Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Mylena Pasquêwitti Lima

# Funções: propriedades algébricas, geométricas e suas relações

Goiânia
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

# TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

# E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

**1. Identificação do material bibliográfico**

[ X ] Dissertação [ ] Tese

**2. Nome completo do autor**

Mylena Pasquêwitti Lima

**3. Título do trabalho**

Funções: propriedades algébricas, geométricas e suas relações

**4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)**

Concorda com a liberação total do documento [ X ] SIM [ ] NÃO[1]

**[1]** Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
**a)** consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
**b)** novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**

Documento assinado eletronicamente por **Alacyr José Gomes**, **Professor do Magistério Superior**, em 03/01/2022, às 09:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **MYLENA PASQUEWITTI LIMA**, **Discente**, em 08/01/2022, às 00:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2607176** e o código CRC **AEF09FB1**.

**Referência:** Processo nº 23070.063947/2021-36 SEI nº 2607176

Mylena Pasquêwitti Lima

# Funções: propriedades algébricas, geométricas e suas relações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática e Estatística(IME), da Universidade Federal de Goiás(UFG), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Área de concentração:** Matemática do Ensino Básico.

**Orientador:** Prof. Dr. Alacyr José Gomes

Goiânia
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Lima, Mylena Pasquêwitti
Funções: propriedades algébricas, geométricas e suas relações [manuscrito] / Mylena Pasquêwitti Lima. - 2022.
139 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Alacyr José Gomes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2022.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, símbolos, gráfico, tabelas, algoritmos, lista de figuras.

1. Funções. 2. Transformações no Plano. 3. GeoGebra. I. Gomes, Alacyr José, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Ata nº 37 da sessão de Defesa de Dissertação de **Mylena Pasquêwitti Lima,** que confere o título de Mestra em Matemática, **na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.**

Ao vigésimo primeiro dia do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte um, a partir das dezesseis horas e trinta minutos, através de web-vídeo-conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“Funções: propriedades algébricas, geométricas e suas relações."** Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Alacyr José Gomes - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Ole Peter Smith - IME/UFG** membro titular interno e o Professor Doutor **Flávio Raimundo de Souza - MAT/IFG** membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **APROVADA** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Alacyr José Gomes - IME/UFG**, o Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo primeiro dia do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte um.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

**Funções: propriedades algébricas, geométricas e suas relações**

---

Documento assinado eletronicamente por **Alacyr José Gomes**, **Professor do Magistério Superior**, em 21/12/2021, às 19:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

Documento assinado eletronicamente por **FLAVIO RAIMUNDO DE SOUZA**, **Usuário Externo**, em 22/12/2021, às 11:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

Documento assinado eletronicamente por **Ole Peter Smith**, **Professor do Magistério Superior**, em 07/01/2022, às 17:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

**Referência:** Processo nº 23070.063947/2021-36 SEI nº 2527094

Dedico este trabalho à minha mãe, que foi o meu maior apoio durante toda esta caminhada, que sempre esteve me amparando em momentos de angústia e também, sempre esteve presente nos momentos de felicidade.

# Agradecimentos

Deixo aqui o meu muito obrigada, primeiramente à Deus por ter me dado força, motivação e saúde para que a conclusão do trabalho se desse por completa.

Aos professores, em especial ao meu orientador Alacyr José Gomes, por estarem sempre dispostos a ajudar e contribuir para um melhor aprendizado durante o curso.

À esta instituição e toda sua equipe docente e administrativa, por sempre estarem dispostos a me amparar quando necessário, em eventuais dúvidas que surgiram ao longo do curso.

À banca examinadora, composta por Flávio Raimundo de Souza e Ole Peter Smith, por todas as contribuições que foram pontuadas. visando dar maior qualidade para o trabalho.

Aos meus pais, em especial à minha mãe, pelo amor, apoio, força, incentivo e motivação incondicionais que recebi.

Aos meus familiares, por todo o incentivo e confiança.

E, a todos que direta ou indiretamente, puderam contribuir de forma relevante desde o início até a conclusão deste trabalho.

A verdadeira coragem está em enfrentar o perigo quando você está com medo.

**L. Frank Baum**,
*O Mágico de Oz*.

# Resumo

Lima, Mylena Pasquêwitti. **Funções: propriedades algébricas, geométricas e suas relações**. Goiânia, 2022. 139p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O conteúdo de funções é considerado um dos mais importantes dentro da Matemática, visto que está presente desde seus aspectos mais simples até as mais complexas modelagens matemáticas. Nesse sentido, no decorrer do trabalho abordamos detalhadamente sobre vários tipos de funções, abrangendo várias de suas propriedades e características, mas já ressaltamos aqui que o intuito deste trabalho não é esgotar todas as classes, propriedades e características existentes das funções, pois, só abordamos aquelas que nos foram convenientes. E, através destas funções estudadas, compreendemos melhor como se dá a relação entre as representações numéricas, algébricas e geométricas. O trabalho se caracteriza como uma pesquisa bibliográfica, pois está sendo baseados em autores importantes dentro desta área de estudo. Para o desenvolvimento do trabalho, além da pesquisa bibliográfica, estamos também nos apoiando no software GeoGebra e na linguagem de programação TikZ para esboçar todos os gráficos presentes aqui, sendo considerado então que nenhum dos gráficos já foi encontrado pronto, mas sim feitos pela autora.

**Palavras–chave**

Funções, Transformações no Plano, GeoGebra.

# Abstract

Lima, Mylena Pasquêwitti. **Functions: algebraic, geometric properties and their relationships**. Goiânia, 2022. 139p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The contents of functions is considered one of the most important within Mathematics, as it is present from its simplest aspects to the most complex mathematical modeling. In this sense, during the course of the work, we discuss in detail various types of functions, covering several of their properties and characteristics, however, here we do emphasize that the purpose of this work is not to exhaust all existing classes, properties and characteristics of functions, only covering those convenient to us. Moreover, through the functions studied, we improve our understanding of the relationship between numerical, algebraic and geometric representations. The work is characterized as a bibliographic research, being based on important authors within this area of study. For the development of the work, in addition to the bibliographic research, we also rely on the software GeoGebra as well as on the TikZ programming language, the latter being employed to sketch all the graphs presented, considering that none of them were found ready. Thus, all graphics presented were created by the author.

**Keywords**

Functions, Planar Transformations, GeoGebra.

# Sumário

# Lista de Figuras

# Introdução

O conceito de função geralmente é apresentado aos alunos, de forma teórica, no 9º ano do Ensino Fundamental e, a partir daí, os acompanha durante todo o restante do seu período escolar e, também, durante suas vidas. Isto porque, se pensarmos de um modo bem simples, função nada mais é do que uma maneira de relacionar dois conjuntos distintos.

E aqui, quando mencionamos conjuntos distintos, estamos nos referindo aos mais variados tipos de conjuntos e situações existentes. O que é importante enfatizar é que, independente de quais sejam os conjuntos, a partir do momento em que os relacionamos, estamos garantindo que existe uma função que pode ser definida de modo que represente a existência desta relação entre os conjuntos dados.

Um exemplo disto é o preço por litro do combustível e a quantidade a ser paga ao se abastecer o carro em algum posto de gasolina. Com este simples exemplo é possível notar que estamos cercados diariamente por situações que, mesmo que não percebamos, se relacionam diretamente com o conceito de funções.

A partir daí, é possível definir outros conceitos mais particulares das funções, conceitos estes que são abordados no Capítulo 1, mas note que, intuitivamente, sabemos que quanto mais caro o preço por litro, mais caro temos que pagar ao final do abastecimento. Característica esta, que pertence a uma função que é crescente. Outro fato notável é que a cada quantidade de combustível que é colocada, temos um valor diferente no preço final, o que é característica de uma função injetiva.

Sendo assim, é possível ter uma noção de que o conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática. E, isto não foi dito simplesmente baseado no exemplo visto acima, temos vários autores que nos norteiam até esta conclusão.

"O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática e seus aspectos mais simples estão presentes nas noções mais básicas desta ciência, como por exemplo, na contagem."[Barreto 2007, p. 87]

Ou seja, desde o início da alfabetização matemática, onde é ensinado a contagem, já temos a presença do conceito de função. Para que esta alfabetização ocorra, é necessário que seja utilizado várias linguagens diferentes, brincadeiras e imaginação, facilitando assim a compreensão, por partes, das crianças. Mas, o foco aqui, é perceber que desde o princípio já temos contato com o conceito de função.

> O conceito de função é nuclear para a construção do conhecimento matemático. É um conceito abordado em todos os níveis de ensino quer seja implícita ou explicitamente, e se faz presente na busca de entendimento dos mais variados fenômenos. [Ardenghi 2008, p. 14]

> O estudo de funções é, certamente, um dos mais importantes tópicos de toda a Matemática fundamental. Com aplicações em todas as áreas, sua utilização vai desde problemas cotidianos até modelagens sofisticadas de situações da astronomia, engenharias ou medicina. Seu domínio é indispensável por alunos de todos os níveis. [Silva, p. 2]

> Em resumo, podemos perceber que o conceito de função é um dos elos entre diferentes assuntos dentro da própria Matemática e que, além disso, desempenha um papel central em diversas áreas do conhecimento, visto que é uma das ferramentas para a compreensão de certos fenômenos e a representação das variações dos mesmos. [Thees 2009, p. 25]

Isto acontece porque, como foi visto de forma superficial no exemplo citado anteriormente, o conceito de funções abrange conteúdos dentro e fora da Matemática, ou seja, é um conceito multidisciplinar. E, além disso, abrange níveis diferentes de dificuldade, indo desde a contagem de objetos até modelagens sofisticadas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - PCNEM [Brasil] e suas orientações complementares - PCN+ [Brasil], fazem referência ao fato de que é possível encontrar várias ligações sobre a importância do estudo de funções e de seu uso em diversas áreas.

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de

> situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. [Brasil, p. 43 - 44]

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. [Brasil, p. 121]

> Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. [...] em relação às competências a serem desenvolvidas pela Matemática, a abordagem proposta para esse tema permite ao aluno usar e interpretar modelos, perceber o sentido de transformações, buscar regularidades, conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura e adquirir uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático. [Brasil, p. 121 - 122]

O que só reforça o fato de que ter uma boa compreensão do que representa o conceito de funções e de todas as suas propriedades e particularidades é importante. E, tal importância se dá justamente pelo fato de que é necessário que consigamos compreender assuntos que estejam direta ou indiretamente ligados à Matemática e que, por sua vez, abranjam os estudos sobre funções.

Segundo [Ponte 1992], ao longo da História da Matemática, o conceito de função teve uma construção demorada e cheia de contratempos. Desta forma, é natural que isto se reflita no seu processo de ensino e aprendizagem. Ponte também já alertava para a importância de estudar funções sob vários aspectos.

> A maioria dos estudantes chega à escola secundária com muita dificuldade de abstração. Para muitos, lidar com gráficos cartesianos e expressões algébricas, não é uma tarefa fácil. O ensino de funções precisa articular equilibradamente as três formas mais importantes de representação, nomeadamente a numérica, a gráfica e a algébrica. Seria um grave erro de interpretação da importância histórica das representações analítica e geométrica deixar que fosse subestimado o papel dos aspectos numéricos na aprendizagem de

> funções, notadamente tabelas e cálculos. Em situações reais, valores numéricos concretos fundamentam as expressões numéricas e as curvas geométricas. Matemáticos dos séculos XVII e XVIII gastavam um longo tempo fazendo operações aritméticas, procurando padrões e relações. [Ponte 1992, p. 10 - 11]

Aprender o conceito de funções é um processo lento e evolutivo, visto que começamos a aprender sobre os casos mais simples de funções e, a medida que vamos fixando os primeiros conceitos, vamos gradualmente aumentando a dificuldade. Isto ocorre devido a sua complexidade e diversidade, uma vez que existem vários tipos diferentes de representações para uma mesma função e, existem também, vários tipos de funções.

> Os estudantes têm tido problemas em fazer a ligação entre as diferentes representações de funções: fórmulas, gráficos, diagramas, descrições verbais de relações; em interpretar gráficos; em manipular símbolos relacionados a funções. [Sierpinska 1992]

O essencial é que os alunos aprendam a enxergar a função olhando o todo e, não apenas as partes. Ou seja, seria interessante que conseguissem visualizar as fórmulas e os gráficos relacionados, e, não separadamente, como é o que acontece na maioria dos casos.

Algumas destas representações das funções mencionadas anteriormente, são abordadas de forma mais detalhada no Capítulo 1, dentre elas, damos maior ênfase nas representações algébricas e geométricas. Mas, por enquanto, aqui neste capítulo, vamos abordar um pouco mais sobre como é possível relacionar melhor as representações numéricas, gráficas e algébricas simultaneamente.

[Godino, Batanero e Font 2008] defendem esta ideia de que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve ser apresentado considerando suas três representações: a resolução de problemas, a linguagem simbólica e o sistema de conceitos que é estruturado de modo lógico e organizado.

De acordo com [Anton 2000], o conceito de função "(...) é a ideia básica subjacente a quase todas as relações matemáticas e físicas, não importando como elas são expressas". Porém, [Kaiber 2002] considera que a introdução do conceito de função aos alunos ainda vem sendo realizada considerando a ideia de par ordenado e de relações entre conjuntos, o que transforma o estudo de funções formal e abstrato.

[Isoda 1996] e [Bergeron e Hercovics 1982] descrevem níveis hierárquicos para a linguagem de funções. O primeiro dos níveis enfatiza a ideia de introduzir o conceito de funções apenas através da linguagem cotidiana, aqui não se preocupa com a formalização e/ou nomeação dos termos da função, apenas se fala sobre variações mas, sem rótulos.

No segundo nível, já é iniciado uma análise, mesmo que informal, dos conceitos, análise esta que ocorre se apoiando, inicialmente, em tabelas e relacionando-as com a linguagem cotidiana. Isto porque, aqui neste nível, embora os alunos já saibam assimilar alguns dos conceitos já vistos, eles ainda não estão prontos de fato para o terceiro nível, que é onde já conseguem assimilar bem conceitos e nomeações, algébricas e geométricas, para cada função dada.

> É importante, também, que o professor perceba que a contextualização deve ser realizada não somente para tornar o assunto mais atraente ou mais fácil de ser assimilado. Mais do que isso, é permitir que o aluno consiga compreender a importância daquele conhecimento para a sua vida, e seja capaz de analisar sua realidade, imediata ou mais distante, o que pode tornar-se uma fonte inesgotável de aprendizado. Além de valorizar a realidade desse aluno, a contextualização permite que o aluno venha a desenvolver uma nova perspectiva: a de observar sua realidade, compreendê-la e, o que é muito importante, enxergar possibilidades de mudança. [Brasil, p . 33]

Sendo assim, é importante olhar para este trabalho sob dois aspectos, o do aluno e o do professor. Para o professor, o trabalho em questão pode servir como um material complementar para as suas aulas. Já para o aluno, o trabalho pode ser visto como um material de apoio para os estudos.

No Capítulo 1 abordamos sobre conceitos de funções, suas variadas representações, desde as numéricas e algébricas até as gráficas e, seus variados aspectos, desde os conceitos de função crescente, decrescente, entre outras até conceitos sobre famílias de funções. Ou seja, temos aspectos bem diversos sendo estudados neste primeiro capítulo, tudo isto sendo feito com base principalmente nas referências [Campagner], [Flemming e Gonçalves 2006], [Flemming e Gonçalves 2007], [Lima et al. 2006] e [Lima et al. 2010].

No Capítulo 2 abordamos sobre algumas transformações no plano, em especial, estudamos sobre reflexões, translações verticais e horizontais e sobre contração e dilatação. Todas estas transformações são vistas sob o aspecto das transformações de pontos individuais e também de funções como um todo. Para isso, nos baseamos em autores como [Anton 2000], [Barbosa 2010], [Doreen et al. 2012], [Jablan 1995], [Lehmann 1998], e [Thomas 2009].

No Capítulo 3 além de usar o que já foi definido nos Capítulos 1 e 2, definimos outros tipos de funções, sendo elas baseadas nas funções definidas inicialmente. Mas, agora, elevando um pouco mais o grau de complexidade. Tudo isto é feito tendo também como principais referências [Anton 2000], [Barbosa 2010], [Doreen et al. 2012], [Flemming e Gonçalves 2006], [Flemming e Gonçalves 2007], [Jablan 1995], [Lehmann 1998], [Lima et al. 2006], [Lima et al. 2010] e [Thomas 2009].

Por fim, no Capítulo 4, vemos como é possível relacionar todos os conceitos vistos nos capítulos anteriores, principalmente os conceitos dos Capítulos 2 e 3. Neste último capítulo, temos duas seções, cada uma delas com objetivos distintos, porém, dependentes. Na primeira seção, temos um guia básico sobre como se usa o software GeoGebra.

Já na segunda seção, temos as representações geométricas de algumas funções vistas no decorrer no trabalho exibidas no GeoGebra, utilizando como apoio para a construção destas transformações o guia da primeira seção.

Juntamente com o uso do software GeoGebra, utilizamos também a linguagem de programação TikZ. E, é importante enfatizarmos aqui, que tais recursos foram utilizados durante todo o decorrer do trabalho, pois estão presentes nos exemplos, gráficos, tabelas e figuras que fizemos nos Capítulos 1, 2 e 3.

Utilizamos então, o GeoGebra para nos nortear sobre como é o código TikZ que dá origem aos gráficos e, terminamos de enquadrá-los nos padrões desejados utilizando a linguagem TikZ.

Como mencionamos anteriormente, é no Capítulo 4 que temos maiores detalhes sobre o processo de construção de cada uma das figuras presentes no trabalho, construções estas que estão apoiadas no uso do GeoGebra. De referências para este último capítulo, além de todos os autores já citados, temos também [Batista 2012], [Borba e Penteado 2005] e [Bortolossi 2010].

Temos também, detalhes sobre as construções dos códigos utilizando a linguagem TikZ, mas ao invés de trazer estes códigos durante o decorrer dos capítulos, os deixamos separados no Apêndice A.

O intuito destes códigos é permitir que o leitor consiga identificar como alguns um dos gráficos existentes no trabalho foram criados, para que desta forma, seja possível compreender como se dá estas construções e a partir desta compreensão, se sentir incentivado a aprender mais sobre a linguagem de programação TikZ.

CAPÍTULO 1

# Funções: conceitos e alguns exemplos mais conhecidos

Neste capítulo abordamos sobre algumas definições que nos ajudam a compreender melhor quais são as características de cada tipo de função. Sabemos que essas definições formais têm como principais referências [Campagner], [Flemming e Gonçalves 2006], [Flemming e Gonçalves 2007], [Lima et al. 2006] e [Lima et al. 2010].

**Definição 1.1 (Função).** Dados os conjuntos $X$ e $Y$ não vazios, uma função $f : X \to Y$ é uma regra que diz como associar cada elemento $x \in X$ a um único elemento $y = f(x) \in Y$. Se $X$ é um subconjunto dos reais, dizemos que $f$ é uma função real.

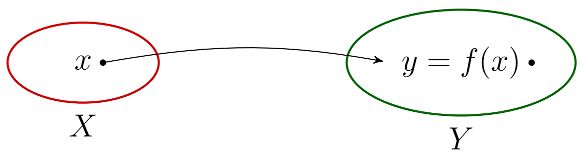


**Figura 1.1:** *Função*

Considerando duas funções $f$ e $g$, de forma que seja possível encontrar elementos em comum em seus respectivos domínios, isto é,

$$D(f) \cap D(g) \neq \emptyset,$$

é possível definir algumas propriedades válidas, isto se considerar seus domínios sendo o conjunto destes elementos em comum. São elas:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$.
4. $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$, com $k$ constante.

**Definição 1.2** (**Domínio e Contradomínio**)**.** O *domínio* é o conjunto dos valores possíveis de $x \in X$, ou seja, a região do universo em que a função $f$ está definida. Denota-se o *domínio* da função $f$ como $\mathrm{D}(f)$. Já o *contradomínio* de $f$ é o conjunto dos possíveis resultados para $y \in Y$ e é denotado por $\mathrm{CD}(f)$.

**Definição 1.3** (**Imagem**)**.** Para cada $x \in X$, com $X = \mathrm{D}(f)$, tendo $y \in Y$, onde $Y = \mathrm{CD}(f)$, o elemento $y = f(x)$ é chamado *imagem* de $x$ pela função $f$, ou podemos dizer que $y = f(x)$ é o valor assumido pela função $f$ em $x$. O conjunto

$$Im(f) = \{y = f(x) : x \in X\}$$

é denominado o *conjunto imagem* de $f$ e é denotado por $\mathrm{Im}(f)$.

Uma notação para indicar que $f$ transforma $x$ em $f(x) = y$ é dada por

$$x \longmapsto f(x).$$

É válido fixar o fato de que esta notação é chamada de lei de correspondência de $f$. Fazer o gráfico de uma função é o mesmo que descrevê-la por meio desta lei de correspondência, que é satisfeita pelos pontos da figura e por nenhum outro ponto fora dela. Para definir o que é de fato um gráfico, primeiro precisamos definir o que é produto cartesiano e plano cartesiano.

**Definição 1.4** (**Produto Cartesiano**)**.** O *produto cartesiano* de dois conjuntos $X$ e $Y$ é o conjunto $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados $(x, y)$, sendo $x \in X$ e $y \in Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

**Exemplo 1.5.** Sejam $A = \{1, 3\}$ e $B = \{2, 5\}$ conjuntos. O produto cartesiano formado por estes dois conjuntos é dado por $A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (3, 2), (3, 5)\}$.

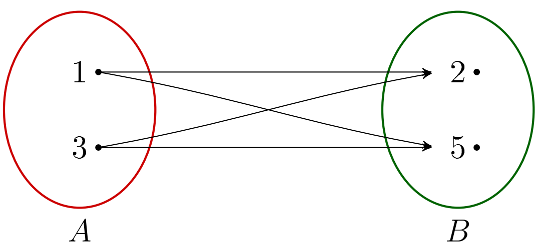


**Figura 1.2:** *Produto Cartesiano*

Quando temos $X$ e $Y \subset \mathbb{R}$, denotamos que $X \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Pode-se associar este produto cartesiano ao plano cartesiano, onde $x \in X$ representa o eixo das abscissas e $y \in Y$ representa o eixo das ordenadas, como descrito na Figura 1.3.

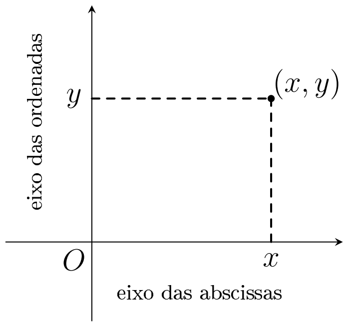


**Figura 1.3:** *Plano Cartesiano*

É valido ressaltar aqui que chamamos o ponto com coordenadas $(x, y)$ de par ordenado, sendo que $y = f(x)$.

**Definição 1.6 (Gráfico).** O *gráfico* de uma função $f : X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$, onde $x$ é um elemento qualquer de $X$ e $y = f(x)$ é um elemento de $Y$. Assim,

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{\big(x, f(x)\big); x \in X\}.$$

A fim de que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja o gráfico de alguma função $f : X \to Y$ é necessário e suficiente que $G$ cumpra duas condições, são elas:

1. Para todo $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja primeira ordenada é $x$.
2. Se $p = (x, y)$ e $p_1 = (x, y_1)$ são pares ordenados pertencentes a $G$ com a primeira ordenada $x$ então $y = y_1$, isto é, $p = p_1$.

Condições estas que vão de encontro com o que já havia sido mencionado na Definição 1.1.

Quando nos referimos aos gráficos, o domínio da função é obtido pela projeção dos pontos do gráfico sobre o eixo das abscissas. E, a imagem, que é um subconjunto do contradomínio da função, é obtida pela projeção dos pontos do gráfico sobre o eixo das ordenadas. Confira a representação destas projeções no plano cartesiano na Figura 1.4.

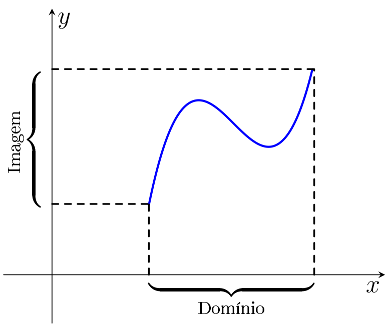


**Figura 1.4:** *Projeções no Plano Cartesiano*

Sem que o domínio e o contradomínio sejam definidos não é possível considerar que a função exista. Em alguns exemplos, o domínio e o contradomínio não são explicitados, nestes casos devemos considerar que ambos são subconjuntos dos reais. Considera-se então que o domínio é o maior subconjunto dos reais para o qual a função $y = f(x)$ está bem definida, pois é no domínio que estão todos os valores que podem ser atribuídos à variável independente.

Nas Definições 1.1 e 1.6, vimos que a cada $x \in X$ só podemos associá-lo a um único elemento $f(x) = y \in Y$ e, é possível verificar isto olhando apenas para o gráfico de uma função qualquer.

Tendo o gráfico, basta traçar algumas retas paralelas ao eixo $y$ e observar em quantos pontos cada uma das paralelas traçadas cortam a curva gerada pelo gráfico.

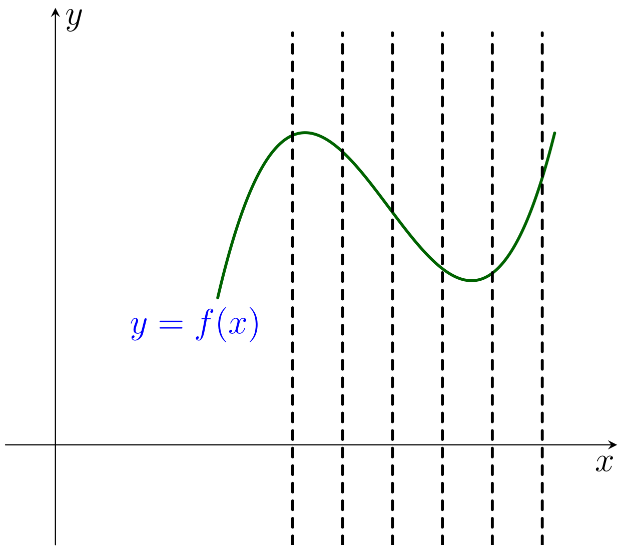


**Figura 1.5:** *Unicidade de $y = f(x)$*

Caso aconteça de uma das retas paralelas a $y$ cortar a curva em dois ou mais pontos distintos, podemos afirmar que esta curva não satisfaz a condição necessária para ser uma função, pois um único valor para $x$ estaria resultando em diferentes valores para $y$, o que é um absurdo visto que contraria as Definições 1.1 e 1.6.

Olhando para os mais variados tipos de funções existentes, notamos que, em alguns casos, valores distintos para a variável $x$, chamada de variável independente, resultam em valores também diferentes para $y$, que é a variável dependente, observe isto no Exemplo 1.7.

**Exemplo 1.7.** Vemos aqui as três representações da função $f(x) = 2x$. A numérica e a gráfica explicitadas na Figura 1.6 e, a algébrica por meio da equação $f(x) = 2x$.

| $x$ | $y = f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $-4$ |
| $-1$ | $-2$ |
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $2$ |
| $2$ | $4$ |

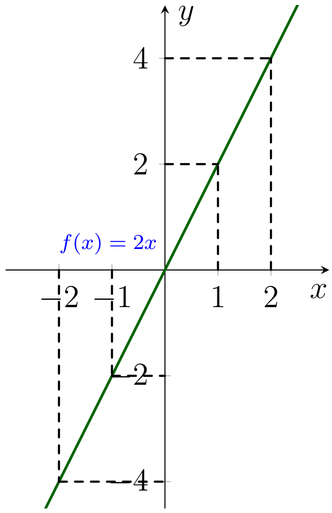


**Figura 1.6:** *Função* $f(x) = 2x$

Vemos na Figura 1.6, que $f(1) = 2$ e que $f(-1) = -2$, comprovando o fato de que valores diferentes para $x$ podem resultar em valores também diferentes para $y$. Mas, acontece também, casos onde valores diferentes para $x$ podem resultar em valores iguais para $y$. Como exemplo temos a função $f(x) = x^2$, veja o Exemplo 1.8.

**Exemplo 1.8.** Seja $f(x) = x^2$, temos aqui suas três representações. A numérica e a gráfica exibidas na Figura 1.7, já a algébrica por meio da função $f(x) = x^2$.

| $x$ | $y = f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $4$ |
| $-1$ | $1$ |
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $4$ |

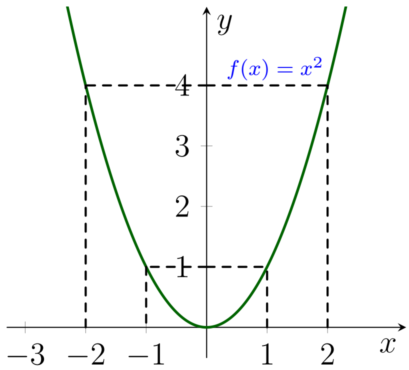


**Figura 1.7:** *Função* $f(x) = x^2$

É possível notar na Figura 1.7 que, para $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, obtemos $f(x_1) = f(x_2) = 1$, o que representa o fato de variáveis $x_1 \neq x_2$ resultarem em um único valor para $y = f(x_n)$, com $n = 1, 2$.

**Definição 1.9 (Zeros ou Raízes da Função).** Seja a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, os valores de $x \in X$ para os quais a imagem de $f$ é zero, ou seja, os valores de $x$ para os quais $f(x) = 0$, são denominados *zeros* ou *raízes* da função.

Observe que os zeros da função nos dão os pontos para os quais o gráfico corta o eixo das abscissas, já sabemos que só é possível encontrar os zeros da função quando temos $y = f(x) = 0$. Dito isto, sabemos que estamos nos referindo aos pontos do gráfico que são da forma $(x, 0)$. Veja que nos Exemplos 1.7 e 1.8 o único zero de ambas as funções é dado por $x = 0$ e nos gráficos estão representados pelo ponto $(0, 0)$.

Já vimos que é em $y = 0$ que o gráfico corta o eixo das abscissas. Mas, há também uma particularidade sobre quando temos $x = 0$ pertencente ao domínio da função. É neste ponto, $\big(0, f(0)\big)$, que temos a interseção do gráfico com o eixo das ordenadas. Os pontos $(x, 0)$ e $\big(0, f(0)\big)$, que são responsáveis por cortar os eixos coordenados, quando puderem ser determinados, são importantes para compreensão do gráfico da função.

Existem classificações distintas para as raízes das funções. No caso de funções do tipo afim esta raiz é dita única, já em funções quadráticas, sabemos que existem duas raízes, sendo elas $x_1$ e $x_2$, é importante ressaltar que aqui há duas hipóteses, a primeira delas é $x_1 = x_2$, neste caso dizemos que esta é uma raiz dupla. E, pode ocorrer também de termos $x_1 \neq x_2$, ou seja, pode ser que as raízes tenham valores distintos.

## 1.1 Funções Injetoras, Sobrejetoras e Bijetoras

As funções podem ser também caracterizadas como injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Mas, cada uma destas classificações só é feita a partir do momento em que se analisa o domínio e o contradomínio da função dada. Vemos, respectivamente, nas Definições 1.10, 1.12, 1.15, maiores detalhes de cada uma destas classificações.

**Definição 1.10 (Função Injetora).** Uma função $f : X \to Y$ chama-se *injetora* quando elementos diferentes em $X$ são transformados por $f$ em elementos diferentes em $Y$. Ou seja, $f$ é injetora quando

$$x_1 \neq x_2 \in X \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \in Y.$$

Ou ainda,

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

**Exemplo 1.11.** Tome como exemplo a função injetora $f(x) = 3x$, onde temos $x \in \{1, 4, 5, 6\}$. Veja no seu diagrama que de fato temos:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Pois,

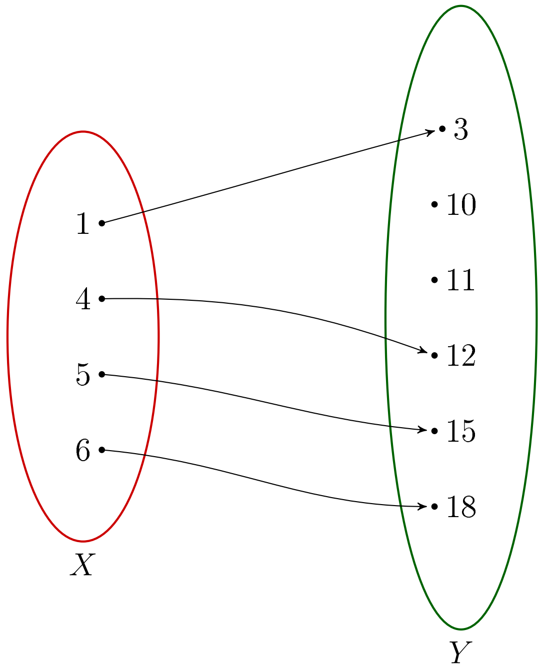


**Figura 1.8:** *Função Injetora $f(x) = 3x$, com $x \in \{1, 4, 5, 6\}$*

**Definição 1.12 (Função Sobrejetora).** Diz-se que uma função $f : X \to Y$ é *sobrejetora* quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Temos dois possíveis casos de função sobrejetora. No Exemplo 1.13 vemos o caso onde cada $y \in Y$ é imagem de apenas um único $x \in X$. Já no Exemplo 1.14, vemos que há alguns elementos de $Y$ que são imagem de mais de um elemento de $X$.

**Exemplo 1.13.** Como exemplo, veja a função $f(x) = x$, onde $x \in \{1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{R}$. Observe que no diagrama realmente não temos valores para $y$ no contradomínio, que não sejam imagens:

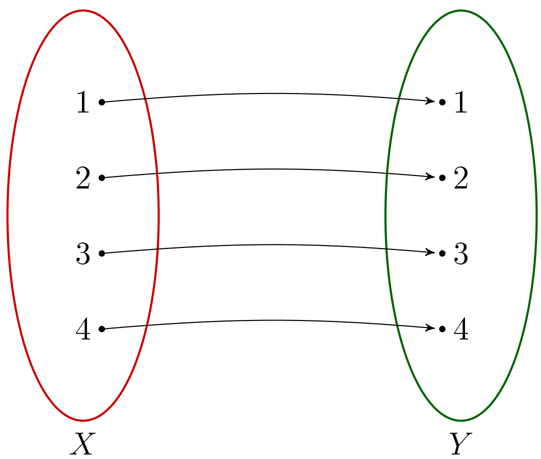


**Figura 1.9:** *Função Sobrejetora $f(x) = x$, com $x \in \{1, 2, 3, 4\}$*

**Exemplo 1.14.** Outro exemplo é a função $f(x) = x^2$, onde

$$x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{R} \text{ e } y \in \{0, 1, 4, 9\} \subset \mathbb{R}_+.$$

Nota-se, no seu diagrama, que também não há valores no contradomínio que não são imagens de algum elemento do domínio:

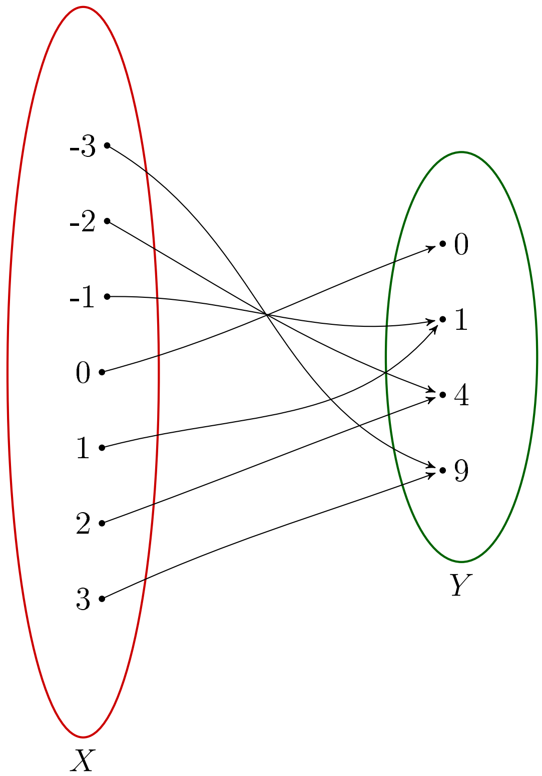


**Figura 1.10:** *Função Sobrejetora* $f(x) = x^2$, *com* $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Veja no Apêndice A.1 quais são os códigos em TikZ que geram esta Figura 1.10.

**Definição 1.15 (Função Bijetora).** Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é *bijetora*, ou ainda, que $f$ faz uma correspondência biunívoca entre $X$ e $Y$, se ela for *injetora* e *sobrejetora* simultaneamente.

**Exemplo 1.16.** Veja o diagrama da função $f(x) = 5x + 4$, com $x \in \{0, 1, 3, 5, 6\}$, onde de fato podemos perceber que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

é sempre verdade. E também, não há de forma alguma elementos no contradomínio que ficam sem ser imagem:

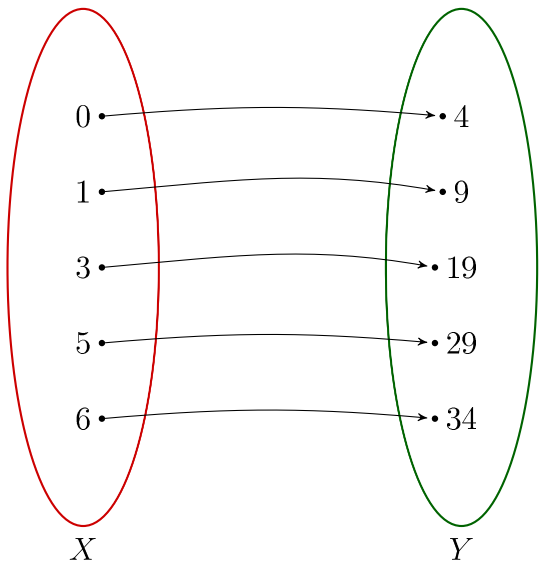


**Figura 1.11:** *Função Bijetora* $f(x) = 5x + 4$, *com* $x \in \{0, 1, 3, 5, 6\}$

Agora que já sabemos o que é uma função bijetora, observe que a função sobrejetora do Exemplo 1.13 é também bijetora, visto que cada elemento $y \in Y$ só é imagem de um único elemento $x \in X$.

## 1.2 Funções Crescentes, Decrescentes, Não-Crescentes e Não-Decrescentes

As funções podem também ser classificadas como funções crescentes, decrescentes, não-crescentes e não-decrescentes. E, só é possível determinar exatamente qual é a classificação de cada função dada ao observar a relação algébrica e geométrica entre $x$ e $y = f(x)$. Veja as Definições 1.17, 1.19, 1.21 e 1.23 para entender todos estes conceitos.

**Definição 1.17 (Função Crescente).** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida como *estritamente crescente* quando temos que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

**Exemplo 1.18.** Seja $f(x) = 2x - 1$, temos que $f(x) = 0$ quando $x = \dfrac{1}{2}$, sendo este valor de $x$, a raiz da função. Que, consequentemente, é onde o gráfico corta o eixo das abscissas. E, vemos que o eixo $y$ é cortado exatamente em $b = -1$. Veja esta representação:

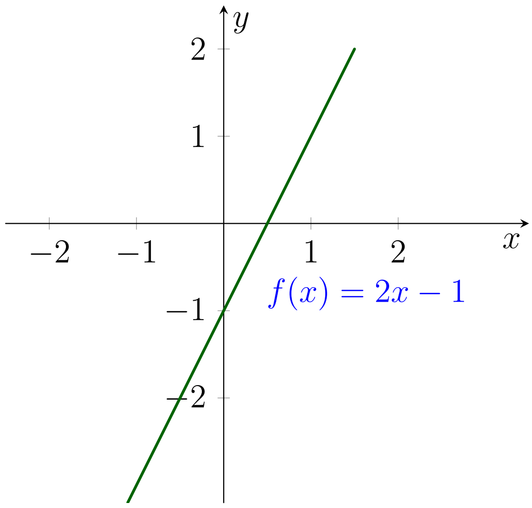


**Figura 1.12:** *Função Crescente* $f(x) = 2x - 1$

**Definição 1.19 (Função Decrescente).** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida como *estritamente decrescente* quando temos que

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

**Exemplo 1.20.** Sendo $f(x) = -2x - 1$, temos que o eixo $y$ é cortado em $b = -1$ e que a raiz desta função é dada por $x = -\dfrac{1}{2}$. Tendo isto, veja que é exatamente no ponto $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ que o gráfico corta o eixo $x$:

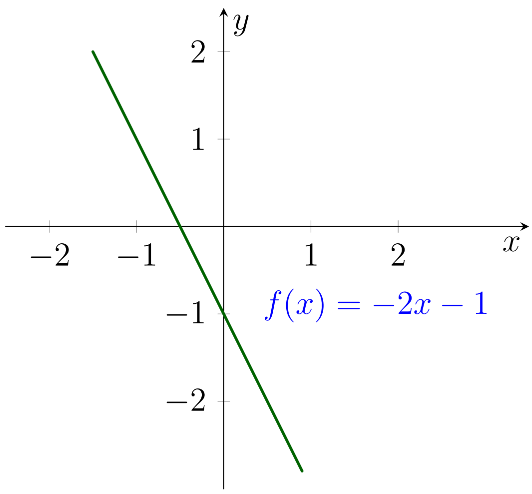


**Figura 1.13:** *Função Decrescente* $f(x) = -2x - 1$

Estas funções que são estritamente crescentes ou decrescentes são sempre injetoras, pois sempre temos que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

**Definição 1.21** (**Função Não-crescente**)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida como *não-crescente* quando temos que $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

**Exemplo 1.22.** Seja a função $f$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & , \text{ se } x < 1 \\ 1 & , \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ -x+5 & , \text{ se } x > 4 \end{cases} ,$$

temos que seu domínio é composto por três seções distintas. A primeira delas com $x < 1$, cuja função é definida por $f(x) = -2x+3$, a segunda com $1 \leqslant x \leqslant 4$, sendo que $f(x) = 1$ e, a terceira, delimitada por $x > 4$ com $f(x) = -x+5$, veja seu gráfico:

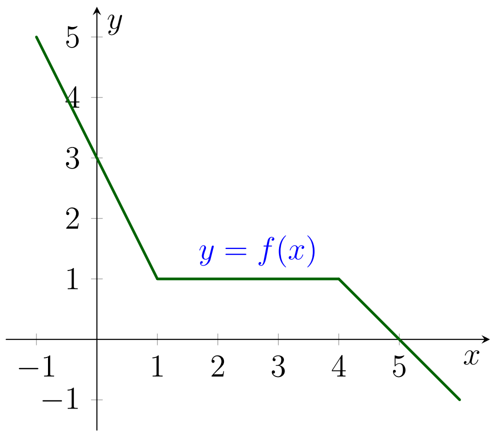


**Figura 1.14:** *Função Não-Crescente*

Observe que realmente $f$ é uma função não-crescente, pois ao considerar $x_1 \neq x_2$ temos que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ou que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. A única coisa que não ocorre é $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, de fato esta não é uma função crescente.

Veja no Apêndice A.2 quais são os códigos em TikZ que geram esta Figura 1.14.

**Definição 1.23** (**Função Não-decrescente**)**.** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida como *não-decrescente* quando temos que $x_1 < x_2$ nos gera que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

**Exemplo 1.24.** Sendo $f$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & , \text{ se } x < 1 \\ \\ \dfrac{1}{2} & , \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \\ x - \dfrac{3}{2} & , \text{ se } x > 2 \end{cases} ,$$

vemos que seu domínio também é dividido em três seções. De modo análogo ao que expomos no Exemplo 1.22, é possível ver que de fato esta função não é decrescente, isto porque a única coisa que não ocorre, sendo $x_1 \neq x_2$, é $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

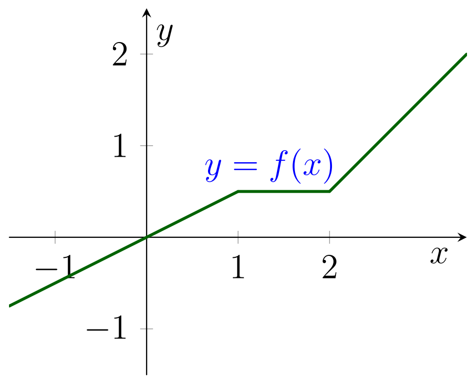

**Figura 1.15:** *Função Não-Decrescente*

## 1.3 Paridade das Funções

Outra forma de classificar uma função é por sua paridade. Esse conceito de paridade traz consigo propriedades algébricas e geométricas que nos ajudam a entender melhor algumas funções e seus respectivos gráficos.

Temos funções que são pares, enquanto outras são ímpares. E, temos também algumas que não são nem pares e nem ímpares, sendo chamadas então de funções sem paridade.

**Definição 1.25 (Paridade das Funções).** Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que $f$ é uma função:

1. *par*, se para todo $x \in \mathbb{R}$, tivermos $f(-x) = f(x)$.

2. *ímpar*, se para todo $x \in \mathbb{R}$, tivermos $f(-x) = -f(x)$.

Pela Definição 1.25, podemos observar que geometricamente nas funções pares as imagens de $-x$ são iguais as imagens de $x$, ou seja, o gráfico do lado esquerdo do eixo $y$ é simétrico ao gráfico que está à direita do eixo $y$.

Um exemplo disto é a função $g(x) = x^2$, visto que

$$g(-x) = (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x^2 = g(x).$$

Graficamente, vemos na Figura 1.16, que de fato esta simetria é válida:

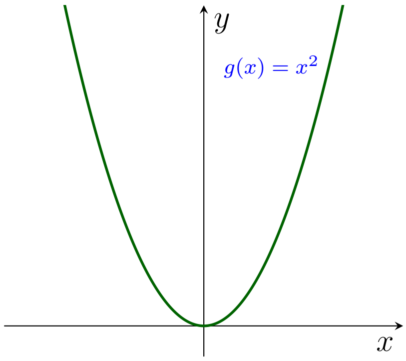


**Figura 1.16:** *Função Par* $g(x) = x^2$

É também perceptível que, para as funções ímpares, as imagens de $-x$ são opostas às imagens de $x$. Geometricamente, isso significa que o lado esquerdo do gráfico é antissimétrico ao lado direito, sendo o eixo $y$ o eixo de simetria.

Como exemplo, temos a função $f(x) = x$, isto porque para cada $x$ pertencente ao domínio da função $f$ temos que

$$f(-x) = -x = -f(x).$$

Veja seu gráfico na Figura 1.17, nele entendemos melhor como ocorre esta simetria:

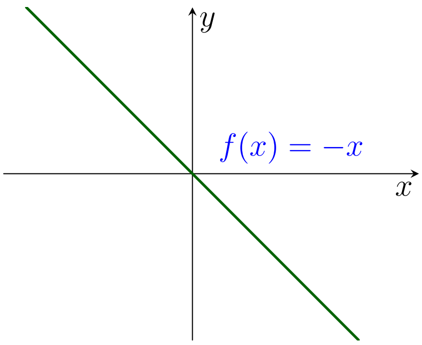


**Figura 1.17:** *Função Ímpar* $f(x) = x$

E, existem também funções que não são pares e nem ímpares, ou seja, funções onde $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, neste caso, elas são ditas funções sem paridade. Um exemplo é a função $h(x) = x^2 + x$, que é a soma das funções $y = g(x)$ e $y = f(x)$. Veja que $h(-x) = x^2 - x$, ou seja, claramente temos que $y = h(-x)$ não é igual a $y = h(x)$ e nem a $y = -h(x)$.

Um outro exemplo de função sem paridade é a função $f(x) = 2 - x^3$, veja que $f(-1) = 3 \neq 1 = f(1)$ e $f(-1) = 3 \neq -1 = -f(1)$. Existe também, uma única função que é par e ímpar simultaneamente, esta é a função identicamente nula, que é representada por $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

### 1.3.1 Propriedades sobre Paridade das Funções

Aqui descrevemos algumas propriedades sobre paridades de funções que julgamos importantes para a construção do trabalho em questão.

**Propriedade 1.26.** Ao somar duas funções de mesma paridade, mantém-se a paridade.

*Demonstração.* Se $f$ e $g$ são pares, temos que

$$\big(f+g\big)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = \big(f+g\big)(x).$$

Agora, sejam $f$ e $g$ ímpares, tem-se que

$$\big(f+g\big)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -\big(f(x) + g(x)\big) = -\big(f+g\big)(x).$$

□

**Propriedade 1.27.** O produto de duas funções com mesma paridade é uma função par.

*Demonstração.* Sejam $f$ e $g$ ímpares, temos

$$\big(f \cdot g\big)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = \big(-f(x)\big) \cdot \big(-g(x)\big) = f(x) \cdot g(x) = \big(f \cdot g\big)(x).$$

Sejam agora, $f$ e $g$ pares, logo

$$\big(f \cdot g\big)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = \big(f \cdot g\big)(x).$$

Então, de fato, em ambos os casos, obtemos que $\big(f \cdot g\big)(-x) = \big(f \cdot g\big)(x)$, o que é característica de uma função par. □

**Propriedade 1.28.** O produto de duas funções com paridades opostas é uma função ímpar.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, seja $f$ par e $g$ ímpar, segue daqui que

$$\big(f \cdot g\big)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot \big(-g(x)\big) = -\big(f(x) \cdot g(x)\big) = -\big(f \cdot g\big)(x).$$

□

Uma outra propriedade, que é muito importante, é a que caracteriza uma função $f$ real qualquer como sendo a soma de uma função par e de outra ímpar, esta propriedade é apresentada no Teorema 1.29.

**Teorema 1.29.** Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a soma de uma função par com uma função ímpar.

*Demonstração.* Considere as funções

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \Big( f(x) + f(-x) \Big) \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{2} \cdot \Big( f(x) - f(-x) \Big)$$

que são, respectivamente, par e ímpar, pois

$$g(-x) = \frac{1}{2} \cdot \Big( f(-x) + f\big(-(-x)\big) \Big) = \frac{1}{2} \cdot \Big( f(x) + f(-x) \Big) = g(x)$$

e

$$h(-x) = \frac{1}{2} \cdot \Big( f(-x) - f\big(-(-x)\big) \Big) = -\frac{1}{2} \cdot \Big( f(x) - f(-x) \Big) = -h(x).$$

Agora, basta observar que $g(x)+h(x) = f(x)$, sendo que $f$ foi definida como uma função real qualquer. □

## 1.4 Função Afim

Aqui nesta seção abordamos sobre as funções afins e também sobre cada um de seus casos particulares. Além disso, vemos sobre as condições para que estas funções sejam classificadas como crescentes ou decrescentes, estudamos também sobre o zero da função afim, sobre seu gráfico, dentre outros assuntos.

**Definição 1.30 (Função Afim).** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando para todo $x \in \mathbb{R}$, o valor de $y = f(x)$ é dado por uma expressão do tipo $f(x) = ax+b$, onde $a$ e $b$ são constantes.

Numa função afim, o coeficiente $b$ é chamado de *termo constante* ou *termo independente*. Quando nos referimos ao gráfico da função afim, este termo $b$ representa onde a reta da função $f$ corta o eixo das ordenadas. Já o coeficiente $a$ é chamado de *taxa de variação* de $f$.

Agora, sabendo o que é uma função afim, veja que a função do Exemplo 1.7 é afim, visto que para obter $f(x) = 2x$ é necessário tomar $a = 2$ e $b = 0$. Veja agora outro exemplo de função afim:

**Exemplo 1.31.** A função $f(x) = 2x+1$ também é afim, sendo que aqui temos $a = 2$ e $b = 1$. É possível evidenciar que aqui a raiz desta função é dada por $x = -\frac{1}{2}$, sendo assim observe que o gráfico desta função corta os eixos em $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $(0, 1)$:

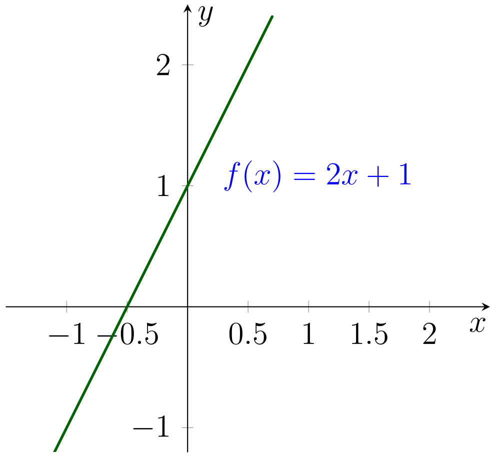


**Figura 1.18:** *Função Afim* $f(x) = 2x + 1$

Quanto à paridade de $f(x) = 2x + 1$, veja que esta é uma função sem paridade, pois

$$f(-x) = -2x + 1 \neq 2x + 1 = f(x) \;\text{ e }\; f(-x) = -2x + 1 \neq -2x - 1 = -f(x).$$

Temos três casos particulares de função afim, um deles é a função constante (Definição 1.32), onde $a = 0$, o outro caso é a função linear (Definição 1.34), onde $b = 0$. E, por fim, temos também a função identidade (Definição 1.36), que é uma particularidade da função linear, onde $a = 1$ e $b = 0$.

**Definição 1.32 (Função Constante).** Nas *funções constantes*, sendo $f : X \to Y$, é necessário definir $b \in Y$, de modo que a função propriamente dita é definida por $f(x) = b$ para todo $x \in X$. Ou seja, para qualquer valor que $x$ admita, $y$ sempre é dado por $f(x) = b$.

**Exemplo 1.33.** Seja $f$ uma função constante dada por $f(x) = b$. Veja que aqui temos apenas o termo independente $b$. Como já vimos, é o termo $b$ que determina onde o eixo $y$ deve ser cortado. Sabendo disso, observe o gráfico:

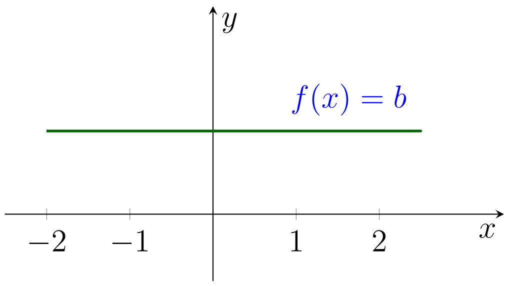


**Figura 1.19:** *Função Constante* $f(x) = b$

Note que a reta $y = b$, sempre é paralela ou coincidente (quando $b = 0$) com o eixo $x$, não sendo então, em hipótese alguma, concorrente com o eixo das abscissas, visto que não se tem valores definidos para $x$.

É possível ver também que a função constante sempre é par, isto porque $f(-x) = b = f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. E, graficamente também é visível que o lado esquerdo do eixo $y$ é simétrico ao lado direito.

**Definição 1.34 (Função Linear).** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *linear* quando $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$.

**Exemplo 1.35.** Uma função linear sempre corta a origem, isto porque o termo independente é dado por $b = 0$, ou seja, o eixo $y$ é cortado no 0, o que consequentemente nos garante que o eixo $x$ também é cortado em 0, visto que tendo $a \neq 0$, a única maneira de zerar $f(x) = ax$, é tendo $x = 0$. Veja o gráfico da função $f(x) = 3x$:

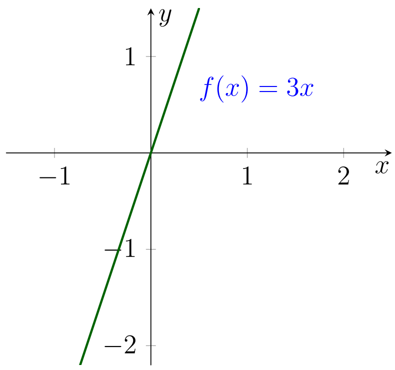


**Figura 1.20:** *Função Linear* $f(x) = 3x$

Pode-se observar que de fato, neste caso, a reta gerada pela função linear passa pela origem $(0, 0)$. Temos ainda, outro caso particular da função afim, mais especificamente da função linear, que é a função identidade (veja a Definição 1.36).

**Definição 1.36 (Função Identidade).** A *função identidade* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

**Exemplo 1.37.** Aqui na função identidade temos $f(x) = x$, o que geometricamente significa que a reta $y = x$ corta a origem $(0, 0)$. Algebricamente, temos que para cada valor de $x$ tomado, tem-se que sempre existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = x$. Veja graficamente:

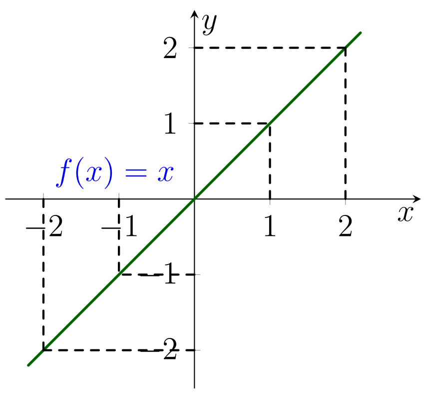


**Figura 1.21:** *Função Identidade* $f(x) = x$

Tanto a função linear, de modo geral, quanto a função identidade, são classificadas como funções ímpares, isto decorre do fato de que seja $f(x) = ax$ e $a \in \mathbb{R}^*$. Sendo $a$ igual ou diferente de 1, temos que

$$f(-x) = a \cdot (-x) = -ax = -f(x).$$

Sabendo que a função afim é da forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, podemos classificá-la como sendo crescente ou decrescente, ou seja, considerando eventos distintos temos classificações distintas para a função dada.

Portanto, temos que esta função é dita crescente quando $a > 0$, isto porque, sob esta condição de $a$, se $x_1 < x_2$ obrigatoriamente se tem $f(x_1) < f(x_2)$, o que de fato é verdade.

Veja que, se $x_1 < x_2$ então $x_2 - x_1 > 0$, logo

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = a \cdot (x_2 - x_1) > 0,$$

ou seja, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Analogamente, é possível provar que se $a < 0$, a função é decrescente e temos que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Então, quando se tem $a \neq 0$, vimos que, automaticamente, a função afim é classificada como crescente ou decrescente. Tendo isto como verdade, podemos garantir que é válido afirmar que esta função é injetora, isto pois sempre temos que $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Existe também a garantia de que toda função afim é sobrejetora, visto que dados $x, y \in \mathbb{R}$, sempre é possível encontrar $x$ de modo que $f(x) = y$. Sendo a função afim definida por $y = f(x) = ax + b$, temos que $x = \dfrac{y - b}{a}$. Conclui-se então que toda função afim, com $a \neq 0$, é classificada como bijetora.

Para analisarmos quais são as raízes de uma função, já vimos que é necessário que se tenha $y = 0$. Então, no caso da função afim, que é sobrejetora e tem sempre $x = \dfrac{y - b}{a}$, temos que o zero desta função é dado por $x = -\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Veja o Exemplo 1.31, nele temos que o zero da função $f(x) = 2x + 1$ é dado por $x = -\left(\dfrac{1}{2}\right)$, o que realmente comprova o fato de $x = -\left(\dfrac{b}{a}\right)$, visto que em $f(x) = 2x + 1$ temos $a = 2$ e $b = 1$.

Existe também, uma maneira de garantir que o gráfico de uma função afim é uma reta, isto é possível mesmo sem ter conhecimento de sua estrutura geométrica. Para mostrar este fato, usamos a fórmula da distância entre dois pontos (veja a Definição 1.38) e a Definição 1.6, que nos mostra as condições necessárias para saber como e quando se pode traçar um gráfico.

**Definição 1.38 (Distância entre Dois Pontos).** Sejam dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, temos que a *distância* entre eles é dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Então, dada a função afim $f(x) = ax + b$, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sabemos que seu gráfico $G(f)$ é o conjunto dos pontos $\big(x, f(x)\big) = (x, ax + b) \in \mathbb{R}^2$. Sejam $A = (x_1, ax_1 + b)$, $B = (x_2, ax_2 + b)$ e $C = (x_3, ax_3 + b)$ três pontos quaisquer de $G(f)$. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $x_1 < x_2 < x_3$.

Mostramos então que $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, ou seja $A$, $B$ e $C$ são colineares, sendo que $A^*B^*C$. De fato, temos

$$\begin{aligned}
d(A, B) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \big((ax_2 + b) - (ax_1 + b)\big)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - ax_1 - b)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \big(a \cdot (x_2 - x_1)\big)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2 \cdot (x_2 - x_1)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \cdot (1 + a^2)} \\
&= (x_2 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, tem-se que $d(B, C) = (x_3 - x_2) \cdot \sqrt{1 + a^2}$ e, consequentemente, temos também que $d(A, C) = (x_3 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}$. Desta forma, é possível verificar que

$$\begin{aligned}
d(A, B) + d(B, C) &= \left((x_2 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}\right) + \left((x_3 - x_2) \cdot \sqrt{1 + a^2}\right) \\
&= (x_2 - x_1 + x_3 - x_2) \cdot \sqrt{1 + a^2} \\
&= (x_3 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2} \\
&= d(A, C).
\end{aligned}$$

Portanto, vimos que tomando três pontos quaisquer do gráfico $G(f)$, chega-se à conclusão de que eles são de fato colineares como queríamos demonstrar. Como os pontos $A, B, C \in G(f)$ foram tomados aleatoriamente, segue que $G(f)$ quando $f$ é afim, é sempre uma reta, pois qualquer abscissa do domínio satisfaz a condição de ser um ponto de $G(f)$.

Sabendo agora que o gráfico da função afim é dado por uma reta e sabendo também que para determinar uma reta só é necessário ter conhecimento de dois de seus pontos, concluímos que para determinar o gráfico de qualquer função afim só é preciso conhecer dois de seus pontos.

Já vimos que os principais pontos de toda função são $(x, 0)$ e $\big(0, f(0)\big)$. Mas, isto só é verdade quando $x = 0$ fizer parte do domínio da função. Desta forma, sabendo apenas as interseções de $f$ com os eixos coordenados, já conseguimos traçar o gráfico da função, quando sua representação for uma reta.

## 1.5 Função Quadrática

Vemos nesta seção conceitos fundamentais para conhecermos o comportamento de toda função quadrática, aqui abordamos diversos temas relacionados às funções quadráticas, dentre eles, estudamos sobre os zeros da função, sobre sua forma canônica, sua paridade e também sobre as características que os gráficos carregam em si.

**Definição 1.39** **(Função Quadrática).** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ são constantes, com $a \neq 0$.

Observe que é necessário $a \neq 0$ pois, caso contrário, recaímos em uma função afim. Agora, já tendo definido o que é uma função quadrática, note que a função do Exemplo 1.8 é quadrática. Veja um outro exemplo:

**Exemplo 1.40.** Na função $f(x) = x^2 + 3x + 2$ representada aqui, vemos que o eixo $y$ é cortado em um único ponto, sendo ele $(0, 2)$, já o eixo das abscissas é cortado em dois pontos distintos $(-1, 0)$ e $(-2, 0)$, sendo estes as raízes distintas de $f$.

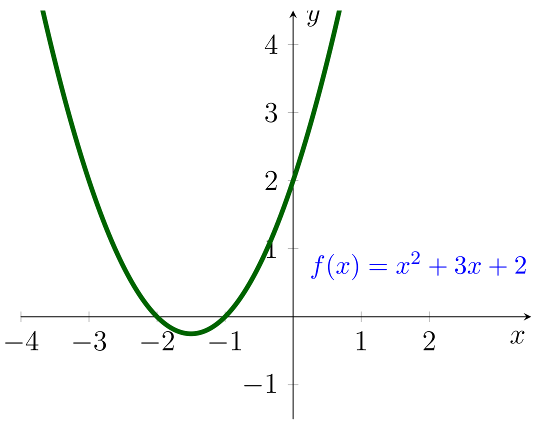


**Figura 1.22:** *Função Quadrática* $f(x) = x^2 + 3x + 2$

Da mesma forma que definimos uma fórmula geral para encontrar as raízes da função afim, é possível definir também para a função quadrática. Uma maneira interessante de fazer isto consiste em encontrar dois números de modo que a soma de ambos seja $s$ e, o produto entre eles seja $p$. Considerando um desses números sendo $x$, o outro consequentemente é $s - x$, logo $x \cdot (s - x) = p$. Efetuando a multiplicação, temos que $sx - x^2 = p$, ou seja, $x^2 - sx + p = 0$.

Encontrar $x$ e, consequentemente $s - x$, significa resolver a equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$, isto é, achar os valores de $x$ para os quais a função quadrática $f(x) = x^2 - sx + p$ se anula. Sendo esses valores de $x$ chamados de zeros da função quadrática, ou ainda, as raízes correspondentes à equação de $f$.

Neste caso, sendo $x$ uma das raízes, é possível verificar que $s - x$ é esta outra raiz correspondente. Futuramente, faremos $x = x_1$ e $s - x = x_2$ para facilitar a diferenciação de $x$ enquanto raiz e de $x$ enquanto incógnita da função.

Logo, as duas raízes da equação são de fato os números procurados. Mas, é importante ressaltar que tomados $s$ e $p$ arbitrariamente, nem sempre é possível encontrar dois números cuja soma seja $s$ e o produto $p$, isto porque nem sempre há solução para a função quadrática no conjunto dos números reais.

Um método útil para estudar a função quadrática, quando há solução, é saber completar quadrado. Basicamente, este procedimento se resume em entender o que significa a igualdade

$$x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}.$$

Sabendo isto, dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, podemos escrevê-la como sendo esta sucessão de igualdades:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x\right) + c \\ &= a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c, \end{aligned}$$

temos então que

$$f(x) = a \cdot \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{1.1}$$

É conveniente tomar $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -\left(\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$, com $m, k \in \mathbb{R}$ e $\Delta = b^2 - 4ac$. Sendo possível verificar facilmente que é válido o fato de que $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = f(m)$. Temos então, para todo $x \in \mathbb{R}$, que

$$f(x) = a \cdot (x - m)^2 + k, \quad \text{onde} \quad m = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = f(m). \tag{1.2}$$

A Expressão (1.2) é chamada forma canônica do trinômio $f(x) = ax^2+bx+c$. De modo geral, a forma canônica nos permite concluir que, para $k \in \mathbb{R}$, quando $a > 0$, o menor valor possível para $y = f(x)$ é $k$. E, quando $a < 0$, $k$ é o maior valor possível para $y = f(x)$, sendo $x \in \mathbb{R}$.

Veja que, tendo a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando considerado $\Delta \geqslant 0$, é possível descobrir também as raízes de sua equação equivalente. Para isto, faça $f(x) = 0$ e veja que

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0\\
a \cdot (x - m)^2 &= -k\\
(x - m)^2 &= -\frac{k}{a}\\
(x - m)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\\
x &= m \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Esta é uma fórmula bem conhecida e é nomeada por *Fórmula de Bháskara*. Sendo então, as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, iguais a $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Agora que já sabemos qual é a fórmula geral para encontrar as raízes $x_1$ e $x_2$, vamos olhar para a função $f(x) = x^2 + 3x + 2$ do Exemplo 1.40, onde vimos que o eixo $x$ é cortado nos pontos $(-1, 0)$ e $(-2, 0)$. É possível verificar que de fato esta fórmula geral é válida, pois veja que temos $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$, sendo assim,

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1},$$

o que realmente comprova que as raízes são $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$.

Outra nomenclatura que existe é para $\Delta$, ele é chamado de *discriminante* da função quadrática. Já vimos que existe raiz real para $f$ quando $\Delta \geqslant 0$, mas o que não vimos ainda foi as características individuais que temos para cada uma destas duas possibilidades. Na primeira, quando $\Delta > 0$, dizemos que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais distintas, já na segunda, quando $\Delta = 0$, esta equação possui uma única raiz, que é chamada dupla.

Lembrando que $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, note que podemos escrever o *discriminante* $\Delta$ em função da *constante* $k$, isto porque $\Delta = b^2 - 4ac = -4ak$. Sendo assim, para que se obtenha $\Delta = 0$ é necessário que se tenha $k = 0$, visto que $a \neq 0$. Logo, quando $\Delta = 0$, a Equação (1.2), que representa a forma canônica, se reduz à $f(x) = a \cdot (x - m)^2$, ficando claro aqui que obtemos $f(x) = 0$ somente quando $x = m = -\dfrac{b}{2a}$.

Existe ainda a possibilidade de que $\Delta = -4ak$ seja negativo. Para que isto ocorra, $a$ e $k$ devem ter o mesmo sinal, seja ele positivo ou negativo. No caso onde $a$ e $k$ são positivos, temos que $f(x) = a \cdot (x - m)^2 + k$ também é positiva. E, no caso onde $a$ e $k$ são negativos, $f$ também é negativa. Ou seja, a função $f(x) = a \cdot (x - m)^2 + k$ é sempre positiva ou negativa, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,.

Portanto, na hipótese de $\Delta < 0$, a equação equivalente a $f$ dada por $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, nunca se anula. Ou seja, de fato a função $f$ não possui raiz real.

A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é sempre classificada como uma função que tem a concavidade voltada para cima ou para baixo. O que define tal característica é o termo $a$, quando se tem $a > 0$, temos que $y = f(x)$ tem a concavidade voltada para cima, já no caso onde $a < 0$, $f$ tem a concavidade voltada para baixo.

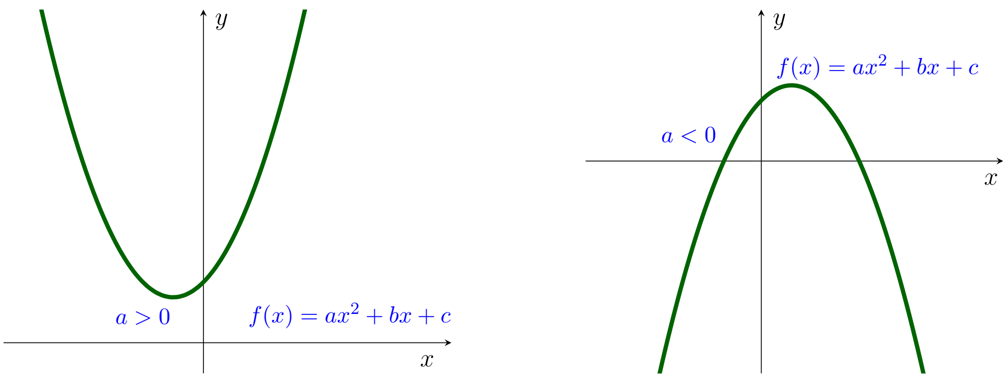


**Figura 1.23:** *Função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a$ variando*

Aqui na função quadrática, podemos fazer também uma análise mais detalhada tanto do termo $b$ quanto do termo $c$. Primeiro, vamos analisar as possibilidades para $b$, sendo que são três quando $a > 0$ e depois, mais três possibilidades quando $a < 0$.

Tanto para $a > 0$ quanto para $a < 0$, a única diferença é que a orientação da concavidade da parábola muda. Mas, ainda assim, é válido para ambos as três condições a seguir:

1. Se $b < 0$, temos que depois de cortar o eixo $y$, a curva da parábola continua descendo.
2. Se $b > 0$, temos que depois de cortar o eixo $y$, a curva da parábola continua subindo.
3. Se $b = 0$, temos que imediatamente após cortar o eixo $y$, a curva da parábola continua no mesmo alinhamento.

Como dissemos, o que muda é apenas a concavidade da parábola. Veja primeiro, os gráficos que representam as três análises para $b$ quando $a > 0$ e depois para quando $a < 0$.

Para isso, sem perda de generalidade para quando $a > 0$, considere a função dada por $f(x) = x^2 + bx + c$, com $a = 1$ e veja as variação de $b$:

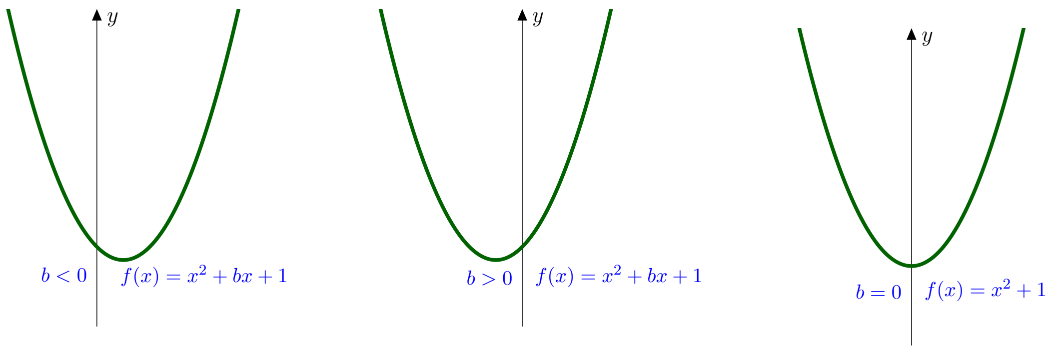


**Figura 1.24:** *Função $f(x) = x^2 + bx + c$ com $b$ variando*

Agora, veja as variações de $b$ quando $a < 0$, considerando aqui, sem perda de generalidade, a função dada sendo $f(x) = -x^2 + bx + c$, com $a = -1$:

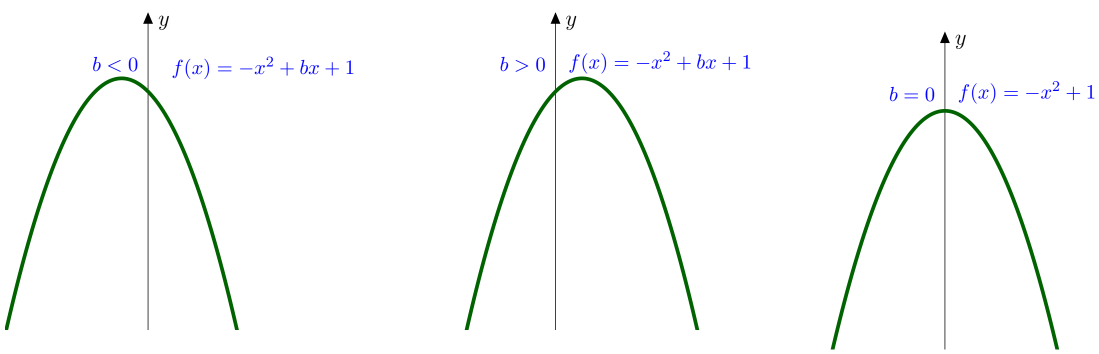


**Figura 1.25:** *Função $f(x) = -x^2 + bx + 1$ com $b$ variando*

Em seguida, analisando o termo $c$ da função quadrática, continuamos seguindo o mesmo padrão da função afim. Aqui, o eixo $y$ também é cortado exatamente no ponto $\big(0, f(0)\big) = (0, c)$, sendo $c \in \mathbb{R}$ o *termo independente*. Olhando o Exemplo 1.40, vemos no seu gráfico que o eixo das ordenadas está sendo intersectado no ponto $(0, 2)$, comprovando que o eixo $y$ é realmente cortado em $(0, c)$.

Existem também possibilidades distintas para a análise de $c$. Mas, tanto para $a > 0$ quanto para $a < 0$, essa análise é dada por:

1. Se $c < 0$, temos que a curva da parábola corta o eixo $y$ abaixo do eixo $x$.
2. Se $c > 0$, temos que a curva da parábola corta o eixo $y$ acima do eixo $x$.
3. Se $c = 0$ temos que a curva da parábola corta o eixo $y$ no eixo $x$, ou seja, no ponto $(0, 0)$.

Aqui, da mesma forma que na análise do termo $b$, o que muda é a concavidade da parábola, pois é necessário analisar os três casos de $c$ quando $a > 0$ e os outros três para quando $a < 0$.

Considere, sem perda de generalidade para a análise de $c$, quando $a > 0$ a função dada por $f(x) = x^2 + x + c$, com $a = 1$ e veja graficamente estas variações de $c$:

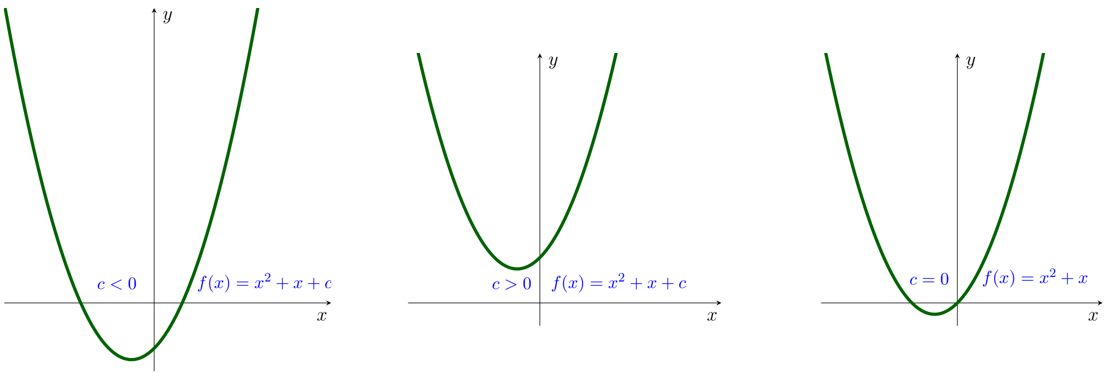


**Figura 1.26:** *Função $f(x) = x^2 + x + c$ com $c$ variando*

Veja, agora, o gráfico para as três variações de $c$, quando $a < 0$. Considerando, sem perda de generalidade, a função dada por $f(x) = -x^2 + bx + c$, com $a = -1$:

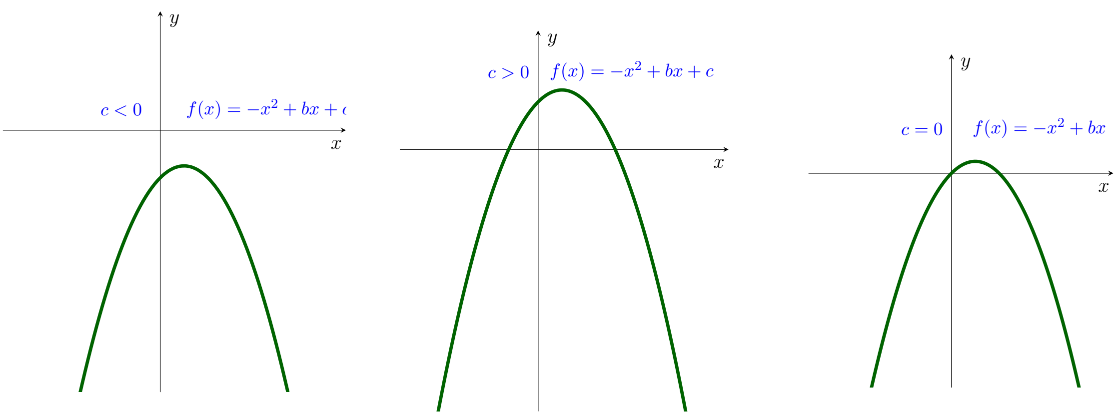


**Figura 1.27:** *Função $f(x) = -x^2 + bx + c$ com $c$ variando*

É possível analisar também a paridade da função quadrática, veja as quatro possíveis análises:

1. Para $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos afirmar que $y = f(x)$ é uma função sem paridade definida. De fato,

$$f(-x) = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) + c = ax^2 - bx + c,$$

então, vemos que $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$.

2. Para $f(x) = ax^2 + bx$, não temos também a garantia de que $f$ é uma função par ou ímpar. De fato,

$$f(-x) = a \cdot (-x)^2 + b \cdot (-x) = ax^2 - bx,$$

então, tem-se que $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$.

3. Para $f(x) = ax^2 + c$, sabe-se que temos uma função par. De fato,

$$f(-x) = a \cdot (-x)^2 + c = ax^2 + c,$$

então, obtém-se que $f(-x) = f(x)$.

4. Para $f(x) = ax^2$, veja que temos também uma função par. De fato,

$$f(-x) = a \cdot (-x)^2 = ax^2,$$

tem-se então que $f(-x) = f(x)$.

## 1.6 Função Polinomial e Racional

Em geral, estudar funções polinomiais de grau maior ou igual a três requer um pouco mais de conhecimento, mas nem sempre estes conhecimentos são ensinados no Ensino Médio. Aqui, vemos a Definição 1.43 e os Exemplos 1.44 e 1.45, que são de terceiro grau e que cujas as raízes foram fáceis de determinar, visto que no geral descobrir raízes de polinômios de grau maior ou igual a dois não é uma tarefa fácil. E, além dos exemplos de funções polinomiais, vemos aqui também exemplos de funções racionais.

**Definição 1.41 (Função Polinomial).** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *polinomial* quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$, onde $n \in \mathbb{N}$ e os termos $a_n, \cdots, a_0$ são constantes.

Usando a notação sigma podemos escrever as funções polinomiais na forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k, \tag{1.3}$$

onde os termos da forma $a_k \cdot x^k$ representam os monômios de grau $k$ do polinômio. Em geral, uma função polinomial não tem paridade definida, mas como já vimos no Teorema 1.29, toda função real é sempre a soma de uma função par e de outra parte ímpar.

Sendo assim, dizemos que a função polinomial é composta por uma soma de funções que são pares e de outras que são ímpares. Veja a Propriedade 1.42, nela identificamos quem são as funções pares e as ímpares que estão presente nesta soma.

**Propriedade 1.42.** Toda função polinomial:

1. que só tem monômios pares é uma função par.
2. que só tem monômios ímpares é uma função ímpar.

*Demonstração.* Para demonstrar esse resultado observe a Equação (1.3), nela vemos que se os monômios são todos pares, ou seja, $k = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$, temos

$$(-x)^k = (-x)^{2m} = \left((-x)^2\right)^m = (x^2)^m = x^{2m} = x^k,$$

para todo $k$ par e natural. Analogamente, se $k$ é ímpar, ou seja, se $k = 2m + 1$, com $m$ natural, segue que

$$(-x)^k = (-x)^{2m+1} = \left((-x)^2\right)^m \cdot (-x) = (x^2)^m \cdot (-x) = -(x^2)^m \cdot x = -x^{2m+1} = -x^k.$$

Agora que já sabemos qual é comportamento dos monômios pares e ímpares, vamos analisar Equação 1.3 para cada caso. Logo, se $k$ é par, temos

$$f(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (-x)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = f(x),$$

e, se $k$ é ímpar temos que

$$f(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (-x)^k = -\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = -f(x).$$

$\square$

Um caso particular de função polinomial é a função cúbica, veja a Definição 1.43 com maiores detalhes sobre.

**Definição 1.43** (**Função Cúbica**). Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *cúbica* ou de *terceiro grau* quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ são constantes, com $a \neq 0$.

É necessário que se tenha $a \neq 0$, justamente para não obtermos uma função quadrática no lugar da função cúbica desejada. Aqui, como o próprio nome já diz, temos três raízes para a função. Veja um exemplo:

**Exemplo 1.44.** Vamos analisar e esboçar o gráfico da função $f(x) = x^3$, que é o exemplo mais simples de uma função cúbica. Para isso, observe que a única raiz desta função é $x = 0$, que no caso é uma raiz tripla. Assim, sabemos então que o gráfico desta função passa pela origem $(0, 0)$, pode-se observar também que ela é uma função crescente e ímpar. Isto porque, pela Propriedade 1.42, como 3 é ímpar, temos que $f(x) = x^3$ também é ímpar. Mas, podemos verificar facilmente também que

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Segue, com auxílio de uma tabela e destas observações, o gráfico desta função. Considerando que, para melhor visualização do esboço deste gráfico, foi considerado a escala do eixo $y$ igual a metade da escala do eixo $x$.

| $x$ | $y = f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $-8$ |
| $-1$ | $-1$ |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |

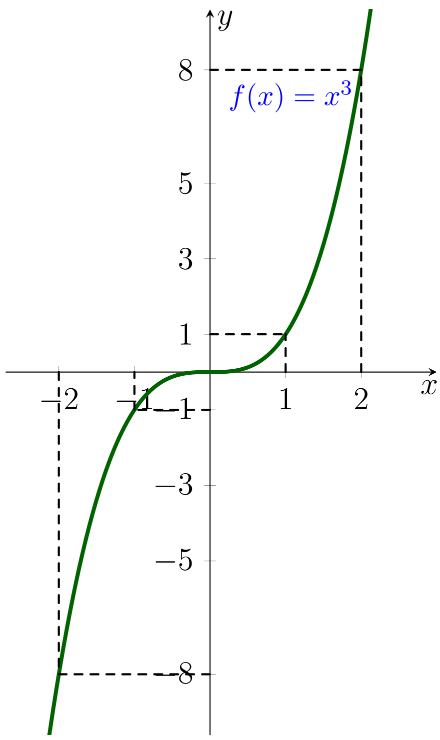


**Figura 1.28:** *Função Cúbica* $f(x) = x^3$

Os pontos $(-2, -8)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 8)$ não foram escolhidos aleatoriamente. Já mencionamos que em uma função ímpar temos que as imagens de $-x$ são opostas às imagens de $x$, garantindo que de fato o lado esquerdo do gráfico seja antissimétrico ao lado direito.

E, olhando para os pontos mencionados, vemos que estas condições são respeitadas, visto que estes pontos, exceto a origem $(0,0)$, são antissimétricos entre si. Isto porque $(-2,-8)$ é antissimétrico a $(2,8)$ e, $(-1,-1)$ é antissimétrico a $(1,1)$.

**Exemplo 1.45.** Outro exemplo é a função $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, esta função tem três raízes distintas, pois ao fatorá-la, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= x \cdot (x^2 - 1) - 2 \cdot (x^2 - 1) \\ &= (x - 2) \cdot (x^2 - 1) \\ &= (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1), \end{aligned}$$

sendo então, as raízes iguais a $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. Desta forma, sabemos então que o eixo $x$ é cortado nos pontos $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(2,0)$. Já o eixo $y$ é cortado apenas no ponto $(0,d) = (0,2)$, veja isto graficamente:

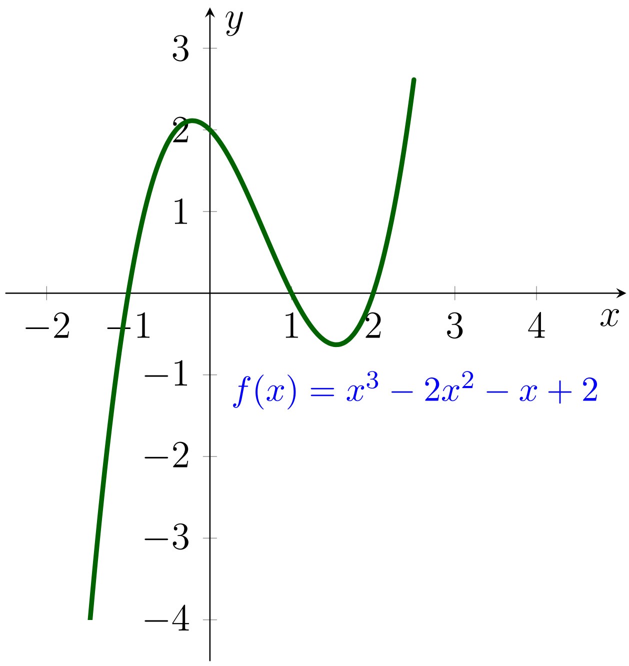


**Figura 1.29:** *Função Cúbica* $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Veja no Apêndice A.3 quais são os códigos em TikZ que geram esta Figura 1.29.

Para esta função cúbica não temos a garantia de que $f$ seja par ou ímpar, ou seja, a função $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ não tem paridade definida. E também, não é garantido que a função seja crescente ou decrescente, a não ser que analisemos cada intervalo individualmente dentro de todo o domínio. Isto porque esta função representa para nós algumas oscilações enquanto percorre seu domínio, pois em alguns momentos temos que a função $f$ é crescente e em outros é decrescente.

Além da função polinomial, temos também a função racional, vemos na Definição 1.46 que de certa forma, a função racional depende divide algumas de suas características com as funções polinomiais, ou seja, na função racional temos os conceitos já vistos na função polinomial acrescentados de alguns outros conceitos e propriedades mais específicos.

**Definição 1.46 (Função Racional).** Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *racional* quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)},$$

onde $A(x)$ e $B(x)$ são funções polinomiais (Definição 1.41). É importante deixar explícito aqui, que é necessário ter $B(x) \neq 0$, pois caso ocorra $B(x) = 0$ tem-se uma indeterminação.

Podemos ter também, algumas funções da forma $h_n(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x \neq 0$. Estas funções são diferente das funções exponenciais (veja a Definição 3.8) pois a variável aqui ainda não se encontra no expoente da função, mas sim no denominador.

Funções que seguem esta lei de formação não são raras, tanto é que são consideradas um caso específico de função racional. Só devemos tomar cuidado com o domínio desta função, isto porque é necessário que se tenha $x \neq 0$ para que não haja indeterminações.

Independente do fato de $n$ ser par ou ímpar, veja que se $x$ for tomado como sendo o mais próximo possível de zero, obtemos valores absolutos grandes para $y = h_n(x)$. E, quanto maior em valor absoluto forem os valores de $x$, menor em valores absolutos serão as suas imagens $y = h_n(x)$. Isso pode ser observado, geometricamente, nos dois casos particulares exibidos nos Exemplos 1.47 e 1.48.

Por enquanto, vamos analisar dois casos isolados para $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$. O primeiro deles com $n = 1$ exibido no Exemplo 1.47 e, o segundo com $n = 2$ que pode ser visto no Exemplo 1.48. Sabemos que ao analisar ambos os casos, $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$ e $h_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$, nos deparamos com exemplos básicos que representam o que é uma função racional.

Depois de estudarmos estes dois casos particulares, vamos ver também a função $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ como sendo uma das famílias de funções presentes neste trabalho, tudo isto será visto nos Exemplos 1.34 e 1.35 da Seção 1.7.

**Exemplo 1.47.** Neste exemplo, temos a função $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$, aqui não vamos entrar em maiores detalhes, mas só a título de curiosidade, sabe-se que a função $h$ dá origem ao gráfico de uma hipérbole. Para encontrar como foi traçado este gráfico, utilizamos uma tabela para nos nortear na marcação dos pontos exibidos que estão exibidos na Figura 1.30. Nesta tabela encontramos os pontos $\left(-4, -\dfrac{1}{4}\right)$, $\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$, $(-1, -1)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, -2\right)$, $\left(-\dfrac{1}{4}, -4\right)$, $\left(\dfrac{1}{4}, 4\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $(1, 1)$, $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(4, \dfrac{1}{4}\right)$.

| $x$ | $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$ |
|---|---|
| $-4$ | $-\dfrac{1}{4}$ |
| $-2$ | $-\dfrac{1}{2}$ |
| $-1$ | $-1$ |
| $-\dfrac{1}{2}$ | $-2$ |
| $-\dfrac{1}{4}$ | $-4$ |
| $\dfrac{1}{4}$ | $4$ |
| $\dfrac{1}{2}$ | $2$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $\dfrac{1}{2}$ |
| $4$ | $\dfrac{1}{4}$ |

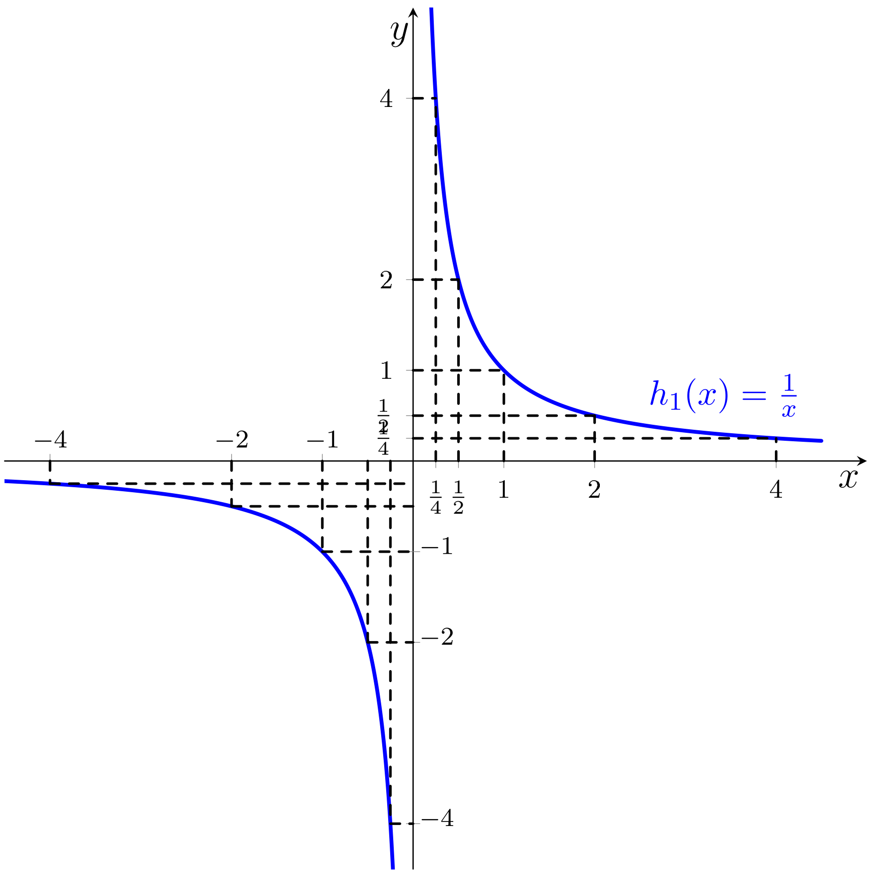


**Figura 1.30:** *Função* $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$

Veja no Apêndice A.4 quais são os códigos em TikZ que geram esta Figura 1.30.

**Exemplo 1.48.** Aqui temos outro exemplo, onde a função utilizada agora é $h_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Da mesma forma que fizemos para a função $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$, aqui neste exemplo também vamos utilizar uma tabela, com alguns pontos específicos, que serviu para nós como apoio para conseguirmos determinar qual é o gráfico de $h$. Aqui nesta tabela, temos os pontos $\left(-3, \dfrac{1}{9}\right)$, $\left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$, $(-1, 1)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, 4\right)$, $\left(-\dfrac{1}{3}, 9\right)$, $\left(\dfrac{1}{3}, 9\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 4\right)$, $(1, 1)$, $\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$ e $\left(3, \dfrac{1}{9}\right)$.

| $x$ | $h_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ |
|---|---|
| $-3$ | $\dfrac{1}{9}$ |
| $-2$ | $\dfrac{1}{2}$ |
| $-1$ | $1$ |
| $-\dfrac{1}{2}$ | $4$ |
| $-\dfrac{1}{3}$ | $9$ |
| $\dfrac{1}{3}$ | $9$ |
| $\dfrac{1}{2}$ | $4$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $\dfrac{1}{4}$ |
| $3$ | $\dfrac{1}{9}$ |

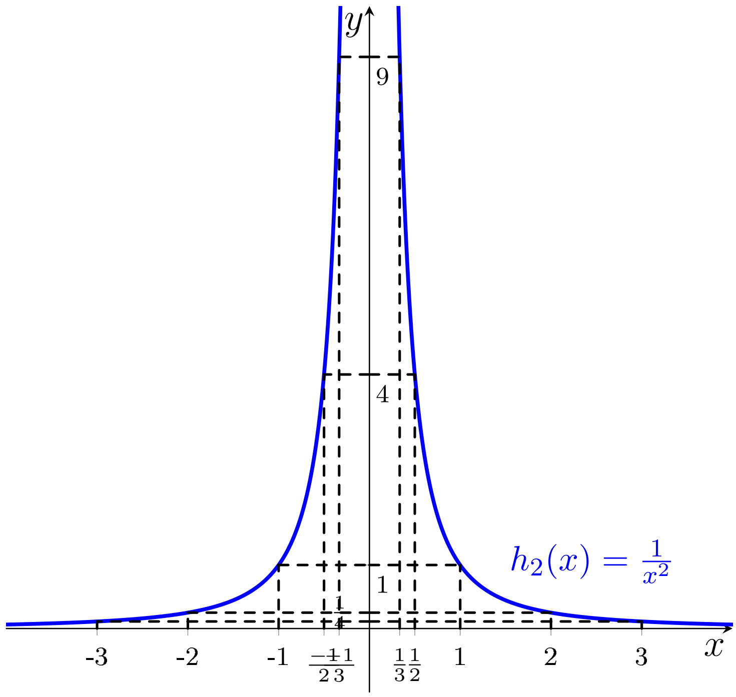


**Figura 1.31:** *Função* $h_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Observe que, tanto no Exemplo 1.47 quanto no Exemplo 1.48, temos que de fato é válida a condição que garante que quanto maior se toma $x$, menor se obtém valores absolutos para $y = h_n(x)$ e é válido também a recíproca.

Em ambos os exemplos, é possível notar também que em relação à paridade destas funções racionais, é válido a Propriedade 1.42, pois ela nos garante que a paridade das funções dependem diretamente dos graus dos monômios representados por $n$, ou seja, se $n$ é ímpar, a função tem paridade ímpar e, se $n$ for par, a paridade da função é par.

Nota-se também, que nos gráficos das funções $h_1(x) = \dfrac{1}{x}$ e $h_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ não se tem cortes no eixo $x$. Isto ocorre porque o eixo $x$ só poderia ser cortado se ocorresse $h_n(x) = 0$, com $n = 1, 2$ mas, sabemos que $h_n(x) \neq 0$.

Isto porque, recorrendo à Matemática Básica e fazendo o cálculo apenas para $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$, com $n = 1$, nos deparamos com um absurdo.

E, já é importante evidenciar aqui, que de modo análogo, podemos calcular $h$ para qualquer que seja o valor de $n$. Agora, veja como se é o cálculo para a função $h_1$:

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= \frac{1}{x} \\
0 &= \frac{1}{x}, \text{ multiplicando ambos os lados por } x, \text{ obtemos} \\
0 \cdot x &= \frac{1}{x} \cdot x \\
0 &= 1, \text{ o que de fato é um absurdo.}
\end{aligned}$$

Existe também outro caminho para solucionar esta equação, mas independente de qual seja o caminho escolhido, o importante é que concluímos que $h_n(x) = \dfrac{1}{x}$ é um absurdo.

Aqui, como já dissemos, vimos apenas estes dois casos de funções racionais, mais a frente vemos toda esta família. Mas, antes disto, veja a família $f_n(x) = x^n$, depois a família $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ e, por último, mas não menos importante, veja também a família $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$.

## 1.7 Famílias de Funções

Nesta seção estudamos as funções como sendo famílias, ou seja, caso as funções sigam um mesmo padrão que defina suas leis de formação, podemos agrupar cada uma destas leis de formação para podermos estudar assim todo o agrupamento da família de uma só vez.

Seja $f_n(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, já vimos nos Exemplos 1.32, 1.36, 1.8 e 1.44 quatro membros desta família, sendo eles respectivamente, a função constante $f_0(x) = b$, com $b \in \mathbb{R}$ sendo a constante, a função identidade $f_1(x) = x$, a função quadrática $f_2(x) = x^2$ e a função cúbica $f_3(x) = x^3$.

Conhecendo-os e sabendo que o padrão destes leis de formações é seguido, conseguimos exibir ao menos uma parte do restante desta família.

**Exemplo 1.49.** Aqui neste exemplo, exibimos a função $f_n(x) = x^n$, com $n = \{1, \cdots, 5\}$, não estendemos muitos valores para $n$ porque o foco aqui não é exibir todos os membros desta família, o foco real é na verdade exibir uma quantidade destes membros que seja suficiente para nos nortear de como seja o comportamento de toda a família. Veja o gráfico que exibe esta parte da família $f_n(x) = x^n$ na Figura 1.32 e veja a construção deste gráfico no GeoGebra no Exemplo 4.4. Veja também, no Apêndice A.5, quais são os códigos em TikZ que geram esta Figura 1.32.

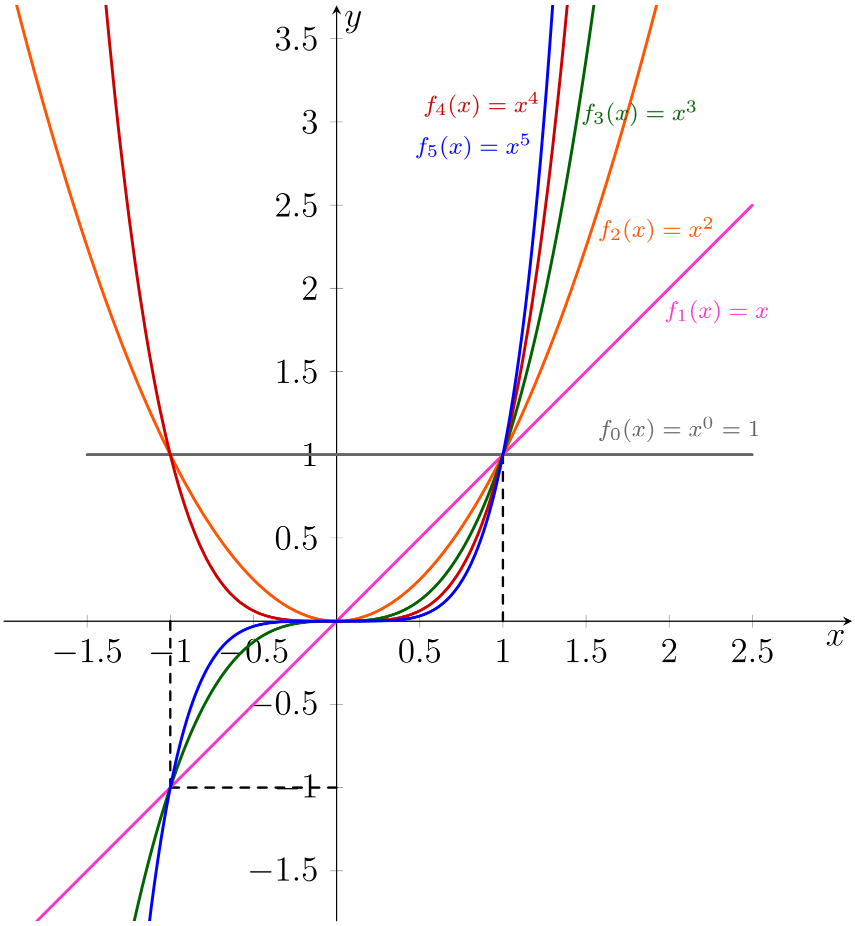


**Figura 1.32:** *Família* $f_n(x) = x^n$

Olhando a paridade da família $f_n(x) = x^n$, observe que todas as funções pertencentes a esta família, tanto aquelas que são pares quanto as que são ímpares, estão passando pelo ponto $(1, 1)$. Mas, pelo ponto $(-1, -1)$ é apenas as funções ímpares que passam.

Porém, o que não foi dito aqui ainda, foi como é que podemos definir tais paridades. Da mesma forma que definimos a Propriedade 1.42, basta analisar aqui, a paridade de $n$, pois caso $n$ seja par, temos uma função par, já se $n$ for ímpar temos que $f_n(x) = x^n$ é ímpar também.

Isto se dá devido ao fato de que caso $x$ seja negativo, quando elevado a qualquer expoente par tem seu sinal alterado, mas quando elevado a expoentes ímpares continua negativo, ou seja, no caso onde $n$ é par tem-se que $f_n(-x) = f_n(x)$ e quando $n$ é ímpar temos que $f_n(-x) = -f_n(x)$.

Tendo exibido a família $f_n(x) = x^n$, agora, vamos exibir agora a família $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$. Mas, antes de fazer a representação gráfica desta família, vamos considerar, sem perda de generalidade, apenas $n \in \{3, 4, 5\}$ e $x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$.

Nos Exemplos 1.47 e 1.48 já temos esboçado dois casos desta família com suas respectivas tabelas, sendo ele quando se tem $n = 1, 2$. Veja agora as tabelas que vão nos auxiliar a traçar o gráfico da família $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$.

| $x$ | $h_3(x) = \dfrac{1}{x^3}$ |
|---|---|
| $-3$ | $-\dfrac{1}{27}$ |
| $-2$ | $-\dfrac{1}{8}$ |
| $-1$ | $-1$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $\dfrac{1}{8}$ |
| $3$ | $\dfrac{1}{27}$ |

| $x$ | $h_4(x) = \dfrac{1}{x^4}$ |
|---|---|
| $-3$ | $\dfrac{1}{81}$ |
| $-2$ | $\dfrac{1}{16}$ |
| $-1$ | $1$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $\dfrac{1}{16}$ |
| $3$ | $\dfrac{1}{81}$ |

| $x$ | $h_5(x) = \dfrac{1}{x^5}$ |
|---|---|
| $-3$ | $-\dfrac{1}{243}$ |
| $-2$ | $-\dfrac{1}{32}$ |
| $-1$ | $-1$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $\dfrac{1}{32}$ |
| $3$ | $\dfrac{1}{243}$ |

**Figura 1.33:** *Tabelas para* $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$, *com* $n = 3, 4, 5$

Tendo conhecimento das tabelas, fica mais fácil agora definir graficamente esta família. Veja que esta representação geométrica foi divida em duas partes, visto que $n$ ser par ou ímpar, interfere diretamente no comportamento do seu gráfico, já que a paridade de $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$, depende da paridade de $n$.

Sendo assim, temos que quando $n$ é par, o gráfico de $h_n$ é dado por:

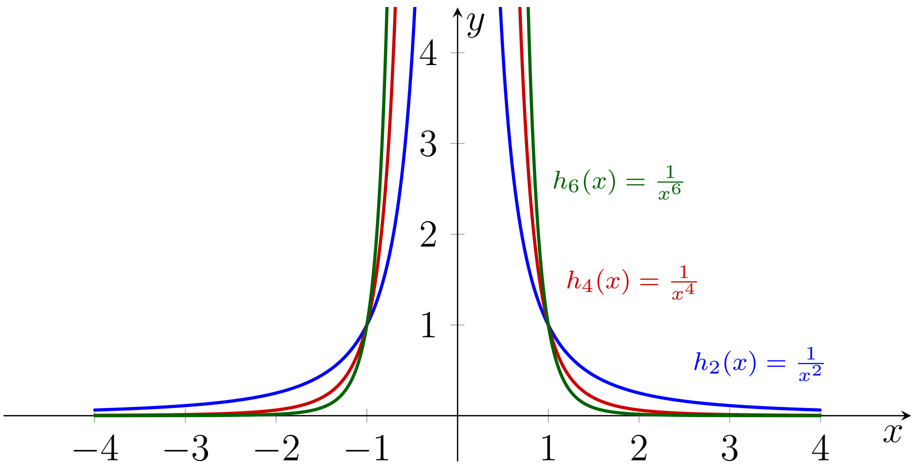


**Figura 1.34:** *Família* $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ *quando* $n$ *é Par*

Agora, quando $n$ é ímpar, esta família tem comportamento definido por:

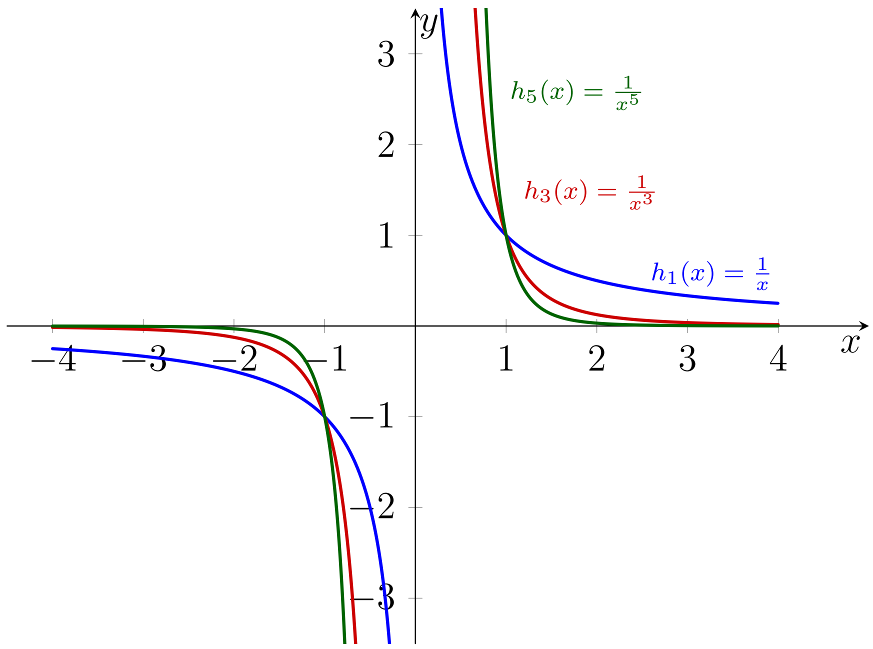


**Figura 1.35:** *Família* $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$ *quando* $n$ *é Ímpar*

Vamos ver agora outra família de funções, sendo que ela pode ser definida por $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$ e é denominada como sendo a função raiz n-ésima (Definição 1.50).

**Definição 1.50 (Função Raiz n-Ésima).** Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de *função raiz n-ésima* quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$, com $n \in \mathbb{N}$, sendo $n \neq 0, 1$ e com a condição de $x \geqslant 0$, quando $n$ for *par*.

Da mesma forma que fizemos na função $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$, a princípio só vemos os casos particulares da função $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$, sendo estes os casos onde $n = 2, 3$ e $4$. Sem perda de generalidade, tome $x \in \{0, 1, 4, 9\}$.

Sendo assim, veja inicialmente as tabelas que nos auxiliam na construção do gráfico deste família:

| $x$ | $g_2(x) = \sqrt[2]{x}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 4 | 2 |
| 9 | 3 |

| $x$ | $g_3(x) = \sqrt[3]{x}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 4 | $\sqrt[3]{4} \approx 1.59$ |
| 9 | $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$ |

| $x$ | $g_4(x) = \sqrt[4]{x}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 4 | $\sqrt[4]{4} \approx 1.41$ |
| 9 | $\sqrt[4]{9} \approx 1.73$ |

**Figura 1.36:** *Tabelas para* $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$*, com* $n = 2, 3, 4$

Primeiro exibimos aqui o gráfico de um de seus casos particulares, sendo ele a função raiz quadrada exibido na Figura 1.37. Sendo este, o caso mais genérico e habitual da função raiz n-ésima, para este caso particular, onde $n = 2$, nem é necessário escrever $g_2(x) = \sqrt[2]{x}$, é suficiente dizer que $g_2(x) = \sqrt{x}$.

Em destaque, veja seu gráfico e nele note que temos evidenciado através do pontilhado justamente os valores de $x$ que resultam em raízes quadradas com os resultados inteiros que foram exibidos em uma das tabelas da Figura 1.36:

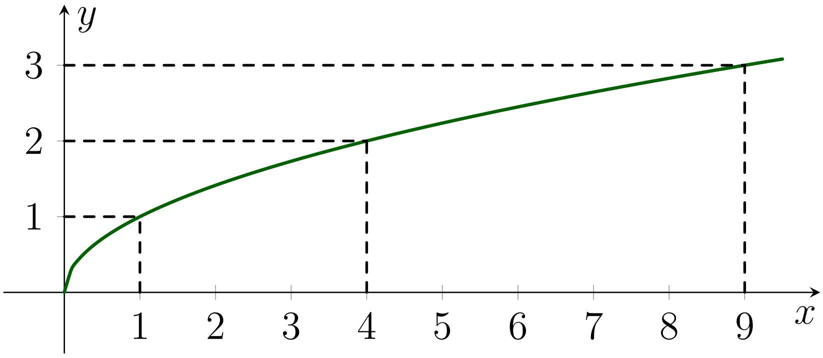


**Figura 1.37:** *Função Raiz Quadrada* $g_2(x) = \sqrt{x}$

Já para ver o gráfico da função raiz n-ésima no geral, veja as Figuras 1.38 e 1.39, pois assim como a função $h_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$, a função $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$ também está sendo tratada como uma família de funções, que tem alterações no seu gráfico que também dependem de $n$.

Veja inicialmente o comportamento desta família quando $n$ é par na Figura 1.38:

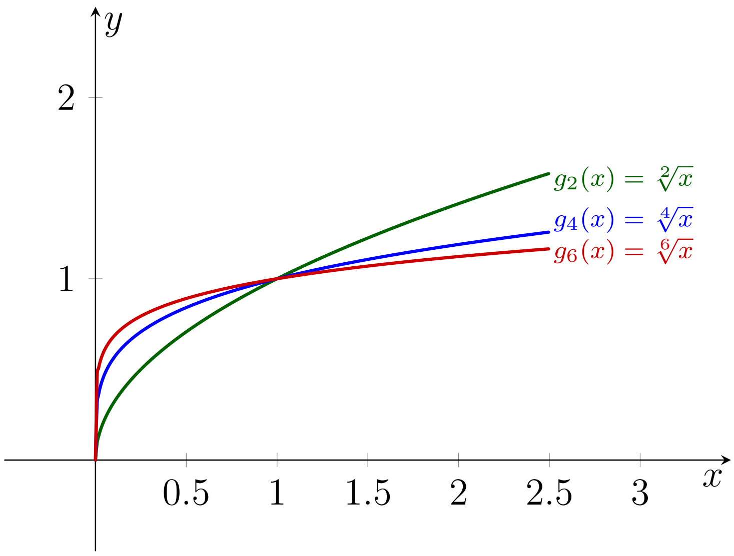


**Figura 1.38:** *Família* $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$ *quando* $n$ *é Par*

Agora, veja como é o comportamento de $g$ quando n é ímpar na Figura 1.39:

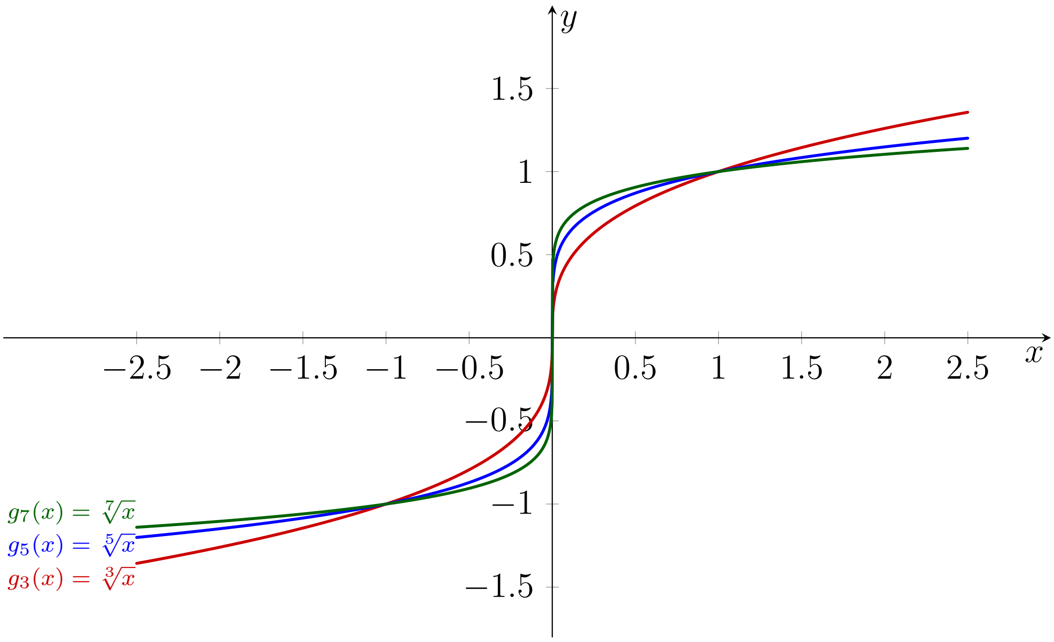


**Figura 1.39:** *Família $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$ quando $n$ é Ímpar*

Neste Capítulo 1 vemos apenas estes conceitos mais básicos das funções, já no Capítulo 3 vemos alguns outros conceitos e exemplos mais complexos. Mas, antes disso, vemos no Capítulo 2 algumas definições, propriedades e conceitos sobre algumas das transformações no plano que são utilizamos no Capítulo 3.

CAPÍTULO 2

# Algumas transformações no plano

Aqui abordamos sobre conceitos de transformações no plano que contribuem para a construção dos gráficos das funções e sobre seus respectivos significados geométricos, sobre a paridade das funções e também sobre algumas propriedades e particularidades importantes das transformações planares aplicadas às funções.

Tudo isso é feito embasado nos autores [Anton 2000], [Thomas 2009], [Jablan 1995], [Lehmann 1998], [Barbosa 2010] e [Doreen et al. 2012]. Para exemplificar melhor os conceitos geométricos é usado o software GeoGebra e a linguagem de programação TikZ para nos apoiar na construção dos gráficos, mas só no Capítulo 4 é que mostramos o passo a passo destas construções.

Segundo [Jablan 1995], é possível observar que a simetria está presente no nosso cotidiano, seja através de artefatos criados pelo homem, como por exemplo em obras artísticas, ou até mesmo na própria natureza, como exemplo, temos as folhas das árvores, as asas das borboletas, entre outros.

O caso mais simples de transformação no plano, é quando temos a transformação identidade, embora seja simples, é importante fixarmos aqui sua existência, nesta transformação nada ocorre com o gráfico da função, dizemos que o gráfico sofre uma rotação de $2\pi$, o que faz com que ele volte à sua forma inicial.

## 2.1 Reflexão

Começamos a analisar o conceito de transformações no plano com os olhos voltados para o lado matemático através da reflexão, por meio do simples fato de considerarmos que dois pontos distintos são simétricos "[...] em relação a uma reta se e somente se o segmento da reta que une estes dois pontos é dividido ao meio e normalmente pela referida reta."[Lehmann 1998, p . 30]

Consideramos este caso citado acima como sendo a reflexão de um ponto em torno de um eixo preestabelecido, que neste caso é a reta dada.

**Definição 2.1 (Reflexão).** Veja aqui três definições de reflexão, sendo elas referente aos eixos coordenados e à origem.

$(R_x)$ - Uma *reflexão em torno do eixo $x$* é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(x, -y) \in \mathbb{R}^2$.
$(R_y)$ - Uma *reflexão em torno do eixo $y$* é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(-x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$(R_O)$ - Uma *reflexão em torno da origem $O = (0, 0)$* é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(-x, -y) \in \mathbb{R}^2$.

**Observação:** Podemos observar que $R_O$ é a composição das transformações $R_x$ e $R_y$, isto é

$$R_O = R_x \circ R_y = R_y \circ R_x.$$

De fato,

$$R_x \circ R_y(x, y) = R_x\left(R_y(x, y)\right) = R_x\left(-x, y\right) = \left(-x, -y\right).$$

Veja, graficamente, o que é cada uma destas reflexões para um determinado ponto $A = (x, y)$.

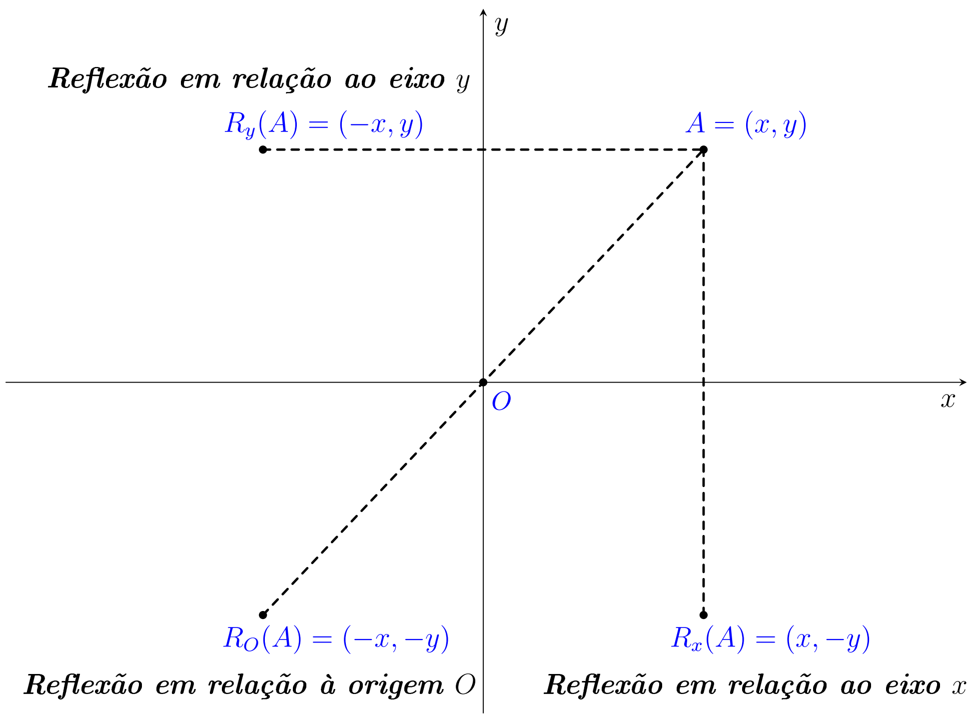


**Figura 2.1:** *Reflexões de um Ponto $A = (x, y)$*

Sendo assim, é possível ver que a reflexão é uma operação que divide o plano em duas partes iguais, considerando que, cada uma destas partes está de um lado do eixo de simetria considerado. Pode-se dizer então, que a reflexão é conhecida por fazer o mesmo que um espelho faz.

Seja $f$ uma função, cujo gráfico é dado por $y = f(x)$. A sua reflexão em torno do eixo $x$, denotada por $R_x(f(x))$, é dada por $y = -f(x)$, a reflexão em torno do eixo $y$, denominada por $R_y(f(x))$, é dada por $y = f(-x)$ e a reflexão em torno da origem $O$, cuja notação é $R_O(f(x))$ é dada por $y = -f(-x)$. Veja cada um destes casos graficamente:

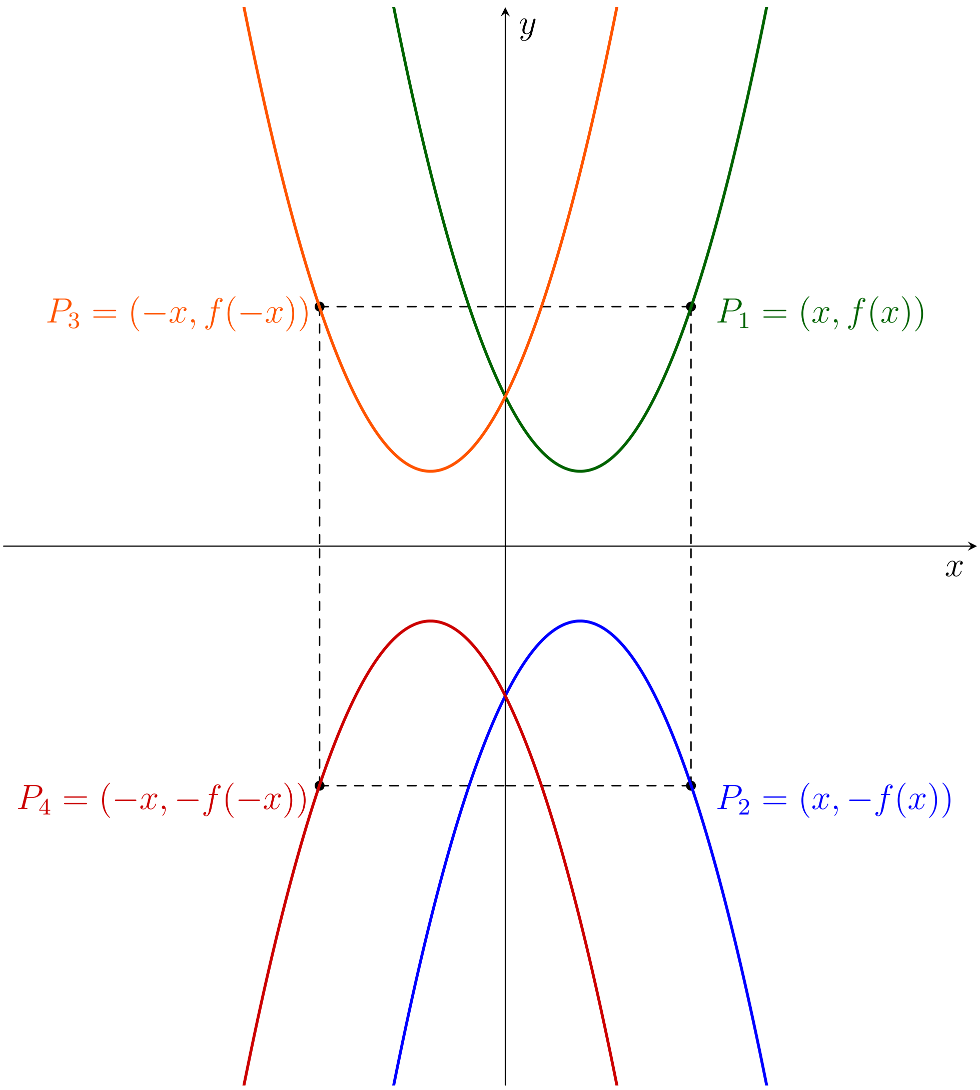


**Figura 2.2:** *Reflexões da Função* $y = f(x)$

## 2.2 Translação

Segundo [Doreen et al. 2012] temos também a transformação por meio da translação, neste caso a figura dada é disposta no plano repetidas vezes a uma mesma distância pré-determinada gerando um padrão. É válido ressaltar que de acordo com

[Jablan 1995] esta distância pode ser igual a 0, isto é, a repetição pode se manter lado a lado sem que haja espaços.

**Definição 2.2 (Translação).** Dados os números reais $a$ e $b$, temos três casos de translação, são eles:

($T_a$) - Uma *translação horizontal* $T_a$ é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(x + a, y) \in \mathbb{R}^2$.
($T_b$) - Uma *translação vertical* $T_b$ é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(x, y + b) \in \mathbb{R}^2$.
($T_{(a,b)}$) - Uma *translação* $T_{(a,b)}$ é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(x + a, y + b) \in \mathbb{R}^2$.

**Observação:** $T_{(a,b)}$ é a composição das transformações $T_a$ e $T_b$, isto é

$$T_{(a,b)} = T_a \circ T_b = T_b \circ T_a.$$

De fato,

$$T_a \circ T_b(x, y) = T_a\big(T_b(x, y)\big) = T_a\,(x, y + b) = (x + a, y + b)\,.$$

Veja graficamente o que é cada uma destas translações para um determinado ponto $A = (x, y)$ e para $a, b \in \mathbb{R}$ constantes.

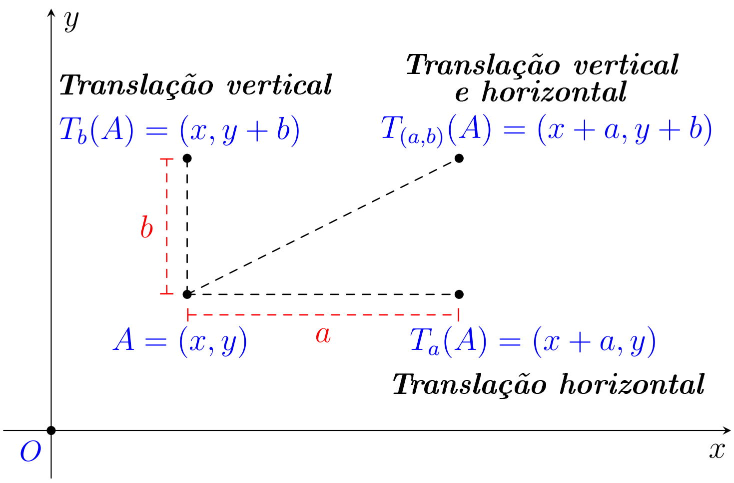


**Figura 2.3:** *Translações de um Ponto* $A = (x, y)$

É importante fixarmos aqui que, para a translação de pontos, quando $a > 0$, a translação horizontal ocorre para à direita, já quando $a < 0$, a translação em questão é para à esquerda. E, para a translação vertical também podemos fazer uma análise semelhante, pois se $b > 0$, a translação é para cima e, se $b < 0$ a translação ocorre para baixo.

Ou seja, a translação é a operação de transformação no plano que consiste no deslocamento do gráfico paralelamente a si próprio e que pode ocorrer também em torno de algum eixo.

Então, seja $f$ uma função e $c$ uma constante, temos que o gráfico $y = f(x)+c$ nos gera uma translação vertical (em relação ao eixo $x$), quando $c > 0$, a translação é para cima e, quando $c < 0$, $y = f(x)$ é transladada para baixo.

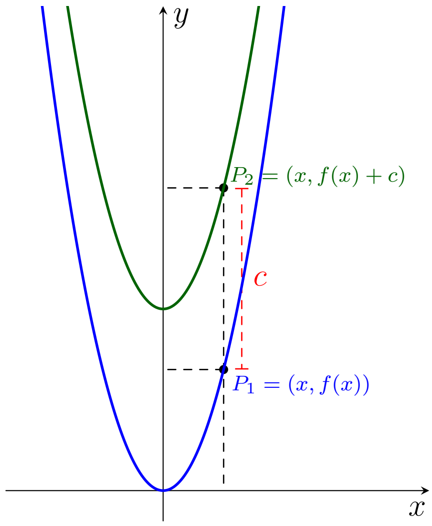


**Figura 2.4:** *Translação Vertical da Função* $y = f(x)$

Temos também as translações horizontais (em relação ao eixo $y$), para isso devemos adicionar uma constante $c$ ao argumento de $y = f(x)$, ou seja, temos $y = f(x+c)$. Aqui na translação horizontal de funções, temos que o comportamento das translações ocorre de forma diferente do que já vimos nas translações de pontos.

Então, quando estamos analisando as funções, se $c > 0$, temos uma translação horizontal para a esquerda e, se $c < 0$, temos esta translação horizontal ocorrendo para a direita.

Isto ocorre porque aqui, a constante está sendo acrescentado no argumento da função, para só depois ser feito o cálculo da imagem, cálculo este que vamos analisar detalhadamente.

Quando temos $c > 0$ encontramos que $y = f(x+c)$ tem valor maior para o seu argumento e, pelo fato de que o argumento é maior, temos que a imagem também é maior e, por isso, a parábola é translada para a esquerda. De modo análogo, podemos analisar a condição de quando se tem $c < 0$, neste caso, a translação horizontal ocorre para a direita.

Para facilitar a compreensão destes conceitos, tome como exemplo a função $y = f(x) = x^2$ sendo a função original e, $y = f(x+c) = (x+c)^2 = x^2+2xc+c^2$ sendo a sua forma transladada, fazemos isto considerando que $c = -1, 0, 1$. Ou seja, temos aqui variações para $y = f(x+c)$ que abrangem $c < 0$, a função na sua forma original onde $c = 0$ e $c > 0$ e, fazendo estas variações aplicadas neste exemplo numérico da Figura 2.5.

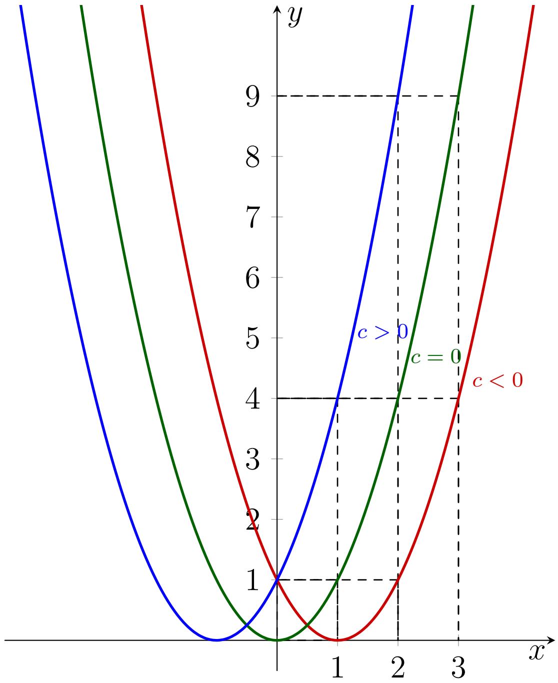


**Figura 2.5:** *Translação Horizontal da Função* $y = f(x + c)$, *com* $c = -1, 0, 1$

Agora que já vimos este exemplo numérico, podemos expandir a análise deste gráfico para a sua forma geral, considerando agora, $c$ como sendo uma constante positiva qualquer. Desta forma, veja no gráfico o comportamento de uma translação horizontal de $f$, sabendo que $f$ é uma função quadrática.

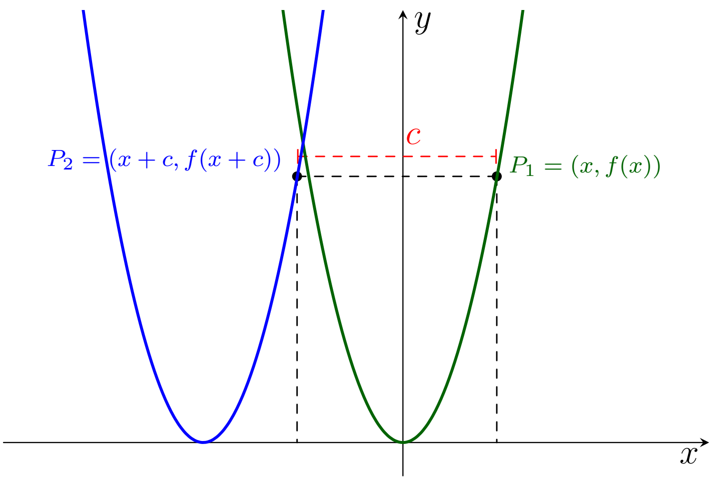


**Figura 2.6:** *Translação Horizontal da Função* $y = f(x)$

Por último, mas não menos importante, temos também casos onde ocorrem translações verticais e horizontais simultaneamente. Neste caso, sejam $a, b \in \mathbb{R}$, temos que a função $y = f(x)$ ao ser transladada fica sendo da forma $y = f(x+a)+b$, onde $a$ representa a translação horizontal e $b$ representa a translação vertical, que, respectivamente, foram representadas apenas por $c$ nas Figuras 2.4 e 2.6.

**Observação:** Considerando-se que aqui, é válido para $a$ e $b$, as mesmas condições que valem para $c < 0$ e $c > 0$ nos casos das translações que são apenas verticais ou horizontais.

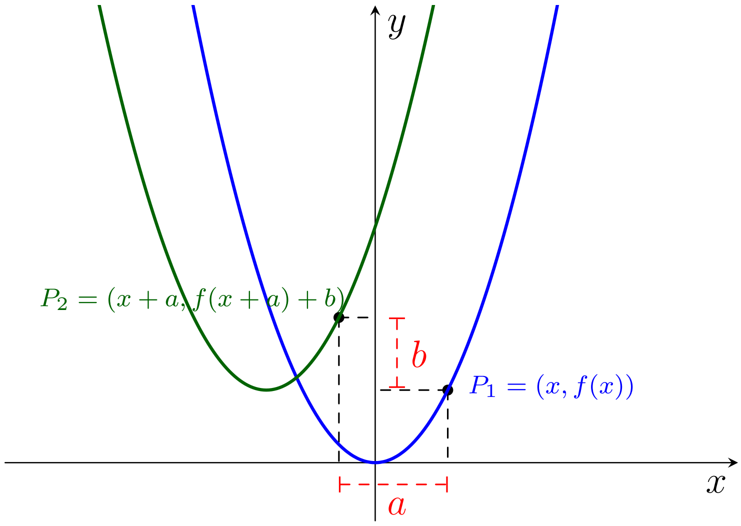


**Figura 2.7:** *Translação Vertical e Horizontal da Função* $y = f(x)$

Observe que os gráficos exibidos nas Figuras 2.4, 2.6 e 2.7 são de funções quadráticas (veja Definição 1.39). Sendo assim, prossiga para o Exemplo 2.4 para ver como se pode relacionar as funções quadráticas, na sua forma algébrica, com translações verticais e/ou horizontais.

Como já mencionamos, pode ocorrer também casos onde $a$ ou $b$ sejam nulos, ou seja, as repetições geradas pelas translações ocorrem lado a lado. Para ficar mais fácil de ver isto graficamente, vamos considerar o quadrado de raio 1 centrado em $(1, 1)$ e denotado por $Q_1$.

Veja que $Q_1$ tem seus vértices sendo $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (2, 2)$ e $D = (0, 2)$. Sem perda de generalidade, vamos considerar neste caso que $b = 0$, ou seja, vamos construir um quadrado $Q_2$ que é a translação vertical de $Q_1$, sendo a distância entre $Q_1$ e $Q_2$ nula.

Desta forma, obtém-se que os vértices de $Q_2$ são $C = (2, 2)$, $D = (0, 2)$, $E = (0, 4)$ e $F = (2, 4)$. E, é claro que $Q_1$ e $Q_2$ têm dois pontos em comum, visto que são transladados a uma distância nula. Veja graficamente esta construção:

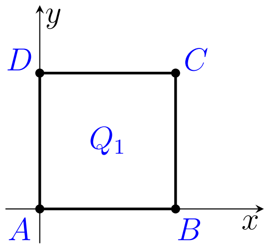


**Figura 2.8:** *Quadrado* $Q_1$

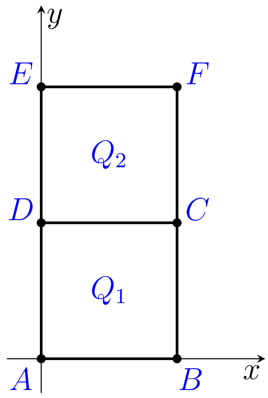


**Figura 2.9:** *Quadrados* $Q_1$ *e* $Q_2$

Analogamente, é possível também fazer outra construção, agora com $a = 0$, ou seja, transladando $Q_1$ horizontalmente, mas não é necessário explicitar tal construção aqui, visto que o processo é semelhante ao que já fizemos.

## 2.3 Contração e Dilatação

O objetivo desta seção é falar sobre contrações e dilatações, isto significa que estamos nos referindo ao ato de comprimir ou expandir pontos ou funções, seja verticalmente ou horizontalmente. Nesta seção, apenas explicamos como funciona cada um destes conceitos, mas vamos usá-los com maior frequência no Capítulo 3.

### 2.3.1 Contração e Dilatação de Pontos

Nesta subseção temos a definição de contração e de dilação de pontos no plano e, temos também as representações gráficas dessas transformações.

**Definição 2.3** (**Contração e Dilatação de Pontos no Plano**)**.** Dado um número real positivo $a$:

$(D_v)$ - Uma *dilatação vertical* $D_v$ é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(x, a \cdot y) \in \mathbb{R}^2$, se $a > 1$.
$(D_h)$ - Uma *dilatação horizontal* $D_h$ é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(a \cdot x, y) \in \mathbb{R}^2$, se $0 < a < 1$.
$(C_v)$ - Uma *contração vertical* $C_v$ é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(x, a \cdot y) \in \mathbb{R}^2$, se $0 < a < 1$.
$(C_h)$ - Uma *contração horizontal* $C_h$ é uma transformação que associa o ponto de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao ponto $(a \cdot x, y) \in \mathbb{R}^2$, se $a > 1$.

Agora, veja a representação geométrica destas contrações e dilatações para um determinado ponto $A = (x, y)$, sendo $a \in \mathbb{R}^+$ constante:

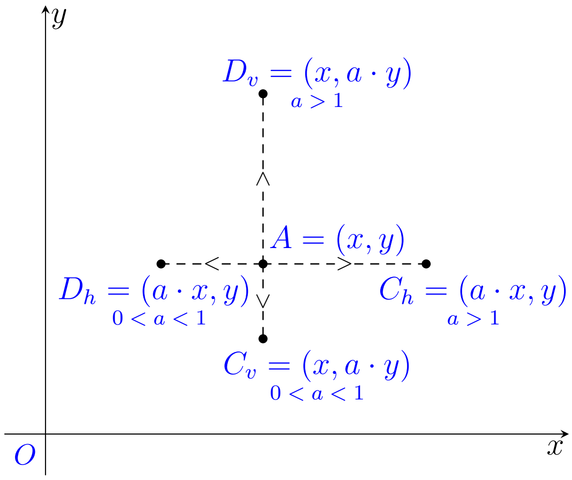


**Figura 2.10:** *Dilatação e Contração do Ponto* $A = (x, y)$

### 2.3.2 Dilatação e Contração de Gráficos

Nesta outra subseção vamos estudar a ideia de dilatar e/ou contrair gráficos de funções. Considere uma função $y = f(x)$, sendo que podemos contrair ou dilatar o gráfico de $f$, cujas transformações de dilatação e contração podem ocorrer horizontalmente ou verticalmente. Desta forma, existem quatro possíveis casos, são eles:

**Contração ou Dilatação Vertical.** A contração ou dilatação vertical do gráfico de uma função, só ocorre quando multiplicamos os valores das imagens da função por uma contante positiva, isto é, quando se tem $y = a \cdot f(x)$, com $a > 0$.

**Contração ou Dilatação Horizontal.** A contração ou dilatação horizontal do gráfico de uma função, só ocorre quando multiplicamos os argumentos da função são multiplicados por uma contante positiva, isto é, quando temos $y = f(a \cdot x)$, com $a > 0$.

Veja estes quatro casos na exibidos Tabela 2.1:

**Tabela 2.1: Contração e Dilatação de Gráficos**

| Função $y = f(x)$ | $0 < a < 1$ | $a > 1$ |
|---|---|---|
| $y = a \cdot f(x)$ | Contração vertical | Dilatação vertical |
| $y = f(a \cdot x)$ | Dilatação horizontal | Contração horizontal |

Veja agora, a representação gráfica destes quatro casos. Observe que, no canto esquerdo superior de cada gráfico temos na cor laranja, uma representação do que de fato ocorre com o gráfico das funções, ou seja, as setas direcionais estão indicando para nós se a função está sendo expandida ou comprimida.

Nas transformações verticais, vemos que as setas direcionais estão indicando que a compressão ou expansão dos gráficos está ocorrendo em relação à uma reta horizontal, representando assim que as funções sofrem alterações tendo o eixo $x$ como base. Já para as transformações horizontais, seguindo este mesmo raciocínio, vemos que as alterações são feitas tendo como referência o eixo $y$.

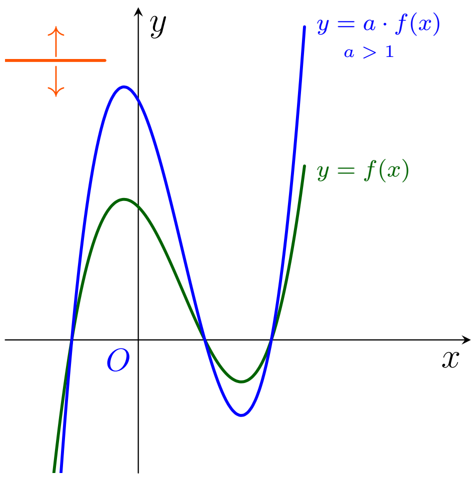


**Figura 2.11:** *Dilatação Vertical de* $y = f(x)$ *com* $a > 1$

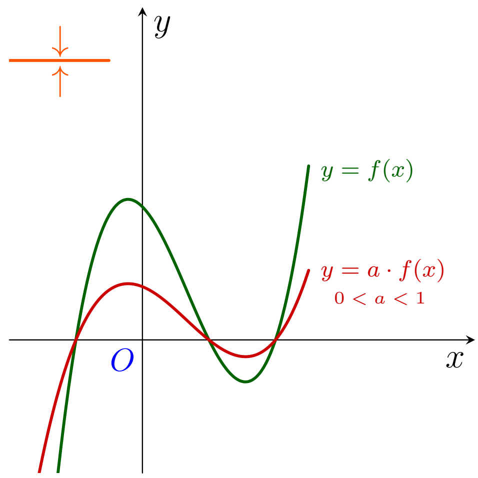


**Figura 2.12:** *Contração Vertical de* $y = f(x)$ *com* $0 < a < 1$

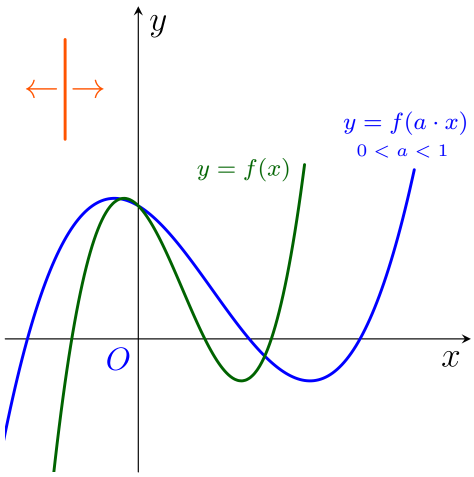


**Figura 2.13:** *Dilatação Horizontal de* $y = f(x)$ *com* $0 < a < 1$

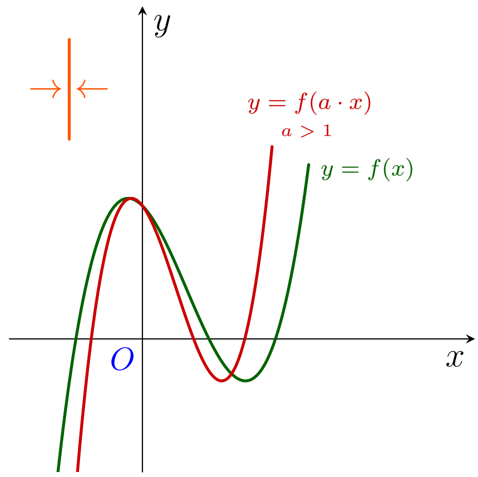


**Figura 2.14:** *Contração Horizontal de* $y = f(x)$ *com* $a > 1$

**Observação:** Note que, diferentemente do que ocorre para a dilatação de pontos, onde para dilatar horizontalmente é necessário que $a > 1$ e para contrair $0 < a < 1$, para as funções temos o contrário, para dilatação horizontal temos $0 < a < 1$ e para contração horizontal temos $a > 1$.

Para entendermos como se dá a construção destes gráficos exibidos, veja no Apêndice A.6, quais são os códigos em TikZ que geram a Figura 2.13, considerando assim que a construção dos outros três são feitas de modo semelhante.

**Exemplo 2.4.** Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, existe uma maneira de explicitar quais são as translações horizontais e verticais e, também qual é a contração/dilatação ou ainda, qual é a reflexão que a função sofre. Seja

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c, \text{ dada Equação (1.1) temos que} \\ &= a \cdot \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ tomando } \Delta = b^2 - 4ac, \\ &= a \cdot \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Temos então que, é possível identificar facilmente que tomando $m = \left(\frac{-b}{2a}\right)$ e $k = \left(\frac{-\Delta}{4a}\right)$, obtemos a equação da forma canônica do trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ que já foi explicitada na Equação (1.2), cuja fórmula é dada por:

$$f(x) = a \cdot (x - m)^2 + k,$$

basta observar que é exatamente isto que temos, quando $m$ e $k$ são substituídos.

É válido pontuarmos aqui, que $m$ representa a translação horizontal de $f$, enquanto $k$ representa sua translação vertical, sendo bom deixar claro que $m$ e $k$ aqui são equivalentes a $a$ e $b$ da Definição 2.2.

A troca de variáveis se deu devido ao fato de que agora, o termo $a$ deixou de representar a translação, passando a representar a reflexão ou a contração/dilatação de $f$ (veja Definição 2.3).

Sendo assim, nota-se então que tendo qualquer que seja a função quadrática, sabemos escrevê-la de forma que seja possível identificar, apenas completando quadrado, suas translações verticais e horizontais, reflexões e contrações ou dilatações. Veja exemplos que evidenciam melhor cada um destas transformações:

**Exemplo 2.5.** Tome inicialmente um exemplo trivial de função quadrática dado pela função $y = x^2$ (Figura 2.15), agora translade horizontalmente a função original em 2 unidades para a esquerda, obtendo então $y = (x+2)^2$ (Figura 2.16). Em seguida, obtenha $y = -(x+2)^2$ fazendo uma reflexão em torno do eixo $x$ (Figura 2.17). E, por fim, translade-a verticalmente em 1 unidade para cima, obtendo $f(x) = -(x+2)^2+1$ (Figura 2.18). Para facilitar a visualização de cada um destes passos, veja eles feitos individualmente nos gráficos seguintes:

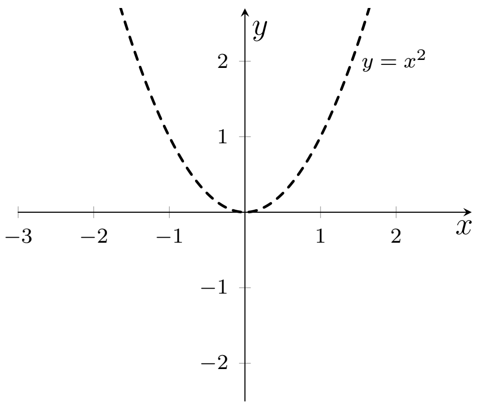


**Figura 2.15:** *Função* $y = x^2$

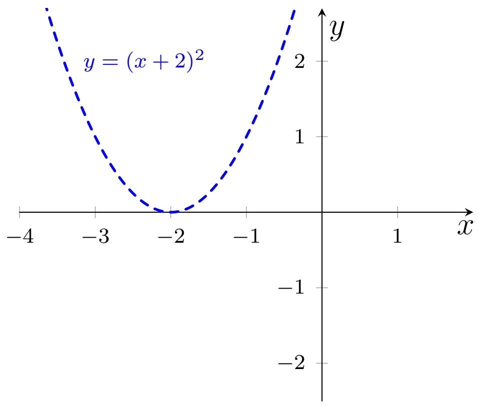


**Figura 2.16:** *Função* $y = (x+2)^2$

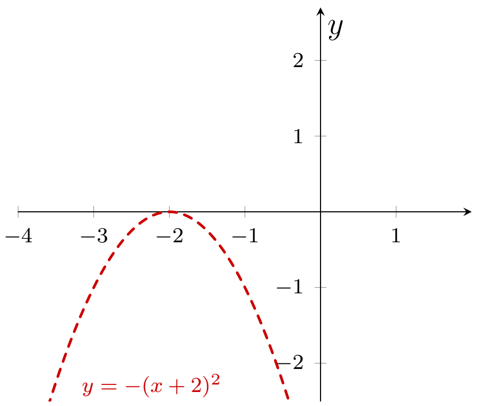


**Figura 2.17:** *Função* $y = -(x+2)^2$

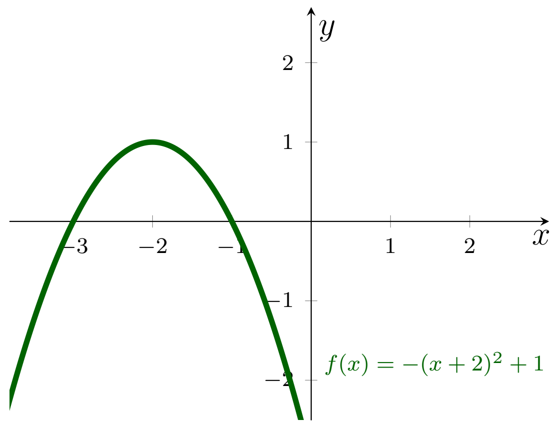


**Figura 2.18:** *Função* $f(x) = -(x+2)^2 + 1$

Veja no Apêndice A.7, quais são os códigos em TikZ que geram a Figura 2.19 e observe nesta figura como fica se colocarmos todos estes passos anteriores em um único gráfico:

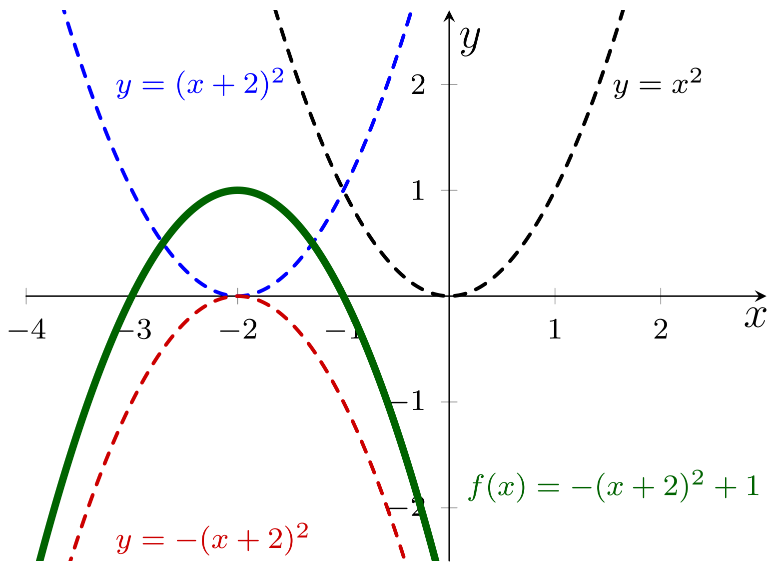


**Figura 2.19:** *Função* $f(x) = -x^2 - 4x - 3$

Mas, por outro lado, ao invés de construirmos a função

$$f(x) = -(x+2)^2 + 1 = -x^2 - 4x - 3$$

a partir de $f(x) = x^2$ seguindo as informações que tivemos no Exemplo 2.5. Podemos, identificar cada uma destas transformações que fizemos apenas olhando para a função $f(x) = -x^2 - 4x - 3$. Veja como isto é feito:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 - 4x - 3, \text{ completando quadrado, obtemos} \\
&= -\big(x^2 + 4x + 3\big) \\
&= -\big((x)^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + (2)^2 - (2)^2 + 3\big) \\
&= -\big((x+2)^2 - 4 + 3\big) \\
&= -\big((x+2)^2 - 1\big) \\
&= -(x+2)^2 + 1, \text{ que é a forma canônica de } f.
\end{aligned}$$

Já vimos no Exemplo 2.5 o que significa cada um destes valores. Para construir este gráfico no GeoGebra é necessário ter alguns conhecimentos sobre as ferramentas do software, para isso, veja o Exemplo 4.1 onde temos um passo a passo desta construção.

**Exemplo 2.6.** Neste outro exemplo, considere novamente a função $y = x^2$ (Figura 2.20), primeiro translade-a horizontalmente em 1 unidade para a direita, obtendo $y = (x-1)^2$ (Figura 2.21). Depois, veja que temos $y = 2 \cdot (x-1)^2$ (Figura 2.22), que é uma dilatação vertical de $f$ em 2 unidades. Em seguida, translade verticalmente em 1 unidade para baixo para obter $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 - 1$ (Figura 2.23). Veja cada passo individualmente:

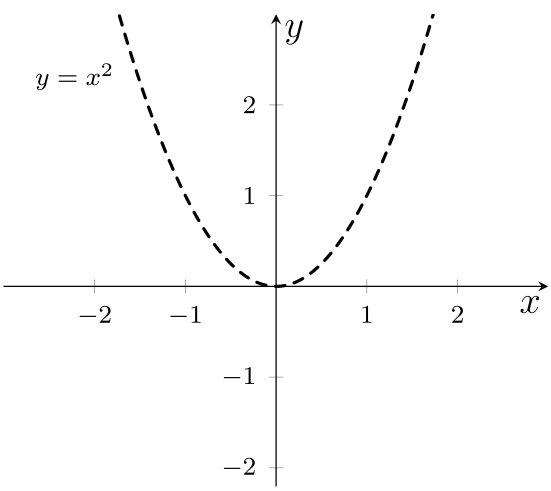


**Figura 2.20:** *Função* $y = x^2$

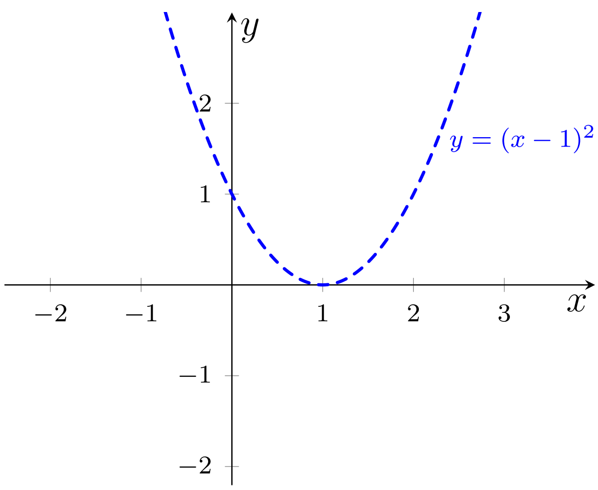


**Figura 2.21:** *Função* $y = (x-1)^2$

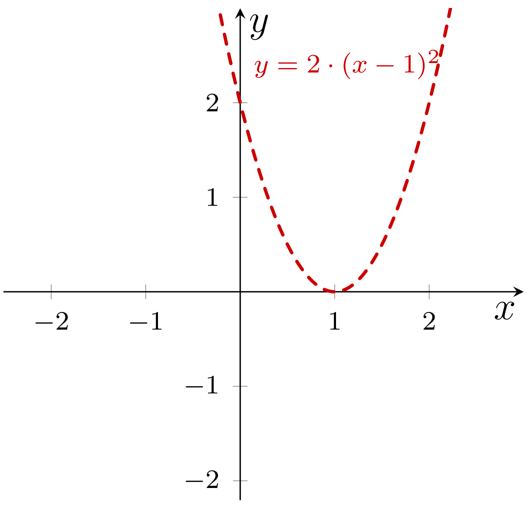


**Figura 2.22:** *Função* $y = 2 \cdot (x-1)^2$

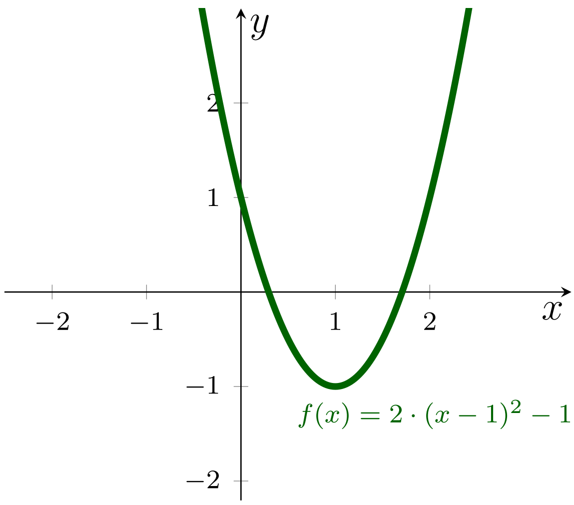


**Figura 2.23:** *Função* $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 - 1$

Da mesma forma que fizemos no outro exemplo já visto, veja aqui também a união de todos estes passos em um só gráfico:

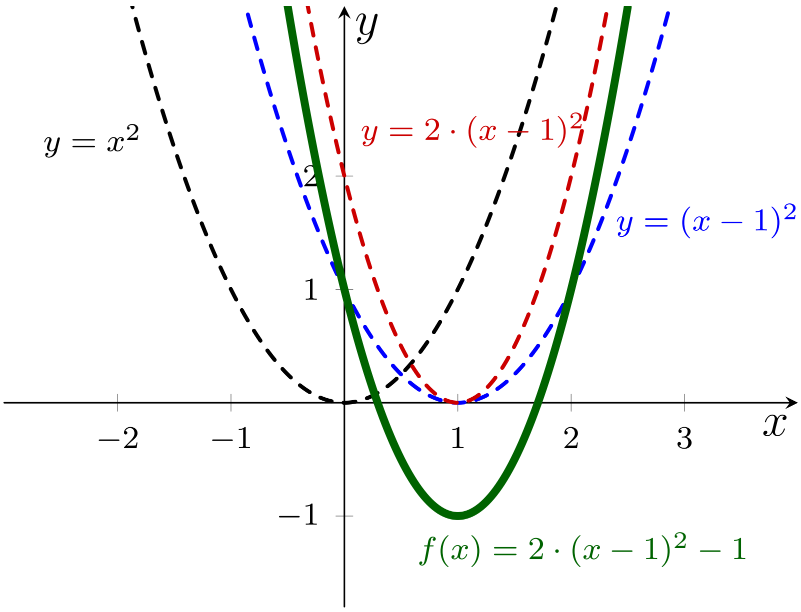


**Figura 2.24:** *Função* $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

Por outro lado, temos também uma maneira de partir da função

$$f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 - 1 = 2x^2 - 4x + 1$$

e conseguirmos identificar nela cada uma destas transformações que foram feitas. Sendo feito da mesma maneira que já vimos no exemplo anterior, veja como é cada uma destas transformações algebricamente:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 4x + 1, \text{ completando quadrado, obtemos} \\
&= 2 \cdot \left( x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) \\
&= 2 \cdot \left( (x)^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + (1)^2 - (1)^2 + \frac{1}{2} \right) \\
&= 2 \cdot \left( (x-1)^2 - 1 + \frac{1}{2} \right) \\
&= 2 \cdot \left( (x-1)^2 - \frac{1}{2} \right) \\
&= 2 \cdot (x-1)^2 - 1, \text{ sendo esta a forma canônica de } f.
\end{aligned}
$$

Já conhecemos pelo Exemplo 2.6 o que representa cada um destes valores. Veja a construção gráfica do GeoGebra no Exemplo 4.2.

Concluí-se então que qualquer que seja a função quadrática que se tenha, após completar quadrado é de fato simples conseguir identificar cada uma destas transformações planares que foram estudadas.

CAPÍTULO 3

# Mais algumas funções: conceitos e exemplos

Neste capítulo abordamos mais alguns conceitos e exemplos de funções, sendo elas compostas, inversas, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e também algumas das suas respectivas inversas. Não queremos aqui, como também não é o intuito de todo o trabalho, esgotar as propriedades e os conceitos existentes sobre as funções aqui apresentadas.

Queremos então, mostrar esses exemplos de funções e, principalmente, relacioná-los com os conceitos algébricos e geométricos que julgamos importantes para compreender algumas propriedades destas funções, dando maior importância para aquelas propriedades que nos norteiam para fazer um bom esboço de seus gráficos.

Para isso, exploramos as propriedades de paridade trabalhada na Seção 1.3 do Capítulo 1, como também as propriedades geométricas discutidas no Capítulo 2. Algumas das definições formais e propriedades deste capítulo tiveram como principais referências [Flemming e Gonçalves 2006], [Flemming e Gonçalves 2007], [Lima et al. 2006], [Lima et al. 2010] e [Campagner].

## 3.1 Funções Composta e Inversa

Nesta seção damos detalhes sobre as funções compostas e inversas, incluindo como funciona este processo de inversão das funções. Faz-se necessário definir bem a função inversa pois, no Capítulo 3 utilizamos tal conceito.

**Definição 3.1 (Função Composta).** Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções, condicionadas ao fato de que o conjunto imagem (Im) da função $f$ é um subconjunto do domínio (D) da função $g$, ou seja, $\text{Im}(f) \subset D(g)$. Sob estas condições, denotamos que a função $g\big(f(x)\big) = \big(g \circ f\big)(x)$ é denominada de *função $g$ composta por $f$*, tendo que $x \in D(f)$.

Seja $f : A \to B$ e $g : B \to C$, com $A, B, C \subset \mathbb{R}$ veja uma representação em diagramas da Definição 3.1.

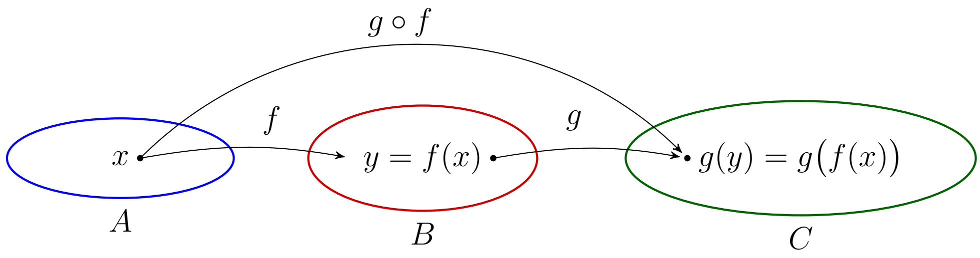


**Figura 3.1:** *Função Composta*

Sabendo o que é uma função composta, podemos dizer que duas funções são *permutáveis* se, e só se, seus domínios forem iguais e, ao compô-las, invertendo a ordem de composição obtermos o mesmo resultado, ou seja, sendo o $D(f) = D(g)$ temos

$$\big(f \circ g\big)(x) = \big(g \circ f\big)(x).$$

**Exemplo 3.2.** Seja $f(x) = 2x + 6$ e $g(x) = -3 \cdot (x + 8)$, temos que elas são permutáveis, pois além de ambas estarem definidas no conjunto dos reais, temos também que

$$\big(f \circ g\big)(x) = 2 \cdot \big(-3 \cdot (x+8)\big) + 6 = -6x - 42,$$

mas por outro lado, temos também que

$$\big(g \circ f\big)(x) = -3 \cdot \big((2x+6)+8\big) = -6x - 42.$$

**Definição 3.3 (Função Inversa).** Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$, dizemos que $g$ é a *inversa* de $f$ se

$$g\big(f(x)\big) = x \ \text{ e } \ f\big(g(y)\big) = y,$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

**Lema 3.4.** Se $g$ é a inversa de $f$, então:

1. $f$ é a inversa de $g$, o que segue diretamente da definição.
2. $f$ é uma função injetora. De fato, se $g\big(f(x)\big) = x$ para todo $x \in X$, e se $x_1$ e $x_2$ pertencem a $X$, temos

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

3. $f$ é sobrejetora. De fato, se $f\big(g(y)\big) = y$, isto com $y$ tomado arbitrariamente em $Y$, segue que $x = g(y) \in X$ é tal que

$$f(x) = f\big(g(y)\big) = y.$$

4. Se $f$ é crescente em seu domínio $X$, então sua inversa $g$ também é crescente em seu domínio $Y$. De fato, se $f$ é crescente temos que $f(x_2) > f(x_1)$, sempre que $x_2 > x_1$, consequentemente

$$g\big(f(x_2)\big) = x_2 > x_1 = g\big(f(x_1)\big).$$

Do Lema 3.4 concluímos que, se $f$ admite inversa, ela é dita *inversível*, e por ser inversível ela é consequentemente bijetora. Veja o Teorema 3.5 para ver que a reciprocidade também é válida.

**Teorema 3.5.** Uma função $f : X \to Y$ é inversível se, e somente se, $f$ é bijetora.

*Demonstração.* Se $f$ é inversível, segue do Lema 3.4 que $f$ é bijetora. Reciprocamente, se $f$ é uma bijeção, para cada $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $y = f(x)$. Note que, pela sobrejetividade, para cada $y \in Y$ existe um $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Como $f$ é injetiva este $x$ é único. Então, defina $g : Y \to X$ uma função que, a cada $y \in Y$ associa o único $x \in X$, tal que $f(x) = y$, que segue o resultado. □

Então, quando $f$ é inversível definimos que ela admite a inversa $g$. A partir de agora, sendo $f$ uma função, denotamos esta inversa como sendo $f^{-1}$, ou seja, fazemos $g(x) = f^{-1}(x)$. Dizemos também, que se a função é inversível, ela tem uma única inversa e, que o gráfico da função inversa $f^{-1}$ sempre é simétrico ao gráfico da função $f$, tendo como eixo de simetria a reta $y = x$.

**Exemplo 3.6.** Veja que, tendo a função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, para encontrar sua inversa, primeiro temos que inverter as posições de $x$ e $y$ na função original, obtendo $x = ay + b$, em seguida isolando $y$, temos que $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$ é a inversa de $y = f(x)$. Temos então,

$$\big(f \circ f^{-1}\big)(x) = a \cdot \left(\frac{x-b}{a}\right) + b = x = \frac{(ax+b)-b}{a} = \big(f^{-1} \circ f\big)(x).$$

Fazer este procedimento é muito intuitivo para alunos de Ensino Médio, o que quase não se sabe sobre este processo, é o real motivo pelo qual se deve inverter $x$ e $y$ de lugar. Vejamos aqui uma explicação gráfica sobre a veracidade de tais inversões.

Pela Definição 3.3, vimos que para que duas funções sejam inversas elas precisam ser definidas como $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ de modo que se obtenha

$$g\big(f(x)\big) = x \quad \text{e} \quad f\big(g(y)\big) = y,$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Tome aleatoriamente $a \in X$ e $b \in Y$. Como $f : X \to Y$, temos o plano coordenado dado por pontos da forma $(a, b)$. Por outro lado, $g : Y \to X$, temos então coordenadas do tipo $(b, a)$ no plano. Veja graficamente:

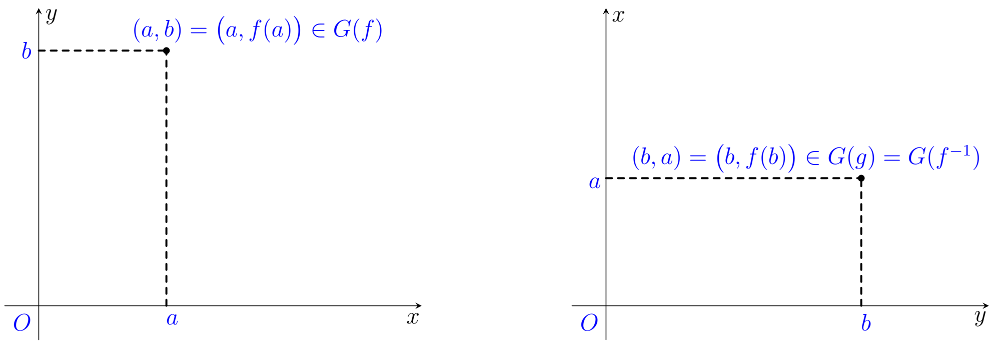


**Figura 3.2:** *Planos Coordenados de $f$ e $f^{-1}$*

Daí surge a necessidade de inverter as posições de $x$ e $y$ no plano coordenado de $G(f^{-1})$, pois desta forma voltaríamos a um sistema com mesmas coordenadas. Podendo então, traçar normalmente uma função $f$ que passe por $(a, b)$ e sua inversa $f^{-1}$ passando por $(b, a)$. Veja esta representação gráfica:

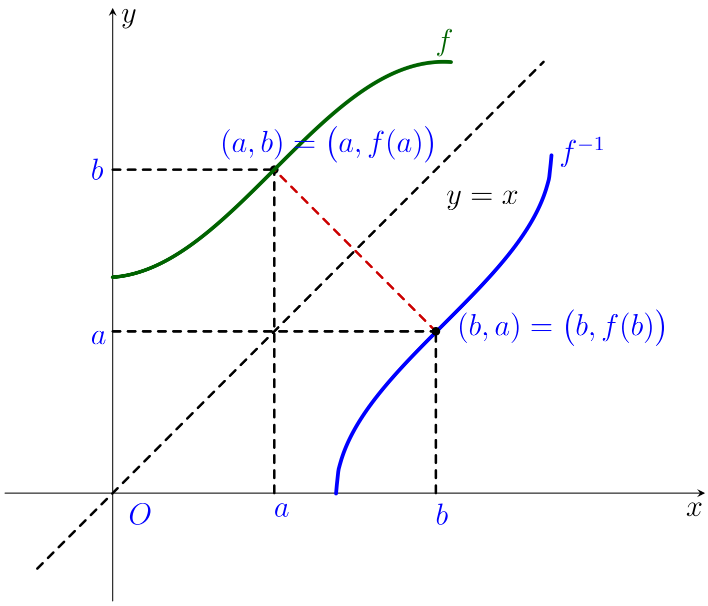


**Figura 3.3:** *Inversão do Plano Coordenado de $f^{-1}$*

Veja no Apêndice A.8, quais são os códigos em TikZ que geram a Figura 3.3. Observe agora um exemplo numérico de duas funções que são inversíveis:

**Exemplo 3.7.** Seja $f(x) = 2x - 3$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$, temos que elas são inversíveis, pois

$$(f \circ f^{-1})(x) = 2 \cdot \left(\frac{x+3}{2}\right) - 3 = x,$$

por outro lado,

$$\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = \frac{\big((2x-3)+3\big)}{2} = x.$$

Veja agora, o gráfico das funções $f(x) = 2x - 3$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$, onde fica bem claro esta simetria:

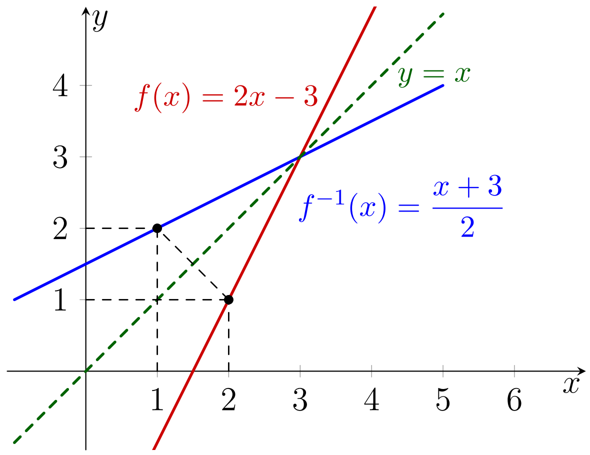


**Figura 3.4:** *Função* $f(x) = 2x - 3$ *e Inversa* $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

## 3.2 Funções Exponenciais e Logarítmicas

Vemos aqui conceitos, definições e exemplos de funções exponenciais e logarítmicas, considerando sempre que estamos usando os conhecimentos já definidos anteriormente. Aqui, neste caso, usamos os conhecimentos sobre funções inversas, funções crescentes ou decrescentes, dentre outros conceitos.

**Definição 3.8 (Função Exponencial).** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$, com $a \in \mathbb{R}^*_+$ e $0 < a \neq 1$, a *função exponencial de base* $a$ é dada por $f(x) = a^x$.

Já havíamos mencionado anteriormente que a função exponencial é aquela cuja variável $x$ se encontra no expoente, já o termo $a$ é fixo e é chamado de *base* da função exponencial. Temos duas condições a serem seguidas para que a função exponencial seja válida.

A primeira é ter $a > 0$, isto é necessário porque caso o contrário ocorra, podemos encontrar algumas indeterminações, como exemplo tome $a = -5$ e $x = \dfrac{1}{2}$, esta expressão não tem resolução no conjunto dos $\mathbb{R}$, já que não há solução real para $\sqrt{-5}$.

A segunda restrição é ter $a \neq 1$, isto porque se $a = 1$, temos sempre $f(x) = 1$, ou seja, estamos diante então de uma função constante.

A função exponencial pode ser crescente ou decrescente, isto depende apenas do valor da base $a$, não importando então qual seja o valor para $x$. No caso onde $a > 1$, temos que a função é crescente, mas se $0 < a < 1$ temos que a função exponencial é dita decrescente.

De fato, seja $a > 0$ e $x_1 \leqslant x_2$, temos

$$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow a^{x_1} \leqslant a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Por outro lado, se $0 < a < 1$ e $x_1 \leqslant x_2$, temos agora que

$$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow a^{x_1} \geqslant a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Provando assim que de fato, $a$ é o único termo que importa para classificarmos $f$ como sendo crescente ou decrescente.

**Exemplo 3.9.** Como exemplo, veja o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$, sendo $f$ crescente. É válido observar que toda função exponencial com a base $a > 1$ tem comportamento semelhante a este gráfico:

| $x$ | $y = f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $0$ | $1$ |
| $1$ | $2$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{2} \approx 1.41$ |
| $2$ | $4$ |

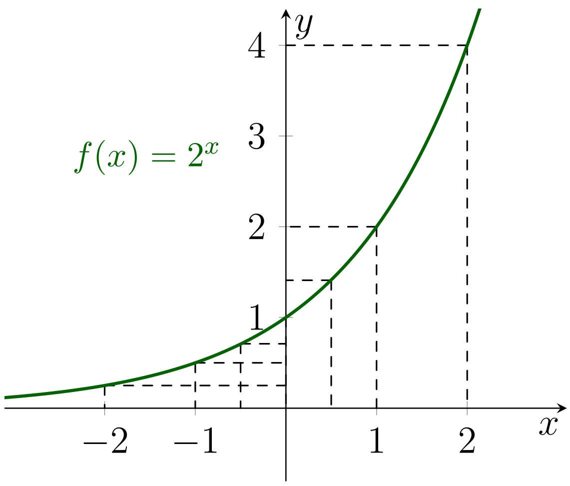


**Figura 3.5:** *Exponencial Crescente*

Para a função crescente temos um caso particular bem conhecido. Caso este onde denotamos $a = e$, sendo $e$ conhecido como número de Euler, sabemos também que $a \approx 2,72$.

**Exemplo 3.10.** Agora, veja o gráfico da função exponencial $g(x) = \dfrac{1}{2^x}$, com $g$ decrescente. Já observando aqui que toda função exponencial com a base $0 < a < 1$ tem comportamento equivalente a este:

| $x$ | $y = g(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $4$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{2} \approx 1.41$ |
| $-1$ | $2$ |
| $0$ | $1$ |
| $1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$ |
| $2$ | $\frac{1}{4}$ |

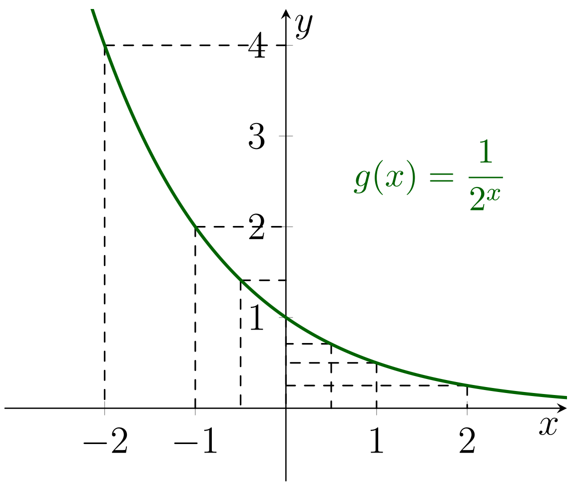


**Figura 3.6:** *Exponencial Decrescente*

Veja que, independente de ser crescente ou decrescente, o gráfico da função exponencial sempre corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$, isto porque sempre que se tem $x = 0$ obtemos $f(x) = f(0) = 1$, para qualquer $a \in \mathbb{R}_+^*$ com a condição de que $0 < a \neq 1$.

E, é possível ver também que a função exponencial jamais corta o eixo das abscissas, ou seja, $y$ é sempre diferente de 0 e não se tem raízes para esta função no conjunto dos reais.

Tanto para a função exponencial positiva quanto para a negativa, temos que a função exponencial de base $a$ é injetiva. Pois, para cada valor de $x_1 \neq x_2$, obtemos $f(x_1) \neq f(x_2)$. E, isto, automaticamente, já é mostrado quando provamos que de fato a função exponencial é crescente ou decrescente.

**Definição 3.11 (Logaritmo).** Para quaisquer números reais $x$ e $a$, com $0 < a \neq 1$, conseguimos definir o *logaritmo de base* $a$ de $x$ e o denotamos por $\log_a x$ quando

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x. \tag{3.1}$$

Esta definição nos mostra que a função exponencial e a logarítmica são inversas. De fato, veja as composições entre ambas as funções

$$\log_a(x) = \log_a(a^y) = y \cdot \log_a(a) = y$$

e

$$a^y = a^{\log_a(x)} = x.$$

**Definição 3.12** (**Função Logarítmica**)**.** Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$, a *função logarítmica de base* $a$ é dada por $f(x) = \log_a x$.

Da mesma forma que vimos nas funções exponenciais (Definição 3.8), aqui nas funções logarítmicas também podemos fazer classificações dizendo se $f$ é crescente ou decrescente. Temos que se $a > 1$, então a função logarítmica é crescente mas, se $0 < a < 1$, ela é decrescente.

De modo análogo ao que provamos para a função exponencial (Definição 3.8), podemos provar aqui também que a função logarítmica sempre é crescente ou decrescente.

**Exemplo 3.13.** Veja o gráfico das funções logarítmicas $f(x) = \log_2 x$, onde $f$ é crescente e, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, sendo que $g$ é decrescente:

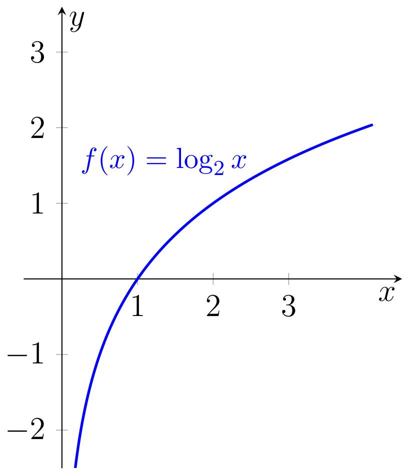


**Figura 3.7:** *Logarítmica Crescente*

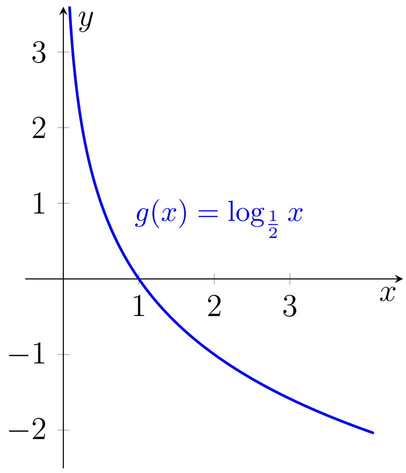


**Figura 3.8:** *Logarítmica Decrescente*

Independente de ser crescente ou decrescente, o gráfico da função logarítmica sempre se encontra totalmente à direita do eixo y. Isto porque esta função só é definida para $x > 0$. Pelo fato de ser sempre crescente ou decrescente podemos garantir a injetividade da função logarítmica.

Outro detalhe importante é que seu gráfico sempre corta o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$, isto porque 1 sempre é a raiz da função logarítmica, ou seja, fazendo $\log_a x = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{R}_+^*$ com $a \neq 1$, obtém-se $x = 1$.

Podemos dizer que a função logarítmica é sempre bijetiva, isto porque já temos garantia de que a função é injetiva. Desta forma, para que seja bijetiva, basta mostrarmos que ela é também sobrejetiva.

Veja que dado $y \in \mathbb{R}$, temos que $a^y \in \mathbb{R}$, então tome $x = a^y$, com $x \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, temos que $\log_a x = y$, ou seja, para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}_+^*$ podemos encontrar $y \in \mathbb{R}$.

É justamente pelo fato de que a função exponencial (Definição 3.8) é a inversa da função logarítmica (Definição 3.12), o que segue direto das Definições 3.11 e 3.12, é que podemos garantir que seus gráficos são simétricos. Isto ocorre quando se considera como eixo de simetria a função identidade $f(x) = x$, que é também a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Sem perda de generalidade e sabendo que para as funções decrescentes o processo é análogo, veja o gráfico que representa esta simetria quando ambas as funções são crescentes:

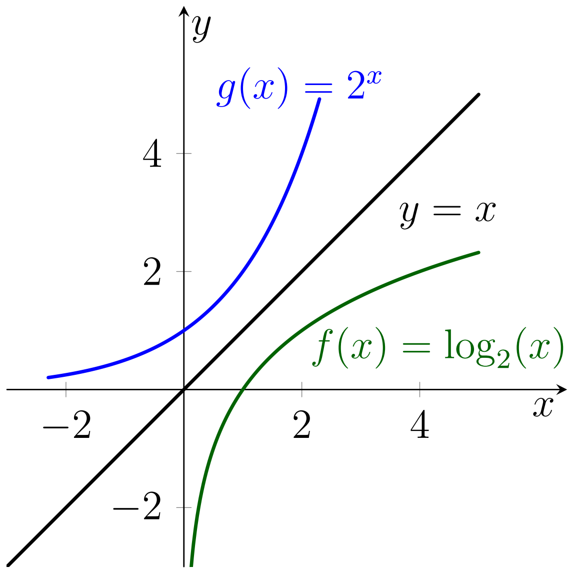


**Figura 3.9:** *Simetria das Funções Exponencial e Logarítmica*

Sobre a paridade das funções exponenciais e logarítmicas nada podemos afirmar, visto que em ambos os casos não temos nenhuma garantia de que as funções são pares ou ímpares, deve-se então, analisar caso a caso para ver se há ou não alguma maneira de determinar suas respectivas paridades.

Para as funções exponenciais e logarítmicas conseguimos também utilizar os conceitos de transformações no plano. Veja dois casos distintos de transformações, o primeiro deles para a função exponencial envolvendo translações verticais e horizontais. E, o segundo deles para a função logarítmica com translações verticais e horizontais e também com reflexões.

**Exemplo 3.14.** Seja $f(x) = 2^x$ a função considerada inicialmente, a transladando horizontalmente em 2 unidades para a direita, obtemos a função $g(x) = 2^{x-2}$. Em seguida, transladando a função $g$ verticalmente para baixo em 2 unidades, encontramos a função $h(x) = 2^{x-2} - 2$. Conclui-se então que $h$ é a translação horizontal seguida da translação vertical de $f$.

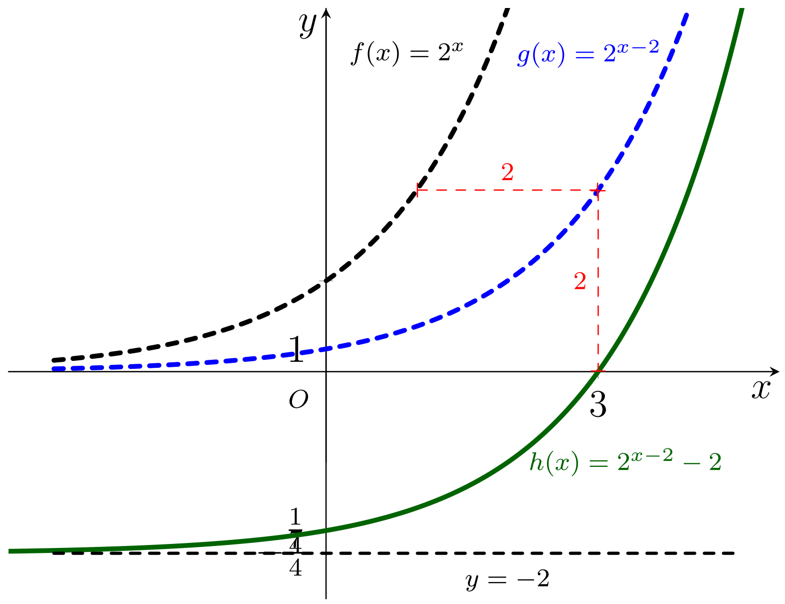


**Figura 3.10:** *Translação Horizontal e Vertical de $f(x) = 2^x$*

Olhando para a Figura 3.10 do Exemplo 3.14, observe que para $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^{x-2}$ não temos raízes, visto que em nenhuma delas conseguimos obter valores para $x$ quando $y$ é zero, ou seja, temos sempre que $y \neq 0$. Isto porque, na Definição 3.8 já definimos que o contradomínio da função exponencial é sempre positivo e diferente de zero.

Já para a função $h(x) = 2^{x-2} - 2$, temos uma raiz, pois é possível calcular $h(x) = 0$, obtendo então que $x = 3$, pois

$$2^{x-2} - 2 = 0 \Rightarrow 2^{x-2} = 2 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Agora, olhando para quando $x = 0$, vemos que a função $f$ corta o eixo $y$ em 1, já que $f(0) = 2^0 = 1$, já a função $g$ corta o eixo das ordenadas em $y = \dfrac{1}{4}$, visto que $g(x) = 2^{(0-2)} = 2^{(-2)} = \dfrac{1}{4}$. E, por fim, vemos que de fato a função $h$ intersecta o eixo $y$ em $y = -\dfrac{7}{4}$ pois, temos que $h(x) = 2^{(0-2)} - 2 = \dfrac{1}{4} - 2 = -\dfrac{7}{4}$.

**Exemplo 3.15.** Seja agora $f(x) = \log_2(x)$ a função dada inicialmente, transladando-a horizontalmente em 2 unidades para a esquerda, obtemos que a função é agora dada por $g(x) = \log_2(x+2)$. Tendo isto, fazemos uma reflexão da função $g$ em relação ao eixo $x$ e obtemos a função $h(x) = -\log_2(x+2)$. Em seguida, encontramos a função $i(x) = 1 - \log_2(x+2)$ ao transladar verticalmente $h$ em 1 unidade para cima. Conclui-se então, que $i$ é a translação horizontal, seguida da reflexão e da translação vertical de $f$. Veja graficamente:

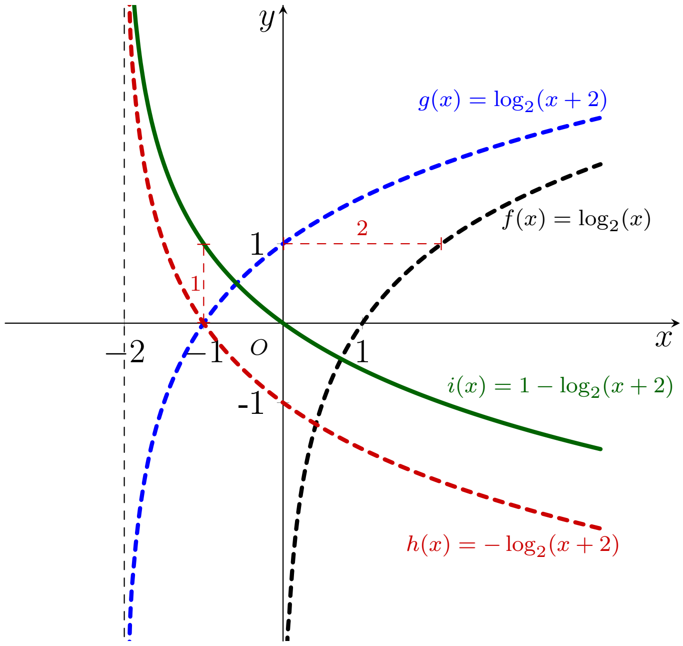


**Figura 3.11:** *Reflexão, Translação Horizontal e Vertical de* $f(x) = \log_2(x)$

Veja no Apêndice A.9, quais são os códigos em TikZ que geram esta Figura 3.11. Aqui neste exemplo, vemos que todas as funções, sendo elas $f$, $g$, $h$ e $i$ têm raízes. Veja que, para $f(x) = \log_2(x)$ a raiz é $x = 1$, pois

$$0 = \log_2(x) \Rightarrow x = 2^0 \Rightarrow x = 1.$$

Já para $g(x) = \log_2(x+2)$, a raiz é $x = -1$, visto que

$$0 = \log_2(x+2) \Rightarrow x+2 = 1 \Rightarrow x = -1.$$

Para a função $h$, vemos que ela também tem raiz em $x = -1$, já que é uma reflexão de $g$. Agora, para a função $i$, vemos que sua raiz é em $x = 0$, isto porque

$$0 = 1 - \log_2(x+2) \Rightarrow \log_2(x+2) = 1 \Rightarrow x+2 = 2 \Rightarrow x = 0,$$

logo $i$ de fato é uma função que passa pela origem $O(0,0)$.

Agora, vamos analisar o comportamento dos gráficos da Figura 3.11 para $x = 0$. Vamos observar então, onde é que as funções cortam o eixo $y$. Para a função $i$, já sabemos em $(0,0)$ pois, é uma função que passa pela origem.

Para a função $f$, é possível ver que não há interseção para o eixo $y$, isto porque pela Definição 3.12, temos que o domínio de $f$ não contém $x = 0$. Já a função $g$, corta o eixo $y$ em $y = 1$, pois $g(0) = \log_2(0+2) = \log_2(2) = 1$ e, por fim, a função $h$, que é uma reflexão de $g$, corta o eixo das ordenadas em $y = -1$.

## 3.3 Funções Trigonométricas

Definimos aqui algumas funções trigonométricas, sendo elas: seno, cosseno e tangente. Só definimos estas, pois se fôssemos abordar todas as definições de funções trigonométricas existentes, o trabalho em questão se tornaria demasiadamente extenso.

**Definição 3.16 (Função de Euler).** A *função de Euler* é uma função $C : \mathbb{R} \to S_1$ que associa a cada $t \in \mathbb{R}$ um único par ordenado $(x, y) = C(t)$ pertencente à circunferência $S_1$, que é unitária e centrada na origem, isto só ocorre caso algumas condições sejam seguidas, são elas:

1. $C(0) = (1, 0)$.
2. Se $t > 0$, percorre-se sobre $S_1$ a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento $t$, sempre andando no sentido anti-horário (sentido positivo), obtendo o ponto $C(t)$.
3. Se $t < 0$, percorre-se sobre $S_1$ a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de comprimento $-t$, sempre andando no sentido horário (sentido negativo), obtendo o ponto $C(-t)$.

Diretamente da Definição 3.16, podemos concluir que a função de Euler $C$ é periódica de período $T = 2\pi$, isto é, $C(x + 2\pi) = C(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

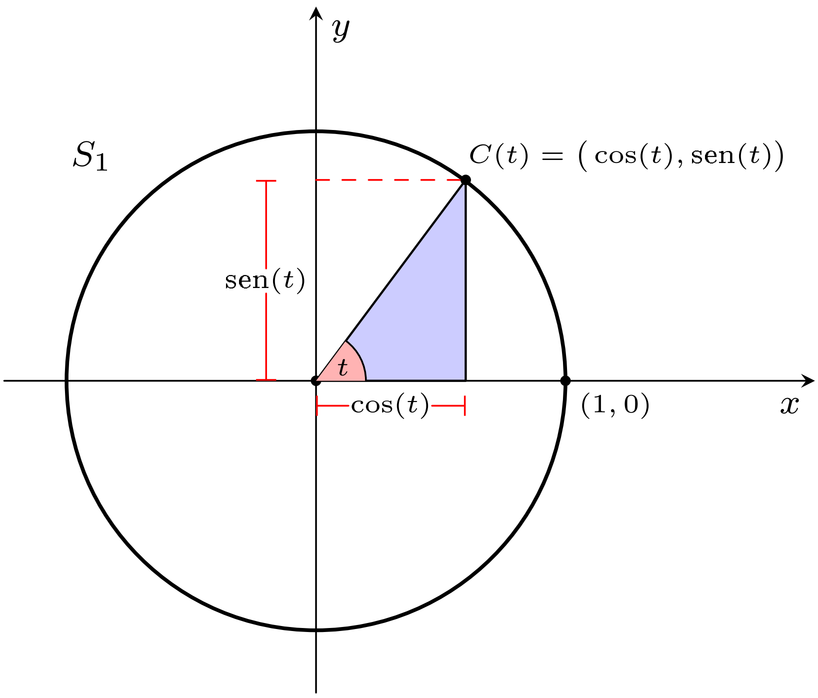


**Figura 3.12:** *Função de Euler*

Partindo da Figura 3.12 é possível definir as funções seno e cosseno, veja a Definição 3.17.

**Definição 3.17 (Função Seno e Função Cosseno).** As funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associam, respectivamente, cada $t \in \mathbb{R}$ às coordenadas da função de Euler dada por

$$C(t) = (x, y) = \big(\cos(t), \text{sen}(t)\big),$$

onde $g$ é a *função cosseno* e $f$ é a *função seno.*

Segue diretamente das Definições 3.16 e 3.17, que $\cos(0) = 1$ e $\text{sen}(0) = 0$. Podemos observar, a partir da periodicidade da função de Euler, que as funções seno e cosseno, consequentemente, também são periódicas de período $T = 2\pi$, ou seja

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x) \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Geometricamente, essa propriedade nos diz que para conhecermos os gráficos completos das funções seno e cosseno, basta conhecer um dado intervalo de comprimento $2\pi$ e ir o transladando horizontalmente para esquerda e/ou direita para obter o restante do gráfico.

É possível se apoiar no círculo trigonométrico exibido na Figura 3.12 para determinar quais são as paridades das funções seno e cosseno, para isso, só é necessário complementá-lo com algumas informações, veja:

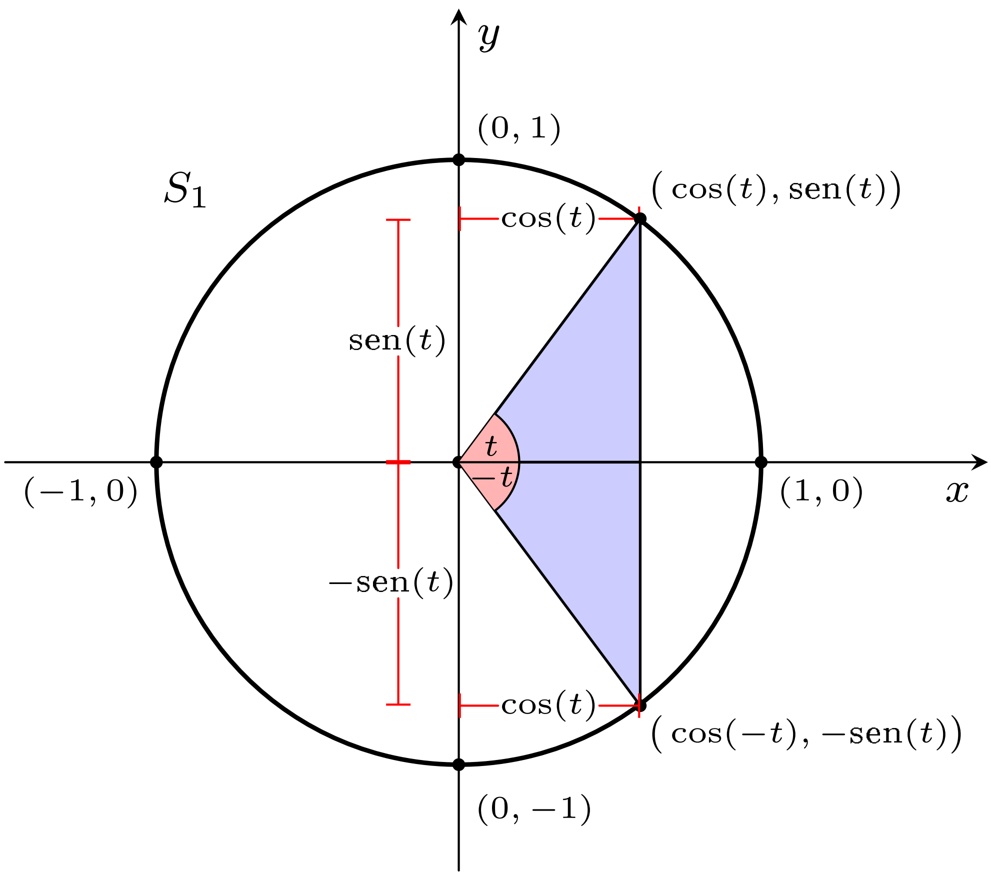


**Figura 3.13:** *Paridade das Funções Seno e Cosseno*

Observando o círculo trigonométrico da Figura 3.13, temos que a função $C$ para os parâmetros $t$ e $-t$ é dada pelas coordenadas $C(t) = \big(\cos(t), \text{sen}(t)\big)$ e $C(-t) = \big(\cos(-t), \text{sen}(-t)\big) = \big(\cos(t), -\text{sen}(t)\big)$.

Sendo assim, podemos concluir que

$$\text{sen}(-t) = -\text{sen}(t) \tag{3.2}$$

e que

$$\cos(-t) = \cos(t), \tag{3.3}$$

conclui-se então que a função cosseno é par e que a função seno é ímpar.

Olhando para a mesma Figura 3.13, vemos que nela já temos marcado alguns pontos coordenados, são eles $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$.

Como já sabemos, as coordenadas da circunferência unitária $S_1$ são da forma $\big(\cos(t), \text{sen}(t)\big)$, sendo assim, fica fácil concluir que os valores de seno e cosseno nesses pontos são:

**Tabela 3.1:** *Ângulos do Círculo Trigonométrico em Radiano*

| | $0$ ou $2\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\text{sen}(x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $1$ |

Com base na Tabela 3.1 e nas informações sobre a paridade das funções seno e cosseno, é possível então ter noção de como é o gráfico destas funções. Veja, primeiramente, o gráfico da função $g(x) = \cos(x)$:

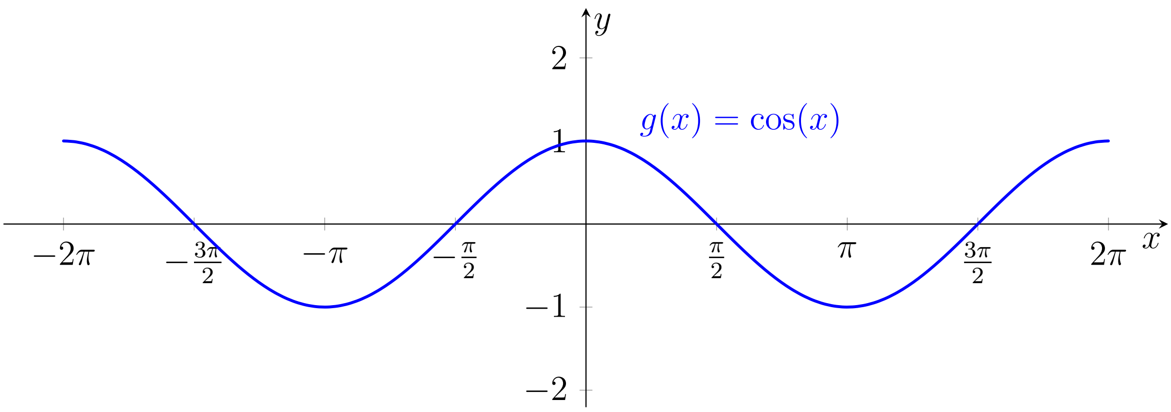


**Figura 3.14:** *Função Cosseno*

Olhando para o gráfico da função cosseno, é possível notar que para qualquer $x \in D(g)$ temos $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1$. Agora, veja o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$:

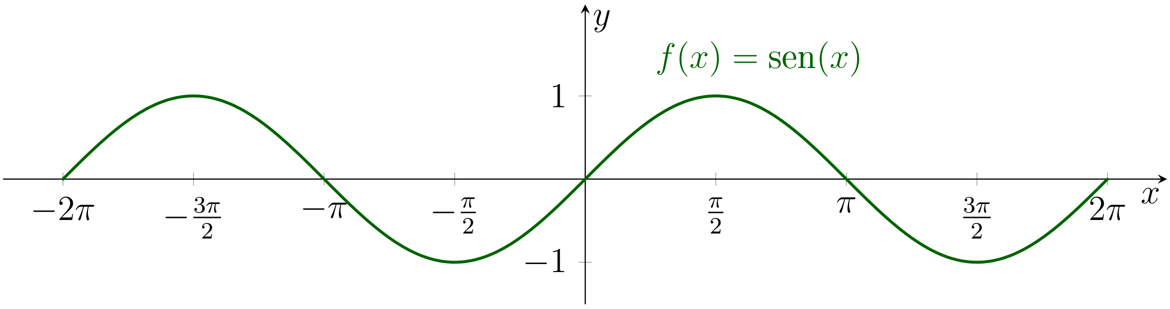


**Figura 3.15:** *Função Seno*

Observando o gráfico da função seno concluímos que da mesma forma que na função cosseno, os valores máximos e mínimos para $f(x)$ aqui se repetem, ou seja, para qualquer $x \in D(f)$ temos $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Veja que, olhando para o gráfico, de fato temos que, a periodicidade de ambas as funções é dada por $T = 2\pi$. Analisando também os gráficos, podemos concluir que não podemos afirmar se as funções seno e cosseno são crescentes ou decrescentes, visto que estas funções oscilam. Então, só podemos garantir isto olhando para intervalos selecionados, ao invés de olhar todo o domínio da função.

**Definição 3.18 (Função Tangente).** A *função tangente* é definida por uma função $h(x) = \text{tg}(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, com $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ um número real e com $k \in \mathbb{Z}$.

Veja o gráfico da função $h(x) = \text{tg}(x)$:

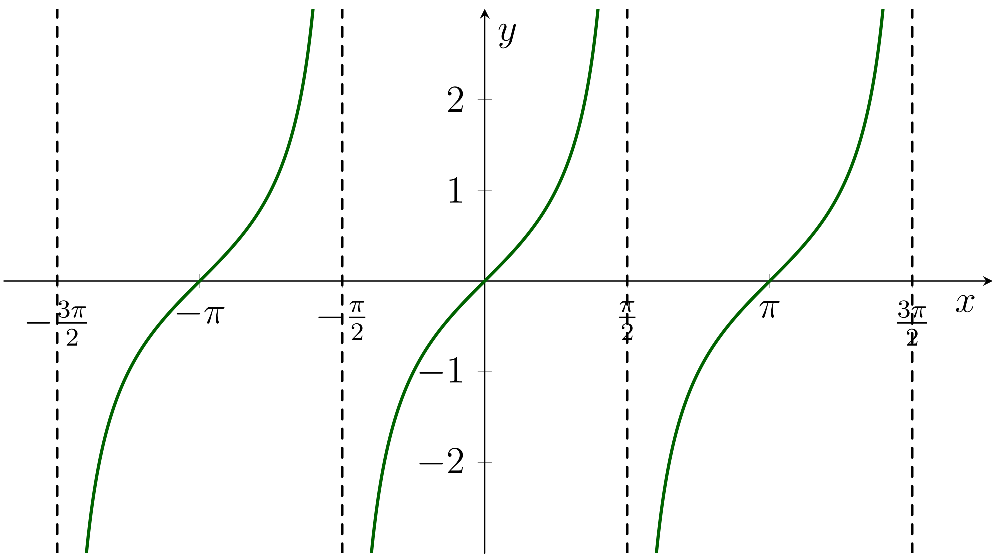


**Figura 3.16:** *Função Tangente*

Note que, para $x = \dfrac{-3\pi}{2}$, $x = \dfrac{-\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$, não temos valores para $y$, isto ocorre justamente pelo fato de que em todo $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k$ constante, não existe valores definidos para a função tangente. O que é consequência do fato de que nestes pontos temos $\cos(x) = 0$, o que é uma indeterminação para a função tangente (veja Definição 3.18).

Observe também, que o período da tangente é igual a $\pi$, no gráfico temos representado, como exemplos, os períodos de $-\dfrac{3\pi}{2}$ até $-\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}$ até $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$ até $\dfrac{3\pi}{2}$, onde fica explícito a veracidade deste período $T = \pi$.

### 3.3.1 Propriedades sobre as Funções Trigonométricas

Existem várias propriedades que relacionam as funções trigonométricas, algumas delas, relacionam exclusivamente as funções seno, cosseno e tangente.

Mas, para podermos provar que as tais propriedades são válidas, primeiro, vamos tomar como verdade aqui os conhecimentos sobre adição e subtração de arcos, é possível fazer cada uma destas demonstrações, mas este não é o nosso intuito aqui.

**Propriedade 3.19 (Adição e Subtração de Arcos).** Seja $\alpha$ e $\beta$ dois ângulos quaisquer, as seguintes propriedades são verdadeiras:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha) \tag{3.4}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha) \tag{3.5}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta) \tag{3.6}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta) \tag{3.7}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)} \tag{3.8}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)} \tag{3.9}$$

Lembrando que, para o cálculo da tangente, temos a condição de que $\alpha, \beta \neq \dfrac{k\pi}{2}$. Já para as funções seno e cosseno não há nenhuma condição para os valores de $\alpha$ e $\beta$.

Agora, que já sabemos estas propriedades que envolvem a soma e a subtração dos arcos, já podemos voltar para as propriedades das funções seno e cosseno que havíamos mencionado.

Vamos considerar aqui, sem perda de generalidade, a adição de arcos para seno e cosseno, que estão exibidas nas Equações (3.4) e (3.6). A partir destes itens da Propriedade 3.19, vamos definir as Propriedades 3.20 e 3.21.

**Propriedade 3.20.** Sendo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x).$$

*Demonstração.*

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(x)=\operatorname{sen}(x)\cdot 0+1\cdot\cos(x)=\cos(x)$$

□

Este resultado demonstrado na Propriedade 3.20 nos garante que a função cosseno pode ser interpretada como sendo uma translação horizontal para esquerda de comprimento $\frac{\pi}{2}$ da função seno.

Veja esta representação graficamente:

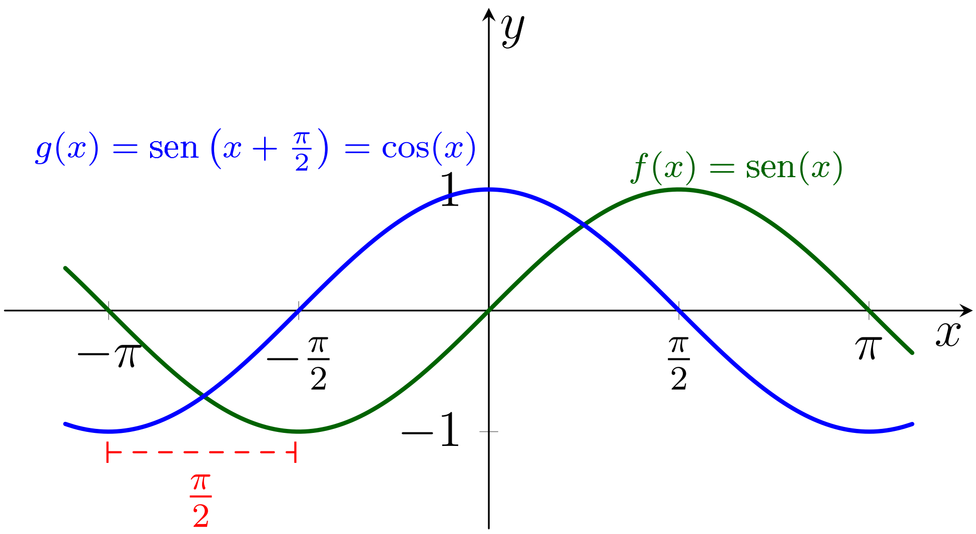


**Figura 3.17:** *Adição de Arcos para a Função Seno*

**Propriedade 3.21.** Sendo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}(x).$$

*Demonstração.*

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)\cdot 0-\operatorname{sen}(x)\cdot 1=-\operatorname{sen}(x)$$

□

O resultado da Propriedade 3.21 nos diz que, transladando a função cosseno horizontalmente para esquerda a um comprimento igual a $\frac{\pi}{2}$, obtemos uma reflexão em torno do eixo $x$ da função seno. Veja esta representação gráfica:

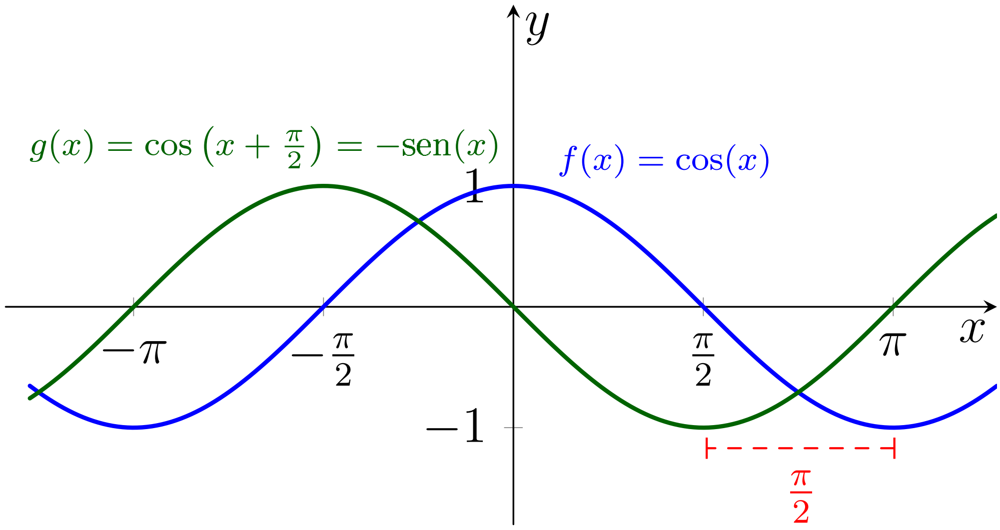


**Figura 3.18:** *Adição de Arcos para a Função Cosseno*

Além destas transformações exibidas nas Figura 3.17 e 3.18, temos também outras transformações planares para as funções seno e cosseno que estão exibidas aqui não necessariamente como sendo propriedades. Mas, veja como podemos utilizar um pouco do que aprendemos no Capítulo 2 aqui neste capítulo.

Sem perda de generalidade, vamos exibir aqui apenas transformações para a função seno. Mas, é importante deixar claro que fazer transformações análogas para a função cosseno também é válido.

**Exemplo 3.22.** Seja $y = \text{sen}(x)$, a transformação dada pela translação vertical em 1 unidade da função seno é, graficamente, exibida por:

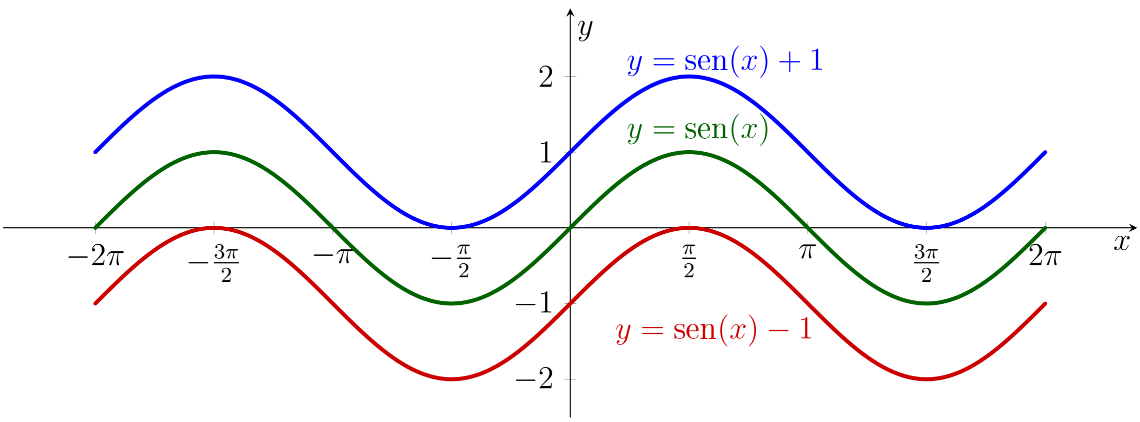


**Figura 3.19:** *Translação Vertical de $y = sen(x)$*

Veja que temos a translação vertical para cima e para baixo, o que depende diretamente do fato de 1 ser positivo ou negativo. Em caso positivo, a translação se dá para cima, já em caso negativo, a função é transladada para baixo.

**Exemplo 3.23.** Transladar horizontalmente a função seno em 1 unidade é movê-la para direita, se 1 é negativo, ou para esquerda, se 1 é positivo. Veja:

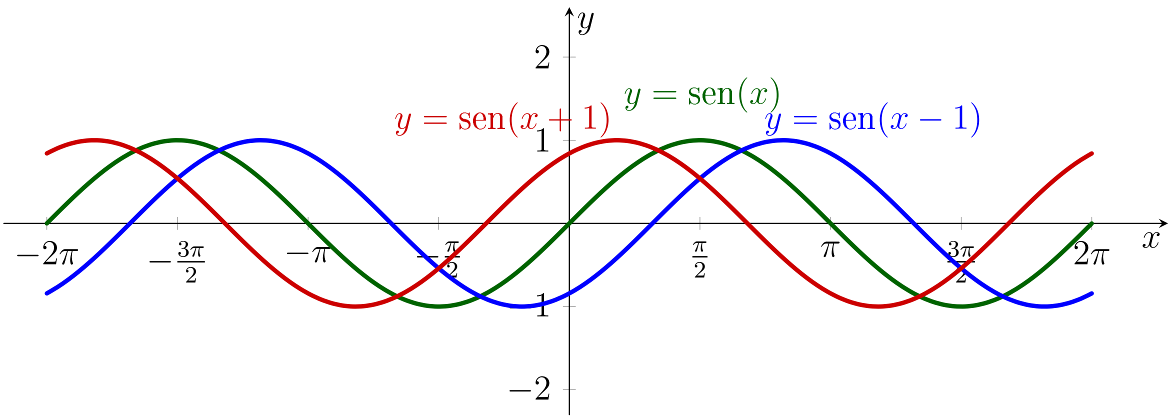


**Figura 3.20:** *Translação Horizontal de $y = sen(x)$*

**Exemplo 3.24.** Contrair e dilatar a função seno horizontalmente significa multiplicar seu argumento por uma constante $a$, ou seja, temos $y = \text{sen}(a \cdot x)$. No caso de $a > 1$, a função está sendo contraída, já para $0 < a < 1$ a função seno está sendo dilatada.

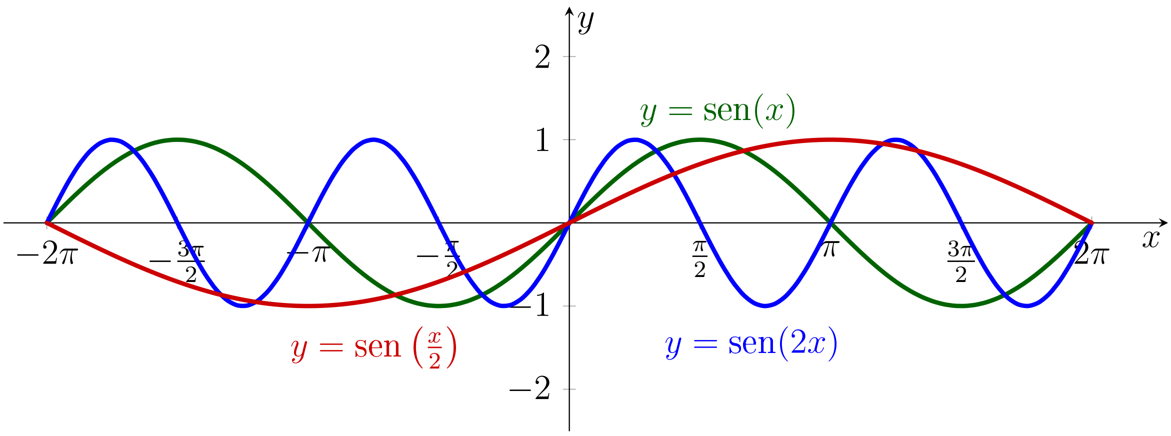


**Figura 3.21:** *Contração e Dilatação Horizontal de $y = sen(x)$*

**Exemplo 3.25.** Já na dilatação e na contração vertical da função seno, o que acontece é que multiplicamos uma constante $a$ pela função toda, ou seja, temos aqui $y = a \cdot \text{sen}(x)$. Aqui, quando $a > 1$, temos que a função está sendo dilatada verticalmente, já quando $0 < a < 1$ a função seno está sendo contraída. Veja no Apêndice A.10, quais são os códigos em TikZ que geram esta Figura 3.21.

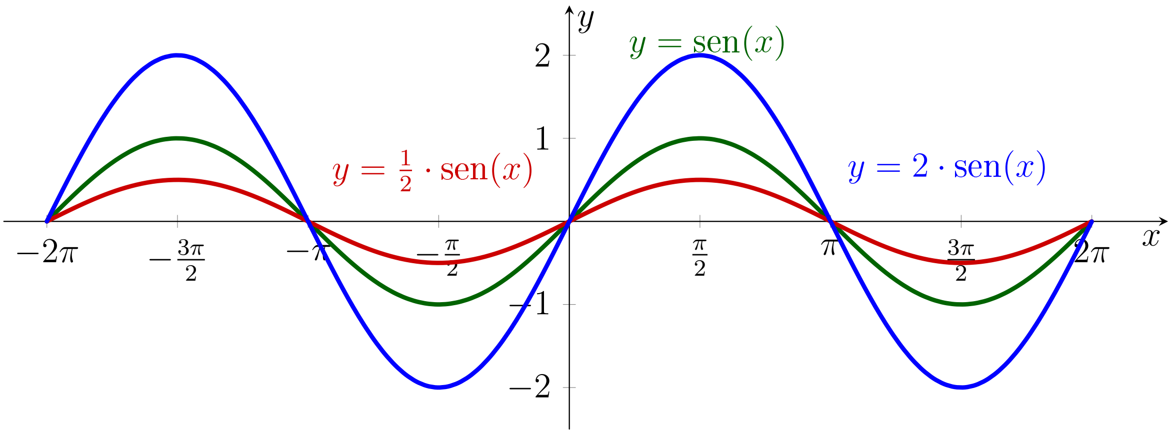


**Figura 3.22:** *Contração e Dilatação Vertical de $y = sen(x)$*

De um modo mais geral, as funções senoidais podem ser escritas na forma

$$s(x) = a \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot x + \phi) + b, \tag{3.10}$$

$$c(x) = a \cdot \cos\,(\omega \cdot x + \phi) + b, \tag{3.11}$$

que são nada mais do que as funções seno e cosseno obtidas através de transformações no plano por meio das reflexões, translações e contrações/dilatações.

**Teorema 3.26.** Toda função da forma

$$f(x) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot x) + B \cdot \cos(\omega \cdot x), \tag{3.12}$$

pode ser escrita na forma

$$s(x) = a \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot x + \phi)\,.$$

*Demonstração.* Multiplicando e dividindo os membros do lado direito da Equação (3.12) por $\sqrt{A^2 + B^2}$, respeitando aqui a condição de que $A$ e $B$ não são nulos simultaneamente, mantemos a igualdade e obtemos

$$f(x) = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \big(A \cdot \text{sen}(\omega \cdot x) + B \cdot \cos(\omega \cdot x)\big)$$

$$f(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \text{sen}(\omega \cdot x) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \cos(\omega \cdot x)\right) \tag{3.13}$$

Sabemos que o par ordenado $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ pertence ao círculo de raio 1, pois

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = \frac{A^2}{A^2+B^2} + \frac{B^2}{A^2+B^2} = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2} = 1.$$

Sendo assim, existe um ângulo $\phi \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos(\phi) \tag{3.14}$$

e

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \operatorname{sen}(\phi). \tag{3.15}$$

Substituindo (3.14) e (3.15) em (3.13), temos

$$f(x) = \sqrt{A^2+B^2} \cdot \big(\cos(\phi)\cdot \operatorname{sen}(\omega\cdot x) + \operatorname{sen}(\phi)\cdot\cos(\omega\cdot x)\big),$$

pela Equação (3.4), concluímos que

$$f(x) = a \cdot \operatorname{sen}\left(\omega\cdot x + \phi\right), \tag{3.16}$$

sendo $a = \sqrt{A^2+B^2}$. □

Esta função $f(x) = a \cdot \operatorname{sen}\left(\omega \cdot x + \phi\right) + b$ é conhecida como *senoide*. Antes de ver seu gráfico, veja inicialmente a nomenclatura de alguns parâmetros que pertencem ao gráfico de $f$.

**Amplitude -** Os valores máximos e mínimos das funções dadas pelas Equações (3.10) e (3.11) são, respectivamente, $a+b$ e $-a+b$, basta observar que os valores máximos e mínimos das funções seno e cosseno são, respectivamente, 1 e $-1$. A distância entre o valor máximo (ou mínimo) e o valor médio entre o máximo e mínimo é denominado de amplitude e, é dado por $a$.

**Período ou Comprimento de Onda -** Como as funções seno e cosseno têm período $2\pi$, as funções $s$ e $c$ dadas nas Equações (3.10) e (3.11) também são periódicas de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, pois

$$\omega T + \phi - \phi = 2\pi \;\Rightarrow\; \omega T = 2\pi \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

**Ângulo de Fase e Deslocamento de Fase -** O valor do ângulo da função seno ou cosseno quando $x = 0$, ou seja, o valor do ângulo $\phi$, é denominado *ângulo de fase*. O valor do deslocamento horizontal $-\dfrac{\phi}{\omega}$ é denominado *deslocamento de fase*.

Veja a seguir o esboço do gráfico da senoide $s(x) = a \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot x + \phi) + b$:

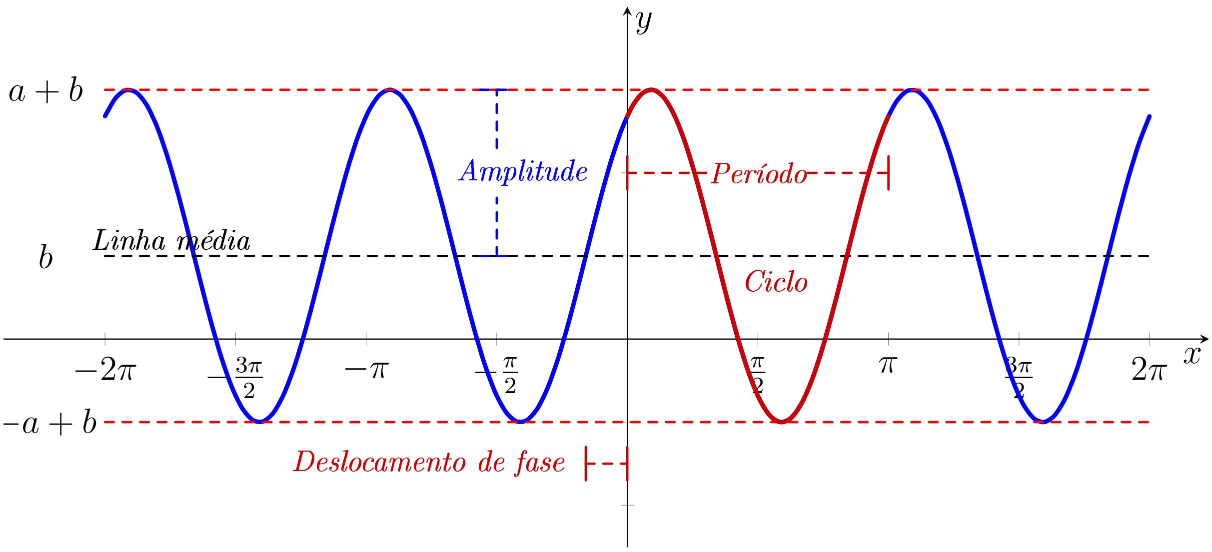


**Figura 3.23:** *Gráfico da Senoide*

## 3.4 Funções Hiperbólicas

Outras funções obtidas usando as reflexões e também a soma de funções, são as funções hiperbólicas. Assim como não definimos todas as funções trigonométricas, aqui também não vamos definir todas as hiperbólicas, definimos então apenas seno e cosseno hiperbólicos.

Considerando as funções $f(x) = \dfrac{e^x}{2}$ e $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}$. Onde $f$ é uma contração vertical da função exponencial $y = e^x$ e, $g(x)$ é uma contração vertical composta com a reflexão em torno do eixo $y$ da função exponencial $y = e^x$, ou seja, temos que $g(x) = f(-x)$, podemos definir as funções:

**Definição 3.27 (Função Seno Hiperbólico).** Sendo $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, temos que a *função seno hiperbólico*, é dada por

$$\text{Senh}(x) = f(x) - g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

A função seno hiperbólico é ímpar, visto que de fato

$$\mathrm{Senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right) = -\mathrm{Senh}(x).$$

Outra observação que podemos fazer é que, a função seno hiperbólico (Definição 3.27) é crescente. Para que isto seja válido, se temos $x_2 > x_1$, precisamos mostrar que

$$\mathrm{Senh}(x_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x_2} - e^{-x_2}\right) > \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x_1} - e^{-x_1}\right) = \mathrm{Senh}(x_1),$$

o que é equivalente a mostrar que

$$2 \cdot \mathrm{Senh}(x_2) = e^{x_2} - e^{-x_2} > e^{x_1} - e^{-x_1} = 2 \cdot \mathrm{Senh}(x_1).$$

*Demonstração.* Já sabemos que $x_2 > x_1$, o que implica que $e^{x_2} > e^{x_1}$. Por outro lado, se $x_2 > x_1$ temos que

$$x_2 > x_1 \Rightarrow e^{x_2} > e^{x_1} \Rightarrow e^{-x_2} < e^{-x_1} \Rightarrow -e^{-x_2} > -e^{-x_1}.$$

Logo, temos que

$$e^{x_2} > e^{x_1} \tag{3.17}$$

e

$$-e^{-x_2} > -e^{-x_1}. \tag{3.18}$$

Desta forma, somando as Equações (3.17) e (3.18) membro a membro, obtemos

$$e^{x_2} - e^{-x_2} > e^{x_1} - e^{-x_1}.$$

Ou seja, de fato temos que

$$2 \cdot \mathrm{Senh}(x_2) > 2 \cdot \mathrm{Senh}(x_1) \Rightarrow \mathrm{Senh}(x_2) > \mathrm{Senh}(x_1),$$

logo, a função seno hiperbólico é realmente crescente. □

Para esboçar o gráfico da função seno hiperbólico, observe que $\mathrm{Senh}(0) = 0$, como Senh é crescente, 0 é sua única raiz. Podemos observar também que:

1. se $x$ aproxima de $-\infty$, o valor de $\dfrac{e^x}{2}$ decresce aproximando de zero, portanto a diferença $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ se aproxima de $h(x) = \dfrac{-e^{-x}}{2}$.

2. se $x$ aproxima de $+\infty$, o valor de $\frac{e^{-x}}{2}$ decresce aproximando de zero, portanto a diferença $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ se aproxima de $f(x) = \frac{e^x}{2}$.

Com isso, um esboço de seu gráfico é dado por

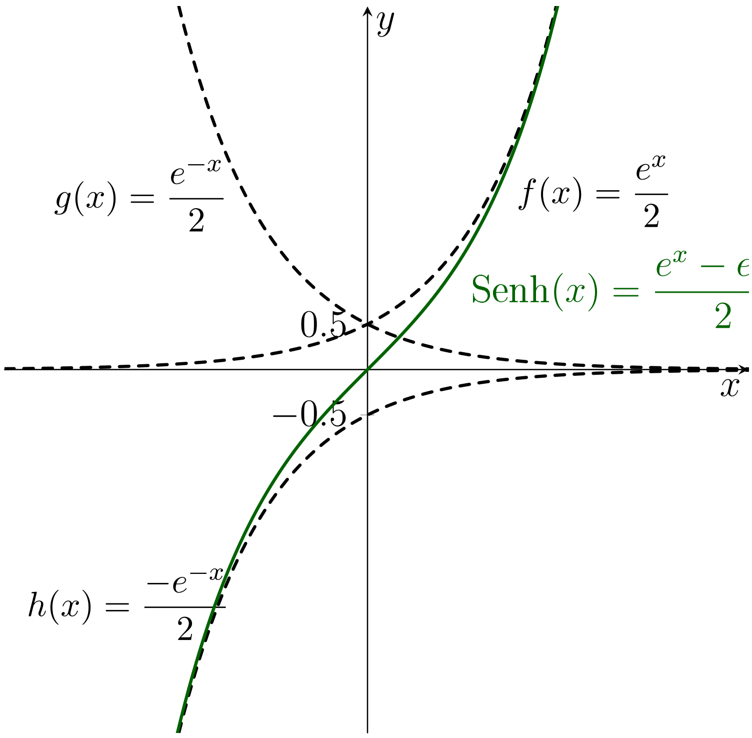


**Figura 3.24:** *Função Seno Hiperbólico*

Veja no Apêndice A.11, quais são os códigos em TikZ que geram esta Figura 3.24.

Olhando para o gráfico da função seno hiperbólico, vemos claramente que $\text{Senh}(x) = f(x) + h(x)$, ou seja, através do gráfico conseguimos também somar funções, não estamos entrando em maiores detalhes sobre esta possibilidade de somar funções através dos seus respectivos gráficos, mas é importante deixar sua existência explícita.

**Definição 3.28 (Função Cosseno Hiperbólico).** Sendo $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, temos que a *função cosseno hiperbólico* é dada por

$$\text{Cosh}(x) = f(x) + g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

A função cosseno hiperbólico dada na Definição 3.28 é dita par, pois

$$\text{Cosh}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{Cosh}(x).$$

Classificamos a função cosseno hiperbólico como decrescente e crescente, isto só depende do intervalo que está sendo analisado. No caso de $x < 0$ temos que $\text{Cosh}(x)$ é decrescente, já no caso de $x > 0$ temos que $\text{Cosh}(x)$ é crescente.

Primeiramente, vamos mostrar que se $x > 0$, $\text{Cosh}(x)$ é crescente, para isso considere que se $x_2 > x_1$, é necessário mostrar então que

$$\text{Cosh}(x_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x_2} + e^{-x_2}\right) > \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x_1} + e^{-x_1}\right) = \text{Cosh}(x_1),$$

ou seja, é suficiente mostrar que

$$2 \cdot \text{Cosh}(x_2) = e^{x_2} + e^{-x_2} > e^{x_1} + e^{-x_1} = 2 \cdot \text{Cosh}(x_1).$$

*Demonstração.* Já sabemos que $x_2 > x_1$ implica que $e^{x_2} > e^{x_1}$ e $-e^{-x_2} > -e^{-x_1}$. Logo, subtraindo a segunda equação da primeira, membro a membro, obtemos que

$$e^{x_2} - \left(-e^{-x_2}\right) > e^{x_1} - \left(-e^{-x_1}\right) \Rightarrow e^{x_2} + e^{-x_2} > e^{x_1} + e^{-x_1}.$$

□

Agora, para $x < 0$, temos que $\text{Cosh}(x)$ é decrescente. Neste caso, temos que $x_2 > x_1 \Rightarrow -x_2 < -x_1$, usamos $-x$ porque sabemos que $x < 0$. Tendo isto, mostramos que se $-x_2 < -x_1$, temos $\text{Cosh}(-x_2) > \text{Cosh}(-x_1)$, ou seja, queremos mostrar que

$$2 \cdot \text{Cosh}(-x_2) = e^{-x_2} + e^{-(-x_2)} > e^{-x_1} + e^{-(-x_1)} = 2 \cdot \text{Cosh}(-x_1),$$

o que é equivalente a mostrar que

$$e^{-x_2} + e^{x_2} > e^{-x_1} + e^{x_1} \Rightarrow e^{x_2} + e^{-x_2} > e^{x_1} + e^{-x_1}.$$

*Demonstração.* Já sabemos que $x_2 > x_1$ implica que $e^{x_2} > e^{x_1}$ e que $-e^{-x_2} > -e^{-x_1}$. Logo, subtraindo novamente, membro a membro, a segunda equação da primeira, obtemos que

$$e^{x_2} + e^{-x_2} > e^{x_1} + e^{-x_1}.$$

□

Para esboçar o gráfico da função cosseno hiperbólico, observe que temos $\text{Cosh}(x) > 0$ para todo $x$ real, portanto não temos zeros ou raízes para esta função. Como ela é par, o gráfico do lado direito do eixo $y$ é uma reflexão do lado esquerdo. Podemos observar também que:

1. se $x$ aproxima de $-\infty$, o valor de $\dfrac{e^x}{2}$ decresce aproximando de zero, portanto a soma $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ se aproxima de $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}$.
2. se $x$ aproxima de $+\infty$, o valor de $\dfrac{e^{-x}}{2}$ decresce aproximando de zero, portanto a soma $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ se aproxima de $f(x) = \dfrac{e^x}{2}$.

Sendo assim, veja o gráfico que representa esta função:

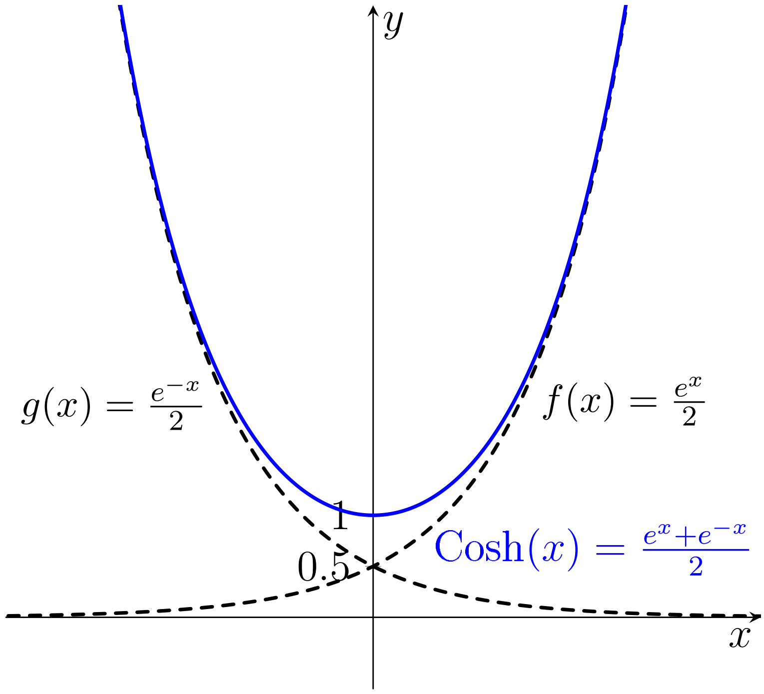


**Figura 3.25:** *Função Cosseno Hiperbólico*

Veja no Apêndice A.12, quais são os códigos em TikZ que geram esta Figura 3.25. Aqui, para a função cosseno é possível ver, olhando também para o gráfico, que claramente $\mathrm{Cosh}(x) = f(x) + g(x)$, comprovando mais uma vez a possibilidade de somar funções através de seus gráficos. Veja no Exemplo 4.3 esta construção no GeoGebra.

## 3.5 Função Modular

Aqui nesta seção, abordamos as particularidades que pertencem à função modular, vemos também que é possível fazer transformações no plano para esta função.

Não importa qual seja esta transformação, o importante é que em qualquer uma delas mantém-se sempre apenas imagens positivas ou iguais a zero, visto que isto é uma condição da função modular.

**Definição 3.29 (Função Modular).** Uma função $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de função modular quando, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$m(x) = |x| = \begin{cases} x & , \text{se} \quad x \geqslant 0 \\ -x & , \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Pela Definição 3.29, veja que a função modular $m(x) = |x|$ é uma função par, pois temos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$m(-x) = |-x| = -(-x) = x = |x| = m(x).$$

Portanto, sabemos que a parte do gráfico que está à esquerda do eixo $y$ é a reflexão, em relação à este mesmo eixo, da parte do gráfico que está à direita do eixo.

Partindo da Definição 3.29 concluímos também que, para $x \geqslant 0$ o gráfico da função $m$ é representado pela função identidade. Já para $x < 0$, o gráfico de $m$ é dado pela reflexão, desta mesma função identidade, em relação ao eixo $y$. Veja o gráfico de $m$ na Figura 3.26:

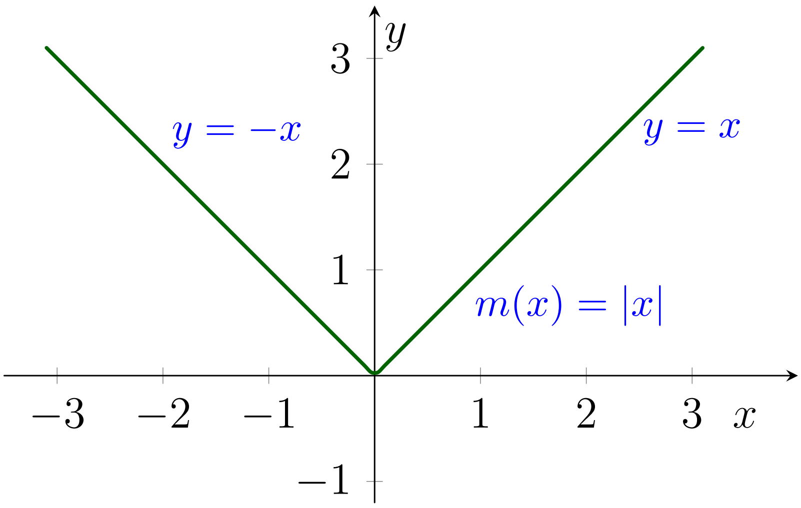


**Figura 3.26:** *Função Modular* $m(x) = |x|$

Neste gráfico, vemos claramente que a função modular jamais terá imagens negativas, isto justamente porque quando $x < 0$ é necessário calcular $f(x) = -x$, obtendo então somente valores onde $f(x) \geqslant 0$.

**Exemplo 3.30.** Aqui, neste exemplo, fazemos um esboço do gráfico da função $f(x) = |x^2 - 1|$, que é uma translação vertical de $y = |x^2|$. Veja graficamente:

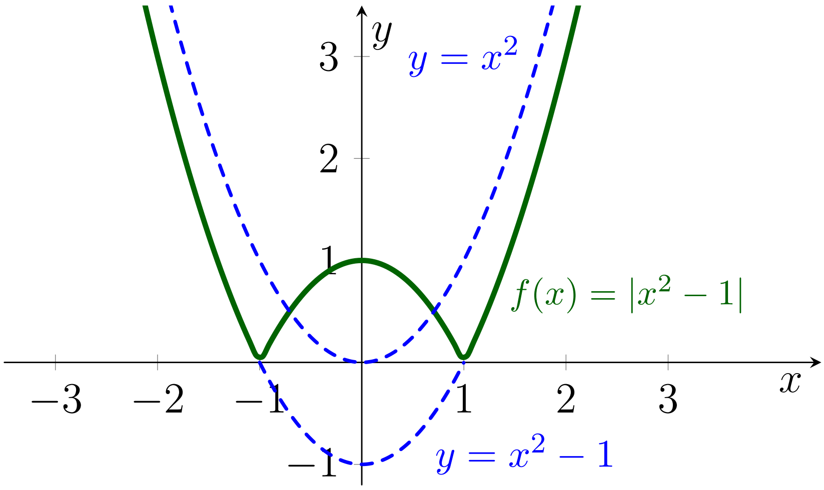


**Figura 3.27:** *Função Modular* $f(x) = |x^2 - 1|$

Olhando para a função $y = x^2$ só temos valores positivos para $y$. Ao transladar verticalmente em 1 unidade para baixo, obtemos $y = x^2 - 1$, onde já existem valores para $y < 0$, veja que isto ocorre no intervalo onde $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Mas, para a função $f(x) = |x^2 - 1|$, já vimos na Definição 3.29 que os valores de $y$ que são negativos, obrigatoriamente, passam a ser positivos. Podemos dizer então, que o ocorre neste caso é uma reflexão do intervalo onde o domínio tem imagem negativa, ou seja, de $-1 \leqslant x \leqslant 1$ é feito uma reflexão em torno do eixo $x$.

CAPÍTULO 4

# Uso do GeoGebra

Neste capítulo inicialmente abordamos sobre qual é a importância do uso do GeoGebra em sala de aula. Mas, para que o GeoGebra possa ser utilizado com o intuito de ampliar os conhecimentos dos alunos em relação aos estudos sobre as transformações no plano, primeiro é necessário norteá-los sobre como se dá a utilização do software em questão. Para isso, veja no decorrer deste capítulo a construção destes conhecimentos prévios sobre o software GeoGebra, para só depois aplicá-los na construção destas transformações.

> Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica. [Bortolossi 2010]

> As ferramentas tecnológicas como calculadoras gráficas ou software permitem interfaces importantes no desenvolvimento de ações em Educação Matemática. Destacam que abordar atividades matemáticas com uso desses recursos enfatiza um aspecto fundamental da disciplina, que é a experimentação, estimulando a investigação e, então, a teorização. [Borba e Penteado 2005, p . 41]

> Pesquisas realizadas com alunos usando o software GeoGebra têm demonstrado que seu uso favorece uma abordagem mais conceitual

e analítica da matemática, o que, por sua vez, promove a aprendizagem pela abrangência de recursos que possui, contemplando o desenvolvimento de processos de argumentação e validação em Matemática. É fato que recurso como o GeoGebra, além de contribuir para despertar e motivar o processo de aprendizagem torna-se importante aliado na tarefa de compreender os problemas que estão presentes na vida cotidiana e também de criar o hábito de participar, pensar por si próprio e construir o conhecimento, verificando também sua aplicação em outras disciplinas. [Batista 2012, p . 19]

## 4.1 Guia Básico do GeoGebra

O primeiro passo é baixar o software, para isto bastar acessar seu site oficial https://www.geogebra.org/download. Em seguida, selecione a versão desejada para realizar o download. É importante mencionar desde já que a versão utilizada pela autora como referência para este trabalho é "GeoGebra Clássico 6".

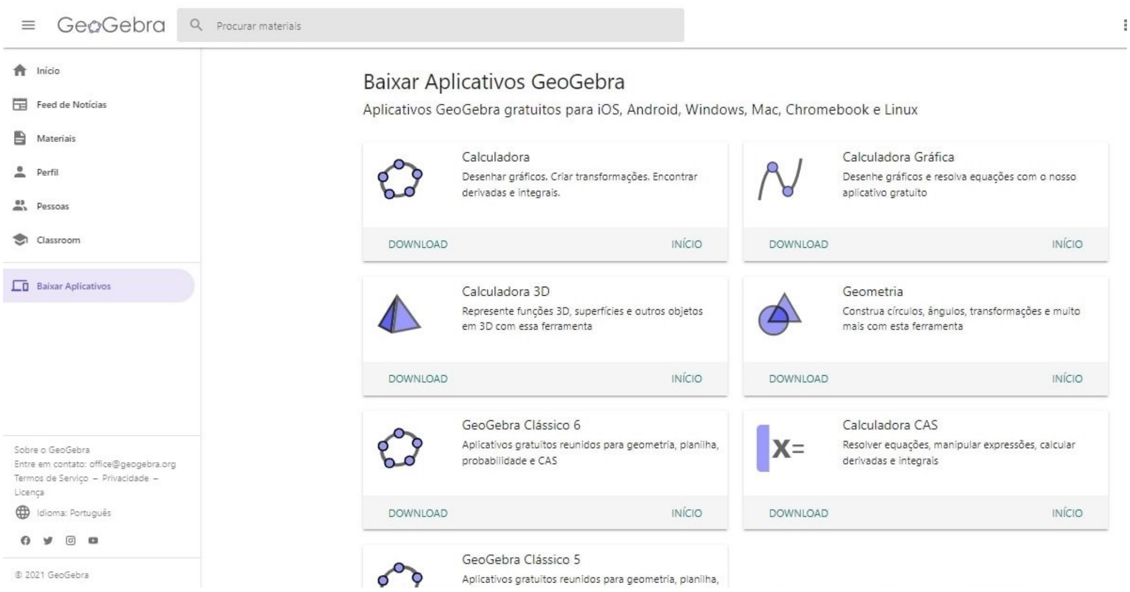

**Figura 4.1:** *Site para Download do GeoGebra*

Depois de instalado, ao abrir o programa nos deparamos com a **Janela de Álgebra**, a **Janela de Visualização**, com um **Menu Principal**, com uma **Barra de Ferramentas** e com o **Campo de Entrada**. Na **Janela de Álgebra** é onde vemos as coordenadas que digitamos no software, sejam elas pontos, retas, funções, entre outras possibilidades.

Já na **Janela de Visualização**, é onde vemos o que foi gerado a partir dos comandos digitados. E, é no **Campo de Entrada** onde são digitados todos estes comandos.

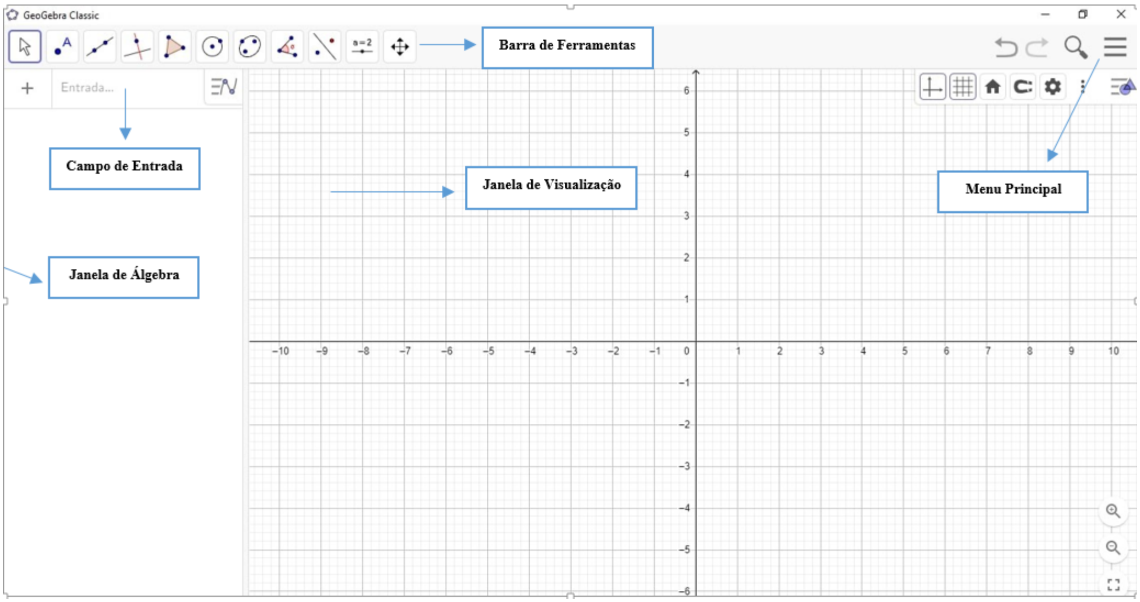


**Figura 4.2:** *GeoGebra*

No **Menu Principal** temos oito funcionalidades e, dentro de cada uma delas temos outras subdivisões.

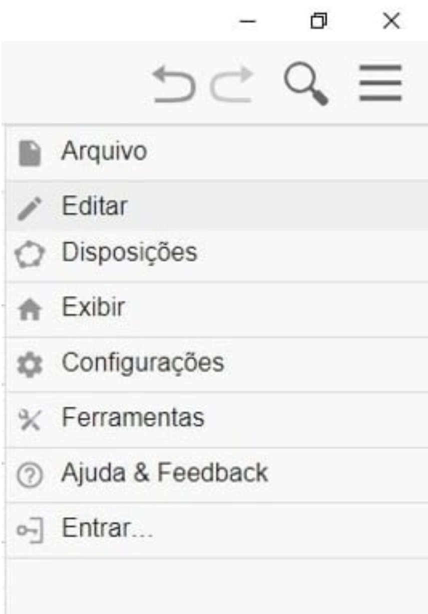


**Figura 4.3:** *Menu Principal*

A primeira delas é **Arquivo**, aqui neste item, conseguimos abrir um novo arquivo ou até mesmo um arquivo já existente, salvar ou compartilhar o arquivo em uso, baixar, visualizar a impressão, dentre outras opções.

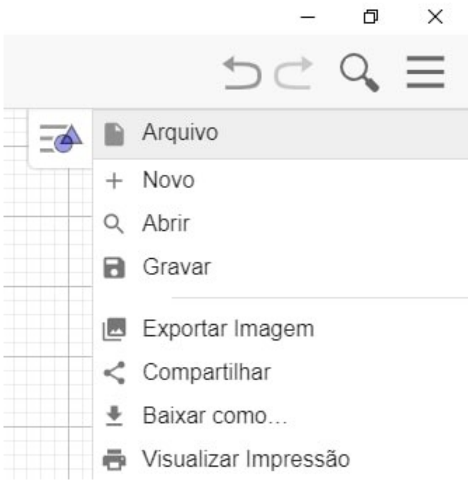


**Figura 4.4:** *Arquivo*

A opção **Editar** nos permite desfazer ou refazer ações no arquivo, copiar ou colar itens, entre outras funções. Já em **Disposições** podemos selecionar com qual janela vamos trabalhar, como opções temos o Gráfico, a Janela 3D, uma Planilha de Cálculo, entre outros.

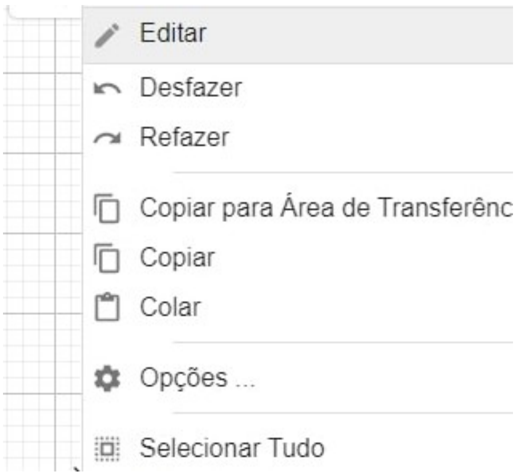


**Figura 4.5:** *Editar*

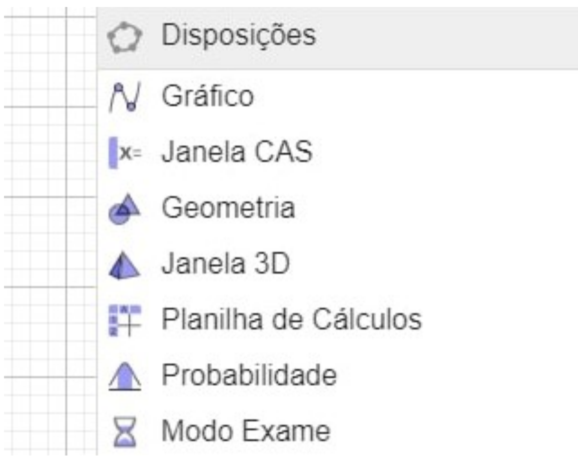


**Figura 4.6:** *Disposições*

Na função **Exibir** podemos selecionar o que é que queremos que fique aberto na tela do GeoGebra, como opções temos a **Janela de Álgebra**, a **Janela de Visualização**, o **Campo de Entrada**, a **Janela de Visualização 3D**, entre outros.

Em **Configurações**, conseguimos alterar configurações gerais do GeoGebra, sendo elas o idioma e o tamanho da fonte, por exemplo. E também, temos a possibilidade de controlar configurações mais específicas, como exemplo, alterar unidades de casas decimais para cada arredondamento e, o fato de rotular ou não automaticamente cada item adicionado ao gráfico.

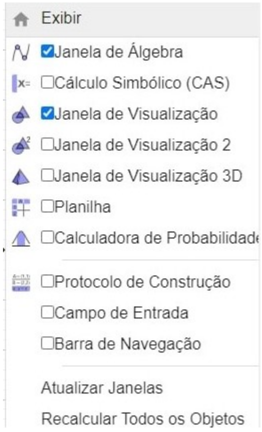


**Figura 4.7:** *Exibir*

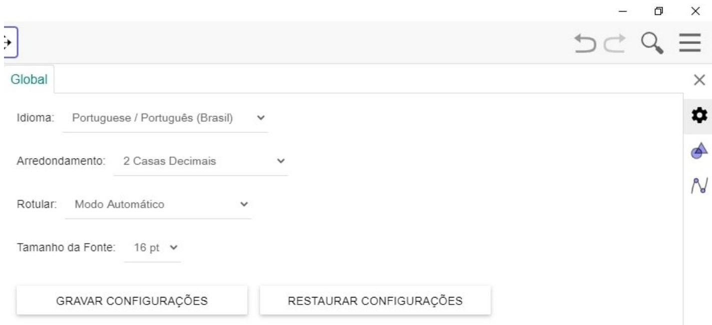


**Figura 4.8:** *Configurações*

Na aba **Ferramentas**, conseguimos adicionar ou alterar a aparência da **Barra de Ferramentas**. Já na opção **Ajuda**, é possível ver tutoriais sobre o GeoGebra, reportar erros, participar de um fórum e também acessar o manual do software.

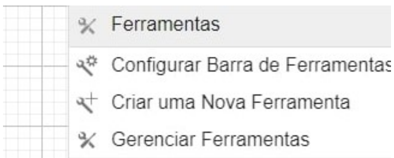


**Figura 4.9:** *Ferramentas*

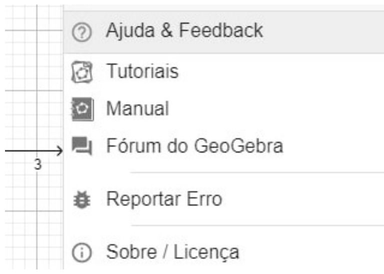


**Figura 4.10:** *Ajuda & Feedback*

E, por último, temos também a função **Entrar**, ou seja, é possível vincular com o GeoGebra uma conta já existente ou criar uma nova. Considerando que nenhuma alteração tenha sido feita na aba **Ferramentas**, ao abrir o GeoGebra, a estrutura da **Barra de Ferramentas** que encontramos contém onze itens.

Quando selecionamos o primeiro deles conseguimos mover a **Janela de Visualização**, desenhar uma função algébrica qualquer à mão livre, entre outras opções.

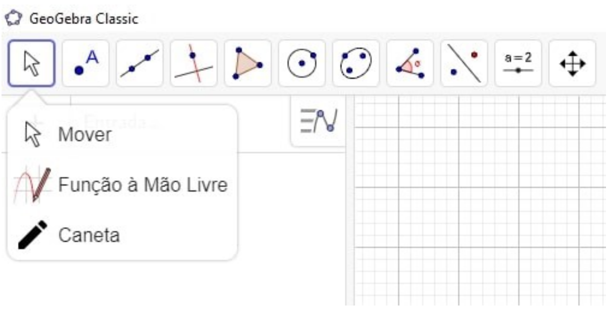


**Figura 4.11:** *Item 1*

No próximo item, temos várias funcionalidades, dentre elas podemos fazer um ponto qualquer, encontrar o ponto médio, marcar um ponto na interseção de dois objetos.

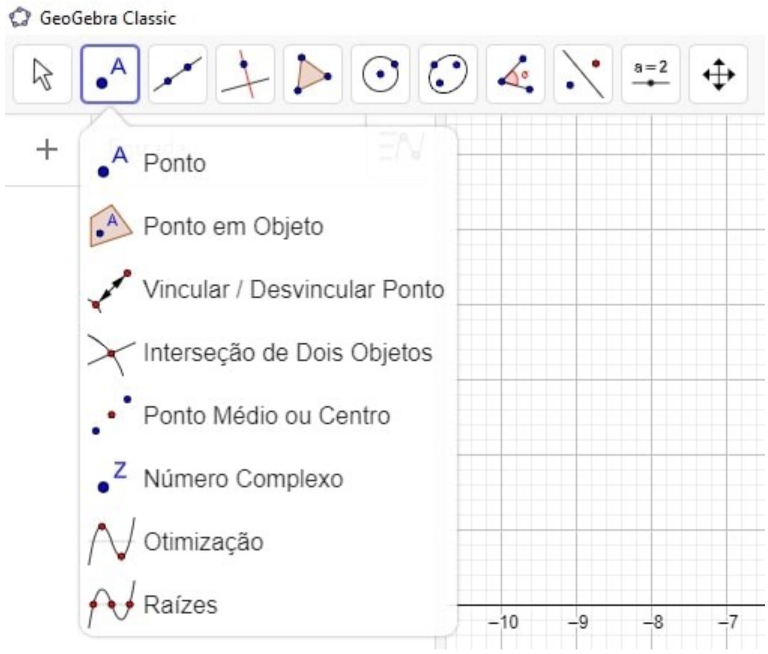


**Figura 4.12:** *Item 2*

No item seguinte, encontramos opções para fazer uma reta, um segmento de reta, uma semirreta, um vetor, entre outras opções.

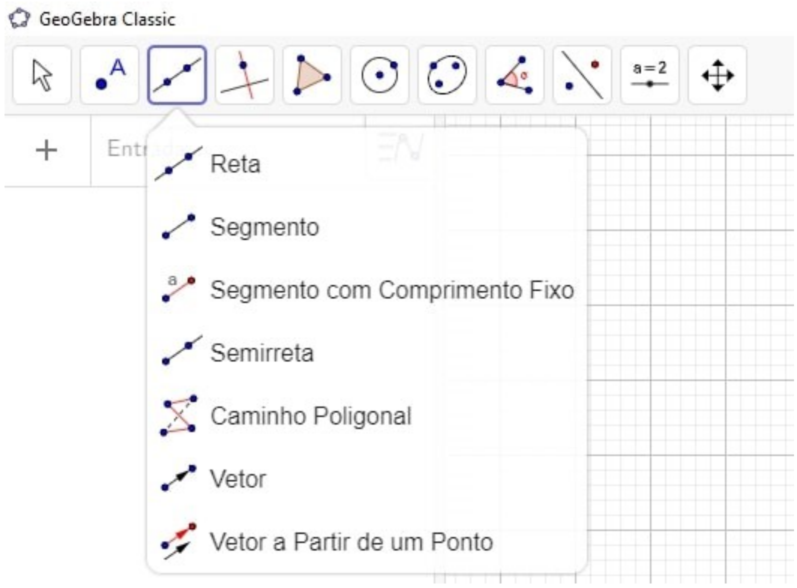


**Figura 4.13:** *Item 3*

Já no quarto item, temos a construção imediata da reta perpendicular, da reta paralela, da reta tangente, da mediatriz, da bissetriz e de outras funcionalidades.

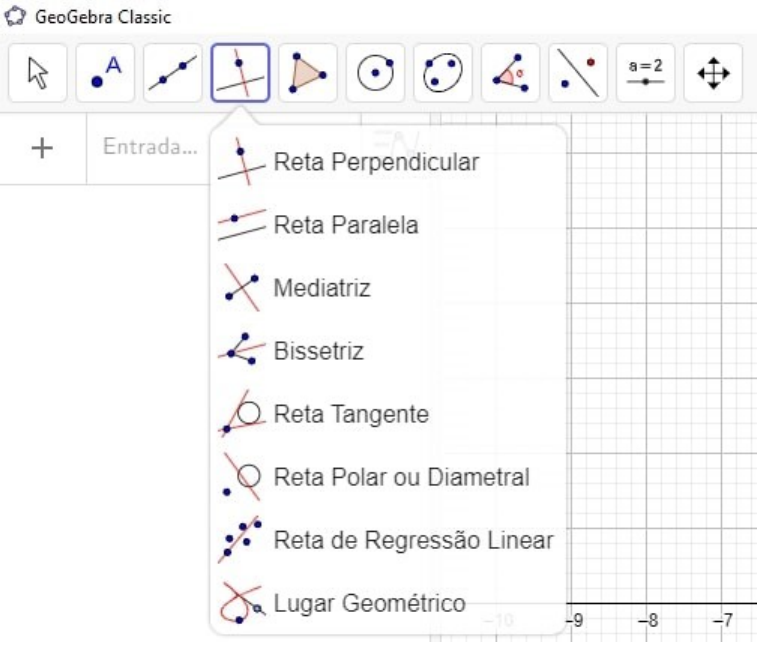


**Figura 4.14:** *Item 4*

No item seguinte, conseguimos, por exemplo, construir um polígono, seja ele regular ou não, apenas selecionando pontos aleatórios. E, um detalhe importante é que no caso de ser um polígono regular, basta selecionarmos dois pontos distintos e inserir a quantidade total de vértices desejados.

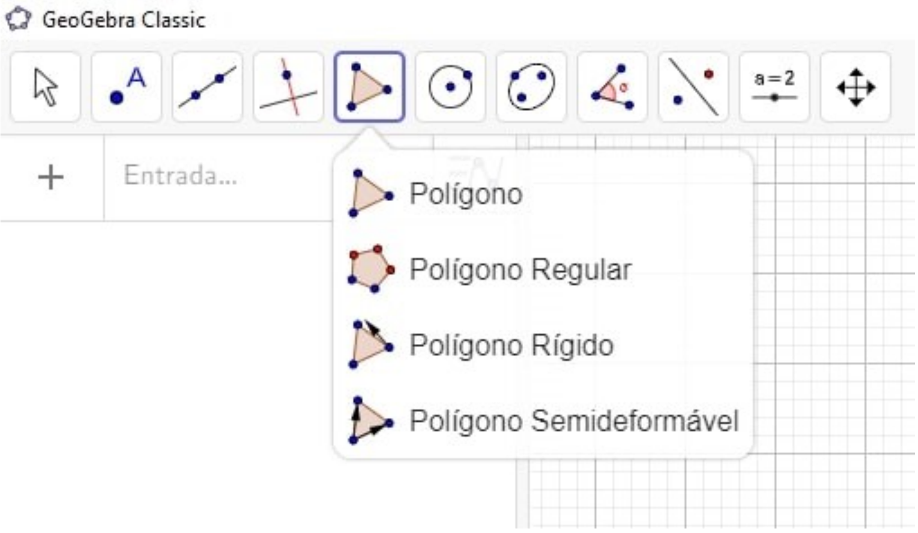


**Figura 4.15:** *Item 5*

No sexto item, conseguimos construir círculos de três formas distintas. Na primeira forma, basta saber o centro e um dos pontos pertencentes ao círculo. Já para a segunda construção, é necessário saber apenas o centro e o raio, não dependendo então de um ponto do círculo. E, por fim, para a terceira construção não é necessário saber nem o centro e nem o raio, apenas três pontos distintos pertencentes ao círculo.

E, neste mesmo item, é possível notar que há também construções já definidas para arco circular, setor circular, entre outras.

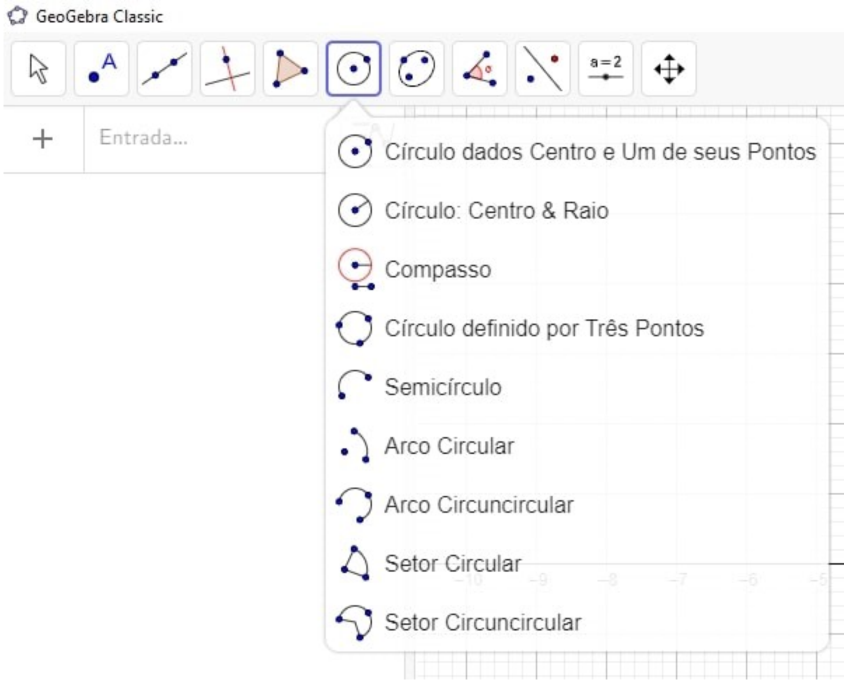


**Figura 4.16:** *Item 6*

O próximo item nos fornece a construção de uma elipse, de uma hipérbole, de uma parábola e também de uma cônica qualquer dados cinco pontos distintos.

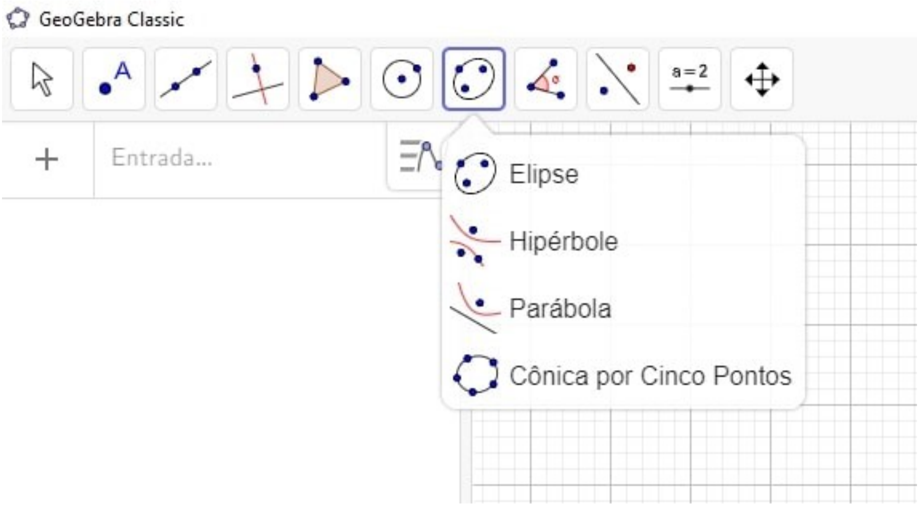


**Figura 4.17:** *Item 7*

No oitavo item temos funções que nos ajudam a construir ângulos com medidas já estabelecidas, ou até calcular ângulos entre dois segmentos de reta.

Neste mesmo item, encontramos também ferramentas que nos possibilita a fazer cálculos de área, de distância, de perímetro, entre outros.

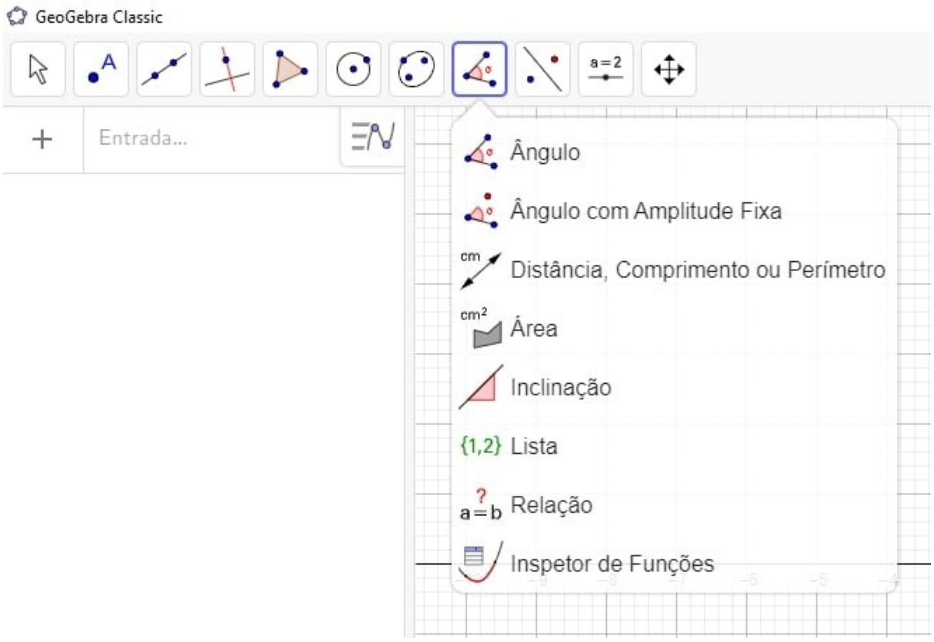


**Figura 4.18:** *Item 8*

É aqui, no nono item, que temos que focar, pois este é o assunto central do trabalho. De todas as funcionalidades vistas até aqui, esta é a que mais usamos na Seção 4.2. Neste item, conseguimos fazer algumas das operações de transformação no plano, mencionadas no Capítulo 2, sendo elas: reflexão em relação a uma reta ou a um ponto, inversão, rotação em torno de um ponto e translação.

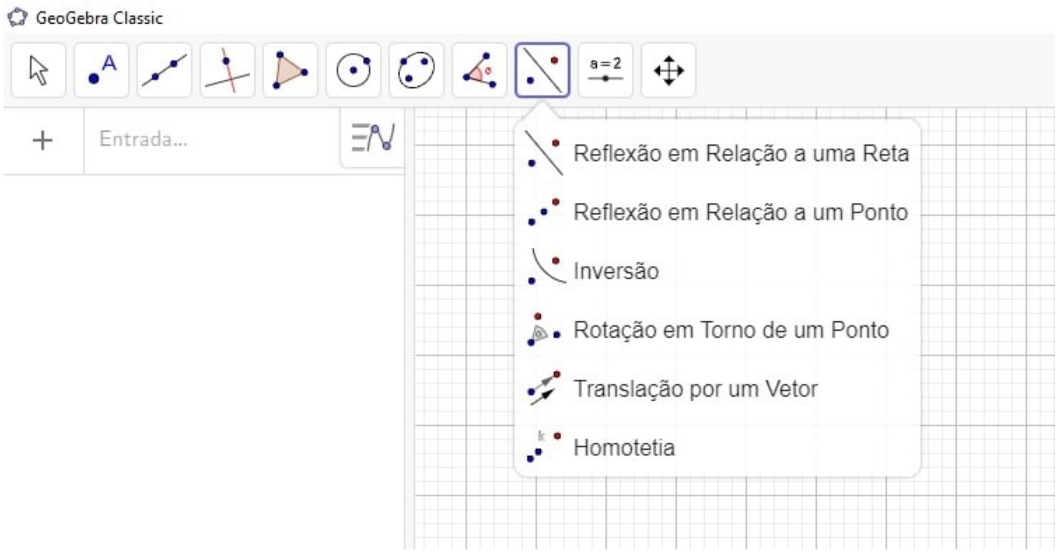


**Figura 4.19:** *Item 9*

No décimo item, temos duas funções importantes, a primeira delas é o **Controle Deslizante**, ele é quem fornece a oscilação de uma variável estabelecida. E, a outra é a função **Texto**, que é bem utilizado para nomear corretamente as funções e objetos feitos no arquivo. E, o que é interessante para nós, é que há a possibilidade de colocar a grafia dos textos na mesma linguagem e fonte que utilizamos no aqui no LaTeX.

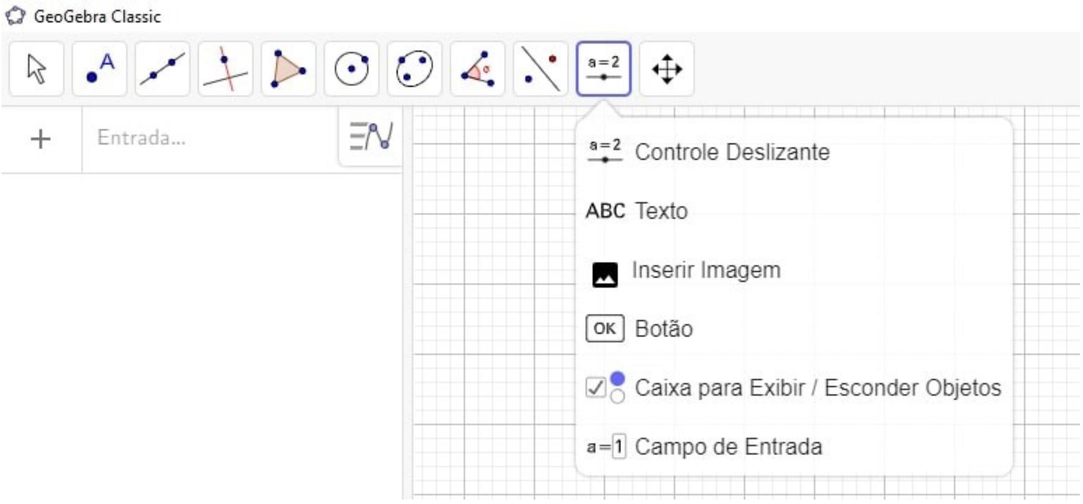


**Figura 4.20:** *Item 10*

E, por fim, o último item é utilizado também para conseguirmos mover a **Janela de Visualização**, para ampliar ou reduzir a tamanho da visualização do arquivo, entre outras funções.

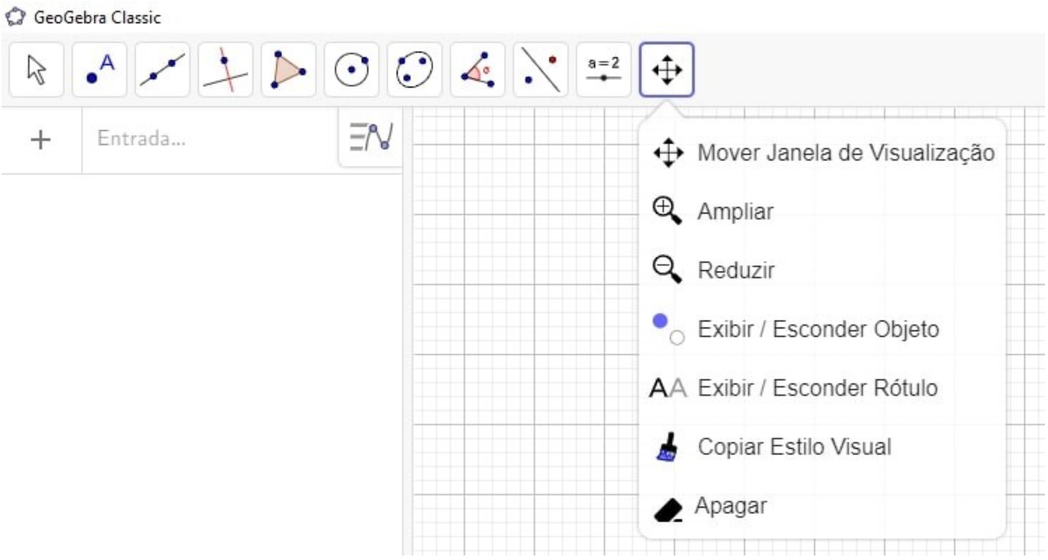


**Figura 4.21:** *Item 11*

Agora que já sabemos para o que serve cada item da tela principal do GeoGebra, vamos partir para a utilização do Item 9 (Figura 4.19) e, estudarmos assim um pouco mais sobre as transformações no plano conciliada com o uso do GeoGebra.

## 4.2 O uso do GeoGebra para construir gráficos e explorar os conceitos de transformações no plano

Aqui nesta seção descrevemos como se dá a construção gráfica de alguns dos exemplos que vimos no decorrer no trabalho. Além de usarmos o Item 9 (Figura 4.19), utilizamos também várias outras ferramentas que vimos na Seção 4.1, como exemplo temos marcações de pontos, inserção de funções através do **Campo de Entrada**, ajustes nas configurações mais específicas que alteram a aparência dos traçados dos gráficos, entre outras.

**Exemplo 4.1.** Inicialmente, veja aqui a construção no GeoGebra do Exemplo 2.5.

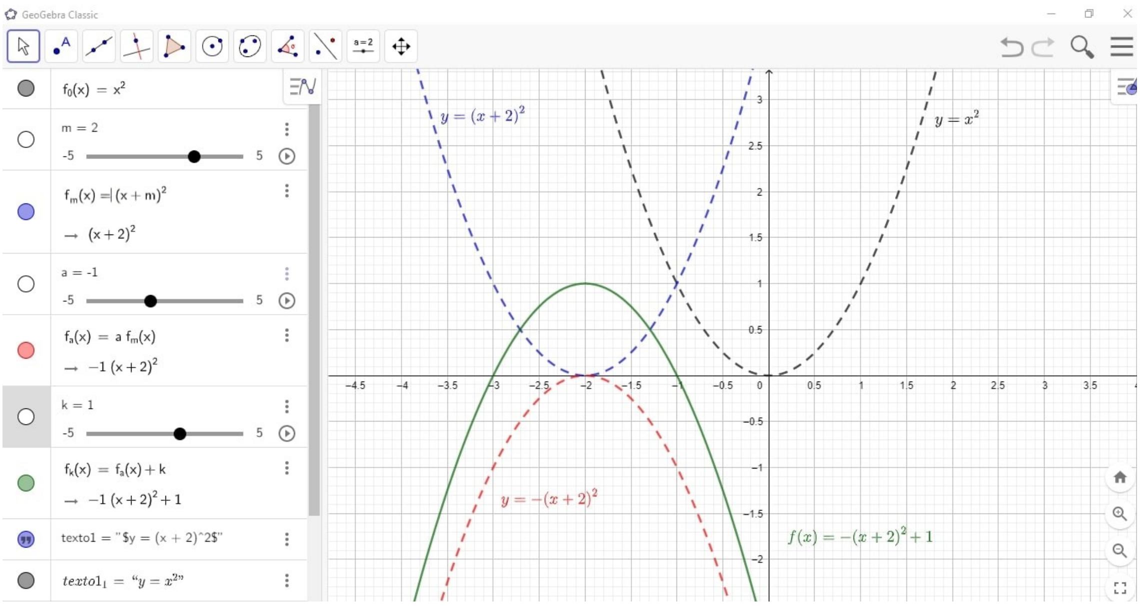


**Figura 4.22:** *Reflexão, Translação Vertical e Horizontal de* $y = x^2$

Defina inicialmente a função $f_0(x) = x^2$ e defina também outras três funções com parâmetros variáveis. Sendo elas $f_m(x) = (x+m)^2$ uma translação horizontal, $f_k(x) = a \cdot (x+m)^2 + k$ uma translação vertical e $f_a(x) = a \cdot (x+m)^2$, sendo neste caso uma reflexão, visto que $a = -1$, para este exemplo temos $m = 2$ e $k = 1$.

É válido pontuarmos aqui, que existem diversas combinações existentes para $a$, $m$ e $k$. Para este exemplo visto, os fixamos desta forma que foi estabelecida, mas isto não é regra. Tanto é que, vemos no Exemplo 4.2, uma outra possibilidades desta combinação.

A maior diferença entre os Exemplos 4.1 e 4.2, é a forma como $a$ é visto. Pois, no caso de $a = 1$ nada acontece com a função, já no caso onde $a = -1$, estamos trabalhando com reflexões. Mas, no caso onde $a$ é um outro número aleatório, estamos trabalhando com contrações ou dilatações.

**Exemplo 4.2.** Agora, veja a construção gráfica no GeoGebra do Exemplo 2.6.

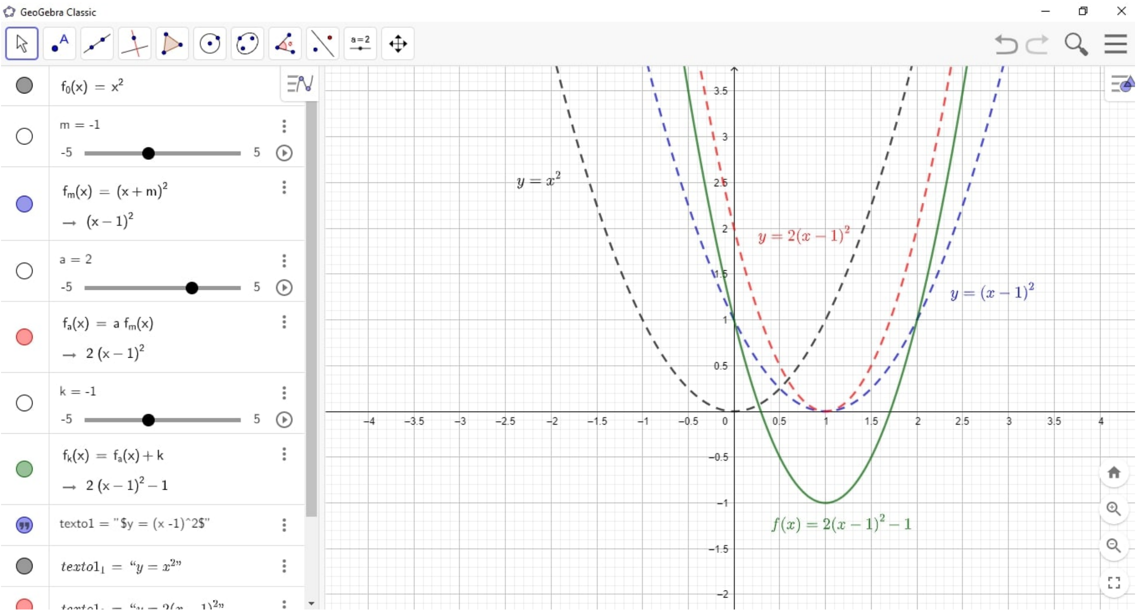


**Figura 4.23:** *Dilatação, Translação Vertical e Horizontal de* $y = x^2$

Aqui, neste outro, consideramos novamente a função $y = x^2$ como sendo a função inicial, em seguida definimos as mesmas funções $f_a$, $f_k$ e $f_m$, agora os parâmetros utilizados são $m = -1$, $a = 2$ e $k = -1$, a única diferença aqui é que $a$ agora é uma dilação vertical ao invés de ser reflexão.

**Exemplo 4.3.** Agora, veja a construção gráfica no GeoGebra dos Exemplos 3.24 e 3.25.

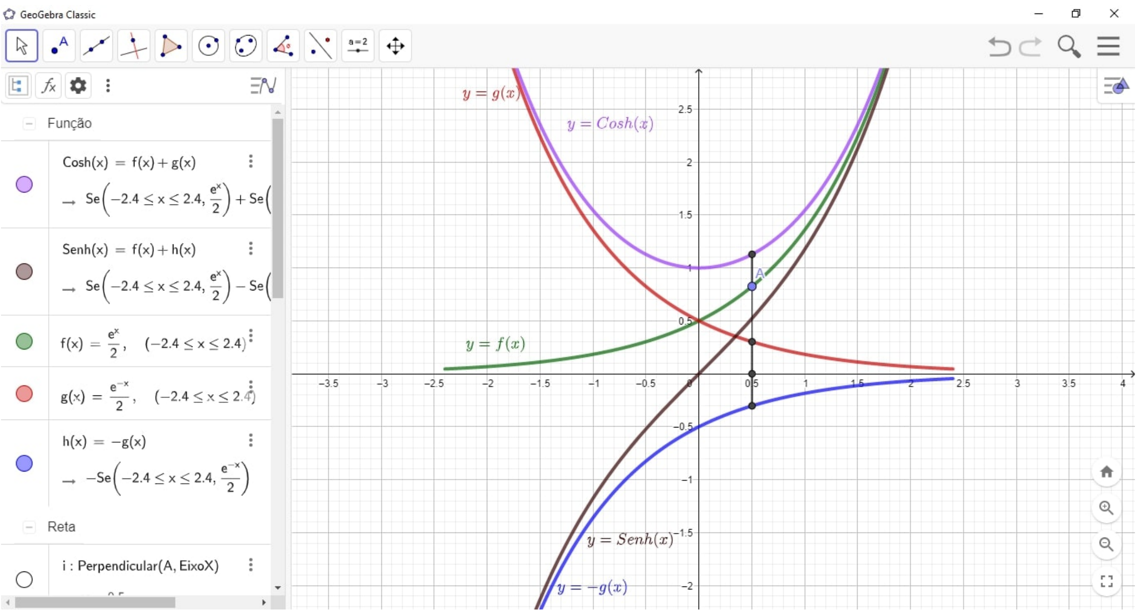


**Figura 4.24:** *Funções Seno e Cosseno Hiperbólicos*

Para este exemplo, primeiramente, defina as funções $f(x) = \dfrac{e^x}{2}$ e $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}$, em seguida defina a função $h(x) = -g(x)$. Agora, por meio da adição de gráficos de funções, conseguimos definir as funções seno e cosseno hiperbólico, sendo dadas por $\text{Senh}(x) = f(x) + h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\text{Cosh}(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, respectivamente.

**Exemplo 4.4.** Agora, veja a construção gráfica no GeoGebra do Exemplo 1.49.

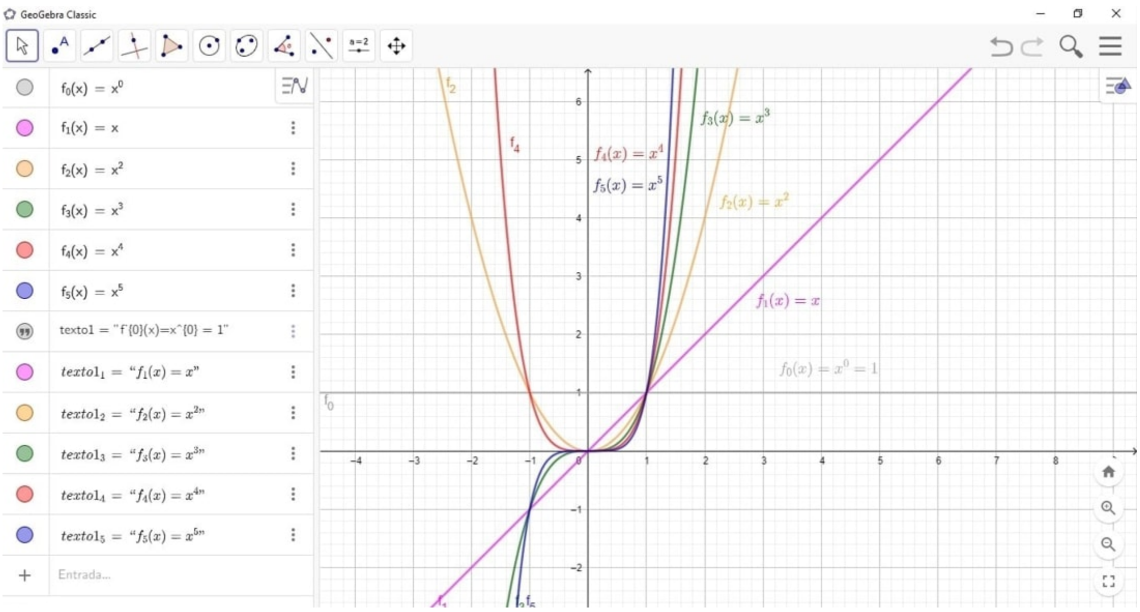


**Figura 4.25:** *Família* $f(x) = x^n$

Definimos cada função individualmente para conseguir alterar as cores de cada uma delas, mas é possível também definir toda família como sendo uma sequência, aqui neste caso temos a família $f_n(x) = x^n$ e no esboço do gráfico consideramos $n = \{1, 2, \cdots, 5\}$.

# Considerações Finais

No decorrer da realização deste trabalho, vimos então que além do fato de que as funções são imprescindíveis nas nossas vidas, pois estão presentes desde os primórdios da História da Matemática e, estão presentes também nos mais variados ramos da Educação, visto que é um conceito multidisciplinar.

Vimos também que, embora não tenhamos abordamos todos os conceitos e definições pertinentes às funções, este é um conteúdo bem vasto para ser estudado, visto que existe diversos tipos de funções existentes.

O foco principal do presente trabalho é nos situar do quão importante é ensinar o conceito de funções de forma interligada, quando se trata de suas diferentes formas de representações, ou seja, vimos o quanto nos é útil, aprender seus conceitos geométricos e algébricos os relacionando e, utilizando como apoio, em alguns momentos, as suas representações numéricas.

Para o desenvolvimento destas diferentes representações de funções, recorremos ao auxílio do software GeoGebra e à linguagem de programações TikZ. Isto porque as figuras presentes no trabalho que representam os gráficos das funções foram feitas utilizando códigos gerados no GeoGebra em Tikz que serviram para nos nortear de como se dá seu comportamento e, é claro que para melhorar mais ainda cada uma delas, foi necessário acrescentar outros códigos em TikZ para que conseguíssemos obter as figuras desejadas.

As únicas figuras que não foram geradas a partir da linguagem de programação são as que são capturas de tela que estão presentes no Guia Básico sobre o GeoGebra. Não só as figuras tiveram origem a partir do TikZ, mas todas as tabelas que fizemos também foram originadas através desta linguagem de programação.

Então, além de abordamos também sobre toda a importância de estudarmos sobre as funções, mostramos aqui, que é possível utilizar algumas ferramentas para facilitar o estudo das funções propriamente ditas.

Ferramentas estas que nos ajudam a expandir mais ainda o conhecimento e a ludicidade de estudar um conceito que muitas vezes é visto de uma maneira tão enrijecida, sem fugir do básico da sala de aula que é papel e caneta.

Ou seja, através do uso do GeoGebra estamos expandindo, para o professor e para o aluno, as possibilidades para tornar a aula mais lúdica e desta forma naturalizar o ensino do conceito de funções, trazendo junto com a parte algébrica, sua parte numérica e geométrica.

Então, essa dissertação serve como uma possibilidade para que professores e alunos, vejam o ensino de funções de forma mais simplificada, levando sempre em consideração suas variadas forma de representação simultaneamente.

# Referências Bibliográficas


[Anton 2000]ANTON, H. *Cálculo, um novo horizonte*. [S.l.]: Porto Alegre: Bookman, 2000.

[Ardenghi 2008]ARDENGHI, M. J. *Ensino aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil*. Dissertação do Mestrado em Educação Matemática, 2008. https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11304/1/Marcos%20Jose%20Ardenghi.pdf.

[Barbosa 2010]BARBOSA, R. M. Descobrindo padrões em mosaicos. *São Paulo: Atual*, 2010.

[Barreto 2007]BARRETO, M. M. *Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários*. Dissertação de Mestrado Profissionalizante, 2007. https://lume.ufrgs.br/handle/10183/12669.

[Batista 2012]BATISTA, L. d. S. O geogebra como ferramenta de auxílio pedagógico no estudo das funções quadráticas. 2012.

[Bergeron e Hercovics 1982]BERGERON, J.; HERCOVICS, N. Levels in the understanding of functions concept. proceedingsofthe workshop of functions. *Enschede*, 1982.

[Borba e Penteado 2005]BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática e educação matemática. v. 3 ed., 2005.

[Bortolossi 2010]BORTOLOSSI, H. J. v. 3 ed., 2010.

[Boyer e Merzbach 2011]BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *A history of mathematics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.

[Brasil]BRASIL. Pcn+ ensino médio: Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC.

[Brasil]BRASIL. Pcnem: Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio). ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC.

[Brasil]BRASIL. Secretaria da educação básica. orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC.

[Brasil]BRASIL. Secretaria da educação básica. orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. *Secretaria de Educação Básica*, Brasília: Ministério da Educação, v. 2.

[Campagner]CAMPAGNER, C. A. *Definição de domínio e imagem: função inversa e composta*. [S.l.]: Brasília: MEC.

[Doering 2015]DOERING, C. *Introduçao A Analise Matematica*. [S.l.]: Ciencia Moderna, 2015. ISBN 9788539905096.

[Doreen et al. 2012]DOREEN, K. Y. F. et al. The mathematics behind the art of m. c. escher. site criado pelos alunos do módulo gek1518 ?mathematics in art and architecture?, ministrada pelo professor associado helmer aslaksen do departamento de matemática da national university of singapore. 2012.

[Eves 2004]EVES, H. Introdução à história da matemática, trad. *Hygino H. Domingues*, v. 2, 2004.

[Flemming e Gonçalves 2006]FLEMMING, D. M.; GONçALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração, 6ª ed. revista e ampliada*. [S.l.]: São Paulo: Pearson - Prentice Hall, 2006. 448 p. p.

[Flemming e Gonçalves 2007]FLEMMING, D. M.; GONçALVES, M. B. *Cálculo A: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície, 2ª ed. revista e ampliada*. [S.l.]: São Paulo: Pearson - Prentice Hall, 2007. 435 p. p. ISBN 978-895-7605-116-9.

[Godino, Batanero e Font 2008]GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque ontossemiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 10, n. 2, p. 7–37, 2008. "https://www.researchgate.net/publication/242554799_Um_enfoque_onto-semiotico_do_conhecimento_e_a_instrucao_matematica_1.

[Guidorizzi 2013]GUIDORIZZI, H. *Um curso de cálculo*. [S.l.]: LTC, 2013. ISBN 9788521612599.

[Guidorizzi 2000]GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol. 2*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.

[Guidorizzi 2000]GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol. 4*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.

[Guidorizzi 2001]GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo-volume 1. *Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição*, 2001.

[Hohenwarter 2013]HOHENWARTER, M. Geogebra quickstart: Guia rápido de referência sobre o geogebra. v. 20, n. 08, 2013.

[Isoda 1996]ISODA, M. The development of language about function: An application of van hiele?s levels. *PME 20*, v. 3, p. 105–112, 1996.

[Jablan 1995]JABLAN, S. V. Theory of symmetry and ornament. *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy*, 1995. "https://www.emis.de/monographs/jablan/index.html.

[Kaiber 2002]KAIBER, C. T. A prática de resolução de problemas no estudo das funções reais. *Anais do IV Simpósio de Educación Matemática*, 2002.

[Lehmann 1998]LEHMANN, C. H. Geometria analítica. *São Paulo: Globo.*, 1998.

[Lima 1993]LIMA, E. L. Analise real,(2a edição). *Coleção Matemática Universitaria, IMPA*, v. 1, 1993.

[Lima 1995]LIMA, E. L. *Curso de Analise, Volume 1, (14a Edição)*. [S.l.]: IMPA, 1995. ISBN 8524401184.

[Lima et al. 1996]LIMA, E. L. et al. *A matematica do ensino médio, Volume 2*. [S.l.]: SBM, 1996. ISBN 9788585818111.

[Lima et al. 2006]LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2006. ISBN 85-8581810-7.

[Lima et al. 2010]LIMA, E. L. et al. *Temas e Problemas*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[Ponte 1992]PONTE, J. P. *The history of the concept of function and some educational implications*. 1992. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3168/1/92-Ponte%20%28Functions-TME%29.pdf.

[Sierpinska 1992]SIERPINSKA, A. *On understanding the notion of function*. 1992. https://www.academia.edu/5091752/On_understanding_the_notion_of_function.

[Silva]SILVA, M. E. Aprendizagem significativa e o ensino de função do segundo grau. *Anais do X Seminário de Pesquisa da UTP*, Curitiba.

[Thees 2009]THEES, A. V. *Um Estudo de Caso do Conhecimento do Professor de Matemática da Educação Básica Sobre o Comportamento Variacional das Funções Afim e Quadrática*. Monografia de Especialização, 2009.

[Thomas 2009]THOMAS, G. B. *Cálculo, V. 1*. [S.l.]: São Paulo: Pearson, 2009. 772 p. p. ISBN 978-85-88639-31-7.

[Thomas et al. 2010]THOMAS, G. B. et al. *Calculus*. [S.l.]: Pearson Boston, 2010.

[Tomassini e Calcolo 1995]TOMASSINI, M.; CALCOLO, C. S. D. A survey of genetic algorithms. 1995.

APÊNDICE A

# Códigos do TikZ

Aqui neste apêndice, vamos aprender um pouco mais sobre a linguagem de programação TikZ. Vamos ver os códigos que originaram algumas das figuras exibidas durante o decorrer do trabalho.

Inicialmente, vamos ver quais são os códigos que geram a Figura 1.10. Sabemos que esta figura representa um diagrama de uma função sobrejetora, veja:

**Código TikZ A.1:** *TikZ do Diagrama de uma Função Sobrejetora*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
\definecolor{myredcolor}{rgb}{0.8,0.,0.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}
\node (-3) at (0,0) {-3};
\filldraw (-3.east) circle (1pt);
\node (-2) [below of=-3] {-2};
```

```
\filldraw (-2.east) circle (1pt);
\node (-1) [below of=-2] {-1};
\filldraw (-1.east) circle (1pt);
\node (0) [below of=-1] {0};
\filldraw (0.east) circle (1pt);
\node (1) [below of=0] {1};
\filldraw (1.east) circle (1pt);
\node (2) [below of=1] {2};
\filldraw (2.east) circle (1pt);
\node (3) [below of=2] {3};
\filldraw (3.east) circle (1pt);
\node[fit=(-3) (-2) (-1) (0) (1) (2) (3), ellipse, draw=myredcolor,
minimum width=2cm, thick, label=below:\(X\)]{};
\node (0_0) at (5,-1.3) {0};
\filldraw (0_0.west) circle (1pt);
\node (1_1) [below of=0_0] {1};
\filldraw (1_1.west) circle (1pt);
\node (4) [below of=1_1] {4};
\filldraw (4.west) circle (1pt);
\node (9) [below of=4] {9};
\filldraw (9.west) circle (1pt);
\node[fit=(0_0) (1_1) (4) (9), ellipse, draw=mygreencolor,
minimum width=2cm, thick, label=below:\(Y\)]{};
\draw[->, shorten >=.1cm,>=stealth'] (-3.east) to [out=-30, in=160]
(9.west);
\draw[->, shorten >=.1cm,>=stealth'] (-2.east) to [out=-30, in=160]
(4.west);
\draw[->, shorten >=.1cm,>=stealth'] (-1.east) to [out=1, in=190]
(1_1.west);
\draw[->, shorten >=.1cm,>=stealth'] (0.east) to [out=15, in=200]
(0_0.west);
\draw[->, shorten >=.1cm,>=stealth'] (1.east) to [out=15, in=230]
(1_1.west);
\draw[->, shorten >=.1cm,>=stealth'] (2.east) to [out=20, in=200]
(4.west);
\draw[->, shorten >=.1cm,>=stealth'] (3.east) to [out=25, in=200]
(9.west);
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Um outro caso que é importante aprendermos mais sobre seus códigos, é o caso visto no Figura 1.14, onde temos uma função não-crescente representada. É importante saber quais códigos dão origem a esta função justamente pelo fato de que, aqui, temos que definir funções diferentes para cada intervalo tomado.

Veja seus códigos:

**Código TikZ A.2:** *TikZ da Função Não-Crescente*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm]
\begin{axis}[
x=0.8cm,y=0.8cm,
axis lines=middle,
xmin=-1.5,
xmax=6.5,
ymin=-1.5,
ymax=5.5,
xtick={-1.0,0.0,...,5.0},
ytick={-1.0,0.0,...,6.0},]
\clip(-1.5,-1.5) rectangle (6.5,5.5);
\draw[line width=1.pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=-1:1] plot(\x,{-2*(\x)+3});
\draw[line width=1.pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=1:4] plot(\x,{1});
\draw[line width=1.pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=4:6] plot(\x,{-(\x)+5});
\draw [color=mybluecolor](1.5,1.9) node[anchor=north west]
{$y = f(x)$};
\draw (6.2,-0.3) node {$x$};
\draw (0.3, 5.2) node {$y$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

```
\end{document}
```

Para a função cúbica $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ vista na Figura 1.29, temos que seus códigos são dados por:

**Código TikZ A.3:** *TikZ de uma Função Cúbica*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm,scale=1.2]
\begin{axis}[
x=0.9cm,y=0.9cm,
axis lines=middle,
xmin=-2.5,
xmax=5.1,
ymin=-4.5,
ymax=3.5,
xtick={-2.0,-1.0,...,4.0},
ytick={-4.0,-3.0,...,3.0}]
\clip(-3.5,-4.) rectangle (5.6,3.5);
\draw[line width=1.5pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=-3.5:2.5] plot(\x,{(\x)^(3)-2*(\x)^(2)-(\x)+2});
\draw [color=mybluecolor](0.1,-0.8) node[anchor=north west]
{{\small $f(x) = x^3 - 2x^2 -x +2$}};
\draw (4.9,-0.3) node {$x$};
\draw (0.3, 3.3) node {$y$};
\end{axis}
```

```
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

A função racional $h_1(x) = \frac{1}{x}$, que está representada na Figura 1.30, tem no seu gráfico dois intervalos distintos, visto que para o domínio igual a zero se tem indeterminações. Ela é gerada a partir dos códigos:

**Código TikZ A.4:** *TikZ de uma Função Racional*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1cm,scale=1.2]
\begin{axis}[
x=1.0cm,y=1.0cm,
axis lines=middle,
tick label style={font=\scriptsize},
xmin=-4.5,
xmax=5.0,
ymin=-4.5,
ymax=5,
xtick={1/4,1/2,1,2,4},
xticklabels = {$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{2}$,1,2,4},
extra x ticks = {-4,-2,-1},
extra x tick style={tick label style={yshift=0.5mm,anchor=south}},
ytick={1/4,1/2,1,2,4},
yticklabels = {$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{2}$,1,2,4},
extra y ticks = {-4,-2,-1},
extra y tick style={tick label style={yshift=0.5mm,anchor=west}},]
```

```
\clip(-5,-5) rectangle (5.0,5);
\draw[line width=1.2pt,color=mybluecolor,smooth,samples=300,
domain=0.1:4.5] plot(\x,{1/(\x)});
\draw[line width=1.2pt,color=mybluecolor,smooth,samples=300,
domain=-4.5:-0.1] plot(\x,{1/(\x)});
\draw [color=mybluecolor](2.45,1.1) node[anchor=north west]
{{\small $h_1(x) = \frac{1}{x}$}};
\draw (4.8,-0.2) node {$x$};
\draw (-0.15, 4.7) node {$y$};
\draw [thick,dashed] (-4,0)-- (-4,-1/4);
\draw [thick,dashed] (-4,-1/4)-- (0,-1/4);
\draw [thick,dashed] (-2,0)-- (-2,-1/2);
\draw [thick,dashed] (-2,-1/2)-- (0,-1/2);
\draw [thick,dashed] (-1,0)-- (-1,-1);
\draw [thick,dashed] (-1,-1)-- (0,-1);
\draw [thick,dashed] (-1/2,0)-- (-1/2,-2);
\draw [thick,dashed] (-1/2,-2)-- (0,-2);
\draw [thick,dashed] (-1/4,0)-- (-1/4,-4);
\draw [thick,dashed] (-1/4,-4)-- (0,-4);
\draw [thick,dashed] (1/4,0)-- (1/4,4);
\draw [thick,dashed] (0,4)-- (1/4,4);
\draw [thick,dashed] (1/2,0)-- (1/2,2);
\draw [thick,dashed] (0,2)-- (1/2,2);
\draw [thick,dashed] (1,0)-- (1,1);
\draw [thick,dashed] (0,1)-- (1,1);
\draw [thick,dashed] (2,0)-- (2,1/2);
\draw [thick,dashed] (0,1/2)-- (2,1/2);
\draw [thick,dashed] (4,0)-- (4,1/4);
\draw [thick,dashed] (0,1/4)-- (4,1/4);
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Vimos também, a possibilidade de abordar funções como sendo família, vimos na Figura 1.32 uma das possíveis famílias existentes, seu gráfico foi gerado a partir dos códigos:

**Código TikZ A.5:** *TikZ de uma Família de Funções*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
```

```
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
\definecolor{myredcolor}{rgb}{0.8,0.,0.}
\definecolor{myorangecolor}{rgb}{1.,0.330,0.}
\definecolor{mygraycolor}{rgb}{0.4,0.4,0.4}
\definecolor{mypinkcolor}{rgb}{1.,0.2,0.8}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm,scale=1.1]
\begin{axis}[
x=2.0cm,y=2.0cm,
axis lines=middle,
xmin=-2.,
xmax=3.1,
ymin=-1.8,
ymax=3.7,
xtick={-1.5,-1.0,...,2.5},
ytick={-1.5,-2.0,...,3.0}]
\clip(-2.,-1.8) rectangle (3.1,3.7);
\draw [thick,dashed] (-1,0)-- (-1,-1);
\draw [thick,dashed] (-1,-1)-- (0,-1);
\draw [thick,dashed] (1,0)-- (1,1);
\draw[line width=1.pt,color=mygraycolor,smooth,samples=100,
domain=-1.5:2.5] plot(\x,{(\x)^(0.0)});
\draw[line width=1.pt,color=mypinkcolor,smooth,samples=100,
domain=-2.0:2.5] plot(\x,{(\x)^(1.0)});
\draw[line width=1.pt,color=myorangecolor,smooth,samples=100,
domain=-3.5:2.5] plot(\x,{(\x)^(2.0)});
\draw[line width=1.pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=-1.265:2.5] plot(\x,{(\x)^(3.0)});
\draw[line width=1.pt,color=myredcolor,smooth,samples=100,
domain=-3.5:2.5] plot(\x,{(\x)^(4.0)});
\draw[line width=1.pt,color=mybluecolor,smooth,samples=100,
domain=-1.15:2.5] plot(\x,{(\x)^(5.0)});
\draw [color=mygraycolor](1.5,1.3) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $f_0(x) = x^0 = 1$}};
\draw [color=mypinkcolor](1.9,2.0) node[anchor=north west]
```

```
{{\scriptsize $f_1(x) = x$}};
\draw [color=myorangecolor](1.5,2.5) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $f_2(x) = x^2$}};
\draw [color=mygreencolor](1.4,3.2) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $f_3(x) = x^3$}};
\draw [color=myredcolor](0.45,3.25) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $f_4(x) = x^4$}};
\draw [color=mybluecolor](0.4,3.0) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $f_5(x) = x^5$}};
\draw (3.,-0.1) node {$x$};
\draw (0.1, 3.6) node {$y$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Na Figura 2.13 temos a dilatação horizontal da função $y = f(x)$, esta dilatação ocorre quando se tem $0 < a < 1$. Veja seus códigos:

**Código TikZ A.6:** *TikZ de uma Dilatação Horizontal*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
\definecolor{myorangecolor}{rgb}{1.,0.330,0.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm,scale=1.1]
\begin{axis}[
x=0.8cm,y=0.8cm,
axis lines=middle,
```

```
xmin=-2.,
xmax=5,
ymin=-2,
ymax=5,
xtick={0},
ytick={0},]
\clip(-2.,-2) rectangle (5,5);
\draw [line width=1.pt,myorangecolor] (-1.1,3) -- (-1.1,4.5);
\draw [color=myorangecolor](-1.9,4.) node[anchor=north west]
{$\leftarrow$};
\draw [color=myorangecolor](-1.2,4.) node[anchor=north west]
{$\rightarrow$};
\draw[line width=1.pt,color=mybluecolor,smooth,samples=100,
domain=-2.8:4.15] plot(\x,{(0.6*\x)^(3)-2*(0.6*\x)^(2)-(0.6*\x)+2});
\draw[line width=1.pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=-3.3:2.5] plot(\x,{((\x)^(3)-2*(\x)^(2)-(\x)+2)});
\draw [color=mybluecolor](2.9,3.6) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $y = f(a \cdot x)$}};
\draw [color=mybluecolor](3.1,3.1) node[anchor=north west]
{{\tiny $0 < a < 1$}};
\draw [color=mygreencolor](0.7,2.9) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $y = f(x)$}};
\draw[color=mybluecolor] (-0.3,-0.3) node {\small{$O$}};
\draw (4.7,-0.3) node {$x$};
\draw (0.3,4.7) node {$y$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Vimos Figura 2.19 como fica uma função quadrática após sofrer algumas transformações planares, sendo elas reflexão, translação horizontal e vertical. Veja seus códigos:

**Código TikZ A.7:** *TikZ de Transformações Planares na Função Quadrática*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
```

```
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
\definecolor{myredcolor}{rgb}{0.8,0.,0.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm,scale=1.5]
\begin{axis}[
x=1cm,y=1cm,
tick label style={font=\scriptsize},
axis lines=middle,
xmin=-4.0,
xmax=3,
ymin=-2.5,
ymax=2.7,
xtick={-4,-3,...,2},
ytick={-2,-1,...,2}]
\clip(-4.0,-2.5) rectangle (3,2.7);
\draw[line width=1.pt,color=black,dashed,smooth,samples=100,
domain=-4:2] plot(\x,{(\x)^(2)});
\draw[line width=1.pt,color=mybluecolor,dashed,smooth,samples=100,
domain=-4:2] plot(\x,{(\x+2)^(2)});
\draw[line width=1.pt,color=myredcolor,dashed,smooth,samples=100,
domain=-4:2] plot(\x,{-(\x+2)^(2)});
\draw[line width=2.pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=-4.0:1.0] plot(\x,{-(\x)^(2)-4*(\x)-3});
{\scriptsize
\draw [color=black](1.4,2.3) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $y = x^2$}};
\draw [color=mybluecolor](-3.3,2.3) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $y = (x + 2)^2$}};
\draw [color=myredcolor](-3.3,-2) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $y = - (x + 2)^2$}};
\draw [color=mygreencolor](0.02,-1.5) node[anchor=north west]
{{\scriptsize $f(x) = - (x + 2)^2 + 1$}};
\draw (2.9,-0.2) node {$x$};
\draw (0.2, 2.4) node {$y$};}
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Na Figura 3.3 é possível ver o gráfico que representa uma função $f$ qualquer e sua inversa

$f^{-1}$. Mas, apesar de estarmos nos referindo sobre funções aleatórias, para conseguirmos traçar este gráfico foi necessário escolher uma função $f$ específica e sua inversão $f^{-1}$, veja seus códigos:

**Código TikZ A.8:** *TikZ de uma Função e sua Inversa*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
\definecolor{myredcolor}{rgb}{0.8,0.,0.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm,scale=0.95]
\begin{axis}[
x=1.5cm,y=1.5cm,
axis lines=middle,
xmin=-1,
xmax=5.5,
ymin=-1,
ymax=4.5,
xtick={0},
ytick={0},]
\clip(-1.,-1.) rectangle (5.5,5);
\draw [fill=black] (1.5,3.) circle (1.5pt);
\draw [line width=1.pt, dashed] (1.5,0) -- (1.5,3);
\draw [line width=1.pt, dashed] (0,3) -- (1.5,3.);
\draw [line width=1.pt, dashed] (3,0) -- (3,1.5);
\draw [line width=1.pt, dashed] (0,1.5) -- (3,1.5);
\draw [line width=1.pt, dashed, myredcolor] (3,1.5) -- (1.5,3);
\draw[line width=1pt,dashed,color=black,smooth,samples=100,
```

```
domain=-0.7:4]  plot(\x,{(\x)});
\draw[line  width=1.5pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=0:pi]  plot(\x,{sin(((\x-3/2))*180/pi)+3});
\addplot[line  width=1.5pt,domain=-1:1,no  marks,blue,smooth,samples=100,
xshift=4.61cm,yshift=2.35cm]  {rad(asin(x))};
\draw  [color=mybluecolor](0.9,3.5)  node[anchor=north  west]
{$(a,b)  =  \big(a,  f(a)\big)$};
\draw  [color=mybluecolor](3.1,1.8)  node[anchor=north  west]
{$(b,a)  =  \big(b,f(b)\big)$};
\draw  [color=mybluecolor](1.4,0)  node[anchor=north  west]  {$a$};
\draw  [color=mybluecolor](-0.3,3.2)  node[anchor=north  west]  {$b$};
\draw  [fill=black]  (3,1.5)  circle  (1.5pt);
\draw  [color=mybluecolor](2.9,0)  node[anchor=north  west]  {$b$};
\draw  [color=mybluecolor](-0.3,1.6)  node[anchor=north  west]  {$a$};
\draw  [color=mybluecolor](0.05,0)  node[anchor=north  west]  {$\small  O$};
\draw  [color=black](3.0,2.9)  node[anchor=north  west]  {$y  =  x$};
\draw  [color=mygreencolor](2.9,4.4)  node[anchor=north  west]  {$f$};
\draw  [color=mybluecolor](4.05,3.4)  node[anchor=north  west]  {$f^{-1}$};
\draw  (5.4,-0.15)  node  {$x$};
\draw  (0.15,4.4)  node  {$y$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

A Figura 3.11 é a função $f(x) = \log_2(x)$ após ser refletida e transladada horizontalmente e verticalmente. Após estas transformações temos como resultado a função $i(x) = 1 - \log_2(x + 2)$. Veja seus códigos:

**Código TikZ A.9:** *TikZ de Transformações Planares na Função Logarítmica*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
\definecolor{myredcolor}{rgb}{0.8,0.,0.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm,scale=1.15]
\begin{axis}[
x=1.0cm,y=1.0cm,
axis lines=middle,
xmin=-3.5,
xmax=5,
ymin=-4,
ymax=4,
xtick={-2,-1,0,1},
ytick={-1,0,1},
yticklabels = {-1,0,1}]
\clip(-3.5,-5) rectangle (5,4);
\draw[->] (0,-1) -- (0,5.5);
\draw[line width=1.5pt,smooth,samples=100,domain=0.001:4,dashed]
plot(\x,{ln(\x)/ln(2)});
\draw[line width=1.5pt,color=mybluecolor,smooth,samples=100,
domain=-1.99:4,dashed] plot(\x,{ln(\x+2)/ln(2)});
\draw[line width=1.5pt,color=myredcolor,smooth,samples=100,
domain=-1.99:4,dashed] plot(\x,{-ln(\x+2)/ln(2)});
\draw[line width=1.5pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=-1.99:4] plot(\x,{-ln(\x+2)/ln(2)+1});
\draw[dashed] (-2,-5) -- (-2,5);
\draw (-0.2, 3.8) node {$y$};
\draw (4.8,-0.2) node {$x$};
\draw (3.7,1.3) node[] {\scriptsize$f(x) = \log_2(x)$};
\draw (2.9,2.8) node[mybluecolor]
{\scriptsize$g(x) = \log_2(x + 2)$};
\draw (2.9,-2.8) node[myredcolor]
{\scriptsize$h(x) = - \log_2(x + 2)$};
\draw (3.5,-0.8) node[mygreencolor]
{\scriptsize$i(x) = 1 - \log_2(x + 2)$};
\draw (-0.3, -0.3) node {\scriptsize$O$};
\draw (-1.1, 0.5) node[myredcolor] {\scriptsize$1$};
\draw[|-|,myredcolor,dashed] (-1,0) -- (-1,1);
\draw (1, 1.2) node[myredcolor] {\scriptsize$2$};
\draw[|-|,myredcolor,dashed] (0,1) -- (2,1);
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Na Figura 3.21, temos a contração e a dilatação vertical da função seno $y = \text{sen}(x)$, veja quais são os códigos do TikZ que dão origem a ela:

**Código TikZ A.10:** *Contração e Dilatação Vertical da Função Seno*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
\definecolor{myredcolor}{rgb}{0.8,0.,0.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm,scale=1.1]
\begin{axis}[
x=1.0cm,y=1.0cm,
axis lines=middle,
xmin=-6.8,
xmax=7.2,
ymin=-2.5,
ymax=2.6,
xtick={-6.2831852,-4.71238,-3.1415926,-1.57079, 0, 1.57079, 3.1415926,
4.71238898,6.2831852},
xticklabels={$-2\pi$,$-\frac{3\pi}{2}$,$-\pi$,$-\frac{\pi}{2}$,$0$,
$\frac{\pi}{2}$,$\pi$,$\frac{3\pi}{2}$,$2\pi$},
ytick={-2.0,-1.0,...,2.0},]
\clip(-6.8,-2.5) rectangle (7.2,2.6);
\draw[line width=1.5pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=-6.2831852:6.2831852] plot(\x,{sin(((\x))*180/pi)});
\draw [color=mygreencolor](0.57,2.5) node[anchor=north west]
{$y = \textrm{sen}(x)$};
```

```
\draw (7.,-0.2) node {$x$};
\draw (0.2, 2.4) node {$y$};
\draw[line width=1.5pt,color=myredcolor,smooth,samples=100,
domain=-6.2831852:6.2831852] plot(\x,{0.5*sin(((\x))*180/pi)});
\draw [color=mybluecolor](3.2,1.) node[anchor=north west]
{$y = 2 \cdot\textrm{sen}(x)$};
\draw[line width=1.5pt,color=mybluecolor,smooth,samples=100,
domain=-6.283185:6.283185] plot(\x,{2*sin(((\x))*180/pi)});
\draw [color=myredcolor](-3,1.) node[anchor=north west]
{$y = \frac{1}{2} \cdot \textrm{sen}(x)$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

A Figura 3.24 representa a função seno hiperbólico, que é da forma $\text{Senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Veja seus códigos:

**Código TikZ A.11:** *Função Seno Hiperbólico*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\definecolor{mygreencolor}{rgb}{0.,0.390,0.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm,scale=1.2]
\begin{axis}[
x=1.0cm,y=1.0cm,
axis lines=middle,
xmin=-4.0,
xmax=4.2,
ymin=-4.0,
```

```
ymax=4.0,
xtick={0},
ytick={-1/2,1/2},]
\clip(-4.,-4.) rectangle (4.2,4.);
\draw[line width=1.pt,color=black,dashed,smooth,samples=100,
domain=-4.0:4.2] plot(\x,{e^((\x))/2});
\draw [color=black](1.5,2.5) node[anchor=north west]
{\small{$f(x) = \dfrac{e^{x}}{2}$}};
\draw[line width=1.pt,color=black,dashed,smooth,samples=100,
domain=-4.0:4.2] plot(\x,{e^(-(\x))/2});
\draw [color=black](-3.6,2.5) node[anchor=north west]
{\small{$g(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}$}};
\draw[line width=1.pt,color=black,dashed,smooth,samples=100,
domain=-4.0:4.2] plot(\x,{-e^(-(\x))/2});
\draw [color=black](-3.9,-2.) node[anchor=north west]
{\small{$h(x) = \dfrac{-e^{-x}}{2}$}};
\draw[line width=1.pt,color=mygreencolor,smooth,samples=100,
domain=-4.0:4.2] plot(\x,{sinh((\x))});
\draw [color=mygreencolor](1.,1.5) node[anchor=north west]
{$\textrm{Senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$};
\draw (4,-0.2) node {$x$};
\draw (0.2, 3.8) node {$y$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```

Já a Figura 3.25, dá origem à função cosseno hiperbólico, a qual é dada pela lei de formação $\text{Cosh}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Veja seus códigos:

**Código TikZ A.12:** *Fução Cosseno Hiperbólico*

```
\documentclass[12pt,abnt]{report}
\usepackage{float}
\usepackage[brazil]{babel}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,latexsym,amsthm,amstext,
bezier,amscd}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{xcolor}
\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}
\pgfplotsset{compat=1.15}
\usetikzlibrary{fit,shapes.geometric,babel,quotes,arrows,
arrows.meta,snakes}

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Minhas cores %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
\definecolor{mybluecolor}{rgb}{0.,0.,1.}
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{document}
\begin{tikzpicture}[line cap=round,line join=round,>=triangle 45,
x=1.0cm,y=1.0cm,scale=1.2]
\begin{axis}[
x=1.0cm,y=1.0cm,
axis lines=middle,
xmin=-3.6,
xmax=3.8,
ymin=-0.7,
ymax=6.0,
xtick={0},
ytick={1/2,1},]
\clip(-3.6,-2.) rectangle (3.8,6.);
\draw[line width=1.pt,color=black,dashed,smooth,samples=100,
domain=-4.0:4.0] plot(\x,{e^((\x))/2});
\draw [color=black](1.5,2.5) node[anchor=north west]
{\small{$f(x) = \frac{e^{x}}{2}$}};
\draw[line width=1.pt,color=black,dashed,smooth,samples=100,
domain=-4.0:4.0] plot(\x,{e^(-(\x))/2});
\draw [color=black](-3.6,2.5) node[anchor=north west]
{\small{$g(x) = \frac{e^{-x}}{2}$}};
\draw[line width=1.pt,color=mybluecolor,smooth,samples=100,
domain=-3.0:3.0] plot(\x,{cosh((\x))});
\draw [color=mybluecolor](0.45,1.1) node[anchor=north west]
{$\textrm{Cosh}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$};
\draw (3.6,-0.2) node {$x$};
\draw (0.2, 5.8) node {$y$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\end{document}
```