora:

1o membro (Orientador): Flavio Roberto Dias Silva

2o membro: Thiago Pinguello de Andrade

3o membro: Sandro Marcos Guzzo

Cascavel, Outubro de 2021.

Ficha de identificação da obra elaborada através do Formulário de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da Unioeste.

Schaeffer Butzge, Marta
Quatérnios e rotações no espaço / Marta Schaeffer Butzge;
orientador Flávio Roberto Dias Silva. -- Cascavel, 2021.
101 p.


Dissertação (Mestrado Profissional Campus de Cascavel) --
Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Centro de Ciências
Exatas e Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Matemática -
Mestrado Profissional, 2021.

1. Matemática. 2. Rotações no Espaço. 3. Quatérnios. 4.
Custo Computacional. I. Dias Silva, Flávio Roberto, orient.
II. Título.

Marta Schaeffer Butzge

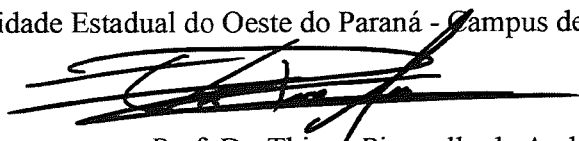
Quatérnios e rotações no espaço

Trabalho Final de Conclusão apresentado ao Programa de pós-graduação em Matemática - PROFMAT em cumprimento parcial aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, área de concentração Ensino de matemática, linha de pesquisa Ensino básico de matemática, APROVADO pela seguinte banca examinadora:



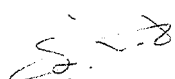
Orientador - Prof. Dr. Flávio Roberto Dias Silva

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)



Prof. Dr. Thiago Pinguello de Andrade

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus de Cornélio Procopio



Prof. Dr. Sandro Marcos Guzzo

Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Campus de Cascavel (UNIOESTE)

Cascavel, 14 de outubro de 2021

Agradecimentos

A Deus por ter permitido que mais esta realização da minha vida pudesse ser concluída.

Ao Prof. Dr Flávio Roberto Dias Silva pela paciência, apoio, dedicação e seu conhecimento indispensável para que houvessem o desenvolvimento do mesmo; além da compreensão e auxílio quando necessário.

Ao Prof. Dr André Vicente, atual coordenador do curso de mestrado profissionalizante PROFMAT, pela assistência.

Ao meu esposo Everton e aos nossos filhos Rafaela e Gabriel pela compreensão todo esse tempo, por algumas ausências, e pelo apoio, companheirismo, e incentivo para que eu chegasse até aqui.

A minha mãe, meu pai(in memorian) e meus irmãos que sempre confiaram na minha capacidade e se sentem orgulhosos das minhas conquistas.

A todos os professores do mestrado com os quais tive o prazer em conviver e aprender durante o período em que estive na UNIOESTE, visto que cada um contribuiu de alguma forma para o meu crescimento intelectual e minha prática docente.

Aos meus colegas de mestrado que sempre estiveram comigo durante horas de estudo, compartilhando conhecimento e contribuindo para o meu crescimento intelectual.

Aos meus colegas de trabalho, com os quais compartilhei as minhas angústias,... a todos, muito obrigado.

Resumo

Este trabalho tem como propósito apresentar o conjunto dos números quatérnios e suas principais propriedades, usando para isso, as propriedades e definições no contexto da geometria analítica como justificativa. Em face deste conhecimento associado as teorias contidas na álgebra vetorial sobre operadores lineares, também se objetiva a demonstrar as formas mais comuns de parametrizações de rotações no espaço partindo do pressuposto que estas seguem as ideias definidas para rotações do plano, a não ser por pequenos detalhes, apresentado assim os três tipos de parametrizações mais comuns para rotações no espaço: eixo-ângulo, ângulos de Euler e finalmente as rotações com números quatérnios unitários. Considerando o número de operações matemáticas realizadas tanto nas parametrizações quanto nas conversões entre parametrizações, será determinado qual das rotações oferece um custo computacional mais baixo, e também as características de cada rotação.

Palavras-chave: Álgebra. Quatérnios. Parametrizações. Rotações. Custo Computacional.

Abstract

This work aims to present the set of quaternary numbers and their main properties, using the properties and definitions in the context of analytic geometry as justification. In view of this knowledge associated with the theories contained in vector algebra about linear operators, it also aims to demonstrate the most common forms of parameterization of rotations in space, assuming that they follow the ideas defined for plane rotations, except for small details, thus presenting the three most common types of parameterizations for rotations in space: axis-angle, Euler angles and finally the rotations with unitary quaternary numbers. Considering the number of mathematical operations performed in both parameterizations and conversions between parameterizations, it will be determined which of the rotations offers the lowest computational cost, as well as the characteristics of each rotation.

Keywords: Algebra. Quaternions. Parameterizations. Rotations. Computational Cost.

Lista de Figuras

1.1	Adição de vetores no espaço.	21
1.2	Vetores linearmente dependentes	25
1.3	Vetores linearmente independentes.	26
1.4	Ângulo entre vetores.	27
1.5	Projeção de \vec{v} na direção de \vec{u}	30
1.6	Paralelogramo $P = OACB$ de altura h	37
2.1	Multiplicação de unidades.	40
3.1	Representação das coordenadas de v	64
3.2	Rotações no plano.	65
3.3	Representação de z no plano complexo.	67
3.4	Sistema S_1 rotacionado.	69
3.5	Rotações em torno de um eixo.	71
3.6	Rotação em torno do eixo x	76
3.7	Ação do operador R sobre o vetor v	82

Sumário

Introdução	17
1 Operações com Vetores no Espaço	19
1.1 Vetores no Espaço	19
1.2 Operações com Vetores no Espaço	21
1.2.1 Colinearidade e Coplanaridade de Pontos em \mathbb{R}^3	23
1.3 Produto Interno no Espaço	26
1.4 Relação entre Vetores, Matrizes e Determinantes	30
1.5 Produto Vetorial	35
2 O Conjunto dos Quatérnios	39
2.1 Definições no Conjunto dos Quatérnios	39
2.2 Álgebra dos Quatérnios	41
2.3 Conjugado e Norma	53
2.3.1 Quatérnio Unitário	59
3 Rotações	61
3.1 Rotações no Plano	64
3.1.1 Números Complexos e as Rotações no Plano	66
3.2 Rotações no Espaço	67
3.3 Parametrizações de Rotações no Espaço	70
3.3.1 Eixo-Ângulo	71
3.3.2 Ângulos de Euler	75

3.3.3	Quatérnios	79
4	Conversão e Comparação de Parametrizações	87
4.1	Eixo-Ângulo \Leftrightarrow Ângulos de Euler	87
4.2	Ângulos de Euler \Leftrightarrow Quatérnios	88
4.3	Eixo-Ângulo \Leftrightarrow Quatérnios	89
4.4	Eficiência Computacional	90
4.4.1	Características Operacionais de cada Parametrização	92
4.5	Especificidades de cada Parametrização	95
	Conclusão	97
	Referências Bibliográficas	99

Introdução

No início do século *XIX* aconteceram grandes avanços na produção do conhecimento científico matemático. Após muito tempo o estudo sobre os números complexos ficar “adormecido”, o assunto acabou sendo retomado por Caspar Wessel (1745-1818), Karl Friedrich Gauss (1777-1855) e Jean-Robert Argand (1786-1822) que descobriram que, além de poder representar um número complexo no plano, ele também poderia ser operado entre si, o que posteriormente passou a ser chamado de *Álgebra vetorial*.

Mas essas conclusões não foram assim tão simples. Somente em 1833 Willian Rowan Hamilton (1805-1865) apresentou à Academia Irlandesa um artigo onde introduziu a álgebra formal dos números complexos [16]. Os complexos então passaram a ser encarados como pares ordenados (a, b) de números reais que podiam ser somados e multiplicados obtendo assim, uma explicação lógica para a o símbolo $\sqrt{-1}$. Mas o que Hamilton tinha em mente era bem mais pretensioso do que isso: buscar uma álgebra que fosse para vetores no espaço tridimensional o que a álgebra era para os números complexos no plano.

Hamilton tentou aplicar a ideia de número complexo binário $a + bi$ para três dimensões usando os ternos $a + bi + cj$ e trabalhou por dez anos na tentativa de resolver a multiplicação de números com essa formação, sem sucesso. Em 1843, após abandonar a ideia da comutatividade entre quatérnios e usar mais um termo, chamado de k , percebeu que era possível formalizar a álgebra dos quatérnios.

Entre as várias aplicações com números quatérnios, destacamos a sua utilização em computação gráfica através da possibilidade de descrever movimentos tridimensionais abordados no campo da robótica [3], a interpolação de pontos no espaço para descrever movimentos de rotação suave em animações gráficas [13] utilizadas no desenvolvimento de games, fotogrametria [10], além de outras aplicações.

Inicialmente, trataremos de conceitos considerados preliminares da geometria analítica e álgebra vetorial a fim de que os conteúdos abordados na sequência possam ser melhor compreendidos buscando uma justificativa para o desenvolvimento de algumas teorias.

Na sequência no capítulo 2, de acordo com as definições contidas em [11], serão

apresentadas as notações e definições presentes no conjunto dos números quatérnios, bem como a demonstração das principais propriedades, que tornam o conjunto dos números quatérnios conhecido matematicamente como um quase corpo, além de algumas informações necessárias às rotações no espaço.

O terceiro capítulo constará inicialmente de informações importantes da álgebra justificando que a utilização do operador linear de rotação satisfaz as condições de uma transformação linear. Além disso, através da analogia das rotações no plano com os números complexos, é possível estabelecer uma relação entre as rotações no espaço com os números quatérnios, sendo também consideradas as parametrizações no sistema eixo-ângulo e ângulos de Euler.

Finalmente, o último capítulo tratará de informações importantes inicialmente sobre a conversão de parametrizações, e posteriormente, o número de operações vinculadas a cada parametrização e também conversão justificando assim qual parametrização é mais vantajosa do ponto de vista da implementação computacional de algoritmos.

Capítulo 1

Operações com Vetores no Espaço

Em 1843 um grande estudioso inglês, Willian Rowan Hamilton (1805-1865) desenvolveu a álgebra dos números quatérnios [12], porém, no final do século XIX dois estudiosos, o americano Josiah Willard Gibbs e o inglês Oliver Heaviside popularizaram uma versão “simplificada” dos números quatérnios com a publicação de vários livros a respeito do assunto que mais tarde passou a se chamar “Álgebra vetorial” [17]. Assim, inicialmente abordaremos as operações entre vetores, dadas pelo produto interno (escalar) e o produto vetorial, bem como as propriedades vinculadas, para que na sequência, possam ser utilizadas nas operações entre números quatérnios e posteriormente justificar outras propriedades vinculadas às rotações no espaço.

Também se faz necessário ressaltar que o assunto ora tratado pode ser encontrado em inúmeros referências bibliográficas, como por exemplo [8], [4] e [23]. Neste capítulo, a fim de que se possa adotar uma nomenclatura única, optaremos por [16] e [8], uma vez que se trata do livro texto do curso PROFMAT. Também assumiremos conhecidos os principais axiomas e resultados da Geometria Euclidiana no espaço.

1.1 Vetores no Espaço

Antes de introduzir o conceito de vetor no espaço, definiremos o espaço a ser utilizado, escolhendo o sistema de eixos ortogonais de acordo com [8].

Definição 1.1. Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço ε da Geometria Euclidiana consiste de três eixos mutuamente perpendiculares, OX , OY e OZ , com a mesma origem O .

Assim, cada ponto $P \in \varepsilon$ corresponde a uma terna ordenada (x, y, z) onde x , y , e z são chamadas de coordenadas do ponto P em relação ao sistema de eixos ortogonais

OXYZ.

Inicialmente, vamos definir as relações de equipolência no espaço.

Definição 1.2. Os segmentos orientados AB e CD no espaço são equipolentes e escrevemos $AB \equiv CD$, quando satisfazem as seguintes condições:

- (i) AB e CD tem comprimento igual: $|AB| = d(A, B) = d(C, D) = |CD|$. Vale ressaltar que neste caso, $d(A, B)$ denota a distância entre os pontos A e B na geometria Euclidiana;
- (ii) AB e CD estão contidos em retas distintas que são paralelas;
- (iii) AB e CD têm o mesmo sentido.

A relação de equipolência entre segmentos no espaço é também considerada uma relação de equivalência pois satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade. Assim, podemos dividir o conjunto dos segmentos orientados no espaço em subconjuntos chamados *Classes de equipolência*, onde cada classe é denominada de *Vetor no espaço*.

Para designar o conjunto de todos os vetores equipolentes ao segmento AB no espaço, usaremos a notação:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \{CD | AB \equiv CD\}.$$

Para caracterizar a equipolência em termos de coordenadas, considere $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ e $D = (d_1, d_2, d_3)$. Então,

$$AB \equiv CD \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1, b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \text{ e } b_3 - a_3 = d_3 - c_3.$$

A afirmação acima é justificada pelo fato de que, ao considerarmos o paralelogramo $ABDC$, o ponto médio do segmento AD coincide com o ponto médio de BC e pode ser encontrada em [8].

Também não menos importante, o vetor nulo ou vetor zero, será representado por um segmento cuja origem é igual a extremidade,

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$$

Além disso, dado um vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto $P \in \varepsilon$, existe um único ponto $Q \in \varepsilon$ tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$.

Neste caso, para verificar quando A , B e P não são colineares, basta considerar o plano que os contém, o leitor interessado em maiores informações poderá consultar [8].

1.2 Operações com Vetores no Espaço

Para compreender algumas operações que serão realizadas no conjunto dos números quatérnios é necessário conhecer as propriedades de operações com vetores no espaço. É importante ressaltar que a álgebra dos quatérnios antecede e justifica a álgebra vetorial. No entanto, devido ao conhecimento dos leitores sobre o assunto, consideraremos que a álgebra vetorial é um “pré-requisito” para a compreensão da álgebra dos quatérnios.

Assim, vamos definir as operações de adição de vetores no espaço e também a multiplicação de um número real por um vetor.

Definição 1.3. Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores do espaço ε . Seja A um ponto qualquer do espaço e sejam AB e BC segmentos orientados representantes dos vetores \vec{u} e \vec{v} respectivamente. O vetor soma dos vetores \vec{v} e \vec{u} , que designamos por $\vec{u} + \vec{v}$, é o vetor representado pelo segmento AC . Ver Figura 1.1.

Na prática, a adição de vetores (Figura 1.1), efetua-se em relação às coordenadas dos vetores em um sistema de eixos ortogonais fixados, onde os pontos A , B e C estão contidos no mesmo plano do espaço.

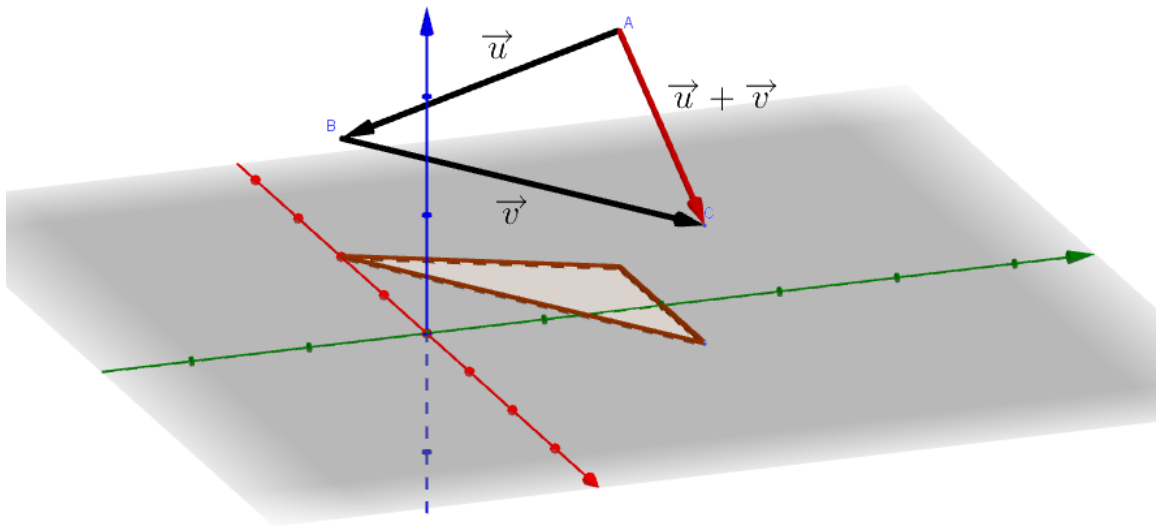


Figura 1.1: Adição de vetores no espaço.

Proposição 1.1. Considerando um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e os vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ vetores no espaço.

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

As propriedades da adição de vetores no espaço e no plano são similares. Apresentaremos as propriedades cujas demonstrações podem ser encontradas em vários livros de *Geometria analítica*.

Proposição 1.2. Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores no espaço. Valem as seguintes propriedades:

- i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- ii) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;
- iii) O vetor $\vec{0}$ (ou vetor nulo) é tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$;
- iv) Para cada vetor \vec{v} existe um único vetor, chamado de inverso (ou simétrico) aditivo de \vec{v} , designado $-\vec{v}$, tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

Nesta última propriedade note que se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ então $-\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.

É necessário ressaltar, que as propriedades acima apresentadas, irão subsidiar e ainda simplificar as demonstrações das operações com números quaternios, uma vez que a notação vetorial facilita a compreensão em tal conjunto.

O próximo item de estudo, a operação de multiplicação de um número real por um vetor no espaço, é considerado essencial para justificar a colinearidade e coplanaridade de pontos em \mathbb{R}^3 .

Definição 1.4. Sejam $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O produto de λ por \overrightarrow{AB} é o vetor $\overrightarrow{AB'} = \lambda \overrightarrow{AB}$ tal que:

- i) A , B e B' são colineares;
- ii) $|AB'| = d(A, B') = |\lambda| \cdot d(A, B) = |\lambda| |AB|$;
- iii) os segmentos AB e AB' tem o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos opostos se $\lambda < 0$.

Na prática, assim como na adição, a multiplicação de um escalar por um vetor é efetuada em relação a um sistema de eixos ortogonais, ou seja,

$$\lambda \vec{u} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

As propriedades associadas a multiplicação de um escalar por um vetor consistem na associatividade, distributividade e na existência do elemento neutro.

Proposição 1.3. Sejam \vec{v} e $\vec{u} \in \mathbb{R}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- i) $\lambda(\mu \vec{u}) = (\lambda\mu) \vec{u}$;
- ii) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$;
- iii) $(\lambda + \mu) \vec{v} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}$;
- iv) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Multiplicando-se \vec{v} por -1 obtêm-se o inverso aditivo do vetor \vec{v} , nesse caso, $-\vec{v}$.

As quatro propriedades da adição de vetores e as quatro propriedades da multiplicação de escalar por vetor, conferem ao espaço \mathbb{R}^3 o que chamamos em matemática de estrutura de “Espaço Vetorial”, as quais seguem os mesmos princípios do cálculo algébrico elementar. De forma bem simplificada, podemos entender um espaço vetorial V , por exemplo, como uma coleção de objetos chamados de vetores que podem ser somados entre si e multiplicados por números reais chamados de escalares, cujos resultados obtidos ainda são considerados vetores.

Definição 1.5. V é chamado de *Espaço Vetorial* se satisfaz as propriedades apresentadas na Proposição 1.2 com relação a adição de vetores, $+ : V \times V \rightarrow V$, e também são válidas as propriedades da multiplicação por escalar $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, apresentadas na Proposição 1.3.

Neste trabalho, enfatizaremos um tipo particular de função estabelecida entre dois espaços vetoriais, também chamada de *Transformação Linear*. Logo, se faz necessário determinar as condições para que um conjunto não vazio W seja um subconjunto de V . Para isso, de acordo com [14], basta considerar as propriedades *iii)* e *iv)* da Proposição 1.2.

Proposição 1.4. Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V . Então, W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- i)* se $\vec{u}, \vec{v} \in W$, então $\vec{u} + \vec{v} \in W$;
- ii)* se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in W$, então $\lambda \vec{v} \in W$.

As definições e proposições apresentadas a respeito da adição de vetores e multiplicação de um escalar por um vetor, irão subsidiar a teoria apresentada na próxima subseção.

1.2.1 Colinearidade e Coplanaridade de Pontos em \mathbb{R}^3

Uma importante consequência da utilização das operações entre vetores consiste na verificação da colinearidade e coplanaridade de pontos no espaço. Sabemos que tanto pontos no plano quanto pontos no espaço são colineares se eles pertencem a uma mesma reta.

Definição 1.6. O vetor \vec{u} é múltiplo do vetor \vec{v} se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Como consequência da definição podemos elencar algumas observações importantes, como o fato de que todo vetor é múltiplo de si próprio, o vetor $\vec{0}$ é múltiplo de todo vetor, mas nenhum vetor não nulo pode ser múltiplo do vetor zero, e ainda, \vec{u} é múltiplo de \vec{v} se e somente se \vec{v} é múltiplo de \vec{u} quando \vec{v} e \vec{u} são vetores não nulos.

Proposição 1.5. Se $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ são vetores do espaço, então um dos vetores é múltiplo do outro se, e somente se,

$$a_2b_3 - a_3b_2 = a_1b_3 - a_3b_1 = a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \quad (1.1)$$

A demonstração consiste na utilização da definição de multiplicação por escalar e pode ser encontrada na pg. 229 de [8]. Note que, para mostrar que dois vetores \vec{v} e \vec{u} não são múltiplos é suficiente mostrar que uma das igualdades acima é diferente de zero. Outra observação, as igualdades apresentadas nos sugerem o cálculo do determinante de uma matriz cujas as linhas são as coordenadas dos vetores dados.

Em face do que já foi exposto nesta seção, podemos concluir a próxima definição.

Proposição 1.6. Dois vetores \vec{v} e \vec{u} não nulos são *colineares* se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Considerando o postulado da determinação, sabemos que se três pontos A , B e C no espaço não são colineares, então eles determinam um único plano π . Mas como saber se um quarto ponto D pertence ou não a este plano π ?

A resposta consiste em verificar se o vetor \vec{AD} por exemplo, é gerado pelos vetores \vec{AB} e \vec{AC} . Se isso acontece, dizemos que o vetor \vec{AD} é uma combinação linear dos vetores \vec{AB} e \vec{AC} .

Teorema 1.1. Sejam A , B e C pontos não colineares do espaço e seja π o plano que eles determinam. O ponto D pertence ao plano π se, e somente se, o vetor \vec{AD} é *combinação linear* dos vetores \vec{AB} e \vec{AC} . Ou seja,

$$D \in \pi \iff \text{existem } x, y \in \mathbb{R} \text{ tais que } \vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}.$$

Note que, afirmar que quatro pontos são coplanares (Figura 1.2) é o mesmo que dizer que um vetor é combinação linear de outros dois vetores não colineares e portanto, os três vetores estão contidos no mesmo plano, dizemos neste caso que esses vetores são *Linearmente Dependentes* (LD).

Caso contrário, se um dos quatro pontos, D por exemplo, não esta contido em um mesmo plano que os demais, podemos usar a próxima definição.

Definição 1.7. Dizemos que os vetores $\vec{AB} = v_1$, $\vec{AC} = v_2$ e $\vec{AD} = v_3$ são *Linearmente Independentes* (LI) quando os pontos A , B , C e D não são coplanares.

Neste caso, quando os pontos A , B , C e D não são coplanares dizemos que esses pontos determinam todo o espaço e qualquer vetor pode ser escrito de maneira única

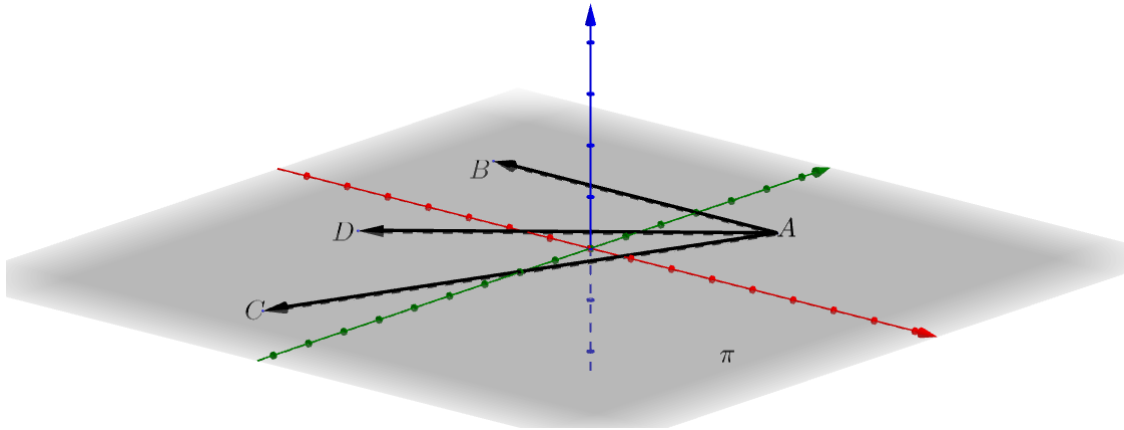


Figura 1.2: Vetores linearmente dependentes

como combinação linear dos três vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} e portanto o espaço tem dimensão três.

Teorema 1.2. Sejam \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 três vetores linearmente independentes no espaço. Então, para cada vetor \vec{w} do espaço existem escalares únicos α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{w} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3.$$

A demonstração deste último teorema consiste em considerar o paralelepípedo gerado a partir dos planos que contém os pontos dados e pode ser encontrada em [8] e [4].

Assim, qualquer vetor do espaço pode ser gerado por outros três vetores linearmente independentes (Figura 1.3). Neste caso, dizemos que o espaço vetorial W é gerado pelo conjunto S de vetores linearmente independentes.

Definição 1.8. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K , e $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ um subconjunto finito de V . O subconjunto W de todos os elementos $w \in V$ que podem ser escritos como combinação linear dos elementos de S é um subespaço vetorial denominado *Subespaço W gerado por S* .

$$W = \{\vec{w} \in V \mid \vec{w} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\}.$$

Esta última definição garante que um conjunto S , formado por vetores linearmente independentes e que podem ser escritos como uma combinação linear gerando assim W , é chamado de *Base* do espaço vetorial. Um exemplo bem comum de base em \mathbb{R}^3 é a base canônica, $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

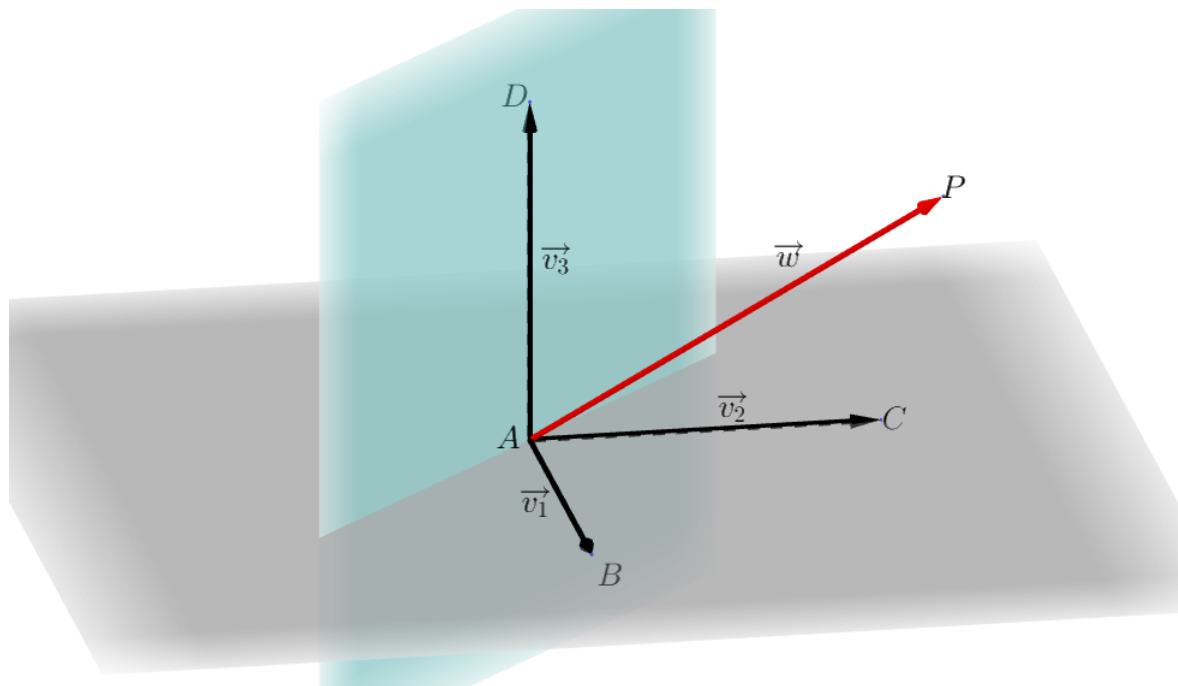


Figura 1.3: Vetores linearmente independentes.

1.3 Produto Interno no Espaço

O produto interno também chamado de produto escalar, associa a cada par de vetores um escalar, ou seja, um número real. A fim de que se possa compreender a representação do produto interno é importante que se defina inicialmente dois conceitos preliminares: *Norma Euclidiana* ou *Módulo* de um vetor e *Ângulo* entre dois vetores.

Definição 1.9. *Norma Euclidiana* ou *Módulo* do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é o número real

$$|\vec{u}| = d(A, B).$$

Considerando que $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, a distância (AB) é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Note que este número não negativo independe da escolha do segmento AB para representar o vetor \vec{u} .

Ao considerarmos o centro de um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e um ponto $P = (x, y, z)$, se $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ então a distância acima se reduz a

$$|\vec{u}| = d(0, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Se $|\vec{u}| = 1$ dizemos que o vetor \vec{u} é unitário, ou ainda, que a sua norma é igual a 1. A fim de que se possa escrever um vetor $\vec{u} \neq 0$ no espaço como $\lambda\hat{u}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, onde o vetor \hat{u} é unitário, é comum *normalizar* o vetor \vec{u} , ou seja,

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}. \quad (1.2)$$

O vetor \hat{u} acima é chamado de vetor *normalizado* de \vec{u} e possui a mesma direção e sentido do vetor \vec{u} . Posteriormente veremos no que se refere às rotações no espaço, que é possível rotacionar qualquer vetor utilizando quatérnios unitários.

Para compreender a operação de produto interno entre vetores, é necessário que saibamos verificar geometricamente a relação entre dois vetores e o menor ângulo formado por eles.

Definição 1.10. O *Ângulo* $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ entre dois vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ não nulos, é o menor ângulo formado pelos segmentos AB e AC medido no plano π_{ABC} que contém os pontos A , B e C . Observe que $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$.

Note que, se os pontos A , B e C são colineares, temos apenas uma reta e portanto, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Caso contrário, conforme Figura 1.4, considere a aplicação da lei dos cossenos no triângulo ABC abaixo.

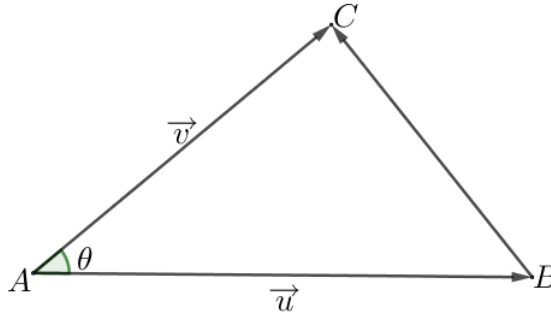


Figura 1.4: Ângulo entre vetores.

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta. \quad (1.3)$$

Note que,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{v} - \vec{u}|^2 = |c_1 - b_1, c_2 - b_2, c_3 - b_3|^2 = \\ &= (c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 + (c_3 - b_3)^2. \end{aligned}$$

Expandindo o quadrado da diferença em cada termo da soma acima e substituindo em (1.3), obtemos,

$$|\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3. \quad (1.4)$$

Posteriormente, na rotação de um vetor em torno de um eixo no espaço, serão retomadas as definições sobre ângulos entre vetores na parametrização via ângulos de Euler.

Considerando os conceitos apresentados de norma de um vetor e ângulo entre vetores, já estamos em condição de definir o produto interno.

Definição 1.11. *Produto interno* entre vetores \vec{u} e \vec{v} é o número real

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \\ |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta & \text{se } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases},$$

onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$.

Note que a segunda parte da definição equivale a equação (1.4). Assim, o produto interno entre vetores pode ser caracterizado em termos das coordenadas dos vetores com relação a um sistema de eixos ortogonais, conforme vemos na próxima proposição.

Proposição 1.7. Se $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{u} = (b_1, b_2, b_3)$ são vetores no espaço, então

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (1.5)$$

Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e considerando que o ângulo que o vetor faz com ele mesmo é igual a 0, segue da definição anterior que,

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |\vec{v}|^2. \quad (1.6)$$

A esta última proposição seguem sete propriedades importantes cuja a demonstração pode ser encontrada em vários livros de geometria analítica, como por exemplo, [8].

Proposição 1.8. Sejam os vetores \vec{v} , \vec{u} e \vec{w} vetores do espaço e $\lambda \in \mathbb{R}$, o produto interno satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |\vec{v}|^2 \geq 0$;
- ii) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$;
- iii) $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$;
- iv) $\langle \lambda \vec{v}, \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;
- v) $\langle \vec{v}, \lambda \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;
- vi) $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$;
- vii) $\langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Com as informações sobre a norma (ou módulo) de um vetor, as propriedades a respeito do produto interno entre vetores e sabendo que $|\cos \theta| \leq 1$ para todo θ , tomando o módulo da identidade (1.5) em ambos os lados da igualdade, obtemos a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|. \quad (1.7)$$

No caso em que \vec{u} e \vec{v} são múltiplos um do outro, ou seja, colineares, tem-se que $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| |\vec{v}|$, pois, $|\cos \angle(\vec{u}, \vec{v})| = 1$ se e somente se $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou π . A desigualdade (1.7) justifica a próxima proposição.

Proposição 1.9. Para todos os vetores \vec{u} e \vec{v} do espaço vale a *Desigualdade Triangular*, dada por

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|, \quad (1.8)$$

valendo a igualdade se, e somente, um dos vetores \vec{u} ou \vec{v} é $\vec{0}$, ou se \vec{u} e \vec{v} são múltiplos positivos um do outro.

Para demonstrar a desigualdade triangular basta tomar o quadrado em ambos os lados da inequação e utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Se tratando ainda do produto interno, podemos definir a sua relação com o perpendicularismo entre vetores.

Definição 1.12. O vetor \vec{u} é *perpendicular* ou *ortogonal* ao vetor \vec{v} , e escrevemos $\vec{u} \perp \vec{v}$, quando um dos vetores é nulo ou quando o ângulo entre eles é reto. Da definição de produto interno segue que

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0. \quad (1.9)$$

O caso em que um dos vetores é nulo decorre imediatamente da definição do produto interno que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. No caso em que ambos os vetores são diferentes de zero, teremos $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$.

Para resultados futuros, também consideraremos vetores *ortogonais* e além disso, *unitários*. Vetores que possuem estas características são ditos *Vetores Ortonormais*. Considerando o \mathbb{R}^3 a base canônica é composta pelo conjunto de vetores $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ cuja norma é unitária e o produto interno entre os vetores tomados dois a dois é 0.

Finalizando esta seção, podemos ainda associar o produto interno com a *Projeção ortogonal* de um vetor sobre outro (Figura 1.5).

Definição 1.13. Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ vetores não nulos representados por segmentos orientados com a mesma origem. Sejam o ponto D o pé da perpendicular baixada

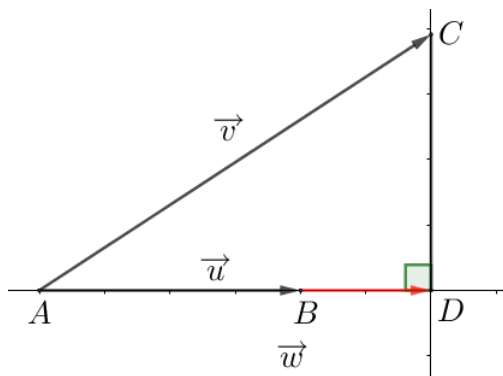


Figura 1.5: Projeção de \vec{v} na direção de \vec{u} .

do ponto C sobre a reta que contém os pontos A e B . A *Projeção Ortogonal do vetor \vec{v} na direção de \vec{u}* é o vetor $Proj_{\vec{u}} \vec{v} = \overrightarrow{AD} = \vec{w}$.

Observe que se D está contido na reta que contém os pontos A e B , então podemos escrever $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} = \lambda \vec{u}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Usando as operações de adição, subtração e a ortogonalidade entre vetores, chegamos ao fato de que $\lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|^2}$. Assim, podemos concluir com a próxima proposição.

Proposição 1.10. A projeção ortogonal do vetor \vec{v} na direção do vetor $\vec{u} \neq 0$ é dada por

$$Proj_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}|^2} \vec{u}. \quad (1.10)$$

No caso particular em que \vec{u} é um vetor unitário, a fórmula (1.10) se reduz a

$$Proj_{\vec{u}} \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} \quad (1.11)$$

1.4 Relação entre Vetores, Matrizes e Determinantes

Como já foi apresentado, na Definição 1.5, inicialmente com a possibilidade de verificação de dois vetores serem múltiplos, a necessidade da compreensão do cálculo do determinante de uma matriz se faz necessário. Posteriormente, o determinante de uma matriz também será utilizado nas aplicações do produto vetorial, uma vez que a compreensão de vetores ortogonais é indispensável à conclusão deste trabalho.

Como estaremos enfatizando as rotações no espaço tridimensional com a utilização dos quatérnios, nos limitaremos às matrizes de até 3ª ordem, no entanto, escreveremos de maneira geral as operações entre matrizes e tipos especiais de matrizes.

Matrizes são comumente utilizadas para a organização de dados tabulares a fim de facilitar a resolução de problemas. Consideraremos conhecidas pelo leitor a caracterização inicial de uma matriz, suas linhas, colunas e elementos e adotaremos as definições contidas em [16] e [8] a fim de organizar de modo crescente o trabalho em questão.

Em muitos contextos, é conveniente escrever um vetor, $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ na notação matricial como uma matriz linha ou como uma matriz coluna, ou seja, $\vec{v} = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$ ou $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, respectivamente.

Assim, iremos mostrar as operações entre matrizes levando em consideração que os elementos de cada matriz nada mais são do que coordenadas de um vetor cujas operações seguem as mesmas regras já apresentadas anteriormente.

Definição 1.14. Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, define-se a *soma* $A+B$ das matrizes A e B, como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (1.12)$$

para todo i e j .

Uma condição necessária para a adição de matrizes é de que ambas precisam ter a mesma ordem, ou seja, o mesmo número de linhas m e o mesmo número de colunas n .

Definição 1.15. A multiplicação de um número real λ pela matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se *produto* de λ por A a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, tal que,

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}. \quad (1.13)$$

As operações de adição de matrizes e multiplicação de matriz por escalar possuem as mesmas propriedades já apresentadas nas operações de adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar, já apresentadas na Proposição 1.2 e na Proposição 1.3, sendo a matriz nula θ , em que os elementos são todos iguais a 0 (zero), o elemento neutro da adição.

Definição 1.16. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$ definimos a matriz produto de A por B e indica-se AB , como sendo a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ dada por

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}. \quad (1.14)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

É importante ressaltar que o produto AB existe se, e somente se, o número de colunas n de A for igual ao número de linhas n de B como explicitado acima. Além disso, o produto AB obtido, apresentará o número de linhas m da matriz A e o número de colunas p da matriz B . Outro detalhe importante é que ao verificarmos cada elemento de forma isolada da matriz AB , como por exemplo, o termo $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$, tem-se o produto interno do vetor linha de A pelo vetor coluna de B .

Se tratando ainda da multiplicação de matrizes, podemos definir o elemento neutro da multiplicação.

Definição 1.17. Matriz identidade de ordem n , indicada por I_n , é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Proposição 1.11. Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ então $AI_n = A$ e $I_m A = A$. Onde I_n e I_m são as matrizes identidade de ordem n e m respectivamente.

Proposição 1.12. O produto entre matrizes apresenta as seguintes propriedades:

i) $(AB)C = A(BC)$,

para quaisquer $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$ e $C = (c_{kl})_{p \times r}$;

ii) $(A + B)C = AC + BC$,

para quaisquer $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{jk})_{n \times p}$;

iii) $C(A + B) = CA + CB$,

para quaisquer $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ki})_{p \times m}$;

iv) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$,

para quaisquer que sejam o número λ e as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{jk})_{n \times p}$.

É necessário ressaltar que a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, para duas matrizes quaisquer A e B é falso que $AB = BA$ necessariamente.

Exemplo: Considerando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, tem-se que

$$AB \neq BA, \text{ pois } AB = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{pmatrix} \text{ enquanto } BA = \begin{pmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.18. Matriz quadrada A_n de ordem n é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, é uma matriz que tem igual número de linhas e colunas.

Proposição 1.13. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é matriz invertível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Neste caso, dizemos que a matriz B que satisfaz a condição acima é única. De fato, considerando que a matriz A possui inversa e que $AB = BA = I$ e que $AC = CA = I$ tem-se que,

$$C = C \cdot I = C(AB) = (CA)B = I \cdot B = B,$$

sendo B chamada de matriz inversa de A , ou seja, $B = A^{-1}$. Caso contrário, se não existir A^{-1} , dizemos que a matriz é singular. Neste trabalho omitiremos as propriedades vinculadas à inversa de uma matriz, mas elas podem ser encontradas em [20].

A fim de que seja possível definir outras operações envolvendo matrizes e posteriormente, determinantes, podemos também estabelecer a transposta de uma matriz.

Definição 1.19. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se transposta de A a matriz A^t , dada por $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$.

De maneira geral, a transposta de uma matriz $A_{m \times n}$ é a matriz em que os elementos da primeira linha de A são iguais à primeira coluna de $A^t_{n \times m}$. O leitor interessado em mais informações sobre as propriedades da transposta de uma matriz poderá consultar a página 66 de [16].

Muito utilizada nas transformações lineares, a matriz simétrica e anti-simétrica definem rotações e reflexões no plano e também no espaço.

Definição 1.20. Chama-se *matriz simétrica* toda matriz quadrada, de ordem n tal que,

$$A = A^t.$$

Decorre da definição que $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. De forma mais direta, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais [16].

Definição 1.21. Chama-se *matriz anti-simétrica* toda matriz quadrada, de ordem n tal que,

$$A = -A^t.$$

Em consequência da definição temos que, $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Lembrando que os elementos das linhas e colunas das matrizes aqui utilizadas são as coordenadas de vetores, cujas operações de adição e multiplicação por escalar foram definidas anteriormente. A definição de matriz simétrica e anti-simétrica ajudarão a determinar os elementos das matrizes de rotação.

Tais matrizes de rotação exercem uma ação sobre um vetor que em linguagem algébrica compreende a uma transformação Matricial também conhecida como transformação linear no plano ou no espaço, o qual pode ser visto em detalhes em [15]. Entre estas matrizes, as matrizes conhecidas como ortogonais exercem um papel fundamental e com as informações apresentadas até o momento, já estamos em condição de defini-las.

Definição 1.22. Uma matriz A é ortogonal se satisfaz $AA^t = I$.

Note que, pela Proposição 1.13 tem-se que $AA^t = I$ se, e somente se, $A^t = A^{-1}$. Além disso, de acordo com as informações em [14] e [15] tanto as linhas quanto as colunas da matriz ortogonal A são formadas por vetores ortonormais.

Com as próximas definições sobre determinantes é possível verificar sob que condições uma matriz é ou não invertível. Para tanto, como estamos interessados em vetores no plano e no espaço, iremos nos restringir ao cálculo do determinante de uma matriz de até 3ª ordem de modo específico.

Definição 1.23. Considere a matriz A_2 formada pelos vetores linha $\vec{v} = (a_1, a_2)$ e $\vec{u} = (b_1, b_2)$. O determinante associado a matriz A_2 é dado por

$$Det(A_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (1.15)$$

De acordo com a definição, podemos entender que o determinante associado a matriz de 2ª ordem, é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária.

Definição 1.24. Considere a matriz A_3 formada pelos vetores linha $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{u} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$. O determinante associado a matriz A é dado por

$$Det(A_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - (a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1) + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1. \quad (1.16)$$

A equação (1.16) também poderia ser reescrita utilizando a regra do determinante de uma matriz de 2ª ordem, como descrito na Definição 1.15 ou seja,

$$Det(A_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} a_3. \quad (1.17)$$

As propriedades associadas ao cálculo de determinantes são várias e podem ser encontradas em [15] e [16]. Listaremos algumas (não todas) às quais serão necessárias para justificar certos cálculos envolvendo as propriedades das matrizes de rotação.

Proposição 1.14. Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem n , e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

- i) $\det(A) = \det(A^t)$;
- ii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;
- iii) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Lembrando que pela Proposição 1.13, pode acontecer que uma matriz A não possua inversa. Uma das condições necessárias e suficientes para que uma matriz possua inversa A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$, é verificar se o determinante associado a matriz é diferente de zero, pois, se $\det(A) \neq 0$ então, pela última propriedade, tem-se que $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$.

1.5 Produto Vetorial

Um conceito muito importante utilizado na física e na matemática é o produto vetorial. Amplamente utilizado principalmente em situações que envolvem o movimento de partículas no espaço, o produto vetorial consiste em uma operação entre dois vetores linearmente independentes em \mathbb{R}^3 , o qual associa de modo natural um vetor ortogonal ao plano gerado por estes vetores, [14]. Assim, podemos definir o produto vetorial geometricamente se estabelecermos a sua norma, direção e sentido. No entanto, consideraremos a definição algébrica a fim de que as principais propriedades sejam melhor compreendidas.

Considerando um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ e os vetores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ temos a próxima definição.

Definição 1.25. O produto vetorial de \vec{u} por \vec{v} é o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2, -(a_1b_3 - a_3b_1), a_1b_2 - a_2b_1). \quad (1.18)$$

Note que, calcular o produto vetorial consiste em calcular o determinante de uma matriz de 3ª ordem em que os elementos da primeira linha são os vetores que representam a base canônica, a segunda linha são as coordenadas do vetor \vec{u} e a terceira linha são as coordenadas do vetor \vec{v} , isto é,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (1.19)$$

Observe que as equações apresentadas na definição acima já foram apresentadas anteriormente e também na Definição 1.5. Portanto, seria oportuno concluir agora que dois vetores são colineares (ou ainda, múltiplos) se, e somente se, o produto vetorial entre eles é nulo. Ou seja,

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.20)$$

Cabe ressaltar que as propriedades determinadas para o produto vetorial também serão verificadas nas operações entre quatérnios, e por essa razão às apresentaremos aqui.

Proposição 1.15. Para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$, valem as seguintes propriedades:

- i) $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$;
- ii) $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ se e só se um dos vetores \vec{u} ou \vec{v} é múltiplo do outro;
- iii) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin \theta$, onde $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{v})$;
- iv) Se $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$, então \vec{u}, \vec{v} e $\vec{u} \times \vec{v}$ são vetores LI;
- v) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$;
- vi) $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$;
- vii) $(\vec{u} + \vec{w}) \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{v}$ e $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;
- viii) $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, onde

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

é a matriz 3×3 cujas linhas são as coordenadas dos vetores \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} , na ordem em que são listados;

- ix) $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, se e somente se, \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} são vetores LD;
- x) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$;
- xi) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$.

É importante ressaltar que, embora as duas últimas propriedades sejam pouco conhecidas, a sua abordagem aqui se faz necessária devida a sua utilização posteriormente na demonstração das propriedades com números quatérnios. Considerando $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$, a demonstração da última propriedade, também conhecida por identidade de Lagrange segundo [15], consiste na utilização da identidade trigonométrica fundamental, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, a relação do produto interno com o $\cos \theta$, e o produto vetorial com o $\sin \theta$.

Como o produto vetorial nós dá como resultado um terceiro vetor que é ortogonal aos dois primeiros vetores não colineares, uma importante consequência, de acordo com [20] é que ao considerarmos o produto vetorial entre os vetores da base canônica obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0 & \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{j} &= 0 & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{k} &= 0 & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Note que ao estabelecer estas relações, estamos definindo um sentido ao produto vetorial.

Com relação a interpretação geométrica do produto vetorial (Figura 1.6), vamos considerar a norma dos vetores. Sejam os vetores $\vec{u} = \vec{OA} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = \vec{OB} \neq \vec{0}$

vetores não colineares, C o quarto vértice do paralelogramo $P = OACB$ e h a altura

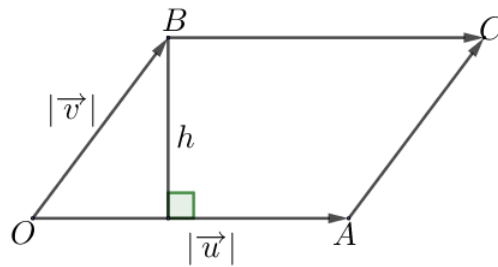


Figura 1.6: Paralelogramo $P = OACB$ de altura h .

do paralelogramo P , tomando o segmento OA como base. Então h é dado por

$$h = |\overrightarrow{OB}| \operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}). \quad (1.23)$$

Logo, para o cálculo da área temos

$$\text{Área}(P) = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \operatorname{sen} \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}),$$

ou seja,

$$\text{Área}(P) = |\vec{u}| |\vec{v}| \operatorname{sen} \angle(\vec{u}, \vec{v}).$$

De acordo com o item (iii) da Proposição 1.15 tem-se portanto

$$\text{Área}(P) = |\vec{u} \times \vec{v}|. \quad (1.24)$$

Portanto, a norma do produto vetorial entre dois vetores não colineares se reduz ao cálculo da área de um paralelogramo formado por esses vetores conforme a Figura 1.6.

Cabe ressaltar que os vetores \vec{v} e \vec{u} não sendo múltiplos, tem-se pelo item (i) da Proposição 1.15 que $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor não nulo perpendicular aos vetores \vec{u} e \vec{v} simultaneamente, ou seja, perpendicular ao plano gerado por \vec{u} e \vec{v} . Essa informação nos dá a direção do produto vetorial. E, pela propriedade (iii) da Proposição 1.15, $|\vec{v} \times \vec{u}|$ é igual a área do paralelogramo construído sobre os vetores \vec{u} e \vec{v} . Lembrando que só existem dois vetores que tem o mesmo comprimento e direção, o vetor original e seu inverso aditivo, o produto vetorial $|\vec{u} \times \vec{v}|$ fica determinado se soubermos o seu sentido.

Capítulo 2

O Conjunto dos Quatérnios

A formalização da álgebra dos números complexos em 1933 por Willian Rowan Hamilton, incitou a possibilidade de rotacionar um vetor no espaço assim como rotacionar um vetor no plano [16].

Inicialmente, Hamilton buscou desenvolver uma álgebra para tripletos (x, y, z) buscando sempre desenvolver as rotações no espaço de forma semelhante com o que acontecia com as rotações no plano. Após muito tempo de estudo e pesquisa, sem muito êxito, Hamilton percebeu que não conseguiria desenvolver uma álgebra que fosse fechada para o caso dos tripletos [11]. Dez anos após a sua divulgação sobre a formalização da álgebra dos números complexos, enquanto passeava com a esposa na Brougham Bridge do Royal Canal [5], lhe ocorreu um insight: incorporar um quarto termo, k , que seria perpendicular simultaneamente aos dois segmentos i e j já existentes e também esquecer a ideia de comutatividade entre esses termos.

Surgia assim o Conjunto dos números quatérnios representados pela letra \mathbb{H} em homenagem a Hamilton. Nos anos que se seguiram, Hamilton se dedicou integralmente ao estudo com os números quatérnios porque acreditava na sua aplicabilidade [17].

De forma mais simples, podemos entender que os quatérnios também conhecidos como hipercomplexos, consistem em uma generalização dos números complexos para quatro dimensões e são compostos por uma parte escalar uma parte vetorial.

2.1 Definições no Conjunto dos Quatérnios

Nesta seção apresentaremos as notações básicas e as definições envolvendo os números quatérnios. Entre as muitas referências citadas, consideraremos [11], [22] e [13].

Definição 2.1. O conjunto dos números quatérnios, denotado pela letra \mathbb{H} , é formado

por todos os números com a forma $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, com $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$, e i, j e k satisfazendo as relações, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$ e $ji = -k$.

E desta definição tem-se que:

$$ijk = (ij)k = kk = k^2 = -1. \quad (2.1)$$

Uma forma simples de estabelecer as relações entre as unidades acima apresentadas é considerar, de acordo com [11], um diagrama (Figura 2.1) e a forma como são apresentadas as unidades.

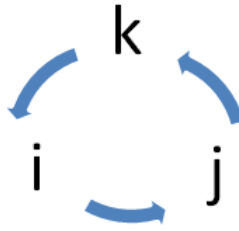


Figura 2.1: Multiplicação de unidades.

-No sentido anti-horário: a multiplicação de duas unidades em sequência resulta na terceira unidade;

-No sentido horário: a multiplicação de duas unidades em sequência resulta no oposto da terceira unidade.

Um número quatérnio pode ser representado na sua forma algébrica, $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, ou ainda, usando a forma vetorial com o vetor $\vec{v} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$, para qualquer $q \in \mathbb{H}$, da seguinte maneira,

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + (q_1, q_2, q_3) = q_0 + \vec{v} = (q_0, \vec{v}).$$

A notação $q = q_0 + \vec{v}$ é chamada de *forma vetorial* de um número quatérnio e será muito utilizada nas demonstrações que se seguem.

Definição 2.2. Seja o quatérnio $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \vec{v}$, definimos, a parte real de q como sendo o número real q_0 , e denotamos por $Re(q) = q_0$ e a parte imaginária ou parte vetorial de q como sendo $Im(q) = q_1i + q_2j + q_3k = (q_1, q_2, q_3) = \vec{v}$.

Definição 2.3. Dois números quatérnios $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ e $r = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k$ são iguais, escrevemos $q = r$ se, $q_0 = r_0$, $q_1 = r_1$, $q_2 = r_2$ e $q_3 = r_3$, ou ainda, $q = r \iff Re(q) = Re(r)$ e $Im(q) = Im(r)$.

No próximo capítulo iremos tratar de rotações no espaço. Uma definição essencial de acordo com [2],[18] e [13], é o conceito sobre quatérnio puro.

Definição 2.4. Um número quatérnio $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ é chamado de *quatérnio puro* se a sua parte escalar é nula, isto é $p = 0 + p_1i + p_2j + p_3k = 0 + \vec{v} = (0, \vec{v})$, ou ainda $Re(p) = 0$. O conjunto de todos os quatérnios com parte escalar nula é denotado por \mathbb{H}_0 e um elemento qualquer deste conjunto é denominado quatérnio puro.

2.2 Álgebra dos Quatérnios

O objetivo nesta seção é apresentar as principais operações com os números quatérnios. Veremos que a maioria das definições já apresentadas nas preliminares serão verificadas neste capítulo também.

Definição 2.5. Definimos a adição entre quatérnios com sendo a aplicação

$$+ : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H},$$

que a cada par de quatérnios $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \vec{v}$ e $r = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k = r_0 + \vec{u}$, associa o quatérnio denotado por $q + r$, denominado de resultado da adição de q e r dado por,

$$q+r = (q_0+q_1i+q_2j+q_3k)+(r_0+r_1i+r_2j+r_3k) = (q_0+r_0)+(q_1+r_1)i+(q_2+r_2)j+(q_3+r_3)k,$$

$$\text{ou simplesmente } q + r = (q_0 + \vec{v}) + (r_0 + \vec{u}) = (q_0 + r_0) + (\vec{v} + \vec{u}).$$

A regra de adição de números quatérnios segue as definições já mostradas para a adição de vetores, que na prática efetua-se de acordo com as coordenadas determinadas para cada ponto com relação a um sistema de coordenadas $OXYZ$ pré-fixado.

Para as próximas proposições, utilizaremos a forma vetorial de um número quatérnio a fim de facilitar as demonstrações apresentadas.

Proposição 2.1. A adição de números quatérnios é associativa, ou seja,

$$(q + r) + s = q + (r + s), \tag{2.2}$$

para quaisquer $q, r, s \in \mathbb{H}$.

Demonstração. Dados $q = q_0 + \vec{v}$, $r = r_0 + \vec{u}$ e $s = s_0 + \vec{w}$, quatérnios arbitrários, temos,

$$(q + r) + s = ((q_0 + \vec{v}) + (r_0 + \vec{u})) + (s_0 + \vec{w})$$

$$\begin{aligned}
&= ((q_0 + r_0) + (\vec{v} + \vec{u})) + (s_0 + \vec{w}) \\
&= ((q_0 + r_0) + s_0) + ((\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}) \\
&= (q_0 + (r_0 + s_0)) + (\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})) \\
&= (q_0 + \vec{v}) + ((r_0 + s_0) + (\vec{u} + \vec{w})) \\
&= (q_0 + \vec{v}) + ((r_0 + \vec{u}) + (s_0 + \vec{w})) = q + (r + s). \quad \square
\end{aligned}$$

Proposição 2.2. A adição de quatérnios é comutativa, ou seja,

$$q + r = r + q, \quad (2.3)$$

para quaisquer $q, r \in \mathbb{H}$.

Demonstração. Tomando $q = q_0 + \vec{v}$, $r = r_0 + \vec{u}$, quatérnios arbitrários, temos,

$$\begin{aligned}
q + r &= (q_0 + \vec{v}) + (r_0 + \vec{u}) \\
&= (q_0 + r_0) + (\vec{v} + \vec{u}) \\
&= (r_0 + q_0) + (\vec{u} + \vec{v}) \\
&= (r_0 + \vec{u}) + (q_0 + \vec{v}) = r + q. \quad \square
\end{aligned}$$

Assim como na geometria analítica, existe o elemento neutro da adição no conjunto dos números quatérnios.

Proposição 2.3. Para todo $q \in \mathbb{H}$ existe $r \in \mathbb{H}$ tal que $q + r = r + q = q$.

Demonstração. Dado $q = q_0 + \vec{v} \in \mathbb{H}$ qualquer, queremos encontrar $r = r_0 + \vec{u}$ de forma que $q + r = q$. Logo, para que a igualdade seja satisfeita devemos ter,

$$\begin{aligned}
q + r &= (q_0 + \vec{v}) + (r_0 + \vec{u}) = (q_0 + \vec{v}) \\
&= (q_0 + r_0) + (\vec{v} + \vec{u}) = (q_0 + \vec{v}),
\end{aligned}$$

utilizando a igualdade entre quatérnios

$$q_0 + r_0 = q_0 \Leftrightarrow r_0 = 0 \text{ e } \vec{v} + \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = 0.$$

□

Logo, como era de se esperar, o quatérnio que satisfaz as condições acima é dado por $r = 0 + \vec{0}$, ou seja, existe $r \in \mathbb{H}$ tal que $q + r = r + q = q$, para todo $q \in \mathbb{H}$. Assim, podemos estabelecer que o elemento $(0 + \vec{0}) \in \mathbb{H}$ é o zero do conjunto dos números quatérnios e representado simplesmente por 0 ou $0_{\mathbb{H}}$ se restar alguma dúvida.

Definição 2.6. Definimos \mathbb{H}^* como sendo o conjunto formado por todos os quatérnios não nulos, ou seja, $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0_{\mathbb{H}}\} = \mathbb{H} - 0$.

Com existência do zero no conjunto dos números quatérnios podemos determinar o simétrico aditivo.

Proposição 2.4. Dado qualquer $q \in \mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{H}$ tal que $q + r = r + q = 0$.

Demonstração. Seja $q = q_0 + \vec{v} \in \mathbb{H}$ arbitrário, queremos determinar $r = r_0 + \vec{u} \in \mathbb{H}$ tal que $q + r = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}(q_0 + \vec{v}) + (r_0 + \vec{u}) &= 0 + \vec{0} \\ (q_0 + r_0) + (\vec{v} + \vec{u}) &= 0 + \vec{0},\end{aligned}$$

e com a igualdade entre quatérnios obteremos,

$$q_0 + r_0 = 0 \iff q_0 = -r_0 \text{ e } \vec{v} + \vec{u} = \vec{0} \iff \vec{v} = -\vec{u}.$$

Portanto, dado $q = q_0 + \vec{v} \in \mathbb{H}$, existe $r = (-r_0) + (-\vec{u}) \in \mathbb{H}$ tal que $q + r = r + q = 0$. \square

Estabelecido o elemento simétrico de $q \in \mathbb{H}$ para a adição em \mathbb{H} , podemos afirmar que o par ordenado $(\mathbb{H}, +)$ é um grupo abeliano. Com a informação apresentada, também estamos em condição de definir a diferença entre números quatérnios.

Definição 2.7. Sejam $q, r \in \mathbb{H}$ com $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \vec{v}$ e $r = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k = r_0 + \vec{u}$. Definimos a diferença de q por r , como sendo o quatérnio denotado por $(q - r)$ dado por

$$\begin{aligned}q - r &= q + (-r) = (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) + ((-r_0) + (-r_1i) + (-r_2j) + (-r_3k)) \\ &= (q_0 - r_0) + (q_1 - r_1)i + (q_2 - r_2)j + (q_3 - r_3)k = (q_0 - r_0) + (\vec{v} - \vec{u}).\end{aligned}$$

Definição 2.8. Definimos a multiplicação de um quatérnio por um escalar real como sendo a aplicação

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H},$$

onde a cada número real λ e a cada quatérnio $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ é associado o quatérnio definido por λq , ou seja

$$\lambda q = \lambda(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = \lambda q_0 + \lambda q_1i + \lambda q_2j + \lambda q_3k = \lambda q_0 + \lambda \vec{v}.$$

Veja que a multiplicação de um escalar por um número quatérnio, considerando a parte vetorial, resume-se ao que já foi apresentado anteriormente na Proposição 1.3, valendo todas as propriedades apresentadas na ocasião.

Na sequência, apresentaremos conforme [11], o que consideramos a definição fundamental entre as operações com números quatérnios, a multiplicação entre quatérnios. Uma vez que, até agora as operações apresentadas seguiram um comportamento considerado padrão nas operações realizadas na geometria analítica.

Definição 2.9. A multiplicação entre quatérnios é a aplicação

$$\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H},$$

que a cada par de quatérnios $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \vec{v}$ e $r = r_0 + r_1i + r_2j + r_3k = r_0 + \vec{u}$, associa o quatérnio denotado por $q \cdot r$, ou simplesmente qr , produto de q com r dado por

$$\begin{aligned} qr &= (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \cdot (r_0 + r_1i + r_2j + r_3k) \\ &= q_0(r_0 + r_1i + r_2j + r_3k) + q_1i(r_0 + r_1i + r_2j + r_3k) \\ &\quad + q_2j(r_0 + r_1i + r_2j + r_3k) + q_3k(r_0 + r_1i + r_2j + r_3k). \end{aligned}$$

Após aplicar a distributividade em relação a adição, e levar em consideração a informação na Definição 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} qr &= (q_0r_0 - q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3) + (q_0r_1 + q_1r_0 + q_2r_3 - q_3r_2)i \\ &\quad + (q_0r_2 - q_1r_3 + q_2r_0 + q_3r_1)j + (q_0r_3 + q_1r_2 - q_2r_1 + q_3r_0)k. \end{aligned}$$

Ao considerar as operações entre vetores, observe que a parte real da multiplicação de q por r , dada por $q_0r_0 - q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3$, nada mais é que a diferença de um número real pelo produto interno entre os dois vetores \vec{v} e \vec{u} , ou seja,

$$q_0r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle, \tag{2.4}$$

cujos resultados, como sabemos, é um número real.

Com relação aos demais termos, percebe-se os produtos $q_0(r_1, r_2, r_3)$ e $r_0(q_1, q_2, q_3)$, e também o produto vetorial de \vec{v} por \vec{u} dado por $(q_2r_3 - q_3r_2)i$, $(q_3r_1 - q_1r_3)j$ e $(q_1r_2 - q_2r_1)k$, o qual pode ser escrito como,

$$q_0\vec{u} + r_0\vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}. \tag{2.5}$$

Unindo as informações das equações 2.4 e 2.5, podemos escrever a multiplicação entre quatérnios na forma vetorial, ou seja,

$$qr = (q_0r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) + (q_0\vec{u} + r_0\vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}). \tag{2.6}$$

Veja que as definições apresentadas no capítulo anterior sobre operações entre vetores no espaço aparecem aqui em uma única operação entre quatérnios. Note também que, devido ao fato do produto vetorial não ser comutativo, então a multiplicação entre quatérnios também não o será.

Proposição 2.5. A multiplicação entre quatérnios não é comutativa, isto é existem q e r tais que $qr \neq rq$.

Demonstração. Basta verificar que $ij = k$ e $ji = -k$. □

Uma maneira interessante para apresentar o produto entre dois números quatérnios é através da multiplicação matrizes, conforme [13].

$$q \cdot r = \begin{pmatrix} q_0r_0 - q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3 \\ q_1r_0 + q_0r_1 - q_3r_2 + q_2r_3 \\ q_2r_0 + q_3r_1 + q_0r_2 - q_1r_3 \\ q_3r_0 - q_2r_1 + q_1r_2 + q_0r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Note que, a matriz que representa os coeficientes de q possui uma característica especial, os elementos da diagonal principal são iguais, e os demais elementos são opostos e simétricos em relação a diagonal principal, ou seja, é uma matriz anti-simétrica. Observando o produto qr podemos entender que esse resultado é obtido a partir da ação da matriz anti-simétrica q sobre um vetor coluna r .

Um das propriedades que deve ser demonstradas na sequência é a associatividade da multiplicação para quatérnios. Para isso, é necessário levar em consideração as propriedades (v) e (x) da Proposição 1.15 a fim de estabelecer um lema adicional.

Lema 2.1. Sejam $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vetores quaisquer, então,

$$(\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{w} - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{w} = \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}.$$

Demonstração. Sejam $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, temos,

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{w} - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{w} &= -(\vec{w} \times (\vec{v} \times \vec{u})) - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{w} \\ &= -(\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{v} - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \vec{u}) - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{w} \\ &= \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} \\ &= \vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w}) - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v}. \end{aligned} \quad \square$$

Proposição 2.6. A multiplicação entre quatérnios é associativa, ou seja, dados $q, r, s \in \mathbb{H}$, tem-se $(qr)s = q(rs)$.

Demonstração. Sejam $q = (q_0 + \vec{v})$, $r = (r_0 + \vec{u})$ e $s = (s_0 + \vec{w})$ quatérnios quaisquer, temos

$$\begin{aligned} (qr)s &= [(q_0 + \vec{v})(r_0 + \vec{u})](s_0 + \vec{w}) \\ &= [(q_0r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) + (q_0\vec{u} + r_0\vec{v} + \vec{v} \times \vec{u})](s_0 + \vec{w}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s_0(q_0r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) - \langle q_0\vec{u} + r_0\vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}, \vec{w} \rangle \\
&+ (q_0r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle)\vec{w} + s_0(q_0\vec{u} + r_0\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{u})) + ((q_0\vec{u} + r_0\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{u})) \times \vec{w}) \\
&= q_0r_0s_0 - s_0\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - q_0\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - r_0\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v} \times \vec{u}, \vec{w} \rangle \\
&+ q_0r_0\vec{w} - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle\vec{w} + s_0q_0\vec{u} + s_0r_0\vec{v} + s_0(\vec{v} \times \vec{u}) + q_0(\vec{u} \times \vec{w}) + r_0(\vec{v} \times \vec{w}) \\
&+ ((\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{w}) \\
&= q_0r_0s_0 - q_0\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - r_0\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - s_0\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{w} \rangle \\
&+ q_0r_0\vec{w} + q_0s_0\vec{u} + q_0(\vec{u} \times \vec{w}) + r_0s_0\vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle\vec{v} + r_0(\vec{v} \times \vec{w}) + s_0(\vec{v} \times \vec{u}) \\
&+ (\vec{v} \times (\vec{u} \times \vec{w})) \\
&= q_0(r_0s_0 - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle) - \langle \vec{v}, r_0\vec{w} + s_0\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w}) \rangle \\
&+ q_0(r_0\vec{w} + s_0\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w})) + (r_0s_0 - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle)\vec{v} \\
&+ (\vec{v} \times (r_0\vec{w} + s_0\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w}))) \\
&= (q_0 + \vec{v}) \cdot [(r_0s_0 - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle) + (r_0\vec{w} + s_0\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w}))] \\
&= (q_0 + \vec{v})[(r_0 + \vec{u})(s_0 + \vec{w})] = q(rs)
\end{aligned}$$

□

Para finalizar, a fim de garantir que o conjunto dos quatérnios seja um anel com as operações de adição e multiplicação, a última propriedade a ser demonstrada é distributividade em relação a adição tanto pela esquerda quanto pela direita.

Proposição 2.7. Sejam $q, r, s \in \mathbb{H}$, então,

$$(q + r)s = qs + rs \text{ ou ainda } s(q + r) = sq + sr.$$

Demonstração. Sejam $q = (q_0 + \vec{v})$, $r = (r_0 + \vec{u})$ e $s = (s_0 + \vec{w})$ quatérnios arbitrários. Temos

$$\begin{aligned}
(q + r)s &= [(q_0 + \vec{v}) + (r_0 + \vec{u})](s_0 + \vec{w}) \\
&= [(q_0 + r_0) + (\vec{v} + \vec{u})](s_0 + \vec{w}) \\
&= s_0(q_0 + r_0) - \langle \vec{v} + \vec{u}, \vec{w} \rangle + (q_0 + r_0)\vec{w} + s_0(\vec{v} + \vec{u}) + (\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{w} \\
&= q_0s_0 + r_0s_0 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \\
&+ q_0\vec{w} + r_0\vec{w} + s_0\vec{v} + s_0\vec{u} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{u} \times \vec{w} \\
&= (q_0s_0 - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) + (q_0\vec{w} + s_0\vec{v} + \vec{v} \times \vec{w}) \\
&+ (r_0s_0 - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle) + (r_0\vec{w} + s_0\vec{u} + \vec{u} \times \vec{w}) \\
&= [(q_0 + \vec{v})(s_0 + \vec{w})] + [(r_0 + \vec{u})(s_0 + \vec{w})] \\
&= qs + rs.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
s(q+r) &= (s_0 + \vec{w}) [(q_0 + \vec{v}) + (r_0 + \vec{u})] \\
&= (s_0 + \vec{w}) [(q_0 + r_0) + (\vec{v} + \vec{u})] \\
&= s_0(q_0 + r_0) - \langle \vec{w}, \vec{v} + \vec{u} \rangle + s_0(\vec{v} + \vec{u}) + (q_0 + r_0)\vec{w} + \vec{w} \times (\vec{v} + \vec{u}) \\
&= s_0q_0 + s_0r_0 - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \\
&\quad + s_0\vec{v} + s_0\vec{u} + q_0\vec{w} + r_0\vec{w} + \vec{w} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{u} \\
&= (q_0s_0 - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle) + (s_0\vec{v}) + q_0\vec{w} + \vec{w} \times \vec{v} \\
&\quad + (s_0r_0 - \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle) + (s_0\vec{u} + r_0\vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}) \\
&= [(s_0 + \vec{w})(q_0 + \vec{v})] + [(s_0 + \vec{w})(r_0 + \vec{u})] = sq + sr.
\end{aligned}$$

□

Como explicitado, o conjunto dos números quatérnios apresenta as propriedades associativa, comutativa, admite elemento neutro e também simétrico para a operação de adição. E para a operação de multiplicação entre quatérnios, é associativa e distributiva em relação a adição. Portanto, o conjunto dos quatérnios é considerado um anel.

Verificaremos agora se a multiplicação entre quatérnios admite elemento neutro. Para isso, vamos considerar as definições já apresentadas no capítulo anterior e algumas propriedades relacionadas a vetores no espaço que demonstraremos no decorrer do texto.

Proposição 2.8. Existe $r \in \mathbb{H}$ tal que $qr = rq = q$ para todo $q \in \mathbb{H}$. Além disso, $r = 1$.

Demonstração. Queremos encontrar $r = r_0 + \vec{u}$ de tal maneira que $qr = rq = q$, para todo $q = q_0 + \vec{v} \in \mathbb{H}$. Assim temos,

$$(q_0 + \vec{v})(r_0 + \vec{u}) = q_0 + \vec{v},$$

ou seja,

$$(q_0r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) + (q_0\vec{u} + r_0\vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}) = q_0 + \vec{v}$$

Igualando a parte real e parte vetorial termos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} q_0r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = q_0 \\ q_0\vec{u} + r_0\vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} = \vec{v}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Considerando a 2ª equação de (2.8) temos,

$$q_0\vec{u} + r_0\vec{v} - \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} = 0$$

$$q_0 \vec{u} + \vec{v}(r_0 - 1) + \vec{v} \times \vec{u} = 0. \quad (2.9)$$

Note que temos uma combinação linear entre os vetores \vec{v} , \vec{u} e $\vec{v} \times \vec{u}$, em que, nem todos os escalares são nulos e que resulta no vetor nulo. Logo, podemos concluir de acordo com os itens (i) e (ix) da Proposição 1.15 que os vetores envolvidos são linearmente dependentes o que implica na condição de \vec{u} e \vec{v} serem linearmente dependentes. Assim, \vec{u} e \vec{v} são colineares e existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Usando essa informação e substituindo em (2.9), obtemos,

$$q_0 \lambda \vec{v} + \vec{v}(r_0 - 1) + \vec{v} \times (\lambda \vec{v}) = \vec{0}, \quad (2.10)$$

lembrando que $\vec{v} \times (\lambda \vec{v}) = \vec{0}$, pois são vetores colineares. De (2.10) nos resta,

$$\begin{aligned} q_0 \lambda \vec{v} + \vec{v}(r_0 - 1) &= \vec{0}, \\ (\lambda q_0 + r_0 - 1) \vec{v} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Como nem sempre \vec{v} será nulo, isso implica necessariamente que o escalar será nulo, ou seja, $\lambda q_0 + r_0 - 1 = 0$, ou ainda $r_0 - 1 = -\lambda q_0$.

Voltando em (2.8) e substituindo as informações obtidas até agora na 1ª equação e usando a propriedade (i) da Proposição 1.8, temos

$$\begin{aligned} q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle &= q_0 \\ q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \lambda \vec{v} \rangle &= q_0 \\ q_0 r_0 - \lambda |\vec{v}|^2 &= q_0 \\ q_0(r_0 - 1) &= \lambda |\vec{v}|^2. \end{aligned}$$

Como $r_0 - 1 = -\lambda q_0$, segue que $-\lambda q_0^2 = \lambda |\vec{v}|^2$. Se $\lambda \neq 0$, então $-q_0^2 = |\vec{v}|^2$, o que é uma contradição, visto que q_0^2 e $|\vec{v}|^2$ são ambos positivos. Logo, $\lambda = 0$.

Disso temos que, $\vec{u} = \lambda \vec{v} = \vec{0}$ e $r_0 - 1 = -\lambda q_0 = 0$, ou seja, $r_0 = 1$.

Portanto, o elemento neutro da multiplicação é dado por $r = 1 + \vec{0} = 1 + 0i + 0j + 0k$, sendo este elemento, o único que cumpre com $qr = q$, para todo $q \in \mathbb{H}$. \square

Com a determinação do elemento neutro da multiplicação dos números quatérnios, já estamos em condição de verificar sob que condições um número quatérnio é invertível. Sabemos que um número real possui inverso se ele é diferente de zero, será que a regra também vale para os quatérnios?

De acordo com [11], podemos definir o inverso mutiplicativo de um número quatérnio.

Definição 2.10. Um quatérnio q é dito invertível se existir $r \in \mathbb{H}$ tal que,

$$qr = rq = 1.$$

Neste caso, se existir tal r , dizemos que r é o inverso multiplicativo de q e denotaremos r por q^{-1} .

Proposição 2.9. Todo quatérnio não nulo é invertível. Ou seja, dado $q = (q_0 + \vec{v}) \in \mathbb{H}^*$, existe $r \in \mathbb{H}$ de tal forma que

$$qr = rq = 1.$$

Além disso, $r = q^{-1} = \frac{1}{q_0^2 + |\vec{v}|^2} \cdot (q_0 - \vec{v})$.

Demonstração. Antes de mais nada, vamos fazer uma observação,

$$q = q_0 + \vec{v} = 0 \iff q_0 = 0 \text{ e } \vec{v} = \vec{0} \iff q_0 = 0 \text{ e } |\vec{v}| = 0 \iff (q_0^2 + |\vec{v}|^2) = 0.$$

É necessário compreender que ao considerar $q \in \mathbb{R}^*$ tem-se necessariamente que $(q_0^2 + |\vec{v}|^2) \neq 0$.

Assim queremos determinar $r = r_0 + \vec{u} \in \mathbb{H}$ de modo que $qr = rq = 1$. Para tanto, considere $qr = 1$.

$$\begin{aligned} (q_0 + \vec{v})(r_0 + \vec{u}) &= 1 + \vec{0} \\ (q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) + (q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}) &= 1 + \vec{0}, \end{aligned}$$

onde pela igualdade de quatérnios temos,

$$\begin{cases} q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 1 \\ q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Isolando $q_0 r_0$ na primeira equação de (2.11) e multiplicando ambos os membros por q_0 temos

$$\begin{aligned} r_0 q_0^2 &= q_0 + q_0 \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \\ &= q_0 + \langle \vec{v}, q_0 \vec{u} \rangle \\ &= q_0 + \langle \vec{v}, -r_0 \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} \rangle \\ &= q_0 - r_0 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \times \vec{u} \rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Note que, no último termo da equação acima, temos pela propriedade (i) da Proposição 1.15 que $\langle \vec{v}, \vec{v} \times \vec{u} \rangle = \vec{0}$. Logo, (2.12) se reduz a

$$r_0 q_0^2 = q_0 - r_0 |\vec{v}|^2,$$

ou seja,

$$r_0 q_0^2 + r_0 |\vec{v}|^2 = q_0.$$

Assim,

$$r_0 (q_0^2 + |\vec{v}|^2) = q_0.$$

Como $(q_0^2 + |\vec{v}|^2) \neq 0$ tem-se que $r_0 = \frac{q_0}{q_0^2 + |\vec{v}|^2}$.

Observando a 2ª equação de (2.11) vemos que há uma combinação linear entre os vetores \vec{v} , \vec{u} e $\vec{v} \times \vec{u}$ que resulta no vetor nulo. Logo os três vetores são linearmente dependentes. Mas $\vec{v} \times \vec{u}$ é simultaneamente ortogonal a \vec{v} e a \vec{u} , então para que os três vetores sejam linearmente dependentes deve ocorrer que \vec{v} e \vec{u} sejam vetores linearmente dependentes. Logo, $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Substituindo essa informação na 1ª equação de (2.11) temos,

$$q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \lambda \vec{v} \rangle = 1,$$

ou seja,

$$q_0 r_0 - 1 = \lambda |\vec{v}|^2.$$

Substituindo $r_0 = \frac{q_0}{q_0^2 + |\vec{v}|^2}$ temos,

$$q_0 r_0 - 1 = \frac{q_0^2}{q_0^2 + |\vec{v}|^2} - 1 = \frac{-|\vec{v}|^2}{q_0^2 + |\vec{v}|^2} = \lambda |\vec{v}|^2 \iff \lambda = \frac{-1}{q_0^2 + |\vec{v}|^2}.$$

Logo, temos que $\vec{u} = \frac{-1}{q_0^2 + |\vec{v}|^2} \vec{v}$.

Assim, o quatérnio $r = r_0 + \vec{u}$ que satisfaz a condição $qr = 1$ para cada $q \in \mathbb{H}^*$, é dado por

$$r = r_0 + \vec{u} = \frac{q_0}{q_0^2 + |\vec{v}|^2} + \frac{-1}{q_0^2 + |\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{1}{q_0^2 + |\vec{v}|^2} (q_0 - \vec{v}),$$

ou seja,

$$q^{-1} = \frac{1}{q_0^2 + |\vec{v}|^2}(q_0 - \vec{v}). \quad (2.13)$$

□

Com relação a pergunta realizada anteriormente, conforme a construção feita na demonstração, sim é necessário que um número quatérnio seja diferente de zero para que ele possua inverso multiplicativo.

Com essa informação podemos agora determinar o quociente entre números quatérnios com a próxima definição.

Definição 2.11. Dados $q, r \in \mathbb{H}$ com $r \neq 0$, definimos a divisão de q por r como sendo o quociente $\frac{q}{r}$ dado por,

$$\frac{q}{r} = q(r^{-1}) = qr^{-1}.$$

Considerando que o conjunto dos quatérnios não é comutativo, temos pela definição acima que $q \left(\frac{r}{s}\right) \neq \left(\frac{q}{s}\right)r$, pois $q \left(\frac{r}{s}\right) = qrs^{-1}$ enquanto que $\left(\frac{q}{s}\right)r = qs^{-1}r$.

Dessa forma, é prudente adotar notação qr^{-1} na definição para a divisão de quatérnios ao invés da notação tradicional, uma vez que evita que certas “confusões” aconteçam.

Proposição 2.10. Sejam $q, r, \in \mathbb{H}$ tais que $qr = 0$, então $q = 0$ ou $r = 0$.

Demonstração. Sejam $q = q_0 + \vec{v}$ e $r = r_0 + \vec{u}$ e suponha $(q_0 + \vec{v})(r_0 + \vec{u}) = 0$.

Considerando que $q = q_0 + \vec{v} \neq 0 \iff (q_0^2 + |\vec{v}|^2) \neq 0$, então obrigatoriamente tem-se que $r = r_0 + \vec{u} = 0$. Assim pela igualdade de quatérnios temos,

$$(q_0 + \vec{v})(r_0 + \vec{u}) = 0 + \vec{0},$$

ou seja,

$$(q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) + (q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}) = 0 + \vec{0},$$

donde temos o seguinte sistema,

$$\begin{cases} q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \\ q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}. \end{cases} \quad (2.14)$$

Multiplicando a 1ª equação de (2.14) por q_0 teremos

$$q_0^2 r_0 - \langle \vec{v}, q_0 \vec{u} \rangle = 0. \quad (2.15)$$

Isolando $q_0 \vec{u}$ na 2ª equação de (2.14) e substituindo o valor encontrado em (2.15) obtemos,

$$q_0^2 r_0 - \langle \vec{v}, -r_0 \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} \rangle = 0.$$

Assim,

$$q_0^2 r_0 + r_0 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \times \vec{u} \rangle = 0,$$

isto é,

$$q_0^2 r_0 + r_0 |\vec{v}|^2 + \langle \vec{v}, \vec{v} \times \vec{u} \rangle = 0.$$

Lembrando que pelo item (i) da Proposição 1.15 tem-se $\langle \vec{v}, \vec{v} \times \vec{u} \rangle = 0$ essa última igualdade se reduz a

$$\begin{aligned} q_0^2 r_0 + r_0 |\vec{v}|^2 &= 0 \\ r_0 (q_0^2 + |\vec{v}|^2) &= 0. \end{aligned}$$

Considerando que $(q_0^2 + |\vec{v}|^2) \neq 0$, então obrigatoriamente $r_0 = 0$.

Substituindo r_0 nas equações de (2.14) tem-se,

$$\begin{cases} \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \\ q_0 \vec{u} + \vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Tomando o módulo ao quadrado da segunda equação de (2.16) temos

$$|q_0 \vec{u} + \vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{0}|^2 = 0$$

isto é,

$$|q_0 \vec{u}|^2 + 2\langle q_0 \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u} \rangle + |\vec{v} \times \vec{u}|^2 = 0. \quad (2.17)$$

Novamente, pelo item (i) da Proposição 1.15 tem-se

$$2\langle q_0 \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u} \rangle = 0.$$

E, de (2.17) resta apenas,

$$|q_0 \vec{u}|^2 + |\vec{v} \times \vec{u}|^2 = 0.$$

Agora, lembrando que pelo item (xi) da Proposição 1.15 podemos reescrever $|\vec{v} \times \vec{u}|^2$, teremos,

$$|q_0|^2 |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2 = 0.$$

Observando a 1ª equação de (2.16), a equação acima fica reduzida a

$$|q_0|^2 |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 = (q_0^2 + |\vec{v}|^2) |\vec{u}|^2 = 0.$$

Como $(q_0^2 + |\vec{v}|^2) \neq 0$ tem-se necessariamente que $|\vec{u}|^2 = 0 \iff \vec{u} = 0$. Logo, $r = (r_0 + \vec{u}) = 0$. \square

2.3 Conjugado e Norma

O conceito da norma ou, módulo de um número quatérnio é semelhante ao conceito da norma de vetores no espaço já apresentada anteriormente. Considerando a aplicabilidade, a norma de um número quatérnio é amplamente utilizada nas situações que envolvem rotações no espaço na área de computação gráfica e robótica segundo [10] e [3], mais precisamente, os quatérnios unitários cuja norma é igual a 1.

O conjugado de um número quatérnio por sua vez, está interligado a noção de norma [11]. Considerando um número complexo z , tem-se que $(z \cdot \bar{z}) = |z|^2$ é válido se \bar{z} for o conjugado de z . Verificaremos agora que essa ideia também será estabelecida no estudo com os quatérnios.

Definição 2.12. Seja $q = q_0 + \vec{v} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ um número quatérnio qualquer. A norma de q é o número real representado por $|q|$, dado por,

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \sqrt{q_0^2 + |\vec{v}|^2}. \quad (2.18)$$

Observe que $|\vec{v}| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ representa norma euclidiana já apresentada em (1.9). Para a demonstração da proposição a seguir, utilizaremos a expressão $|q|^2 = q_0^2 + |\vec{v}|^2$ a fim de facilitar a compreensão.

Proposição 2.11. Para todo $q \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos as seguintes propriedades:

- i) $|q| \geq 0$ e além disso, $q = 0$ se, e somente se $|q| = 0$;
- ii) $|q| = | -q |$;
- iii) $|\lambda q| = |\lambda| |q|$;
- iv) $Re(q) \leq |Re(q)| \leq |q|$;
- v) $|Im(q)| \leq |q|$.

Demonstração. Considere $q \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para (i) segue da própria definição de módulo que $|q| \geq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} q = 0 &\iff (q_0 + \vec{v}) = 0 = 0 + \vec{0} \\ &\iff q_0 = 0 \text{ e } \vec{v} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff q_0 = 0 \text{ e } |\vec{v}| = 0 \\
&\iff (q_0^2 + |\vec{v}|^2) = 0 \\
&\iff |q|^2 = 0 \iff |q| = 0.
\end{aligned}$$

Para o item (ii) temos que,

$$|q|^2 = q_0^2 + |\vec{v}|^2 = (-q_0)^2 + (|\vec{v}|)^2 = |-q|^2,$$

e extraindo a raiz em ambos os membros da igualdade temos que $|q| = |-q|$.

A prova do item (iii) é semelhante. Considere que,

$$\begin{aligned}
|\lambda q|^2 &= |\lambda(q_0 + \vec{v})|^2 \\
&= |\lambda q_0 + \lambda \vec{v}|^2 \\
&= (\lambda q_0)^2 + |\lambda \vec{v}|^2 = \lambda^2 q_0^2 + \lambda^2 |\vec{v}|^2 \\
&= \lambda^2 (q_0^2 + |\vec{v}|^2) = \lambda^2 |q|^2,
\end{aligned}$$

e novamente extraindo a raiz quadrada em ambos os lados desta equação tem-se $|\lambda q| = |\lambda||q|$.

Para o item (iv) se faz necessário lembrar de algumas propriedades bem conhecidas do módulo de número real. Lembrando que $q_0 \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$q_0 \leq |q_0| = \sqrt{q_0^2}.$$

Como $\sqrt{q_0^2} \leq \sqrt{q_0^2 + |\vec{v}|^2} = |q|$, temos que $q_0 \leq |q_0| \leq |q|$ e portanto, considerando que $Re(q) = q_0$, substituindo obtemos, $Re(q) \leq |Re(q)| \leq |q|$.

Para última propriedade, lembrando que $Im(q) = \vec{v}$, tem-se

$$|Im(q)|^2 = |\vec{v}|^2 \leq q_0^2 + |\vec{v}|^2 = |q|^2.$$

Extraíndo a raiz quadrada em ambos os lados temos $|Im(q)| \leq |q|$. □

A próxima definição no contexto de norma de um número quatérnio, estabelece que assim como é válido no conjunto dos numeros reais o módulo do produto como sendo o produto dos módulos, também pode ser estabelecida esta definição no conjunto dos números quatérnios [11].

Definição 2.13. Dados $q, r \in \mathbb{H}$ arbitrários, tem-se $|qr| = |q||r|$.

Demonstração. Sejam $q = q_0 + \vec{v}$ e $r = r_0 + \vec{u}$ números quatérnios arbitrários. Tem-se,

$$|qr|^2 = |(q_0 + \vec{v})(r_0 + \vec{u})|^2$$

$$= |(q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) + (q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u})|^2.$$

Usando a definição de módulo temos,

$$|qr|^2 = (q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle)^2 + |q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}|^2.$$

Note que na expressão temos o vetor $\vec{v} \times \vec{u}$ que é simultaneamente ortogonal aos vetores \vec{v} e \vec{u} e portanto, ortogonal a qualquer combinação linear entre \vec{v} e \vec{u} inclusive $q_0 \vec{v} + r_0 \vec{u}$. Assim, usando também o quadrado da diferença de dois números no primeiro termo tem-se,

$$\begin{aligned} |qr|^2 &= (q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle)^2 + |q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}|^2 \\ &= q_0^2 r_0^2 - 2q_0 r_0 \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2 + |q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v}|^2 + |\vec{v} \times \vec{u}|^2. \end{aligned}$$

Lembrando que pelo item (xi) da Proposição 1.15 e pela definição de norma temos $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle^2 + |\vec{v} \times \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2$, então a expressão acima se reduz a,

$$\begin{aligned} |qr|^2 &= q_0^2 r_0^2 + q_0^2 |\vec{u}|^2 + r_0^2 |\vec{v}|^2 + |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 \\ &= q_0^2 (r_0^2 + |\vec{u}|^2) + |\vec{v}|^2 (r_0^2 + |\vec{u}|^2) \\ &= (q_0^2 + |\vec{v}|^2) (r_0^2 + |\vec{u}|^2) = |q|^2 |r|^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados obtemos $|qr| = |q||r|$. □

A próxima proposição demonstra que a desigualdade triangular também é válida no conjunto dos números quatérnios.

Proposição 2.12. Dados $q, r \in \mathbb{H}$ arbitrários, então

$$|q + r| \leq |q| + |r|.$$

Demonstração. Sejam $q = q_0 + \vec{v}$ e $r = r_0 + \vec{u}$ quatérnios quaisquer, então,

$$\begin{aligned} |q + r|^2 &= |(q_0 + \vec{v}) + (r_0 + \vec{u})|^2 \\ &= |(q_0 + r_0) + \vec{v} + \vec{u}|^2. \end{aligned}$$

Pela definição de norma e pela Proposição 1.9 temos que

$$\begin{aligned} |q + r|^2 &= (q_0 + r_0)^2 + |\vec{v} + \vec{u}|^2 \leq (q_0 + r_0)^2 + (|\vec{v}| + |\vec{u}|)^2 \\ \implies |q + r|^2 &\leq q_0^2 + 2q_0 r_0 + r_0^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{u}| + |\vec{u}|^2 \\ \implies |q + r|^2 &\leq q_0^2 + |\vec{v}|^2 + 2(q_0 r_0 + |\vec{v}||\vec{u}|) + r_0^2 + |\vec{u}|^2 = |q|^2 + 2(q_0 r_0 + |\vec{v}||\vec{u}|) + |r|^2. \end{aligned}$$

Usando a propriedade de módulo de números reais temos

$$|q|^2 + 2(q_0 r_0 + |\vec{v}||\vec{u}|) + |r|^2 \leq |q|^2 + 2(|q_0 r_0| + |\vec{v}||\vec{u}|) + |r|^2.$$

Logo, por transitividade,

$$|q + r|^2 \leq |q|^2 + 2(|q_0 r_0| + |\vec{v}||\vec{u}|) + |r|^2. \quad (2.19)$$

Lembrando que $(a - b)^2 \geq 0$ implica em $2ab \leq a^2 + b^2$, então

$$\begin{aligned} (|q_0 r_0| + |\vec{v}||\vec{u}|)^2 &= q_0^2 r_0^2 + 2|q_0 r_0||\vec{v}||\vec{u}| + |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 \leq q_0^2 r_0^2 + q_0^2 |\vec{u}|^2 + r_0^2 |\vec{v}|^2 + |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 \\ \implies (|q_0 r_0| + |\vec{v}||\vec{u}|)^2 &\leq q_0^2 r_0^2 + q_0^2 |\vec{u}|^2 + r_0^2 |\vec{v}|^2 + |\vec{v}|^2 |\vec{u}|^2 \\ \implies (|q_0 r_0| + |\vec{v}||\vec{u}|)^2 &\leq q_0^2 (r_0^2 + |\vec{u}|^2) + |\vec{v}|^2 (r_0^2 + |\vec{u}|^2) = (q_0^2 + |\vec{v}|^2)(r_0^2 + |\vec{u}|^2) = |q|^2 |r|^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados teremos $|q_0 r_0| + |\vec{v}||\vec{u}| \leq |q||r|$.

Assim, desta última parte e de (2.19), temos que

$$\begin{aligned} |q + r|^2 &\leq |q|^2 + 2(|q_0 r_0| + |\vec{v}||\vec{u}|) + |r|^2 \\ \implies |q + r|^2 &\leq |q|^2 + 2|q||r| + |r|^2 = (|q| + |r|)^2, \end{aligned}$$

donde finalmente, extraindo a raiz em ambos os lados da igualdade teremos, $|q + r| \leq |q| + |r|$. \square

O conceito de conjugado de um número quatérnio é bem semelhante ao conceito do conjugado de um número complexo. De fato, assim como no conjunto dos números complexos [13], a definição de conjugado de uma número quatérnio é definido de tal maneira que nos permite escrever a norma de um número quatérnio como o produto dele pelo seu conjugado, ou seja, $q\bar{q} = |q|^2$, para todo $q \in \mathbb{H}$.

Dessa forma, considerando $q, r, \in \mathbb{H}$, sendo $q = q_0 + \vec{v}$ queremos encontrar $r = x + \vec{u}$ de tal maneira que $qr = |q|^2$.

Nessas condições, dada a igualdade acima e considerando que $|q|^2$ é número real, temos que

$$\begin{aligned} (q_0 + \vec{v})(x + \vec{u}) &= |q|^2 \\ \implies (q_0 x - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) + (q_0 \vec{u} + x \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}) &= |q|^2 + \vec{0}. \end{aligned}$$

Podemos reescrever a igualdade acima da seguinte maneira:

$$\begin{cases} q_0 x - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = |q|^2 \\ q_0 \vec{u} + x \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Note que, na segunda igualdade tem-se que os vetores \vec{v} , \vec{u} e $\vec{v} \times \vec{u}$ são linearmente dependentes e considerando que $\vec{v} \times \vec{u}$ é simultaneamente ortogonal \vec{v} e a \vec{u} então para que a igualdade seja naturalmente satisfeita devemos ter que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, substituindo esse dado na segunda equação de (2.20) teremos,

$$q_0 \lambda \vec{v} + x \vec{v} + \vec{v} \times \lambda \vec{v} = \vec{0}.$$

Como $\vec{v} \times \lambda \vec{v} = \vec{0}$, isolando \vec{v} teremos,

$$(q_0 \lambda + x) \vec{v} = \vec{0}.$$

Considerando que \vec{v} é um vetor qualquer, nem sempre \vec{v} será um vetor nulo. Neste caso teremos que $q_0 \lambda + x = 0$, o que implica em $x = -q_0 \lambda$.

Substituindo os dados obtidos na primeira equação de (2.20) obteremos que

$$\begin{aligned} -q_0^2 \lambda - \langle \vec{v}, \lambda \vec{v} \rangle &= |q|^2 \\ \implies -\lambda(q_0^2 + |\vec{v}|^2) &= |q|^2 \\ \implies -\lambda |q|^2 &= |q|^2 \implies \lambda = -1. \end{aligned}$$

Dessa maneira, colocando $\lambda = -1$ temos $\vec{u} = -\vec{v}$ e $x = q_0$. Logo, o quatérnio r que satisfaz as condições dadas inicialmente, é definido por $r = q_0 - \vec{v}$ sendo este quatérnio definido como o conjugado do quatérnio q e designado por \bar{q} . Portanto, $\bar{q} = q_0 - \vec{v}$.

A fim de que algumas propriedades possam ser provadas, definimos o conjugado de um número quatérnio de acordo com [11].

Definição 2.14. Seja $q \in \mathbb{H}$ dado por $q = q_0 + \vec{v} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$. Então o conjugado de q , indicado por \bar{q} , é dado por

$$\bar{q} = q_0 - \vec{v} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k.$$

Proposição 2.13. Sejam $q, r, \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ as seguintes propriedades são válidas:

- i) $\overline{\bar{q}} = q$;
- ii) $\overline{q + r} = \bar{q} + \bar{r}$;
- iii) $\overline{q r} = \bar{r} \bar{q}$;
- iv) $\overline{\lambda q} = \lambda \bar{q}$;
- v) $q \bar{q} = \bar{q} q = |q|^2$;
- vi) $|q| = |\bar{q}|$;
- vii) $q + \bar{q} = 2\text{Re}(q)$ e $q - \bar{q} = 2\text{Im}(q)$.

Demonstração. Para cada uma das demonstrações considere $q = q_0 + \vec{v}$ e $r = r_0 + \vec{u}$.

Para (i) temos $\bar{q} = \overline{(q)} = \overline{(q_0 + \vec{v})} = (q_0 - \vec{v}) = q$.

No item (ii) tem-se

$$\begin{aligned}\overline{q+r} &= \overline{(q_0 + \vec{v}) + (r_0 + \vec{u})} \\ &= \overline{(q_0 + r_0) + (\vec{v} + \vec{u})} \\ &= (q_0 + r_0) - (\vec{v} + \vec{u}) \\ &= (q_0 - \vec{v}) + (r_0 + \vec{u}) = \bar{q} - \bar{r}.\end{aligned}$$

O item (iii) é semelhante ao item anterior,

$$\begin{aligned}\overline{qr} &= \overline{(q_0 + \vec{v})(r_0 + \vec{u})} \\ &= \overline{(q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) + (q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u})} \\ &= (q_0 r_0 - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle) - (q_0 \vec{u} + r_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{u}) \\ &= (q_0 r_0 - \langle -\vec{v}, -\vec{u} \rangle) + (q_0(-\vec{u}) + r_0(-\vec{v}) + (-\vec{v}) \times \vec{u}) \\ &= (r_0 q_0 - \langle -\vec{u}, -\vec{v} \rangle) + (r_0(-\vec{v}) + q_0(-\vec{u}) - \vec{u} \times (-\vec{v})) \\ &= (r_0 q_0 - \langle -\vec{u}, -\vec{v} \rangle) + (r_0(-\vec{v}) + q_0(-\vec{u}) + (-\vec{u}) \times (-\vec{v})) \\ &= (r_0 - \vec{u})(q_0 - \vec{v}) = \bar{r}\bar{q}.\end{aligned}$$

Para o próximo item, (iv), considerando $\lambda \in \mathbb{R}$, temos,

$$\begin{aligned}\overline{\lambda q} &= \overline{\lambda(q_0 + \vec{v})} \\ &= \overline{(\lambda q_0) + (\lambda \vec{v})} \\ &= (\lambda q_0) - (\lambda \vec{v}) \\ &= \lambda(q_0 - \vec{v}) = \lambda \bar{q}.\end{aligned}$$

O item (v) de certa forma já apresentado anteriormente, pode ser demonstrado agora com a utilização da definição de conjugado de número quatérnio.

$$\begin{aligned}q\bar{q} &= (q_0 + \vec{v})\overline{(q_0 + \vec{v})} \\ &= (q_0 + \vec{v})(q_0 - \vec{v}) \\ &= (q_0^2 - \langle \vec{v}, -\vec{v} \rangle) + (q_0 \vec{v} + (-q_0 \vec{v}) + \vec{v} \times -\vec{v}) \\ &= q_0^2 + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= q_0^2 + |\vec{v}|^2 = |q|^2.\end{aligned}$$

Para o item (vi) temos

$$|q|^2 = q_0^2 + |\vec{v}|^2 = q_0^2 + |-\vec{v}|^2 = |\bar{q}|^2.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados obtemos $|q| = |\bar{q}|$.

No último item desta proposição para a primeira e segunda igualdade, respectivamente, tem-se que

$$q + \bar{q} = (q_0 + \vec{v}) + (q_0 - \vec{v}) = q_0 + q_0 = 2q_0 = 2Re(q)$$

$$q - \bar{q} = (q_0 + \vec{v}) - (q_0 - \vec{v}) = \vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v} = 2Im(q).$$

□

2.3.1 Quatérnio Unitário

Considerando a aplicabilidade dos números quatérnios na solução de problemas que envolvem rotações no espaço, um subconjunto merece atenção especial, são os números quatérnios cuja norma é 1, também conhecidos como *versores* ou *quatérnios unitários*. Os quatérnios unitários, fornecem uma notação matemática conveniente para representar orientações espaciais e rotações de elementos no espaço tridimensional. Especificamente, eles codificam informações sobre uma rotação de ângulo sobre um eixo arbitrário.

Inicialmente, vamos considerar algumas definições apresentadas anteriormente que ora se tornam mais simples com a definição de norma e conjugado de um número quatérnio.

De acordo com [11] e [3], uma consequência direta da definição de norma e conjugado de um quatérnio no caso em $q \neq 0$, é a possibilidade em calcular o inverso multiplicativo de maneira mais simples.

Proposição 2.14. Seja $q = (q_0 + \vec{v}) \in \mathbb{H}^*$. Então o inverso de q , definido como $q^{-1} \in \mathbb{H}^*$ que satisfaz a condição $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$, é dado por

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}(\bar{q}).$$

Demonstração. Considerando que $q \neq 0$, então de acordo com a Proposição 2.9 o quatérnio q é invertível. Logo temos que,

$$q^{-1} = \frac{1}{q_0^2 + |\vec{v}|^2}(q_0 - \vec{v}) = \frac{1}{|q|^2}(\bar{q}).$$

□

Levando em consideração o conjunto dos números reais, a condição $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ nos leva a pensar, quais seriam os possíveis valores de q e q^{-1} em que o produto

seria igual à 1. Com certeza uma das primeiras possibilidades seria pensar no próprio número 1. Ao nos referirmos ao contexto dos números quatérnios a ideia é semelhante, porém, está associada a norma ou comprimento de um vetor e não a um elemento.

Definição 2.15. O quatérnio $q = q_0 + \vec{v}$ é denominado *Quatérnio Unitário* se a sua norma é igual a 1, ou seja,

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \sqrt{q_0^2 + |\vec{v}|^2} = 1$$

Neste caso, é comum escrever $|q|^2 = q_0^2 + |\vec{v}|^2 = 1$ o que de certa forma representa conjunto dos números quatérnios que estão sobre a esfera de raio 1 centrada na origem. Note que é possível verificar a relação entre a norma do quatérnios unitários e a identidade trigonométrica fundamental $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ donde conclui-se que existe um θ tal que $\cos \theta = q_0$ e $\sin \theta = |v|$. Logo, podemos escrever um quatérnio unitário como sendo,

$$q = \cos \theta + \sin \theta \hat{u},$$

onde $\hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ representa o vetor unitário.

Nesse sentido, assim como um número complexo representa a rotação de um vetor em torno da origem no plano, coincidindo com a equação da circunferência de raio unitário no caso de complexos com norma 1, a extensão no espaço tridimensional, pode ser realizada utilizando um quatérnio puro com norma 1 o qual determinará uma hipersfera de raio 1. O leitor interessado em verificar o comportamento de quatérnios em relação a esfera nos casos em que o quatérnio não é puro poderá consultar [21].

Também não é difícil perceber que o inverso multiplicativo de um número quatérnio não nulo coincide com o seu conjugado [3].

Proposição 2.15. Dado $q \in \mathbb{H}^*$, sendo q um quatérnio unitário, tem-se

$$q^{-1} = \bar{q}.$$

Demonstração. Considerando que $q \in \mathbb{H}^*$, então q possui inverso multiplicativo, ou seja, $qq^{-1} = 1$. Multiplicando por \bar{q} em ambos os lados, obtemos

$$\bar{q}qq^{-1} = \bar{q}.$$

Pelo item (v) da Proposição 2.13, tem-se $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$ e usando o fato de que o quatérnio é unitário, ou seja, $|q| = 1$, reescrevendo a igualdade acima temos,

$$\begin{aligned} |q|^2 q^{-1} &= \bar{q} \\ \implies q^{-1} &= \bar{q}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Rotações

Antes de estabelecermos uma rotação vamos determinar o tipo de relação no que chamamos de espaços vetoriais. Podemos dizer que, assim como as funções estabelecem uma relação entre domínio e contradomínio geralmente no conjunto dos números reais, as transformações matriciais estabelecem relações entre domínio e contradomínio envolvendo matrizes [15].

No capítulo inicial deste trabalho apresentamos algumas definições e proposições que qualificam as operações entre vetores como sendo operações no espaço vetorial. Agora, daremos continuidade ao assunto em questão de modo a definir que as operações de rotação também são qualificadas como transformações lineares. Como estamos trabalhando em espaços vetoriais e portanto, com operações entre vetores, iremos suprimir a partir deste momento a notação de vetor (\rightarrow) por uma questão de simplificação nas notações.

Definição 3.1. Se V e W forem espaços vetoriais e se R for uma função de domínio V e contradomínio W , dizemos que R é uma transformação de V em W , ou ainda, uma aplicação de V em W e denotamos por

$$R : V \longrightarrow W.$$

No caso especial se $V = W$ dizemos que R é chamado de operador V .

Como este trabalho tem por objetivo as transformações envolvendo as rotações, o nosso estudo ficará limitado aos espaços vetoriais de \mathbb{R}^2 e mais enfaticamente, ao \mathbb{R}^3 . Se a cada $v = (x_1, y_1, z_1)$ no domínio \mathbb{R}^3 , R associa um vetor $w = (x_2, y_2, z_2)$ único em \mathbb{R}^3 no contradomínio, R define uma transformação. Escrevemos,

$$R(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \text{ ou ainda } R(v) = w.$$

Como estamos interessados em funções que preservam a adição vetorial e a multiplicação por escalar, trataremos especificamente das transformações que são lineares, ou seja, aquelas que satisfazem a próxima definição, de acordo com [14].

Definição 3.2. Sejam V e W espaços vetoriais. Uma transformação linear de V em W é uma função $R : V \rightarrow W$ que possui as seguintes propriedades:

- i) $R(v_1 + v_2) = R(v_1) + R(v_2)$, para quaisquer v_1 e v_2 em V ;
- ii) $R(\lambda v) = \lambda R(v)$ para quaisquer v em V e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Estas propriedades ainda podem ser expressas como

$$R(\lambda v_1 + v_2) = \lambda R(v_1) + R(v_2). \quad (3.1)$$

A demonstração das propriedades acima pode ser encontrada em [14] e [15], inclusive com uma série de exemplos.

Simplificadamente, uma transformação linear pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} x_2 &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1; \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1; \\ z_2 &= a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1. \end{aligned}$$

Ou ainda em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Podemos entender que o vetor $w = (x_2, y_2, z_2)$ está associado ao vetor $v = (x_1, y_1, z_1)$ pela ação da matriz A sobre o vetor v através da multiplicação à esquerda, obtendo assim uma transformação linear, qual também pode ser escrita como

$$w = Av \text{ ou ainda } w = R_A(v).$$

Onde, a notação R_A significa a transformação pela matriz A através da multiplicação.

Quando tratamos especificamente de movimentação de objetos no espaço, é necessário que consideremos a manutenção de algumas propriedades. Entre elas, a distância entre partículas que constitui tal objeto, e também uma propriedade que preserva a orientação. Matematicamente estas duas propriedades se constituem pela aplicação denominada de *transformação de corpo rígido*.

Definição 3.3. Um movimento rígido em \mathbb{R}^3 , sendo $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, pode ser descrito por uma aplicação

$$R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $|R(v_1)| = |v_1|$;
- ii) $R(v_1 \times v_2) = R(v_1) \times R(v_2)$

Considerando que a proposta deste trabalho é didática, não nos deteremos a mostrar que as matrizes $R \in SO(2)$ e $R \in SO(3)$ ortogonais, cujo $\det = 1$ também conhecidas como matrizes de rotação, preservam as propriedades acima descritas para transformação de corpo rígido. Mas o leitor interessado em mais detalhes poderá consultar [18], [13] e também [7].

Segundo [3], as transformações lineares possuem diversas propriedades interessantes mas, infelizmente, existem algumas transformações importantes para a Computação gráfica que não podem ser classificadas como lineares, como por exemplo, as translações, onde cada ponto é somado com vetor constante. Fazendo uma analogia com o conteúdo de funções no conjunto dos números reais, podemos entender a translação como uma função afim. Na orientação de corpos rígidos no espaço é muito comum a utilização do movimento de translação, uma vez que, os corpos além de serem rotacionados também em alguns casos são deslocados, como por exemplo, o movimento de um braço robótico [3].

Como o nosso objeto de estudo envolve uma transformação do espaço nele mesmo, ou ainda, possui domínio e contradomínio iguais, falaremos especificamente dos *operadores lineares*.

Segundo [15], um operador linear nada mais é do que uma matriz que atua sobre um vetor de forma que o resultado produzido possa ser uma projeção, reflexão, translação ou ainda uma rotação desse vetor no plano ou no espaço.

Nas próximas seções, detalharemos cada tipo de rotação, considerando inicialmente as rotações no plano a fim estabelecer algumas relações com objetivo de tornar o conteúdo sobre rotações no espaço melhor compreendido. Como referência utilizaremos as ideias apresentadas em [8] e [6].

3.1 Rotações no Plano

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas OXY em \mathbb{R}^2 , os vetores canônicos $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ e um vetor arbitrário $v = (x_1, y_1)$, tal que, o ângulo entre os vetores v e i seja θ , com $\theta \in [0, 2\pi)$. Sendo $r = |v|$ a norma de v , e a representação do sistema de acordo com a Figura 3.1, tem-se que as coordenadas de v são dadas por

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ y_1 = r \sin \theta. \end{cases} \quad (3.2)$$

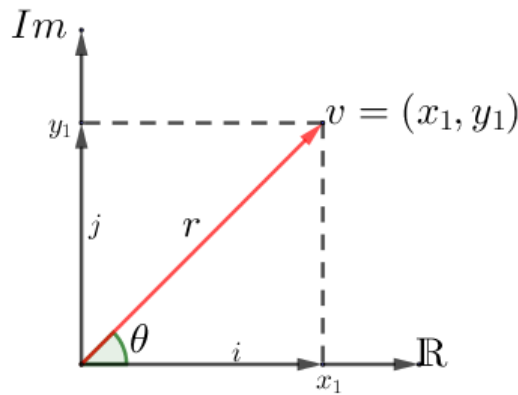


Figura 3.1: Representação das coordenadas de v .

Tomando como referência a Figura 3.2, podemos estabelecer dois tipos de rotação no plano:

- O primeiro tipo de rotação mantém o vetor v e rotaciona o sistema OXY no sentido anti-horário, de um ângulo φ obtendo assim o sistema $OX'Y'$ formado pelos vetores i' e j' de acordo com a Figura 3.2a. Assim, percebe-se que o vetor v nomeado de vetor w após o giro do sistema, tem as coordenadas

$$\begin{cases} x_2 = r \cos(\theta - \varphi) = r \cos \theta \cos \varphi + r \sin \theta \sin \varphi \\ y_2 = r \sin(\theta - \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi - r \cos \theta \sin \varphi. \end{cases} \quad (3.3)$$

Isolando r em (3.2) e substituindo em (3.3) tem-se,

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi \\ y_2 = -x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.4)$$

- O segundo tipo de rotação mantém o sistema OXY e rotaciona o vetor v no sentido anti-horário de maneira que o ângulo entre o vetor inicial v e o vetor rotacionado

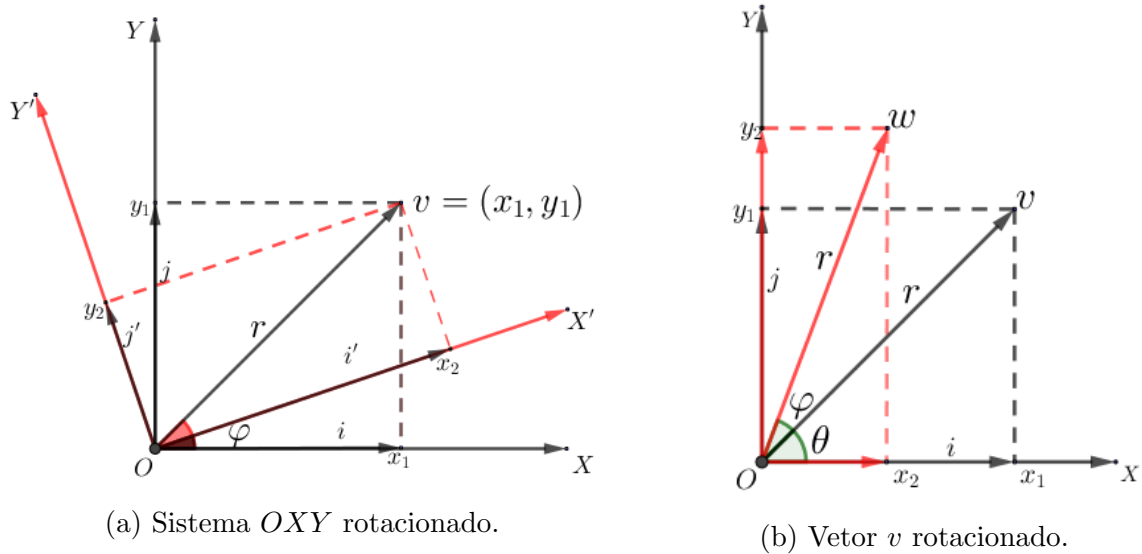


Figura 3.2: Rotações no plano.

w , seja φ . Neste caso de acordo com a Figura 3.2b, as coordenadas de w com relação ao sistema OXY são dadas por,

$$\begin{cases} x_2 = r \cos(\theta + \varphi) = r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi \\ y_2 = r \sin(\theta + \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \sin \varphi. \end{cases} \quad (3.5)$$

Novamente, tomando r nas equações em (3.2) e agora substituindo nas equações em (3.5) obtemos

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\ y_2 = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.6)$$

De acordo com [6], aparentemente as duas maneiras de caracterizar rotações são diferentes. No entanto, nota-se que deslocar o sistema OXY no sentido horário com um ângulo φ é exatamente igual a manter o sistema OXY fixo e rodar v no sentido horário de um ângulo $-\varphi$. Essa afirmação fica evidente ao substituir o ângulo $-\varphi$ nas equações apresentadas em (3.6).

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos(-\varphi) - y_1 \sin(-\varphi) = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi \\ y_2 = x_1 \sin(-\varphi) + y_1 \cos(-\varphi) = -x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.7)$$

As relações obtidas entre os vetores nas equações em v e w colocadas nos tipos de rotação em (3.4) e (3.6) respectivamente, podem ser descritas na forma de notação matricial onde o vetor w é obtido a partir da ação das matrizes R_1 e R_2 sobre o vetor v da forma

$$w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = R_1 v. \quad (3.8)$$

$$w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = R_2 v. \quad (3.9)$$

As matrizes R_1 em (3.8) e R_2 em (3.9) são chamadas de matriz de passagem [8] ou ainda, matriz de mudança de base. De forma mais clara, R_1 transforma o sistema OXY em $OX'Y'$, e R_2 faz exatamente o contrário, transforma o sistema $OX'Y'$ no sistema OXY .

Note que, observando as matrizes em (3.8) e (3.9), a matriz R_2 é a transposta da matriz R_1 , ou seja $R_2 = R_1^t$. Além disso, tomando o produto entre matrizes tem-se,

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi & -\cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi \\ -\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi & \operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E sobretudo,

$$\det(R_1) = \det(R_2) = \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi = 1. \quad (3.10)$$

Logo, a matriz R_2 , além de ser a transposta de R_1 , é também a sua matriz inversa. Ou seja,

$$R_1^{-1} = R_1^t \quad e \quad R_2^{-1} = R_2^t. \quad (3.11)$$

Note que, segundo [20] e [15], as matrizes acima possuem as propriedades (3.10) e (3.11), sendo classificadas como *matrizes ortogonais* como já apresentado na Definição 1.22, também conhecidas como *matrizes de rotação* e constituem o conjunto de matrizes de rotação de ordem 2, denominado de $SO(2)$. A sigla SO é abreviatura de *Special Orthogonal*, sendo considerado especial devido ao fato do determinante ser 1.

3.1.1 Números Complexos e as Rotações no Plano

Como já comentado anteriormente, foi a partir das definições desenvolvidas na teoria algébrica voltada para o estudo dos números complexos no plano em 1833, que Willian Rowan Hamilton pensou em desenvolver uma álgebra que fosse voltada para o espaço tridimensional [17]. Assim, o objetivo nesta seção é estabelecer as relações já apresentadas nas rotações no plano com as definições da álgebra dos números complexos.

Definição 3.4. Seja $z = a + ib \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, um número complexo arbitrário. Define-se a norma (módulo) e o argumento de z , respectivamente, como

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad e \quad \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right), \quad \text{com } a \neq 0.$$

Na Figura 3.3 podemos notar que a norma é o comprimento do vetor determinado pelas coordenadas $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ em relação a origem, e o argumento θ é dado pelo ângulo que o vetor de coordenadas (a, b) faz com o eixo das abscissas no sentido anti-horário, [15]. Logo, z pode ser reescrito na forma *polar* ou *trigonométrica* dada por

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \text{ onde } r = |z|. \quad (3.12)$$

Lembrando que $i^2 = -1$ e considerando $v = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}$ arbitrário, efetuando o produto

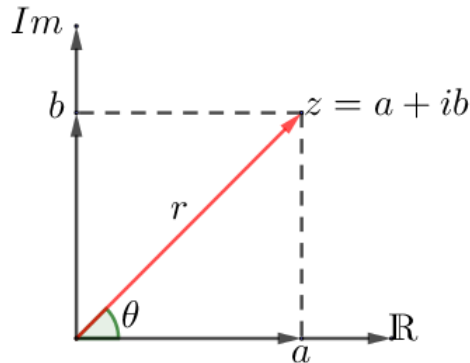


Figura 3.3: Representação de z no plano complexo.

de z por v teremos,

$$zv = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)](x_1 + iy_1) = r[x_1 \cos \theta - y_1 \operatorname{sen} \theta + i(x_1 \operatorname{sen} \theta + y_1 \cos \theta)]. \quad (3.13)$$

Considerando o produto $zv = (x_2, y_2)$ e sendo $v = (x_1, y_1)$, podemos reescrever a equação dada em (3.13) na forma de notação matricial,

$$zv = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Note que, se considerarmos que $r = 1$, de acordo com [13] obteremos a mesma expressão já apresentada na matriz em (3.9). Dessa forma, considerando z um número complexo com norma unitária, ou seja, $r = |z| = 1$, pode-se dizer que o produto zv é a ação da matriz z sobre o vetor v , rotacionando v em um ângulo θ no sentido anti-horário. Observe que a similaridade encontrada está relacionada a segunda forma de rotação, aquela cujo vetor é rotacionado. Portanto, é razoável supor que um número complexo de norma unitária nada mais é do que uma matriz de rotação de ordem 2.

3.2 Rotações no Espaço

Inicialmente vamos definir o sentido das operações no espaço, segundo [18], determinando o que é um sistema de coordenadas ortogonais orientado de acordo com a

regra da mão direita, para que assim possamos descrever as rotações em \mathbb{R}^3 .

Definição 3.5. Seja S um sistema de coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 formado pelos vetores ortonormais $\{x, y, z\}$. Dizemos que S é orientado segundo a regra da mão direita se satisfaz as seguintes condições

$$\begin{aligned} i) \quad & x \times y = z; \\ ii) \quad & y \times z = x; \\ iii) \quad & z \times x = y. \end{aligned}$$

Considerando o teor da definição, entendemos que seria mais apropriada tê-la apresentado anteriormente, no momento em que tratamos do produto vetorial. No entanto, considerando as relações apresentadas entre as unidades i , j e k no conjunto dos números quaternions, a noção da regra da mão direita associada a ordem das operações no diagrama apresentado na Figura 2.1 pode ser melhor compreendida.

Definido o sentido do produto vetorial, podemos agora caracterizar uma rotação no espaço. Segundo [18], considere dois sistemas de coordenadas cartesianas em \mathbb{R}^3 , S_1 e S_2 , formados respectivamente pelos vetores ortonormais $\{x_1, y_1, z_1\}$ e $\{x_2, y_2, z_2\}$, cujas origens coincidem de acordo com a Figura 3.4. Buscamos encontrar uma matriz de rotação 3×3 de maneira que essa matriz já apresentada anteriormente como matriz de mudança de base, relacione o sistema S_2 como uma rotação de S_1 . Para isso, considere um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ arbitrário, escrito na base S_1 e portanto, denotado por $[v]_{S_1}$, tem-se que,

$$\text{Se } [v]_{S_1} = (a_1, a_2, a_3) \text{ então } [v]_{S_1} = a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1.$$

Da mesma maneira, escrevendo os vetores que formam o sistema S_2 na base S_1 , obtemos,

$$[x_2]_{S_1} = r_1, \quad [y_2]_{S_1} = r_2, \quad [z_2]_{S_1} = r_3. \quad (3.15)$$

Como colocado por [14] página 206, se os sistemas S_1 e S_2 são bases ortonormais, então a matriz de mudança de base é ortogonal, ou seja, fazendo o produto da matriz determinada pelos vetores nas equações (3.15) pela sua transposta obtemos

$$r_i^t r_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Assim, podemos definir a matriz de rotação de ordem 3 dada por,

$$R = R_{S_1}^{S_2},$$

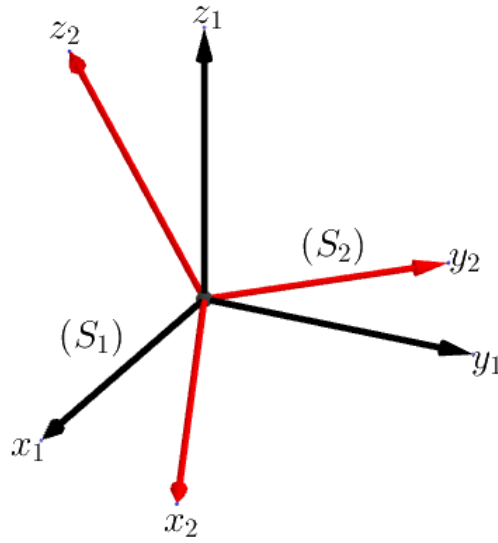


Figura 3.4: Sistema S_1 rotacionado.

onde $R_{S_1}^{S_2}$ representa matriz de mudança de base dos vetores da base S_2 escritos como combinação linear dos vetores da base S_1 .

Note que a matriz R de ordem 3, tem as mesmas características apresentadas para matriz R de ordem 2, ou seja, as mesmas propriedades apresentadas para as rotações no plano, dadas por

$$R^{-1} = R^t \quad \text{e} \quad \det(R) = 1. \quad (3.16)$$

A primeira igualdade de (3.16) se justifica pelo fato de que a matriz R apresenta vetores coluna ortonormais, pois reescrevendo temos,

$$R^t R = I = R R^t.$$

Já a segunda igualdade de (3.16) pode ser demonstrada utilizando algumas propriedades do cálculo de determinantes apresentadas na Proposição 1.14,

$$\begin{aligned} \det(R^t R) = \det(I) &\implies \det(R^t) \det(R) = 1 \\ &\implies \det(R) \det(R) = 1 \\ &\implies (\det(R))^2 = 1 \\ &\implies \det(R) = \pm 1. \end{aligned}$$

Reescrevendo o determinante como produto misto de acordo com a propriedade (viii) da Proposição 1.15, tem-se

$$\det(R) = \det(r_1^t, r_2, r_3) = \langle r_1^t, r_2 \times r_3 \rangle,$$

e lembrando que os vetores são ortonormais e também que pela regra da mão direita tem-se que $r_2 \times r_3 = r_1$, então,

$$\det(R) = \langle r_1^t, r_2 \times r_3 \rangle = r_1^t r_1 = 1.$$

Portanto, pelas propriedades apresentadas até agora sobre matrizes de rotação no plano dadas nas equações (3.10) e (3.11), e também no espaço, dadas na equação (3.16), podemos estabelecer a próxima definição.

Definição 3.6. Uma matriz $A_{n \times n}$ pertence ao conjunto $SO(n)$, se A satisfaz as seguintes condições:

- i) Se $A^t = A^{-1}$, ou seja, A é uma matriz ortogonal;
- ii) Se $\det(A) = 1$.

Na realidade, o conjunto $SO(n)$ é considerado um subgrupo do grupo $O(n)$, composto pelas matrizes ortogonais de ordem n . Assim, é possível verificar que $SO(n)$ é um grupo sob operação de matrizes. O leitor interessado em verificar poderá consultar [18] e [15].

Na seção 3.1 apresentamos duas formas de rotação no plano:

- a) A primeira mantém o vetor fixo e rotaciona o sistema OXY ;
- b) e a segunda mantém o sistema OXY fixo e rotaciona o vetor.

Do que foi explicitado até aqui, percebe-se que as rotações no espaço acontecem da mesma forma como acontecem no plano a não ser por pequenas adaptações. Na literatura tem-se por exemplo que [8] utiliza o primeiro tipo de rotação, já em [3] podemos encontrar o segundo tipo de rotação. Dessa forma, não existe um padrão a ser seguido, pois a escolha do tipo de rotação não interferirá no resultado, trata-se simplesmente de uma questão de gosto. Neste trabalho, consideraremos a segunda forma de rotação, por considerá-la mais intuitiva.

3.3 Parametrizações de Rotações no Espaço

A necessidade de descrever rotações no espaço é comum na implementação de dados que envolvem situações práticas. No comportamento braços articulados [3], na interpolação de movimentos de acordo com um instante de tempo [18] ou ainda na fotogrametria com a manipulação de imagens [10]. Nestas situações, a dúvida consiste em verificar qual das parametrizações é mais adequada. Nesta seção, abordaremos os tipos de parametrizações mais comuns utilizadas nos algoritmos computacionais: eixo-ângulo, ângulos de Euler e quatérnios unitários. Como o trabalho possui um enfoque

mais didático, o leitor interessado em verificar a teoria que justifica a utilização das parametrizações poderá consultar [7] e [18].

3.3.1 Eixo-Ângulo

Inicialmente vamos verificar as relações entre vetores na rotação em torno de um único eixo. As ideias aqui expostas podem ser encontradas com maiores detalhes em [3].

Para tanto, considere um ponto P no espaço, e um eixo \hat{e} partindo da origem de sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Seja o ponto P' , o ponto obtido após a rotação de P de um ângulo θ em torno do eixo \hat{e} de acordo com a Figura 3.5b.

Observe que ao considerarmos as projeções ortogonais dos pontos P e P' sobre o eixo \hat{e} obtemos um terceiro ponto C , de maneira que os três pontos P, P' e C não colineares, determinam um plano α em que $CP = CP' = r$, de acordo com a Figura 3.5b.

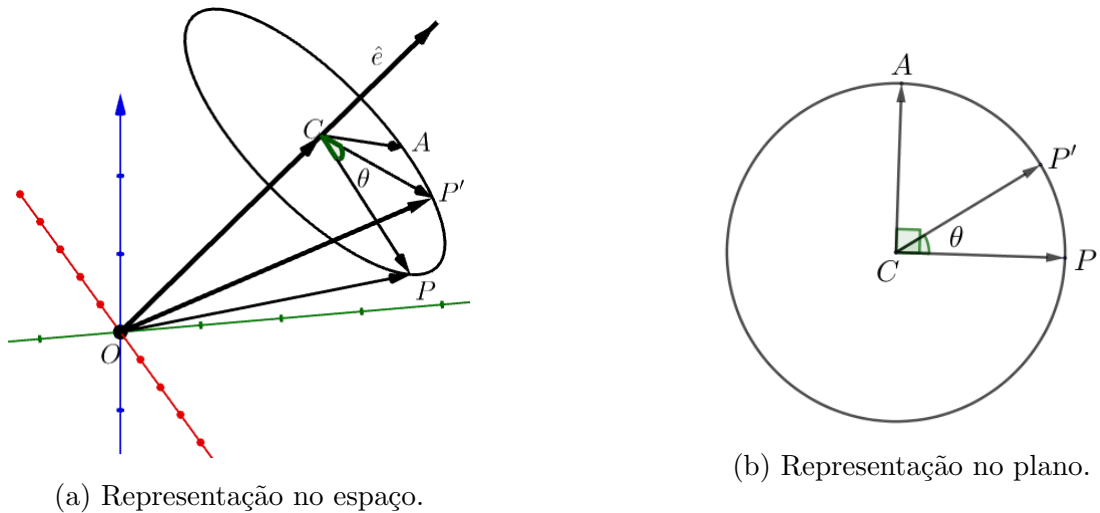


Figura 3.5: Rotações em torno de um eixo.

Utilizando a adição entre vetores, note que o vetor OP pode ser escrito da seguinte forma,

$$OP = OC + CP. \tag{3.17}$$

A rotação do ponto P é uma transformação linear e pode ser escrita como

$$OP' = R(OC) + R(CP).$$

Como o giro é em torno do eixo \hat{e} , o vetor OC permanece inalterado por se tratar de um vetor paralelo a \hat{e} . Já o vetor CP , perpendicular ao eixo \hat{e} , é rotacionado em um ângulo θ .

Notemos também que CA é um vetor simultaneamente ortogonal ao eixo \hat{e} e ao vetor CP . Logo tem-se que,

$$CA = \hat{e} \times CP. \quad (3.18)$$

Como \hat{e} é unitário e observando que \hat{e} e CP são perpendiculares, pelo item (iii) da Proposição 1.15 temos que,

$$|\hat{e} \times CP| = |CP| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1.$$

Assim, observando a equação (3.18) tem-se CA é também um vetor unitário.

Sendo o vetor CP' rotacionado, tem-se que CP' tem a mesma norma de CA , pois de acordo com a Figura 3.5b, determinam um círculo de raio unitário no plano α o que nós dá a possibilidade de escrever,

$$CP' = OC + (\cos \theta)CP + (\operatorname{sen} \theta)CA. \quad (3.19)$$

Verificando isoladamente os vetores OC , CP e CA em função de \hat{e} e θ podemos verificar que a componente paralela OC pode ser escrita como projeção de OP sobre \hat{e} de acordo com a equação (1.2) como sendo,

$$OC = \langle \hat{e}, OP \rangle \hat{e}. \quad (3.20)$$

Reescrevendo a equação(3.17), temos que

$$CP = OP - \langle \hat{e}, OP \rangle \hat{e}. \quad (3.21)$$

E ainda se restar alguma dúvida, escrevendo novamente (3.18) temos

$$\begin{aligned} CA &= \hat{e} \times CP = \hat{e} \times (OP - \langle \hat{e}, OP \rangle \hat{e}) \\ &= \hat{e} \times OP - \hat{e} \times \langle \hat{e}, OP \rangle \hat{e} \\ &= \hat{e} \times OP, \end{aligned} \quad (3.22)$$

o que mostra que o vetor paralelo não contribui de certa forma no espaço vetorial.

Substituindo os valores encontrados nas equações (3.20),(3.21) e (3.22) em (3.19) tem-se,

$$CP' = \langle \hat{e}, OP \rangle \hat{e} + (\cos \theta)(OP - \langle \hat{e}, OP \rangle \hat{e}) + (\operatorname{sen} \theta)(\hat{e} \times OP),$$

onde, reorganizando os termos encontramos

$$CP' = (\cos \theta)OP + (1 - \cos \theta)\langle \hat{e}, OP \rangle \hat{e} + (\operatorname{sen} \theta)(\hat{e} \times OP). \quad (3.23)$$

Segundo [3], ao considerarmos uma transformação linear com base na implementação computacional do algoritmo, se faz necessário determinar a matriz da transformação correspondente. Para tanto, podemos calcular cada coluna da matriz como a transformada dos vetores da base canônica. Assim, considerando o vetor OP como o representante dos vetores da base canônica, o eixo $\hat{e} = (a, b, c)$, podemos determinar os elementos da matriz CP' o qual denotaremos por $R_{\hat{e},\theta}$, através do cálculo das colunas da matriz,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix} &= \cos \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta)a \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \text{sen } \theta \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} &= \cos \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta)b \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \text{sen } \theta \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix} &= \cos \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta)c \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \text{sen } \theta \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Realizando os cálculos com todas as colunas de acordo com [15], encontraremos a matriz de transformação R^3 dada por

$$R_{\hat{e},\theta} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

onde cada elemento corresponde aos seguintes elementos obtidos,

$$\begin{pmatrix} a^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & ab(1 - \cos \theta) - c \text{sen } \theta & ac(1 - \cos \theta) + b \text{sen } \theta \\ ab(1 - \cos \theta) + c \text{sen } \theta & b^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & bc(1 - \cos \theta) - a \text{sen } \theta \\ ac(1 - \cos \theta) - b \text{sen } \theta & bc(1 - \cos \theta) + a \text{sen } \theta & c^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

A maneira aqui apresentada para a rotação em torno de um eixo, considera somente o fato do eixo ter origem no centro do sistema ortogonal. Os casos em que o vetor não parte do centro do sistema ortogonal pode ser encontrado em [3].

Considerando rotação dada na matriz (3.26), uma forma de calcular o ângulo da rotação sofrido de acordo com [13], é usar o traço da matriz de rotação. Temos

$$\text{tr}(R) = a^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta + b^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta + c^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta$$

$$= (1 - \cos \theta)(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \cos \theta.$$

Como o eixo \hat{e} é unitário, tem-se que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Assim a equação acima fica reduzida a,

$$\operatorname{tr}(R) = 1 + 2 \cos \theta \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \arccos \left(\frac{\operatorname{tr}(R) - 1}{2} \right). \quad (3.27)$$

Note que a matriz (3.26) possui elementos simétricos em relação a diagonal principal. Logo para determinar as coordenadas do vetor que foi rotacionado, basta usar as seguintes relações nos elementos da matriz, desde que $\theta \neq \pi$.

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} = 2a \operatorname{sen} \theta &\Longleftrightarrow a = \frac{r_{32} - r_{23}}{2 \operatorname{sen} \theta}; \\ r_{31} - r_{13} = 2b \operatorname{sen} \theta &\Longleftrightarrow b = \frac{r_{31} - r_{13}}{2 \operatorname{sen} \theta}; \\ r_{21} - r_{12} = 2c \operatorname{sen} \theta &\Longleftrightarrow c = \frac{r_{21} - r_{12}}{2 \operatorname{sen} \theta}. \end{aligned}$$

Exemplo: Determine o vetor que representa a rotação de $v = (3, 0, 0)$ em um ângulo de 180° em torno do eixo $(1, 1, 0)$.

Solução: Como o eixo de rotação deve ser unitário tem-se que $\hat{u} = \frac{u}{|u|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$. Substituindo esses valores e o ângulo de 180° na matriz de rotação do eixo-ângulo dada na equação (3.26) teremos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fazendo

$$R(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o vetor v rotacionado em torno do eixo unitário u em 180° resulta no vetor $R(v) = (0, 3, 0)$.

A parametrização eixo-ângulo, também conhecida como *mapa exponencial* descreve uma rotação com a utilização de quatro parâmetros: o ângulo e as três componentes do vetor unitário. O tipo de parametrização que veremos a seguir é um caso específico da parametrização do eixo-ângulo.

3.3.2 Ângulos de Euler

Uma das formas mais comuns de se representar uma matriz de rotação é através do uso dos *ângulos de Euler* segundo [3], [18], [21], entre outros. Na literatura, utilizada como referência para rotações no espaço no campo da aeronáutica, por exemplo, as rotações em torno de cada eixo canônico têm até nomes próprios como *roll*, *pitch* e *yaw*. A princípio, a aplicação dos ângulos de Euler consiste na solução mais imediata para o problema de especificar a orientação de uma entidade no espaço tridimensional fornecendo suas rotações com relação aos eixos x , y e z , além de ser uma forma de parametrização bem intuitiva em comparação com outras parametrizações.

Leonard Euler(1707 - 1783) em seu trabalho sobre a mecânica dos corpos celestes afirmou que quaisquer dois sistemas ortogonais de coordenadas independentes podem ser relacionados por uma sequência de rotações (não mais que três) sobre os eixos coordenados de forma que duas rotações sucessivas não aconteçam sobre o mesmo eixo, [18].

Logo, considerando o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, a rotação de um eixo coordenado é chamado de *ângulo de Euler*. De acordo com a afirmação de Euler, as possíveis combinações utilizando três eixos do sistema ortogonal $OXYZ$ são dadas por

$$\begin{array}{cccc} XYX & XZX & XYZ & XZY \\ YXY & YZY & YZX & YXZ \\ ZXZ & ZYZ & ZXY & ZYX. \end{array}$$

Podemos encontrar em [9] vários exemplos em que as sequências acima são apresentadas. Para ficar claro, vamos considerar um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ que parte da origem do sistema ortogonal $OXYZ$. Representando a rotação deste vetor em torno de cada eixo coordenado no sentido horário ou anti-horário, pode-se perceber de acordo com a Figura 3.6, que o movimento gerado pela rotação do vetor u descreve a porção de um cone.

O ângulo de rotação é medido na base do cone e para cada uma das três rotações nos eixos coordenados, a coordenada do eixo adotado para a rotação não se altera, e a relação entre os outros componentes pode ser deduzida como já foi para rotações no plano.

Assim, segundo [15] e [18], as matrizes de rotação que descrevem um ângulo

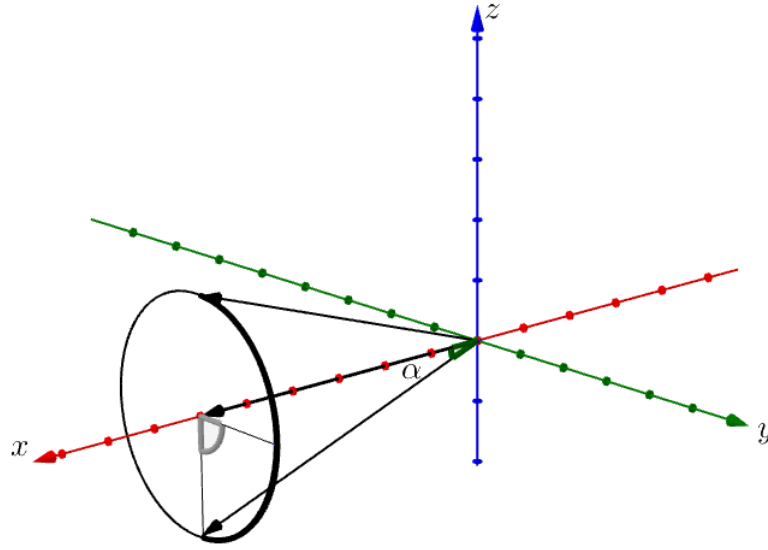


Figura 3.6: Rotação em torno do eixo x .

α , β e γ no sentido anti-horário em cada eixo X , Y e Z , respectivamente, são dadas por

$$R_{x,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; R_{y,\beta} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}; \quad (3.28)$$

$$R_{z,\gamma} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\text{sen } \gamma & 0 \\ \text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para exemplificar, vamos determinar a matriz de transformação utilizando a parametrização via ângulos de Euler com a sequência específica: XYZ . Em cada um desses eixos XYZ , adotaremos respectivamente os ângulos α , β e γ , como mostrado acima.

Logo, através da multiplicação das matrizes dadas em (3.28) na sequência XYZ de acordo com cada ângulo especificado, podemos obter a matriz de transformação, veja,

$$R_{\gamma,\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\text{sen } \gamma & 0 \\ \text{sen } \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizando a multiplicação das matrizes obtemos,

$$R_{\gamma,\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \text{sen } \gamma & \text{sen } \beta \\ \text{sen } \alpha \text{sen } \beta \cos \gamma + \cos \alpha \text{sen } \gamma & -\text{sen } \alpha \text{sen } \beta \text{sen } \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\text{sen } \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \text{sen } \beta \cos \gamma + \text{sen } \alpha \text{sen } \gamma & \cos \alpha \text{sen } \beta \text{sen } \gamma + \text{sen } \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Lembrando que, como o produto entre matrizes não é comutativo, a composição das rotações dadas pela sequência XYZ será diferente por exemplo, da composição ZYX . A composição de rotações acima pode ser encontrada em [3], as demais composições de rotações estão contidas em [9].

Vejamos um exemplo da rotação com os ângulos de Euler.

Exemplo. Vamos determinar a rotação na sequência XYZ , o qual a matriz de rotação é dada na equação (3.29), do vetor $v = (0, 0, 1)$, sendo inicialmente uma rotação de 30° no eixo x , seguida de uma rotação em y de 45° , finalizando com uma rotação de 60° no eixo z .

Solução: De acordo com os ângulos dados teremos a seguinte matriz de rotação:

$$R_{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ}(v) = \begin{pmatrix} c45^\circ c60^\circ & c45^\circ s60^\circ & s45^\circ \\ s30^\circ s45^\circ c60^\circ + c30^\circ s60^\circ & -s30^\circ s45^\circ s60^\circ + c30^\circ c60^\circ & -s30^\circ c45^\circ \\ -c30^\circ s45^\circ c60^\circ + s30^\circ s60^\circ & c30^\circ s45^\circ s60^\circ + s30^\circ c60^\circ & c30^\circ c45^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$R_{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ}(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}+3}{4\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Podemos ainda realizar o caminho inverso, ou seja, de acordo com uma sequência dada, determinar os valores dos ângulos α , β e γ que produzirão a matriz R de rotação.

Considere a aplicação

$$A : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \longrightarrow SO(3). \\ (\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto A(\alpha, \beta, \gamma) = R_{\gamma\beta, \alpha}.$$

Esta aplicação é sobrejetiva, pois considerando uma matriz $R \in SO(3)$ arbitrária,

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

segundo [18], podemos determinar os valores dos ângulos α , β e γ da sequência XYZ que produzirão a matriz de rotação R .

Para isso, vamos considerar valores para β no intervalo $[0, \pi]$ de acordo com o domínio da aplicação o que implica que r_{13} esteja no intervalo $[-1, 1]$ de acordo com a matriz obtida em (3.29).

-1º caso

- Se $r_{13} = 1$ tem-se que $\sin \beta = 1 \iff \beta = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, substituindo o ângulo encontrado nas outras equações dos respectivos elementos da matriz de rotação os quais não serão anulados, temos

$$\begin{aligned} r_{22} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma = \cos (\alpha + \gamma); \\ r_{21} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma = \sin (\alpha + \gamma). \end{aligned}$$

Dividindo r_{21} por r_{22} temos,

$$\frac{r_{21}}{r_{22}} = \frac{\sin (\alpha + \gamma)}{\cos (\alpha + \gamma)} = \operatorname{tg} (\alpha + \gamma) \iff \alpha + \gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{r_{21}}{r_{22}} \right).$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} r_{31} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma = -\cos (\alpha + \gamma) \\ r_{32} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma = \sin (\alpha + \gamma). \end{aligned}$$

Dividindo r_{32} por r_{31} temos,

$$\frac{r_{32}}{r_{31}} = \frac{\sin (\alpha + \gamma)}{-\cos (\alpha + \gamma)} = -\operatorname{tg} (\alpha + \gamma) \iff \alpha + \gamma = \operatorname{arctg} \left(-\frac{r_{32}}{r_{31}} \right).$$

-2º caso

-Para $r_{13} = -1$ teremos $\sin \beta = -1 \iff \beta = \frac{3\pi}{2}$. Substituindo nas outras equações da matriz e procedendo da mesma maneira que no caso anterior obtemos,

$$\frac{r_{32}}{r_{22}} = \frac{\sin (\alpha - \gamma)}{\cos (\alpha - \gamma)} = \operatorname{tg} (\alpha - \gamma) \iff \alpha - \gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{r_{32}}{r_{22}} \right),$$

e também,

$$\frac{r_{21}}{r_{31}} = \frac{-\sin (\alpha - \gamma)}{\cos (\alpha - \gamma)} = -\operatorname{tg} (\alpha - \gamma) \iff \alpha - \gamma = \operatorname{arctg} \left(-\frac{r_{21}}{r_{31}} \right).$$

-3º caso

-Para $r_{13} \neq \pm 1$, teremos $\sin \beta \neq \pm 1 \iff \beta = \operatorname{arcsen} (r_{13}) \in (0, \pi)$. Fazendo a divisão dos elementos r_{11} e r_{12} da matriz de rotação tem-se que,

$$\frac{r_{12}}{r_{11}} = \frac{-\sin \gamma}{\cos \gamma} = -\operatorname{tg} \gamma \iff \gamma = \operatorname{arctg} \left(-\frac{r_{12}}{r_{11}} \right)$$

e também, dividindo r_{23} por r_{33} temos,

$$\frac{r_{23}}{r_{33}} = \frac{-\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \iff \alpha = \operatorname{arctg} \left(-\frac{r_{23}}{r_{33}} \right).$$

Portanto, resumindo o 3º caso, se $r_{13} \neq \pm 1$ temos

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{r_{23}}{r_{33}} \right); \\ \beta &= \operatorname{arcsen} (r_{13}) \in (0, \pi); \\ \gamma &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{r_{12}}{r_{11}} \right). \end{aligned}$$

Note que, nos resultados do 1º caso os valores para α e γ não estão univocamente determinados. Ou seja,

$$\alpha + \gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{r_{21}}{r_{22}} \right) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{r_{32}}{r_{31}} \right).$$

Logo, teremos infinitos valores para α e γ que satisfazem ambos os casos. Isto mostra que a aplicação não é injetiva. Por isso, de acordo com [18], precisamos restringir o intervalo, para que a aplicação seja bijetora e conseqüentemente, seja considerada uma parametrização contida em $SO(3)$.

Posteriormente veremos que mesmo a utilização da parametrização via ângulos de Euler ser muito comum nas aplicações práticas, ele não consiste em um método eficaz.

3.3.3 Quatérnios

Para descrever rotações no plano vimos anteriormente que basta associar um número complexo de norma unitária a uma matriz de rotação em $SO(2)$. De forma análoga, no espaço também podemos associar um número quatérnio e um elemento de $SO(3)$.

Para tanto, considere um quatérnio unitário como já explicitado anteriormente, ou seja, $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$. Sendo $q \in S^3$, é possível construir um operador de rotação com q de maneira que seu efeito sobre um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^3$, seja rotacioná-lo uma porção $\theta \in \mathbb{R}$ em torno de um eixo especificado [13].

Note que, as ideias aqui apresentadas são praticamente as mesmas apresentadas na parametrização através do eixo-ângulo.

Para que um número quatérnio possa operar sobre um vetor $v \in \mathbb{R}^3$, já considerado anteriormente como um quatérnio puro e denotado por $p = 0 + v$, devemos considerar a correspondência entre \mathbb{R}^3 e \mathbb{H}_0 e a multiplicação de números quatérnios, definindo o operador de rotação da seguinte maneira:

Definição 3.7. Dado $q \in S^3$, o operador de rotação R_q é construído a partir de v definido por

$$R_q : \mathbb{H}_0 \longrightarrow \mathbb{H}_0$$

$$v \longmapsto w = qv\bar{q},$$

onde, \bar{q} é o conjugado de q .

Utilizando a multiplicação de quatérnios dada em (2.6) e $q = q_0 + u = (q_0, u)$ e $w = 0 + w = (0, w)$, de acordo com a definição de R_q temos

$$\begin{aligned} w &= (q_0 + u) v (q_0 - u) \\ &= (-\langle u, v \rangle + q_0 v + u \times v)(q_0 - u) \\ &= -q_0 \langle u, v \rangle + \langle q_0 v + u \times v, u \rangle + \langle u, v \rangle u + q_0(q_0 v + u \times v) + (q_0 v + u \times v) \times -u \\ &= -q_0 \langle u, v \rangle + q_0 \langle u, v \rangle + \langle u \times v, u \rangle + \langle u, v \rangle u + q_0^2 v + q_0 u \times v + q_0 v \times -u + u \times (u \times v) \\ &= \langle u, v \rangle u + q_0^2 v + q_0 u \times v + q_0 u \times v + \langle u, v \rangle u - \langle u, u \rangle v \\ &= (q_0^2 - |u|^2)v + 2\langle u, v \rangle u + 2q_0(u \times v). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Note que, nesta multiplicação esta evidente que o resultado obtido será somente um vetor, ou seja, um quatérnio puro. Também podemos encontrar segundo [9], w através de operações matriciais com os vetores $u = (q_1, q_2, q_3)$ e $v = (x, y, z)$ dividindo os cálculos da equação 3.31 de acordo com o número de termos

1º termo:

$$(q_0^2 - |u|^2)v = (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2º termo

$$2\langle u, v \rangle u = 2(q_1 x + q_2 y + q_3 z) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_1 q_2 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_1 q_3 & q_2 q_3 & q_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3º termo

$$\begin{aligned} 2q_0(u \times v) &= 2q_0 \begin{pmatrix} i & j & k \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 2q_0 [(-q_3 y + q_2 z)i + (q_3 x - q_1 z)j + (-q_2 x + q_1 y)k] \\ &= 2q_0 \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somando os três termos, simplificando os resultados e separando os termos do vetor v , encontramos, segundo [13] a transformação linear

$$w = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_2) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

o qual ainda pode ser escrito, de acordo com a definição de transformação linear como $w = R_q(v)$.

Aparentemente os cálculos envolvendo quatérnios parecem ser mais complicados, no entanto, de acordo com [3], as rotações, em sistemas gráficos do tipo do *OpenGLTM*, normalmente especificadas por matrizes, exigem um pouco de trabalho apenas na primeira implementação.

Considerando [22], página 114, podemos mostrar que R_q é um operador linear que preserva a norma euclidiana de vetores no espaço.

Proposição 3.1. R_q é um operador linear e preserva a norma de vetores.

Demonstração. Considere $u, v \in \mathbb{R}^3$ arbitrários, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pela distributividade apresentada na Proposição 3.1, temos

$$\begin{aligned} R_q(\lambda u + v) &= q(\lambda u + v)\bar{q} \\ &= (\lambda qu + qv)\bar{q} \\ &= \lambda qu\bar{q} + qv\bar{q} \\ &= \lambda R_q(u) + R_q(v). \end{aligned}$$

Com relação a norma euclidiana, usando a Proposição 2.13 item (vi), tem-se que $|q| = |\bar{q}| = 1$, logo

$$\begin{aligned} |R_q(v)| &= |qv\bar{q}| \\ &= |q| |v| |\bar{q}| \\ &= |v|. \end{aligned}$$

□

Logo, R_q é um operador linear e também preserva a norma. Além disso, R_q atua geometricamente sobre o vetor v de acordo com o próximo teorema, segundo [18].

Teorema 3.1. Dado $q = q_0 + u \in S^3$, tal que

$$q = q_0 + u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u},$$

com $u \neq 0$, a parte vetorial w de $R_q(v) = qv\bar{q} = 0 + w$ é a rotação de v de um ângulo θ em torno do eixo gerado por u , onde $\theta = 2 \arccos(q_0) \in (0, \pi)$.

Demonstração. Sejam V o subespaço gerado pelo vetor u , V^\perp o complemento ortogonal de V e $v \in \mathbb{R}^3$. Vamos dividir v em duas componentes ortogonais, sendo o vetor a na direção de u , ou seja, $a = \lambda u$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, e o vetor b perpendicular ao vetor u . Logo v pode ser escrito como

$$v = a + b = \lambda u + b, \text{ onde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Agora, considerando $v \in \mathbb{R}^3$, ou seja, um quatérnio puro, podemos escrevê-lo como a soma de dois quatérnios puros,

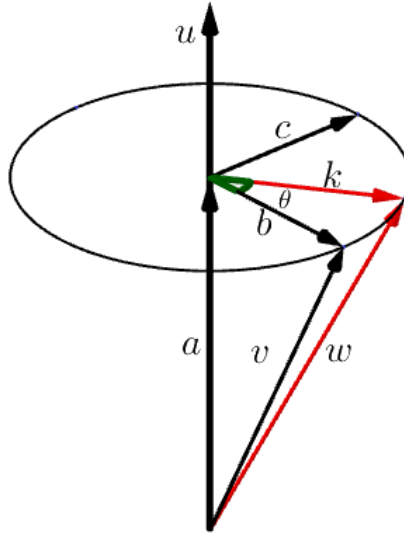


Figura 3.7: Ação do operador R sobre o vetor v .

$$v = a + b = v_a + v_b.$$

Como R_q é um operador linear temos que

$$R_q(v) = R_q(v_a) + R_q(v_b).$$

Por outro lado, o subespaço V gerado pelo vetor u não sofre alterações pelo operador R_q , ou seja, $R_q(\lambda u) = \lambda u$ é invariante sob o operador R_q . Assim, podemos escrever

$$R_q(v) = v_a + k = a + k.$$

Considerando a parte vetorial de $R_q(v_b)$ e que q é unitário temos

$$\begin{aligned} k &= qb\bar{q} \\ &= (q_0^2 - |u|^2)b + 2u\langle u, b \rangle + 2q_0(u \times b). \end{aligned}$$

Como $b \perp u$, então $\langle u, b \rangle = 0$. Logo, a equação acima fica reduzida a,

$$k = (q_0^2 - |u|^2)b + 2q_0(u \times b). \quad (3.33)$$

Sendo $\hat{u} = \frac{u}{|u|}$ (vetor unitário) com a mesma direção do vetor u , podemos escrever a equação (3.33) como,

$$\begin{aligned} k &= (q_0^2 - |u|^2)b + 2q_0(\hat{u}|u| \times b) \\ &= (q_0^2 - |u|^2)b + 2q_0|u|(\hat{u} \times b). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Como $|q|^2 = q_0^2 + |u|^2 = 1$, usando a identidade trigonométrica fundamental e o fato de que existe um único $\theta \in (0, \pi)$ tal que,

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{e} \quad |u| = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

e, estabelecendo que $c = \hat{u} \times b$, podemos escrever a equação (3.34) como

$$\begin{aligned} k &= \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) b + 2 \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) c \\ &= \cos(\theta)b + \text{sen}(\theta)c \\ &= b \cos \theta + c \text{sen} \theta. \end{aligned}$$

Lembrando que da interpretação geométrica do produto vetorial, temos

$$|c| = |\hat{u} \times b| = |\hat{u}| |b| \text{sen} \frac{\pi}{2} = |b|.$$

Conclui-se que k é a rotação de um ângulo θ do vetor b em torno do eixo gerado por \hat{u} , dado na Figura 3.7. Considerando um quatérnio puro cuja parte vetorial é dada por v , percebe-se que ao rotacioná-lo no sentido anti-horário em torno do eixo \hat{u} , obtemos $R_q(v) = 0 + (a + k)$ dado por w , onde podemos observar que o vetor a componente da decomposição ortogonal de v ao longo de u , não se altera, enquanto que a projeção do vetor v no plano perpendicular a u sofre uma rotação de θ em torno do eixo \hat{u} . \square

Escrevendo o vetor rotacionado $w = a + k$, em notação matricial temos

$$w = R_q(v),$$

onde $R_q \in SO(3)$ é construído com as componentes do quatérnio q dado por

$$R_q = \begin{pmatrix} 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Note que esta matriz já nos foi apresentada na equação (3.32), porém, agora com a adaptação $|q| = 1$ em todos elementos.

Desta forma, podemos estabelecer uma correspondência entre o conjunto dos quatérnios unitários e o conjunto $SO(3)$ através da aplicação

$$\begin{aligned}\alpha : S^3 &\longrightarrow SO(3) \\ v &\longmapsto R_q(v).\end{aligned}$$

Como $\theta \in (0, \pi)$, o ângulo de rotação satisfaz a condição $0 < 2\theta < 2\pi$. Considerando que um ângulo α em torno de u é equivalente a uma rotação de $2\pi - \alpha$ em torno de $-u$, basta lembrar dos dois tipos de rotação que apresentamos em rotações no plano, podendo cada rotação ser representada por dois quatérnios unitários. Logo, a aplicação não é injetiva, ou seja, cada elemento de $SO(3)$ é a imagem de dois elementos de S^3 . No entanto, diferentemente do que acontece com os ângulos de Euler que não estão univocamente determinandos quando $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, a rotação com os quatérnios determinada pela matriz em $SO(3)$ é a imagem por α de dois elementos que são considerados isolados.

De forma sintetizada, quando se quer determinar a posição de um ponto p numa rotação anti-horária em torno de um eixo definido por u basta seguir os seguintes passos:

- Represente v pelo quatérnio $p = (0, v)$;
- Represente a rotação desejada pelo quatérnio $q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{u}$;
- Efetue a operação $R_q(p) = qp\bar{q}$;
- A parte real do resultado será zero e a parte vetorial conterà o resultado da rotação.

Exemplo: Calcule o vetor resultante de uma rotação de 90° do vetor $v = (1, 2, 3)$ em torno do eixo $u = (0, 1, 2)$.

Solução: Temos que, $v = i + 2j + 3k$, $u = j + 2k$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Considerando que $|u| = \sqrt{5}$, obtem-se

$$\begin{aligned}q &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{5}}(j + 2k)\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{5}}{5}(j + 2k)\right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{10}j + \frac{\sqrt{10}}{5}k.\end{aligned}$$

Vamos determinar a rotação R ,

$$\begin{aligned}R_q(v) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{10}j + \frac{\sqrt{10}}{5}k\right)(i + 2j + 3k)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{10}j - \frac{\sqrt{10}}{5}k\right) \\ &= \left(-\frac{4\sqrt{10}}{5} + \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{10}}{10}i + \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{10}}{5}j + \frac{15\sqrt{2} - \sqrt{10}}{10}k\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{10}j - \frac{\sqrt{10}}{5}k\right)\end{aligned}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{5}i + \frac{2\sqrt{5} + 8}{5}j + \frac{16 - \sqrt{5}}{5}k.$$

$$\text{Logo } R_q(v) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5} + 8}{5}, \frac{16 - \sqrt{5}}{5} \right).$$

Capítulo 4

Conversão e Comparação de Parametrizações

Neste capítulo, nos dedicaremos a determinar como um tipo de parametrização pode ser convertido em outro, eliminando assim, possíveis problemas de singularidades em determinados pontos no espaço. Também abordaremos a questão da análise da eficiência computacional na escolha de um tipo de parametrização em detrimento de outro, o qual esta relacionado ao número de operações na execução de um algoritmo bem como a complexidade de alguns cálculos do ponto de vista computacional. E ainda, especificidades de cada parametrização.

4.1 Eixo-Ângulo \Leftrightarrow Ângulos de Euler

Como colocado anteriormente, a parametrização eixo-ângulo requer a utilização de quatro parâmetros: o ângulo θ e o eixo unitário $\hat{e} = (a, b, c)$. Como comentado, a parametrização via ângulos de Euler é um caso particular da parametrização eixo-ângulo. Dessa forma, para determinar os ângulos de Euler a partir da parametrização eixo-ângulo segundo [18] e [13], basta igualarmos as matrizes dadas em (3.26) e (3.29) que na ocasião utilizou a sequência de rotações XYZ .

$$\begin{aligned} R_{\hat{e},\theta} &= \begin{pmatrix} a^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & ab(1 - \cos \theta) - c \sin \theta & ac(1 - \cos \theta) + b \sin \theta \\ ab(1 - \cos \theta) + c \sin \theta & b^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta & bc(1 - \cos \theta) - a \sin \theta \\ ac(1 - \cos \theta) - b \sin \theta & bc(1 - \cos \theta) + a \sin \theta & c^2(1 - \cos \theta) + \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= R_{\gamma, \beta, \alpha}.$$

Como os elementos da matriz de rotação do sistema eixo-ângulo serão dados, seria interessante iniciar a partir do elemento r_{13} , determinando a medida do ângulo β e os demais ângulos α e γ na sequência.

Para determinar o vetor \hat{e} e o ângulo θ a partir dos três ângulos de Euler de acordo com [13] e [21], é necessário considerar inicialmente o traço da matriz associada aos ângulos de Euler para determinar a medida do ângulo θ dado por,

$$\theta = \arccos \left(\frac{\text{tr}_{\gamma, \beta, \alpha}(R) - 1}{2} \right),$$

e posteriormente utilizar este resultado e os termos da matriz de Euler para determinar o eixo $\hat{e} = (a, b, c)$ dadas pelas equações

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= 2a \text{sen } \theta \iff a = \frac{r_{32} - r_{23}}{2 \text{sen } \theta} \\ r_{31} - r_{13} &= 2b \text{sen } \theta \iff b = \frac{r_{31} - r_{13}}{2 \text{sen } \theta} \\ r_{21} - r_{12} &= 2c \text{sen } \theta \iff c = \frac{r_{21} - r_{12}}{2 \text{sen } \theta}. \end{aligned}$$

4.2 Ângulos de Euler \iff Quatérnios

Com já apresentado anteriormente, existem 12 possibilidades para a composição de rotações simples nos três eixos do sistema ortogonal, conforme [18] e [3]. Vamos considerar a sequência XYZ já utilizada anteriormente para exemplificação. Primeiramente a rotação ocorrerá no eixo x em um ângulo α , seguida da rotação em y em um ângulo β e finalizando com uma rotação no eixo z em um ângulo γ . Os três ângulos irão determinar a nova orientação no espaço de acordo com a matriz de rotação dada anteriormente em 3.29.

Considerando as rotações no espaço com a utilização da parametrização via quatérnios unitários, podemos entender que cada rotação em um determinado eixo corresponde a uma rotação simples com um número quatérnio, segundo [18]. Assim as três rotações nos eixos x , y e z correspondem às seguintes rotações com números quatérnios

$$R_{x, \alpha} = \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) e_1$$

$$R_{y, \beta} = \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\beta}{2} \right) e_2$$

$$R_{z, \gamma} = \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\gamma}{2} \right) e_3,$$

onde os vetores e_1 , e_2 e e_3 , representam respectivamente, os vetores da base canônica associados a cada eixo.

Utilizando as regras da multiplicação definidas em \mathbb{H} , podemos construir o quatérnio de rotação R que representará a rotação da sequência XYZ de acordo com os ângulos de Euler, dada por

$$R_{\alpha,\beta,\gamma} = R_{x,\alpha}R_{y,\beta}R_{z,\gamma} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k,$$

onde após a multiplicação e a utilização das identidades i , j e k temos os resultados de cada termo do quatérnio $R_{\alpha,\beta,\gamma}$,

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}, \\ q_1 &= \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ q_2 &= \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

e

$$q_3 = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Para executar o caminho inverso, obter os ângulos de Euler a partir de um número quatérnio $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, basta utilizar a forma matricial de rotação de um número quatérnio, dada na equação (3.32), e a sequência de rotações o qual foi utilizada no caso dos ângulos de Euler.

Assim, considerando a sequência XYZ já utilizada anteriormente e as respectivas fórmulas já apresentadas, podemos substituir os elementos da matriz de rotação nas equações abaixo. Lembremos do caso em que, $\operatorname{sen} \beta \neq \pm 1 \iff \beta = \operatorname{arcsen}(r_{13}) \in (0, \pi)$. Logo

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{r_{23}}{r_{33}} \right), \\ \beta &= \operatorname{arcsen}(r_{13}) \in (0, \pi) \end{aligned}$$

e

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left(-\frac{r_{12}}{r_{11}} \right).$$

4.3 Eixo-Ângulo \iff Quatérnios

Para determinar o quatérnio unitário q a partir de um eixo de rotação determinado pelo vetor unitário $\hat{e} = (a, b, c)$ numa rotação θ em torno deste eixo, basta considerar

o que foi exposto no Teorema 3.1, ou seja,

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{e}.$$

Reciprocamente, para extrair o ângulo de rotação e o eixo-ângulo de um número quaternio unitário $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \hat{e}$, tal que $|q_0| < 1$, e considerando que, $|q_0|^2 + |\hat{e}|^2 = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, basta considerar

$$\theta = 2 \arccos(q_0)$$

e

$$\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{1 - q_0^2}}(q_1, q_2, q_3).$$

Uma maneira interessante de encontrar um quaternio q , de acordo com [21], é verificar a relação da matriz de rotação associada a parametrização eixo-ângulo ao número quaternio. Para obter q_0 , basta lembrar da equação (3.27) e reescrever como $\cos\theta = \frac{\text{tr}(R_{\hat{e},\theta}) - 1}{2}$.

Tomando a identidade trigonométrica $2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 + \cos\theta$, e lembrando que $|q_0|^2 = \cos^2\theta$ tem-se,

$$2q_0^2 = 1 + \cos\theta \iff q_0 = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} \iff q_0 = \frac{\sqrt{\text{tr}(R_{\hat{e}}) + 1}}{2}. \quad (4.1)$$

Para encontrar os demais componentes do quaternio, utilizamos o que foi exposto nas equações em (3.25) e relacionamos com a matriz de rotação dos números quaternios segundo [13],

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= 2a \text{sen}\theta = 4q_0q_1 \iff q_1 = \frac{1}{4q_0}(r_{32} - r_{23}), \\ r_{31} - r_{13} &= 2b \text{sen}\theta = 4q_0q_2 \iff q_2 = \frac{1}{4q_0}(r_{31} - r_{13}) \end{aligned}$$

e

$$r_{21} - r_{12} = 2c \text{sen}\theta = 4q_0q_3 \iff q_3 = \frac{1}{4q_0}(r_{21} - r_{12}). \quad (4.2)$$

4.4 Eficiência Computacional

Depois de expostas as diferentes formas de parametrização de uma rotação, se faz necessário definir qual é a mais vantajosa. Vamos considerar inicialmente as vantagens e desvantagens de cada parametrização quando se trata do custo computacional.

Segundo [19] e [15], em geral, a análise do custo computacional é feita de duas formas: em termos de tempo e de espaço ocupado.

Se tratando do uso da memória, precisamos determinar o espaço que está sendo utilizado na memória do computador para armazenar os dados, sejam estes dados, matrizes, vetores ou escalares, ou ainda informação em relação à hierarquia das memórias acessadas (registros, cache, memória principal, armazenamento em disco) de acordo com [19], em cada situação. Neste caso, é importante ressaltar que algumas operações matemáticas utilizam mais espaço na memória do que outras, como é o caso das funções trigonométricas.

Com relação ao tempo despendido, é conhecido que vários fatores interferem no processamento, como memória, taxa de transferência de dados, além de outros fatores. Neste trabalho consideraremos apenas os fatores comuns a todos os processadores, entre eles, o FLOPS (Floating-point Operations Per Second) muito conhecido na literatura da informática e utilizado como uma medida de velocidade do processador o qual representa o número de operações ponto-flutuantes por segundo, ver [15]. Uma maneira de verificar a eficiência computacional é determinar o número de FLOP na execução de determinada tarefa em um período de tempo. Sendo assim, o número total de FLOP necessários para resolver um problema é que irá definir o custo computacional da solução.

É importante ressaltar que os fatores espaço e tempo estão relacionados, pois, uma leva à outra já que a habilidade de um algoritmo acessar uma memória influencia diretamente no tempo de execução do algoritmo, [19].

Se tratando de operações matemáticas, podemos encontrar em [15] exemplos do número de FLOP utilizados em uma operação matemática, como por exemplo, a resolução de sistemas lineares.

No entanto, não vamos nos deter a muitos detalhes, mas segundo [1], a quantidade de FLOP em cada operação matemática pode ser listada de acordo com Tabela 4.1 o qual nós dá uma ideia sobre quais operações exigem um esforço computacional maior.

Operação matemática	Nº de FLOP
adição, subtração e multiplicação	1
raiz quadrada e divisão	4
exponencial, seno e cosseno	8
comparações	1

Tabela 4.1: Número de FLOP.

4.4.1 Características Operacionais de cada Parametrização

Quando tratamos de parametrizações envolvendo composições e interpolações entre rotações as quais não foram abordadas neste trabalho, a quantidade de operações matemáticas aumentam significativamente em cada caso, ver [13]. Considerando, a matriz de rotação R , o quaténio sendo q , e o par eixo-ângulo como (\hat{e}, θ) , vamos comparar as parametrizações, incluindo multiplicação (M), adição ou subtração (A), divisão (D), raiz quadrada (R) e avaliações de funções trigonométricas (F) que de acordo com a Tabela 4.1 são consideradas mais caras computacionalmente. Além das comparações (C), que também podem ser tornar caras se comparadas a multiplicações e/ou adições, devido ao grande número de possibilidades que podem ser fornecidas de acordo com a medida do ângulo utilizado em questão.

Uma matriz de rotação requer 9 parâmetros, um quaténio requer 4 parâmetros e a rotação através do eixo-ângulo requer 4 parâmetros, então claramente a matriz de rotação usará mais memória a princípio. Mas ao considerar a parametrização através do sistema eixo-ângulo, armazenando apenas o ângulo rotação nota-se que a transformação também não é indicada pois necessitamos dos valores de $\sin \theta$ e $(1 - \cos \theta)$. Logo, a implementação da parametrização eixo-ângulo inclui 3 parâmetros para o eixo, um valor para o ângulo θ e 2 valores, um $\sin \theta$ e outro para $(1 - \cos \theta)$ e como colocado por [21], as funções trigonométricas são bastante caras, é melhor calculá-las previamente e armazenar as quantidades para posteriormente utiliza-las. Logo, o sistema eixo-ângulo exigirá 6 parâmetros, tornando assim, a representação de quaténio a mais barata em uso de memória. A Tabela 4.2 é um resumo do uso de memória em cada situação.

Parametrização	Dimensão	Comentários
Matriz de rotação	9	
Ângulos de Euler	3	sem armazenar o $\sin \theta$ e o $\cos \theta$
Eixo-ângulo	4	sem armazenar $\sin \theta$ e $1 - \cos \theta$
Eixo-ângulo	6	com o armazenamento de $\sin \theta$ e $1 - \cos \theta$
Quaténio	4	

Tabela 4.2: Comparação de memória utilizada

Fonte: [21]

Nas aplicações que envolvem rotações no espaço inevitavelmente constuma-se converter uma parametrização em outra [13]. Por essa razão, é importante que saibamos o custo computacional de uma conversão. Para tal, considere o ângulo $\theta \in (0, \pi)$ e cada caso particular de conversão a seguir.

Eixo-Ângulo para Matriz

A implementação de $\sin \theta$ e $\cos \theta$ requer a inclusão de duas funções. O termo $(1 - \cos \theta)$ necessita de uma adição. Considerando que a matriz R de rotação também é anti-simétrica, serão necessárias seis multiplicações e três adições, uma vez que os termos se repetem. O termo $(1 - \cos \theta)$ requer seis multiplicações e o termo $\hat{e} \sin \theta$ requer três multiplicações. Finalmente, para as equações dadas em (3.26) serão necessárias nove adições, sendo um custo total de $13A + 15M + 2F$.

Matriz para Eixo-Ângulo

Para converter uma parametrização via ângulos de Euler em um sistema eixo-ângulo, primeiramente a obtenção de θ em $\theta = \arccos\left(\frac{\text{tr}(R_{\hat{e},\theta}) - 1}{2}\right)$, requer três adições, uma multiplicação e uma função trigonométrica. Para obter o eixo de rotação \hat{e} através das equações dadas em (3.30), são necessárias três adições. A normalização do vetor requer seis multiplicações, duas adições e uma divisão e uma função trigonométrica. Portanto, o custo total é de $8A + 7M + 1D + 2F$.

Quatérnios para Eixo-Ângulo

Para extrair o ângulo θ fazendo $\theta = 2 \arccos(q_0)$ precisamos de uma função trigonométrica e uma multiplicação. Para determinar as coordenadas do eixo \hat{e} , fazendo $\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{1 - q_0^2}}(q_1, q_2, q_3)$ precisamos executar quatro multiplicações, uma adição, uma divisão e o cálculo de uma raiz quadrada, tendo um custo total de $1A + 5M + 1D + F + R$.

Eixo-Ângulo para Quatérnios

Para determinar o valor de q_0 , usamos o ângulo de rotação dado por $\theta = 2 \arccos(q_0)$ que exigirá uma multiplicação e uma função trigonométrica. Para determinar os valores de q_1 , q_2 e q_3 , dados por $\hat{e} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ serão necessárias, três multiplicações, uma divisão e uma função trigonométrica. Logo, o custo será dado por $4M + 1D + 2F$.

Quatérnio para Matriz

Para determinar o número de operações realizadas é necessário observar a passagem da equação (3.31) para a matriz dada em (3.32) e considerar o fato de que

a obtenção dos elementos da matriz, acima e abaixo da diagonal principal, utiliza os mesmos elementos porém com operações inversas, constatando-se, doze multiplicações e doze adições, sendo o custo total dado por $12A + 12M$.

Matriz para Quatérnio

Considerando a conversão de matriz para quatérnio, será necessária uma avaliação do valor associado ao traço da matriz R de rotação. Lembrando que calcular o traço dado na equação (3.27) por $tr(R) = 1 + 2\cos\theta$, requer uma adição e uma multiplicação. Suponha $tr(R) > 0$, neste caso, estamos utilizando uma comparação. Para calcular q_0 usamos $q_0 = \frac{\sqrt{tr(R) + 1}}{2}$, o qual requer uma adição, uma multiplicação uma raiz quadrada. Para calcular os demais termos do quatérnio dados nas equações (4.2) são necessárias, uma divisão, três adições e quatro multiplicações, totalizando um custo total de $5A + 6M + 1D + 1R + 1C$.

Agora se $tr(R) \leq 0$, o que requer uma comparação, devemos considerar termo a termo da diagonal principal. Considere o elemento r_{11} o maior elemento da diagonal principal, segundo [13], devemos comparar os elementos r_{22} e r_{33} , ou seja, além das operações citadas anteriormente quando $tr(R) > 0$, teremos também duas comparações a mais.

Organizando todas operações de acordo com a parametrização e as conversões entre parametrizações abordadas, podemos organizar os dados de acordo com a tabela abaixo, segundo [21] e [13].

Conversão	A	M	D	F	C	R
Eixo-ângulo para matriz	13	15		2		
Matriz para eixo-ângulo	8	7	1	1		1
Eixo-ângulo para quatérnio		4	1	2		
Quatérnio para eixo-ângulo	1	5	1	1		
Quatérnio para matriz	12	12				
Matriz para quatérnio ($tr(R) > 0$)	5	5	1	1	1	1
Matriz para quatérnio ($tr(R) \leq 0$)	5	6	1	1	3	1

Tabela 4.3: Conversões entre parametrizações.

Fonte: [21]

É importante frisar que nas situações abordadas consideramos em sua maioria rotações simples, com exceção da parametrização dos ângulos de Euler. Assim, ao

considerar composições, interpolações de rotações e também as translações associadas às rotações, os valores apresentados na Tabela 4.3 aumentam consideravelmente. Os leitores interessados em verificar alguns resultados associados a essas situações poderão consultar [19].

4.5 Especificidades de cada Parametrização

As parametrizações apresentadas aparentemente são semelhantes, o que as diferem são as características particulares quando tratamos principalmente de interpolações e composições de rotações.

A parametrização através dos ângulos de Euler embora muito conhecida e empregada em situações práticas por ser uma parametrização bastante intuitiva, apresenta alguns problemas do ponto de vista prático, [3]. Um deles muito conhecido da literatura das rotações é o *Gimbal lock*, o qual acontece muito na aviação com o giroscópio dos aviões [17]. De forma prática, o Gimbal acontece quando é escolhida uma sequência de rotações e há uma situação de alinhamento de dois eixos, em torno dos quais estão sendo realizadas as rotações. Com isto, pode ser que nem todo o espaço das rotações possíveis poderá ser contemplado numa próxima sequência de rotações. Anteriormente quando consideramos a sequência XYZ , obtivemos dois casos ($r_{13} = 1$ e $r_{13} = -1$) em que os ângulos α e β em cada caso não estavam univocamente determinados, sendo possível rotacionar um objeto de maneiras diferentes e obter uma mesma posição final. Em [3] e [13] podemos encontrar vários experimentos em que isso acontece, um caso bem específico é a rotação na sequência XYZ dada por $R_{x,30^\circ}$, $R_{y,60^\circ}$ e $R_{z,90^\circ}$ e a sequência XY dada por $R_{x,-60^\circ}$ e $R_{y,90^\circ}$ ambas produzem a mesma rotação. Aparentemente este problema parece ser simples, mas não, um incidente muito famoso no campo da aviação aconteceu com a nave apollo 11, [13].

A segunda dificuldade importante apresentada pela representação através de ângulos de Euler surge quando desejamos interpolar entre duas orientações, isto é, produzir uma sequência de orientações intermediárias entre duas orientações dadas. Segundo [3], a interpolação usando os ângulos de Euler provocará movimentos estranhos e imprevisíveis.

Já a parametrização através do sistema eixo-ângulo embora sendo mais confiável, também apresenta muitas dificuldades, maior delas é do ponto de vista computacional. Considerando duas rotações seguidas, ou ainda, uma composição de rotações, o procedimento consiste em calcular a matriz dada na equação (3.26) para cada uma das duas rotações, e multiplicar as matrizes dos resultados obtidos. Seriam várias multiplicações, além da utilização de várias funções trigonométricas.

Considerando as rotações com os números quatérnios unitários, segundo [3], a

interpolação entre dois pontos é suave e permite descrever os movimentos com precisão. Um exemplo claro é a programação de games com a utilização do *Unity*, disponível em [24].

Com relação a composição de movimentos com quatérnios considerando dois movimentos o primeiro em torno do quatérnio s dado por $L(u) = su\bar{s}$, sendo $u \in \mathbb{R}^3$ e o segundo em torno de q dado por $R(v) = qv\bar{q}$ sendo $v \in \mathbb{R}^3$, por exemplo, podemos escrever o operador de rotação da composição $(R \circ L)(u)$ como sendo $w = R(L(u)) = q(su\bar{s})\bar{q} = qsu\bar{s}\bar{q}$. Observe que basta simplesmente multiplicar os quatérnios.

Conclusão

Através do desenvolvimento deste trabalho constatou-se que devido ao nosso conhecimento acerca das operações entre vetores, nossa compreensão a respeito da álgebra no conjunto dos números quatérnios, mesmo esta teoria sendo anterior a geometria analítica, possibilitou o entendimento da teoria desenvolvida.

Também observamos ao longo do capítulo 3, que os conteúdos apresentados podem ser encontrados em vários livros do ensino médio aproximando os alunos do ensino básico dos conteúdos considerados de aplicação prática quando se trata do conteúdo de rotações no plano. Sabemos no entanto, que o estudo envolvendo as rotações no espaço representa uma certa complexidade para o ensino básico mas um sonho possível, uma vez que os conteúdos envolvendo a resolução de sistemas lineares com ordem igual ou superior a 3 estão presentes na proposta curricular do ensino médio.

Com relação aos tipos de parametrização que foram apresentados, tanto um como outro apresenta suas particularidades. Observamos que o sistema eixo-ângulo consiste em um método eficaz, porém quando comparado aos demais, pode-se tornar um método caro quando se trata de implementação computacional em função da quantidade de funções trigonométricas que utiliza. Já a parametrização via ângulos de Euler embora sendo bastante intuitiva apresenta as suas limitações de acordo com os ângulos tomados para uma rotação podendo ocasionar o problema de Gimbal lock. Quanto as rotações com os números quatérnios, mesmo não sendo nada intuitivas, pode-se notar que o grau de dificuldade na realização dos cálculos manualmente em comparação com as demais parametrizações é significativamente menor e além disso, as rotações com quatérnios tem-se mostrado eficazes na obtenção de resultados principalmente na interpolação de movimentos, [19].

Finalmente, após as várias comparações realizadas verificamos do ponto de vista computacional, mesmo em situações limitadas como as que apresentados aqui, uma rotação em torno de um eixo qualquer, ou ainda uma composição de três rotações no três eixos coordenados, o número de operações realizadas na parametrização de ângulos de Euler e eixo-ângulo superam a quantidade de operações realizadas quando se trata de uma rotação envolvendo os números quatérnios, mostrando assim que a rotação via

quatérnios apresenta grandes vantagens se comparadas as demais, do ponto de vista do custo computacional.

É uma pena saber que o conhecimento de Hamilton desenvolvido para os quatérnios foi resumido na álgebra vetorial que conhecemos hoje. Com certeza os avanços científicos no campo da física e matemática sobre a descrição de rotações no espaço estariam mais avançados se não fosse esse pequeno detalhe. Além disso, os estudos sobre as parametrizações de rotações no espaço poderiam ser aprimoradas se os quatérnios não fossem apresentados apenas nos cursos de mecânica, mas também pudessem ser abordados em disciplinas de álgebra linear e/ou nos cursos de graduação matemática.

Esperamos que este trabalho contribua de alguma maneira para que mais estudos possam ser desenvolvidos sobre o comportamento de corpos no espaço, uma vez que, o número de publicações sobre o assunto ainda é limitado podendo ser vastamente explorado a fim de que possamos aumentar as aplicações envolvendo os números quatérnios de forma a contribuir para que dificuldades como o Gimbal Lock possam ser superadas.

Referências Bibliográficas

- [1] ADDISON, Cliff et al. The Genesis Distributed Memory Benchmarks-I Methodology and General Relativity benchmark with results for the SUPRENUM Computer. Cite-seer, 1991. Disponível em <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summarydoi=10.1.1.35.5431>, acesso em: 15 de ago. 2021.
- [2] ANDERSON, M.; VICTOR K.; R. WILSON, orgs. Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal, Simon L. Altmann. In Spectrum, 63:20619. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2009. Disponível em <https://doi.org/10.5948/UP09781614445043.029>, acesso em: 20 de fev. 2021.
- [3] BIASI, Sergio Coutinho de e; GATTASS, Marcelo. Utilização de quatérnios para representação de rotações em 3-D. Relatório técnico, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Disponível em <http://www.tecgraf.puc-rio.br/~mgattass>, 2007, acesso em: 12 de abr. de 2021.
- [4] BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. Geometria analítica. CEP 4533 (1987): 004.
- [5] BOYER, Carl B. História da Matemática. Editora Edgard Blücher Ltda, (1996).
- [6] BRASIL, Victor do Prado. Voltage, current, impedance, power and linear transformations by means of quaternions. Dissertação de mestrado em engenharia elétrica. Faculdade de tecnologia. Brasília, fevereiro 2019. Disponível em <https://repositorio.unb.br/handle/10482/35443>, acesso em: 20 de nov. 2020.
- [7] BURSTALL, Francis E; FERRUS, Dirk ; LESSCHKE, Katrin; PEDIT, Franz; PINKALL, Ulrich. Conformal geometry of surfaces in S^4 and quaternions. Springer, 2004.
- [8] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria analítica. Coleção PROFMAT. 2a Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [9] DIEBEL, James. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. Matrix 58, n^o 1516 (2006): 135. Disponível em https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn-beta/_downloads/attitude.pdf, acesso em: 26 de jul. 2021.

- [10] GALO, M. Automação dos processos de correspondência e orientação relativa em Visão estéreo. 2003. 282 f. Tese (Doutorado em Engenharia elétrica). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação- FEEC, da Universidade Estadual de Campinas-UNICAMP. Campinas, 2003. Disponível em http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/260246/1/Galo_Mauricio_D.pdf, acesso em: 21 de jul. 2021.
- [11] GUZZO, S.M.; TOSTI, N. C. (2017, 14/08). Funções elementares no conjunto dos quatérnios: Abordagem por série de potências. *Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática*, v.1, n.1, p. 44-98. Disponível em http://www.dma.uem.br/kit/jeepema-1/art6_1701.pdf, acesso em: 11 de nov. 2020.
- [12] HAMILTON, William Rowan. On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 25, n^o 163 (1844): 1013.
- [13] HANSON, Andrew J. Visualizing quaternions. In *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, 1-es. Canada: Association for Computing Machinery New York, NY, United States, 2005. Disponível em <https://dl.acm.org/doi/proceedings/10.1145/1198555>, acesso em: 15 de mar. 2021.
- [14] HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [15] HOWARD, Anton e; RORRES, Chris. *Álgebra Linear com Aplicações*. 10^o edição, 2012.
- [16] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel . *Fundamentos de matemática elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas*. Atual, 2013.
- [17] JAMBERSI, Anderson Bicudo e; SILVA, Samuel da. A Sutileza dos Quatérnios no Movimento de Rotação de Corpos Rígidos. *Revista Brasileira de Ensino de Física* 38, n^o 2 (junho de 2016). Disponível em <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0015>, acesso em: 12 de abr. 2021
- [18] LIMA, Rodrigo Silva. *Descrição de rotações: prós e contras na teoria e na prática*. 2007.
- [19] MARIANO, Tames Fernandes. *Análise da eficiência computacional para cinemática direta e inversa de manipuladores robóticos utilizando matrizes de transformação homogêneas e quatérnios duais*. Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Disponível em <http://hdl.handle.net/1843/BUOS-B55NUH>, acesso em: 06 de mai. 2021.

- [20] SANTOS, Reginaldo J. Matrizes vetores e geometria analítica. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2004, 145.
- [21] SCHNEIDER, Philip J., e David H. EBERLY. Geometric Tools for Computer Graphics. The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling. Amsterdam: Boston: Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
- [22] TAYLOR, John. The concept of number: from quaternions to monads and topological fields, by Benno Artmann. Pp 241.£ 29. 95. 1988. ISBN 0-85312-749-2 (Ellis Horwood). The Mathematical Gazette 75, n^o 471 (1991): 11516.
- [23] WINTERLE, Paulo e; STEINBRUCH, Alfredo . Geometria Analítica. Makron Books, São Paulo, 2000.
- [24] <https://docs.unity3d.com/Manual/QuaternionAndEulerRotationsInUnity.html>