

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA PROPOSTA DE ELETIVA PARA UM ITINERÁRIO FORMATIVO:
A Geometria e Cartografia da Terra

ALLANNY KARLA BARBOSA VASCONCELOS



Instituto de Matemática

Maceió, Julho de 2021



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ALLANNY KARLA BARBOSA VASCONCELOS

**UMA PROPOSTA DE ELETIVA PARA UM ITINERÁRIO FORMATIVO:
A Geometria e Cartografia da Terra**

Maceió
2021

ALLANNY KARLA BARBOSA VASCONCELOS

**Uma Proposta de Eletiva para um Itinerário Formativo:
A Geometria e Cartografia da Terra**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática da Universidade de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

Maceió

2021

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

V331p Vasconcelos, Allanny Karla Barbosa.
Uma proposta de eletiva para um itinerário formativo : a geometria e a cartografia da Terra / Allanny Karla Barbosa Vasconcelos. - 2021.
106 f. : il.

Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2021.

Bibliografia: f. 101-106.

1. Ensino médio. 2. Disciplina eletiva. 3. Itinerário formativo. 4. Geometria esférica. 5. Cartografia. I. Título.

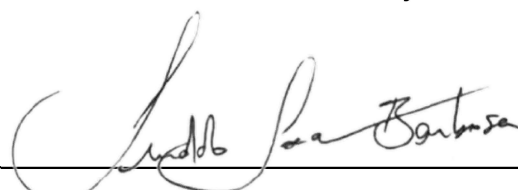
CDU: 514.113.6

Folha de Aprovação

ALLANNY KARLA BARBOSA VASCONCELOS

UMA PROPOSTA DE ELETIVA PARA UM ITINERÁRIO FORMATIVO: “a geometria e cartografia da terra”

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 15 de julho de 2021.



Documento assinado digitalmente
gov.br Isnaldo Isaac Barbosa
Data: 16/08/2021 11:01:32-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

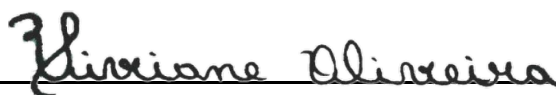
Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa – UFAL (Orientador)



Documento assinado digitalmente
gov.br Elisa Fonseca Sena e Silva
Data: 16/08/2021 20:23:28-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof^a. Dr^a. Elisa Fonseca Sena e Silva – UFAL (Coorientadora)

Banca Examinadora:



Prof^a. Dra. Viviane de Oliveira Santos – UFAL (Examinadora Interna)



Prof^a. Dra. Natércia de Andrade Lopes Neta – UNEAL (Examinadora Externa)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, por interceder sempre por minha vida e por me dar forças para sempre persistir.

À minha mãe, Maria de Lourdes, e irmãos: Alexsandro, Alisson e Akson; pelo apoio e o amor mais sinceros que alguém poderia ter.

À minha madrinha, tia Verônica, por sempre ser tão presente na minha educação escolar desde a alfabetização até a pós-graduação.

À minha tia Sônia e prima Samya, por todo carinho comigo e por me acolher em sua casa nas sextas-feiras, sem falar o todo mês de janeiro quando ocorreu o curso de verão.

Às minhas companheiras da Creche Pontes de Miranda, em especial a Ana, Lyvia Maria, Magda e diretora Selma Maria, sem elas, seria muito difícil a conclusão do PROFMAT. Como também a Iolanda, Nadja, Carol, Raquel, e todas outras auxiliares e recreadoras que me ajudaram.

A Jean Santos, Jessikelly Alves e Karollayne Stefanny, por compormos a "tribo da água", compartilhando amizade, companheirismo e apoio desde a graduação.

Ao meu orientador, Isnaldo Barbosa, pelos puxões de orelha, as ideias inovadoras, pelo empenho que teve comigo e com toda minha turma e pelas suas correções e incentivos.

À banca examinadora, por ter aceitado o convite de avaliar este trabalho.

A todos os professores com quem tive o prazer de estudar: Isnaldo Barbosa, Gregório Silva, André Flores, Viviane Oliveira, Luis Guilherme, Vânio Fragoso e Ediel Guerra.

Aos colegas, Flávio Júlio, Alane da Rocha, Lindberg Barbosa, Raimundo Jorge, Jonathan de Almeida, Adelson Ricardo, Deives da Silva, José Horlando, Ediclaudio Lima, Rafael Dantas, Wesley Martins, Mario Santos, Edson Valdemar, Caio César, Luciano Peixoto pelos diversos momentos e pela ajuda e apoio.

E a todos que fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

Não há provações injustas nessa vida. Todas as intempéries pelas quais o ser humano passa, são adubos para o florescimento de sua vida.

GERVASIO, Aurea

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo apoiar os professores e as escolas nessa nova estruturação do ensino médio, apresentando uma proposta de eletiva que une duas áreas do conhecimento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC): a Matemática e suas tecnologias e a Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. A priori, realizamos uma pesquisa documental pautada na legislação educacional vigente, tendo como foco a Lei nº 9394/96, a Lei nº 13.415/2017 e a Resolução nº 3 de nov. 2018. Em seguida, buscamos expor uma síntese de como essa reforma irá reestruturar o ensino e como se dá o processo de elaboração de um itinerário formativo. Depois, expomos a visão do Conselho Nacional dos Secretários da Educação (CONSED) acerca dos componentes dos itinerários formativos, definindo lhes conceitos como aprofundamentos, eletivas e projeto de vida. Por fim, formulamos uma ementa para a eletiva “A Geometria e Cartografia do Planeta Terra”, organizando-a em uma sequência didática, a fim de direcionar o professor em suas metodologias e práticas. A eletiva explora noções de geometria esférica como também de cartografia, além de contém experimentos práticos e um material de estudo que servirá como uma base, sendo possível ajustes conforme a necessidade escolar.

Palavras-chave: Ensino Médio. Eletiva. Itinerário Formativo. Geometria Esférica. Cartografia.

ABSTRACT

The present work aims to support teachers and schools in this new structure of secondary education, presenting an elective proposal that unites two areas of knowledge of the Common National Curriculum Base (BNCC): Mathematics and its technologies and Human and Social Sciences Applied. A priori, we carried out a documentary research based on the current educational legislation, focusing on Law No. 9394/96, Law No. 13.415/2017 and Resolution No. 3 of Nov. 2018. Next, we seek to present a synthesis of how this reform will restructure education and how the process of elaborating a training itinerary takes place. Then, we expose the vision of the National Council of Secretaries of Education (CONSED) about the components of training itineraries, defining concepts such as deepening, electives and life project. Finally, we formulated a syllabus for the elective “The Geometry and Cartography of Planet Earth”, organizing it in a didactic sequence, in order to guide the teacher in their methodologies and practices. The elective explores notions of spherical geometry as well as cartography, in addition to containing practical experiments and study material that will serve as a basis, being possible adjustments according to school needs.

Keywords: High School. Elective. Formative Itinerary. Spherical Geometry. Cartography.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Possibilidade de um esquema para um Itinerário Formativo via CONSED	25
Figura 2 – Mapa do Brasil.....	37
Figura 3 – Distância entre dois pontos no plano	37
Figura 4 – Distância entre dois pontos na esfera.....	37
Figura 5 – Vértices de um triângulo sob a esfera.....	40
Figura 6 – Círculo Máximo na Esfera.....	45
Figura 7 – Equador e Meridianos são círculos máximos	45
Figura 8 – O ponto antipodal da cidade de Arapiraca-AL.....	46
Figura 9 – Distância na esfera entre A e B	47
Figura 10 – O ângulo AOB	47
Figura 11 – Os pontos A e B antipodais	48
Figura 12 – Biângulos ou Lúnulas	48
Figura 13 – Triângulo das Bermudas.....	49
Figura 14 – Outros triângulos famosos da Terra.....	50
Figura 15 – O triângulo cinza na esfera.....	51
Figura 16 – A região branca também é um triângulo na esfera.....	51
Figura 17 – Um triângulo laranja na esfera.....	52
Figura 18 – Vértices de um triângulo sob a esfera	52
Figura 19 – O Triângulo Esférico.....	53
Figura 20 – Os ângulos Internos de um Triângulo Esférico	54
Figura 21 – Forma da Terra	62
Figura 22 – Representação da distância entre Kingston e Bristol.....	84
Figura 23 – Projeção Plana ou Azimutal	94
Figura 24 – Representação 2D da Projeção Azimutal	95
Figura 25 – Projeção Cônica representa regiões continentais	96
Figura 26 – Representação 2D da Projeção Cônica	96
Figura 27 – Projeção Cilíndrica e Projeção Cilíndrica de Peters.....	97
Figura 28 – Representação 2D da Projeção Cilíndrica	98
Figura 29 – Projeção Policônica do Brasil.....	99

LISTA DE TABELAS

Quadro 1 – Descrição dos Eixos Estruturantes.....	22
Quadro 2 – Quantidade de aprofundamentos por porte de escola	26
Quadro 3– Quantidade de eletivas por porte escolar	27
Quadro 4– Organizando a Ementa da Eletiva	29
Quadro 5– Habilidades da BNCC presente na Eletiva.....	31
Quadro 6 – Habilidades dos Eixos Estruturantes.....	32
Tabela 7 – Valores dos senos e cossenos dos ângulos no Excel.....	86

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	10
INTRODUÇÃO	13
1 O NOVO ENSINO MÉDIO: FORMAÇÃO GERAL BÁSICA NA BNCC E ITINERÁRIO FORMATIVO	15
2 A ESTRUTURA DOS ITINERÁRIOS FORMATIVOS	21
2.1 Os Itinerários Formativos sob a perspectiva do CONSED	23
2.1.1 A Oferta de Aprofundamentos	25
2.1.2 A Oferta do Projeto de Vida	26
2.1.3 A Oferta das Eletivas	27
2.2 A Ementa da Eletiva: A Geometria e a Cartografia do Planeta Terra	28
3 A ORGANIZAÇÃO SEQUÊNCIAL DA ELETIVA “A GEOMETRIA E CARTOGRAFIA DO PLANETA TERRA”	34
3.1 Pré-Requisitos Matemáticos e Geográficos	34
3.2 Introdução a Geometria Esférica.....	35
3.2.1 Material de estudo: Introdução a Geometria Esférica	44
3.2.1.1 Círculos máximos	44
3.2.1.2 Distância entre dois pontos da esfera	46
3.2.1.3 Biângulos.....	48
3.2.1.4 Triângulos esféricos.....	49
3.2.1.5 Excesso angular	53
3.2.1.6 Área de um triângulo esférico.....	53
3.2.1.7 GPS e suas aplicações.....	57
3.3 A forma do planeta Terra	58
3.3.1 Material de estudo: a forma do planeta Terra	59
3.3.1.1 Experimentos para verificar que a Terra não é plana.....	61
3.3.1.2 A Terra é redonda mesmo?.....	62
3.3.1.3 Por que a Terra possui esse formato quase esférico?	63
3.4 Noções de Cartografia	63
3.4.1 Material de estudo: noções de cartografia	76
3.4.1.2 Uma breve história da cartografia.....	77
3.4.1.3 Conceitos de cartografia.....	78

3.4.4.1 Escala cartográfica	78
3.4.4.2 Mudanças de escala.....	79
3.4.4.4 Coordenadas geográficas.....	80
3.4.4.6 Relação entre coordenadas e distâncias.....	81
3.4.4.7 A relação fundamental da trigonometria esférica	81
3.4.4.8 Calcular a distância entre duas cidades	83
3.4.4.9 Fusos Horários	87
3.4.4.9.1 Como calcular os fusos horários?	87
3.4.4.9.2. Fusos horários no Brasil.....	88
3.4.4.10 A cartografia dos livros e games	88
3.5 Projeções Cartográficas.....	89
3.5.1 Material de estudo: projeções cartográficas	93
3.5.1.1 Classificação quanto à superfície de projeção	94
3.5.1.1.1 Projeção azimutal ou plana	94
3.5.1.1.2 Projeção cônica.....	95
3.5.1.1.3 Projeção cilíndrica	96
3.5.1.2 Classificação quanto as suas propriedades.....	98
CONSIDERAÇÕES FINAIS	100
REFERÊNCIAS.....	101

INTRODUÇÃO

Minha experiência docente iniciou-se, ainda graduanda do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, em 2014 através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), onde atuei como bolsista por 4 anos no ensino médio do Estado de Alagoas. Durante esse período, dediquei-me a desenvolver diferentes práticas metodológicas para melhorar o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) de diversas escolas e, a partir disso, tornou-se comum produzir pesquisas, projetos, eventos e artigos focados no ensino médio.

Meu primeiro contato com essa nova estruturação do ensino médio ocorreu em meu último estágio supervisionado. Lembro-me de analisar todas eletivas que estavam sendo ofertadas e já me questionar: Como elas eram determinadas? As habilidades dos docentes influenciavam em sua determinação? Como que a escola, as secretarias e os professores decidiam o que e como ofertar? Visto que era uma situação nova, não obtive respostas precisas nem mesmo dos professores da própria escola.

Pouco tempo se passou, lá estava eu numa aula do PROFMAT, assistindo uma palestra de representantes da Secretaria do Estado da Educação de Alagoas. Eles estavam expondo essa nova reorganização curricular, apresentando os eixos estruturantes e suas habilidades, debatendo como é um desafio produzir itinerários formativos em Matemática e suas tecnologias, explanando como todos ainda se sentiam inseguros quando o assunto é elaborar um itinerário formativo.

Assim, diante da minha familiaridade e gosto em desenvolver projetos para o ensino médio, da minha preocupação surgida com o PIBID em contribuir com as escolas que possuem o IDEB não satisfatório, juntamente, com meu interesse nessa nova organização curricular e minha vontade de auxiliar meus colegas de trabalho, eis que surge a minha motivação de desenvolver uma dissertação com foco no novo ensino médio.

Conforme agência do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) Notícias (2018), quase 2 milhões de jovens entre 15 e 17 anos estão fora da escola. Isto decorre da necessidade de trabalho e geração de renda, da dificuldade de acesso à escola ou da falta de interesse. Os dados apresentam o ensino médio com os maiores índices de evasão e os piores indicadores de aprendizado de toda a Educação Básica.

O novo ensino médio surge com o objetivo de combater a evasão escolar e melhorar os indicadores de aprendizagem desta fase. Tal reforma aumenta a carga horária, unifica o currículo escolar e implementa itinerários formativos que se adequam às necessidades e aos interesses dos estudantes, tendo as redes de ensino até 2022 para adotá-la. Nos questionamos, o que são e como serão implementados esses itinerários formativos? E como podemos direcionar os professores de matemática e a escola a desenvolver tais itinerários formativos? Sendo assim, com intuito de auxiliá-los, sugerimos uma proposta de eletiva que pode ser acrescentada ao itinerário formativo da escola e que possui como público-alvo os estudantes do ensino médio.

O presente trabalho encontra-se dividido em três seções. A primeira aborda informações sobre o novo ensino médio e como ele impacta a atual estrutura de ensino. A segunda seção contempla o processo de elaboração de um itinerário formativo, descrevendo o processo desde sua definição e a oferta de seus componentes curriculares: aprofundamentos, eletivas e projeto de vida, conforme a Conselho Nacional dos Secretários da Educação (CONSED). Além disso, é nele que organizamos a ementa da eletiva sugerida.

A terceira, que é o ponto chave deste trabalho, especifica as orientações e sugestões metodológicas que devem ser aplicadas à eletiva sugerida, organizando-as em uma sequência didática. Nela, abordam-se noções de geometria esférica e de cartografia, além de conter questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), exercícios propostos e experimentos básicos.

1 O NOVO ENSINO MÉDIO: FORMAÇÃO GERAL BÁSICA NA BNCC E ITINERÁRIO FORMATIVO

Desde que o Brasil se tornou uma república, em 1889, podemos citar diversas transformações em suas questões educacionais. A primeira vez que o Estado Brasileiro se responsabilizou com o direito à educação foi, segundo Cruvinel (2009, p.30), com “a Constituição de 1934 que determinava que a educação é direito de todos e deve ser ministrada pela família e pelos poderes públicos.”

A Constituição de 1937 atribuía a educação à família, pois conforme o art. 125, ela seria “o primeiro dever e o direito natural dos pais.” Além disso, de modo principal ou subsidiário, o Estado apoiaria na execução deste dever ou “na manutenção das deficiências e lacunas da educação particular.” Isto foi modificado com a Constituição de 1946 que voltou a determinar o ensino primário gratuito e obrigatório para todos, todavia os graus posteriores de ensino, segundo art. 168 incisos I e II, só seriam gratuitos àqueles que provassem insuficiência de recursos.

Conforme Aranha (1996, p. 204), a partir desse processo de redemocratização do país que se inicia o processo de discussão do que viria a se tornar a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB). Assim, em 1961 surge a primeira LDB que define e regulariza o sistema de educação brasileiro com base nos princípios presentes na Constituição de 1946.

Com a Constituição de 1988, a educação ganhou destaque. Mesmo com as mudanças significativas Aranha (1996, p. 223) aponta que ainda restava “elaborar uma lei complementar para tratar das diretrizes da educação nacional.” Depois de longos e intensos debates, a Lei 9394/96 é aprovada, a segunda LDB, que garantia o direito a todos ao acesso à educação gratuita e de qualidade, a valorização dos profissionais da área, e estabelece o dever da União, do Estado e dos Municípios com a educação pública.

As transformações que se referem à etapa do ensino médio são iniciadas, segundo Gontijo (2018, p. 42), desde 1998 com a discussão e aprovação de suas diretrizes em concordância com a LDB de 1996. De caráter legal, podemos listar algumas ações que impactaram o ensino médio, realizadas em:

2004: Decreto nº 5.154/2004 que restabeleceu a possibilidade de integração curricular do ensino médio e o técnico.

2007: Lei nº 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamentou o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (FUNDEB).

2009: Portaria do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) nº 109 de 27/05/2009 que institui o ENEM.

2009: O Programa Ensino Médio Inovador, instituído pela Portaria nº 971, de 9 de outubro de 2009, que integra as ações do Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE), como estratégia do Governo Federal para induzir a reestruturação dos currículos do ensino médio não profissional.

2012: Resolução CNE/CEB nº 6, de 20 de setembro de 2012, que define Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio.

2013: Projeto de Lei (PL6840/2013) que propõe uma jornada em tempo integral no ensino médio, dispõe sobre a organização dos currículos do ensino médio em áreas do conhecimento.

2014: Lei nº 13.005/2014 que institui o Plano Nacional da Educação (PNE) para o decênio 2014/2024 no qual “busca universalizar, até 2016, o atendimento escolar para toda a população de 15 a 17 anos e elevar, até 2024, a taxa líquida de matrículas no ensino médio para 85%.” Para que essa meta possa ser cumprida, são estabelecidas 24 estratégias, podemos citar a estratégia 3.1 que propõe:

Institucionalizar programa nacional de renovação do ensino médio, a fim de incentivar práticas pedagógicas com abordagens interdisciplinares estruturadas pela relação entre teoria e prática, por meio de currículos escolares que organizem, de maneira flexível e diversificada, conteúdos obrigatórios e eletivos articulados em dimensões como ciência, trabalho, linguagens, tecnologia, cultura e esporte, garantindo-se a aquisição de equipamentos e laboratórios, a produção de material didático específico, a formação continuada de professores e a articulação com instituições acadêmicas, esportivas e culturais

2016: Medida Provisória 746/2016 que institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral.

Sobre o ano letivo de 2017, o INEP (2018) divulgou que, no ensino médio, nenhum estado brasileiro atingiu a meta do IDEB e a Agência IBGE Notícias (2018) afirmou que quase 2 milhões de jovens entre 15 e 17 anos estavam fora da escola. Outro indicador que avalia o ensino médio na esfera internacional é o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), BRASIL PISA (2015 *apud* GONTIJO, 2018 p.67) aponta que na avaliação efetuada em 2015, com a participação de 72 países, “o Brasil ocupou a 63ª posição em Ciências da Natureza, a 59ª em Leitura e a 66ª em Matemática. Ambos indicadores refletem a baixa qualidade de formação educacional e a real necessidade de uma reforma.”

Não dá para responsabilizar apenas sujeitos externos à escola por esses resultados. A origem da desmotivação e do desinteresse dos jovens encontra-se também no descompasso entre a formação escolar oferecida, os interesses dos estudantes e as exigências do mundo contemporâneo, o que indica a necessidade de mudanças nas próprias estrutura e organização dessa etapa da Educação Básica (GUIA..., 2018, p.6).

Estas mudanças foram propostas durante um cenário político instável, entre o impeachment da ex-presidente Dilma Rousseff e o começo do governo do ex-presidente Michel Temer. Esta tensão política favoreceu uma série de reações no país dividindo opiniões de pais, estudantes, professores e gestores das escolas, o que acarretou em até ocupações estudantis em diversas instituições de ensino.

Na época, conforme Teixeira et al. (2019, p.16028) a proposta de reforma tornou-se foco para mídia, sendo “tema de discussões e reivindicações contrárias à sua publicação em todos os meios.” Porém, este modelo de estruturação não se apresenta apenas no Brasil, faz tempo que alguns países como os Estados Unidos, França, Alemanha e Inglaterra adotam um sistema de flexibilização curricular onde permite aos educandos um direito de escolha mediante a suas intenções.

Na entrevista realizada por Teixeira (2010)¹, Simon Schwartzman afirma que

[...] No modelo britânico, por exemplo, há o A-level. O aluno escolhe três temas e trabalha neles: ele se prepara durante o ensino médio naqueles conteúdos que escolheu. Digamos, matemática, química e inglês; ele vai se aprofundar, tem a oportunidade de tomar conhecimento daquilo lendo e discutindo; no processo de aprofundamento, o aluno tem a possibilidade de ganhar competência, de ganhar capacidade. O ensino médio norte-americano é desigual; há coisas boas e coisas ruins. O britânico é melhor. O sistema francês também é bom, embora, para o meu gosto, seja um pouco rígido. O nosso é

¹ Citação retirada da entrevista disponível em <https://www.revistaensinosuperior.gr.unicamp.br/entrevistas/simon-schwartzman-o-ensino-medio-no-brasil-e-formal-academico-voltado-para-o-vestibular-nao-atende-jovens-com-outros-interesses>

uma tentativa ruim de copiar o sistema francês. Se a cópia fosse benfeita, o aluno teria uma boa iniciação à ciência [...]

Em fevereiro de 2017, a Lei nº 13.415/2017 foi sancionada durante o governo do ex-presidente Michel Temer. Esta Lei promove uma reforma na matriz curricular que altera as Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabelece mudanças na estrutura do ensino, determinando o que se chama hoje de “O novo ensino médio”.

A Lei nº 13.415/2017 alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do ensino médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola [...] e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a oferta de diferentes possibilidades de escolhas aos estudantes, os itinerários formativos, com foco nas áreas de conhecimento e na formação técnica e profissional. A mudança tem como objetivos garantir a oferta de educação de qualidade à todos os jovens brasileiros e de aproximar as escolas à realidade dos estudantes de hoje, considerando as novas demandas e complexidades do mundo do trabalho e da vida em sociedade. (Portal do MEC, Novo Ensino Médio – Dúvidas, 2017²).

Com o novo sistema, haverá o aumento de carga horária dos estudantes do ensino médio, a adoção de um currículo comum e obrigatório a todos denominado de Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e a implementação dos itinerários formativos. A carga horária passará de 2.400 horas para 3.000 horas onde 1.800 horas serão destinadas para as aprendizagens estabelecidas pela BNCC e as outras 1.200 horas serão reservadas ao itinerário formativo (GUIA..., 2018, p.9).

A ampliação da carga horária torna-se necessária por permitir aos discentes a oferta de cursos profissionais e científicos. Essa experiência lhes possibilita um direcionamento mais assertivo para o mundo de trabalho e/ou para a continuação de seus estudos, sendo ela em outro curso técnico ou no ensino superior.

A Lei nº 13.415/2017 também estimula a implementação de escolas de ensino médio em tempo integral. Isto ocorrerá de modo progressivo para possibilitar ao educando mais tempo para seus estudos e também para se dedicar a oficinas, práticas esportivas, além de ter apoio de profissionais para a elaboração do seu projeto de vida.

Acerca da BNCC, Guia... (2018, p.7) afirma que ela propõe garantir a todo estudante brasileiro, de escolas públicas e privadas, aprendizagens comuns e obrigatórias, definindo competências e conhecimentos essenciais que serão ofertados na

² Disponível em <http://portal.mec.gov.br/publicacoes-para-professores/30000-uncategorised/40361-novo-ensino-medio-duvidas>

parte comum a fim de preparar os jovens para o mundo do trabalho e para o pleno exercício da cidadania, sendo organizada nas seguintes áreas do conhecimento:

- I- Linguagens e suas tecnologias;
- II- Matemática e suas tecnologias;
- III- Ciências da natureza e suas tecnologias;
- IV- Ciências humanas e sociais aplicadas.

Além disso, ela estimula novos formatos de ensino e a interdisciplinaridade. A proposta é tornar as aulas menos expositivas e mais dinâmicas, favorecendo a realização de oficinas, projetos e atividades que estimulem a participação dos estudantes e conectem conhecimentos e professores de diversas áreas.

O novo ensino médio também impõe desafios às Instituições de Ensino Superior (IES). Progressivamente, será preciso investir em currículos que promovam uma formação docente interdisciplinar como também, incluir novas metodologias de ensino e aprendizagem, que os auxiliem a pensar em diferentes formas de educar.

As mudanças que ocorrerão nas IES estão sendo definidas pela Resolução CNE/CP nº 2 de 2019 e pela Portaria de nº 412 de julho de 2021. A primeira define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica, a qual deve ser implementada em todas as modalidades dos cursos e programas destinados à formação docente.

Já a segunda, institui o Programa Institucional de Fomento e Indução da Inovação da Formação Inicial Continuada de Professores e Diretores Escolares, que tem por objetivo promover a oferta de cursos de licenciaturas e de formação continuada inovadoras, que atendam às necessidades e à organização da atual política curricular da educação básica e da formação de professores e diretores escolares que atuam nessa etapa de ensino.

A Lei 13.415/2017, art.61 inciso IV, também traz a possibilidade de “profissionais com notório saber reconhecido pelos respectivos sistemas de ensino” ministrem “conteúdos de áreas afins à sua formação ou experiência profissional”, desde que sejam “atestados por titulação específica ou prática de ensino em unidades

educacionais da rede pública ou privada ou das corporações privadas em que tenham atuado.”

Para Teixeira et al. (2019, p. 16028), a inserção de profissionais com notório saber também se configura um dos principais pontos controversos desta Lei, pois ela promove uma desvalorização da formação docente, o que precariza e empobrece a atividade docente e, conseqüentemente, o ensino.

2 A ESTRUTURA DOS ITINERÁRIOS FORMATIVOS

O Portal do MEC, Novo Ensino Médio – Dúvidas (2021)³ define itinerários formativos como “o conjunto de disciplinas, projetos, oficinas, núcleos de estudo, entre outras situações de trabalho, que os estudantes poderão escolher no ensino médio.” Os discentes terão a oportunidade de se aprofundar em uma das quatro áreas do conhecimento ou mesmo em duas ou até mais. Além disso, os itinerários podem fornecer uma formação técnica e profissional.

Conforme a Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018, podemos citar três tipos de itinerários a ser considerados. São eles:

Área do conhecimento: amplia as aprendizagens de uma das quatro áreas do conhecimento e suas aplicações em diferentes contextos (art. 12, inciso I a IV);

Formação técnica e profissional: focado em qualificação profissional, habilitação profissional técnica de nível médio e formações experimentais (art. 12, inciso V); e

Integrado, que combina mais de uma área de conhecimento e da formação técnica e profissional (art. 12, §3º).

Para que os estudantes decidam de forma mais assertiva, a Lei nº 13.415/17 (art. 36 parágrafo 12) impõe que “as escolas deverão orientar os alunos no processo de escolha das áreas de conhecimento ou de atuação profissional”, por esse motivo torna-se relevante a criação de espaços e tempo de diálogo para que eles possam conhecer cada um dos itinerários.

As redes de ensino terão autonomia para definir quais os itinerários formativos irão ofertar, optando por um processo que envolva a participação de toda a comunidade escolar. Caso decidam fornecer a formação técnica e profissional deverão, ao fim, certificá-los tanto no ensino médio quanto no curso realizado.

Além de aprofundar as aprendizagens, os itinerários possuem também objetivos como de consolidar a formação integral, promover a incorporação de valores

³ Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/publicacoes-para-professores/30000-uncategorised/40361-novo-ensino-medio-duvidas>

universais e desenvolver habilidades que permitam aos estudantes ampliar sua visão de mundo, tomar decisões e agir com autonomia e responsabilidade (GUIA..., 2018, p.6).

Consoante a Resolução nº 3/2018 (art. 12 parágrafo 2º), os itinerários serão “organizados em torno de um ou mais dos seguintes eixos estruturantes”: Investigação Científica, Processos Criativos, Mediação e Intervenção Sociocultural e Empreendedorismo). Para isto, a Portaria nº 1.432, 28 dez. 2018 apresenta uma lista de habilidades específicas pertencentes a cada um dos eixos.

“Como os quatro eixos são complementares”, a Portaria nº 1.432, de 28 de dez. de 2018, propõe que “os itinerários formativos incorporem e integrem todos eles, a fim de garantir que os estudantes experimentem diferentes situações de aprendizagem e desenvolvam um conjunto diversificado de habilidades relevantes para sua formação integral”.

Quadro 1 – Descrição dos Eixos Estruturantes

Eixo Estruturante	Breve Descrição
Investigação Científica	Desenvolver pesquisas científicas, iniciando pela formulação de uma hipótese, seguida de levantamento, testes e da interpretação dos resultados a fim de solucionar diversos tipos de problemas do cotidiano dos educandos.
Processos Criativos	Elaborar projetos com foco na criatividade, que utilizem diferentes manifestações linguísticas, culturais e científicas. Primeiro, define-se um problema ou tema a ser abordado. Em seguida, é planejada uma resposta a ele, que pode ser um produto, uma intervenção artística, uma peça de comunicação, entre outras possibilidades.
Mediação e Intervenção Cultural	Oferecer-lhes as ferramentas necessárias para promoverem transformações positivas na comunidade. A partir da constatação de um problema a ser resolvido. Em seguida, é realizado um planejamento de um projeto social ou cultural que seja capaz de responder a essas necessidades ou a eventuais conflitos que possam surgir.
Empreendedorismo	Estimular a criação de projetos pessoais a partir da identificação de desafios a serem vencidos, o planejamento de testes e o aprimoramento da ideia inicial. O educando passa a identificar aspirações pessoais que gostaria de transformar em um empreendimento, além de enfrentar desafios em relação às próprias capacidades e à receptividade do mundo externo.

Fonte: Portaria nº 1.432, 28 dez. 2018

2.1 Os Itinerários Formativos sob a perspectiva do CONSED

O CONSED, por meio da Frente Currículo e Novo Ensino Médio, desenvolveu um material intitulado de “Recomendações e Orientações para Elaboração e Arquitetura Curricular dos Itinerários Formativos⁴” que reúne contribuição de mais de 150 técnicos das secretarias, gestores e especialistas de organizações da sociedade civil.

Tendo por objetivo apoiar as secretarias estaduais de educação na elaboração de seus currículos e na implementação do novo ensino médio, o documento apresenta orientações extraídas de marcos legais, documentos oficiais e consensos construídos em reuniões promovidas pelo CONSED e seus parceiros. As recomendações seguem como sugestões a serem consideradas pelas redes. Reproduziremos a seguir algumas destas recomendações.

A CONSED sugere que o itinerário formativo seja composto por os aprofundamentos, as eletivas e o projeto de vida.

Com duração de, no mínimo, 4 semestres, os *Aprofundamentos*, de acordo com Coletânea... (2020, p. 52), buscam ampliar os aprendizados desenvolvidos pela formação geral, permitindo que os jovens explorem seus potenciais e vocações de modo personalizado. Eles irão estudar as unidades curriculares específicas correlacionando, todas, com seu projeto de vida. Para que assim, finalizem o ensino médio com algum diferencial na sua formação.

O aprofundamento em uma ou mais áreas do conhecimento ocorre mediante a articulação de temas contemporâneos ajustados ao contexto e aos interesses dos estudantes. Já no contexto técnico e profissional, a expansão acontece com o desenvolvimento de habilidades básicas exigidas pelo mundo do trabalho e habilidades específicas relacionadas aos Cursos Técnicos, Cursos de Qualificação Profissional ou Programa de Aprendizagem Profissional escolhidos.

Segundo Coletânea... (2020, p. 52), as *Eletivas* são unidades curriculares de livre escolha, com duração de um semestre cada, que lhes permitem experimentar diferentes temas, vivências e aprendizagens, de maneira a diversificar e enriquecer a sua formação flexível. Indica-se que sejam construídas pelos professores,

⁴ Disponível em <http://www.consed.org.br/consed/gt-ensino-medio/documentos-do-ensino-medio> em “Coletânea de Materiais” p. 47- 91

considerando as sugestões dos próprios jovens. Elas podem ou não estar associadas à mesma área do conhecimento ou formação técnica e profissional que os educandos estejam aprofundando.

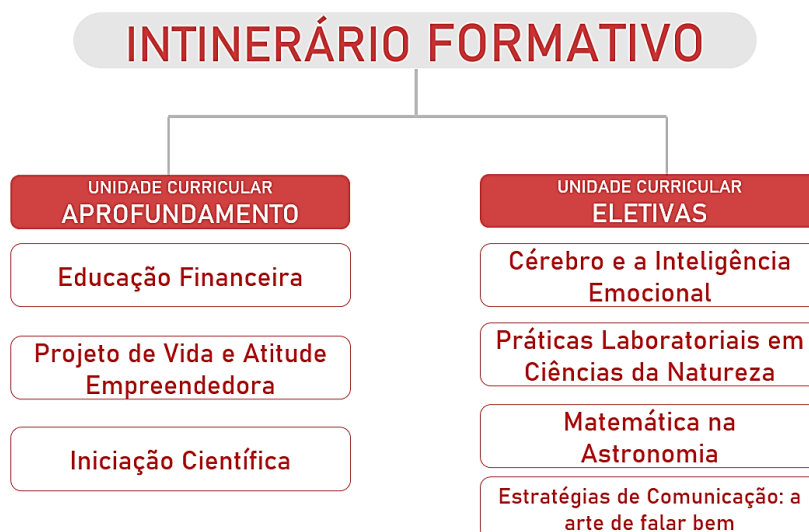
O *Projeto de Vida*, definido por Coletânea... (2020, p. 52), busca desenvolver a capacidade do estudante de “dar sentido à sua existência, tomar decisões, planejar o futuro e agir no presente com autonomia e responsabilidade.” Ele pode ser transformado em componente curricular para que seja desenvolvido ao longo dos três anos, obtendo uma carga horária fixada em, pelo menos, dois tempos de aula por semana.

No 1º ano, sugere-se que o foco seja o autoconhecimento até mesmo para auxiliar o estudante em suas escolhas das eletivas e dos aprofundamentos. No 2º ano, a ênfase deve recair sobre a ampliação de repertório e possibilidades para diversificar as opções e expandir os horizontes dos discentes. No 3º ano, a intenção deve ser orientar os jovens para que planejem ações presentes e futuras, definindo metas para sua vida pessoal, profissional e cidadã. Todo o processo deve ser permeado por vivências que lhes permitam desenvolver competências como autoconfiança, determinação e resiliência, dentre outros.

Desta maneira, espera-se que, ao final do ensino médio, os estudantes estejam capazes de realizar pesquisas científicas, criar obras, soluções e/ou inovações, intervir positivamente na realidade e empreender iniciativas pessoais, acadêmicas, produtivas e/ou cidadãs (COLETÂNEA... 2020, p. 51).

Para exemplificar a visão da CONSED, observe a Figura 1, considerando que a escola optou por trabalhar o projeto de vida de forma transversal, podemos citar que a composição: Educação Financeira, Cérebro e a Inteligência Emocional, Estratégia de Comunicação: a arte de falar bem, configura, para CONSED, o itinerário formativo do aluno que fizer tal escolha.

Figura 1 – Possibilidade de um esquema para um Itinerário Formativo via CONSED



Fonte: Autora, 2021

“Como os quatro eixos são complementares”, a Portaria nº 1.432/2018 propõe que “os Itinerários Formativos incorporem e integrem todos eles, a fim de garantir que os estudantes experimentem diferentes situações de aprendizagem e desenvolvam um conjunto diversificado de habilidades relevantes para sua formação integral.”

Além da disposição curricular, existirão diversos arranjos na distribuição horária decorrentes das diversas possibilidades de organização. Isto ocorrerá tanto para escolas de ensino médio básico quanto para as que já são integrais ou técnicas. Porém, o importante é cumprir, no máximo, as 1.800 horas para a formação geral e, no mínimo, as 1.200 horas para a formação flexível.

A Coletânea... 2020, p. 54 sugere que a carga horária “na formação geral se concentre mais no 1º ano e reduza ao longo dos dois anos seguintes.” Porém, também pode ser distribuída igualmente nos três anos. Já a distribuição horária dos itinerários, a Coletânea... (2020, p. 56-62) apresenta diversas possibilidades visto que se fundamentará em quantas horas serão destinados aos aprofundamentos, as eletivas e o projeto de vida e em como distribuí-los ao longo dos três anos.

2.1.1 A Oferta de Aprofundamentos

Por ser uma ação mais complexa, os aprofundamentos serão construídos a partir da secretaria estadual com a participação das escolas. Sua carga horária não

é definida precisamente, mas Coletânea... (2020, p. 54) sugere que tenham pelo menos 500 horas. Eles também poderão ser integrados e, por isso, abranger duas áreas do conhecimento ou uma formação técnica e profissional

Para sua elaboração, segundo Quadro 2, deve se considerar o perfil e quantidade de estudantes tal como a equipe docente, infraestrutura e os potenciais. O ideal é que o educando tenha a escolha de se aprofundar em uma das 4 áreas do conhecimento ou na formação técnica e profissional, tendo a opção de os aprofundamentos serem ofertados na escola ou em unidades próximas (COLETÂNEA... 2020, p. 62-63).

Quadro 2 – Quantidade de aprofundamentos por porte de escola

Estrutura Escolar	Quantidade Mínima de Aprofundamentos
Escolas de menor porte⁵ sem outras unidades escolares próximas	Dois aprofundamentos integrados ou cinco aprofundamentos simples
Escolas de menor porte com outras unidades escolares próximas	Um aprofundamento integrado ou um aprofundamento simples, com a possibilidade de os estudantes cursarem outros aprofundamentos em unidades vizinhas
Escolas de médio porte sem outras escolas nas imediações	Três aprofundamentos integrados ou cinco aprofundamentos simples
Escolas de médio porte com outras escolas nas imediações	Dois aprofundamentos integrados ou dois aprofundamentos simples, com a possibilidade de os estudantes cursarem outros aprofundamentos em unidades vizinhas
Escolas de maior porte sem outras escolas nas imediações	Quatro aprofundamentos integrados ou oito aprofundamentos simples (dois para cada área do conhecimento e/ou formação técnica e profissional).
Escolas de maior porte com outras escolas nas imediações	Três aprofundamentos integrados ou três aprofundamentos, com a possibilidade de os estudantes cursarem outros aprofundamentos em unidades vizinhas.

Fonte: Coletânea..., 2020

2.1.2 A Oferta do Projeto de Vida

O projeto de vida não deve ser visualizado apenas com escolhas profissionais. Ele deve apoiar os estudantes buscarem suas identificações, materializarem suas

⁵ Considerar as orientações das Notas Estatísticas do Censo 2017 que estabelece os seguintes critérios para porte de escola: pequeno porte - unidade escolar com até 50 matrículas; médio porte - unidade escolar entre 51 a 500 matrículas; grande porte - unidade escolar com mais de 500 matrículas.

aspirações e planejar como alcançá-las. O projeto pode ser trabalhado simultaneamente como componente curricular e de forma transversal ao cotidiano da escola.

Como componente curricular, deve integrar os itinerários com os aprofundamentos e eletivas. Nesse caso, sugere-se que ele defina os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores a serem desenvolvidos, bem como a abordagem pedagógica a ser utilizada. Já como tema transversal, o projeto de vida deve ser orientado por todo o trabalho desenvolvido na escola, desde a formação geral até os itinerários formativos (COLETÂNEA... 2020, p.87).

2.1.3 A Oferta das Eletivas

Segundo Coletânea... (2020, p.83-84), nos itinerários formativos de áreas do conhecimento serão trabalhadas semestralmente pelo menos 2 tempos de aula por semana. Se for por formação técnica terá no mínimo 160 horas. A oferta de eletivas deve considerar o perfil e a quantidade de estudantes, a equipe docente, infraestrutura e carga horária. Para que os estudantes tenham opção de escolher eletivas nas quatro áreas e na formação técnica, recomenda que sua oferta esteja atrelada ao porte da escola, conforme ao Quadro 3.

Quadro 3– Quantidade de eletivas por porte escolar

Porte Escolar	Quantidade de Eletivas
Menor porte	cinco eletivas
Médio porte	dez eletivas
Maior porte	quinze eletivas

Fonte: Coletânea..., 2020

No caso de itinerários formativos de áreas de conhecimentos recomenda-se que idealmente os discentes cursem apenas um aprofundamento e pelo menos quatro eletivas. Já em itinerários formativos técnicos, os aprofundamentos variam a carga horária dependendo do curso. Neste caso, recomenda que educando curse uma ou mais eletivas e trabalhe com projeto de vida. (COLETÂNEA... 2020, p.67).

2.2 A Ementa da Eletiva: A Geometria e a Cartografia do Planeta Terra

Ações menos complexas como as eletivas podem ser organizadas pela escola e professores com o acompanhamento da secretaria, considerando as vocações de seus professores, e visando retratar temas que despertem o interesse dos discentes. Então surge o desafio de desenvolver uma eletiva que além de despertar o interesse dos estudantes contribuam com seu projeto de vida. Uma opção é trabalhar com aplicações que não podemos aprofundar no ensino médio.

a contextualização não é a simples relação da matemática com assuntos reais e/ou concretos, mas sim os elos que o ensino problematiza entre os contextos e os conceitos no processo de aprendizagem. Reconheço a contextualização como um princípio educativo por contribuir com a aprendizagem dos conceitos, elemento fundamental para o desenvolvimento intelectual dos sujeitos, finalidade da educação escolar (Reis, 2017 p. 19).

Porém deve se ter cuidado ao se formular a parte flexível, pois não é possível contextualizar todo tópico da Matemática. Este trabalho se configura em uma proposta curricular de uma eletiva, tendo por objetivos compor um itinerário formativo, dar apoio aos professores que têm vocação para o tema desenvolvido, e exemplificar como construir uma eletiva. Primeiro, vamos formular sua ementa, conforme o Quadro 4.

Quadro 4– Organizando a Ementa da Eletiva

Título: “A Geometria e Cartografia da Terra”	
Proponente: nome da escola que propõe a eletiva	
Professor(es) Responsável(eis): Allanny Karla Barbosa Vasconcelos	
Resumo: Estudo de algumas propriedades do Planeta Terra. Explora sua superfície com as noções de geometria esférica e de cartografia. Aborda-se temas atuais como o debate da Terra ser ou não plana. Contém diversos experimentos práticos. E incentiva tanto educandos como professores a pesquisas direcionadas.	Carga Horária: 80h ou 40h (dois ou um tempo escolar por semana respectivamente) a depender do perfil docente.
Objetivos: Espera-se que os alunos aprendam e reflitam sobre o planeta no qual habitam e que, a partir dos experimentos, tenham autonomia para desenvolver suas próprias conclusões.	
Área(s) do Conhecimento: Matemática e Suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	Perfil Docente: Um professor de matemática pode dar a eletiva versão 40h podendo ser expansível para 80 h com a adição de professores de geografia e artes.
Perfil dos Participantes: 14 a 18 anos, 1º a 3º ano. Indicação da Comissão de Constituição e Justiça e de Cidadania 35 participantes por turma, no máximo.	
Recursos: sala de aula, sala de vídeo, projetor, bolas de isopor, elásticos, alfinetes, globo terrestre entre outros.	Unidade Curricular: Núcleo de estudos, Projeto e Oficina.
Avaliação: por meio de relatórios produzidos, apresentações	Objetos de Conhecimento: o planeta terra, cartografia, geometria esférica.

Fonte: Autora, 2021

Tanto as habilidades da BNCC quanto as habilidades⁶ associadas a cada um dos eixos estruturantes possuem um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:

- EM13MAT301 (um código alfanumérico da BNCC)

O primeiro par de letras EM indica a etapa de ensino médio;

O primeiro par de números: 13, indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do ensino médio, conforme definição dos currículos;

A segunda sequência de letras: MAT, indica a área de Matemática e suas Tecnologias.

Os números finais: 301, indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (que corresponde ao 3º número: 3) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números: 01).

- EMIFMAT02 (um código alfanumérico referente aos quatro eixos)

O primeiro par de letras EM indica a etapa de ensino médio;

O segundo par de letras IF significa Itinerário Formativo;

A terceira sequência de letras: MAT, indica a área de Matemática e suas Tecnologias.

Os números finais: 02, indica sua numeração no conjunto de habilidades relativas ao eixo estruturante

Agora que aprendemos onde encontrá-las e entendemos como ler o código alfanumérico, vamos apresentar quais são as habilidades irão compor a eletiva. Veja os Quadros 5 e 6.

⁶ As habilidades específicas a cada eixo estruturante estão presentes na Portaria nº 1.432 de 28 de dezembro de 2018

Quadro 5– Habilidades da BNCC presente na Eletiva

HABILIDADES DA BNCC (código e descrição)	<p>(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.</p> <p>(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos</p> <p>(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.</p> <p>(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.</p> <p>(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.</p> <p>(EM13CHS101) Identificar, analisar e comparar diferentes fontes e narrativas expressas em diversas linguagens, com vistas à compreensão de ideias filosóficas e de processos e eventos históricos, geográficos, políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais.</p> <p>(EM13CHS102) Identificar, analisar e discutir as circunstâncias históricas, geográficas, políticas, econômicas, sociais, ambientais e culturais de matrizes conceituais (etnocentrismo, racismo, evolução, modernidade, cooperativismo/desenvolvimento etc.), avaliando criticamente seu significado histórico e comparando-as a narrativas que contemplem outros agentes e discursos.</p> <p>(EM13CHS103) Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros).</p> <p>(EM13CHS106) Utilizar as linguagens cartográfica, gráfica e iconográfica, diferentes gêneros textuais e tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais, incluindo as escolares, para se comunicar, acessar e difundir informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.</p>
---	--

Fonte: Autora, 2021

Quadro 6 – Habilidades dos Eixos Estruturantes

Habilidades dos Eixos Estruturantes (código e descrição)	
Investigação Científica	<p>(EMIFMAT01) Investigar e analisar situações problema identificando e selecionando conhecimentos matemáticos relevantes para uma dada situação, elaborando modelos para sua representação.</p> <p>(EMIFMAT02) Levantar e testar hipóteses sobre variáveis que interferem na explicação ou resolução de uma situação-problema elaborando modelos com a linguagem matemática para analisá-la e avaliar sua adequação em termos de possíveis limitações, eficiência e possibilidades de generalização.</p> <p>(EMIFCHSA01) Investigar e analisar situações problema envolvendo temas e processos de natureza histórica, social, econômica, filosófica, política e/ou cultural, em âmbito local, regional, nacional e/ou global, considerando dados e informações</p>
Processos Criativos	<p>(EMIFMAT05) Selecionar e mobilizar intencionalmente recursos criativos relacionados à Matemática para resolver problemas de natureza diversa, incluindo aqueles que permitam a produção de novos conhecimentos matemáticos, comunicando com precisão suas ações e reflexões relacionadas a constatações, interpretações e argumentos, bem como adequando-os às situações originais.</p> <p>(EMIFCHSA05) Selecionar e mobilizar intencionalmente recursos criativos para resolver problemas reais relacionados a temas e processos de natureza histórica, social, econômica, filosófica, política e/ou cultural, em âmbito local, regional, nacional e/ou global</p>
Mediação e intervenção sociocultural	<p>(EMIFMAT07) Identificar e explicar questões socioculturais e ambientais aplicando conhecimentos e habilidades matemáticas para avaliar e tomar decisões em relação ao que foi observado</p> <p>(EMIFMAT08) Selecionar e mobilizar intencionalmente conhecimentos e recursos matemáticos para propor ações individuais e/ou coletivas de mediação e intervenção sobre problemas socioculturais e problemas ambientais.</p>
Empreendedorismo	<p>(EMIFMAT11) Selecionar e mobilizar intencionalmente conhecimentos e recursos da Matemática para desenvolver um projeto pessoal ou um empreendimento produtivo</p> <p>(EMIFCHSA11) Selecionar e mobilizar intencionalmente conhecimentos e recursos das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para desenvolver um projeto pessoal ou um empreendimento produtivo, em âmbito local, regional, nacional e/ ou global</p>

Fonte: Autora, 2021

Além das informações contidas no Quadros 5 e 6, podemos citar dois aspectos importantes para a organização de uma eletiva: as fontes de informação e a sequência de situações/atividades educativa. O primeiro aspecto refere-se à indicação de livros,

sites, vídeos e outros materiais de referência para subsidiar o trabalho com a Eletiva. Já o último estabelece o roteiro de estratégias metodológicas a ser usada.

Segundo a Resolução nº 3 de 2018, o Programa Nacional do Livro Didático e os demais programas nacionais voltados à distribuição de livros, materiais didáticos, recursos físicos e digitais deverão ser adequados pelo Ministério da Educação para que atendam ao que foi definido para formação básica geral e itinerários formativos, organizados em consonância com as diretrizes contidas nesta resolução.

Sendo aprovada, as fontes de informação da eletiva seriam asseguradas pelo Ministério da Educação. Todavia, além de abordar ambos aspectos, iremos apresentar um material de apoio complementar.

3 A ORGANIZAÇÃO SEQUÊNCIAL DA ELETIVA “A GEOMETRIA E CARTOGRAFIA DO PLANETA TERRA”

Para auxiliar os professores deste novo ensino médio, propomos a eletiva “A Geometria e Cartografia do planeta Terra” que explora noções de geometria esférica como também de cartografia, aborda temas atuais como o debate da terra ser ou não plana. Além de aplicar os conhecimentos no *GeoGebra* e no *Excel*.

Rubens Alves⁷ afirma que “a missão do professor não é dar respostas prontas. As respostas estão nos livros, estão na internet. A missão dos professores é provocar a inteligências. É provocar o espanto e a curiosidade”. A seguir, daremos sugestões e orientações acerca da eletiva, e influenciados pelo pensamento de Rubens Alves propomos metodologias, técnicas e práticas.

Enfatizamos que tal organização contém conteúdo complementar para a preparação dos docentes e, além disso, possui exercícios propostos, experimentos práticos e até antigas questões do ENEM, Tais exercícios possuem dois objetivos: trabalhar o conteúdo e/ou explorar o conteúdo de forma prática. O objetivo geral desta eletiva é despertar a curiosidade do educando para que, praticando, desenvolva um conhecimento a partir de suas observações.

Dito isto, propomos a seguir uma sequência de situações/ atividades educativas para esta eletiva. Ele servirá como uma fonte de informação, um direcionamento para o professor, devendo ser utilizada em sala aula. Acreditamos que as orientações pedagógicas que virão posteriormente configura-se uma eletiva que se articula com o ensino médio, sendo possível ajustes conforme as necessidades escolares.

Em seguida, iremos comentar as orientações complementares de cada tema que compõe a eletiva.

3.1 Pré-Requisitos Matemáticos e Geográficos

Observe a seguir a como se dará a organização didática deste tema.

⁷ Fala transcrita do vídeo Rubens Alves – A Escola Ideal – o papel do professor. Vídeo (9m50s). Publicado pelo canal Leopoldo de Mattos, 2012. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=qjyNv42g2XU&t=16s>

- 1) **Tema:** Pré-requisitos Matemáticos e Geográficos
- 2) **Conteúdos/objetos do conhecimento:** Regra de três simples, Ângulo, Circunferências (área e comprimento), Esfera (área superficial e volume), Área de uma cunha esférica, Trigonometria (seno, cosseno e tangente), Transformação em graus, minutos e segundos e Plano cartesiano. Transformação de Unidades. Rosas dos ventos, Leitura de mapa e Posição dos Países.
- 3) **Habilidades:** EM13MAT301, EM13MAT308, EM13MAT510 e EM13CHS106
- 4) **Tempo de Execução:** 5 aulas
- 5) **Material Necessário:** Computador, projetor, mapas, quadro, pincel e/ou giz.
- 6) **Descrição geral das aulas:**

AULAS: 1 a 5

Introdução: No início da primeira aula será explicado que para o estudo da eletiva os estudantes terão que rever alguns conceitos matemáticos e geográficos que serão importantes.

Desenvolvimento: O professor deve revisar e/ou aprofundar os conteúdos sugeridos como também ampliá-los caso seja de seu interesse. Reservando a quinta aula para focar na parte geográfica, onde ele deve projetar mapas e trabalhar os conceitos de hemisférios e direções.

Conclusão: Esta parte inicial deve estar flexível às necessidades apresentadas pela turma. Se o nível dos discentes for médio-alto, uma sugestão que professor possa explorar diversos temas como definição de grau.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação dos alunos no decorrer da aula.

3.2 Introdução a Geometria Esférica

De acordo com Petrin ⁸(2015), o estudo da geometria esférica se formalizou no século XIX, depois da descoberta das geometrias não euclidianas, entretanto os matemáticos que estudavam essa área eram bastante repreendidos criticados. Hoje, este

⁸ Artigo online disponível em <https://www.estudopratico.com.br/geometria-esferica-definicao-caracteristicas-desenvolvimento-e-aplicacao/>

conhecimento é muito utilizado na navegação e na astronomia. Mesmo com o uso de GPS e equipamentos de localização, é importante que os pilotos de avião e navegadores tenham um domínio sobre a geometria esférica

O objetivo não é ensinar toda a geometria não-euclidiana. Mas somente algumas propriedades sob a esfera e sempre sob a perspectiva correlacioná-las com a superfície terrestre. Observe a seguir a como se dará a organização didática.

- 1) **Tema:** Introdução a Geometria Esférica
- 2) **Conteúdos/objetos do conhecimento:** Círculos Máximos, Ponto Antipodal, Distância entre dois pontos da esfera, Biângulos, Excesso Angular e Área de um triângulo esférico.
- 3) **Habilidades:** EM13MAT301, EM13MAT308, EM13MAT510
- 4) **Tempo de Execução:** 8 aulas
- 5) **Material Necessário:** Computador, projetor, mapas, bolas de isopor, alfinetes, elásticos, globo terrestre, quadro, pincel e/ou giz.
- 6) **Descrição das aulas:**

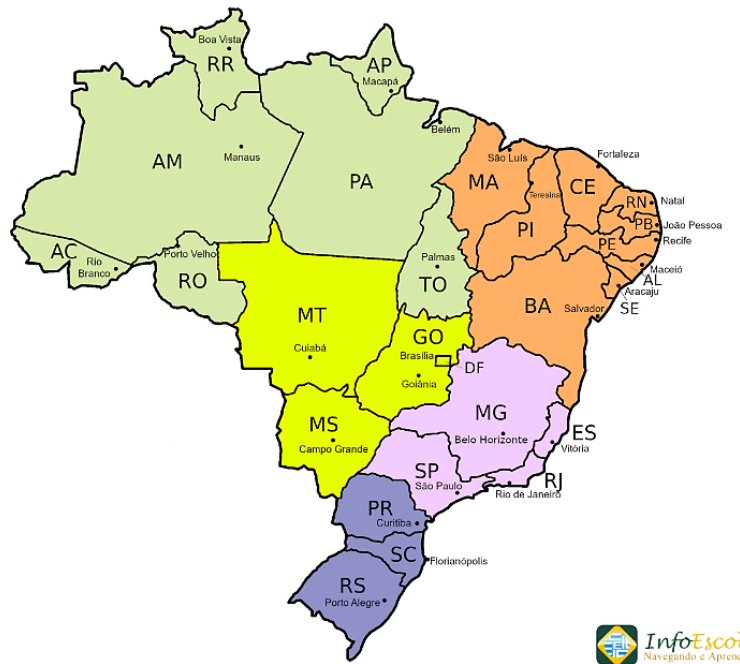
AULAS: 6 a 10 (círculos máximos, ponto antipodal distância entre dois pontos da esfera e biângulos).

Introdução: Primeiro, o professor deve explicar o conceito de geometria esférica e citar algumas de suas aplicações. A seguir, ele deve apresentar a atividade proposta 1 a qual induzirá o aluno a concluir que, na superfície esférica, a distância entre dois pontos é um arco.

Atividades Propostas

- 1) Um avião fará uma viagem. Seu ponto de partida será Palmas – TO. Depois de 1 hora e 43 minutos, o avião pousará em Maceió – AL.
 - a) Desenhe, numa folha de papel ou no mapa acima, o caminho percorrido pelo avião.
 - b) Desenhe, numa bola ou no globo terrestre, o caminho percorrido pelo avião. E represente esse desenho na folha de papel.
 - c) Qual a diferença entre os dois desenhos? Anote suas conclusões.

Figura 2 – Mapa do Brasil



Fonte: INFOESCOLA 2014

Depois da experiência acima, podemos concluir que, conforme a Figura 2, na superfície plana a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta. Veja Figura 3.

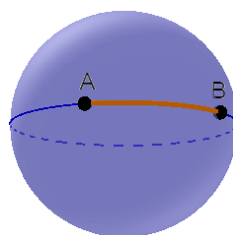
Figura 3 – Distância entre dois pontos no plano



Fonte: Autora, 2021

Já na superfície esférica a distância entre dois pontos é um arco, ou ainda, arco geodésico. Veja Figura 4.

Figura 4 – Distância entre dois pontos na esfera



Fonte: Autora, 2021

Desenvolvimento: O professor deve definir os conceitos de círculos máximos, de distância entre dois pontos da esfera, de ponto antipodais e de biângulos. Utilizar o globo terrestre para exemplificar círculos e semicírculos máximos, expondo a Linha do Equador e seus meridianos, respectivamente. Com auxílio do projetor, utilizar o site [antipodesmap⁹](http://antipodesmap.com) para determinar pontos antipodais sob a Terra. Por fim, usar bolas de isopor, elásticos, alfinetes para representar o biângulo como também as situações propostas no exercício.

Conclusão: Os discentes devem realizar parte do exercício em sala, o qual pode ser feito em duplas, e devem ser orientados e estimulados a produzir justificativas escritas mediante as suas observações.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula e da devolutiva do exercício, ou seja, das observações produzidas pelos estudantes.

Exercícios Propostos

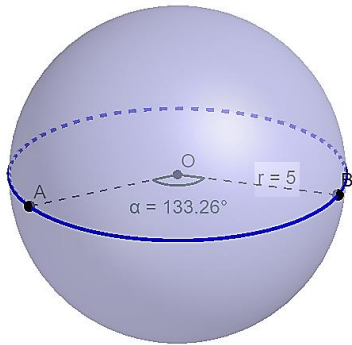
1. Corte a bola de isopor em duas partes. Uma destas deverá formar um círculo máximo e a outra um círculo não máximo.
2. Na bola de isopor, marque, com o auxílio de alfinetes, dois pontos não antipodais. Em seguida, com os elásticos, descubra quantos círculos máximo passa por estes dois pontos. Anote suas conclusões
3. Na bola de isopor, marque, com o auxílio de alfinetes, dois pontos antipodais. Em seguida, com os elásticos, descubra: quantos círculos máximos passa por estes dois pontos? O que observou?
4. Na bola de isopor, com auxílio de elásticos, represente dois círculos máximos de modo que eles se cruzem. Fixe um alfinete em cada interseção formada. Os pontos, representados pelos alfinetes, são ou não são antipodais?
5. Pesquise pelo site de antipodesmap.com e descubra as antípodas das cidades de

⁹Disponível em: <https://www.antipodesmap.com/>

- a) Maceió em Alagoas
- b) Boa Vista em Roraima
- c) Mogadouro em Portugal
- d) Pequim na China

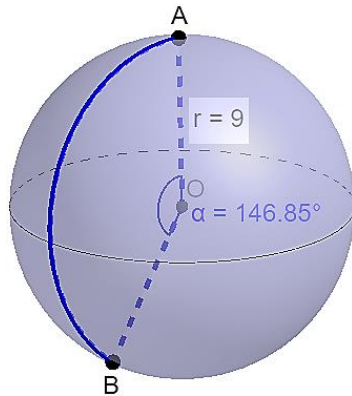
6. Determine a distância entre os pontos A e B dos casos a seguir:

a)



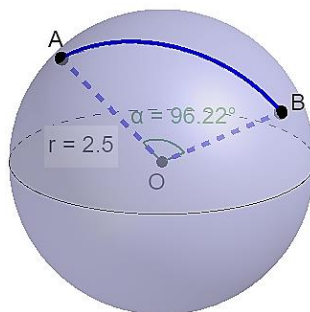
Fonte: Autora, 2021

b)



Fonte: Autora, 2021

c)



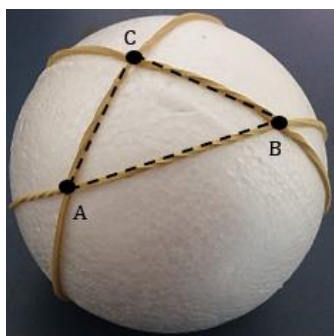
Fonte: Autora, 2021

AULA: 11 a 14 (excesso angular, triângulo esférico e sua área)

Introdução: Primeiro, o professor deve expor sobre o Triângulo das Bermudas, mostrando em mapas ou preferencialmente no globo terrestre, avaliando quanto o educando conhece deste tema. O objetivo é fazer com que o estudante conclua que há a possibilidade de se marcar triângulos sobre a Terra.

Desenvolvimento: O professor deve expor a localização e a história de famosos triângulos sobre a Terra, utilizando como exemplo, também, o Triângulo do Lago Michigan, o Triângulo do Dragão e o Triângulo de Bennington, observando-os no globo terrestre, a fim de concluir, professor e estudantes, que é permitido marcar triângulos sob a esfera. A partir disto, o docente deve definir o conceito de triângulo sob a esfera, de triângulo esférico e de excesso angular, para isso sugerimos utilizar as bolas de isopor, alfinetes e elásticos e construir junto com alunos situações como na Figura 5. Não é necessário que os educandos aprendam/dominem a demonstração para o cálculo da área de um triângulo esférico.

Figura 5 – Vértices de um triângulo sob a esfera



Fonte: Autora, 2021

Conclusão: Os discentes devem realizar parte do exercício proposto em sala, o qual pode ser feito em duplas, e devem ser orientados e estimulados a produzir justificativas escritas mediante as suas observações. Além disso, sugerimos o professor, ao fim desta etapa, aplicar o projeto “GPS e suas aplicações” presente no material para estudo.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula e da devolutiva do exercício, ou seja, das observações produzidas pelos estudantes. Bem como, no desenvolvimento da pesquisa, na construção de gráficos e nos processos criativos desenvolvidos em “GPS e suas aplicações”.

Exercícios Propostos

1. Com o auxílio de elásticos, forme um círculo máximo numa bola de isopor. Em seguida, forme outro círculo máximo perpendicular ao primeiro. E por fim, forme um terceiro círculo máximo, perpendicular aos dois já construídos.
 - a) Em quantos triângulos a bola ficou dividida?
 - b) Quanto mede cada ângulo desses triângulos?
 - c) Qual a soma dos ângulos internos desses triângulos?

2. Na bola de isopor, forme com o elástico um círculo máximo, fixe três alfinetes dele. Você obteve um triângulo esférico? Justifique.

3. Na bola de isopor, com o elástico, forme dois círculos máximos de modo que eles se cruzem. Note que se formam quatro biângulos,
 - a) Utilize o transferidor para medir os ângulos dos quatro biângulos.
 - b) Considere os dois biângulos de menor ângulo e calcule sua área. Sugestão: a área de um biângulo equivale a área de uma cunha esférica.

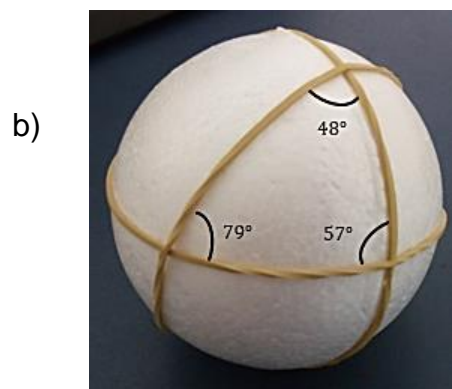
4. Utilizando o globo terrestre, visualize as ilhas Bermudas, Porto Rico e a cidade de Fort Lauderdale na Flórida. Este é o Triângulo da Bermuda. Pesquise quanto equivale sua área e cite 3 eventos que lá ocorreram.

5. Apenas utilizando as capitais dos estados brasileiros.
 - a) Determine um triângulo que passe por todas as cinco regiões brasileiras.
 - b) Determine um outro triângulo que passa apenas pelas regiões: Norte, Nordeste e Centro-oeste.

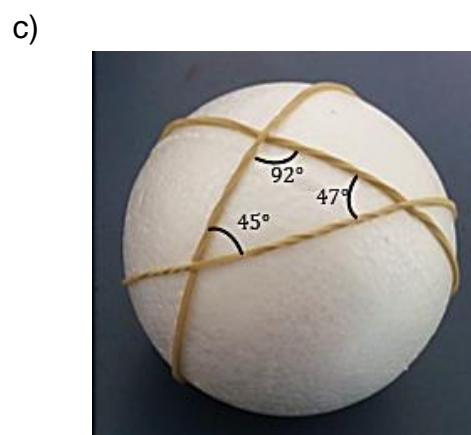
6. Calcular o excesso angular dos triângulos esféricos a seguir:



Fonte: Autora, 2021



Fonte: Autora, 2021



Fonte: Autora, 2021

7. Represente, na bola de isopor, a Figura 17. Fixe um alfinete em cada um dos vértices A , B e C . Em seguida, busque na sua bola de isopor um triângulo formado pelos antípodas dos pontos do triângulo alfinetado. Este será denominado de triângulo antípoda.

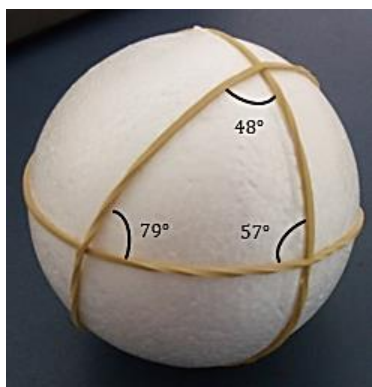
8. Determine a área de um triângulo esférico que está contido na superfície esférica de raio 7 cm , onde $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 95^\circ$ e $\gamma = 30^\circ$.
9. Determine a área de um triângulo esférico que está contido na superfície esférica de raio 5 cm , onde $\alpha = 83^\circ$, $\beta = 90^\circ$ e $\gamma = 46^\circ$.
10. Calcule a área dos triângulos esféricos a seguir, considerando que todos possuem raio igual a $2,5\text{cm}$:

a)



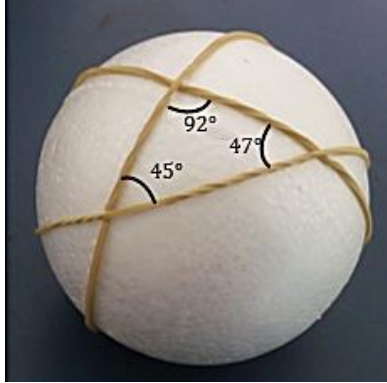
Fonte: Autora, 2021

b)



Fonte: Autora, 2021

c)



Fonte: Autora, 2021

11. Pesquise a área dos Triângulos: das Bermudas, de Michigan, do Dragão e o de Bennington.

3.2.1 Material de estudo: Introdução a Geometria Esférica

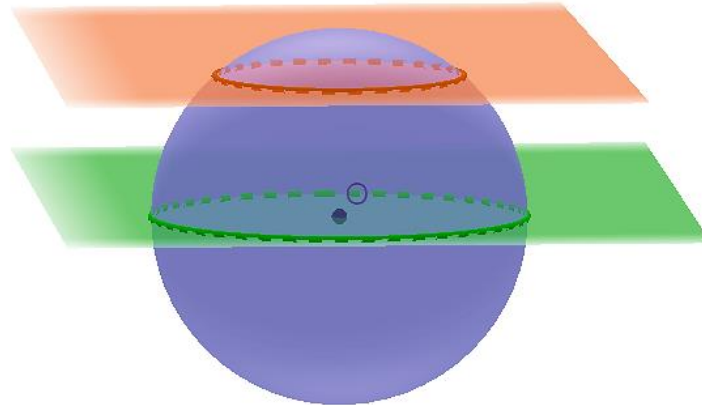
A Geometria Esférica é o estudo geométrico em áreas esféricas, onde a Geometria Euclidiana, comumente estudada na educação básica, não consegue ser aplicada com precisão. Há várias aplicações desta geometria na matemática, na física, na astronomia, na cartografia, entre outros.

Hoje em dia, ainda que o clima esteja em condições críticas, a navegação de aviões e navios é bastante segura devido à alta precisão de localização espacial do GPS. Isto porque o Sistema de Posicionamento Global utiliza-se das propriedades da geometria esférica para determinar qualquer ponto sobre a superfície terrestre.

3.2.1.1 Círculos máximos

Definição 1: Na esfera, o caminho mais curto entre dois pontos é dado por um arco de circunferência obtida intersectando a esfera com um plano contendo o seu centro. Essa circunferência é chamada de círculo máximo. Observe a Figura 6.

Figura 6 – Círculo Máximo na Esfera

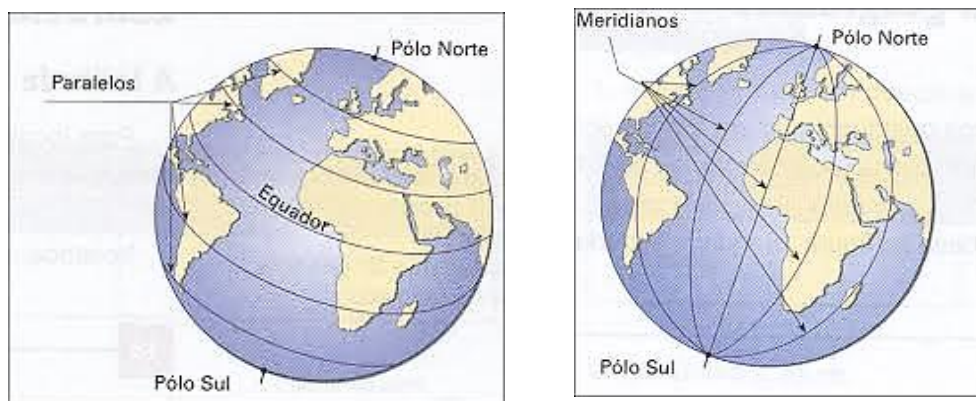


Fonte: Autora, 2021

A circunferência verde é um círculo máximo, pois o plano verde contém o centro O da esfera. Já a circunferência laranja não é um círculo máximo.

Exemplo: Conforme a Figura 7, a Linha do Equador que divide a terra em dois hemisférios (Norte e Sul) é um exemplo de círculo máximo. Assim como o Meridiano de Greenwich que, por convenção, divide o globo terrestre em ocidente e oriente é um outro exemplo de um círculo máximo

Figura 7– Equador e Meridianos são círculos máximos



Fonte: Melro, 2010

Definição 2: Sobre a superfície de uma esfera, dois pontos antipodais são dois diametralmente opostos.

Exemplo: Mesmo sendo fisicamente impossível, se você começasse a cavar um túnel agora, do Polo Norte indo para o centro da Terra, onde você sairia? É fácil ver que se isto fosse realizável chegaríamos no polo Sul. Isto faz o polo Norte e o polo Sul serem pontos antipodais.

E se você começasse cavar a partir da sua casa, onde você chegaria? O site “*antipodesmap.com*” te ajuda a descobrir a resposta. Caso você more em Arapiraca em Alagoas, cavando seu túnel, como a Figura 8, bom que saiba nadar pois sairá no oceano perto das Filipinas.

Figura 8 – O ponto antipodal da cidade de Arapiraca-AL



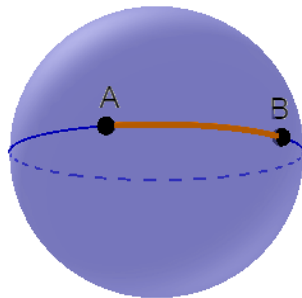
Fonte: antipodesmap, 2021

Na esfera, os círculos máximos assumem um papel similar aos das retas da Geometria Euclidiana e os arcos menores de círculo máximo assumem um papel semelhante ao dos segmentos de reta. Portanto, a distância entre dois pontos da esfera é definida pelo comprimento do menor arco de círculo máximo determinado pelos dois pontos.

3.2.1.2 Distância entre dois pontos da esfera

Definição 3: Dado dois pontos distintos A e B não antipodais na esfera de raio r e centro O . A distância na esfera entre A e B é dada pelo comprimento do menor arco \widehat{AB} do círculo máximo definido por A e B . Observe a Figura 9.

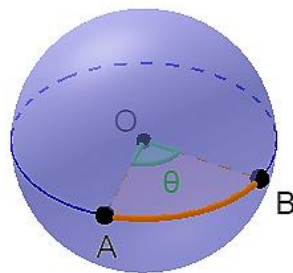
Figura 9 – Distância na esfera entre A e B



Fonte: Autora, 2021

Conforme Figura 10, seja o ângulo \widehat{AOB} correspondente ao menor arco \widehat{AB} e θ a sua amplitude.

Figura 10 – O ângulo \widehat{AOB}



Fonte: Autora, 2021

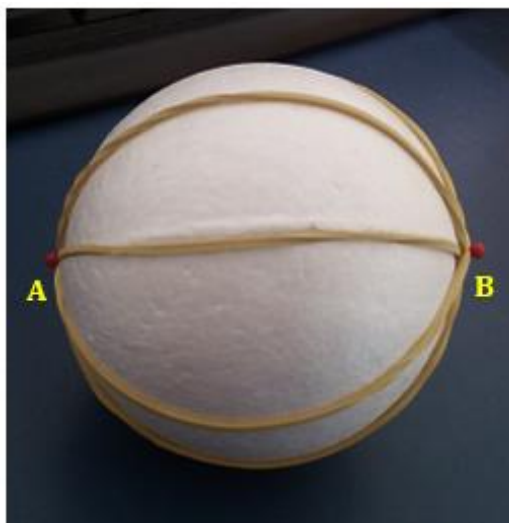
Então,

$$d(A, B) = \theta r, \quad \theta \text{ em radianos}$$

$$d(A, B) = \frac{\theta \pi}{180} r, \quad \theta \text{ em graus}$$

Caso, como na figura 11, os pontos A e B sejam antípodas, observe que a distância entre A e B é igual ao comprimento de um semicírculo máximo, $d(A, B) = \pi r$. Isto porque, há diversos círculos máximos definidos por A e B , porém todos terão mesmo comprimento.

Figura 11 – Os pontos A e B antipodais



Fonte: Autora, 2021

3.2.1.3 Biângulos

Definição 4: Na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, denominamos de biângulos ou lúnulas. Seus vértices são pontos antipodais e seus lados são semicírculos máximos. Conforme a Figura 12.

Figura 12 – Biângulos ou Lúnulas



Fonte: Autora, 2021

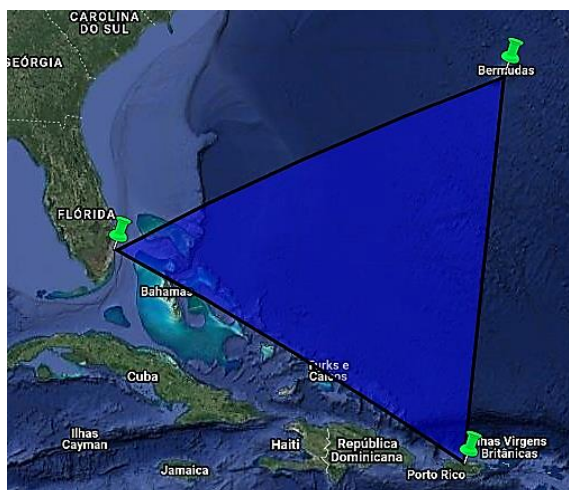
Na esfera, os lados dos polígonos são arcos menores do círculo máximo. Dados dois círculos máximos, estes se cruzam sempre em dois pontos antipodais,

repartindo a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados. Estas regiões são chamadas biângulos ou lúnulas.

3.2.1.4 Triângulos esféricos

Segundo Figura 13, localizado no Oceano Atlântico entre as ilhas Bermudas, Porto Rico, a cidade de Fort Lauderdale na Flórida e as Bahamas, o *Triângulo das Bermudas* destacou-se pelos diversos desaparecimentos de aviões e navios.

Figura 13 – Triângulo das Bermudas



Fonte: Google Maps, 2021

Os primeiros relatos mais ordenados começam a acontecer entre 1945 e 1950. Segundo Rosenberg (1974, p.11-15), em 1973 a Guarda Costeira dos EUA respondeu a mais de 8.000 pedidos de ajuda na área e durante o Século XX mais de 50 navios e 20 aviões se perderam na região.

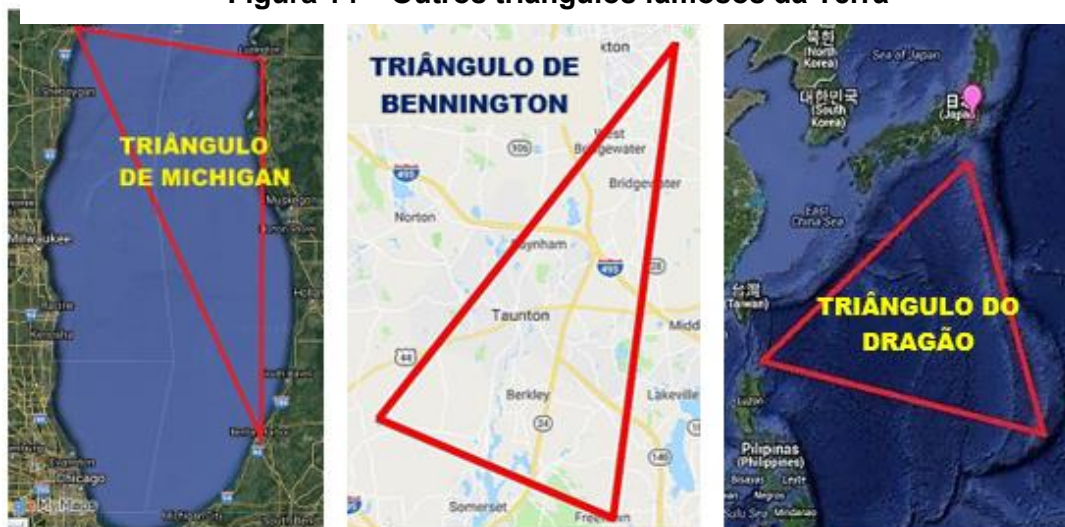
Muitas teorias foram criadas para justificar os desaparecimentos. Os escritores de fantasia defendem que extraterrestres, resíduos de cristais da Atlântida e vórtices da quarta dimensão são os responsáveis pelo sumiço dos aviões e navios.

Os investigadores mais técnicos preferem a ideia de que campos magnéticos estranhos e emissões de gás metano do fundo do oceano são os causadores. Já os mais céticos, atribuem a culpa aos fatores climáticos

como tempestades, furacões e vagalhões (ondas gigantes) e desastres naturais como terremotos e tsunamis, ou correntes marítimas.

A partir da Figura 14, podemos concluir que é possível marcar triângulos sobre a esfera. Há outros triângulos sobre a superfície da terra que são menos famosos, mas também são responsáveis por desaparecimentos como o Triângulo do Lago Michigan, o Triângulo do Dragão e o Triângulo de Bennington (RINCÓN¹⁰, 2019). Estudaremos a seguir, as propriedades desses triângulos sobre a esfera.

Figura 14 – Outros triângulos famosos da Terra



Fonte: Adaptado do Google Maps, 2021

Já vimos que é possível marcar triângulos sob a esfera, agora aprenderemos que com três pontos diferentes podemos obter dois triângulos.

Propriedade 1: Dados três pontos diferentes. Na esfera, estes podem determinar duas regiões limitadas que irão definir dois triângulos.

Considerando que os três pontos delimitam duas regiões, a seguir apresentaremos os dois triângulos definidos. Observe a Figura 15, o primeiro é a parte mais clara delimitada pelos traços em laranja que comumente já associamos com um triângulo.

¹⁰ Disponível em: <https://www.megacurioso.com.br/misterios/42499-5-lugares-tao-misteriosos-quanto-o-triangulo-das-bermudas.htm>

Figura 15 – O triângulo cinza na esfera



Fonte: Autora, 2021

Agora observe a Figura 16, a esfera nos fornece uma situação diferente pois toda a área em branco configura também um triângulo.

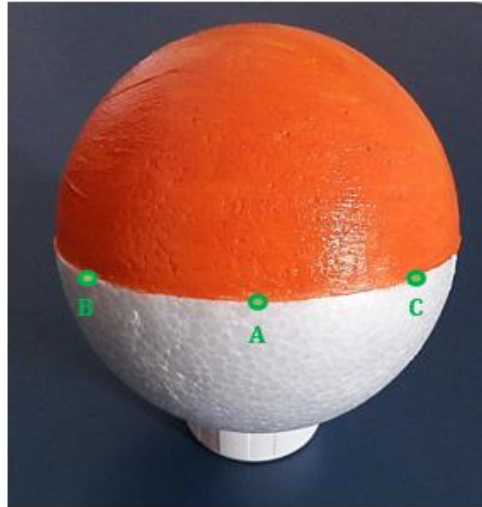
Figura 16 – A região branca também é um triângulo na esfera



Fonte: Autora, 2021

Observação: Na esfera, há alguns triângulos "estranhos" como podemos observar na Figura 17: triângulos com três vértices colineares.

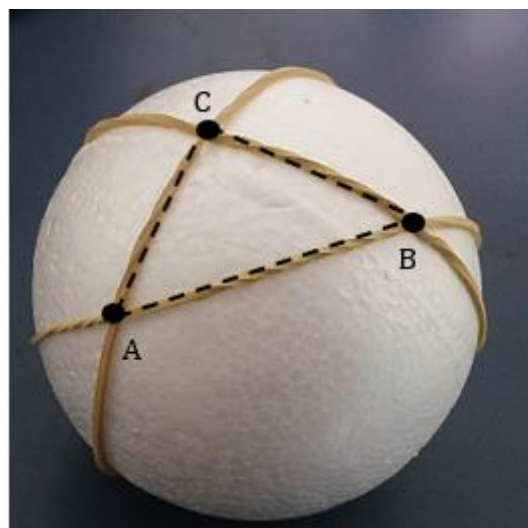
Figura 17 – Um triângulo laranja na esfera



Fonte: Autora, 2021

Definição 5: Na esfera, um triângulo esférico é a figura geométrica limitada por três segmentos esféricos, ou seja, menores arcos de círculo máximo definidos pelos vértices do triângulo. Veja Figura 18.

Figura 18 – Vértices de um triângulo sob a esfera

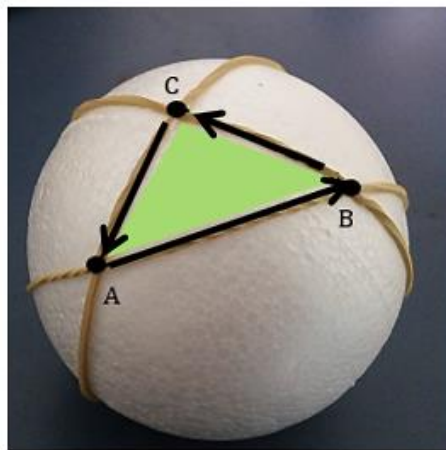


Fonte: Autora, 2021

Observação: Para três pontos distintos definirem um triângulo esférico é necessário que satisfaçam as seguintes condições:

- Estes pontos dois a dois não podem ser antipodais. Isto porque existe uma grande quantidade de segmentos esféricos determinados por dois pontos antipodais.
- Um ponto não pode pertencer ao segmento esférico definido pelos outros dois. Para não haver dúvida sobre qual o triângulo esférico estamos considerando, quando são dados três pontos distintos A , B e C nas condições anteriores iremos tomar o triângulo orientado $[ABC]$ do qual o interior, de cor verde, é determinado pelo caminho orientado de A para B , de B para C e de C para A , consideramos a região que está sempre à direita do caminho, conforme a Figura 19.

Figura 19 – O Triângulo Esférico



Fonte: Autora, 2021

3.2.1.5 Excesso angular

Propriedade 2: Na Geometria Esférica, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre superior a 180° .

Definição 6: A diferença entre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo esférico e a amplitude do ângulo raso (180° ou $\pi \text{ rad}$) chama-se excesso angular.

3.2.1.6 Área de um triângulo esférico

Conseguimos determinar a área de um triângulo esférico por meio da área dos seus biângulos. Para isto, temos que separar em dois casos: o caso em que o triângulo é *pequeno* (o seu interior está contido numa semi-esfera) e o caso contrário.

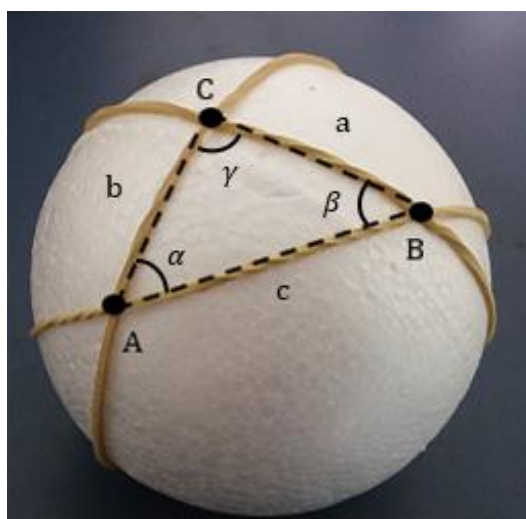
1º caso: Quando o triângulo esférico está contido numa semi-esfera.

Tomemos um triângulo esférico pequeno T . Tem-se que:

- A área da esfera de raio r é igual a $4\pi r^2$
- A área de um biângulo de amplitude α , em graus, é igual a $2\alpha r^2$. Se α estiver em radianos essa área será dada por $\frac{\alpha\pi}{90}r^2$.

Em cada um de seus vértices, os círculos máximos que contêm os respectivos lados do triângulo formam dois biângulos congruentes com ângulos geometricamente iguais ao ângulo interno desse vértice. Veja Figura 20.

Figura 20 – Os ângulos internos de um Triângulo Esférico



Fonte: Autora, 2021

Considerando os três vértices do triângulo, temos seis biângulos dos quais três intersectam-se no interior do triângulo e os outros três intersectam-se no interior do triângulo antípoda. Na região esférica restante, os seis biângulos são disjuntos dois a dois.

Sejam α , β e γ as amplitudes em radianos dos ângulos internos do triângulo que também são as amplitudes dos seis biângulos, conforme a figura. Temos que a soma

da área dos seis biângulos é igual à área da esfera acrescida do dobro da área do triângulo esférico, A_T , e do dobro da área do seu antípoda. Como a área de T é igual à área do seu triângulo antípoda, obtemos:

$$2(2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2) = 4\pi r^2 + 2(2A_T)$$

$$4r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi r^2 + 4A_T$$

$$r^2(\alpha + \beta + \gamma) - \pi r^2 = A_T$$

$$(\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2 = A_T$$

Esta fórmula é conhecida por Teorema de Girard.

2º caso: Quando o triângulo esférico que não está contido numa semi-esfera.

Se o triângulo esférico for grande, ou seja, que contém uma semi-esfera, podemos calcular a sua área fazendo a diferença entre a área da esfera e a área do triângulo pequeno A_{Tp} que os seus lados e vértices também determinam. Usando o resultado anterior obtemos a mesma fórmula para a área do triângulo.

Sejam α , β e γ as amplitudes em radianos dos ângulos internos do triângulo T e a , b e c as amplitudes em radianos dos ângulos internos do triângulo pequeno Tp . Sabe-se que:

- A área da esfera de raio r é igual a $4\pi r^2$
- A área de Tp é igual a $(a + b + c - \pi)r^2 = A_{Tp}$
- Note que $\alpha = 2\pi - a$, $\beta = 2\pi - b$ e $\gamma = 2\pi - c$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} A_T &= 4\pi r^2 - A_{Tp} \\ &= 4\pi r^2 - (a + b + c - \pi)r^2 \\ &= (5\pi - a - b - c)r^2 \\ &= (2\pi - a + 2\pi - b + 2\pi - c - \pi)r^2 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2 \end{aligned}$$

Teorema 1 (Teorema de Girard): A área de um triângulo esférico é igual a $A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2$ onde α , β e γ são as amplitudes, em radianos, dos ângulos internos do triângulo e r é o raio da esfera.

Se as amplitudes α , β e γ forem dadas em graus, temos

$$A_T = (\alpha + \beta + \gamma - 180) \frac{\pi}{180} r^2$$

Portanto, a área de um triângulo esférico é diretamente proporcional ao seu excesso angular.

Além disso, o Teorema de Girard nos conduz ainda a outra enorme diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica: *Dois triângulos esféricos semelhantes são necessariamente congruentes!*

Como a área de um triângulo esférico depende apenas da soma dos seus ângulos internos, na esfera todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área; logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

Exemplo: Determine a área de um triângulo esférico que está contido na superfície esférica de raio 10 cm, onde $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$ e $\gamma = 50^\circ$.

Solução: Como α , β e γ foram dados em graus, temos que a área deste triângulo esférico A_T será determinada por $A_T = (\alpha + \beta + \gamma - 180) \frac{\pi}{180} r^2$.

Substituindo, segue que

$$A_T = (90 + 90 + 50 - 180) \frac{\pi}{180} 10^2$$

$$A_T = \frac{50 \cdot 100\pi}{180}$$

$$A_T = \frac{5000\pi}{180} \cong 87,26 \text{ cm}^2$$

Portanto, a área deste triângulo é aproximadamente 87,26 cm².

3.2.1.7 GPS e suas aplicações

Concepção: O projeto pretende explorar as diferentes aplicações do GPS.

Justificativa: Este projeto tem como objetivo apresentar aplicações inusitadas do Gps e incentivá-los uma visão crítica acerca das informações recebidas.

Objetivos: Incentivar o protagonismo juvenil, incentivar a pesquisas científicas e melhorar a oralidade

Metodologias:

1º Momento: Formar grupos de 3 discentes e solicitar uma pesquisa no ambiente escolar. A pesquisa deve ter a intenção de descobrir se os membros das escolas conhecem o que é um gps, se o utilizam, e citar onde podemos aplicá-lo. Permita que próprio grupo estabeleça as perguntas de sua pesquisa.

2º Momento: Socialização das respostas. Cada grupo irá discorrer sobre os resultados de suas pesquisas.

3º Momento: Professor apresentará a aplicação do GPS no setor agrícola. Segundo Tecnologia no Campo¹¹(2018) podemos citar:

Na identificação de plantas daninhas, na localização das máquinas agrícolas para maximizar a produção; e na direção e controle das máquinas agrícolas na hora da plantação, da irrigação e da pulverização

4º Momento: O desafio final é auxiliar os grupos a desenvolverem ou pensarem em quais outros setores podemos aplicar o GPS. Qual modo podemos aplicá-lo e até investir como um empreendedorismo? Ao fim, expor na escola os gráficos de suas pesquisas e a sua ideia de aplicação.

Avaliação: A avaliação ocorrerá diante o desenvolvimento da pesquisa, construção de gráficos e processos criativos de desenvolver uma solução para algum setor específico.

¹¹ Artigo redigido em site Disponível em <https://tecnologianocampo.com.br/aplicacoes-do-gps-agricola/>

3.3 A forma do planeta Terra

No início do século XXI começou a se popularizar teorias conspiratórias que tentam provar que a Terra seria plana tal como um disco de vinil. Diante disso, explicar para os que creem nestas afirmações, como Mercator e Ptolomeu planificaram o globo terrestre se torna quase inviável. Mas afinal, a terra é plana? Observe a seguir a como se dará a organização didática.

- 1) **Tema:** A Forma do Planeta Terra
- 2) **Conteúdos/objetos do conhecimento:** A Forma da Terra
- 3) **Habilidades:** EM13MAT301, EM13CHS101, EM13CHS102, EM13CHS106 e EM13CHS103
- 4) **Tempo de Execução:** 3 aulas
- 5) **Material Necessário:** Computador, projetor, bolas e placas de isopor, lanterna, globo terrestre, quadro, pincel e/ou giz.
- 6) **Descrição das aulas:**

AULAS: 15 a 17 (A forma da Terra)

Introdução: Primeiro, o professor deve introduzir o tema expondo fotos, reportagens e vídeos sobre os terraplanistas a fim de direcionar os educandos para a determinado questionamento: Qual a real forma da Terra? Sugerimos utilizando história da matemática para explorar em que ano essa pergunta foi satisfatoriamente respondida.

Desenvolvimento: Fazer com que o estudante pesquise e traga para aula: vídeos, imagens, artigos que comprovem que a Terra não é plana. Com base na devolutiva, abrir espaço para um debate onde o professor deve trabalhar os experimentos disponíveis no material de estudo e até complementá-los com BBC NEWS¹² (2019). Realizar as atividades experimentais propostas em sala e para isso os estudantes podem trabalhar, no máximo em trios. Em seguida, explicar sobre a real forma da Terra e explicar o motivo de consideramos a Terra esférica.

Atividades Propostas

12

Artigo disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/curiosidades-50823002>

- 1) Na bola de isopor, fixe dois palitos de dentes a uma distância de 2 cm um do outro. Em seguida, fixe dois palitos em uma placa de isopor, mantendo a mesma distância. Desligue todas as luzes e ligue uma lanterna apontada para os palitos. Observe as sombras que os palitos lançam tanto na bola quanto na placa.
 - a) Qual sombra mais se parece com as sombras que vemos na Terra? Justifique.

- 2) Nesse experimento, o globo representa uma Terra redonda e o mapa, uma Terra plana e a lanterna será o sol. Desligue todas as luzes do local, com exceção da lanterna. Aponte a lanterna para o globo e o mapa e observe como a luz se reflete de formas distintas. Olhe para o globo e perceba como uma metade dele está iluminada e a outra está escura. Em seguida, veja como o mapa está completamente iluminado.
 - a) Qual mais se aproxima com a nossa realidade: globo terrestre ou o mapa-múndi? Justifique.

Conclusão: Os educandos devem realizar os experimentos em sala, o qual pode ser feito em duplas, deve ser orientado e estimulado a produzir justificativas escritas mediante as suas observações.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula e das observações produzidas pelos estudantes no decorrer dos experimentos.

3.3.1 Material de estudo: a forma do planeta Terra

No início do século XXI começou a se popularizar teorias conspiratórias que tentam provar que a Terra seria plana tal como um disco de vinil. Diante disso, explicar para os que creem nestas afirmações, como Mercator e Ptolomeu planificaram o globo terrestre se torna quase inviável. Mas afinal, a terra é plana? As pesquisas científicas apontam que isso não seria possível. Porém, vamos compreender como tudo começou.

A partir de 2014, o movimento terraplanista se popularizou com discussões em vídeos do *Youtube* e em grupos de *Facebook* dos Estados Unidos. Para os terraplanistas, o nosso planeta é um disco achatado, coberto por uma redoma invisível. O Pólo Norte se localiza ao centro e nas "bordas" estaria uma muralha de gelo: a Antártida. Ela serviria como uma barreira para a superfície terrestre, segurando a água dos oceanos.

Além disso, eles afirmam que a Terra está no centro do Universo, completamente imóvel, ou seja, não giraria em torno de si mesma e nem em torno do Sol. Justificando a existência do dia porque o Sol se movimentaria em círculos sobre a superfície da Terra, iluminando diferentes regiões em sua passagem.

É claro que civilizações antigas acreditavam que a Terra era plana. Todavia, já na Grécia Antiga, os filósofos gregos Aristóteles, Pitágoras e Erastóstenes defendiam que o nosso planeta é redondo, sendo atribuído ao último a primeira determinação da circunferência terrestre.

A partir disto, verificamos que a concepção de que a Terra é redonda origina-se já em tempos muito antigos. Visando a "re-demistificar" de modo simples tal teoria, em seguida citaremos duas evidências que podem comprovar a forma esférica do planeta.

1) Grandes navegações

No século XVI, Fernão de Magalhães realizou a primeira circum-navegação bem-sucedida. Ele navegou sempre na mesma direção, e no fim seu navio retornou ao ponto inicial da viagem, confirmando que o planeta é redondo.

2) Fuso horário

Se a Terra fosse plana então o Sol brilharia ao mesmo tempo para toda população. No entanto, o que se pode observar é a alternância entre dia e noite para diferentes pontos no planeta. Sendo assim, os fusos horários confirmam o formato esférico do planeta.

Portanto, não somente essas como muitas outras evidências científicas complexas comprovam que o planeta possui formato esférico e é achatado nos polos. Além disso, a Terra mantém um movimento de rotação com velocidade de 1645 km/h e gira ao redor do Sol, estrela que nos fornece luz e calor.

3.3.1.1 Experimentos para verificar que a Terra não é plana

Em pleno século XXI e ainda há pessoas que negam a forma esférica da terra. Mesmo que há mais de 2 mil anos já existiam pessoas comprovando este fato. (BBC News¹³, 2019). Dito isto, apresentaremos algumas maneiras simples de comprovar que a Terra é redonda e rebater essas ideias dos terraplanistas.

Suba em uma árvore: Considere que uma árvore se encontra no centro de uma grande planície. Se o planeta Terra fosse plano e você observasse o horizonte: no fim, não importaria se estivesse no chão ou em cima da árvore, veria a mesma paisagem. Porém, sendo a Terra redonda, ao subir numa árvore é possível avistar coisas que não eram visíveis ao olhar estando no chão. Quanto mais você subir, mais verá coisas ao longe. De acordo com Frenz (2018), “isto se deve ao fato de que partes da Terra que estavam ocultas, devido à sua curvatura, agora ficam evidentes porque a sua posição mudou.”

Observe um barco: Quando estiver na praia e avistar um barco se afastando em direção ao alto-mar, pegue um binóculo e note que deixará de ver, primeiro, o casco do barco, mas ainda poderá ver o mastro e a vela. Pouco a pouco, mastro e vela ficarão menores, até perde-los de vista e o barco desaparecer. O mesmo vale para o sentido contrário. Se o veleiro se aproxima, primeiro aparecem a vela e o mastro e, em seguida, o restante da embarcação. Se a Terra fosse plana, você notaria que o barco parece menor à medida em que se afasta, mas ele sempre seria visto por completo (FRENZ, 2018).

De olho no fuso-horário: No mesmo tempo em que algumas partes do mundo é dia, em outras é noite. Isto ocorre devido ao formato redondo da Terra e seu movimento de rotação. Dessa forma, o Sol ilumina uma parte da esfera enquanto a outra permanece na escuridão. Aliás, se a Terra fosse plana, seria possível enxergar o Sol mesmo que estivesse a noite. Este fato se assemelha ao que acontece em um teatro, quando o público mesmo sentado na escuridão pode ver os refletores do palco apesar de que eles não cheguem a iluminá-los (FRENZ, 2018).

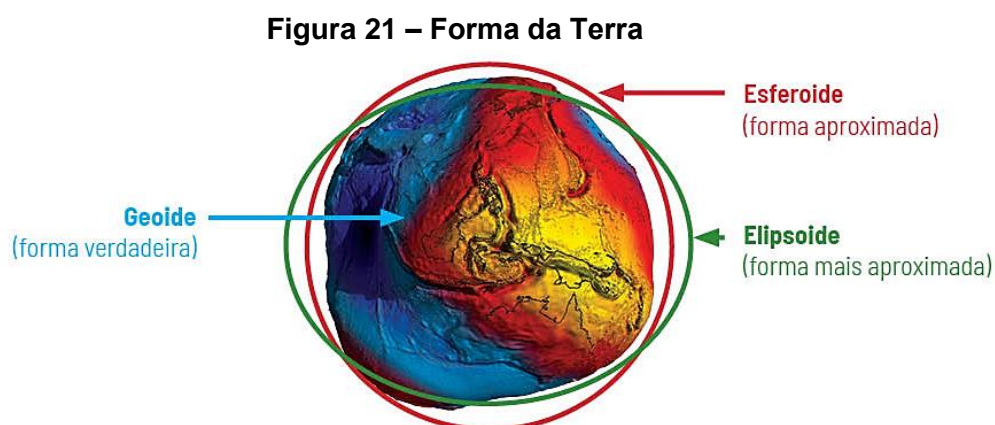
¹³ Artigo disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/curiosidades-50823002>

Viaje de avião: Geralmente, em um voo transatlântico é possível ver a curvatura da Terra. Ela pode ser notada desde os 10 quilômetros de altitude, se tornando mais visível depois dos 15 quilômetros. Outro fato é que os aviões podem viajar em linha relativamente reta durante muito tempo sem "sair" por nenhuma das supostas bordas do planeta.

3.3.1.2 A Terra é redonda mesmo?

Essas e muitas outras evidências confirmam, portanto, que o planeta não é plano. Mas, afinal qual é a forma da Terra? Será que o nosso planeta é uma esfera totalmente perfeita? Antes, é indispensável compreender que, por ser uma concepção do intelecto humano, uma esfera perfeita raramente será encontrada na natureza e até em todo o universo.

Conforme a Figura 21, o modelo mais exato para simbolizá-la é um formato quase esférico chamado de **geoide** que possui muitas deformações, diferenças de gravidade em vários um formato quase esférico de seus pontos e acúmulo de massa de maneira irregular ao longo de seu volume total. Além disso, as diferenças de altitude e profundidade não permitem também que o planeta seja perfeitamente redondo.



Fonte: Cruz, 2018

Entretanto, tudo depende da escala em que a análise será feita. Se considerarmos a Terra vista de fora de uma posição muito próxima, veremos as diferenças entre as suas altitudes e depressões e até a variação do nível das águas dos oceanos de

uma região à outra. Por outro lado, se considerarmos o planeta visto de longe, essas deformações tornam-se praticamente nulas. Dito isto, em seções posteriores, assumiremos o formato esférico da Terra, cujo raio é aproximadamente 6371 km .

Outra peculiaridade importante de seu formato é o seu leve achatamento nos polos. Isso ocorre pela alta velocidade em que o movimento orbital de translação apresenta-se, a mais de 1600 km/h .

3.3.1.3 Por que a Terra possui esse formato quase esférico?

Não somente a Terra como a maioria dos planetas e luas apresentam essa forma um pouco arredondada devido à aceleração da gravidade. Assim, para manter certo equilíbrio entre as diferentes áreas, os corpos celestes tendem a apresentar esse formato mais esférico, pois, afinal, tudo é atraído para o centro do planeta.

Tendo desbravado o formato da Terra que é esférica, vamos estudar como podemos transformar a Terra redonda num mapa plano. Para isto, faremos uso da cartografia e suas projeções.

3.4 Noções de Cartografia

A cartografia é a ciência que representa o espaço geográfico através da análise e confecção de cartas ou mapas. No entanto, plantas, croquis e globos terrestres são outros de seus produtos. Veja a seguir a como se dará a organização didática.

- 1) **Tema:** Noções de Cartografia
- 2) **Conteúdos/objetos do conhecimento:** Divisão da Cartografia, Breve História da Cartografia, Conceitos Cartográficos (Escala Cartográfica, Mudança de Escala, Coordenadas Cartográficas, Fusos Horários), Relação entre Coordenadas e Distâncias e a Cartografia dos Livros e Games
- 3) **Habilidades:** EM13MAT301, EM13MAT308, EM13MAT510 EM13MAT405 EM13CHS101, EM13CHS102, EM13CHS103, EM13CHS106
- 4) **Tempo de Execução:** 14 aulas
- 5) **Material Necessário:** Computador, projetor, mapas, globo terrestre, quadro, lápis, borracha, material impresso, *Excel*, pincel e/ou giz.

6) Descrição das aulas:

AULAS: 18 a 21 (divisão da cartografia, breve história da cartografia, escala cartográfica e mudança de escala)

Introdução: Primeiro, o professor deve explicar o conceito de geometria esférica e citar algumas de suas aplicações. A seguir, ele deve apresentar a atividade proposta 1 a qual induzirá o aluno a concluir que, na superfície esférica, a distância entre dois pontos é um arco.

Desenvolvimento: O professor deve trabalhar com mapas diferentes, mostrando sua versatilidade em diferentes contextos como econômicos, sociais, demográficos, justificando a importância de sua utilização e apresentando uma breve história de sua origem. Em seguida, aplicar a atividade proposta 1. Depois, definir o conceito de mapa e expor os conceitos matemáticos fundamentais para cartografia. Utilizar IBGE (1999, p. 23) para definir, formalmente, escala e escala cartográfica. A seguir, propor a atividade proposta 2. Como complemento ao material de estudo, sugerimos inserção da escala gráfica, exemplificando-a com mapas, presente em IBGE (1999, p. 27).

Atividades Propostas

- 1) (UFPR 2017) “Enrolem esse mapa; ele não será necessário [...]” O primeiro-ministro Britânico William Pitt, o jovem, fez essa observação depois de ser comunicado sobre a derrota das forças britânicas na Batalha de Austerlitz, em 1805, em que ficou claro que a campanha militar de seu país na Europa Continental tinha sido frustrada.” (Longley, P.; Goodchild, M. F.; Maguire, D. J.; Rhind, D. W. Sistemas e ciência da informação geográfica. Porto Alegre: Bookman, p. 300.)

Considerando as informações do texto, o desenvolvimento da cartografia e o uso de mapas, identifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as seguintes afirmativas:

- () A história da cartografia mostra que mapas são confeccionados para atender objetivos específicos que, quando cumpridos, tornam obsoletas as informações neles constantes.

() O texto ilustra o papel dos mapas como ferramenta de apoio e planejamento a inúmeras atividades que necessitam de informações espaciais.

() A leitura e interpretação de mapas exige a construção de legendas apropriadas ao tipo de informação que o mapa pretende transmitir.

() A observação *Enrolem esse mapa; ele não será necessário* pode ser considerada uma afirmação atual, uma vez que a tecnologia digital, empregada nos processos de produção e distribuição de mapas, tornou dispensável seu uso em papel.

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta, de cima para baixo.

a) V – F – V – V

b) F – F – F – V

c) V – V – V – F

d) F – V – V – F

e) V – V – F – V

Resolução: Alternativa D. A primeira e a quarta afirmação são falsas, e a segunda e terceira são verdadeiras. As informações expressas em um mapa não se tornam obsoletas nem possuem uso limitado. Por outro lado, a observação feita pelo primeiro-ministro não possui relação com as tecnologias empregadas para a produção cartográfica. Além disso, no início do século XIX, ainda não existiam as técnicas hoje conhecidas.

2) (ENEM, 2011) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.

Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de

a) 1 : 250.

- b) 1 : 2 500.
- c) 1 : 25 000.
- d) 1 : 250 000.
- e) 1 : 25 000 000.

Solução: Primeiramente, é necessário converter os 2.000 km em centímetros. Para isso, multiplicamos o seu valor por 100.000. Assim, a distância real entre as duas cidades é de 200.000.000 centímetros.

$$E = \frac{d}{D}$$

$$E = \frac{8}{200.000.000}$$

Podemos simplificar por 8 e obter $E = 1: 25.000.000$. Alternativa correta: letra E.

Conclusão: Os discentes devem compreender a importância e versatilidade da cartografia. As atividades propostas indicamos ser realizada individualmente. O professor deve orientá-los e estimulá-los a produzir justificativas escritas e orais mediante as suas observações. No fim da aula será proposto exercícios para que eles pratiquem os conceitos vistos.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula.

Exercícios Propostos

1. Em um mapa cuja a escala é de 1: 140.000, a distância em linha reta entre duas cidades é de 7 cm. Qual a distância real, em *km*, entre essas?
2. Em um mapa de escala 1: 2.000.000, quantos centímetros serão necessários para representar uma distância real de 150 *km*?

3. Sobre um mapa, com escala 1:150.000, um geógrafo demarca uma reserva florestal com formato de um quadrado, apresentando 8cm de lado. Qual é a área real em km^2 da reserva florestal?
4. Qual é a escala de um mapa cujo a distância real de 740 km entre duas cidades é representada com 100 cm?
5. Considerando que a Terra possui aproximadamente um raio de 6371km e que um globo que a representa tem 55,4cm de diâmetro. Qual é a escala desse globo?
6. Supondo que o mapa A possui escala de 1:2.000 e o mapa B, escala de 1:12.000, assinale a alternativa correta.
 - a) No mapa A, 3 cm correspondem a 6.000 m na superfície terrestre.
 - b) No mapa B, 1 cm corresponde a 120m na superfície terrestre.
 - c) O nível de detalhe do mapa B é maior do que o do mapa A.
 - d) O nível de detalhe não é estabelecido pela escala de um mapa.

AULA: 22 a 25 (mudança de escala, coordenadas cartográficas)

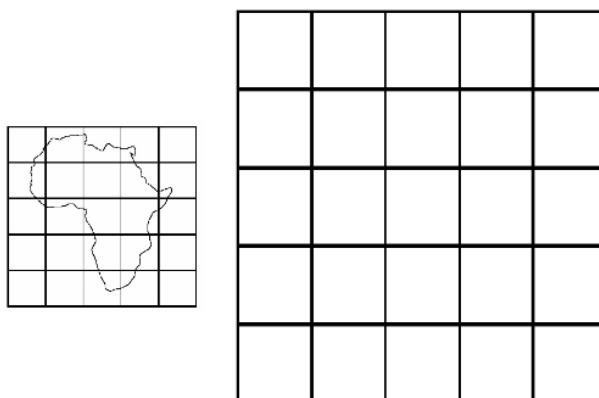
Introdução: Na primeira aula, o professor deve introduzir a seguinte situação: “Um cartógrafo possui dois mapas cujas as escalas são diferentes. Ele pretender uni-los em somente um mapa. O que ele deve fazer?” Na terceira aula, o professor deve relembrar que a posição de um ponto no plano é determinada pelas coordenadas cartesianas. Logo, como será determinado um ponto no globo terrestre? E assim, introduzir as coordenadas geográficas.

Desenvolvimento: O professor deve utilizar as duas primeiras aulas para explicar que pode aumentar ou diminuir a escala de um mapa como também citar alguns métodos de redefinição de escala como Quadriculado, Triângulos semelhantes, Pantógrafo, Fotocartográfico e Digital. A seguir, utilizar com os estudantes o método quadriculado, aplicar a atividade proposta 1. Nas suas últimas aulas, ele deve definir os conceitos de latitude e longitude e calcular pontos antipodais a partir destas

coordenadas, utilizando a atividade proposta 2. Sugerimos utilizar o site *antipodes-map*¹⁴ para verificação dos cálculos. Como sugestão complementar, sugerimos a construção do pantógrafo a partir do tutorial contido em Pizetta (2015, p.40).

Atividades Propostas 1

- 1) Aplique o método quadriculado e amplie o mapa do Brasil expresso abaixo.



Fonte: Adaptado de Fonseca, 2011

- 2) Utilize o método de Salles¹⁵ (2017) para calcular o ponto antipodal de Maceió (9° 39' 59" S / 35° 44' 6" O), localizada no estado de Alagoas, a partir de suas coordenadas geográficas.

Conclusão: Os discentes devem realizar a atividade proposta em sala e Pizetta (2015, p.40) configura-se um material rico para o professor se aprimorar no tema.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula.

AULA: 26 a 28 (relação entre coordenadas e distâncias)

Introdução: Primeiro, o professor deve lembrar que a posição de um ponto no plano é determinada pelas coordenadas cartesianas. Logo, como será determinado um ponto no globo terrestre? E assim, introduzir as coordenadas geográficas.

¹⁴ Disponível em: <https://www.antipodesmap.com/>

¹⁵ Disponível em <https://super.abril.com.br/comportamento/conheca-as-cidades-antipodas-situadas-em-lados-opostos-no-mundo/>

Desenvolvimento: As séries de Taylor, vista normalmente durante a graduação, e o teorema fundamental da trigonometria esférica presentes no material servem para que o professor ou leitor, possa entender ambas aplicações. Os alunos não precisam dominar este conteúdo, apenas saber que é possível calcular a mão. E logo, em seguida, fazer o uso do *Excel*. Para mais informações sobre o teorema fundamental da trigonometria esférica consulte Abreu (2015, p. 17-21).

Atividades Propostas

- 1) Determine a distância entre as cidades de Curitiba e Goiânia que estão localizadas sobre o mesmo meridiano, $49^{\circ} 0'$, e suas latitudes são respectivamente $26^{\circ} S$ e $17^{\circ} S$.

Solução: A latitude de Goiânia é $170^{\circ} S$, ou seja, $\varphi = -170^{\circ}$. A latitude de Curitiba é $260^{\circ} S$, ou seja, $\varphi = -260^{\circ}$ e $\Delta\varphi = 90^{\circ}$. Logo, a distância entre Curitiba e Goiânia é $9(111,17)km = 1000,53km \approx 1000km$.

Conclusão: Os discentes devem realizar parte do exercício em sala, o qual pode ser feito em duplas, e devem ser orientados e estimulados a produzir justificativas escritas mediante as suas observações.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula e da devolutiva do exercício, ou seja, das observações produzidas pelos estudantes

Exercícios Propostos

1. Calcule os pontos antipodais das seguintes cidades a seguir:
 - a) Buenos Aires, Argentina ($34^{\circ} 36' 30'' S / 58^{\circ} 22' 16'' O$)
 - b) Roma, Itália ($41^{\circ} 54' 10'' N / 12^{\circ} 29' 46'' L$)
 - c) Havaí, USA ($19^{\circ} 53' 48'' N / 155^{\circ} 34' 58'' O$)
 - d) Luanda, Angola ($8^{\circ} 50' 18'' S / 13^{\circ} 14' 04'' L$)
2. Suponha que o raio médio da Terra esférica é de 6371 km e que $\pi = 3,14$. A partir disto, determine:
 - a) O comprimento de um grau sexagesimal na Terra, isto é, 1° equivale a quantos *km*.
 - b) O comprimento de um grau sexagesimal na Terra, isto é, 1° equivale a quantos *km*.

- c) O valor de um minuto sexagesimal na Terra, ou seja, 1' equivale a quantos *m*.
 - d) O valor de um segundo sexagesimal na Terra, ou seja, 1" equivale a quantos *m*.
3. (ENEM, 2010) "Pensando nas correntes e prestes a entrar no braço que deriva da Corrente do Golfo para o norte, lembrei-me de um vidro de café solúvel vazio. Coloquei no vidro uma nota cheia de zeros, uma bola cor rosa-choque. Anotei a posição e data: Latitude 49°49' N, Longitude 23°49' W. Tampei e joguei na água. Nunca imaginei que receberia uma carta com a foto de um menino norueguês, segurando a bolinha e a estranha nota." KLINK, A. *Parati: entre dois polos*. São Paulo: Companhia das Letras, 1998 (adaptado).

No texto, o autor anota sua coordenada geográfica, que é

- a) a relação que se estabelece entre as distâncias representadas no mapa e as distâncias reais da superfície cartografada.
 - b) o registro de que os paralelos são verticais e o convergem para os polos, e os meridianos são círculos imaginários, horizontais e equidistantes.
 - c) a informação de um conjunto de linhas imaginárias que permitem localizar um ponto ou acidente geográfico na superfície terrestre.
 - d) a latitude como distância em graus entre um ponto e o Meridiano de Greenwich, e a longitude como a distância em graus entre um ponto e o Equador.
 - e) a forma de projeção cartográfica, usado para navegação, onde os meridianos e paralelos distorcem a superfície do planeta.
4. Utilizando o Excel, determine a distância entre as cidades de abaixo:
- a) Maceió, Brasil (9° 39' 59" S / 35° 44' 6" O) e São Paulo, Brasil (23° 32' 56" S / 46° 38' 20" O)
 - b) Salvador, Brasil (12° 58' 13" S / 38° 30' 45" O) e Buenos Aires, Argentina (34° 36' 30" S / 58° 22' 16" O)

c) Tokyo, Japão ($35^{\circ} 41' 22''$ N / $139^{\circ} 41' 31''$ L) e
Roma, Itália ($41^{\circ} 54' 10''$ N / $12^{\circ} 29' 46''$ L)

d) Havaí, USA ($19^{\circ} 53' 48''$ N / $155^{\circ} 34' 58''$ O) e
Luanda, Angola ($8^{\circ} 50' 18''$ S / $13^{\circ} 14' 04''$ L)

AULA: 29 a 31 (fusos horários)

Introdução: O professor deve correlacionar situações do cotidiano com os fusos horários, podendo expor o horário de verão brasileiro, por exemplo.

Desenvolvimento: O professor deve definir conceitos de fuso horário, como se calcula um fuso horário. Em seguida, com apoio das atividades propostas 1 e 2, aplicar tais conceitos. E finalizar, ao expor os fusos horários brasileiros.

Atividades Propostas

- 1) Uma família embarca em uma viagem às 14:00 horas, do dia 03 de março, de um ponto A (localizado a 30° O) com destino a B (localizado a 45° L). O tempo de voo é de 10 horas. Qual o dia e o horário de chegada da família ao ponto B?

Solução: Considerando que cada fuso horário corresponde a 15° e que os fusos horários aumentam as horas no sentido Oeste – Leste, temos:

30° O	15° O	0° O	15° L	30° L	45° L
14:00	15:00	16:00	17:00	18:00	19:00

O embarque será às 14:00 horas do dia 03 de março e o tempo de viagem é de 10 horas. Observe que a diferença entre os fusos 30° O e 45° L são de 5 horas. Assim, o tempo total a ser percorrido é de 5 horas + 10 horas = 15 horas.

Logo, somando 15 horas desde o tempo de embarque, obtemos que 14:00 do dia 03 de março + 15 horas = 05:00 horas do dia 04 de março.

Portanto, a família chegou ao ponto B às 05:00 horas do dia 4 de março.

- 2) Um empresário necessita realizar duas reuniões, uma em A (45° L) e a outra em B (180° L). Ele embarca de C (60° O) às 13:00 horas do dia 25 de abril. Após 10 horas de viagem, o empresário desembarca em A. O tempo gasto na reunião

é de 7 horas e logo em seguida ele já estava no avião com destino a B. Considerando que a viagem de A a B leva 15 horas, responda:

a) Qual o horário e o dia de chegada do empresário em A?

b) Qual o horário e o dia de chegada do empresário em B?

Solução a): O empresário partiu de C (60° O) às 13:00 horas com destino a A (45° L), sabendo os fusos aumentam no sentido oeste – leste, e que cada 15° representa um fuso horário, temos:

60° O	45° O	30° O	15° O	0°	15° L	30° L	45° L
13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h

Observe que a diferença entre os fusos 60° O e 45° L são de 7 horas. Assim, o tempo total a ser percorrido é de 7 horas + 10 horas = 17 horas.

Logo, somando 17 horas desde o tempo de embarque, obtemos que 13:00 horas do dia 25 de abril + 17 horas 06:00 horas do dia 26 de abril.

Portanto, o empresário chegará a A às 06:00 horas do dia 26 de abril.

Solução b): Sabemos que o empresário chegou a A às 06:00 do dia 26 de abril, e após 7 horas, embarcou com destino a B. Logo, o empresário embarcou às 13:00 horas no avião com destino a B (180° L).

45° L	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h	21h	22h

Observe que a diferença entre os fusos 45° L e 180° L são de 9 horas. Assim, considerando que a viagem demore 15 horas, o tempo total a ser percorrido é de 9 horas + 15 horas = 24 horas.

Portanto, o empresário embarcará às 13:00 horas do dia 26 de abril e desembarcará em B às 13:00 do dia 27 de abril..

Conclusão: Os discentes devem realizar parte do exercício em sala de modo individual e devem ser orientados e estimulados a produzir justificativas escritas mediante as suas observações.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula e da devolutiva do exercício, ou seja, das observações produzidas pelos estudantes

Exercícios Propostos

1. (PUC-MG) Ao dividir os 360 graus da esfera terrestre pelas 24 horas de duração do movimento de _____, o resultado é 15 graus. A cada 15 graus que a Terra gira, passa-se uma hora. Assim, cada uma das 24 divisões da Terra corresponde a um _____. Para que o texto fique adequadamente preenchido, as lacunas devem ser completadas, respectivamente, por:
 - a) translação e meridiano.
 - b) translação e paralelo.
 - c) rotação e círculo.
 - d) rotação e fuso horário.

2. (ENEM, 2014) Um executivo sempre viaja entre as cidades A e B, que estão localizadas em fusos horários distintos. O tempo de duração da viagem de avião entre as duas cidades é de 6 horas. Ele sempre pega um voo que sai de A às 15h e chega à cidade B às 18h (respectivos horários locais). Certo dia, ao chegar à cidade B, soube que precisava estar de volta à cidade A, no máximo, até às 13h do dia seguinte (horário local de A). Para que o executivo chegue à cidade A no horário correto e admitindo que não haja atrasos, ele deve pegar um voo saindo da cidade B, em horário local de B, no máximo à(s)
 - a) 16h.
 - b) 10h.
 - c) 7h.
 - d) 4h.
 - e) 1h.

3. (ENEM, 2011) Uma família partiu de Porto Alegre (RS), às 8h do dia 1º de janeiro de 2010, portanto, dentro do período de vigência do horário de verão, com destino a Belém (PA). Apesar da distância, a viagem será feita de automóvel e terá duração de 56 horas. Qual o dia e a hora de chegada dessa família à capital paraense?

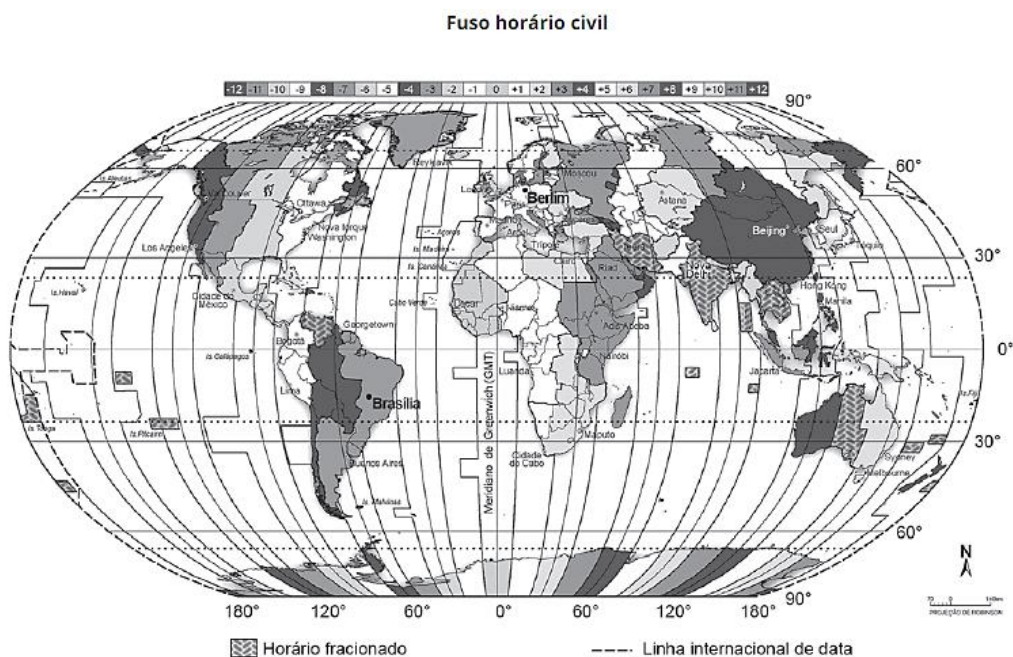


- a) Dia 2 de janeiro de 2010, às 15h.
- b) Dia 3 de janeiro de 2010, às 15h.
- c) Dia 2 de janeiro de 2010, às 16h.
- d) dia 3 de janeiro de 2010, às 16h.
- e) Dia 3 de janeiro de 2010, às 17h.
4. (ENEM, 2008) O sistema de fusos horários foi proposto na Conferência Internacional do Meridiano, realizada em Washington, em 1884. Cada fuso corresponde a uma faixa de 15° entre dois meridianos. O meridiano de Greenwich foi escolhido para ser a linha mediana do fuso zero. Passando-se um meridiano pela linha mediana de cada fuso, enumeram-se 12 fusos para leste e 12 fusos para oeste do fuso zero, obtendo-se, assim, os 24 fusos e o sistema de zonas de horas. Para cada fuso a leste do fuso zero, soma-se 1 hora, e, para cada fuso a oeste do fuso zero, subtrai-se 1 hora. A partir da Lei n.º 11.662/2008, o Brasil, que fica a oeste de Greenwich e tinha quatro fusos, passa a ter somente 3 fusos horários. Em relação ao fuso zero, o Brasil abrange os fusos 2, 3 e 4.

Por exemplo, Fernando de Noronha está no fuso 2, o estado do Amapá está no fuso 3 e o Acre, no fuso 4. A cidade de Pequim, que sediou os XXIX Jogos Olímpicos de Verão, fica a leste de Greenwich, no fuso 8. Considerando-se que a cerimônia de abertura dos jogos tenha ocorrido às 20 h 8 min, no horário de Pequim, do dia 8 de agosto de 2008, a que horas os brasileiros que moram no estado do Amapá devem ter ligado seus televisores para assistir ao início da cerimônia de abertura?

- a) 9 h 8 min, do dia 8 de agosto.
- b) 12 h 8 min, do dia 8 de agosto.
- c) 15 h 8 min, do dia 8 de agosto.
- d) 1 h 8 min, do dia 9 de agosto.
- e) 4 h 8 min, do dia 9 de agosto.

5. (ENEM, 2019) A partida final da Copa do Mundo de 2014 aconteceu no dia 13 de julho, às 16 horas, na cidade do Rio de Janeiro. Considerando o horário de verão em Berlim, de 1 hora, os telespectadores alemães assistiram ao apito inicial do juiz às



- a) 11 horas.

- b) 12 horas.
- c) 19 horas.
- d) 20 horas.
- e) 21 horas.

AULA: 32 a 33 (a cartografia dos livros e games)

Introdução: O professor apresentar diversos mapas fictícios contidos em livros e jogos, ressaltando suas diferenças e finalidades.

Desenvolvimento: O professor deve escolher e apresentar um dos mapas fictícios expostos. Uma sugestão é que os educandos leiam alguma parte do livro que necessite da visualização do mapa. Também, questione os estudantes: qual a diferença entre os mapas reais e os fictícios? Em seguida, desafiar os discentes a produzir dois tipos de mapa, um real e um fictício.

Conclusão: Os discentes devem realizar parte do exercício em sala, o qual pode ser feito em duplas, e devem ser orientados e estimulados a produzir justificativas escritas mediante as suas observações. Permitir que finalizem seus mapas em casa e exibam e socializem o seu produto final.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula e da devolutiva do exercício, ou seja, das observações produzidas pelos estudantes e das apresentações a serem realizadas.

3.4.1 Material de estudo: noções de cartografia

A cartografia é a ciência que representa o espaço geográfico através da análise e confecção de cartas ou mapas. No entanto, plantas, croquis e globos terrestres são outros de seus produtos. Dentre as suas diversas finalidades podemos citar:

- Localizar qualquer referencial na superfície terrestre, desde áreas das mais amplas, como continentes e países, até pontos particulares de um certo lugar, como um bairro ou uma casa.
- Auxilia na orientação espacial e nos deslocamentos, que são ambos realizados com a emprego de mapas e bússolas ou GPS.

- Suas técnicas criam produtos que nos permitem estudar e compreender diversas características do espaço físico, como: hidrografia, relevo, climas, limites dos biomas entre outros.
- Permite a espacialização de informações geográficas úteis para a elaboração de estratégias de caráter social, política ou econômico, e para tomadas de decisões no meio político, gestão e planejamento. Para isto, são utilizados os mapas: políticos populacionais, de uso da terra, de transporte, econômicos entre outros.

A cartografia pode ser separada em dois grandes ramos:

Sistemática ou **Topográfica**: dedica-se à representação das características físicas da superfície terrestre. As informações representadas são de caráter genérico e, por isso, duradouras no tempo, sendo coletadas e replicadas por meio de técnicas específicas.

Temática ou **Geográfica**: dedica-se à produção de mapas com base em informações geográficas diversas, não se restringindo às dimensões físicas de uma área. Seus produtos indicam a ocorrência espacial de fenômenos específicos, como econômicos, sociais, demográficos e mesmo naturais.

3.4.1.2 Uma breve história da cartografia

A necessidade de conhecer detalhadamente o espaço em que se vivia, juntamente com a curiosidade inerente ao ser humano ocasionou com que tenhamos registros de mapas muito antigos, datando de milênios antes da era atual. Um dos mapas mais antigos a ser catalogado é o mapa de Ga-Sur. Produzido pelos babilônios e encontrado onde ficava o território da Mesopotâmias, datado entre 4500 a.C. e 2500 a.C. (ROCHA, 2004 p.49)

Os conhecimentos da Grécia Antiga tiveram um papel importante na construção da cartográfica enquanto ciência. A maior contribuição foi do grego Claudio Ptolomeu cuja obra Geografia aborda conceitos utilizados até hoje, como projeções cartográficas, e um dos primeiros atlas de que se tem conhecimento.

Ávila (2010, p.185) destacam que as grandes navegações impulsionaram o desenvolvimento da cartografia. Isto decorre da necessidade de mapas cada vez mais detalhados e precisos apropriados a navegação. Neste período, destaca-se a obra de Gerhard Mercator (1512-1594), um cartógrafo, matemático e geógrafo considerado um dos pais da cartografia.

Publicado 1569, o mapa-múndi de Mercator representa os paralelos e meridianos em linha reta e formando ângulos de 90° entre si, feitos por uma projeção cilíndrica. Apesar das distorções em áreas mais afastadas da Linha do Equador, a projeção de Mercator é hoje uma das mais utilizadas para a confecção de mapas.

3.4.1.3 Conceitos de cartografia

Rocha (2004, p.61) afirma que desde a origem da cartografia, a matemática se constitui como uma base para sua formulação, construção e representação gráfica da superfície terrestre e dos objetos geográficos. Escala, proporções, coordenadas geográficas, projeções cartográficas, fuso horário, e muitos outros, são conceitos matemáticos fundamentais para a leitura de mapas.

Define-se mapa como um desenho ou uma representação visual, em escala reduzida, de diversos lugares da Terra sobre um plano, podendo, ainda, simbolizar informações geográficas desses lugares, compondo, assim, os mapas temáticos. Dependendo de sua finalidade, um mapa só estará completo se detalhar precisamente o lugar que representa. (IBGE 1999, p.21),

Tais detalhes podem ser tanto naturais como rios, mares, montanhas entre outros, quanto artificiais como represas, estradas, pontes, edificações etc. Conforme o IBGE (1999, p.23), essa representação gera a necessidade de reduzir as proporções dos acidentes a representar, a fim de tornar possível a representação dos mesmos em um espaço limitado. Essa proporção chama-se escala.

3.4.4.1 Escala cartográfica

O IBGE (1999, p. 23) define escala como a relação entre a medida de um objeto ou lugar representado no papel e sua medida real. Isto ocorre porque sempre será possível, por meio do desenho geométrico, obter-se figuras semelhantes às do terreno. Portanto, a razão de semelhança $\frac{d}{D}$ denomina-se escala.

$$E = \frac{d}{D}$$

Onde:

E = escala

d = distância medida no mapa

D = distância real (no terreno)

As escalas mais usuais possuem o numerador igual a 1 e o denominador, um múltiplo de 10. Assim, $E = \frac{1}{32.000}$ ou $E = 1: 32.000$. Isto significa que 1cm no mapa corresponde a 32.000 cm ou 320 m, no terreno.

3.4.4.2 Mudanças de escala

É normal que ao longo de alguns trabalhos cartográficos precise unir, em um único produto, mapas cujas escalas são diferentes. Para isso, torna-se inevitável reduzir alguns e ampliar outros. Para redefinir a escala podemos citar alguns métodos como: Quadriculado, Triângulos semelhantes, Pantógrafo, Fotocartográfico e Digital. Porém, como a cartografia preza por precisão, atualmente apenas os métodos fotocartográfico e digital devem ser empregados.

Todavia, a título de aplicação iremos abordar o processo quadriculado. De acordo com Anderson (1982), conforme citado por Pizetta (2015, p.38) “o método menos sofisticado de ampliar e reduzir de mapas é o quadriculado, ou quadrados semelhantes, pois exige apenas lápis, régua, papel e o mapa original.” Primeiro, é necessário traçar o quadriculado sobre o mapa original. A seguir, repassar, à mão livre, a olho nu e com bastante atenção, o desenho para cada um dos quadrados menores, ampliada ou reduzida, todos os detalhes correspondentes ao original.

3.4.4.4 Coordenadas geográficas

As coordenadas geográficas são valores numéricos, definidos pela latitude e longitude, que servem para localizar qualquer ponto ou objeto na superfície terrestre. Também, as coordenadas geográficas são expressas em graus, minutos e segundos, onde um grau equivale a 60 minutos e um minuto corresponde a 60 segundos, além de exprimir um sentido sendo eles, Norte ou Sul, Oeste ou Leste.

As coordenadas geográficas da cidade de Maceió localizada no estado de Alagoas, Brasil, são: Latitude: 9° 39' 59" Sul, Longitude: 35° 44' 6" Oeste. Podendo, também, ser denotada por: Maceió (9° 39' 59" S / 35° 44' 6" O)

Latitude são linhas imaginárias que cortam a Terra no sentido horizontal, também conhecidas como paralelas. O Equador é círculo máximo da esfera terrestre na horizontal. Ele equivale à latitude 0°, dividindo o planeta em hemisférios Norte e Sul. Por convenção ela varia de 0° a + 90° no hemisfério norte e de 0° a -90° no hemisfério sul

Já Longitude são linhas imaginárias, todavia, cortam a Terra verticalmente, também podem ser chamadas de Meridianos. Adota-se o Meridiano de Greenwich como sendo a longitude de 0°. Assim, tal meridiano divide a Terra em Ocidental (a Oeste) e Oriental (a Leste). Por convenção, a longitude varia de 0° a + 180° no sentido leste de Greenwich e de 0° a - 180° por oeste de Greenwich.

Salles (2017) determina que para calcular um ponto antipodal a partir das coordenadas geográficas, basta seguir o seguinte esquema:

1º Escolha uma coordenada.

2º A latitude do seu antípoda será igual, mas com o sinal invertido.

3º Para calcular a longitude, subtraia 180° da longitude inicial, então, inverta o sinal do resultado.

Lembrando que se a latitude estiver no hemisfério Sul quando inverter o sinal a latitude do antípoda se localizará no hemisfério Norte. Mesmo vale para a longitude.

Para determinar o antípoda de Maceió ($9^{\circ} 39' 59''$ S / $35^{\circ} 44' 6''$ O) localizada no estado de Alagoas.

Vamos denotar o antípoda como A, invertendo o sinal da latitude de Maceió obtemos a latitude de A que é $9^{\circ} 39' 59''$ N. Daí, para calcular a longitude, iremos subtrair 180° de $35^{\circ} 44' 6''$, e então, inverter o sinal. Assim,

$$\begin{array}{r} 180^{\circ} \quad 0' \quad 0'' \\ - \quad 35^{\circ} \quad 44' \quad 6'' \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} 179^{\circ} \quad 59' \quad 60'' \\ - \quad 35^{\circ} \quad 44' \quad 6'' \\ \hline 144^{\circ} \quad 15' \quad 54'' \end{array}$$

Portanto, as coordenadas geográficas do antípoda de Maceió são dadas *por*:
A ($9^{\circ} 39' 59''$ N / $144^{\circ} 15' 54''$ L)

3.4.4.6 Relação entre coordenadas e distâncias

Supõe-se que o raio médio da Terra suposta esférica é de 6371 km . Considerando $\pi = 3,141592653589793$ obtemos que $C = 40.030 \text{ km}$. Note que $C = 40.030 \text{ km}$ equivale a uma volta completa, ou seja, 360° . A partir disso, pode-se determinar:

- o comprimento de um grau sexagesimal na Terra $1^{\circ} \cong 111,19 \text{ km}$
- o valor de um minuto sexagesimal na Terra $1' \cong 1852 \text{ m}$, que por definição é uma milha náutica.
- o valor de um segundo sexagesimal na Terra: $1'' = 30\text{m}$

3.4.4.7 A relação fundamental da trigonometria esférica

Teorema: Seja ABC um triângulo esférico, com lados a, b e c, e ângulos internos A, B e C. Então, $\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A)$

Construção: Seja ABC um triângulo esférico sobre uma esfera de centro O e raios $OA \equiv OB \equiv OC \equiv 1$. O lado a equivale ao ângulo central $\widehat{C\hat{O}B}$, o lado b equivale ao ângulo central $\widehat{A\hat{O}C}$ e o lado c equivale ao ângulo central $\widehat{A\hat{O}B}$.

O ângulo interno A é formado pelas retas tangentes aos arcos \widehat{AB} e \widehat{AC} que passam por A. O ângulo B é formado pelas retas tangentes aos arcos \widehat{BA} e \widehat{BC} que

passam por B e o ângulo C é formado pelas retas tangentes aos arcos \widehat{CA} e \widehat{CB} passando por C.

Os lados a, b e c são opostos aos ângulos A, B e C, respectivamente.

Prologando as tangentes que passam por A e as retas OB e OC, temos que estas se encontram nos pontos P e Q.

As retas AP e AQ são tangentes à superfície da esfera e, portanto, as semirretas AO e AP são perpendiculares, pois uma reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio. O mesmo acontece com as semirretas AO e AQ.

Da geometria plana, podemos estabelecer algumas relações trigonométricas. Os triângulos OAP e OAQ são retângulos em A. Então:

$$\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}$$

$$\text{sen}(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}$$

$$\cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}}$$

$$\text{sen}(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2$$

$$\overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2$$

Somando estas duas equações temos que:

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 = 2\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$$

Então,

$$2\overline{AO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2)$$

Mas os triângulos PQO e PQA, não são retângulos. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a)$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos A$$

Então,

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2 \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2 \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos A$$

E, portanto,

$$2 \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) = 2\overline{AO}^2 + 2 \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos A$$

Então

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cos A$$

Substituindo

$$\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}$$

$$\text{sen}(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}$$

$$\cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}}$$

$$\text{sen}(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}$$

Obtemos a fórmula fundamental para triângulos esféricos.

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \text{sen}(b)\text{sen}(c)\cos(A)$$

Analogamente, obtemos as outras duas combinações, formando assim o grupo das chamadas formulas fundamentais da trigonometria esférica:

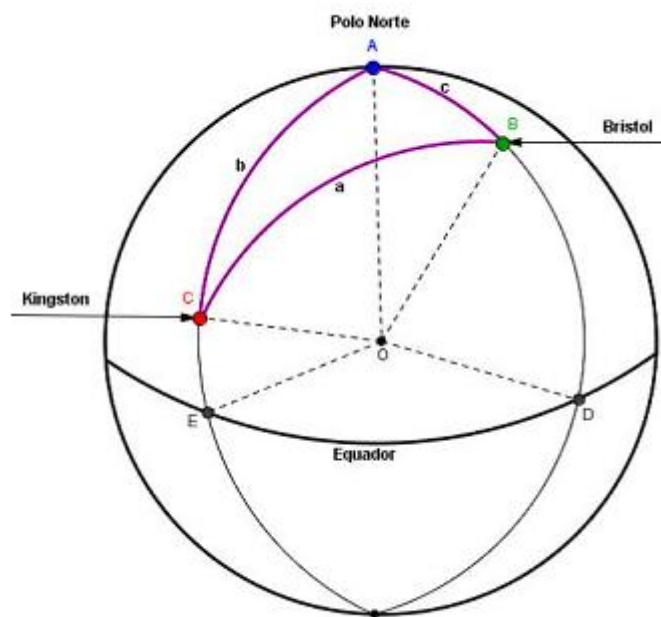
$$\cos(b) = \cos(a) \cos(c) + \text{sen}(a)\text{sen}(c)\cos(B)$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)\cos(C)$$

3.4.4.8 Calcular a distância entre duas cidades

Para exemplificar, iremos adaptar uma situação de Hogben (1970, *apud* Zanella, 2013, p.93). Considere a cidade de Kingston, Jamaica ($18^\circ 5' \text{ N} / 76^\circ 58' \text{ O}$) e a cidade de Bristol, Inglaterra ($51^\circ 26' \text{ N} / 2^\circ 35' \text{ O}$). Vamos determinar a distância entre estas cidades. Veja Figura 22.

Figura 22 – Representação da distância entre Kingston e Bristol



Fonte: Zanella, 2013

Considere os pontos B e C como as cidades de Bristol e Kingston, respectivamente. Tome o ponto A como um vértice do triângulo esférico de modo que coincida com o pólo Norte. Esta escolha é determinada de acordo com as coordenadas geográficas dos pontos B e C . Isto nos permite determinar os valores de b e c e do ângulo A .

Sendo os arcos AD e BD possuem, respectivamente, 90° e $51^\circ 26' \text{ N}$ então

$$c = 90^\circ - 51^\circ 26' = 38^\circ 34'$$

De modo análogo, obtemos que $b = 71^\circ 55'$. Note que o ângulo A está associado ao arco DE . Assim, para determiná-lo, basta fazer a diferença entre as longitudes, ou seja, $A = -2^\circ 35' - (-76^\circ 58') = 74^\circ 23'$.

Em seguida, basta aplicar os dados na fórmula fundamental. Disto, segue que

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \text{sen}(b)\text{sen}(c)\cos(A)$$

$$\cos(a) = \cos(71^\circ55') \cos(38^\circ34') + \operatorname{sen}(71^\circ55') \operatorname{sen}(38^\circ34') \cos(74^\circ23')$$

Para calcular $\cos(71^\circ55')$ e $\operatorname{sen}(71^\circ55')$ utilizaremos as Séries de Taylor. Assim, para todo x radianos, temos que

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \\ \operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots\end{aligned}$$

Primeiro, vamos converter $71^\circ55'$ em radianos. Aplicando regra de três, obtemos que $71^\circ55' \cong 71,91^\circ$. Considerando $\pi = 3,1415$, temos que $71,91^\circ \cong 1,255 \text{ rad}$. Disto segue que $\cos(71^\circ55') \cong \cos(1,255)$.

Aplicando a série de Taylor para cosseno e seno, segue que

$$\cos(1,255) \cong 1 - \frac{(1,255)^2}{2!} + \frac{(1,255)^4}{4!} - \frac{(1,255)^6}{6!} + \frac{(1,255)^8}{8!} \cong 0,3074$$

$$\operatorname{sen}(1,255) \cong 1,255 - \frac{(1,255)^3}{3!} + \frac{(1,255)^5}{5!} - \frac{(1,255)^7}{7!} + \frac{(1,255)^9}{9!} \cong 0,9515$$

Ambos positivos uma vez que tal ângulo está no primeiro quadrante. Analogamente, obtemos que

$$\cos(38^\circ34') \cong \cos(0,6729) \cong 0,7757$$

$$\operatorname{sen}(38^\circ34') \cong \operatorname{sen}(0,6729) \cong 0,6311$$

$$\cos(74^\circ23') \cong \cos(1,2981) \cong 0,1638$$

Substituindo, segue que

$$\cos(a) = (0,3074)(0,7757) + (0,9515)(0,6311)(0,1638)$$

$$\cos(a) = 0,336810$$

Sugerimos utilizar a função =ACOS no Excel para determinar o valor de a . Daí, $a = 1,227404318 \text{ rad}$. Logo, $a \cong 70,3^\circ$.

Como 1° de circunferência máxima corresponde na superfície terrestre a aproximadamente 111,19 km, temos que a distância entre Kingston e Bristol é aproximadamente $70,3^\circ \times 111,19 \text{ km} \cong 7.810 \text{ km}$

A verdadeira distância entre Bristol e Kingston é de 7366 km. Para se aproximar mais deste valor, basta aumentar os termos da Séries de Taylor. Agora que sabemos como determinar essa distância a mão, uma opção mais prática é utilizar alguma ferramenta, sugerimos o *Excel*, por ser prático e acessível.

Novamente, considerando $71^\circ 55' \cong 71,91^\circ$, $38^\circ 34' \cong 38,56^\circ$, e $74^\circ 23' \cong 74,38^\circ$. Com o auxílio do *Excel*, podemos determinar a medida de tais ângulos em radianos como também o valor de seu seno e cosseno, conforme a Tabela 7:

Tabela 7 – Valores dos senos e cossenos dos ângulos no Excel

	A	B	C	D
1	Graus	Radianos ▾	cos(x) ▾	sen(x) ▾
2	71,91	1,255066265	0,310510529	0,95056994
3	38,56	0,67299896	0,781955832	0,623333841
4	74,38	1,298175898	0,269256011	0,963068637

Fonte: Autora, 2021

A partir disso, no *Excel*, podemos calcular $\cos(a)$.

C2 * C3	D2*D3*C4
0,242805519	0,159540221

Observe que **C2 * C3** equivale a $\cos(71^\circ 55') \cos(38^\circ 34')$ e que **D2 * D3 * C4** equivale a $\sin(71^\circ 55') \sin(38^\circ 34') \cos(74^\circ 23')$.

Logo, $\cos(a) = \mathbf{C2 * C3} + \mathbf{D2 * D3 * C4} = 0,40234574$.

Portanto, $a = 1,156718635 \text{ rad}$, isto é, $a = 66,27^\circ$. Estes valores são determinados no *Excel* utilizando as funções " $= \text{ACOS}(0,40234574)$ " e a " $= \text{GRAUS}(1,156718635)$ ". Desse modo, temos que a distância entre Kingston e Bristol é aproximadamente $66,27^\circ \times 111,19 \text{ km} \cong 7.368,56 \text{ km}$. Um valor bem mais aproximado.

3.4.4.9 Fusos Horários

Os Fusos Horários são cada um dos 24 fusos traçados por uma linha imaginária de um polo ao outro tendo por objetivo padronizar o cálculo de tempo em todo o planeta Terra. Em razão de questões geopolíticas, cada nação pode adotar um determinado horário como referência, o que pode levar a distorções.

Antes disto, os relógios eram acertados, na Idade Média, pelo horário solar aparente ao meio dia ou em cada cidade pela qual se passava. Ao instituir um tempo solar médio, os fusos horários corrigiram isso

3.4.4.9.1 Como calcular os fusos horários?

Este método se baseia no movimento de rotação da Terra, em sentido anti-horário para o Leste. Por isso, adiantamos as horas dos fusos a Leste, e atrasamos as horas à Oeste do Tempo Médio de Greenwich. Deste modo, para determinar os fusos horários de uma localidade, temos de conhecer suas coordenadas geográficas.

A Terra demora aproximadamente 23 horas, 56 minutos e 4 segundos para completar a rotação. A proporção é de 1h para cada 15° de rotação. De tal modo, em 24h, o planeta terá completado o giro 360°.

$$\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$$

A cada 15° de longitude temos um fuso equivalente a uma hora, sendo o Meridiano de Greenwich o marco zero longitudinal da Terra. A partir dele podemos contar as linhas verticais imaginárias (de uma hora cada), que aumenta, no sentido Oeste-Leste, ou diminui no sentido oposto.

As latitudes determinam a largura média dos fusos. Por esse motivo, na linha do Equador o fuso terá 1667 km, enquanto nos trópicos de Câncer e Capricórnio, a largura será de 1529 km. Ela continua diminuindo, até chegar aos polos, onde a largura média dos fusos será de 289,4 km.

3.4.4.9.2. Fusos horários no Brasil

Localizado no hemisfério ocidental, o Brasil possui **4 fusos horários** e, em relação ao Meridiano de Greenwich (GMT), possui o seu horário atrasado variando de duas a cinco horas a menos:

- **Fuso 1** (-2GMT): possui duas horas a menos em relação ao Meridiano de Greenwich.
- **Fuso 2** (-3GMT): possui tem três horas a menos em relação ao Meridiano de Greenwich, corresponde ao fuso da hora oficial do Brasil (horário de Brasília-DF).
- **Fuso 3** (-4GMT): possui quatro horas a menos em relação ao Meridiano de Greenwich.
- **Fuso 4** (-5GMT): possui cinco horas a menos em relação ao Meridiano de Greenwich.

3.4.4.10 A cartografia dos livros e games

Concepção: O projeto pretende explorar as aplicações da cartografia nos livros e games.

Justificativa: Este projeto tem como objetivo apresentar cartografia de um modo atrativo e desenvolver a criatividade do educando com produção de mapas fictícios.

Objetivos: Incentivar o protagonismo juvenil e incentivar a processos criativos

Metodologias:

1º Momento: O professor deve apresentar à turma diversos mapas vistos em jogos e livros, mas também expor mapas reais. Sugere-se que leia alguma parte do livro que necessite da visualização do mapa.

2º Momento: Questione-os: qual a diferença entre os dois mapas? A intenção é que eles notem que o mapa dos jogos e livros representam um lugar que não existe de fato.

3º Momento: O desafio é que cada educando desenvolva dois tipos de mapa, um real e um fictício. No fictício, peça para que eles descrevam se o utilizaria em um livro ou jogos.

4º Momento: Exposição e socialização dos mapas.

Avaliação: A avaliação ocorrerá diante do desenvolvimento dos processos criativos, exposição e apresentação dos estudantes.

3.5 Projeções Cartográficas

Define-se como projeções cartográficas as representações da Terra em uma superfície plana. Veja a seguir a como se dará a organização didática deste tema.

- 1) **Tema:** Projeções Cartográficas
- 2) **Conteúdos/objetos do conhecimento:** Projeções Cartográficas: Azimutal, Cônica, Cilíndrica, Policônica, Conforme, Equivalente, Equidistante e Afilática.
- 3) **Habilidades:** EM13MAT301, EM13MAT405 EM13CHS101, EM13CHS102, EM13CHS103, EM13CHS106
- 4) **Tempo de Execução:** 6 aulas
- 5) **Material Necessário:** Computador, projetor, mapas, globo terrestre, GeoGebra, quadro, lápis, borracha, material impresso, pincel e/ou giz.
- 6) **Descrição das aulas:**

AULAS: 32 a 34 (projeções cônicas, cilíndricas e azimutal)

Introdução: O professor deve problematizar a dificuldade de planificar uma esfera e, conseqüentemente, a Terra.

Desenvolvimento: O docente deve definir o a classificação de projeção quanto a superfície de projeção, determinando formalmente o que vem a ser uma projeção azimutal, cilíndrica e cônica, ilustrando-as por meio de vídeos. Uma sugestão é utilizar GeoGebra, realizando o passo a passo junto com alunos ou trazendo seu modelo

pronto. O professor deve explorar o livro “Projeções Cartográficas” traduzido por Mathias¹⁶(2020), projetando-o em sala.

Conclusão: Os discentes devem compreender a importância e versatilidade da cartografia. As atividades propostas indicamos ser realizada individualmente. O professor deve orientá-los e estimulá-los a produzir justificativas escritas e orais mediante as suas observações. No fim da aula será proposto exercícios para que eles pratiquem os conceitos vistos.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula.

AULAS: 35 a 37 (projeção policônica, conforme, equivalente, equidistante e afilática)

Introdução: O professor deve explicar que as projeções também podem ser classificadas quanto as suas propriedades.

Desenvolvimento: O docente deve classificá-las tendo como referência as propriedades da projeção, determinando formalmente o que vem a ser uma projeção conforme, equivalente, equidistante e afilática, produzindo um quadro comparativos, enfatizando que cada uma se adequa melhor para determinada situação. Em seguida, explicar a definição e as propriedades da projeção policônica, o método oficial de mapeamento do Brasil em escala geográfica.

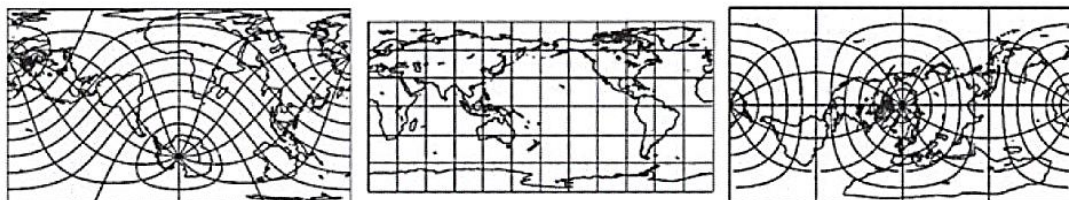
Conclusão: Os discentes devem compreender a importância e as características das projeções. Os exercícios propostos indicamos seja realizado individualmente. O professor deve orientá-los e estimulá-los a produzir justificativas escritas e/ou orais mediante as suas observações.

Avaliação: A avaliação se dará através da interação no decorrer da aula

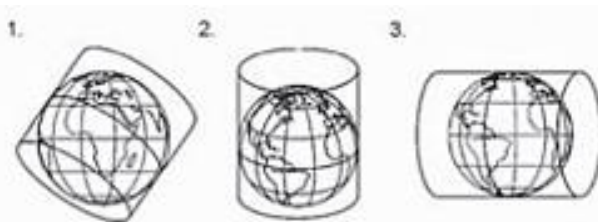
Exercícios Propostos

¹⁶ Livro publicado no site no GeoGebra disponível em <https://www.geogebra.org/m/btfr5zww>

1. (ENEM 2017) Projeção cartográfica é uma transformação que faz corresponder, a cada ponto da superfície terrestre, um ponto no plano. As relações do plano de projeção à superfície projetada mostradas nas figuras são identificadas, respectivamente, em:

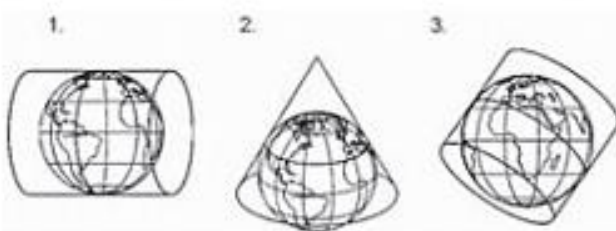


a)

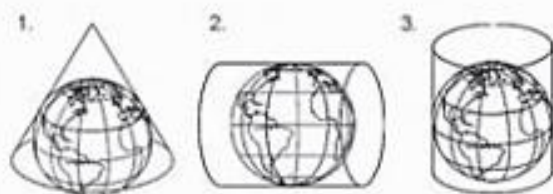


e projeções cartográficas. Lisboa: Lidol, 2005.

b)



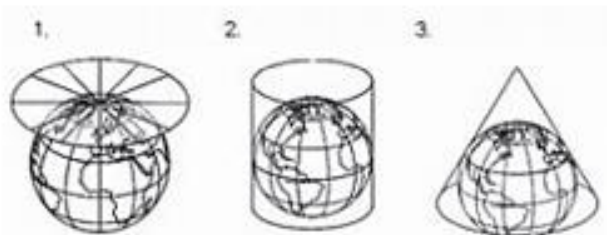
c)



d)



e)

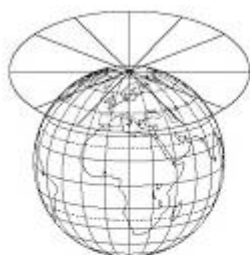


2. (ENEM 2016) A ONU faz referência a uma projeção cartográfica em seu logotipo. A figura que ilustra o modelo dessa projeção é:

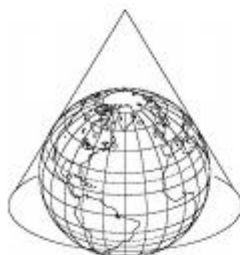


Disponível em: www.unhcr.org. Acesso em: 9 ago. 2013.

a)



b)



c)



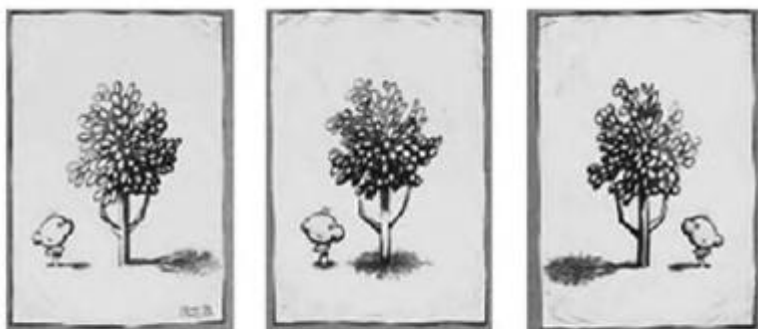
d)



e)



3. (ENEM 2010)



Ciência Hoje. v. 5, nº 27, dez. 1986. Encarte

Os quadrinhos mostram, por meio da projeção da sombra da árvore e do menino, a sequência de períodos do dia: matutino, meio-dia e vespertino, que é determinada:

- a) pela posição vertical da árvore e do menino.
- b) pela posição do menino em relação à árvore.
- c) pelo movimento aparente do Sol em torno da Terra.
- d) pelo fuso horário específico de cada ponto da superfície da Terra.
- e) pela estação do ano, sendo que no inverno os dias são mais curtos que no verão.

3.5.1 Material de estudo: projeções cartográficas

Define-se como projeções cartográficas as representações da Terra em uma superfície plana. Elas são classificadas quanto à superfície de projeção (cônica, cilíndrica, plana) e quanto às suas propriedades (conforme, equidistante, equivalente).

As classificações mais comuns e mais conhecidas são as que levam em consideração a superfície de projeção e as propriedades. Vale enfatizar que não existe uma projeção cartográfica livre de deformações, em função da impossibilidade de se representar uma superfície esférica em uma superfície plana sem que ocorram extensões e/ou contrações (IBGE, 1999 p. 29).

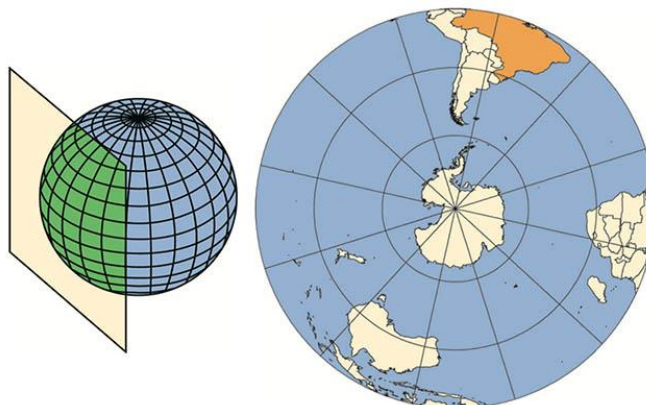
3.5.1.1 Classificação quanto à superfície de projeção

Podem ser projeções planas, cônicas ou cilíndricas, quando forem utilizadas as superfícies de um plano, cone ou cilindro como base para planificar a esfera terrestre. Os exemplos abaixo demonstram a transformação da superfície terrestre em uma superfície plana com auxílio das superfícies de projeção.

3.5.1.1.1 Projeção azimutal ou plana

Nesta projeção, conforme a Figura 23, a superfície terrestre é projetada sobre um plano tocante. O ponto tocante ao plano normalmente representa um dos polos. Os paralelos e meridianos são projetados formando círculos concêntricos, podendo ser de três tipos: polar, equatorial e oblíqua. Geralmente, é utilizada para representar áreas menores.

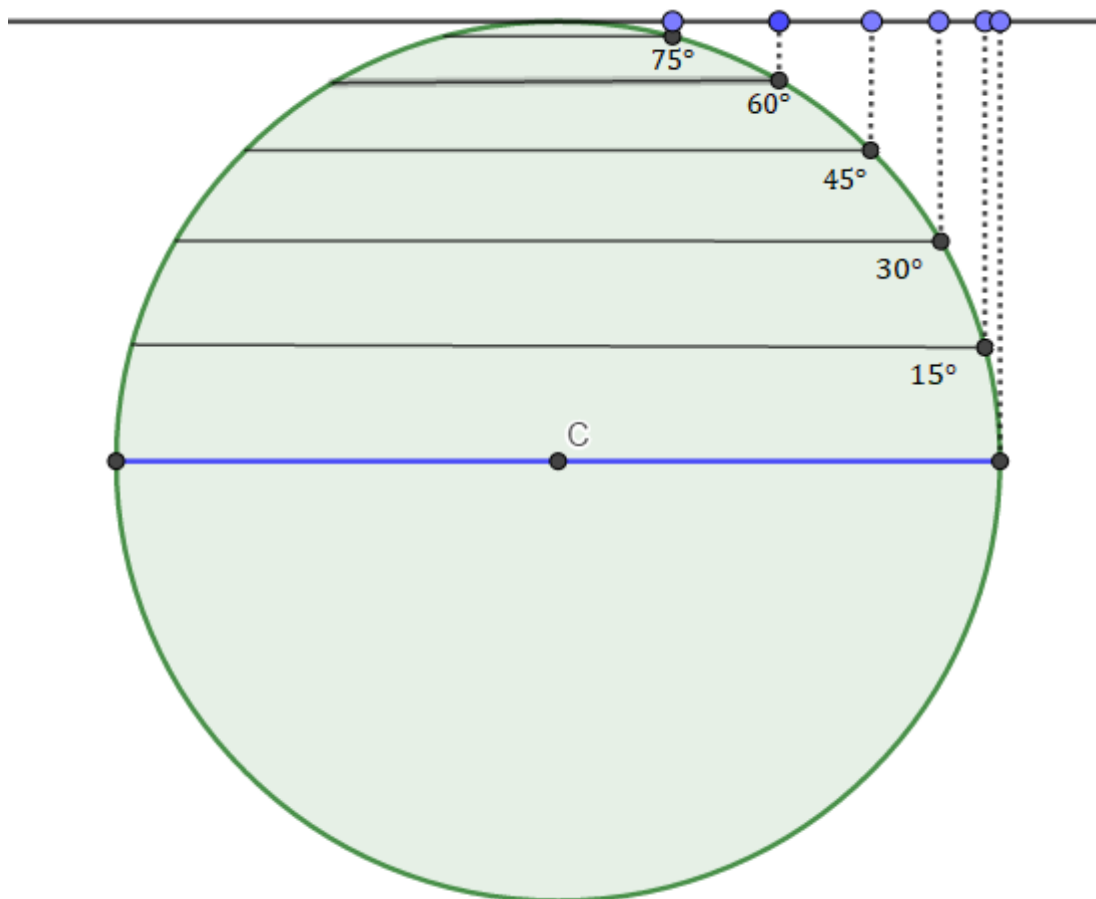
Figura 23 – Projeção Plana ou Azimutal



Fonte: IBGE, 1999

No software *Geogebra* podemos representar como se dá uma projeção azimutal ortográfica. Conforme Figura 24, o círculo representa a Terra e a Linha o plano tocante.

Figura 24 – Representação 2D da Projeção Azimutal

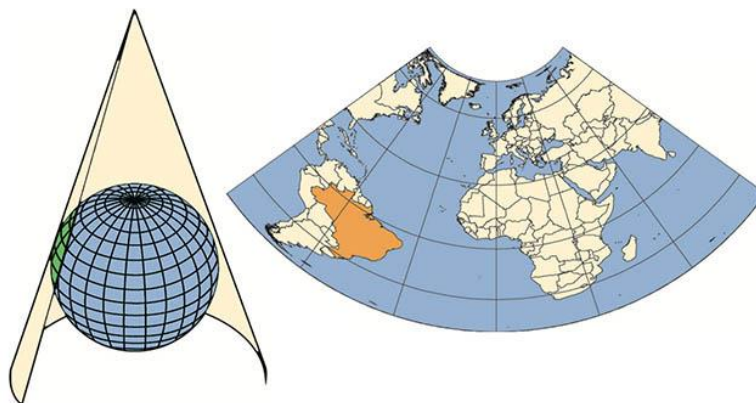


Fonte: Autora, 2021

3.5.1.1.2 Projeção cônica

Nesta projeção, conforme a Figura 25, a superfície terrestre é projetada sobre um cone tocante. Os meridianos convergem para os polos e os paralelos formam arcos concêntricos. Assim, as deformações aumentam à medida em que os paralelos se afastam do cone tocante. Normalmente, é utilizada para representar regiões continentais.

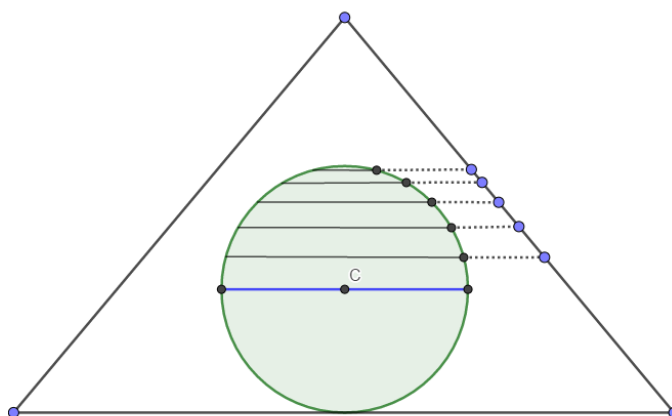
Figura 25 – Projeção Cônica representa regiões continentais



Fonte: IBGE, 1999

No software *Geogebra* podemos representar como se dá uma projeção cônica ortográfica. Veja Figura 26.

Figura 26 – Representação 2D da Projeção Cônica

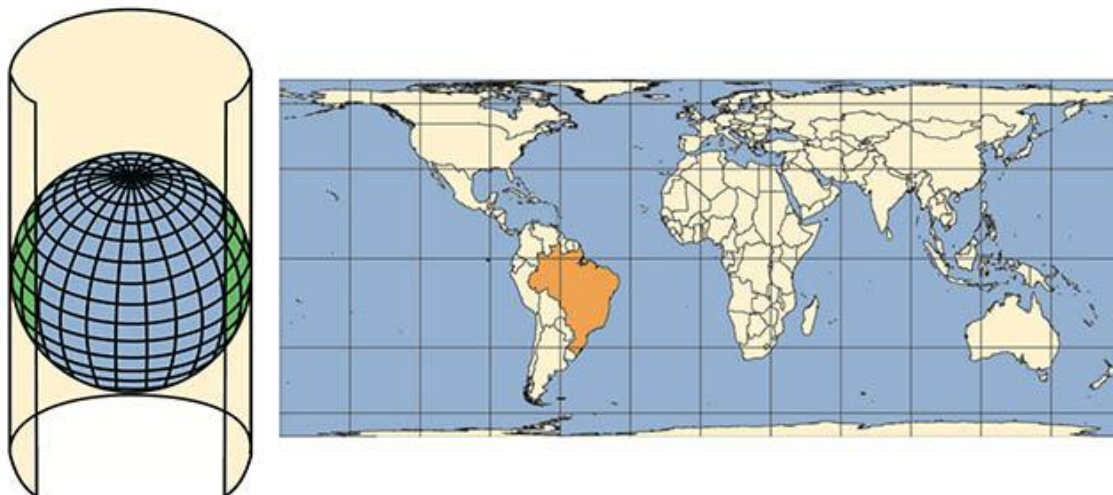


Fonte: Autora, 2021

3.5.1.1.3 Projeção cilíndrica

Nesta projeção, conforme Figura 27, a superfície terrestre é projetada sobre um cilindro tocante. As regiões polares nessa projeção são representadas com exagero. Geralmente, é utilizada para representar o globo como um todo, como o mapa-múndi.

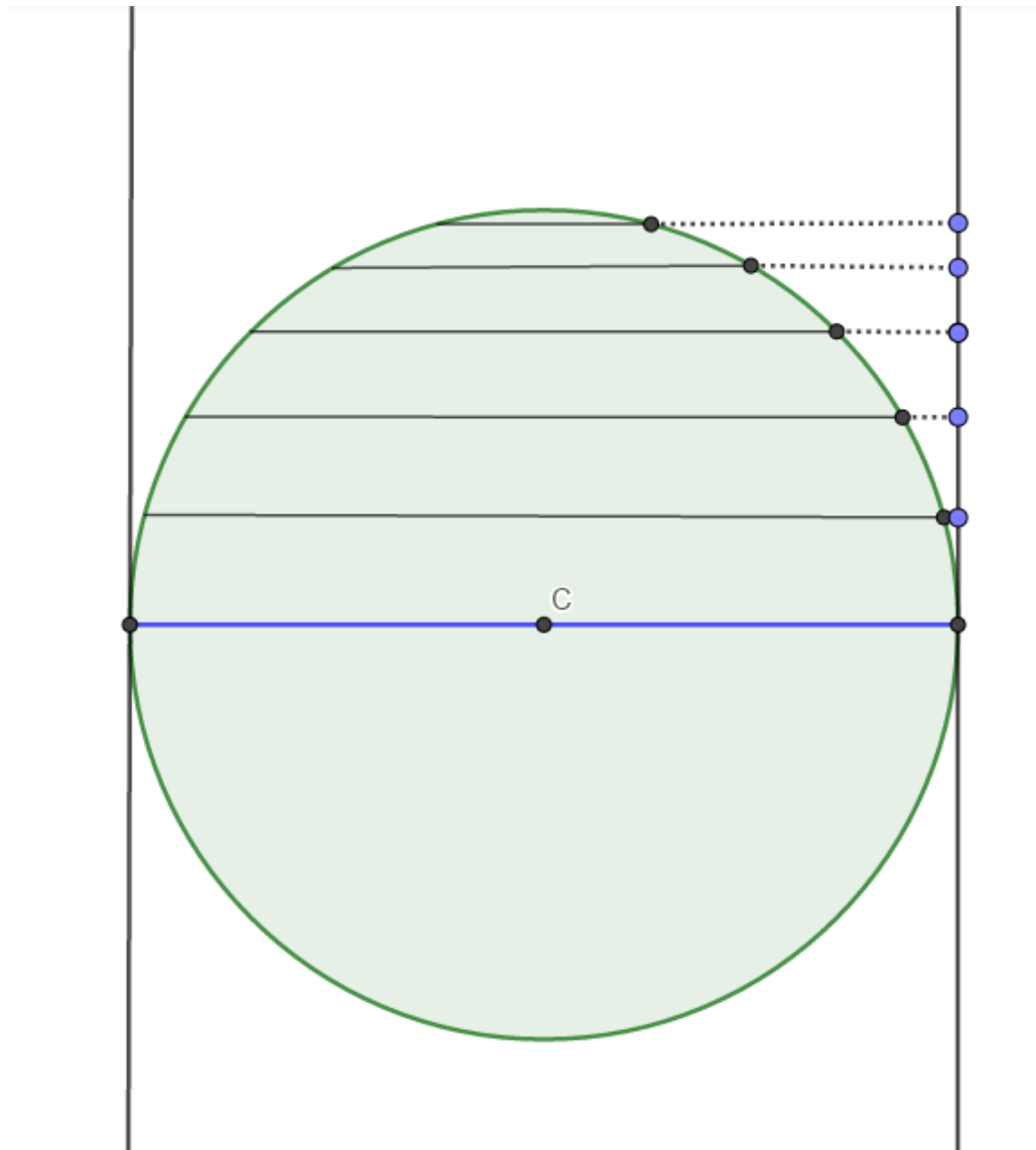
Figura 27 – Projeção Cilíndrica e Projeção Cilíndrica de Peters



Fonte: IBGE, 1999

No software *Geogebra* podemos representar como se dá uma projeção cilíndrica ortográfica. Veja Figura 28.

Figura 28 – Representação 2D da Projeção Cilíndrica



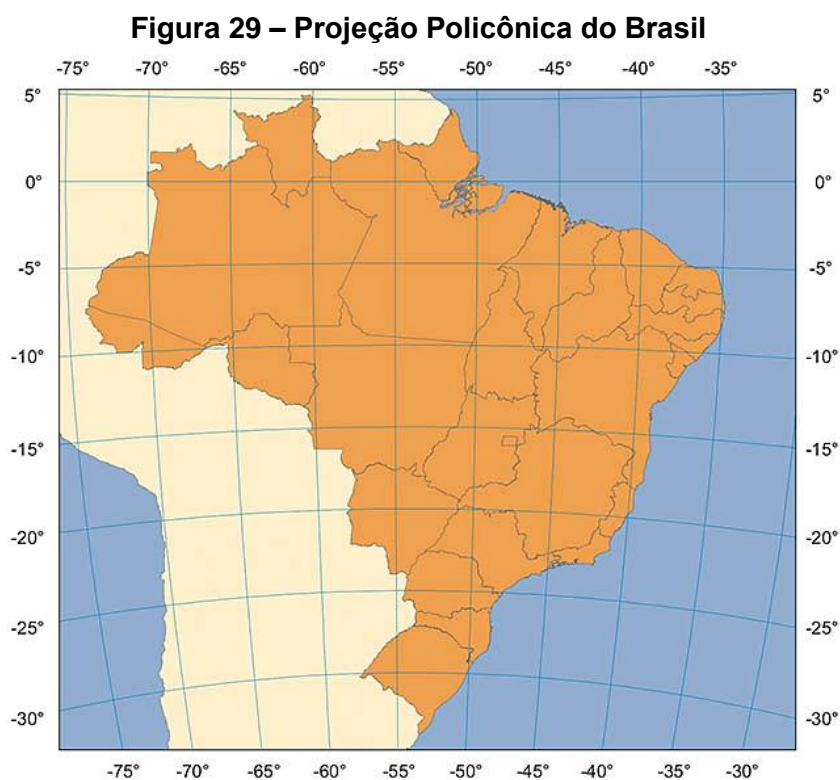
Fonte: Autora, 2021

3.5.1.2 Classificação quanto as suas propriedades

1. **Projeção conforme:** são as projeções em que há o cruzamento de paralelos e meridianos em ângulos retos. Nesse tipo de projeção, os ângulos são conservados e as áreas apresentam deformações.

2. **Projeção equivalente:** são as projeções que apresentam bastante deformidade em torno de um ponto devido à variação da escala. Nesse tipo de projeção, há conservação das áreas e distorção dos ângulos.
3. **Projeção equidistante:** são as projeções que não apresentam deformidades lineares, ou seja, as distâncias estarão condizentes com a realidade apenas em uma direção. Nesse tipo de projeção, preserva as distâncias, mas deforma as áreas e os ângulos.
4. **Projeção afilática:** são as projeções que não preservam forma, ângulo, distância ou área, ou seja, não há conservação das propriedades. Porém, nesse tipo de projeção, há minimização das deformações em conjunto.
- 5.

Segundo o IBGE (1999, p.39), “o mapeamento oficial do País, em escala geográfica, é elaborado na projeção policônica que utiliza vários cones como superfície de projeção”. Além de ter como característica a diminuição da deformação da convergência dos meridianos, mantendo uma melhor representação da Região Sul do País. O mapeamento na escala de 1:1 000 000 é realizado na projeção cônica conforme de Lambert, seguindo o padrão do mapeamento mundial, definido pela ONU. Veja Figura 29.



Fonte: IBGE, 1999

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que a eletiva sugerida provoque o educando, a debater assuntos que geralmente não são investigados de forma minuciosa e os inspirar a se aprofundar em carreiras como: matemáticos, geógrafos, cartógrafos, arquitetos, desenvolvedor de softwares entre outros.

Acredita-se que os conteúdos de Geometria Esférica e Cartografia possam despertar no docente o interesse em explorar as referências, e assim, com este direcionamento, descobrir novos conhecimentos como as aplicações na astronomia, a confecção de teodolito, a matemática da cartografia entre outros.

Os objetivos deste trabalho foram: dar apoio aos professores e a escola nessa nova estruturação do novo ensino médio, propondo uma eletiva; especificamente, ressaltar o cuidado ao se elaborar um itinerário formativo; e direcionar o professor em conhecimentos além de sua área.

Espera-se que a eletiva proposta possa ser copiada e/ou alterada diante as necessidades e avaliações dos professores, das escolas e dos estudantes e que também sirva de exemplo para desenvolver novas eletivas que abordam outros temas. Enfatizamos que esta não é uma proposta finalizada e, com isso, deve estar sempre sob a avaliação da escola e comunidade escolar.

Tal proposta se torna interessante por permitir ao educando aprender mais sobre o planeta no qual habitamos: estudar suas características, suas propriedades e sua forma, desenvolvendo experimentos e contribuindo para que eles desenvolvam suas próprias conclusões.

Em paralelo, as pesquisas desenvolvidas permitiram à autora da dissertação ampliar seus conhecimentos matemáticos, descobrir novas formas de contextualização e se aprofundar no sistema de ensino brasileiro vigente, o que irá vir refletir em sua prática docente.

REFERÊNCIAS

_____, **Coletânea de Materiais**, CONSED, 2020. Disponível em <<http://www.consed.org.br/consed/gt-ensino-medio/documentos-do-ensino-medio>> Acesso em: 22 Abr. 2021

_____, Guia de Implementação do Novo Ensino Médio. **Novo Ensino Médio**, 2018. Disponível em:<<http://novoensinomedio.mec.gov.br/#!/guia>> Acesso em: 14 de Jan. 2021.

ABREU, Shyrlene Martins de; OTTONI, Jose Eloy. **Geometria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à Astronomia de posição**. 2015. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João del -Rei, Alto Paraopeba, MG, 2015

ARANHA, Maria Lúcia de Arruda. **História da Educação e da Pedagogia**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 1996. p. 223 – 224

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias Faces da Matemática e a Cartografia**. 2ª edição. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Aplicação do Decreto n. 5.154/2004 na Educação Profissional Técnica de nível médio e no Ensino Médio. Parecer n. 39, de 8 de dezembro de 2004. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 26 de Jul. de 2004, seção 1, p.18.

BRASIL. Conselho Nacional De Educação. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Resolução n. 3, de 21 de novembro de 2018. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 22 Nov. 2018. Disponível em:<https://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622> Acesso em: 13 Jul. 2021.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Define Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio. Resolução n. 6, de 20 de setembro de 2012. **Diário Oficial da União**, Brasília, 21 de Set. de 2012, seção 1, p. 22.

BRASIL. Conselho Nacional da Educação. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação). Resolução n. 2, de 20 de dezembro de 2019. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 15 de Abr. de 2020, Seção 1, pp. 46-49

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Estabelece a sistemática para a realização do Exame Nacional do Ensino Médio no exercício de 2009. Portaria n. 109, de 27 de maio de 2009. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF. 28 de Maio de 2009, seção 1, p.56.

BRASIL. Lei n.11.494, de 20 de junho 2007. Regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação - FUNDEB. Brasília, 2007. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2007/lei/l11494.htm> Acesso em: 04 Ago. 2021.

BRASIL. Lei n.13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 26 de Jun. 2014, edição extra.

BRASIL. Lei n. 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as Leis n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei n. 5.452, de 1 de maio de 1943, e o Decreto-Lei n. 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei n. 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 17 de Fev. de 2017, seção 1, p. 1.

BRASIL. Ministério da Educação. Estabelece os referenciais para elaboração dos itinerários formativos conforme preveem as Diretrizes Nacionais do Ensino Médio Portaria n. 1.432, de 28 de dezembro de 2018. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 5 Abr. 2019. Disponível em: <https://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/70268199> Acesso em: 21 Abr. 2021.

BRASIL. Ministério Da Educação. Institui o Programa Institucional de Fomento e Indução da Inovação da Formação Inicial Continuada de Professores e Diretores

Escolares Portaria n. 412, de 17 de junho de 2021, **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 18 Jun. 2021, edição 113, seção 1, p. 80.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituir, no âmbito do Ministério da Educação, o Programa Ensino Médio Inovador, com vistas a apoiar e fortalecer o desenvolvimento de propostas curriculares inovadoras nas escolas do ensino médio não profissional. Portaria n. 971, de 9 de outubro de 2009. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 13 de Out. de 2009, seção 1, p. 52.

COMISSÃO ESPECIAL DESTINADA A PROMOVER ESTUDOS E PROPOSIÇÕES PARA A REFORMULAÇÃO DO ENSINO MÉDIO. Altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para instituir a jornada em tempo integral no ensino médio, dispor sobre a organização dos currículos do ensino médio em áreas do conhecimento e dá outras providências. Projeto de Lei 6840/2013. **Câmara dos Deputados**: 27 de nov. 2013. Disponível em: <<https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/fichade-tramitacao?idProposicao=602570>> Acesso em: 04 Ago. 2021.

CRUVINEL, Cristina Lúcia Calicchio Gonçalves. **Políticas de educação obrigatória: o ensino fundamental com 9 anos de duração**. 2009. 178 f. Dissertação (Mestrado em Políticas de Educação e Sistemas Educativos) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 2009.

CRUZ, Carla Madureira. Nem plana, nem redonda: definir a forma exata da terra é um desafio. **Ciência Hoje**. 12 de julho de 2018. Disponível em:< <https://cienciahoje.org.br/artigo/nem-plana-nem-redonda-definir-a-forma-exata-da-terra-e-um-desafio/>> Acesso em: 03 Fev. 2021.

FIGUEIREDO. Karoline. Capitais do Brasil. **InfoEscola**, 2020. Disponível em:< <https://www.infoescola.com/geografia/capitais-do-brasil/> > Acesso em: 16 de Jan. 2021.

FONSECA, Eugênio Pacceli. Escala e Quadriculado. **Cartografia Escolar**, 2011. Disponível em: <<https://cartografiaescolar.wordpress.com/trabalhando-eskala/> > Acesso em: 17 de Fev. 2021.

FRENZ, Erick. 7 ways to prove the Earth is round. **Cell MENTOR**, 30 de mar. de 2018. Disponível em: <<http://crosstalk.cell.com/blog/seven-ways-to-prove-earth-is-round>> Acesso em: 28 Dez. 2020.

GONTIJO, José Romero Machado. **Reforma do Ensino Médio: aspectos pedagógicos, formativos, legais e perspectivas**. 2018. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Uberaba, Uberaba, MG, 2018.

IBGE. **Noções Básicas de Cartografia**. Rio de Janeiro, 1999B.
MATHIAS, Carmen. Projeções Cartográficas. **Geogebra**, 2020. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/btfr5zww>> Acesso em: 09 Mar. 2021

MELRO, Sandra. Os elementos geométricos da Terra. **Geo Aventura**, 2010. Disponível em: <<http://geosandramelro.blogspot.com/2010/11/oe-elementos-geometricos-da-terra.html>> Acesso em: 06 Fev. 2021.

PNAD Contínua 2017: número de jovens que não estudam nem trabalham ou se qualificam cresce 5,9% em um ano. **AGÊNCIA IBGE NOTÍCIAS**, 2018. Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/21253-pnad-continua-2017-numero-de-jovens-que-nao-estudam-nem-trabalham-ou-se-qualificam-cresce-5-9-em-um-ano>> Acesso em: 09 de Mar. 2021

REIS, Ana Queli Mafalda. **A contextualização da matemática como princípio educativo no desenvolvimento do pensamento teórico**: exploração de contextos no movimento do pensamento em ascensão do abstrato ao concreto. 2017. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, RS, 2017.

ROCHA, Maria Lúcia Pessoa Chaves. **Matemática e Cartografia**: Como a cartografia pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem da matemática? 2004. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, PA, 2004.

ROSENBERG, Howard L. "Exorcizing the Devil's Triangle". Sealift no. 6 (Jun. 1974): 11-15. **Naval History and Heritage Command**. 2010. Disponível em:<

<https://www.history.navy.mil/research/library/online-reading-room/title-list-alphabetically/e/exorcizing-the-devils-triangle.html>> Acesso em: 12 de Jul. 2021.

PETRIN, Natália. Geometria Esférica. **Estudo Prático**. 2015. Disponível em:<<https://www.estudopratico.com.br/geometria-esferica-definicao-caracteristicas-desenvolvimento-e-aplicacao/>> Acesso em: 05 Mar. 2021.

Pizetta, Kênia Fiório. **Adaptação de métodos e instrumentos da topografia e da cartografia no ensino da matemática**. 2015. 120 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, RJ, 2015.

RINCÓN, Maria Luciana. 5 lugares tão misteriosos quanto o triângulo das bermudas. **MEGA CURIOSO**, 2019. Disponível em<<https://www.megacurioso.com.br/misterios/42499-5-lugares-tao-misteriosos-quanto-o-triangulo-das-bermudas.htm>> Acesso em: 26 de Jan. 2021.

SALLES, Luana. Conheça as cidades antípodas, situadas em lados opostos no mundo. **Super Interessante**, 2017. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/comportamento/conheca-as-cidades-antipodas-situadas-em-lados-opostos-no-mundo/>> Acesso em: 10 de Jan. 2021.

SCHWARTZMAN, Simon. O ensino médio no Brasil é formal, acadêmico, voltado para o vestibular. Não atende jovens com outros interesses. **Ensino Superior Unicamp**, 07 jun. 2010. Entrevista cedida a Mônica Teixeira. Disponível em: <<https://www.revistaensinosuperior.gr.unicamp.br/entrevistas/simon-schwartzman-o-ensino-medio-no-brasil-e-formal-academico-voltado-para-o-vestibular-nao-atende-jovens-com-outros-interesses> >Acesso em: 25 de Mai. 2021.

TEXEIRA, Roseane de Fátima Batista; LEÃO, Gabriel Mathias Carneiro; DOMINGUES, Hanny Paola; ROLIN, Evandro Cherubini. Concepções de itinerários formativos a partir da resolução CNE/CEB nº 06/2012 e da Lei nº 13.415/2017. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 14, 2019, Curitiba. **Anais Eletrônicos...**, Curitiba, PR: Editora Universitária Champagnat, 2019, p. 16027-16039.

ZANELLA. Idelmar André. **Geometria Esférica: Uma Proposta de Atividades com Aplicações**. 2013. 131 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2013.