UNIVERSIDADE FEDERAL DE JATAÍ (UFJ)
UNIDADE ACADÊMICA DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Neila Neves Coutinho

Musicalizando os racionais

Jataí-GO
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
UNIDADE ACADÊMICA ESPECIAL DE CIÊNCIAS EXATAS

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFJ

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Jataí (UFJ) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFJ), regulamentada pela Resolução CEPEC no 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data. O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFJ é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[x] Dissertação [ ] Tese
2. Nome completo do autor:
NEILA NEVES COUTINHO
3. Título do trabalho:
MUSICALIZANDO OS RACIONAIS
4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO1

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse

período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;

- Submissão de artigo em revista científica;

- Publicação como capítulo de livro;

- Publicação da dissertação/tese em livro.

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica	Documento assinado eletronicamente por **Luciana Aparecida Elias**, **Professor do Magistério Superior**, em 13/12/2021, às 17:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

---

sei! assinatura eletrônica	Documento assinado eletronicamente por **NEILA NEVES COUTINHO**, **Discente**, em 14/12/2021, às 09:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

	A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2569911** e o código CRC **0BD7675B**.

Neila Neves Coutinho

Musicalizando os racionais

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Unidade Acadêmica de Ciências Exatas e Tecnológicas, da Universidade Federal de Jataí (UFJ), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Matemática do Ensino Básico
Linha de pesquisa: Matemática aplicada à teoria musical.
Orientadora: Professora Doutora Luciana Aparecida Elias.

Jataí-GO
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFJ.

Coutinho , Neila Neves
Musicalizando os Racionais / Neila Neves Coutinho . - 2021.
L, 50 f.: il.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana Aparecida Elias .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Jataí, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Jataí, PROFMAT- Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RJ), Jataí, 2021.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui siglas, mapas, fotografias, abreviaturas, símbolos, lista de figuras.

1. Números racionais. 2. Teoria musical. 3. Frações. 4. Interdisciplinar. I. Elias , Luciana Aparecida , orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO - REGIONAL JATAÍ

Ata de Defesa de Dissertação

Ata nº **23** da sessão de Defesa de Dissertação de NEILA NEVES COUTINHO, que confere o título de Mestra em **Matemática**, na área de concentração em **Matemática do Ensino Básico**.

No dia dois de setembro de 2021, a partir das **15h30 horas**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação integralmente por meio de tecnologias de comunicação à distância, intitulada **"**MUSICALIZANDO OS RACIONAIS**"**. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Luciana Aparecida Elias (UAE de Ciências Exatas / UFJ) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professora Doutora Ana Carolina Gondim Inocêncio (UAE de Ciências Exatas / UFJ), membro titular externo; Professor Doutor Wender José de Souza (UAE de Ciências Exatas / UFJ), membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalhoA Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, sendo a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Luciana Aparecida Elias, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, no dia dois de setembro de 2021.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

sei! assinatura eletrônica	Documento assinado eletronicamente por **Luciana Aparecida Elias**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/09/2021, às 10:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica	Documento assinado eletronicamente por **Ana Carolina Gondim Inocencio**, **Professor do Magistério Superior**, em 30/09/2021, às 10:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Folha de menção

Os Programas de Pós-Graduação stricto sensu, ora em funcionamento na Universidade Federal de Jataí (UFJ), em virtude de procedimentos técnicos relacionados à CAPES, continuam provisoriamente vinculados à Universidade Federal de Goiás (UFG), no entanto, todos os elementos pré-textuais do trabalho apresentado estão identificados como Universidade Federal de Jataí, em função da migração da BDTD ter ocorrido a partir de 16 de agosto de 2021, e pelo fato das pesquisas e produções estarem sendo realizadas na UFJ.

Dedico este trabalho a todos os professores e todas as professoras de ensino público que, mesmo em tempos tão difíceis de ataques à ciência, de crescimento do obscurantismo, aspectos superlativados em virtude da pandemia da COVID-19 e sem as devidas condições de trabalho, não desanimaram, nem desistiram da missão.)

Agradecimentos

Às minhas famílias, de berço e adquirida com o tempo, que acompanham minha jornada acadêmica, apoiam minhas escolhas, incentivam meu crescimento intelectual e dão o suporte que eu precisava. Em especia a Alice Coutinho Ribeiro, minha filha, que me acompanhou nesta jornada e que com tão pouca idade teve a paciência de dividir o colo, o tempo e a atenção da mãe com o computador e os livros.

Aos meus professores que, além de serem exemplos de humildade no mundo acadêmico, foram além da função de ensinar e me deram apoio e compreensão. Em especial, à Luciana Aparecida Elias e Flávio Gomoes de Moraes que tiveram a disposição para me tirar do bloqueio pelo qual passei.

Aos amigos que, perto ou longe, ouviram as reclamações de cansaço e demonstraram interesse em conhecer e até ler meu trabalho. Todo mundo deveria ter amigos como os meus.

À Fabrízia Rodrigues e Silva que como professora, patroa e amiga, ajudou muito na minha formação musical, sempre em desenvolvimento.

"Os matemáticos são uma espécie de franceses. Sempre que lhes dizemos algo, eles traduzem para a sua própria língua e imediatamente convertem em algo completamente diferente."(GOETHE apud GÓMEZ-GRANELL, 1997)

RESUMO

O presente trabalho fala sobre a possibilidade de estudo da matemática utilizando elementos musicais, como proposta de aplicação dos números racionais que possa ser usada em sala de aula. A relação entre matemática e música é percebida por vários teóricos e tem origem nos primórdios da construção da teoria musical moderna, que tem como primeiro desenvolvedor, o matemático Pitágoras. As partes principais de uma música, melodia, ritmo e harmonia, podem ser traduzidas para a linguagem matemática baseando-se na relação entre os números. Temos, assim, a música como o resultado de operações entre números racionais. Na abordagem matemática fizemos um estudo do conjunto dos números racionais, falando desde a sua história até as principais definições. Na parte musical apresentamos as figuras e explicações dos elementos mais importantes, utilizados para escrever a música em partituras. A intenção desta parte do trabalho foi iniciar o leitor no entendimento da teoria musical, fornecendo as definições necessárias para compreender os estudos propostos. Ao abordar a conexão entre os números racionais e a música, nosso intuito foi mostrar o quanto as frações, principalmente, estão presentes na estrutura musical, desde o surgimento da teoria musical ocidental.

Palavras-chave: *Números racionais. Interdisciplinar. Teoria musical. Frações.*

ABSTRACT

The present work brings the possibility of studing mathematics by using musical elements, as a proposal of a rational number application that can be used in the classroom. The relation between math and music is noticed for many theorics and has its origins in the begining of the modenr musical theory construction. We consider that this theory has as first developer the mathematics Pitágoras. The principal parts of a music, melody, rythm and harmony, can be translated to the mathematic lenguage based on the relation between the numbers. We have, so, the music as a result of operations between rational numbers. In the math aproach we did a study of the rational numbers set, talking since about its history up to the principal definitions. In musical part we showed the figures and explanations of the most important elements, used for write the music in sheets. The intention of this parte of the work was start the reader in the musical theory understanding, givinf the definitions required for comprehend the post stutdies. When approaching the connection beween the rational numbers and the music, out intent was to show how much the fractions, principally, are present on the musical structure, since the emergence of the ocidental musical theory.

Key-Words: *Rational Numbers. Interdisciplinary. Musical Theory. Fractions..*

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A história da relação entre música e números racionais se confunde com a história da teoria musical ocidental. Desde a criação dos primeiros elementos musicais é possível encontrar a influência que os números exerceram. Em seu artigo sobre Pitágoras e a escala musical, (SALLES, 2009) mostra as contas que geraram a formação da escala de tons que conhecemos: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. Os cálculos feitos por Pitágoras sofreram modificações durante o desenvolvimento desta teoria. No entanto, é inegável a importância dos números racionais na construção musical ocidental.

A justificativa e origem deste estudo estão na essência da prática do professor de matemática. A procura por novas formas de abordar os conteúdos matemático deve ser constante no trabalho do professor. É importante que os estudantes que estão sendo apresentados ao conhecimento matemático sejam também apresentados à abrangência que a matemática pode ter nos mais diversos assuntos. A experiência docente nos leva a entender que o aprofundamento matemático ganha significado quando é usado para estudo e desenvolvimento de outras áreas. A música surge assim, como mais uma das áreas em que a matemática pode ser aplicada

Em consultas a livros didáticos, como "Tudo é matemática"(DANTE, 2011), e "Projeto Araribá"(BARROSO, 2018), ambos usados no ensino fundamental, pudemos constatar que a forma de abordar as frações e o uso dos números racionais envolvem, na maioria das vezes, os mesmos tipos de aplicação. Isto acaba por criar a noção errônea de que as frações podem ser aplicadas em apenas uma quantidade muito restrita de campos de atividade.

A concepção de frações como registros de partes a serem extraídas de um todo ainda é a mais utilizada no ensino da matemática nas séries iniciais. Seus exemplos de utilização quase sempre se limitam a repartir alimentos, objetos, dinheiro e a medir ingredientes em receitas.

Como nossa produção pretende ser a interseção entre a matemática e a música tivemos inspiração em autores de ambas as áreas.

Para falar sobre a parte matemática, mais especificamente os números racionais, tivemos como fontes, (NIVEN, 1984), (FERREIRA, 2013) e (CARAÇA, 2000). A leitura de suas obras norteou as definições e propriedades que são apresentadas no Capítulo 1.

O capítulo citado foi destinado às principais definições matemáticas relacionadas com o tema. Contemplando desde a história dos números racionais até as representações atualmente usadas, incluindo uma explicação sobre a diferenciação de números racionais e irracionais.

A parte musical ficou a cargo do Capítulo 2, onde trouxemos todas as definições da teoria musical que serão necessárias para compreender a nossa aplicação. Os conceitos musicais que abordamos estão descritos na obra “Elementos de Teoria Musical”de (RIBEIRO, 1965).

No Capítulo 3 fizemos a interseção entre a música e a matemática. A abordagem da interseção entre os dois assuntos tem início na história da teoria musical, na criação das notas musicais. No capítulo ainda fizemos propostas de questões que podem ser utilizadas em sala de aula para trabalhar as frações utilizando figuras musicais, além de uma leitura de trechos de duas músicas em partitura.

A abordagem da música como aplicação dos números racionais que apresentamos é de natureza pitagórica, como (NIETZSCHE; LEBRUN; FILHO, 1974) categorizou a nossa ciência. Neste caso, o autor faz referência à ideia que Pitágoras tinha sobre as relações entre os números (entre si mesmos) e a essência das coisas. Afirma ainda que essa investigação pitagórica “Trata-se de encontrar fórmulas matemáticas para as forças mais absolutamente impenetráveis”.

Para reforçar nossa fala de que os números racionais estão ligados aos elementos musicais desde a sua criação, podemos citar a obra “Diderot e as analogias musicais”, (NUNES, 1997). No livro, lemos várias falas de Diderot a cerca da relação entre matemática e música. Em uma delas, o filósofo afirma que vários povos realizaram estudos acerca das propriedades dos sons, mas “Pitágoras foi o primeiro, na tradição ocidental, a expressar as propriedades acústicas com relação às proporções numéricas, em um grau de abstração bem mais elevado [...]”.

Falar de música como aplicação da matemática pode parecer inusitado para alguns leitores, pois não é tão comum encontrarmos muitos trabalhos neste sentido. Podemos, então, citar de forma especial duas dissertações de egressas do PROFMAT: “Matemática e música: uma proposta de aprendizagem”, de (CABRAL *et al.*, 2015) e “O ensino da estatística através da música”, de (FERREIRA *et al.*, 2015).

A busca em outras áreas de aplicações dos conteúdos matemáticos caracteriza um trabalho interdisciplinar. Esta forma de pesquisa é incentivada pela Base Nacional Comum Curricular, a BNCC, (SILVA, 2018). Em sua versão disponível no Portal do Ministério da Educação, a delega aos sistemas e redes de ensino a incumbência de inserir nas propostas pedagógicas “temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora”, e cita diversidade cultural como um desses temas.

Ainda sobre o texto da BNCC, nas chamadas competências gerais da educação a terceira competência nos diz que devemos “Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural”. A competência 6 diz “Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais”.

Este trabalho se propõe a formular um material que poderá servir de consulta para os que buscam outras formas de aplicações dos números racionais. Ao longo do texto intencionamos responder à questão: como o conhecimento matemático influencia a concepção, execução e o entendimento musical e ajuda a construir sua estética?

1 Os números racionais

Neste capítulo nos dedicamos a fazer um estudo sobre as definições e as principais proposições relacionadas aos números racinais.

1.1 História dos números

Tratando-se da história dos números racionais, há várias evidências da utilização e representação de frações desde o Egito Antigo. (CARAÇA, 2000) cita Heródoto para afirmar que a Geometria teria surgido no Egito Antigo como uma forma de medir as terras para a devida cobrança de impostos. Os impostos eram cobrados de acordo com o tamanho da terra, mas os terrenos que ficavam perto do rio perdiam terras na época da cheia. A área a ser cobrada deveria então ser recalculada.

Em seu livro, (CARAÇA, 2000) utiliza a medição de segmentos como princípio que gerou a necessidade da utilização de novos números. Dados os segmentos AB e CD de tamanhos respectivamente **a** e **b**, sendo $\mathbf{b} < \mathbf{a}$, medir o segmento AB utilizando CD significa encontrar quantas vezes CD cabe em AB. Neste caso dizemos que **b** é a unidade de medida.

Com efeito, esta também é a definição de divisão que se utiliza comumente. Podemos, então representar a medição acima descrita pela divisão entre os números **a** e **b**: $\frac{a}{b}$. Esta divisão, contudo, nem sempre tem como resultado um número inteiro, ou seja, nem sempre CD cabe em AB uma quantidade inteira de vezes.

Podemos dizer, assim, que o conjunto dos números racionais surgiu pelo princípio de extensão, como forma de suprir a insuficiência dos números inteiros em representar as medidas.

1.2 Definições

Definição 1.2.1 (Números racionais)**.** *Chamamos de número racional todo número que pode ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$, *onde* $a, b \in \mathbb{Z}$ *e* $b \neq 0$.

Definição 1.2.2 (Operações)**.** *Sejam* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *números racionais. Definimos as operações de adição e multiplicação respectivamente por:* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ *e* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Definição 1.2.3 (Corpo)**.** *Chamamos de corpo todo conjunto não vazio k dotado de duas operações chamadas soma e produto. .*

Proposição 1.2.1. *O conjunto dos números racionais é um corpo.*

Demonstração. Dadas as operações de adição e multiplicação, anteriormente definidas, seguem as demonstrações das propriedades: comutatividade da adição, associatividade da adição, elemento neutro aditivo, oposto aditivo, comutatividade da multiplicação, associatividade da multiplicação, elemento neutro multiplicativo, inverso multiplicativo e distributividade da multiplicação em relação à adição.

1. **Comutatividade da adição**

   Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, queremos provar que:

   $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \tag{1.1}$$

   Desenvolvendo o primeiro membro de (1.1), temos que:

   $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

   Como $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, valem as propriedades comutativas da adição e da subtração. Logo:

   $$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{cb + da}{db} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b},$$

   como queríamos demonstrar.

2. **Associatividade da adição**

   Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$ números racionais. Considerando ainda que $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, e portanto valem as propriedades comutativas da adição e distributiva da multiplicação em relação para estes inteiros. Disso segue que:

   $$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + cb}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{(ad + cb)\,f + (bd)e}{(bd)f} =$$

   $$= \frac{a(df) + b(cf) + b(de)}{b(df)} = \frac{a(df) + b(cf + de)}{b(df)} = \frac{a}{b} + \left(\frac{cf + de}{df}\right) = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

   Dos extremos, temos que $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$. Logo, a adição é associativa para os $\mathbb{Q}$.

3. **Elemento neutro aditivo**

   Desejamos provar que o conjunto dos números racionais possui o elemento neutro para adição, denotado por $\frac{0}{1}$. Ou seja, vamos provar que dado $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, temos que

   $$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}. \tag{1.2}$$

Como vimos na Definição 1.2.2, podemos desenvolver o primeiro membro de (1.2) da seguinte forma:
$$\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a\cdot 1+b\cdot 0}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}.$$
Portanto a propriedade está demonstrada.

4. **Comutatividade da multiplicação**

   Considere os números racionais quaisquer $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Queremos provar que:
   $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b} \tag{1.3}$$
   Desenvolvendo a multiplicação no primeiro membro de (1.3), temos:
   $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}.$$
   Logo, a equação (1.3) é verdade.

5. **Associatividade da multiplicação**

   Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\in\mathbb{Q}$, queremos verificar que:
   $$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right) \tag{1.4}$$
   Partindo do primeiro membro de (1.4), podemos desenvolver:
   $$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\left(\frac{ac}{bd}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a(ce)}{b(df)}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{ce}{df}\right)=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right).$$
   Portanto, a propriedade é válida.

6. **Elemento neutro multiplicativo**

   Vamos mostrar que $\frac{1}{1}$ é elemento neutro multiplicativo dos números racionais. Assim, dado $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$, e de acordo com a Definição 1.2.2, temos:
   $$\frac{c}{d}\cdot\frac{1}{1}=\frac{c\cdot 1}{d\cdot 1}=\frac{c}{d},$$
   como queríamos demonstrar

7. **Inverso multiplicativo**

   A propriedade diz que dado $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, com $\frac{a}{b}\neq\frac{0}{1}$, existe $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ tal que
   $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=1 \tag{1.5}$$

.

Multiplicando $\dfrac{1}{a}$ e $\dfrac{b}{1}$ de ambos os lados de (1.5), obtemos

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{1} = 1 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{1}$$

Efetuando os cancelamentos de termos, obtemos:

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

Logo, temos que $\dfrac{c}{d} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

8. **Distributividade da multiplicação em relação à adição**

Dados os números racionais $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{e}{f}$, desejamos demonstrar que:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \tag{1.6}$$

Desenvolvendo o primeiro membro de (1.6), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) &= \\ \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{cf + de}{df}\right) &= \\ \frac{a(cf + de)}{b(df)} &= \\ \frac{a(cf) + a(de)}{b(df)} & \end{aligned} \tag{1.7}$$

Multiplicando a expressão (1.7) por $\dfrac{b}{b}$, obtemos:

$$\frac{b(acf) + b(ade)}{b(bdf)} \tag{1.8}$$

Aplicando a propriedade associativa da multiplicação com números inteiros em (1.8), podemos desenvolver da seguinte forma:

$$\frac{b(acf) + b(ade)}{b(bdf)} = \frac{ac(bf) + ae(bd)}{bd(bf)} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}.$$

O que mostra que (1.6) é verdade.

Com todas as propriedades satisfeitas, provamos assim que o conjunto dos números racinais é um corpo ordenado. $\square$

1.3 Representação

A forma de representar os números depende da necessidade do seu uso e pode mudar dependendo da cultura do povo que os usa. Um exemplo disso é que graças à tradição oral, os gregos antigos não tinham uma representação específica para as frações. Eles tratavam mais especificamente da razão entre os números. O que hoje nós traduzimos por: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ era tratado por eles como a está para b assim como b está para d.

Atualmente os números racionais podem ser representados de duas formas: na forma de fração e na forma decimal. Já tendo sido abordada a forma de fração, vejamos os dois casos das formas decimais: a finita, e a infinita.

1.3.1 Representação decimal finita

Todo número decimal com quantidade de casas decimais finita pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com b diferente de zero. Por que, então, não colocar a listagem dos números racionais em forma decimal? Apesar de parecer mais próximo do entendimento intuitivo, a listagem dos números racionais ficaria incompleta ao tentarmos utilizar apenas números decimais finitos.

Ao escrevermos o conjunto $\{1,2,3,4,...\}$ conseguimos fazer uma boa representação intuitiva dos números naturais, por exemplo. Ao seguir a listagem de 1 em 1 unidade, conseguimos varrer todos os números naturais.

No entanto, se tentarmos escrever $\{0,1; 0,2; 0,3; ...\}$, estaremos ignorando infinitos números racionais que não serão atingidos com esta lista. Mas se escrevermos a lista de frações da forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$, podemos abranger todos os racionais.

Os números decimais finitos podem ser escritos como frações em que o denominador é uma potência de dez. Para retornar a fração à forma de número decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo numerador. Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 1. $2,7 = \frac{27}{10}$

Exemplo 2. $0,45 = \frac{45}{100}$

Exemplo 3. $0,362545 = \frac{362545}{1000000}$

Definição 1.3.1 (Fração Irredutível)**.** *Uma fração está na forma irredutível quando o numerador e o denominador são primos entre si.*

A Definição 1.3.1 é um complemento para compreendermos o que Ivan Niven fala sobre as representações decimais para números racionais:

> Um número racional na forma irredutível $\frac{a}{b}$ tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5. b não precisa necessariamente ter os dois fatores primos ao mesmo tempo. Pode ser que tenha apenas um dos fatores ou nenhum. (NIVEN, 1984).

Note que com esta fala do autor não se faz necessário que o denominador da fração seja um múltiplo de 10 para que a representação decimal seja finita, apesar do que é comumente compreendido.

São exemplos do que é dito por Niven, os números: $\frac{1}{25} = 0,04$ e $\frac{1}{16} = 0,0625$.

Ao passo que o número número racional $\frac{6}{35}$, por exemplo, tem infinitas casas decimais, sendo inviável uma representação completa. Contido, é comum dar uma representação decimal finita que aproxima seu valor, por exemplo $0,17142857$. Isto nos leva à representação decimal infinita.

1.3.2 Representação decimal infinita

Um número que está em representação decimal infinita é um número racional se nas casas decimas houver um grupo de números que se repete indefinidamente seguindo sempre a mesma sequência. Este grupo de números é chamado **período do número**. A seguir temos alguns exemplos de números racionais com representação infinita, também chamados **dízimas periódicas**.

Exemplo 4. $\frac{1}{3} = 0,3333....$ *Neste exemplo* $\frac{1}{3}$ *é a fração geratriz e o período é* 3.

Exemplo 5. $\frac{4}{11} = 0,363636...$ *Fração geratriz:* $\frac{4}{11}$*. Período: 36.*

As dízimas periódicas podem ser **simples** ou **compostas**. As simples são as que possuem apenas a parte inteira (que vem antes da vírgula) e o período. As compostas são as que, além da parte inteira e do período, possuem uma parte fixa, também chamada de **antiperíodo**. O antiperíodo é a parte que não se repete após a vírgula e antes do período.

Exemplo 6. $1,34444... = \frac{121}{90}$*. Parte inteira: 1. Antiperíodo: 3. Período: 4.*

Dada uma dízima periódica, e possível encontrar sua fração geratriz seguindo algumas regras. A título de exemplo, encontraremos as frações geratrizes de alguns números.

Exemplo 7 (Dízima periódica simples)**.** *Vamos encontrar a fração geratriz do número* $0,030303....$ *Parte inteira: 0. Período: 03.*

- **1º Passo:** Igualar o número a x.

$$0,030303... = x \tag{1.9}$$

- **2º Passo:** Multiplicar a equação por 10^n, onde $n \in \mathbb{N}$ e representa a quantidade de dígitos do período. No caso da equação (1.9) o período tem 2 dígitos. Então vamos multiplicá-la por $10^2 = 100$.

$$0,030303 \cdot 100 = x \cdot 100 \Rightarrow 3,030303 = 100x \tag{1.10}$$

- **3º Passo:** Subtrair a equação (1.10) pela (1.9). Neste exemplo faremos(1.9) − (1.10).

$$3,030303 - 0,030303 = 100x - x \Rightarrow 3 = 99x$$

- **4º Passo:** Isolar o x e, quando possível, simplificar a fração obtida. No nosso exemplo temos:

$$x = \frac{3 \div 3}{99 \div 3} \Rightarrow x = \frac{1}{33}.$$

  Portanto, a fração geratriz de 0,030303 é $\frac{1}{33}$

Exemplo 8 (Dízima periódica composta)**.** *Encontrar a fração geratriz da dízima periódica 1,35777... Parte inteira: 1. Antiperíodo: 35. Período: 7.*

- **1º Passo:** Igualar o número a x.

$$1,35777 = x \tag{1.11}$$

- **2º Passo:** Como o período tem apenas um dígito, vamos multiplicar a equação (1.11) por 10.

$$1,35777 \cdot 10 = x \cdot 10 \Rightarrow 13,5777 = 10x \tag{1.12}$$

- **3º Passo:** Subtrair a equação (1.11) da equação (1.12).

$$13,5777 - 1,35777 = 10x - x \Rightarrow 9x = 12,22 \tag{1.13}$$

- **4º Passo:** Ao isolar o x na equação (1.13), obtemos a fração $\frac{12,22}{9}$, cujo numerador é um número decimal. Para termos apenas números inteiros na fração, vamos multiplicá-la por 10^n, onde $n \in \mathbb{Z}$ e é igual à quantidade de dígitos da parte decimal do numerador. Em seguida simplificaremos a fração, se possível.

$$x = \frac{12,22 \cdot 100}{9 \cdot 100} \Rightarrow x = \frac{1222 \div 2}{900 \div 2} = \frac{611}{450}.$$

  Logo, a fração geratriz da dízima periódica 1,35777.

Observação: as dízimas não periódicas são as que não possuem um período. Estas não serão abordadas neste trabalho por se tratarem de números **irracionais**.

1.4 Enumerabilidade dos racionais

Antes de demonstrar a enumerabilidade dos números racionais, é necessário lembrar algumas propriedades e a definição de conjunto enumerável.

Definição 1.4.1 (Conjunto enumerável)**.** *Um conjunto é dito enumerável se ele é finito ou se ele possui a mesma cardinalidade do conjunto* $\mathbb{N}$*.*

Proposição 1.4.1. *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *é enumerável.*

Propriedade 1.4.1. *Seja* $f : A \to B$ *uma função injetora. Se* B *é enumerável, então* A *é enumerável.*

Propriedade 1.4.2. *Se* A *e* B *são conjunto enumeráveis, então o produto cartesiano* $A \times B$ *é enumerável*

Proposição 1.4.2. *Provar que o conjunto dos números racionais é enumerável.*

Demonstração. Tomemos a função $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, tal que $f\left(\frac{m}{n}\right) = (m, n)$, com $MDC(m, n) = 1$ e $n > 0$.

É fácil verificar que f é injetora. Dadas duas frações quaisquer $\frac{m}{n}, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, sendo que $\frac{m}{n} \neq \frac{a}{b}$, ao menos uma das duas situações acontece: $m \neq a$ ou $n \neq b$. Assim os pares ordenados (m, n) e (a, b) são diferentes, e portanto f é injetora.

Como f é injetora e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é enumerável, concluímos que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

$\square$

2 Teoria musical

A teoria musical ocidental é vasta e tem vários níveis de profundidade. Vamos nos ater neste capítulo às propriedades musicais mais importantes para o estudo que faremos adiante.

2.1 As partes de uma música

Inicialmente é necessário definirmos as partes essenciais nas quais toda música se divide: melodia, harmonia e ritmo.

Definição 2.1.1 (**Melodia**). *É a sucessão de notas musicais tocadas em uma determinada sequência e que compõe a identidade da música. A melodia é considera a concepção horizontal da música.*

De forma intuitiva, podemos dizer que a melodia é a parte da música que "cantarolamos"inconscientemente, pois é a parte que fica em nossa cabeça após escutarmos a música. Este é o motivo de ser a identidade da música.

Ao falarmos sobre a concepção horizontal da música estamos falando sobre a progressão da música, por exemplo, em uma partitura. Na Figura 1 vemos um trecho, em partitura, da melodia de Asa Branca, de Luiz Gonzaga. Podemos perceber como para executar as notas da frase "Quando olhei a terra ardendo"(dó, ré, mi, sol, sol, mi, fá, fá) na ordem correta, é necessário ler a partitura da esquerda para a direita, horizontalmente.

Figura 1 – Melodia: Asa Branca

Definição 2.1.2 (**Harmonia**). *É composta por notas tocadas simultaneamente e acompanha a melodia. Três notas ou mais tocadas ao mesmo tempo, formam um acorde, que compõem a harmonia. A Harmonia é considerada a concepção vertical da música.*

Como dito na definição, os acordes são os sons que ouvimos "ao fundo"da melodia. A harmonia enriquece a música e preenche momentos de silêncio da melodia, conferindo mais beleza à execução musical. À harmonia também é atribuída a emoção música. Por isto é considerada a alma de uma música. Para entender um pouco sobre estudo de emoção da música, recomendamos a leitura da matéria sobre 13 emoções diferentes que a música pode transmitir (GALILEU, 8/10/2020), publicada no site da Revista Galileu. O endereço está nas referências.

A expressão concepção vertical se refere à forma como as notas sobrepostas do acorde são representadas na pauta. Como é possível ver na Figura 2, o agrupamento vertical de três notas ou pais compõe o acorde que faz parte da melodia.

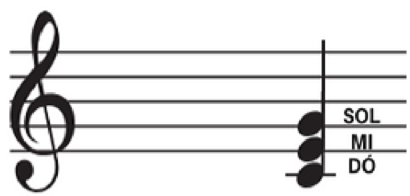


Figura 2 – Acorde de Dó

Definição 2.1.3 (Ritmo). *É a sucessão de sons e silêncio que em determinada ordem, ditam a cadência com que a música vai seguir.*

O ritmo pode ser construído com as notas musicais ou com outros sons como batidas que obedeçam a uma determinada frequência.

2.2 Definições importantes

Para ilustrar nossos estudos precisamos entender a escrita da música em partituras. Os principais pontos necessários para compreendermos sobre a leitura de partitura são: notas musicais, pauta, claves, figuras musicais e compassos.

Definição 2.2.1 (Notas Musicais). *São sete notas musicais, a saber:*

Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si.

Uma importante informação sobre esta divisão das notas musicais é que foi Pitágoras o primeiro pensador ocidental a analisar as propriedades musicais com base em proporções numéricas. Com base nessa análise que foi criada essa escala básica dividida nas notas musicais que hoje conhecemos.

Definição 2.2.2 (Pauta ou Pentagrama). *Conjunto de 5 linhas e 4 espaços onde a música será escrita. Veja Figura 3.*

Na pauta podemos colocar elementos que mostram a melodia, a harmonia e o ritmo da música a ser executada.

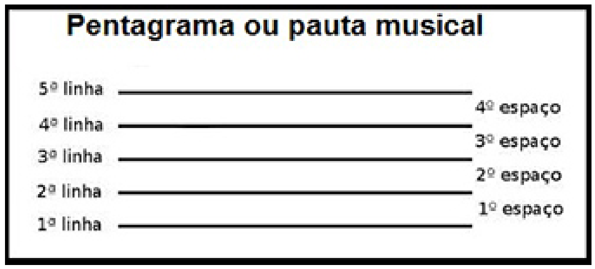


Figura 3 – Pauta: linhas e espaços

A orientação da leitura das notas na pauta se dá da esquerda para a direita e as notas crescem no sentido agudo (de baixo para cima) e decrescem no sentido (de cima para baixo), como mostra a Figura 4.

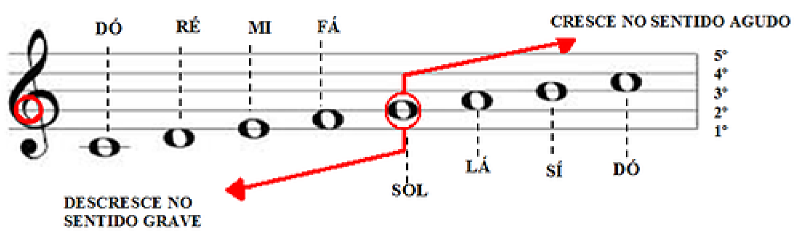


Figura 4 – Leitura das notas na pauta

Definição 2.2.3 (Claves). *Figura que aparece no início da pauta e orienta a leitura da música.*

São três claves básicas: clave de sol, clave de fá e clave de dó (que pode aparecer em duas posições diferentes), representadas na Figura 5.

Figura 5 – Claves musicais

Quando uma figura musical está indicada em uma linha ou espaço, só conseguimos saber a qual nota se refere por causa da clave. A Figura 6 trás as leituras para cada clave. saber qual A mais comumente utilizada em estudos simplificados é a clave de sol.

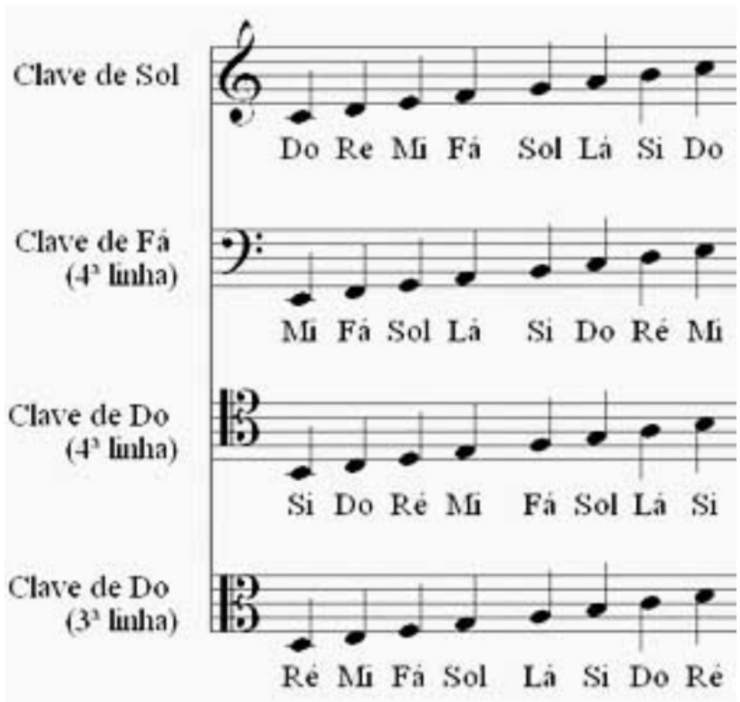


Figura 6 – Leitura de cada clave

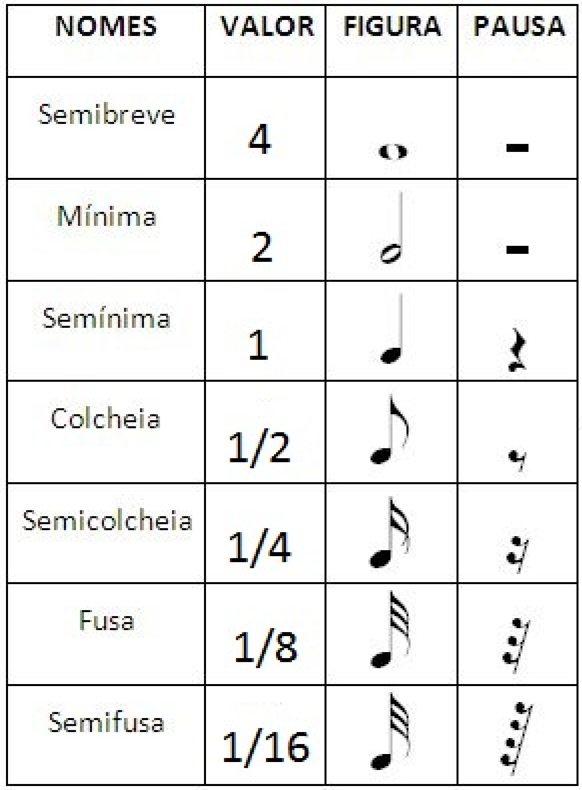
Na escrita de partituras as claves diferentes são utilizadas para diferenciar o que cada instrumento deve seguir. Desta forma, é possível uma orquestra com vários instrumentos seguir a mesma partitura, pois todas as chamadas vozes da música estão registradas.

Nas partituras para piano é normal ter a partitura com as claves de sol e de fá. O que está escrito na clave de sol norteia o que será tocado com a mão direita, enquanto que a mão esquerda segue a clave de fá.

Definição 2.2.4 (**Figuras Musicais:**)**.** *Indicam por quanto tempo determinada nota deve ser sustentada ou quanto tempo dura o silêncio entre as notas ou sons. No caso da indicação do silêncio, as figuras são chamadas* ***pausas****.*

Na Figura 7, temos a lista das figuras musicais usadas atualmente. Algumas figuras com maior duração caíram em desuso. As figuras que indicam as notas a serem tocadas são formadas por três partes: a cabeça (parte redonda que indica exatamente a nota musical na pauta), a haste (que não está presente na figura semibreve) e a bandeirola (presente nas figuras de colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa). Podemos perceber que quanto mais partes a figura apresenta, menor é o seu valor.

Como a figura 7 mostra, os valores das figuras seguem uma progressão geométrica decrescente, de razão $\frac{1}{2}$.



NOMES	VALOR	FIGURA	PAUSA
Semibreve	4		
Mínima	2		
Semínima	1		
Colcheia	1/2		
Semicolcheia	1/4		
Fusa	1/8		
Semifusa	1/16		

Figura 7 – Figuras e Pausas

É importante ressaltar que a unidade de tempo utilizada para dar o valor das figuras não é especificamente nenhuma conhecida. É apenas uma unidade de tempo e varia de acordo com a velocidade que a música será executada, mas é mantida durante a execução.

Para estudos iniciais e de modo a facilitar o entendimento do estudante pode-se adotar que 1 tempo é igual a 1 segundo. Mas, posteriormente, à medida que se aprofunda no estudo, esta associação perde o sentido.

Portanto para marcar o tempo de forma mais eficiente e mantendo a velocidade que cada música pede, recomenda-se o uso de um **metrônomo**. O metrônomo é um instrumento inventado no séc. XIX para estabelecer um padrão fixo para os andamentos musicais por Johann Nepomuk Maelzel. Seus pulsos regulares podem ser usados em diferentes velocidades.

Atualmente existem metrônomos analógicos, digitais e até aplicativos para celulares que desempenham a função de metrônomo. Na figura 8 temos um exemplo de metrônomo.

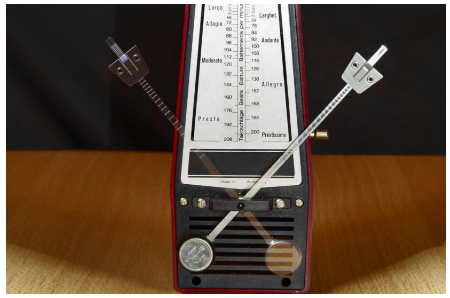


Figura 8 – Metrônomo

Definição 2.2.5 (**Fórmula de Compasso**)**.** *Na pauta, a fórmula de compasso é indicada por dois números, um sobre o outro, que ficam próximos à clave logo no início da partitura. Estes números indicam quantas figuras cabem em um compasso da música.*

É importante não confundir a fórmula de compasso com uma fração, apesar da semelhança. Na Figura 9 é possível ver indicados os compassos mais comuns e o significado de cada fórmula: compasso binário (dois por dois, dois por quatro ou dois por oito), compasso ternário (três por dois, três por quatro ou três por oito) e compasso quaternário (quatro por dois, quatro por quatro e quatro por oito).

Binário	Ternário	Quaternário
$\frac{2}{2}$ 𝅗𝅥 𝅗𝅥	$\frac{3}{2}$ 𝅗𝅥 𝅗𝅥 𝅗𝅥	$\frac{4}{2}$ 𝅗𝅥 𝅗𝅥 𝅗𝅥 𝅗𝅥
$\frac{2}{4}$ ♩ ♩	$\frac{3}{4}$ ♩ ♩ ♩	$\frac{4}{4}$ ♩ ♩ ♩ ♩
$\frac{2}{8}$ ♪ ♪	$\frac{3}{8}$ ♪ ♪ ♪	$\frac{4}{8}$ ♪ ♪ ♪ ♪

Figura 9 – Fórmulas de compasso mais comuns

Para explicar: em um compasso três por quatro, por exemplo, é possível preencher o compasso com três semínimas. O número de cima indica quantas figuras e o número de baixo indica o tipo de figura em relação a uma semibreve (figura de quatro tempos). Neste caso temos mais uma ligação dos números racionais com a teoria musical: uma mínima representa $\frac{1}{2}$ do tempo de uma semibreve, uma semínima representa $\frac{1}{4}$, e uma colcheia representa $\frac{1}{8}$ da duração de uma semibreve.

Definição 2.2.6 (**Compasso**). *É a menor porção da música que contem a quantidade de tempos indicado pelo número de cima da fórmula de compasso. Na partitura o compasso é o espaço entre duas barras verticais. Veja na Figura 10 um exemplo de pauta com quatro compassos e três barras de compasso (ou travessões).*

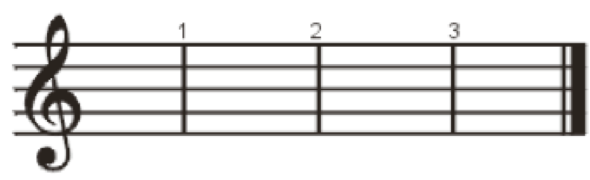


Figura 10 – Compassos e barras de compasso

2.3 Propriedades dos sons

Todo e qualquer som que é produzido possui propriedades que podem ser usadas para descrevê-lo. Ao falarmos sobre a voz de alguém, sobre o som de algum instrumento ou mesmo apenas um barulho de algo caindo, utilizamos estas propriedades para descrever o que ouvimos: altura, intensidade, duração e timbre. A seguir trazemos as definições destas propriedades:

Definição 2.3.1 (**Altura**). *Propriedade de o som ser* ***agudo*** *ou* ***grave****.*

Informalmente, é comum que as pessoas que têm pouco conhecimento musical chame de grosso um som grave, e de fino um som que e agudo. Dentro da teoria musical, ao falarmos que determinada nota é muito alta, ou baixa, estamos falando que ela é muito aguda, ou grave, respectivamente. Outra forma de referenciar a altura das notas é usar as palavras acima (mais agudo) e abaixo (mais grave).

Definição 2.3.2 (**Intensidade**). *Propriedade de o som ser* ***forte*** *ou* ***fraco****.*

Quando falamos sobre o volume de determinado som, estamos na verdade nos referindo à intensidade deste som. Subir ou aumentar o volume significa tornar o som mais forte, ou aumentar a intensidade do som.

Definição 2.3.3 (**Duração**). *Propriedade de o som ser* ***longo*** *ou* ***curto****.*

Na música escrita em partitura, a duração dos sons é determinada pelo valor de cada figura musical.

Definição 2.3.4 (Timbre). *Propriedade única de cada som e que permite identificar a origem do som.*

É pelo timbre que conseguimos descobrir se uma música está sendo tocada com piano, guitarra ou saxofone, por exemplo. O timbre também nos permite reconhecer qual pessoa está falando ou cantando sem que vejamos a pessoa, pois, assim como as impressões digitais, a voz é uma característica diferente para cada pessoa.

2.4 Outros termos musicais

Há ainda outros temos que precisamos definir e que serão utilizados no Capítulo 3.

Definição 2.4.1 (Semitom). *"O semitom designa o intervalo de segunda menor (mi-fá)."(RIBEIRO, 1965).*

Definição 2.4.2 (Tom). *"O tom designa o intervalo de segunda maior (dó-ré)."(RIBEIRO, 1965)*

A Figura 11 mostra quais são os intervalos de tom e de semitom entre as notas musicais.

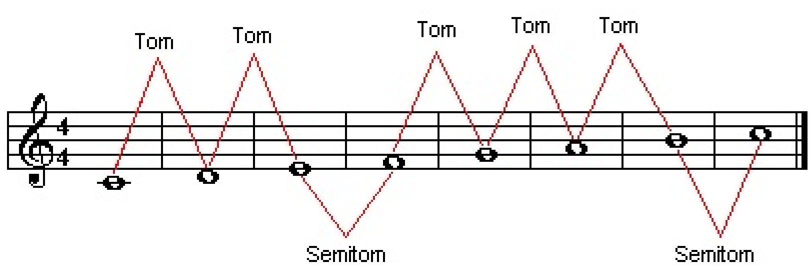


Figura 11 – Tons e semitons

Definição 2.4.3. ***Oitava*** *Oitava é o intervalo entre um nota musical e outra com metade ou o dobro de sua frequência.*

O nome oitava também é usado para referenciar o conjunto das oito notas da escala escala maior: dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó.

Definição 2.4.4. ***Escala*** *Escalas musicais são sequencias de notas que seguem a determinada ordem.*

Existem vários tipos de escala. As mais usadas são: maior, menor (harmônica e melódica), cromática e pentatônica ou chinesa.

Definição 2.4.5. ***Tonalidade*** *Termo referente à escala adotada.*

Dizemos que a nota está adequada à tonalidade quando ela pertence à escala de referência.

3 Interseção entre matemática e música

Ao iniciar nossa discussão sobre a interseção citada no título desse capítulo, é importante ressaltar que falamos da evolução da música ocidental, produzida a partir de estudos de autores gregos e romanos.

Fazer tal consideração é necessário para não corrermos o risco de assumir que esta é a única produção musical existente e que apenas nesta criação encontramos elementos da matemática.

3.1 Os números na história da música

O livro História da Música Ocidental (PALISCA; GROUT, 1994), conta que o estudo teórico da música no ocidente começou com a música da igreja cristã. Apesar de a música desta época ter sido influenciada pelo pensamento romano, não se tem registros de como era a prática musical antes da idade média.

Isto ocorreu porque, antes da popularização do cristianismo, a produção musical romana e grega eram voltadas para práticas sociais que a igreja primitiva repudiava. No entanto, é inegável a influência que os pensadores antigos exerceram sobre a música.

Esse nosso olhar para os pensadores da Antiguidade, que têm relação com a música, vai nos levar ao primeiro ponto principal da interseção entre os números racionais e a teoria musical: a criação e divisão das notas musicais.

O matemático e filósofo Pitágoras de Samos (V a.C.) tem papel fundamental na formação da teoria da música ocidental. A partir de seus cálculos e experiências com o monocórdio, surgiram os graus da escala musical.

O **monocórdio** (como pode ser visto na Figura 12 é um instrumento musical muito simples, que possui apenas uma corda, como o nome já sugere. A partir da divisão da corda em proporções específicas, Pitágoras teria chegado a determinados sons, que até hoje são reconhecidos por numerais.

Esta divisão pode ser entendida da seguinte forma: ao dividir a corda ao meio, o som obtido está a uma oitava acima do som que a corda produz quando solta; quando dividida em dois terços, o som é de uma quinta; e quando dividida em três quartos, o som é de uma quarta.

A palavra dividir neste caso significa segurar a corda, como se faz ao tocar um violão, por exemplo. As Figuras 13, 14 e 15, tiradas de "Pitágoras e a escala musical"(SALLES, 2009), ilustram como são as divisões descritas.

Figura 12 – Monocórdio

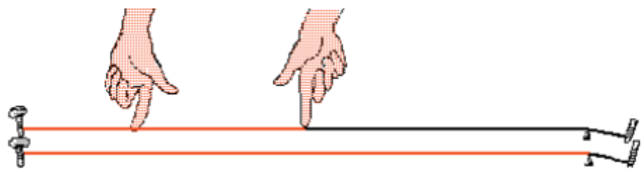


Figura 13 – Divisão da corda em oitava: $\frac{1}{2}$

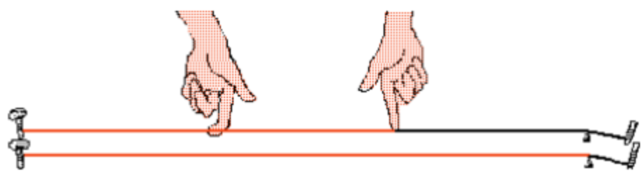


Figura 14 – Divisão da corda em quinta: $\frac{2}{3}$

Figura 15 – Divisão da corda em quarta: $\frac{3}{4}$

Em relação aos nomes oitava, quinta e quarta, podem ser melhor entendidos quando colocamos os nomes das notas que já conhecemos. Suponhamos que o monocórdio esteja afinado em dó. A corda, ao ser tocada, produzirá a nota dó. Como nas cordas de violões, violas, guitarras, violinos, violoncelos, entre outros, a altura do som produzido é inversamente proporcional ao tamanho da corda. Portanto se segurarmos a corda, dividindo-a, teremos um som mais agudo.

Logo, a corda que produziu a nota dó, ao ser segurada ao meio, produzirá ainda a nota dó, só que na oitava acima. Chamamos este de dó maior, por ser mais agudo ao dó original. Ao ser dividida em três partes iguais, e segurada a dois terços de seu início, a corda produzirá a quinta nota a partir do dó, que hoje chamamos **sol** (seguindo a sequencia das notas já mostrada na Definição 2.2.1, a nota sol é a quinta: dó ré, mi, fá **sol**). E ao ser dividida em quatro partes iguais, e segurada a três quartos de seu início, a nota produzida será a quarta a partir da original, chamada **fá**.

Obs.: a sequência das notas foi criada a partir da percepção do som produzido pela corda, utilizando a propriedade da altura do som.

Para obter as outras notas, seguindo os cálculos de Pitágoras, podemos multiplicar por $\frac{3}{2}$ a partir da proporção de oitava, como explicaremos a seguir.

A partir da proporção de oitava, representada pela fração $\frac{1}{2}$, é necessário multiplicar por 3 (que é a proporção de quinta) e isto gera um ciclo de quintas. Nos cálculos vemos as notas que surge a cada multiplicação.

$$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{sol}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2} \Rightarrow \text{ré}$$

$$\frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{27}{2} \Rightarrow \text{lá}$$

$$\frac{27}{2} \cdot 3 = \frac{81}{2} \Rightarrow \text{mi}$$

$$\frac{81}{2} \cdot 3 = \frac{273}{2} \Rightarrow \text{si}$$

Deste modo, obtemos as sete notas musicais. Porém as notas que surgem destas operações pertencem a oitavas diferentes. Para ajustar as notas de forma a pertencerem à mesma oitava, seguimos a progressão multiplicando os resultados por $\frac{1}{2}$, que é a proporção de oitava.

Com efeito, para fins práticos basta efetuar sucessivas multiplicações por $\frac{3}{2}$, como já mencionamos.

A Figura 16 mostra a escala pitagórica, resultado das contas que apresentamos.

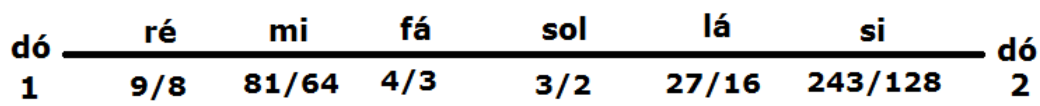


Figura 16 – Escala pitagórica

Sobre a nota fá, que parece discordar dos cálculos aqui feitos, Salles nos fala:

> A obtenção da nota fá é feita pela noção de simetria entre dó (1) e sol (3/2), resultando 2/3. Este seria o fá da oitava inferior, uma quinta abaixo do dó (1). Para calcular o fá da oitava superior (segunda abaixo do sol 3/2) basta multiplicar 2/3 por 2, resultando o fá 4/3[...]. (SALLES, 2009)

3.2 Consonâncias e dissonâncias

A partir da definição de uma escala, com uma ascendência lógica dos sons, do mais grave para o mais agudo, começou a surgir a noção de consonância e dissonância. A grosso modo podemos dizer que estas palavras falam sobre notas que combinam ou não umas com as outras, e mais especificamente, com determinado tom.

De forma mais científica, a consonância ou a dissonância de sons remete à frequência das ondas sonoras produzidas e qual a relação entre estes números. De modo geral, se os números das frequências de dois sons divisores em comum si, então estes sons são consonantes. Se não, são dissonantes.

Ao estudarem a escala pitagórica e os graus obtidos a partir dela, os gregos teriam usado a seguinte definição: as consonâncias são as relações entre frequências cujos números estivessem contidos na tetraktys, representada na Figura 17

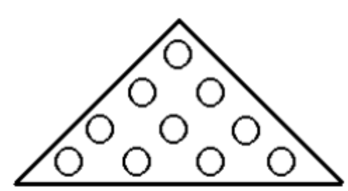


Figura 17 – Tetrakys grega: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Então a teoria musical grega antiga considerava que a oitava, a quarta e a quinta eram as consonâncias de determinado tom. Logo, tomando o tom em C, as notas a serem tomadas para formar uma boa harmonia seriam: dó, fá, e sol. As dissonâncias seriam as terças e as sextas, ou seja, tomando nosso exemplo, as notas mi e lá seriam dissonantes no tom em dó.

Esta definição permaneceu até o século XV, e as oitavas, quintas e quartas são consideradas até hoje intervalos perfeitos ou justos.

Os cálculos pitagóricos levavam a encontrar uma terça que causava certo estranhamento, tanto que foi chamada de terça pitagórica. Vale lembrar que nos estudos musicais de hoje palavras como estranhamento e incômodo são bastante usadas para significar dissonância entre sons. Com isso, a forma de se calcular os sons foi modificada e adotou-se as médias aritmética, geométrica e harmônica para encontrar os graus da escala.

A nova forma de calcular os sons solucionou o problema da terça pitagórica e formou a escala mesotônica. A forma de encontrar tons que formam uma escala, no entanto, não parou aí, e hoje temos diversas escalas musicais, com intervalos de sons encontrados de diferentes formas.

Hoje considera-se dissonância, o som que não pertence ao tom de determinada escala.

3.3 Os números na partitura

Uma partitura é a forma escrita de uma música Nela deve conter todos os elementos a serem executados para que a música tenha determinada forma: quais notas, a duração de cada nota ou pausa, o ritmo que se deve seguir e até mesmo com que intensidade deve ser executado cada trecho.

È necessário que todos elementos musicais representados na partitura estejam claros e que haja uma padronização na forma de escrita. Seguindo estas regras, uma música escrita na partitura será executada da mesma forma independente de quem está tocando, e as diferenças que possam aparecer na execução podem ser devias a algum erro de leitura ou a uma livre interpretação/adaptação que o músico possa fazer, mas que não consta na partitura.

A melhor maneira de se alcançar esta padronização na escrita da música é se basear nos números, que aparecem na partitura em forma das figuras musicais e outros elementos que definimos no Capítulo 2.

3.4 Exercícios musicais

Um exercício básico que deve ser executado por quem estudam música é montar a partitura de determinada obra, a partir do que se ouve. Além da percepção auditiva para determinar qual nota ou acorde está sendo tocado, é necessário que a pessoa saiba representar os tempos sons e silêncios, fazendo tudo encaixar no compasso da música.

O exercício de montar uma partitura demanda lidar com frações que representam o valor de cada figura musical e com as operações de frações. Mas este tipo de atividade é específica para quem estuda a música.

Em se tratando de estudo da matemática utilizando a teoria musical, existem outras atividades, também praticadas por estudantes da música, e que poderiam ser aplicadas em turmas que estão estudando frações.

Podemos entender esta dinâmica pelo Exemplo 9, que ilustra uma prática comum no estudo básico da leitura de partitura.

Exemplo 9. *Complete o compasso a seguir:*

Figura 18 – Exercício de completar o compasso

Nesta questão o aluno pode preencher livremente utilizando figuras musicais das que foram listadas na Figura 7 (Capítulo 2), desde que obedeça à fórmula de compasso. Portanto não há apenas uma resposta correta.

Como vemos, trata-se de um compasso quaternário, para preenchê-lo precisamos de quatro tempos. A primeira figura é uma colcheia, que vale $\frac{1}{2}$, a segunda é uma semi colcheia, que vale $\frac{1}{4}$, e a terceira é uma semínima, que vale 1. Somando os tempos temos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{4}=\frac{7}{4}$$

Para descobrirmos quanto tempo falta para completar o compasso podemos efetuar a subtração dos quatro tempos totais menos o que já está no compasso.

$$4-\frac{7}{4}=\frac{16}{4}-\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$$

A fim de melhor entender os tempos restantes podemos representar a fração $\frac{9}{4}$ na forma de fração mista: $2\frac{1}{4}$. Então para completar o compasso faltam 2 tempos e $\frac{1}{4}$ de tempo. Este um quarto de tempo deve ser preenchido com no mínimo uma colcheia ou das semicolcheias. Os outros dois tempos podem ser escolhidos de várias formas: uma mínima, duas semínimas, quatro colcheias, uma semínima e duas colcheias, entre outras formas.

Vale observar que, para os músicos, a soma das figuras que completam o compasso ocorre de forma mais intuitiva, juntando as figuras de valor igual para atingir valores mais práticos.

Neste ponto já temos uma boa aplicação dos números racionais que gera propostas de exercícios interessantes em sala de aula. Seguem algumas sugestões de questões que podem ser trabalhadas em atividades de aplicação dos números racionais.

(Questão 1) Quantas semínimas são necessárias para dar o tempo de uma semibreve?

Resposta: Uma semínima tem 1 tempo. Uma semibreve tem 4 tempos. Como $\frac{4}{1} = 4$, são necessárias 4 semínimas para dar o tempo de uma semínima.

(Questão 2) Em um intervalo de um compasso ternário simples, quantas colcheias podem ser colocadas?

Resposta: Um compasso ternário simples deve ser preenchido com 3 tempos. Uma colcheia tem $\frac{1}{2}$ tempo. Logo devemos descobri quantas vezes $\frac{1}{2}$ é igual a 3.

$$\frac{1}{2} \cdot x = 3 \Rightarrow \frac{x}{2} \cdot 2 = 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 6$$

Logo, são necessárias 6 figuras de colcheia para preencher o compasso ternário simples.

(Questão 3) Na pauta da Figura 3.4 , quantos tempos faltam para preencher cada compasso?

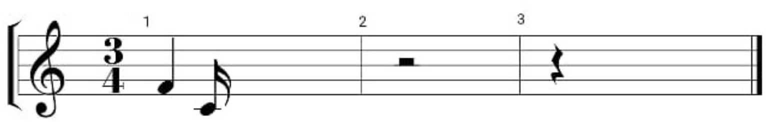


Figura 19 – Compasso - Questão 3

Resposta: Compasso 1: já tem uma semínima (1 tempo) e uma colcheia ($\frac{1}{2}$ tempo), que totaliza um tempo e meio.

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Como a fórmula de compasso manda que tenha 3 tempos no compasso, temos:

$$3 - \frac{3}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Portanto falta um tempo e meio para completar o compasso 1.

Compasso 2: Tem uma figura de pausa mínima, que representa 2 tempos em silêncio na música. Temos que $3 - 2 = 1$, logo falta 1 tempo para completar o compasso.

Compasso 3: A figura é uma pausa semínima, que representa 1 tempo em silêncio. Para completar os 3 tempos do compasso, faltam 2 tempos.

(Questão 4) O compasso da Figura 20 deve ser preenchido com mais 4 figuras de notas. Quais figuras, e em quais quantidades, devem ser usadas para preenchê-lo?

Figura 20 – Compasso - Questão 4

Resposta: O compasso conta com uma pausa de colcheia, uma nota semínima e uma nota colcheia. Somando os valores das figuras temos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 1 = 2$$

Então os outros dois tempos restantes devem ser preenchidos com 4 figuras. Temos duas opções para este preenchimento.

Primeira opção: quatro figuras de tempos iguais. Temos que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Portanto podemos preencher o compasso com quatro figuras de meio tempo, ou seja, com quatro colcheias. Como a questão especifica que são notas, não precisamos nos preocupar com as pausas de mesmo valor.

Segunda opção: Uma semínima, uma colcheia e duas semicolcheias. Somando o valor das figuras, temos os 2 tempos restantes:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

As questões aqui propostas são apenas uma amostra de como podem ser tratadas as operações com frações. Propostas mais elaboradas podem ser feitas pelo docente que se propor a trabalhar com o tema.

3.5 Os números e a execução de uma música

No campo musical é comum falar em modificações nas músicas. Adaptações, mudanças de ritmos, floreios, transposições, interpretações, são formas de modificar uma música. São usadas para fazer novas versões de músicas já existentes, para fazer homenagens, para facilitar a execução da música usando outro instrumento ou até para cantores poderem alcançar as notas mais extremas de determinada melodia.

Em todos os casos, as modificações podem ser feitas no campo numérico, de modo a determinar o melhor resultado. Ressaltamos que a nossa pretensão não é dizer que este é o modo que os músicos fazem sempre. Com o advento da tecnologia, existem diversos softwares e até aplicativos para smartfones que resolvem diversas questões musicais.

Das modificações musicais citadas, usemos a **mudança de ritmo** para entender como os números podem traduzir a mudança ocorrida na música.

Vamos utilizar um trecho da música Für Elise, do composior alemão Ludwing van Beethoven. A Figura 21 trás o trecho inicial da primeira pauta da partitura (disponível no Portal Domínio Público), sendo que nosso estudo terá como foco os primeiros 5 compassos.

Figura 21 – Trecho de Für Elise

Antes de iniciar nossa leitura da pauta apresentada é necessário informar que a partitura foi editada de modo a deixar visíveis apenas os elementos e figuras necessários para nosso trabalho, sem que a melodia fosse descaracterizada.

A pauta segue a leitura conforme a clave de sol, a fórmula de compasso é 3 por 8 e logo no início temos duas notas (mi e ré, a saber) semi colcheias compondo o que é chamado de **anacruse**.

A anacruse é uma sequência de notas que precede o primeiro tempo forte do primeiro compasso da música. Isto quer dizer que, nesta peça analisada, a contagem do tempo deverá ter início juntamente da terceira nota que aparece na pauta. Então, apesar de não ter o valor correto indicado pela fórmula de compasso, não quer dizer que está errado.

Após a anacruse, se contarmos os valores das figuras, podemos notar que cada compasso está preenchido com apenas um tempo e meio. No primeiro compasso (após a anacruse) há 6 semicolcheias, que valem $\frac{1}{4}$ de tempo, cada uma. Como $6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$. No segundo compasso, temos uma colcheia, uma pausa de semi colcheia e três semi colcheias. Somando estes valores temos: $\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 1 = 1,5$. E assim também ocorre nos próximo compassos.

Poderia-se pensar, então, que a fórmula de compasso deveria ser 1,5 por 4. No entanto, os números que devem ser usados para indicar os tipos de compasso devem ser inteiros. Então multiplica-se por dois a fórmula que seria 1,5 por 4 e obtém-se a fórmula correta 3 por 8.

Então, o compasso é ternário. Existem diversos ritmos musicais que têm compasso ternário. No caso específico da balada de Beethoven, o ritmo se chama valsa.

Como já foi citado, vamos analisar uma mudança de ritmo utilizando a melodia de Für Elise. A modificação de que falamos é bastante comum no cenário musical brasileiro: a transformação desta valsa em um funk.

O funk é um ritmo que tem compasso quaternário (4 por 4, mais especificamente). Aliás, a maior parte das músicas populares têm compasso quaternário. Surge então a questão: como encaixar a melodia de uma valsa em um funk? Que equivale a questionar: como encaixar a melodia de um compasso ternário em um compasso quaternário? A resposta é simples: mudando a melodia.

Isto acontece porque estamos tratando de ritmo cujos compassos são primos entre si. Um possui a contagem em 3 tempos, sendo que o primeiro tempo é o mais forte. O outro possui 4 tempos, sendo o primeiro é o tempo mais forte. No momento da contagem, ao tentar encaixar os dois, sobra sempre um tempo do quaternário, como mostra a Figura 22.

Fórmula de Compasso	Contagem dos tempos
$\frac{3}{8}$	**1** 2 3
$\frac{4}{4}$	**1** 2 3 4

Figura 22 – Correspondência dos tempos

Para lidar com o tempo restante existem algumas alternativas. Vamos tratar de uma delas: o prolongamento de uma ou mais notas, a fim de completar o tempo restante.

Como a ideia de fazer versões de músicas com outros ritmos não é original, contamos com vasto acervo na internet que podem ilustrar estas modificações. Então, podemos usar a versão em funk de Für Elise, intitulada "Batidão para Elisa"(CLARINDO, 2020).

A Figura 23 trás uma proposta de como ficaria o início da música Batidão para Elisa na partitura, de modo simplificado.

Este trecho foi montado em uma plataforma online para criação e edição de partituras. O último compasso não condiz totalmente com a música a que se refere, pois foi editado para

Figura 23 – Trecho de Batidão para Elisa

aparecer apenas o trecho que estamos estudando.

Ao compararmos com a partitura original podemos notar que não há presença de anacruse. Além disso, as figuras em sua maioria são colcheias, enquanto na original eram semicolcheias. Perceba que a figura dobrou de tempo (de um quarto da semicolcheia para meio tempo da colcheia), mas isto não representa necessariamente uma mudança na melodia, e sim na velocidade da execução.

No segundo compasso da versão há o primeiro prolongamento, aplicado à nota lá. Esta nota, na partitura escrita por Beethoven, tem o tempo de uma colcheia, ou seja, meio tempo. Na versão de Luam, a nota lá vem representada por uma semibreve que dura quatro tempos. Quer dizer que a nota fica mais tempo soando, ou seja, foi prolongada. Nos compassos 4, 5 e 6, há novo prolongamento, com notas que antes duravam apenas meio tempo, e agora duram dois tempos.

Esta foi a forma que o autor encontro para adequar a música ao compasso quaternário, sem que houvesse descaracterização da melodia. Se muitas notas tivessem seu tempo alterado, isto poderia resultar em uma música que em nada lembraria a original.

Ouvindo a música completa é possível perceber que o autor repete determinados trechos ou notas, apenas como recurso artístico, para embelezar a melodia e adequar a música ao estilo do funk.

Com a mudança de ritmo e as adaptações na melodia, temos uma nova música. É diferente da que foi usada de inspiração, mas traz muitos elementos da original e, quando reproduzia, inevitavelmente lembra a melodia original. Por isto pode ser chamada de **versão**, não incorrendo em plágio, visto que até o nome da nova música fazer referência à obra de Beethoven. A obra intitulada Für Elise é uma balada e seu título significa "Para Elisa", sendo inclusive intitulada desta forma em português.

4 Considerações Finais

4.1 Relato de experiência

Trago esta seção de capítulo em primeira pessoa para fazer um relato de experiência que tive usando a teoria musical para estudar frações em sala de aula.

A música e a matemática sempre foram duas paixões que tive e tenho. Após alguns anos estudando música, entrei na faculdade para estudar Licenciatura em Matemática e vi a possibilidade de unir os dois assuntos que tanto gosto.

Após a graduação eu comecei a dar aulas de matemática para alunos dos sexto e sétimo anos em uma escola estadual. Na época, parte do conteúdo previsto para ser trabalhado com o sétimo ano era números racionais. Fiz então um planejamento que previa durar cinco aulas, mas que durou mais que o planejado pela empolgação dos alunos.

Nas duas primeiras aulas eu fiz a apresentação dos elementos da teoria musical que os alunos precisam conhecer. Para esta apresentação seria mais didático que eu tivesse levado um instrumento para executar algumas notas indicadas em partituras, mas pelas condições da época eu usei um teclado virtual, que pode facilmente ser acessado pela internet. Desta forma, além de ver os nomes das notas e outros elementos, os alunos puderam ouvir o que estava escrito em partituras.

Neste caso é importante entender que não se está ensinando música para os alunos. São apenas alguns elementos para o entendimento da atividade posterior. Para ensinar a teoria musical para os alunos eu usei um projetor de mídia e fazia anotações no quadro com observações que eles precisam se lembrar. Os alunos demonstraram bastante curiosidade e animação porque agora estavam aprendendo a ler "formiguinhas", fazendo referência aos desenhos animados.

Nas próximas aulas três aulas utilizei o quadro e giz para fazer a atividade de leitura dos tempos das notas de um trecho de partitura, somando as frações que representavam cada tempo. Fiz em conjunto com a sala pedindo que eles ajudassem a efetuar as somas, mostrando como as frações no final completavam o tempo do compasso.

Fiz, também no quadro, a atividade de completar um compasso fazendo a subtração do tempo total do compasso pelo tempo já escrito e escolhendo as figuras que cabiam no restante do compasso. Ao final foram destinada duas aulas para que os alunos replicassem os exemplos em atividades em dupla.

Para professores que desejam utilizar o tema em sala de aula e que não tenham a afinidade com a teoria musical por ser interessante utilizar a interdisciplinaridade da proposta e levar um professor de música para explicar os principais elementos para os alunos.

Uma detalhe que pode ajudar é usar folhas com as pautas já impressas (ou de um caderno de música ou de folhas imprimidas) para poupar o tempo dos alunos, que não precisariam fazer a pauta a cada atividade. Não havendo recurso para tanto, é possível tornar a folha de caderno convencional em folha com pautas musicais fazendo a divisão das linhas como é mostrado em vermelho na Figura 24.

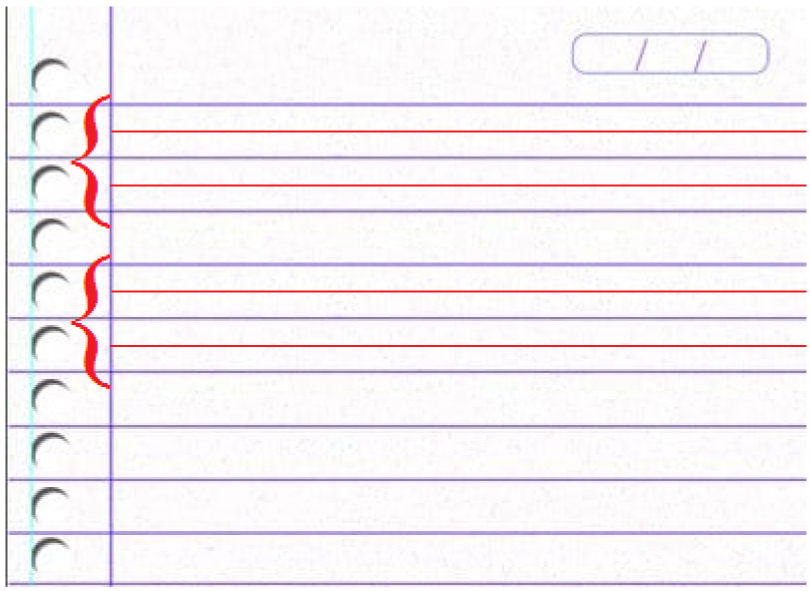


Figura 24 – Linhas da folha de caderno transformadas em pautas musicais

4.2 Conclusões finais

Com o estudo realizado conseguimos compreender como os conhecimentos matemáticos foram importantes na construção da teoria musical ocidental. O uso de números racionais no entendimento da música orientou a criação dos elementos fundamentais do estudo da música.

É possível concluir que a concepção musical etá profundamente atrelada ao conhecimento matemático. Seja na história da teoria musical, seja no entendimento dos elementos musicais e até na execução de uma música, os números racionais podem ser usados para traduzir e explicar qual a relação entre as figuras da partitura.

Ademais, vimos que é possível oferecer outras formas de aplicações dos números racionais que não sejam as convencionais, como cálculos com fatias de pizza, divisão de pedaços de chocolate, quantidade de ingredientes de receitas de bolo.

E para ilustrar esta possibilidade, tenho um relato de experiência com turmas de sexto ano do ensino fundamental. Enquanto era professora nessas turmas, tive a oportunidade de fazer um estudo de frações utilizando a teoria musical. Utilizei as figuras musicais e suas durações para trabalhar a soma e subtração de frações.

A reação dos alunos foi de grande curiosidade pois além de aprenderem o conteúdo obrigatório, estavam aprendendo a ler partitura. Por conta dos comentários, outras turmas pediram para fazerem a mesma atividade. Isto demonstra que a música é um assunto que desperta interesse e pode render bons frutos quando inserida no contexto de aprendizagem escolar.

Nosso intuito é fazer com que a matemática seja vista com menos dificuldade, encarada como algo mais próximo de uma diversidade de atividades práticas. e que exemplos não prototípicos rendem bons frutos na aproximação entre o ensino e a aprendizagem, no caso dos números racionais.

Dentro da prática musical as frações deixam de ser apenas frações e acabam sendo (co)significadas.

As pesquisas que fizemos nos apontam propostas de futuros estudos.

Neste sentido, surge, inclusive, uma proposta para futuros estudos: a análise da presença de elementos matemáticos em produções de outras culturas.

Apêndice

Vida e Obra de Diderot

O filósofo e escritor francês Denis Diderot nasceu em 5 de outubro de 1715, em Langres, e morreu em Paris, aos 68 anos.

Inicialmente, a família de Diderot quis que ele seguisse uma carreira eclesiástica. Aos 11 anos recebeu inclusive a tonsura do então bispo de Langres. Entretanto, ele não conseguiu herdar a prebenda de seu tio (o cônego Didier Vigneron), tendo que abandonar a intenção da profissão clerical.

Aos 16 anos, passou a frequentar o colégio Harcourt (Liceu Sanit-Louis) e quatro anos depois recebeu se formou como mestre em artes na Universidade de Paris.

Além de ser filósofo, também escrevia artigos de crítica de arte, e se dedicou na literatura destacando-se principalmente nos romances. No entanto, sua maior obra foi a Encyclopédie, da qual foi cofundador, editor chefe e contribuidor.

Diderot viveu no século XVIII, época em que a área intelectual da França passava pela revolução do Iluminismo. Este contexto histórico ficou bastante marcado na obra do escritor, que é marcada pela exaltação da razão, assim como outros famosos filósofos da época.

Um fato interessante sobre a influência iluminista nas obras de Diderot remonta à prisão do autor. Em sua peça Lettres sur les aveugles a l'usage de ceux qui voient (Cartas sobre os cegos para uso por aqueles que veem), Diderot abordou temas como deísmo, ceticistmo e materialismo ateu, e tal conteúdo o levou para a cadeia.

Referências

BARROSO, J. Projeto araribá: matemática: 6º ano do ensino fundamental. Moderna, 2018. Citado na página 16.

CABRAL, R. B. *et al.* Matemática e música: uma proposta de aprendizagem. Universidade Federal de Goiás, 2015. Citado na página 17.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. [S.l.]: Gradiva, 2000. Citado na página 16.

CARAÇA, B. d. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. [S.l.]: Gradiva, 2000. Citado na página 19.

CLARINDO, L. **LUAM - Batidão para Elisa (a version of Fur Elise)**. [S.l.]: YouTube, 2020. Citado na página 45.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática 6. ano**. [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 16.

FERREIRA, C. C. *et al.* O ensino da estatística através da música. Universidade Federal de Goiás, 2015. Citado na página 17.

FERREIRA, J. A construção dos números/jamil ferreira. **SBM, Rio de Janeiro**, 2013. Citado na página 16.

GALILEU, R. da R. **Cientistas mapearam 13 emoções que a música causa nas pessoas; entenda**. [S.l.]: Galileu, Revista Online, 8/10/2020. Citado na página 28.

NIETZSCHE, F.; LEBRUN, G.; FILHO, R. R. T. **Obras incompletas**. [S.l.]: Abril São Paulo, 1974. Citado na página 17.

NIVEN, I. **Números: racionais e irracionais**. [S.l.]: SBM, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 24.

NUNES, J. H. **Diderot e as analogias musicais**. [S.l.]: Editora da UFG, 1997. Citado na página 17.

PALISCA, C. V.; GROUT, D. J. Historia da musica ocidental. **Lisboa: Gradiva**, 1994. Citado na página 36.

RIBEIRO, W. Elementos de teoria da música. **São Paulo: Coleção FTD Ltda**, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 34.

SALLES, P. d. T. Pitágoras e a escala musical. 2009. Citado 3 vezes nas páginas 16, 36 e 39.

SILVA, R. Base nacional comum curricular. **MEC**, 2018. Citado na página 17.