

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

ODAILSON GONÇALVES DE OLIVEIRA

O USO DO GEOGEBRA 3D COM REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DE
GEOMETRIA ESPACIAL

PONTA GROSSA
2021

ODAILSON GONÇALVES DE OLIVEIRA

O USO DO GEOGEBRA 3D COM REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DE
GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Matemática na Universidade Estadual de Ponta Grossa. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Fabiane de Oliveira

PONTA GROSSA
2021

O48 Oliveira, Odailson Gonçalves de
O uso do geogebra 3d com realidade aumentada no ensino de geometria espacial / Odailson Gonçalves de Oliveira. Ponta Grossa, 2021.
139 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Profa. Dra. Fabiane de Oliveira.

1. Aprendizagem móvel. 2. Geogebra,. 3. Realidade aumentada. 4. Geometria espacial. 5. Ensino remoto emergencial. I. Oliveira, Fabiane de. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Matemática. III.T.

CDD: 510.7



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
Av. General Carlos Cavalcanti, 4748 - Bairro Uvaranas - CEP 84030-900 - Ponta Grossa - PR - <https://uepg.br>

TERMO

TERMO DE APROVAÇÃO

ODAILSON GONÇALVES DE OLIVEIRA

“O USO DO GEOGEBRA 3D COM REALIDADE AUMENTADA NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa 15 de dezembro de 2021.

Membros da Banca:

Profa. Dra. Fabiane de Oliveira - (UEPG) – Presidente

Profa. Dra. Roberta Suero - (IFPR)

Profa. Dra. Luciane Grossi - (UEPG)

Profa. Dra. Scheila Valechenski Biehl - (UEPG) – Suplente



Documento assinado eletronicamente por **Adriana Aparecida Telles, Secretário(a)**, em 08/12/2021, às 09:40, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **Fabiane Oliveira, Coordenador(a) do Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado Profissional**, em 15/12/2021, às 16:46, conforme Resolução



UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Luciane Grossi, Professor(a)**, em 15/12/2021, às 16:47, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Roberta Suero, Usuário Externo**, em 15/12/2021, às 16:47, conforme Resolução UEPG CA 114/2018 e art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida no site <https://sei.uepg.br/autenticidade> informando o código verificador **0778487** e o código CRC **880A8DF7**.

Dedico este trabalho à minha família, em especial à mãe Catarina e ao meu irmão Osvaldinei, que me deram a maior força. Todas as minhas conquistas eu devo a vocês.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me proporcionado esta experiência maravilhosa que foi cursar e concluir o mestrado.

À minha família, pelo apoio e compreensão. Em especial, à minha mãe Catarina Gonçalves de Oliveira e ao meu irmão Osvaldinei Gonçalves de Oliveira, pelo incentivo.

Aos professores do PROFMAT da UEPG, pelo profissionalismo e dedicação. Por todas as vezes em que, mesmo não estando em sala de aula, dedicaram diversos momentos para nos ajudar.

Em especial à Prof^ª. Dr^ª. Fabiane de Oliveira, por todos os momentos em que dedicou sua atenção para me orientar no desenvolvimento desta pesquisa, e pacientemente esclareceu todas as minhas dúvidas.

Às minhas colegas Gisele Karina Pysklevitz, Lucimara Siqueira e Siliane Machado Glomba, por todos os momentos que passamos juntos, dividindo nossas alegrias e frustrações. Foi uma honra ter pessoas como vocês ao meu lado durante o curso.

RESUMO

Esta pesquisa, realizada em nível exploratório, teve como objetivo geral investigar quais são as contribuições do uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA (Realidade Aumentada), para o estudo de sólidos geométricos. Tendo em vista esse objetivo, fez-se uma pesquisa bibliográfica e se elaborou uma proposta didática, a qual foi aplicada para os acadêmicos do segundo ano do curso de licenciatura em matemática. A proposta didática envolveu conteúdos relacionados ao estudo de prismas, pirâmides e corpos redondos, bem como o cálculo do volume desses sólidos. Com as atividades, buscou-se explorar algumas possibilidades que o aplicativo oferece para o ensino de geometria espacial, e investigar se estas contribuíram para a compreensão dos conteúdos abordados, e também como foi a receptividade e a desenvoltura dos alunos quanto ao uso do aplicativo. A aplicação da proposta didática ocorreu de forma remota, realizada em quatro encontros com duração de duas horas. A coleta de dados ocorreu por meio do envio de capturas de tela do *smartphone*, pelos participantes, durante as atividades, e também pela aplicação de questionários. Ao fazer a análise dos dados, se constatou que o aplicativo auxiliou os alunos na visualização de sólidos geométricos tridimensionais, facilitando-lhes a percepção de características que poderiam passar despercebidas em uma representação bidimensional. Constatou-se também que seu uso permitiu que eles agissem com mais autonomia na abordagem dos conteúdos, explorando e interagindo com as construções geométricas em RA, obtendo assim, por meio de sua própria ação, inúmeras representações visuais das construções, que lhes permitiram observar de diferentes formas as propriedades aplicadas. Com isso, se percebeu que o aplicativo também contribuiu para que os alunos melhorassem suas habilidades de compreensão das construções geométricas tridimensionais. Por fim, podemos destacar que o uso do aplicativo proporcionou momentos de aprendizagem bastante atrativos para os alunos e, de certa forma, contribuiu para que as atividades se tornassem mais envolventes.

Palavras-chaves: GeoGebra, Realidade Aumentada, Geometria Espacial, Aprendizagem Móvel, Ensino Remoto Emergencial.

ABSTRACT

This research, carried out at an exploratory level, had the general objective to investigate what are the contributions of the use of the GeoGebra 3D Graphic Calculator application, with AR (Augmented Reality), for the study of geometric solids. With this objective in mind, a bibliographic research was carried out and a didactic proposal was elaborated, which was applied to the second year academics of the Mathematics degree course. The didactic proposal involved contents related to the study of prisms, pyramids and round bodies, as well as the calculation of the volume of these solids. With the activities, we sought to explore some possibilities that the application offers for the spatial geometry teaching, and to investigate if these contributed to the understanding of the contents covered, and also how was the receptivity and resourcefulness of the students regarding the use of the application. The application of the didactic proposal took place remotely, carried out in four meetings lasting two hours. Data collection took place through the sending of smartphone screenshots by the participants during the activities, and also through the application of questionnaires. When analyzing the data, it was found that the application helped students to visualize three-dimensional geometric solids, making it easier for them to perceive characteristics that could go unnoticed in a two-dimensional representation. It was also found that its use allowed them to act with more autonomy in approaching the contents, exploring and interacting with the geometric constructions in AR, therefore obtaining, through their own action, numerous visual representations of the constructions, which allowed them to observe from different ways the properties applied. Thus, it was noticed that the application also contributed to the students to improve their skills in understanding three-dimensional geometric constructions. Finally, we can highlight that the use of the application provided very attractive learning moments for the students and, in a way, contributed to the activities becoming more engaging.

Keywords: GeoGebra, Augmented Reality, Spatial Geometry, Mobile Learning, Emergency Remote Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Criação de uma imagem em Realidade Aumentada (RA).....	33
Figura 3.2 – Funcionalidade do aplicativo GeoGebra com RA.....	36
Figura 5.1 – Dodecaedro construído como uso de comandos.....	44
Figura 5.2 – Abordagem dos principais comandos e ferramentas a serem utilizados.....	47
Figura 5.3 – Experimento sobre a razão entre paralelepípedos retângulos.....	49
Figura 5.4 – Experimento sobre o cálculo do volume de paralelepípedos retângulos.....	52
Figura 5.5 – Construção de prismas a partir da definição.....	55
Figura 5.6 – Princípio de Cavalieri e o cálculo do volume de prismas de bases não retangulares.....	58
Figura 5.7 – Construção de pirâmides a partir de sua definição.....	60
Figura 5.8 – Visualização do volume da pirâmide.....	62
Figura 5.9 – Construção do cilindro a partir de sua definição.....	65
Figura 5.10 – Construção do cilindro de revolução.....	67
Figura 5.11 – Aplicação do Princípio de Cavalieri para obter o volume do cilindro.....	69
Figura 5.12 – Construção de cones a partir de sua definição.....	71
Figura 5.13 – Construção do cone de revolução.....	73
Figura 5.14 – Aplicação do Princípio de Cavalieri para obter o volume do cone.....	75
Figura 5.15 – Construção da anticlépsidra de revolução no aplicativo.....	77
Figura 5.16 – Estudo do volume da esfera.....	80
Figura 6.1 – Desenvolvimento da quarta construção pelo participante P5.....	83
Figura 6.2 – Desenvolvimento da primeira construção por um dos participantes.....	86
Figura 6.3 – Desenvolvimento e exploração da segunda construção por dois participantes..	87
Figura 6.4 – Desenvolvimento da terceira construção por dois participantes diferentes.....	88
Figura 6.5 – Desenvolvimento da terceira construção por um dos participantes.....	89
Figura 6.6 – Finalização da construção da definição de cilindro por três participantes diferentes.....	92
Figura 6.7 – Construção de cilindros e cones de revolução por diferentes participantes.....	93
Figura 6.8 – Problema encontrado por um participante ao abrir um arquivo compartilhado pelo pesquisador.....	94
Figura 6.9 – Visualização das secções planas do prisma e do cilindro.....	95
Figura 6.10 – Visualização das secções planas do cone e da pirâmide.....	98
Figura 6.11 – Construção da anticlépsidra de revolução por três participantes diferentes.....	99

Figura 6.12 – Construção da anticlépsidra a partir de um cilindro e dois cones por um dos participantes.....	99
Figura 6.13 – Visualização das secções na esfera e na anticlépsidra por dois participantes diferentes.....	100

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Relação de dissertações selecionadas.....	21
Quadro 2.2 – Relação de artigos selecionadas.....	23

LISTA DE SIGLAS

AR	<i>Augmented Reality</i>
ERE	Ensino Remoto Emergencial
RA	Realidade Aumentada

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
1.1	JUSTIFICATIVA.....	15
1.2	PROBLEMA.....	16
1.3	OBJETIVOS.....	16
1.3.1	Objetivo Geral.....	16
1.3.2	Objetivos Específicos.....	16
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO.....	16
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	18
2.1	BUSCA POR TESES E DISSERTAÇÕES.....	18
2.1.1	Metodologia.....	18
2.1.2	Análise e discussão dos dados.....	19
2.2	BUSCA POR ARTIGOS.....	23
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	28
3.1	O ENSINO REMOTO EMERGENCIAL.....	28
3.2	APRENDIZAGEM MÓVEL.....	30
3.3	REALIDADE AUMENTADA NA APRENDIZAGEM MÓVEL.....	32
3.4	O GEOGEBRA COM RA.....	34
4	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	37
4.1	DELINEAMENTO DA PESQUISA.....	37
4.2	PÚBLICO-ALVO DA PESQUISA E NÍVEL DE ENSINO DA PROPOSTA DIDÁTICA.....	38
4.3	APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES.....	38
4.4	O PROCESSO DE COLETA DE DADOS.....	39
5	A PROPOSTA DIDÁTICA.....	41
5.1	PRIMEIRO ENCONTRO.....	42
5.1.1	Primeira atividade: Introdução às funções básicas do aplicativo.....	42
5.1.2	Segunda atividade: Abordagem dos principais comandos e ferramentas utilizadas na oficina.....	44
5.1.3	Terceira atividade: Razão entre dois Paralelepípedos Retângulos.....	47
5.1.4	Quarta atividade: Cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo.....	50
5.2	SEGUNDO ENCONTRO.....	52
5.2.1	Primeira atividade: Estudo da definição de prisma.....	53
5.2.2	Segunda atividade: Cálculo do volume de um prisma.....	55
5.2.3	Terceira atividade: Construção da definição de pirâmide.....	58
5.2.4	Quarta atividade: Volume da pirâmide.....	61
5.3	TERCEIRO ENCONTRO.....	63
5.3.1	Primeira atividade: Estudo da definição de cilindro.....	63
5.3.2	Segunda atividade: Construção do cilindro de revolução.....	65
5.3.3	Terceira atividade: Estudo do volume do cilindro.....	67
5.3.4	Quarta atividade: Estudo da definição de cone.....	70
5.3.5	Quinta atividade: Construção do cone de revolução.....	71
5.3.6	Sexta atividade: Cálculo do volume do cone.....	73
5.4	QUARTO ENCONTRO.....	76

5.4.1	Primeira atividade: Construção e exploração de uma anticlépsidra de revolução.....	76
5.4.2	Segunda atividade: Cálculo do volume da esfera.....	77
6	RELATO E ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA.....	81
6.1	PRIMEIRO ENCONTRO.....	81
6.2	SEGUNDO ENCONTRO.....	85
6.3	TERCEIRO ENCONTRO.....	91
6.4	QUARTO ENCONTRO.....	97
6.5	ANÁLISE DO <i>FEEDBACK</i> DOS PARTICIPANTES SOBRE SUAS HABILIDADES EM GEOMETRIA ESPACIAL E SOBRE AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NA OFICINA.....	100
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	104
7.1	TRABALHOS FUTUROS.....	106
	REFERÊNCIAS.....	108
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIOS APLICADOS.....	113
	APÊNDICE B – <i>SLIDES</i> UTILIZADOS NOS ENCONTROS.....	130

1 INTRODUÇÃO

A geometria espacial é um conteúdo matemático que faz parte da grade curricular tanto do ensino fundamental, quanto do ensino médio. Por ser integralmente baseado em elementos tridimensionais, a abordagem deste conteúdo exige dos professores uma prática de ensino que vai além da explicação clara e precisa, pois é necessário encontrar meios de representar os sólidos geométricos tridimensionais de forma coerente, mas também conduzir um estudo sobre eles que aborde de forma equilibrada as representações gráfica e algébrica, enfatizando a importância de cada uma delas.

Exercer essa prática que transita de forma fluída entre as diferentes representações na geometria espacial representa um grande desafio para o professor, caso ele se mantenha restrito ao uso do livro didático e do quadro, pois estes são instrumentos limitados principalmente no que se refere a representação visual.

No caso dos livros, por mais que se beneficiem de ilustrações de boa qualidade, estas se limitam ao plano bidimensional, e a efetividade da sua assimilação pelo aluno, depende exclusivamente das habilidades visuais dele para perceber a terceira dimensão. Além disso, um outro agravante que se observa nos livros é a tendência em apresentar conceitos matemáticos de forma pronta, dando destaque ao uso das fórmulas. Isso acaba induzindo o professor a uma prática que privilegia a parte algébrica do conteúdo.

Da mesma forma que no livro didático, a representação dos sólidos geométricos no quadro também é restrita ao plano bidimensional, e depende das habilidades visuais do aluno para interpretá-los. Além disso, ela ainda exige do professor uma boa coordenação motora fina, de modo que ao transpor para o quadro a ilustração de um sólido geométrico, este não perca sua característica de tridimensionalidade.

Com isso, percebemos que o uso dos instrumentos básicos da metodologia tradicional é insuficiente para garantir que o ensino da geometria espacial ocorra de forma efetiva. Portanto, faz-se necessária uma busca por metodologias que favoreçam o ensino deste conteúdo no sentido de, não somente apresentar sólidos geométricos de maneira facilmente compreensível, mas fortalecer o elo entre representação gráfica e algébrica, proporcionando ao aluno uma experiência significativa, em que ele tenha facilidade para operar de forma dinâmica e autônoma entre as duas representações, e possa construir os conceitos com base em sua própria experiência (BRASIL, 2017).

Na busca por uma metodologia que contemple essas características, este trabalho aponta para o uso da Aprendizagem Móvel, que é uma metodologia que coloca dispositivos

móveis, como *tablets* e *smartphones*, como instrumentos de aprendizagem, e tem um grande potencial para agregar autonomia ao aluno durante o aprendizado, e também flexibilidade quanto ao uso de diferentes estratégias pelo professor (MEIRELLES; TAROUÇO, 2005). Associamos com a Aprendizagem Móvel o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA (Realidade Aumentada), que é um aplicativo compatível com os sistemas operacionais *Android* e *iOS*, e possibilita abordar a geometria espacial a partir das representações algébrica e gráfica de forma concomitante, e os elementos gráficos são apresentados de forma dinâmica e em RA.

1.1 JUSTIFICATIVA

A representação visual tem um papel muito importante no ensino da geometria espacial. Pesquisas como Andrade (2017) e Bullman (2018), destacam que a visualização em geometria espacial é a base para a construção do pensamento geométrico, pois está diretamente relacionada com a capacidade do aluno de analisar o que está sendo observado. Fainguelernt (1999) salienta que, no contexto da geometria, se o aluno não consegue construir uma imagem mental do que está sendo representado visualmente, dificilmente ele conseguirá atingir um nível de compreensão satisfatório do conteúdo que está sendo abordado.

Nesse contexto, percebe-se a importância de adotar metodologias que favoreçam a parte visual desse conteúdo, e o uso da RA pode ser uma alternativa bastante valiosa. Essa tecnologia compõe um sistema que suplementa o mundo real com objetos virtuais gerados por computador, coexistindo no mesmo espaço e apresentando as seguintes propriedades: combina objetos reais e virtuais no ambiente real; executa interativamente em tempo real; alinha objetos reais e virtuais entre si. (HOUNSELL; TORI; KIRNER, 2019). Assim, torna-se uma ferramenta importante para auxiliar na visualização de objetos matemáticos que os alunos apresentam dificuldade em abstrair ou visualizar, quando apresentada a imagem tridimensional impressa no papel.

Nesse sentido, cabe a elaboração de um estudo que investigue os benefícios do uso dessa tecnologia para o ensino da geometria espacial. Um aplicativo que explora largamente os benefícios dessa tecnologia é a *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA. Com ele é possível proporcionar momentos de experimentação para o aluno, em que ele pode criar e explorar construções geométricas dinamicamente, visualizando-as em RA, e verificar as variantes de uma determinada propriedade aplicada, ou até mesmo interagir com construções prontas envolvendo propriedades matemáticas, podendo explorá-las por sua própria ação.

1.2 PROBLEMA

Quais contribuições o uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, pode trazer para o estudo de sólidos geométricos?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Investigar as contribuições do uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, para o estudo de conceitos e propriedades relacionadas a prismas, pirâmides e corpos redondos, e cálculo de volume destes sólidos.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Fazer uma revisão bibliográfica buscando pesquisas que já tenham investigado o uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, como ferramenta de ensino na educação básica ou superior;
- Elaborar uma proposta didática baseada no uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, abordando conceitos e propriedades relacionadas a sólidos geométricos;
- Aplicar a proposta didática para um grupo de licenciandos em Matemática;
- Analisar as reações dos alunos frente ao uso do aplicativo;
- Investigar se houve mudanças na forma como os alunos compreendiam os conteúdos abordados, e identificar como o uso do aplicativo contribuiu para que elas ocorressem.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em sete capítulos, em que o primeiro deles é a introdução. Neste primeiro capítulo, discorreremos sobre a importância da busca por metodologias diferenciadas, que proporcionem uma abordagem mais visual da geometria, de forma que a efetividade do aprendizado desse conteúdo não seja tão dependente da capacidade do aluno em interpretar figuras tridimensionais representadas em duas dimensões. Apresentamos como um possível caminho para solucionar esse problema o uso de dispositivos móveis em sala de

aula, junto com o aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA, que permite a construção e visualização de sólidos geométricos em RA.

No segundo capítulo apresentamos a revisão de literatura. Esta revisão foi composta de uma busca por teses e dissertações, que abordaram o aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, ou outros aplicativos móveis de RA pra o ensino de geometria espacial; e também de uma busca por artigos científicos que tenham abordado exclusivamente o aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA, no ensino de geometria.

No terceiro capítulo, apresentamos um apanhado sobre pesquisas relacionadas ao ensino remoto, que era a estratégia de ensino em vigor enquanto ocorreu a aplicação da oficina com as atividades da proposta didática desenvolvida nesta pesquisa. Apresentamos também, algumas concepções de autores sobre a aprendizagem móvel, sobre as possibilidades de aliar o uso da RA a ela, finalizando com a apresentação do aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA.

No quarto capítulo apresentamos os procedimentos metodológicos. Nele, descrevemos o delineamento desta pesquisa, o seu público-alvo, a forma como foram aplicadas as atividades da proposta didática, e também os procedimentos adotados para a coleta de dados.

No quinto capítulo, descrevemos a proposta didática que foi desenvolvida e aplicada. Esta proposta foi elaborada com base no uso do aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA, para o ensino de alguns tópicos de geometria espacial, relacionados a prismas, pirâmides e corpos redondos.

No sexto capítulo apresentamos uma análise da forma como ocorreu a aplicação das atividades. Descrevemos os momentos mais relevantes que ocorreram durante a aplicação da oficina, e apresentamos imagens enviadas por diferentes participantes, que ilustram a forma como eles executaram as atividades. Finalizamos este capítulo trazendo uma análise da percepção dos participantes sobre as atividades desenvolvidas.

O sétimo capítulo traz as considerações finais, em que fazemos uma análise geral sobre esta pesquisa, e apontamos sugestões para possíveis trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A pesquisa bibliográfica, segundo Gil (2008), é um tipo de pesquisa frequentemente necessária em qualquer estudo. Segundo o autor, conhecer a produção bibliográfica que já foi produzida sobre o objeto de estudo pode proporcionar ao pesquisador uma quantidade de conhecimentos significativamente maior, se comparado com uma pesquisa feita diretamente com o referido objeto.

Sendo assim, o primeiro passo para o desenvolvimento desta pesquisa se constituiu de uma busca por teses e dissertações que abordam o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA. Tendo encontrado apenas um resultado, optou-se por enriquecer a busca, abrangendo também aqueles trabalhos que utilizaram cada um dos segmentos tecnológicos que compõem o referido aplicativo, ou seja, o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, e outros aplicativos de RA, como instrumentos didáticos para o ensino de geometria espacial.

Além da busca por teses e dissertações, efetuou-se também uma busca por pesquisas que tenham envolvido diretamente o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, e que foram publicadas em forma de artigos. Para essa segunda pesquisa, efetuou-se buscas no portal de periódicos da CAPES, no banco de dados da SciElo e no Google Acadêmico, sendo que apenas nesse último se obteve resultados.

Apresentaremos a seguir os resultados dessa revisão de literatura, descrevendo os métodos utilizados, listando os resultados obtidos e apresentando algumas das ideias mais importantes de cada um deles.

2.1 BUSCA POR TESES E DISSERTAÇÕES

Nesta seção, consta o detalhamento da pesquisa bibliográfica, em que se investigou teses e dissertações que abordam temas relacionados com este trabalho. Serão apresentados os métodos utilizados na pesquisa, os bancos de dados pesquisados, e também a forma como se deu a seleção dos trabalhos encontrados para análise.

2.1.1 Metodologia

Embora o foco desta pesquisa tenha sido buscar e analisar teses e dissertações que abordam o ensino de Geometria Espacial por meio do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, para dispositivos móveis, optou-se também por contemplar pesquisas

relacionadas com cada um dos dois segmentos tecnológicos que compõem o aplicativo, ou seja, o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, sem RA, e outros aplicativos de RA. Justifica-se esta ampliação pelo fato de serem segmentos que compartilham de uma dinâmica de trabalho similar, isto é, a visualização e exploração de elementos geométricos tridimensionais virtuais por meio de dispositivos móveis.

As buscas abrangeram trabalhos concluídos a partir do ano de 2015, até o mês de outubro de 2020, data em que foi realizada esta pesquisa, e foram realizadas nas seguintes bases de dados: Catálogo de Teses e dissertações da CAPES, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e na Lista das Dissertações de Mestrado defendidas no programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Para as duas primeiras, optou-se pelo uso dos seguintes termos: “geogebra”, “geogebra 3d”, “geometria”, “geometria espacial”, “matemática” e “realidade aumentada”. Já na terceira base de dados, a do PROFMAT, restringiu-se aos termos “geogebra 3d” e “realidade aumentada”, dado que sua ferramenta de busca considera apenas as palavras dos títulos dos trabalhos.

O tratamento do material bibliográfico obtido foi realizado com base na metodologia de análise de conteúdo proposta por Bardin (2016). A autora propõe um processo de análise subdividido em três fases: a pré-análise, a exploração do material, e o tratamento dos resultados e inferências.

Na fase da pré-análise, estabeleceu-se um conjunto com três critérios de exclusão, que visaram a eliminação de trabalhos que não contemplavam o objetivo principal da pesquisa. Os critérios aplicados foram os seguintes: 1º) Trabalhos anteriores ao período compreendido entre o ano de 2015 e o mês de outubro de 2020; 2º) Trabalhos que estão presentes em mais de uma base de dados, e em razão disso apareceram em duplicidade entre os resultados; 3º) Trabalhos que não tem relação com o uso de dispositivos móveis no ensino de geometria espacial.

Nas fases seguintes, após a aplicação destes critérios de exclusão, restaram nove trabalhos para serem analisados, análise esta que permitiu a identificação de diferentes critérios, sob os quais foi possível a classificação das dissertações em diferentes categorias e subcategorias. Esse processo, bem como a relação de trabalhos selecionados para a análise, serão descritos detalhadamente na próxima seção.

2.1.2 Análise e discussão dos dados

Como já foi mencionado, as buscas nas bases de dados foram realizadas com a

utilização de diferentes combinações das palavras chaves, seguida pela aplicação dos critérios de exclusão sobre o total de resultados obtidos. As combinações utilizadas em cada uma das buscas, bem como o número de trabalhos obtidos com cada uma, podem ser vistos na Tabela 2.1, a seguir.

Tabela 2.1 – Quantitativo de dissertações encontradas nas bases de dados.

BASE	Palavras-chave	Resultados	Palavras-chave	Resultados
BDTD	Geogebra; geogebra 3d; geometria; geometria espacial; matemática; realidade aumentada	0	geogebra; realidade aumentada	1
			geogebra; geometria espacial	33
			geogebra 3d; geometria	95
			geogebra 3d; matemática	128
			realidade aumentada; geometria	18
			realidade aumentada; matemática	1
CAPES	geogebra; geogebra 3d; geometria; geometria espacial; matemática; realidade aumentada	0	geogebra; realidade aumentada	0
			geogebra; geometria espacial	35
			geogebra 3d; geometria	12
			geogebra 3d; matemática	15
			realidade aumentada; geometria	23
			realidade aumentada; matemática	29
PROFMAT	geogebra 3d; realidade aumentada	0	geogebra 3d	7
			realidade aumentada	8
Total de trabalhos encontrados				405
Trabalhos restantes após a aplicação do 1º critério de exclusão				267
Trabalhos restantes após a aplicação do 2º critério de exclusão				158
Trabalhos restantes após a aplicação do 4º critério de exclusão				9

Fonte: O autor.

Ao observar a Tabela 2.1, diante do número expressivo de trabalhos obtidos com as buscas, podemos notar a importância da elaboração cuidadosa dos critérios de exclusão. Eles permitiram eliminar do levantamento de dados uma grande quantidade de trabalhos que não correspondiam com a temática de pesquisa, e por esse motivo sua análise não traria grandes contribuições para a mesma.

Após a aplicação dos quatro critérios de exclusão, restaram apenas nove dissertações, as quais estão listadas no Quadro 2.1, que traz também o ano da defesa e a instituição de ensino em que cada uma foi desenvolvida.

Quadro 2.1 – Relação de dissertações selecionadas.

ID	Título	Ano	Instituição
1	A Aprendizagem da Geometria Espacial Potencializada por meio de um Aplicativo de Realidade Aumentada na Perspectiva do Mobile Learning	2019	PUCRS
2	Criação de um Aplicativo de Realidade Aumentada para o Ensino da Geometria	2019	UNICAMP
3	Estudo de Alguns Poliedros com o Auxílio do <i>Software</i> Geogebra no Tablet	2017	PUCMG
4	Geometria Espacial: Uso do Aplicativo GeoGebra em Smartphones	2018	UFGO
5	O Desenvolvimento do Aplicativo RA.Geo: Contribuições da Realidade Aumentada para o Ensino de Geometria Espacial	2017	IFGO
6	O uso de <i>software</i> e seu impacto no tipo de resolução de exercícios de geometria	2018	UFGO
7	Realidade Aumentada como Interface para a aprendizagem de Poliedros do Tipo Prismas	2019	UFSE
8	Uso da Realidade Aumentada no Ensino da Geometria Espacial	2018	UEPB
9	Utilização de dispositivos móveis e recursos de Realidade Aumentada nas aulas de Matemática para elucidação dos Sólidos de Platão	2017	UNESP

Fonte: O autor.

A análise dos trabalhos listados no Quadro 2.1, possibilitou a identificação de cinco grandes categorias, sob as quais se fez a classificação dos trabalhos em diferentes subcategorias, que estão listadas e descritas a seguir.

Categoria I: Nível de Ensino (NE) – Nesta categoria, as pesquisas analisadas podem ser classificadas pelo nível de ensino que elas focam. Analisando estas atividades, pode-se identificar três subcategorias diferentes: NE1 – Ensino fundamental dois (2 Dissertações); NE2 – Ensino médio (6 Dissertações); NE3 – Ensino superior (1 Dissertação).

Categoria II: Conteúdo Matemático Abordado (CA) – Esta categoria permitiu a identificação de quatro subcategorias diferentes, as quais permitiram a classificação dos trabalhos segundo o conteúdo matemático abordado nas atividades propostas. As categorias identificadas foram: CA1 – Caracterização de sólidos de revolução e poliedros (1 Dissertação); CA2 – Cálculo de área e volume, e planificação de sólidos (3 dissertações); CA3 – Estudo dos prismas (3 Dissertações); CA4 – Sólidos de Platão (2 Dissertações).

Categoria III: Estratégia Pedagógica (EP) – Com esta categoria, foi possível a identificação de três subcategorias diferentes entre as pesquisas analisadas. Estas categorias distinguem os trabalhos encontrados de acordo com o tipo de estratégia pedagógica adotada

em cada um, ou seja, como o pesquisador conduziu as atividades com o aplicativo móvel, para abordar o conteúdo matemático escolhido. As subcategorias identificadas são as seguintes: EP1 – Construir e validar um aplicativo de RA para o ensino de geometria espacial (4 Dissertações); EP2 – Propor uma sequência didática baseada no uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, ou em outro aplicativo de RA (4 Dissertações); EP3 – Desenvolver um aplicativo de RA com os alunos (1 Dissertação).

Categoria IV: Aplicativo Utilizado (AU) – A análise dos trabalhos com base nessa categoria, permitiu a identificação de subcategorias que classificam as dissertações encontradas segundo o aplicativo utilizado nas atividades propostas. As subcategorias que puderam ser identificadas são as seguintes: AU1 – GeoGebra 3D com RA (1 Dissertação); AU2 – GeoGebra 3D sem RA (2 Dissertações); AU3 – Geometry-AR (1 Dissertação); AU4 – Aplicativo desenvolvido pelo próprio autor (5 Dissertações). Entre os trabalhos pertencentes à categoria AU4, identificamos que foram empregadas quatro ferramentas diferentes no desenvolvimento, as quais podem ser identificadas como: AU4 I – *Unity* (5 Dissertações); AU4 II – *Vuforia* (3 Dissertações); AU4 III – Linguagem de programação *C#* (2 Dissertações); AU4 IV – *Blender* (1 Dissertação), sendo que em cada trabalho foram empregadas mais de uma dessas ferramentas.

Categoria V: Objetivo da Inserção (OI) do aplicativo – Segundo esta categoria, pode-se classificar os trabalhos em três subcategorias diferentes. Estas subcategorias foram utilizadas para distinguir os diferentes papéis que o aplicativo utilizado desempenhou durante o desenvolvimento das atividades. As subcategorias foram designadas da seguinte forma: OI1 – Facilitar a visualização de sólidos geométricos (5 Dissertações); OI2 – Promover a autonomia do aluno durante o aprendizado (3 Dissertações); OI3 – Tornar as aulas mais atrativas (1 Dissertação).

A partir da análise dos trabalhos, percebeu-se que até setembro de 2020, o GeoGebra 3D, com RA, não havia sido abordado em nenhuma Tese de Doutorado. Observou-se também que entre as pesquisas de mestrado, suas potencialidades como instrumento de aprendizagem foram investigadas apenas por Ferreira (2018), o qual se propôs a analisar a diferença no grau de dificuldade da resolução de exercícios de geometria espacial, com e sem o uso da RA.

Observando as diferentes categorias que emergiram da análise dos trabalhos, pode-se perceber que, no âmbito do ensino da geometria espacial, o uso de aplicativos baseados em RA e da *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, sem RA, para dispositivos móveis, vem ocorrendo com mais frequência em conteúdos do ensino médio.

A análise da quarta categoria em especial, permitiu concluir que o uso da RA em sala

de aula proporcionou uma forma de visualização mais efetiva dos sólidos geométricos tridimensionais, e com isso, facilitou a sua compreensão pelos alunos, como foi constatado por Andrade (2017), Silva (2017), Silva (2019) e Oliveira (2019). Compartilhando uma dinâmica de trabalho bastante parecida, o uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, sem RA, também apresentou resultados positivos, como foi relatado por Goodwin (2017) e Silva (2018), que relataram uma abordagem mais dinâmica e interativa da geometria espacial, possibilitando um aprendizado baseado na própria ação do aluno.

2.2 BUSCA POR ARTIGOS

A busca por artigos abrangeu os trabalhos publicados no período compreendido entre o ano de 2015 e o mês de agosto de 2021. Nessa busca, optou-se por selecionar apenas os trabalhos que estavam diretamente relacionados com o uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, no ensino de geometria espacial.

As buscas no portal de periódicos da CAPES e no banco de dados da SciELO não obtiveram nenhum resultado. Sendo assim, realizou-se uma busca no Google Acadêmico, obtendo-se com ela nove artigos, os quais estão listados no Quadro 2.2, a seguir.

Quadro 2.2 – Relação de artigos selecionadas.

ID	Título	Ano	País
1	Teaching Advanced Mathematical Concepts with Origami and GeoGebra Augmented Reality	2019	Sérvia
2	Discovering everyday mathematical situations outside the classroom with MathCityMap and GeoGebra 3d	2020	Alemanha
3	A need analysis for the development of augmented reality based geometry teaching instruments in junior high schools	2020	Indonésia
4	Engaging pre-service mathematics teacher in using augmented reality technology: the case of “3d calculator” app	2020	Vietnã
5	Exploring real world environments using potential of GeoGebra AR	2020	Espanha
6	Exploring the potential use of GeoGebra augmented reality in a <i>project-based learning environment: The case of geometry</i>	2020	Indonésia
7	Learning Media on Mathematical Education based on Augmented Reality	2021	Coreia do Sul
8	Augmented Reality assisted by GeoGebra 3-D for geometry learning	2021	Indonésia
9	Examining Students’ Intention to Use Augmented Reality in a Project-Based Geometry Learning Environment	2021	Indonésia

Fonte: O autor.

A análise destes trabalhos se diferenciou da que foi realizada com as dissertações. Neste caso, entendeu-se que uma análise individualizada, ao invés do uso da categorização, se mostraria mais eficiente, uma vez que se tem um número pequeno de trabalhos, e todos convergem para o uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, no ensino de geometria espacial. Desse modo, a análise individualizada permitiu abordar de forma mais detalhada o objetivo com que cada autor desenvolveu sua pesquisa, a forma como ocorreram as atividades, e os resultados obtidos em cada uma delas.

Budinski e Lavicza (2019), relatam uma experiência feita com alunos de ensino médio, de uma escola da Sérvia, abordando problemas de maximização, utilizando origami e o aplicativo GeoGebra *Augmented Reality* (AR), que é versão da *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D* anterior à que foi utilizada neste trabalho. As atividades desenvolvidas visaram maximizar o volume de um tipo específico de caixa, utilizando para isso cálculos manuais, a modelagem da caixa utilizando origami, e também o aplicativo GeoGebra AR. Os autores relataram que houve resultados positivos, além da empolgação dos alunos em explorar visualmente, em RA, o modelo da caixa. Também se enfrentou problemas quanto a compatibilidade dos dispositivos dos alunos com a tecnologia da RA, sendo necessário organizá-los em pequenos grupos para que fosse possível a todos realizar a experiência com a RA.

Lavicza, Haas e Kreis (2020), abordaram três recursos tecnológicos diferentes: os aplicativos GeoGebra AR e o MathCityMap, e a impressão em 3D. Nesse contexto, os alunos utilizaram o MathCityMap como ferramenta norteadora das atividades; o aplicativo GeoGebra AR para auxiliá-los a identificar formas geométricas tridimensionais no mundo real, ao seu redor, ou construí-las quando necessário; e com a ferramenta de impressão 3D, os alunos conseguiam transformar algumas formas criadas com o GeoGebra em objetos concretos. Nessa pesquisa, os autores destacaram que a possibilidade de visualização das formas em RA, aliada com a aplicação de medidas em proporções reais às formas criadas no GeoGebra, tornaram a resolução de problemas de geometria espacial mais empolgante e atrativa para os alunos.

Lainufar, Mailizar e Johar (2021a), apresentam uma pesquisa envolvendo alunos, professores e diretores de currículo, de uma escola da Indonésia, como o objetivo de apontar, por meio de questionários, entrevistas e observações de sala de aula, se os conteúdos de geometria espacial estavam sendo abordados de forma satisfatória em sala de aula, quais as principais dificuldades dos alunos em relação a estes conteúdos, e se os professores conheciam e utilizavam tecnologias digitais em sua prática pedagógica. Com base nos dados

obtidos, os autores concluíram que cinco em cada seis alunos tinham dificuldades para imaginar formas geométricas tridimensionais diferentes daquelas apresentadas pelos professores, enquanto que estes últimos atribuíam déficit do aprendizado à própria falta de interesse. Eles concluíram também que os conteúdos de geometria espacial estavam dispostos de forma apropriada no currículo escolar, porém as metodologias utilizadas pelos professores eram demasiadamente passivas, desfavorecendo o interesse dos alunos. Após a intervenção utilizando o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, observou-se uma melhora significativa na motivação dos alunos, o que proporcionou um melhoramento no aprendizado da geometria espacial.

Em Dung (2020), tem-se um relato de experiência, em que acadêmicos do bacharelado em ensino de matemática, da Universidade de Educação da Cidade de Ho Chi Minh, no Vietnã, deveriam cursar uma disciplina sobre tecnologias educacionais, na qual o GeoGebra era o tema principal. O autor descreve a forma como foi feita a abordagem do aplicativo, desde o seu *download*, acessando o serviço de distribuição digital de aplicativos do seu dispositivo móvel, até a forma como são compartilhadas as construções geométricas feitas pelos acadêmicos. Nessa pesquisa, os autores destacam a importância de se abordar o aplicativo GeoGebra AR, na formação inicial dos docentes. Segundo eles, esse aplicativo é uma ferramenta muito valiosa para o ensino de matemática, pois possibilita o manuseio de imagens virtuais em três dimensões.

Ancochea e Cárdenas (2020), realizaram um projeto com alunos de uma escola de Barcelona, baseado no aplicativo MathCityMap, e utilizando o aplicativo GeoGebra AR como ferramenta de apoio. As atividades foram desenvolvidas dividindo-se os alunos em equipes, e eles deveriam percorrer rotas, fazendo passeios por diferentes lugares da cidade, e em alguns lugares eles se deparavam com problemas matemáticos envolvendo cálculo de área de superfície e volume de sólidos geométricos, os quais eram apresentados por meio do aplicativo MathCityMap. Como instrumento de coleta de dados, os autores utilizaram formulários do Google, por meio dos quais eles constataram que 65% dos alunos demonstraram ter aprimorados seus conhecimentos de geometria espacial, sendo que mais de 70% deles afirmaram que as atividades realizadas foram interessantes.

Lainufar, Mailizar e Johar (2021b), relataram a fase de experimentação e validação de uma proposta didática envolvendo o GeoGebra AR e a aprendizagem baseada em projetos. Os autores realizaram uma aplicação inicial da metodologia a um grupo de seis alunos, e em seguida fizeram um teste de campo com um número maior de alunos, e neste último caso, analisaram também a opinião de alguns professores com relação a viabilidade da aplicação da

proposta. Ao final desse estudo, eles concluíram que a proposta didática se mostrou eficiente, de fácil utilização, e contribuiu positivamente para o aprimoramento das habilidades visuais-espaciais dos alunos.

Kounlaxay *et al* (2021), relatam um estudo envolvendo acadêmicos e professores da Faculdade de Engenharia da Universidade Souphanouvong, em Laos, na Coreia do Sul. Nesse estudo, eles avaliaram a capacidade dos acadêmicos de criar e estudar sólidos geométricos utilizando o GeoGebra AR. Ao final do estudo, os autores perceberam que os participantes da pesquisa não se sentiram seguros quanto a sua própria capacidade de utilizar o aplicativo, mas constataram que a maioria deles aprovou o uso do aplicativo ao afirmar que tornou as atividades mais agradáveis e envolventes.

Em Widada *et al.* (2021), os autores fazem uma abordagem da geometria espacial utilizando o GeoGebra AR, em conjunto com o *software* GeoGebra para computador, com alunos de uma escola de Bengkulu, na Indonésia. O uso do aplicativo com RA se deu como objetivo de proporcionar uma forma de visualização mais livre para os alunos, dando-lhes mais autonomia para explorar figuras e sólidos geométricos, e facilitar a sua identificação em situações reais. Os autores concluíram que o uso do aplicativo tornou as aulas mais interessantes e divertidas, sendo possível identificar um aprendizado mais efetivo se comparado com as metodologias tradicionais.

Mailizar e Johar (2021), relatam um estudo feito com alunos de uma escola da Indonésia, que buscou investigar questões relacionadas a atitude dos alunos frente ao uso do GeoGebra AR, no estudo da geometria espacial. O estudo mostrou que a aprovação, por eles, do uso do aplicativo para o estudo da matemática se deu na medida em que eles foram percebendo a sua utilidade para este fim. Os autores salientam a importância do professor mostrar aos alunos o quanto o uso do aplicativo pode melhorar o entendimento da matemática, em especial, da geometria.

Embora todos os artigos tenham destacado os benefícios do uso do aplicativo nas aulas de matemática, alguns deles não deixaram de relatar dificuldades encontradas no decorrer das pesquisas. Este é o caso de Ancochea e Cárdenas (2020) e Budinski e Lavicza (2019), que relataram ter enfrentado problemas técnicos com relação a capacidade de processamento e a compatibilidade dos dispositivos móveis dos alunos com a tecnologia da RA. Nessas duas pesquisas, os autores relataram a necessidade de organizar pequenos grupos de alunos, de modo que ao menos um deles pudesse ter um dispositivo compatível com essa tecnologia, e desse modo fazer o uso coletivo do dispositivo em alguns momentos.

Com isso, podemos observar que, embora se tenha enfrentado problemas de

compatibilidade de alguns modelos de *smartphones* com o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, ou com suas versões anteriores chamadas GeoGebra AR, os pesquisadores conseguiram contorná-los de alguma forma, fazendo com que todos os alunos vivenciassem a experiência de aprender matemática com o auxílio dessa tecnologia. A estratégia de ensino, bem como os princípios que nortearam o uso do aplicativo nesta pesquisa, serão expostos no capítulo seguinte.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, abordamos o Ensino Remoto Emergencial (ERE), que foi a modalidade de ensino adotada durante a suspensão das atividades educacionais presenciais, e são apresentados alguns apontamentos a respeito das possibilidades de uso da aprendizagem móvel nesse contexto. Ainda, discutimos as concepções de alguns autores sobre a RA e as possibilidades de utilizá-la na aprendizagem móvel, apontando os possíveis benefícios dessa união, e finalizamos com a apresentação do aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA.

3.1 O ENSINO REMOTO EMERGENCIAL

O ERE surgiu como uma tentativa de amenizar os prejuízos causados pela paralisação das atividades escolares presenciais, paralisação esta que pode ser caracterizada como mais uma medida de distanciamento social, visando prevenção da contaminação pelo coronavírus COVID-19. Nesse contexto, o ERE se configurou como uma solução temporária e emergencial que, dentro de suas limitações, permitiu às instituições de ensino manter suas atividades de ensino fora do espaço físico da sala de aula. (PINTO; MARTINS, 2021; ARRUDA, 2020).

Essa modalidade de ensino possibilitou que as atividades educacionais, que antes ocorriam dentro dos ambientes físicos das salas de aula, fossem retomadas e chegassem de alguma forma até as residências dos alunos. Nesse processo, as atividades passaram a ocorrer de forma síncrona ou assíncrona, utilizando-se de meios digitais, como rádio, TV e internet, para as transmissões de aulas ao vivo ou gravadas, e também se utilizou de algumas plataformas *online*, como o *Google Classroom* e *Moodle*, e meios físicos, como materiais impressos, visando atender às necessidades de alunos de diferentes classes econômicas. (ROSS, *et al.* 2021; ARRUDA, 2020; GARCIA, *et al.*, 2020).

Embora o ERE tenha se apropriado de alguns meios de comunicação que também são utilizados no Ensino a Distância (EaD), podemos destacar que há poucas semelhanças entre ambos. Esse último, segundo Arruda (2020) e Ross *et al.* (2021), nos remete a toda uma série de ações que visam assegurar a sua efetividade, como planejamento antecipado e carga horária adequada, envolvimento de diferentes profissionais no desenvolvimento de materiais que primam não somente pela efetividade pedagógica, mas também qualidade estética, além de ser direcionada para um público com perfil de aprendizagem mais autônomo, e que opta

pela EaD por conta própria.

Já no caso do ERE, Hodges *et al.* (2020) e Sanchez Júnior *et al.* (2021), destacam o caráter emergencial com que foi adotado. Segundo eles, trata-se de uma situação em que haviam planos de trabalho, materiais e metodologias projetados previamente apenas para uso em ambientes físicos de ensino, e de uma hora para outra precisaram ser redirecionadas para formas de instrução por meios digitais de comunicação, ou então se resumiram a materiais impressos distribuídos aos alunos.

Outro ponto importante que podemos destacar foi a forma como o ERE surpreendeu professores e alunos, habituados ao ensino presencial. Segundo Dutra, Moraes e Guimarães (2021), os professores precisaram aprender novas formas de ensino, e serem capazes de fazer a transposição didática dos conteúdos curriculares de uma forma bastante distinta do que ocorre em uma sala de aula convencional. Em relação aos discentes, de modo geral, estes precisaram se adaptar a uma forma de aprendizagem mais autônoma.

Manter os alunos ativos nas atividades de aprendizagem do ERE representou um grande desafio. A começar pelas relações entre professores e alunos, que segundo Neves, Assis e Sabino (2021), foram bastante prejudicadas devido ao próprio distanciamento geográfico entre ambos, e os meios de comunicação nem sempre serem suficientes para realizar essa mediação. Já Dutra, Moraes e Guimarães (2021), dão destaque para o acesso às tecnologias necessárias para o acompanhamento das atividades disponibilizadas em meios digitais, pois segundo eles, esse está condicionado a uma gama de fatores sociais e econômicos, os quais nem sempre são favoráveis.

Uma das possibilidades para superar a carência de acesso a conteúdos educacionais por meios digitais pode estar no incentivo ao uso dos dispositivos móveis para esse fim. Segundo o IBGE (2021), dos 78,3% da população brasileira com idade igual ou superior a dez anos, que acessou a internet em 2019, 98% utilizou o telefone móvel para isso.

É evidente que não podemos considerar todo esse grande percentual de usuários da internet, entre a população com dez anos ou mais de idade, como possíveis frequentadores assíduos de um sistema de educação remota. É preciso levar em consideração uma série de variáveis, como por exemplo a qualidade da conexão com a internet que esses usuários utilizam, a regularidade com que tem acesso, e também as condições do ambiente em que vivem, que muitas vezes não são favoráveis para atividade de ensino.

Para além desses problemas, a UNESCO (2013) salienta o grande potencial educativo dos dispositivos móveis com acesso à internet. O órgão cita o potencial pedagógico dos aplicativos destinados a atividades educacionais, que se encontram em desenvolvimento

acelerado, e fornecem uma gama de ferramentas com grande potencial para enriquecer as atividades de ensino.

O acesso a conteúdos educacionais por meio de celulares é um dos segmentos da *mobile learning*, ou “aprendizagem móvel”, como vem sendo traduzida no Brasil. (MÜLBERT; PEREIRA, 2011). Segundo a UNESCO (2014), essa forma de aprendizagem é marcada pelo uso de dispositivos móveis, os quais permitem atividades instrucionais a qualquer hora, e em qualquer lugar, dentro ou fora das salas de aula convencionais, e nesse contexto os usuários acessam conteúdos educacionais, ou até mesmo se conectam a outras pessoas.

3.2 APRENDIZAGEM MÓVEL

A aprendizagem móvel é um tema de pesquisa emergente e que está em constante mudança, desenvolvendo-se rapidamente devido a grande evolução tecnológica dos dispositivos móveis, como *tablets*, *smartphones*, entre outros, que permitem o acesso à informação de forma facilitada e em qualquer lugar.

Para Saccol *et al.* (2007), aprendizagem móvel representa uma ferramenta bastante valiosa quando o aprendiz não tem disponibilidade para comparecer em um ambiente convencional de ensino. Esses autores destacam que essa forma de aprendizagem permite que se possa adquirir conhecimentos em qualquer lugar, e a qualquer tempo, e muitas vezes permite que o aprendiz possa canalizar espaços curtos de tempo para atividades educacionais. Para eles, a aprendizagem móvel se configura como

processos de ensino e de aprendizagem que ocorrem, necessariamente, apoiados pelo uso de TIMS [Tecnologias da Informação e Comunicação Móveis e Sem Fio], envolvendo a mobilidade de atores humanos que podem estar fisicamente/geograficamente distantes de outros atores e também de espaços físicos formais de educação, tais como salas de aula, salas de treinamento/formação/qualificação ou local de trabalho. (SACCOL *et al.* 2007, p. 2).

Os pontos negativos desse método de aprendizagem, para Saccol *et al.* (2007), se encontram justamente na possibilidade de ausência de uma rotina de estudos. Segundo os autores, pode haver uma quebra de fronteiras com a vida pessoal, além de poder haver sobrecarga de informações, afetando diretamente a qualidade de vida do aprendiz.

Já na concepção de Mülbert e Pereira (2011), o conceito de aprendizagem móvel pode ser abordado de três perspectivas diferentes: o desenvolvimento da própria tecnologia, referindo-se aos próprios dispositivos móveis; o estudo das teorias educacionais que dão

apoio a essa forma de aprendizagem; e as implicações sociais desse método de instrução. Esses autores destacam que não há uma definição exata de aprendizagem com mobilidade, mas ela pode ser entendida como

aprendizagem entregue ou suportada por meio de dispositivos de mão tais como PDAs (Personal Digital Assistant), smartphones, iPods, tablets e outros pequenos dispositivos digitais que carregam ou manipulam informações [...] É um modo ainda mais flexível de educação, capaz de realmente criar novos contextos de aprendizagem através da interação entre pessoas, tecnologias e ambientes. (MÜLBERT; PEREIRA, 2011, p.2-3)

Nesse contexto, é fundamental pensar nessa forma de aprendizagem como um conjunto composto por aprendiz e dispositivo, pois “O foco deste conceito não está apenas no aprendiz ou na tecnologia e sim no encontro entre esses dois elementos.” (MÜLBERT; PEREIRA, 2011, p.3). Ao enfatizar apenas os dispositivos, corre-se o risco de conceber a aprendizagem com mobilidade apenas em um contexto temporal, dada a constante evolução da tecnologia. (MÜLBERT; PEREIRA, 2011).

Mülbert e Pereira (2011), e Crompton e Traxler (2019), apesar de serem pesquisas separadas por um espaço de tempo bastante significativo, considerando a velocidade com que os dispositivos móveis evoluem, compartilham pontos em comum em relação a essa forma de aprendizagem. Em ambas, se defende que o conceito de aprendizagem móvel deve englobar não somente as relações entre aprendizes e tecnologia, mas também deve englobar concepções pedagógicas a seu respeito, bem como as relações pessoais entre os próprios aprendizes.

Para Crompton e Traxler (2019), o conceito de aprendizagem com mobilidade deve englobar ao mesmo tempo: a tecnologia, as relações sociais, um método de ensino, e um contexto, o qual pode ou não estar relacionado com o ensino formal. Desse modo, segundo eles, a aprendizagem com mobilidade pode ser definida atualmente como “Aprendizagem em múltiplos contextos, por meio de interações sociais e de conteúdo, usando dispositivos eletrônicos pessoais.¹” (CROMPTON, 2013, p. 4, tradução nossa). Ainda segundo os autores, é muito provável que essa definição possa se modificar em um futuro próximo, devido às rápidas mudanças que ocorrem nesse campo de pesquisa.

Junto com a evolução das tecnologias móveis, os aplicativos móveis com finalidades pedagógicas vêm se desenvolvendo e se popularizando progressivamente. Sharples *et al.* (2012) e Sharples *et al.* (2016), chamam a atenção para a quantidade de funcionalidades que alguns dispositivos móveis, como os *tablets* e os *smartphones*, possuem, reunindo em um

1 "learning across multiple contexts, through social and content interactions, using personal electronic devices." (CROMPTON, 2013, p. 4)

único aparelho, inúmeros sensores, câmeras e um bom poder computacional, abrindo espaço para que os aplicativos educacionais possam proporcionar uma experiência cada vez mais aproximativa entre aluno e conhecimento.

Um dos tipos de aplicativos educacionais que podem se valer das funcionalidades desses dispositivos móveis são aqueles que envolvem a RA. Essa funcionalidade permite que um aluno possa utilizar um *tablet* ou *smartphone* para visualizar formas tridimensionais virtuais, como se elas estivessem presentes no ambiente em que ele está, podendo inclusive interagir com elas tocando na tela do próprio dispositivo. Essa ferramenta será descrita de forma mais precisa na próxima seção.

3.3 REALIDADE AUMENTADA NA APRENDIZAGEM MÓVEL

O uso da RA em *smartphones* é uma das características que tornam esses dispositivos ainda mais eficientes quando se fala em aprendizagem móvel. Sharples *et al.* (2012), Sharples *et al.* (2016) e Zorzal (2019), ressaltam a boa capacidade de processamento desses dispositivos, e ainda acrescentam que eles carregam um aparato de *hardware* bastante promissor para o uso educacional da RA, visto que possuem características que permitem uma interação mais intuitiva, eficiente, e conseqüentemente mais inteligente.

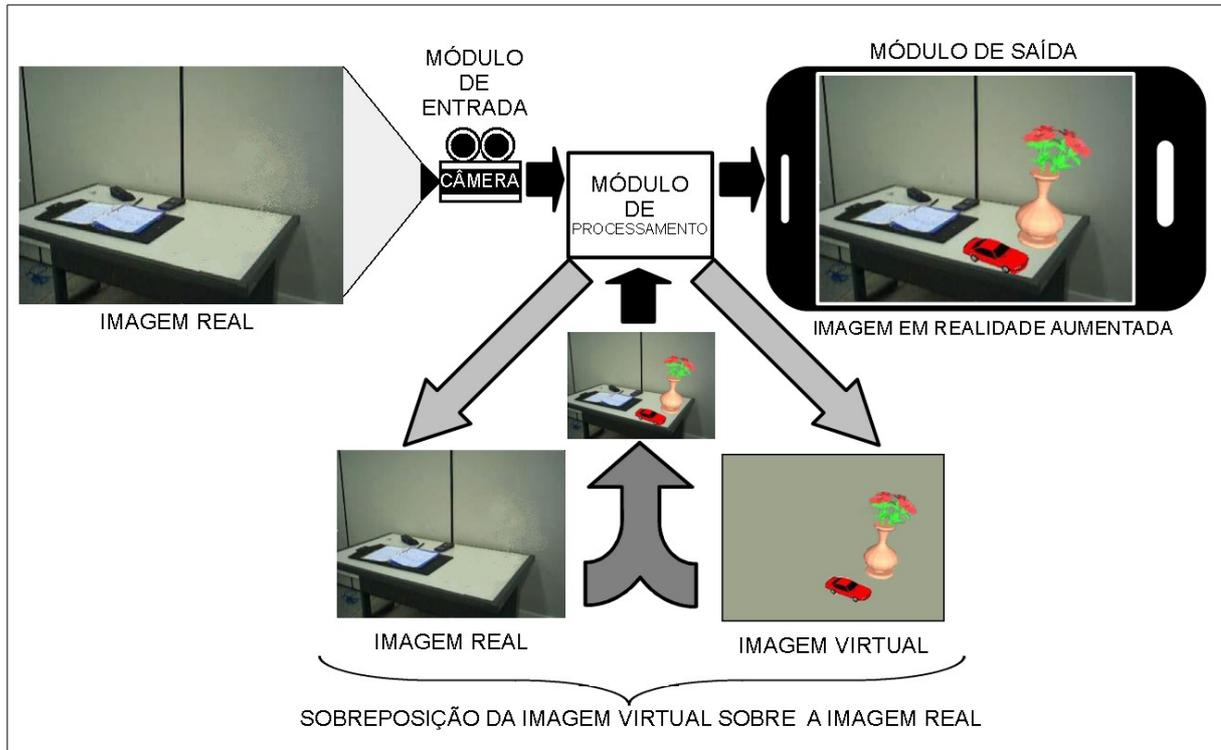
Na RA, se “enriquece o ambiente físico com objetos sintetizados computacionalmente, permitindo a coexistência de objetos reais e virtuais.” (HOUNSELL; TORI; KIRNER, 2019, p. 32). Este processo ocorre com a captura de uma imagem real, do ambiente físico, por uma câmera de vídeo, seguida pelo seu enriquecimento com imagens virtuais em um módulo de processamento e, por fim, ocorre a sua exibição quase que em tempo real em uma tela. Cada um desses passos está esquematizado na Figura 3.1 a seguir.

O processo ilustrado na Figura 3.1 é iniciado com captura da imagem real pela câmera. Nos sistemas de RA, é necessário que essa câmera seja equipada com diversos sensores de leitura de ambiente, os quais fornecerão dados para que o módulo de processamento possa identificar objetos, calcular distâncias e reconhecer superfícies. (HOUNSELL; TORI; KIRNER, 2019).

O segundo passo para a criação da imagem em RA ocorre dentro do módulo de processamento. Este componente é responsável por reunir as imagens reais com os dados do ambiente, e sobrepor as imagens virtuais às imagens reais. Nessa sobreposição, as imagens virtuais são alocadas e dimensionadas continuamente adaptando-se ao ambiente real, mesmo que o usuário se movimente em relação ao ambiente, ou até mesmo interaja virtualmente com

as mesmas. (HOUNSELL; TORI; KIRNER, 2019).

Figura 3.1 – Criação de uma imagem em Realidade Aumentada (RA)



Fonte: Adaptado de: HOUNSELL, M. S.; TORI, R.; KIRNER, C. Realidade Aumentada. In: TORI, R.; HOUNSELL, M. S. (org.). **Introdução a Realidade Virtual e Aumentada**. Porto Alegre: SBC, 2018. p. 34.

O módulo de saída pode ser representado por uma tela que exibe a imagem em RA criada no centro de processamento. No caso dos dispositivos equipados com tela *touchscreen*, como os *tablets* e os *smartphones*, a tela também serve como um dispositivo de entrada, pois permite que o usuário interaja com as imagens virtuais em RA tocando sobre elas na própria tela do dispositivo. (HOUNSELL; TORI; KIRNER, 2019).

A evolução tecnológica, e conseqüentemente o barateamento do custo de dispositivos móveis, como *tablets* e *smartphones*, bem como a disponibilidade de *softwares* gratuitos na área da RA, vem fazendo com que esses dispositivos incorporem cada vez mais essa tecnologia. Como consequência, tem-se o aprimoramento contínuo da mesma, permitindo que os usuários tenham cada vez mais facilidades de acesso, e também uma experiência cada vez melhor nesses aplicativos. (HOUNSELL; TORI; KIRNER, 2019).

Nos sistemas de RA, destaca-se o curto espaço de tempo entre a captura da imagem pela câmera de vídeo e sua exibição em RA na tela, que deve ser menor do que 100 milissegundos, e também a importância da harmonia entre a imagem real e a imagem virtual, de modo que o usuário tenha a impressão que elas de fato coexistem. (HOUNSELL; TORI;

KIRNER, 2019). Com isso, tem-se uma ferramenta com grande potencial para auxiliar os alunos a visualizar e explorar objetos geométricos tridimensionais, e dessa forma tornar as aulas mais significativas, interessantes e prazerosas.

Um dos aplicativos móveis que envolvem a RA de forma bastante interessante é a *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*. Com esse aplicativo, o aluno pode estudar formas geométricas tridimensionais visualizando-as no ambiente real em que ele se encontra, não se limitando a mera visualização, podendo construí-las e modificá-las dinamicamente, tocando na tela do próprio dispositivo móvel. Esse aplicativo será descrito detalhadamente na próxima seção.

3.4 O GEOGEBRA COM RA

O GeoGebra é um *software* computacional que foi criado por Markus Hohenwarter, e fez parte do projeto de sua tese de mestrado pela Universidade de Salzburg, na Áustria. O *software* foi publicado na internet a partir do ano de 2002, e tinha como objetivo reunir a geometria interativa, álgebra e cálculo em um único programa, de forma integrada e fácil de usar, que permitisse ensinar e aprender matemática. (HOHENWARTER, 2013, HOHENWARTER; JARVIS; LAVICZA, 2009).

Após sua publicação na internet, o programa teve uma grande repercussão entre professores, que entraram em contato com seu desenvolvedor para compartilhar o entusiasmo em utilizar o programa na sala de aula. Com isso, Hohenwarter prosseguiu com o desenvolvimento do programa, e em cerca de dois anos ganhou mais de 20 desenvolvedores adeptos ao seu projeto, e também, mais de 200 tradutores. (HOHENWARTER, 2013).

No ano de 2013, o site oficial do programa já recebia mais de 1 milhão de visitas por mês, as quais eram realizadas de 190 países. Nesse mesmo ano, o *software* chegou à sua versão 4.2, e teve a sua primeira versão compatível com *tablets* equipados com os sistemas operacionais *Windows 8*, *Android* e *iOS*. (HOHENWARTER, 2013).

A partir de 2013, a versão móvel do aplicativo continuou evoluindo, até que em 2017 a *Apple* apresentou o sistema operacional *iOS 11*, o qual incluiu uma nova estrutura chamada *ARKit*, que permitiu experiências com RA em aplicativos móveis. Com isso, o GeoGebra teve sua primeira versão móvel que permitia a visualização de modelos geométricos tridimensionais em RA, sendo esta disponibilizada no serviço de distribuição digital de aplicativos *AppStore*, da *Apple*, com o nome *GeoGebra Augmented Reality*. (TOMASCHKO; HOHENWARTER, 2019).

No ano de 2017, o *Google* também lançou um kit de desenvolvimento de *software* que permitiu a criação de aplicativos que envolviam RA, chamado de *ARCore*, que mais tarde foi atualizado para *Google Play Services para RA*. Com isso, abriu caminho para que novas versões do GeoGebra para o sistema *Android* também possibilitassem a visualização de modelos tridimensionais em RA. (TOMASCHKO; HOHENWARTER, 2019). Sendo assim, os usuários do *Android* começaram a experimentar essa funcionalidade nas novas versões do aplicativo acessando o serviço de distribuição digital de aplicativos *Play Store*, do *Google*, e fazendo a instalação dos aplicativos *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, e *Google Play Services para RA*.

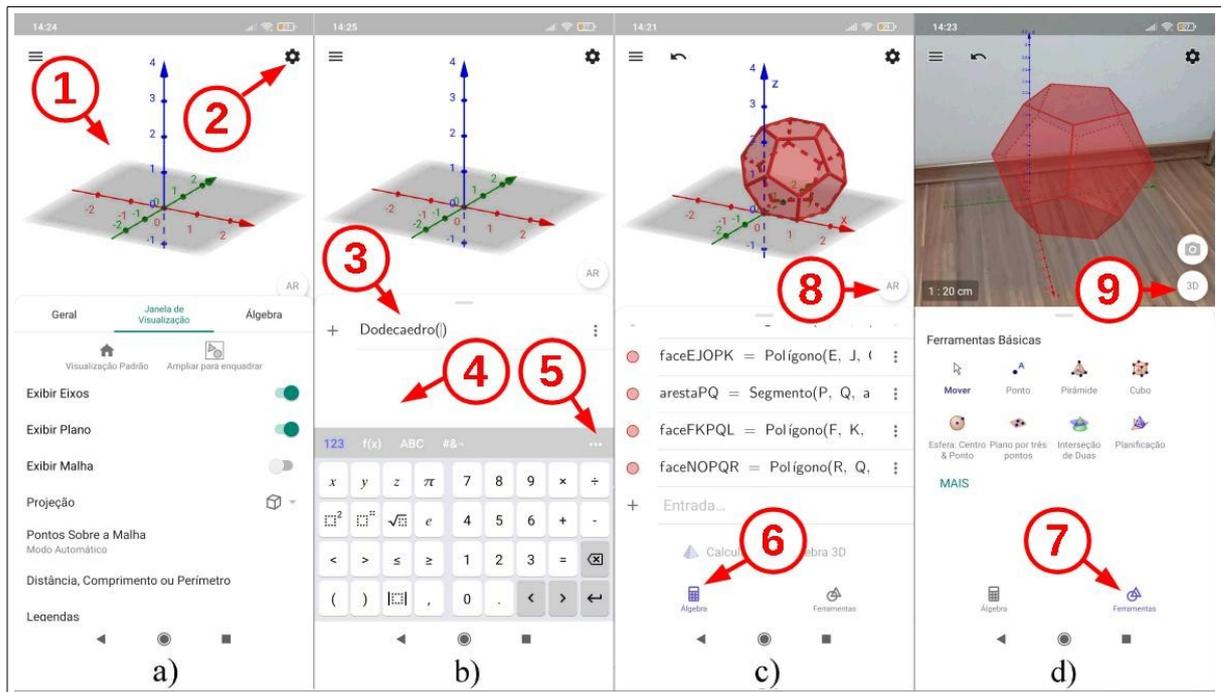
Atualmente, a versão móvel do *software* GeoGebra que permite a visualização de modelos tridimensionais em RA está disponível para os sistemas operacionais móveis *Android* (*Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*) e *iOS* (*Calculadora GeoGebra 3D*), e permite a criação, visualização e interação com figuras geométricas e gráficos de funções tridimensionais em RA. Nesse aplicativo, a abordagem da geometria espacial se destaca pela possibilidade de o aluno poder criar e interagir dinamicamente com sólidos geométricos tridimensionais, projetando-os em seu próprio ambiente por meio da RA, podendo inclusive utilizar grandezas em escalas correspondentes com o ambiente real. (TRAPPMAIR; HOHENWARTER, 2019).

Na Figura 3.2, a seguir, são mostradas algumas capturas de tela do aplicativo GeoGebra com RA para sistemas *Android*, em sua versão 5.0.666.0, onde são enumeradas algumas de suas principais funcionalidades.

Na Figura 3.2a, é mostrada a tela inicial do aplicativo em que o painel de configurações está aberto. Nessa imagem, o item 1 indica a janela gráfica, onde ficam localizados um plano e os eixos coordenados x , y e z , a partir dos quais são efetuadas todas as construções geométricas, e o item 2 indica o botão que dá acesso à janela de configurações.

A Figura 3.2b mostra o início do processo de construção de um dodecaedro por meio do comando *Dodecaedro* $((0,0),(1,0))$. Nessa imagem, o item 3 indica o campo *Entrada*, no qual está sendo digitado o comando, o item 4 indica as quatro opções de teclado (“123”, “f(x)”, “ABC”, “#&-”). A opção “123” está selecionada, que surgem ao tocar no campo *Entrada*; e o item 5 indica a opção de busca de comandos. Ao tocar nesse último botão, abre-se um painel com várias opções de categorias de comandos, e o usuário pode escolher uma delas e selecionar o comando desejado, ou também pode optar por buscar um comando digitando uma parte dele no campo de entrada.

Figura 3.2 – Funcionalidade do aplicativo GeoGebra com RA.



Fonte: O autor.

Na Figura 3.2c, mostra-se a janela de álgebra aberta, na qual se pode observar uma parte de alguns comandos correspondentes com elementos dodecaedro já construído. O item 6 dessa imagem indica o botão que dá acesso à janela de álgebra, botão esse que só aparece após a conclusão da execução de qualquer comando, ou também quando se está utilizando as ferramentas geométricas. Já no item 8, indica-se o botão AR, que dá acesso ao modo de visualização em RA.

Ao tocar no botão AR, a janela gráfica passa a exibir a imagem que está sendo capturada pela câmera do dispositivo, e surge uma mensagem na tela solicitando que se faça pequenos movimentos com o aparelho para que o aplicativo reconheça uma superfície plana no ambiente, e possa projetar em RA o sólido construído. A visualização do sólido em RA está ilustrada na Figura 3.2d, em que está indicado o botão que dá acesso às ferramentas geométricas, no item 7, e o botão 3D, no item 9, que permite a desativação do modo de visualização em RA.

O uso desse aplicativo para o estudo de formas geométricas tridimensionais é a base desta dissertação e, na seção seguinte, descreveremos detalhadamente os procedimentos metodológicos que nortearam a nossa investigação.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, caracterizamos o delineamento desta pesquisa, seu público-alvo, e também o nível de ensino a que os conteúdos matemáticos abordados fazem parte, bem como, discorremos sobre os procedimentos adotados para o desenvolvimento das atividades. Apresentamos a aplicação da proposta didática, o tempo necessário para concretizá-la, e também os instrumentos de coleta de dados que foram utilizados.

4.1 DELINEAMENTO DA PESQUISA

De acordo com os níveis descritos por Gil (2008), esta pesquisa se caracterizou como exploratória, constituindo um estudo sobre o uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, no ensino de geometria espacial. Segundo esse mesmo autor, uma pesquisa em nível exploratório é necessária sempre que o tema de interesse do pesquisador seja pouco conhecido, e com isso demanda uma abordagem inicial mais aberta. Nesse processo, o pesquisador busca desenvolver e esclarecer ideias a respeito do objeto de pesquisa, obtendo como resultado uma visão ampla do mesmo, no sentido de facilitar a elaboração de hipóteses mais precisas a seu respeito, e também facilitar a sua problematização. (GIL, 2008).

Fizeram parte deste estudo, uma pesquisa bibliográfica inicial, descrita no Capítulo 2, e a elaboração e aplicação de uma proposta didática baseada no uso do aplicativo em questão, que serão descritas no quinto e no sexto capítulos, respectivamente.

Com a proposta didática, buscou-se explorar algumas possibilidades que o aplicativo oferece para o ensino de alguns tópicos de geometria espacial, e também avaliar questões de ordem prática, como o aproveitamento, pelos alunos, dos conteúdos abordados, a sua desenvoltura quanto ao uso do aplicativo, bem como a aceitação do mesmo por eles.

Por se tratar da análise de um único grupo de alunos, sendo este composto apenas por alunos que participaram da validação da proposta didática, esta pesquisa não pode ser classificada como genuinamente experimental, pois não foi instituído um grupo de controle. Sendo assim, segundo Gil (2008), ela pode ser delineada como quase-experimental, sendo seus resultados obtidos a partir de análises do grupo de participantes, feitas antes e depois da aplicação da proposta didática.

Os dados analisados nesta pesquisa foram compostos por imagens capturadas da tela dos *smartphones* dos participantes, que eram enviadas por eles ao pesquisador, durante o

desenvolvimento das atividades, e também pelas respostas obtidas com a aplicação dos questionários. Estes questionários, descritos de forma detalhada na seção 4.4, continham questões relativas ao conteúdo matemático abordado, e também ao uso do aplicativo, sendo utilizadas inclusive questões com escalas sociais, que segundo Gil (2008), tem a função identificar no indivíduo pesquisado, percepções que ele teve a partir da vivência de determinadas situações.

4.2 PÚBLICO-ALVO DA PESQUISA E NÍVEL DE ENSINO DA PROPOSTA DIDÁTICA

As atividades presentes na proposta didática, contemplam conteúdos de geometria espacial que fazem parte da grade curricular do ensino médio, e são frequentemente abordados no segundo ano. Porém, devido ao pesquisador não atuar como professor em nenhuma instituição de ensino, optou-se por aplicar a pesquisa inicialmente a acadêmicos da mesma universidade em que o pesquisador está matriculado. Sendo assim, a aplicação ocorreu em formato de oficina, em que participaram seis acadêmicos do segundo ano do curso de Licenciatura em Matemática, e uma mestranda do curso de pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

4.3 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

As atividades foram aplicadas em quatro encontros, com duração de duas horas cada. Disponibilizou-se também, aos participantes que desejassem, um tempo adicional de trinta minutos ao final de cada encontro, caso fosse necessário esclarecer dúvidas referentes ao conteúdo, ou até mesmo ao uso do aplicativo.

Os encontros ocorreram de forma remota, por meio de reuniões em formato de videoconferência, utilizando o aplicativo *Google Hangout Meeting*. Estas reuniões foram realizadas nos dias 8 e 15 do mês de abril de 2021, e 6 e 13 de maio de 2021, no período da tarde, e foram todas gravadas e disponibilizadas posteriormente aos participantes. As gravações foram fundamentais para que os alunos concluíssem todas as atividades, já que alguns não tinham disponibilidade de horário, ou enfrentaram problemas técnicos com o aplicativo ou com o *smartphone*, e por isso não conseguiram executá-las nos dias e horários em que elas ocorreram.

Cada encontro síncrono era dividido em três momentos diferentes. No primeiro momento, antes de qualquer atividade, disponibilizava-se o questionário inicial, o qual

possuía apenas questões relacionadas aos conteúdos matemáticos que seriam abordados no referido encontro. O segundo momento, caracterizava-se pelo desenvolvimento das atividades no aplicativo, e também era o momento em que os participantes enviavam ao pesquisador, capturas de tela dos seus *smartphones*, como forma deste perceber como cada um estava desenvolvendo as atividades. No terceiro momento, ao final de cada encontro, aplicava-se o segundo questionário, o qual possuía as mesmas questões do primeiro, além de algumas questões adicionais, que visavam obter um *feedback* dos participantes a respeito das atividades desenvolvidas.

Em relação aos acadêmicos que participaram de forma assíncrona, o desenvolvimento das atividades ocorria de forma parcialmente igual, sendo feito apenas um controle de acesso, pelo pesquisador, a cada uma das partes dos encontros. Sendo assim, primeiramente se disponibilizava o questionário inicial de cada encontro, e na medida em que se identificava as repostas a esse questionário, liberava-se individualmente, a cada participante, o acesso à gravação das atividades do respectivo encontro. Junto com a liberação do acesso ao vídeo, solicitava-se o envio das capturas de tela, sendo exigido ao menos três imagens, sendo que cada uma delas deveria mostrar uma atividade diferente. Assim, o acesso ao segundo questionário de cada encontro só foi liberado ao participante que enviasse todas as imagens de acordo com o solicitado.

4.4 O PROCESSO DE COLETA DE DADOS

Para esta pesquisa, utilizaram-se duas formas de coleta de dados. Uma delas foi o envio ao pesquisador, de capturas de tela do *smartphone*, feitas pelos próprios participantes durante a execução das atividades, e a outra era composta por questionários, que os participantes acessavam por meio de um endereço *URL*, e respondiam de forma *on-line*.

A elaboração dos questionários ocorreu de forma cautelosa, especialmente por levar em consideração que nem todos participariam de forma síncrona. Sendo assim, optou-se pelo uso da ferramenta *Google Forms*, e nesta ferramenta, se utilizou quatro mecanismos de resposta diferentes: *Resposta curta*, *Grade de múltipla escolha*, *Múltipla escolha* e *Caixa de seleção*.

Fez-se a aplicação dos questionários por duas vezes em cada encontro, como já foi descrito na subseção 4.3. A primeira delas ocorria antes de iniciar o desenvolvimento das atividades, buscando-se observar o desempenho dos alunos em determinados pontos do conteúdo a ser abordado no referido encontro. Nesse caso, o questionário continha apenas

perguntas relacionadas ao conteúdo matemático.

O segundo questionário, que era aplicado ao final de cada encontro, continha as mesmas perguntas do primeiro questionário, e também algumas perguntas de cunho pessoal, que buscavam um *feedback* de cada aluno com relação ao desenvolvimento das atividades. Desse modo, o segundo questionário teve por objetivo investigar se as atividades executadas em cada um dos dias da oficina exerceram alguma influência sobre a visão que os participantes tinham sobre os conteúdos matemáticos abordados, e também, obter uma visão geral sobre o desempenho deles com o aplicativo, bem como, identificar suas impressões em relação as atividades desenvolvidas.

Os questionários aqui descritos, encontram-se no Apêndice A desta dissertação.

5 A PROPOSTA DIDÁTICA

As atividades que compõem a oficina, fazem parte de uma proposta didática baseada no uso do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, para o ensino de geometria espacial. Nesta proposta, buscou-se explorar as potencialidades gráficas e algébricas do aplicativo, de forma que fosse proporcionado ao aluno um ambiente favorável ao desenvolvimento do pensamento geométrico, permitindo-lhe agir de forma autônoma, vivenciando experiências a partir de construções geométricas dinâmicas: construindo, visualizando e interagindo com prismas, pirâmides e corpos redondos, representados em RA.

A forma como essas atividades foram elaboradas, visa contemplar ao menos duas das ações que, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), são necessárias para garantir ao aluno da educação básica, o aprendizado dos conhecimentos essenciais a cada etapa de sua vida escolar. São elas:

- conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens; [...]
- selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender; (BRASIL, p. 17, 2017).

Para isso, optou-se pelo uso do *smartphone*, aliado ao aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, criando situações que visavam privilegiar a ação dos alunos. Optou-se também, pelo uso de apresentações de *slides* na condução das atividades da proposta, que serviram como meio para auxiliar na introdução, e na formalização dos conceitos matemáticos explorados no aplicativo.

O uso desse aparato tecnológico e a forma como se deu o desenvolvimento das atividades, esteve pautado em auxiliar o aluno no desempenho da competência específica número cinco, da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, da BNCC, ou seja, buscou-se oferecer condições e instrumentos favoráveis para que ele pudesse exercer a ação de

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 532)

Com este propósito, idealizou-se uma sequência de atividades, em que cada conteúdo foi introduzido com uma apresentação de *slides*, e no decorrer dessa apresentação, utilizou-se

o aplicativo para elaborar construções geométricas dinâmicas baseadas no conteúdo em estudo. Nesse processo, cada participante desenvolvia as construções individualmente, em seu *smartphone*, e ao concluí-las, utilizava a RA para visualizar e interagir com determinados elementos dessas construções, fazendo experiências que levavam a perceber visualmente os efeitos das propriedades matemáticas envolvidas.

O desenvolvimento dessas atividades se deu com o objetivo de auxiliar o aluno no desenvolvimento da habilidade EM13MAT504, que está entre as habilidades que o aluno deve adquirir ao exercer a quinta competência específica, citada anteriormente. Essa habilidade é descrita como “Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.” (BRASIL, 2017, p. 533).

A forma como as atividades foram desenvolvidas em cada encontro da oficina, bem como o roteiro para o desenvolvimento de cada uma delas no aplicativo, são descritos nas seções a seguir.

5.1 PRIMEIRO ENCONTRO

Neste encontro, buscou-se apresentar o aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, com RA, e se abordou uma construção baseada no cálculo do volume de prismas retos de base retangular. Com essas atividades, explorou-se diversas ferramentas, comandos e configurações básicas, de modo que os participantes pudessem se familiarizar e ganhar mais autonomia para operar o aplicativo. A partir da abordagem destas funcionalidades, buscou-se elaborar, ao final do encontro, uma construção visando explorar o cálculo do volume de prismas retos, de base retangular.

5.1.1 Primeira atividade: Introdução às funções básicas do aplicativo

Nesta atividade, efetuou-se a construção de um dodecaedro por meio da inserção de comandos no campo *Entrada*. Nesta atividade, explorou-se o uso do campo *Entrada*, fazendo a busca de comandos e também visualizando as possíveis sintaxes de um comando.

Na sequência apresentamos as orientações passadas aos participantes para o desenvolvimento das atividades:

1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque a opção *Exibir Eixos*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições*

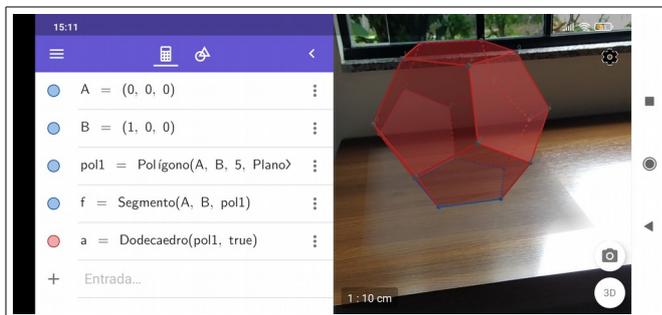
Algébricas para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;

2. No campo de *Entrada*, digite $(0,0,0)$, e tecla *Enter* (), e em seguida digite $(1,0,0)$, e tecla *Enter* novamente. Observe que os pontos correspondentes surgirão na janela gráfica da tela do aplicativo; na janela de álgebra, os comandos serão listados da seguinte forma: $A = (0,0,0)$ e $B = (1,0,0)$. Note que, apesar de serem digitadas apenas as coordenadas, o aplicativo nomeou automaticamente cada um dos pontos com uma letra maiúscula. Desta forma, para utilizar estes pontos em uma construção geométrica elaborada a partir de um comando, basta inserir o nome de cada um na sintaxe do referido comando;
3. Agora, será construído um polígono regular utilizando os pontos A e B , criados anteriormente. Para isso, toque no ícone de busca de comandos (). e no campo de texto que aparecerá na tela, comece a digitar a palavra *polígono*. Ao digitar as primeiras letras, surgirá logo abaixo do campo de texto, a opção *Polígono*. Basta selecionar essa opção, e o comando aparecerá digitado automaticamente no campo de *Entrada*, da seguinte forma: *Polígono()*. Para conhecer as sintaxes possíveis para esse comando, basta teclar *Enter*, que elas serão exibidas na tela, em uma janela *pop-up*. A sintaxe a ser utilizada é: *Polígono(<Ponto>, <Ponto>, <Número de Vértices>)*. Deste modo, o comando completo a ser digitado no campo de *Entrada* é: *Polígono(A, B, 5)*. Após teclar *Enter*, o polígono correspondente aparecerá na janela gráfica, e o comando *poll = Polígono(A, B, 5, PlanoXOY)* será listado na janela algébrica;
4. Utilize novamente a ferramenta de busca de comandos para encontrar o comando com o qual se obtém um dodecaedro. No campo de texto, comece a digitar a palavra *dodecaedro*, e logo aparecerá a opção *Dodecaedro*. Ao selecionar essa opção, o comando correspondente aparecerá digitado no campo de entrada. A sintaxe deste comando a ser utilizada é: *Dodecaedro(<Pentágono Regular>)*. Observe no passo anterior, que o aplicativo atribuiu o nome “poll” para o pentágono criado. Assim, o comando completo a ser digitado no campo entrada é: *Dodecaedro(poll)*. Basta teclar *Enter* (), para que o sólido seja construído na janela gráfica;
5. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão  , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica.

A Figura 5.1 a seguir, mostra o resultado da construção do dodecaedro a partir dos

comandos aplicados em cada um dos passos.

Figura 5.1 – Dodecaedro construído como uso de comandos



Fonte: O autor

Com essa construção, buscou-se abordar as principais funcionalidades do aplicativo que serão utilizadas durante a oficina.

5.1.2 Segunda atividade: Abordagem dos principais comandos e ferramentas utilizadas na oficina

Com esta atividade, buscou-se abordar de forma explicativa as principais ferramentas e comandos que são aplicados com frequência em cada uma das atividades da oficina. Explorou-se algumas formas de inserção de pontos no espaço; formas de criação de vetores e algumas de suas aplicabilidades às construções tridimensionais; Construção de cubos por meio da ferramenta geométrica ou do comando *Cubo*; utilização dos comandos *Transladar* na criação e movimentação dinâmica de sólidos geométricos no plano cartesiano; Aplicação do comando *Sequência* na criação de sequências numéricas ou de cópias de um sólido geométrico no plano cartesiano; criação e utilização de controles deslizantes para atribuir valores numéricos dinâmicos às construções.

A seguir, apresentamos as orientações passadas aos participantes para o desenvolvimento das atividades:

1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição & Valor*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Utilize o campo *Entrada* para criar os controles deslizantes O_x , O_y e O_z , de modo que cada um deles possa assumir valores entre zero e cinco, com intervalo de variação ocorrendo de um décimo em um décimo. Para isso, execute os seguintes comandos: $O_x = \text{ControleDeslizante}(0,5,0.1)$; $O_y = \text{ControleDeslizante}(0,5,0.1)$ e

$Oz = ControleDeslizante(0,5,0.1)$. Observe que o separador decimal utilizado no aplicativo é o ponto, e a vírgula é utilizada para separar as sentenças dentro dos parênteses. Desse modo, as sentenças que se encontram entre parênteses em cada comando, indicam as características: valor mínimo, valor máximo e incremento. Essa última indica o intervalo de variação entre os valores que o controle deslizante pode assumir;

3. Agora, utilize o campo *Entrada* para criar os pontos A e B , executando os seguintes comandos: $A = (Ox, Oy, Oz)$ e $B = (Ox + 1, Oy, Oz)$. Ao digitar corretamente os comandos, observe que eles já aparecem na janela gráfica antes mesmo de utilizar a tecla *Enter*;
4. Em cada um dos pontos listados na janela gráfica, selecione o ícone , toque na opção *Configurações*, que surge ao lado do objeto, e modifique o parâmetro *Estilo de Legendas* para *Nome*. Altere os valores dos controles deslizantes e observe que os pontos assumem um novo posicionamento no plano cartesiano, de acordo com os valores obtidos em cada controle deslizante;
5. Construa um cubo a partir dos pontos A e B criados anteriormente. Para isso, abra a lista de ferramentas geométricas, tocando no ícone , e selecione a ferramenta *Cubo* (). Com a ferramenta selecionada, toque sobre o ponto A e sobre o ponto B ;
6. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
7. Agora, note que ao movimentar os controles deslizantes, o cubo se movimentará de acordo com o posicionamento dos pontos A e B no plano cartesiano. Toque no botão , para sair do modo RA e voltar a editar a construção;
8. Modifique as coordenadas dos pontos A e B . Para isso, localize-os na janela de álgebra, toque sobre os valores que estão entre parênteses, e os modifique de forma que se tenha: $A = (0,0,0)$ e $B = (1,0,0)$;
9. Crie o vetor v , executando o seguinte comando: $v = (Ox, Oy, Oz)$. Observe que o vetor v obedece os valores ajustados nos controles deslizantes criados no passo 2;
10. Faça uma translação do cubo criado no passo 5, ao longo do vetor v . Para isso, utilize o comando *Transladar*, da seguinte forma: *Transladar(a,v)*;
11. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra

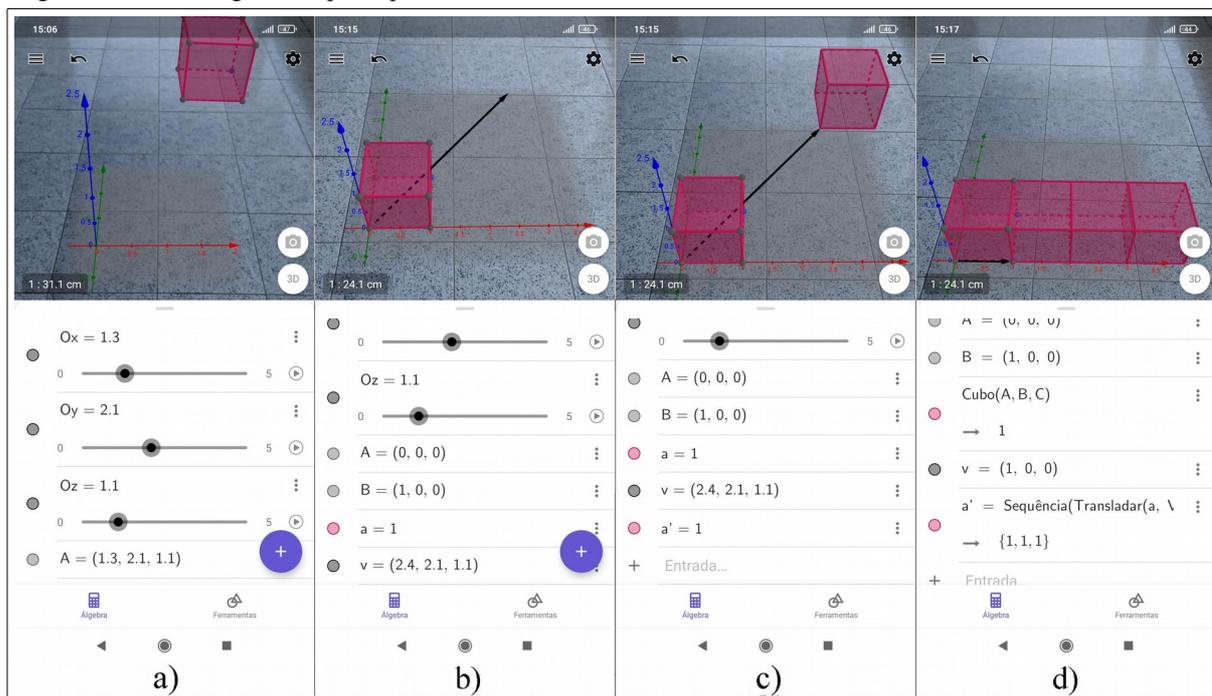
no canto inferior direito da janela gráfica;

12. Modifique os controles deslizantes O_x , O_y e O_z , e observe que foi criado um novo cubo, o qual encontra-se transladado para a extremidade do vetor v . Finalize este passo, ajustando os controles deslizantes O_y e O_z para o valor zero, e o valor de O_x para um. Toque no botão , para sair do modo RA e voltar a editar a construção;
13. Localize o comando transladar na janela de álgebra, toque sobre o ícone , e seleciona a opção *Apagar*;
14. Explore o comando *Sequência*, criando uma lista dos números ímpares de um a onze. Para isso, toque no campo *Entrada* e digite o seguinte comando: *Sequência*($2n + 1, n, 0, 5$). Observe que nada surgiu na janela gráfica, porém a lista com os números ímpares surgiu logo abaixo do comando, na janela de álgebra. As características desse comando, que estão entre parênteses e separadas por vírgula, indicam a expressão algébrica utilizada para obter os números ímpares ($2n + 1$), a variável utilizada na expressão (n), e por último, os valores inicial e final do conjunto dos números inteiros que a variável assumirá.
15. Finalmente, utilize o comando sequência para criar mais três cópias do cubo criado no passo 5. Para isso, utilize o campo *Entrada* para executar o seguinte comando: *Sequência*(*Transladar*($a, i \cdot v$), $i, 1, 3$). Ao teclar *Enter*, você vai observar que foram criados mais três réplicas do cubo. Você observou no passo anterior, que a primeira característica do comando *Sequência*, inserida dentro dos parênteses, foi uma expressão que definia os números ímpares, porém, desta vez utilizamos como expressão um outro comando, o *Transladar*. Com isso, a execução do comando *Sequência* ocasionará uma sequência de três translações do cubo ao longo do vetor v , multiplicado por um, por dois e por três, respectivamente.

Na Figura 5.2, a seguir, são exibidas algumas capturas de tela que mostram o resultado da execução de alguns dos passos dessa construção.

A Figura 5.2a, mostra a execução do passo 7, que permite visualização da movimentação do cubo a partir da movimentação dos controles deslizantes, que alteram as coordenadas dos pontos A e B.

Figura 5.2 – Abordagem dos principais comandos e ferramentas a serem utilizados



Fonte: O autor.

A Figura 5.2b, representa a conclusão do passo 9, com a criação do vetor v , que tem como coordenadas os valores obtidos nos controles deslizantes O_x , O_y e O_z . Já a Figura 5.2c, ilustra a conclusão do passo 12, que mostra a translação do cubo ao longo do vetor v . A última captura de tela referente a essa construção é a Figura 5.2d, que mostra a conclusão do passo 15.

5.1.3 Terceira atividade: Razão entre dois Paralelepíedros Retângulos

Nesta atividade, usou-se uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 1.2, slides de 1 a 5), para introduzir a conceito de razão entre paralelepíedros retângulos. Na apresentação, buscou-se deixar explícito que a razão entre dois paralelepíedros retângulos é obtida efetuando-se o produto das razões entre as medidas correspondentes dos dois sólidos, que consiste basicamente em obter a razão entre seus volumes.

Posteriormente, foram apresentadas ilustrações de dois desses sólidos geométricos com suas respectivas medidas, com volumes distintos, e foi proposto que os participantes calculassem manualmente a razão entre o maior e o menor. Como forma de verificar visualmente o resultado obtido, utilizou-se o aplicativo para executar uma construção dinâmica dos sólidos em questão, a qual permitiu que eles reposicionassem e multiplicassem de forma conveniente o paralelepíedro menor, e pudessem constatar que seu volume era

equivalente à terça parte do volume do paralelepípedo maior.

A seguir, apresentamos as orientações passadas aos participantes para o desenvolvimento dessa construção:

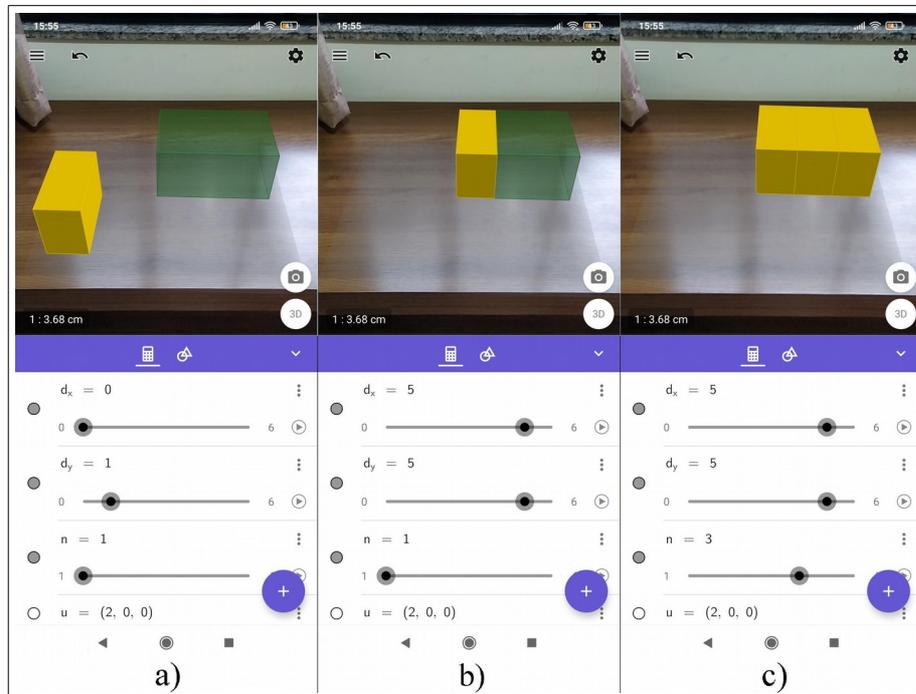
1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque a opção *Exibir Eixos*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Crie dois controles deslizantes, nomeando-os como d_x e d_y , que servirão para deslocar o paralelepípedo menor na direção dos eixos OX e OY , por meio dos seguintes comandos: $d_x = \text{ControleDeslizante}(0,6,1)$ e $d_y = \text{ControleDeslizante}(0,6,1)$;
3. Crie um controle deslizante, que servirá para multiplicar o paralelepípedo menor, utilizando o comando: $n = \text{ControleDeslizante}(1,4,1)$;
4. Construa um retângulo de nome $q1$, que servirá de base para o paralelepípedo menor, utilizando o comando: $q1 = \text{Polígono}((0,0,0),(2,0,0),(2,4,0),(0,4,0))$. Oculte este retângulo, tocando sobre o ícone , que está ao lado do comando digitado, na janela de álgebra;
5. Construa o paralelepípedo menor de nome a , por meio do comando: $a = \text{Prisma}(q1,3)$. Oculte este paralelepípedo;
6. Construa um vetor de nome u , na direção do eixo OX , utilizando o comando: $u = (2,0,0)$. Oculte este vetor;
7. Construa o vetor v , cujas coordenadas x e y são os valores obtidos nos controles deslizantes d_x e d_y , respectivamente. Para isso, utilize o comando: $v = (d_x, d_y, 0)$. Oculte esse vetor da mesma forma que se ocultou o retângulo $q1$, no passo 4;
8. Faça uma translação do prisma a pelo vetor v , com o comando: $a' = \text{Transladar}(a, v)$. Oculte o prisma que aparecerá na tela;
9. Faça com que o valor obtido no controle deslizante n determine o número de vezes que o prisma a aparecerá na tela, utilizando o comando: $\text{Sequência}(\text{Transladar}(a', i \cdot u), i, 0, n-1)$. Altere a cor e a transparência do prisma que aparecerá na tela, deixando-o completamente opaco. Para isso, toque no prisma, selecione o ícone , que surge ao lado do objeto, e modifique os parâmetros *Cor* e *Transparência*;
10. Crie um polígono de nome $q2$, que servirá de base para o paralelepípedo maior, por meio do comando: $q2 = \text{Polígono}((5,5,0),(11,5,0),(11,9,0),(5,9,0))$;
11. Construa o paralelepípedo maior, por meio do comando: $\text{Prisma}(q2,3)$. Oculte este

paralelepípedo;

12. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
13. Utilize os controles deslizantes d_x , d_y , e n , para movimentar e fazer cópias do prisma a , até que se consiga preencher todo o espaço ocupado pelo paralelepípedo maior.

Essa construção está ilustrada na Figura 5.3, a seguir, em que são mostradas três capturas de tela, feitas durante a movimentação dos controles deslizantes.

Figura 5.3 – Experimento sobre a razão entre paralelepípedos retângulos.



Fonte: O autor.

Observando as capturas, na passagem da Figura 5.3a para a Figura 5.3b, tem-se um reposicionamento do prisma a (em amarelo), efetuado por meio da movimentação dos controles deslizantes d_x e d_y . Já na Figura 5.3c, cria-se mais duas cópias deste prisma, movimentando-se o controle deslizante n , levando o aluno a perceber visualmente que o espaço ocupado pelo prisma maior (em verde), é equivalente ao triplo do espaço ocupado pelo prisma menor (em amarelo), valor este que ele já havia obtido por meio de cálculos.

5.1.4 Quarta atividade: Cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo

Na introdução a esta atividade, utilizou-se uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 1.2, *slides* de 6 a 11), com o objetivo de mostrar que o cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo está diretamente ligado ao cálculo da razão entre dois desses sólidos. Nessa apresentação, retomou-se o cálculo da razão entre dois paralelepípedos retângulos, estudando-se o caso especial em que um desses sólidos possui arestas com comprimentos unitários, ou seja, é um cubo. Com isso, buscou-se desenvolver a ideia de unidade cúbica de volume, e que o volume de um paralelepípedo retângulo pode ser obtido calculando-se a razão entre este sólido e um cubo de volume unitário, obtendo-se como resultado o número de unidades cúbicas necessárias para ocupar um espaço equivalente ao que é ocupado pelo paralelepípedo retângulo.

Como forma de abordar esse conceito em sua representação visual, utilizou-se o aplicativo para elaborar uma construção que permitiu ao aluno explorar tal conceito em RA. Ao finalizar essa construção, ele tinha dois paralelepípedos retângulos com medidas diferentes, e utilizava alguns controles deslizantes para posicionar e multiplicar de forma conveniente, um cubo de volume unitário, de modo que pudesse visualizar quantos desses cubos eram necessários para ocupar um espaço equivalente a cada um dos paralelepípedos.

As orientações repassadas aos alunos para a execução dessa construção estão listadas a seguir:

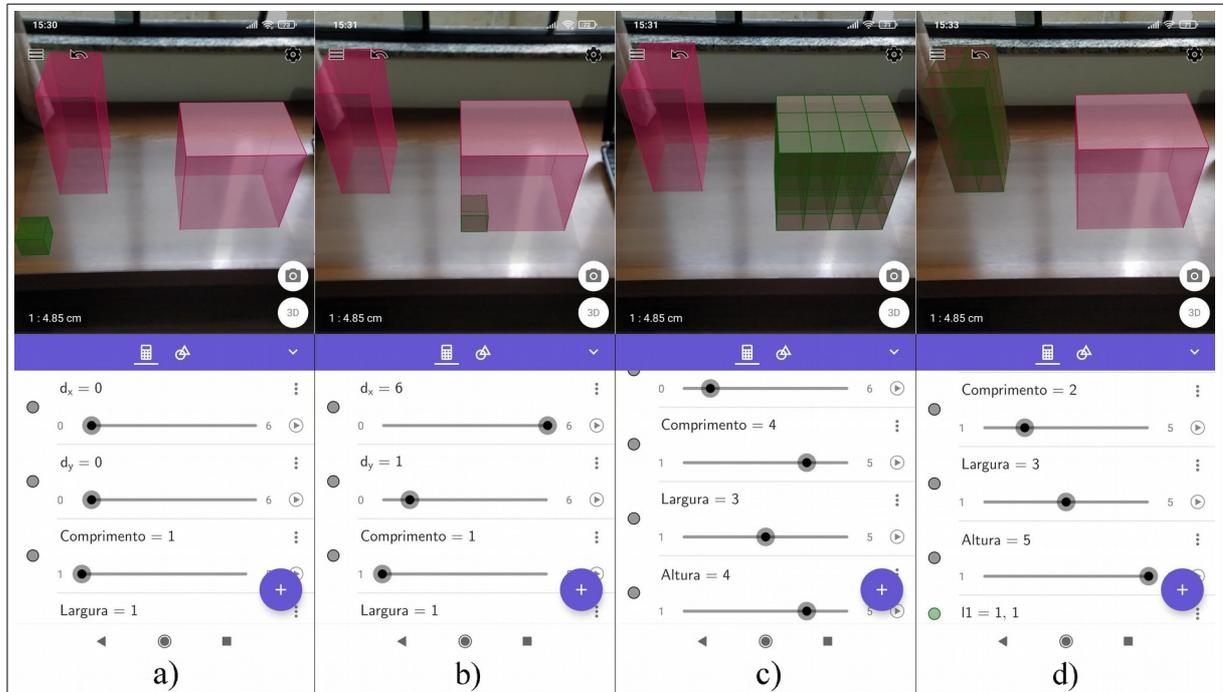
1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque a opção *Exibir Eixos*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Crie dois controles deslizantes, de nomes d_x e d_y , que servirão para deslocar o cubo unitário nas direções dos eixos OX e OY , por meio dos seguintes comandos: $d_x = \text{ControleDeslizante}(0,6,1)$ e $d_y = \text{ControleDeslizante}(0,6,1)$;
3. Crie os controles deslizantes C , L e A , que servirão para fazer réplicas do cubo unitário nas direções dos eixos OX , OY e OZ , por meio dos seguintes comandos: $C = \text{ControleDeslizante}(1,5,1)$, $L = \text{ControleDeslizante}(1,5,1)$ e $A = \text{ControleDeslizante}(1,5,1)$.
4. Construa o cubo a , de volume unitário, por meio do comando: $a = \text{Cubo}((0,0,0), (1,0,0))$.
5. Oculte todos os objetos que surgiram na janela gráfica, inclusive o cubo a . Para isso, localize o cubo a na janela de álgebra, toque sobre o ícone  correspondente

a ele, selecione a opção *Configurações*, e desabilite as opções *Exibir* e *Exibir na Janela de Álgebra*. Agora, toque em cada um dos objetos que ainda aparecem na janela gráfica, toque no ícone  que surge ao lado do objeto, e desmarque a opção *Exibir*, que aparecerá na tela;

6. Crie os vetores v_x e v_y , que serão responsáveis por permitir a movimentação do cubo unitário sobre o plano XOY . Para isso, utilize os comandos: $v_x = (d_x, 0, 0)$ e $v_y = (0, d_y, 0)$.
7. Crie os vetores unitários v_c , v_l e v_a , que permitirão replicar o cubo unitário nas direções dos eixos OX , OY e OZ , por meio dos comandos: $v_c = (1, 0, 0)$, $v_l = (0, 1, 0)$ e $v_a = (0, 0, 1)$.
8. Oculte os vetores criados nos passos 6 e 7. Para isso, toque em cada um dos vetores na janela gráfica, selecione o ícone , e desabilite as opções *Exibir* e *Exibir na Janela de Álgebra*;
9. Utilize o comando *Sequência*, para criar as cópias do cubo unitário, as quais estarão sobre plano XOY , localizadas de acordo com os valores obtidos nos controles deslizantes d_x e d_y , e serão replicadas obedecendo os valores ajustados nos controles deslizantes C , L e A . Para isso, utilize os comandos a seguir: $l1 = Sequência(Transladar(a, v_x + v_y + i v_c), i, 0, C-1)$, $l2 = Sequência(Transladar(l1, i v_l), i, 1, L-1)$, $l3 = Sequência(Transladar(l1, i v_a), i, 1, A-1)$ e $l4 = Sequência(Transladar(l2, i v_a), i, 1, A-1)$.
10. Construa dois paralelepípedos retângulos a e b aplicando os seguintes comandos: $a = Prisma(Polígono((6, 1, 0), (10, 1, 0), (10, 4, 0), (6, 4, 0)), 4)$ e $b = Prisma(Polígono((1, 3, 0), (3, 3, 0), (3, 6, 0), (1, 6, 0)), 5)$;
11. Altere os nomes dos controles deslizantes C , L e A , para *Comprimento*, *Largura* e *Altura*, respectivamente. Para isso, localize cada um deles na janela de álgebra, toque sobre o ícone , que lhe corresponde, selecione a opção *Configurações* e digite o nome desejado no campo *Nome*;
12. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
13. Agora basta utilizar os controles deslizantes para posicionar e replicar a unidade de volume de forma conveniente, para que se possa perceber visualmente quantas unidades de volume são necessárias para ocupar o volume equivalente a cada um dos prismas.

A Figura 5.4 a seguir, apresenta quatro capturas de tela referentes a conclusão e exploração dessa construção.

Figura 5.4 – Experimento sobre o cálculo do volume de paralelepípedos retângulos.



Fonte: O autor.

Observando a Figura 5.4, na passagem da imagem *a* para a imagem *b*, tem-se um reposicionamento do cubo de volume unitário (em verde), feita pela movimentação dos controles deslizantes d_x e d_y . Na transição da Figura 5.4b para a Figura 5.4c, movimenta-se os controles deslizantes *Comprimento*, *Largura* e *Altura*, de modo que o espaço ocupado pelos cubos é equivalente ao espaço ocupado por um dos paralelepípedos retângulos. Na Figura 5.4d, utiliza-se os controles deslizantes para movimentar e replicar o cubo de volume unitário, de modo que todos os cubos ocupem um volume equivalente ao volume do outro paralelepípedo.

5.2 SEGUNDO ENCONTRO

Composto por quatro atividades diferentes, este encontro foi dedicado ao estudo das definições de prisma e pirâmide, e também ao cálculo do seu volume. A abordagem das definições foi feita a partir da leitura de cada uma delas, seguida da construção, no aplicativo, de cada um dos elementos geométricos nelas envolvidos, obtendo-se uma construção dinâmica em que o aluno pode interagir com determinados pontos, e obter infinitas ilustrações

destes sólidos geométricos. Já para o estudo do volume, foi elaborada uma construção que visa explorar o Princípio de Cavalieri e sua aplicabilidade no cálculo de volumes.

5.2.1 Primeira atividade: Estudo da definição de prisma

Esta atividade foi iniciada com uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 2), que apresentavam diversas ilustrações de sólidos geométricos, e os alunos foram instigados a identificar quais deles representavam prismas. Na sequência, buscou-se fazer uma reflexão com o objetivo de identificar características necessárias para que um sólido geométrico fosse classificado como um prisma.

Para finalizar esta atividade, utilizou-se o aplicativo para elaborar uma construção a partir da definição de prisma, com base em Pompeo e Dolce (2005). Ao final dessa construção, os participantes conseguiram visualizar e interagir com determinadas partes da construção utilizando o modo de visualização em RA, e observar diferentes tipos de prismas.

A seguir, apresentamos as orientações repassadas aos participantes para o desenvolvimento dessa construção:

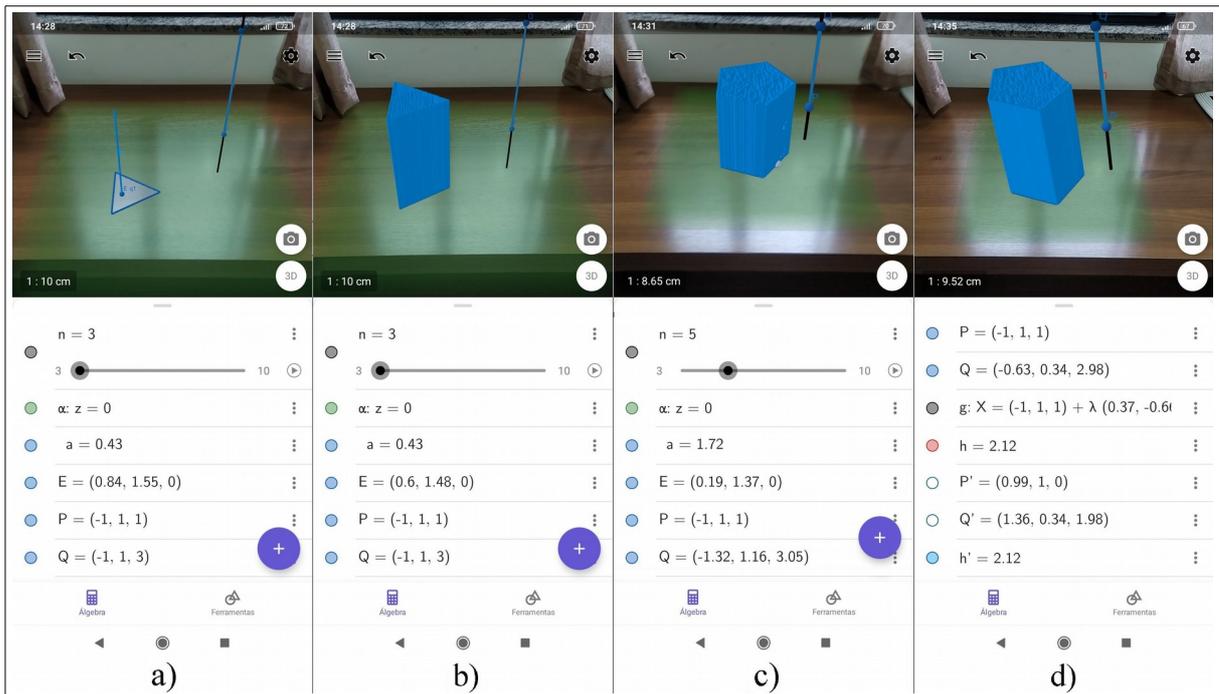
1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque as opções *Exibir Eixos* e *Exibir Plano*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Crie o plano α , inserindo no campo *Entrada* o comando: $\alpha : z = 0$;
3. Crie um controle deslizante de nome n , por meio do comando: $n = \text{ControleDeslizante}(3,10,1)$;
4. Crie um polígono regular com nome a , sobre o plano α . Isso pode ser feito utilizando o comando: $a = \text{Polígono}((1, 1, 0), (1, 2, 0), n)$. Deste modo, o valor ajustado no controle deslizante determinará o número de lados do polígono criado. Pode-se também optar pela criação de um polígono convexo não-regular, utilizando a ferramenta *Polígono* () , e tocando em três ou mais lugares diferentes do plano α , de modo que seja criado um polígono convexo com três ou mais lados.
5. Crie o ponto E , interior ao polígono a , executando o comando: $E = \text{PontoEm}(a)$;
6. Crie os pontos P e Q no espaço, inserindo os seguintes comandos no campo entrada: $P = (-1, 1, 1)$ e $Q = (-1, 1, 3)$;

7. Crie uma reta e um segmento passando pelos pontos P e Q , por meio dos comandos: $g = \text{Reta}(P, Q)$ e $h = \text{Segmento}(P, Q)$. Selecione uma cor clara para o segmento h , tocando sobre ele e selecionando o ícone . Isso favorecerá a sua visualização;
8. Crie uma cópia do segmento h , com origem no ponto E , que está no interior do polígono a . Para isso, utilize o comando a seguir: $h' = \text{Transladar}(h, E - P)$. Após a execução desse comando, oculte os pontos P' e Q' , que foram criados com a translação do segmento h , localizando-os na janela de álgebra, e tocando sobre o ícone , correspondente a cada um;
9. Note que o segmento criado no passo anterior ficou nomeado como h' . Sendo assim, habilite a função *Rastro* para esse segmento, e aplique a mesma cor utilizada no segmento h . Para isso, toque sobre o segmento h' , na janela gráfica; toque no ícone , que surge ao lado do objeto; nas opções que aparecerão, altere o parâmetro *Cor* e ative a opção *Exibir rastro*;
10. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
11. Agora, basta movimentar o ponto E , de modo que toda a superfície do polígono a seja encoberta com o rastro do segmento h' . Com isso, se obterá um conjunto de segmentos paralelos e congruentes ao segmento h , com uma das extremidades no polígono a , e pertencentes a um mesmo semiespaço, dos determinados pelo plano α . Observe que, quanto mais se movimenta o ponto E sobre a superfície de a , o conjunto de segmentos adquire o formato de um prisma;
12. Elimine o rastro deixado pelo segmento h' , desativando e ativando novamente o modo de visualização em RA. Para isso, basta tocar no botão , no canto inferior direito da janela gráfica, e tocar novamente no botão ;
13. Movimente o controle deslizante n , alterando o número de lados do polígono a , e faça novamente a movimentação do ponto E . Com isso, você obterá a representação de prismas com diferentes números de faces laterais. É importante que, antes de movimentar o controle deslizante n , mantenha-se o ponto E próximo do centro do polígono a , de modo que ele não fique preso a um dos lados do polígono. Se isso ocorrer, toque sobre o ponto E , selecione o ícone , e desative e ative novamente o parâmetro *Fixo*;

14. Movimente o ponto Q , de modo que o segmento h deixe de ser ortogonal ao plano α . Elimine o rastro deixado anteriormente pelo segmento h' , modificando o *zoom* da janela gráfica, e movimente o ponto E novamente sobre o polígono a , e observe que o novo rastro deixado pelo segmento h' irá compor um prisma oblíquo.

Após a execução de todos os passos listados, obtém-se uma construção geométrica semelhante ao que está ilustrado nas capturas de tela que compõem a Figura 5.5, a seguir.

Figura 5.5 – Construção de prismas a partir da definição.



Fonte: O autor.

Observando a ilustração, na Figura 5.5a, tem-se a representação da construção ao final do passo 9, descrito acima. Na Figura 5.5b, o ponto E foi arrastado várias vezes sobre o polígono a , que está sobre o plano, de modo que o rastro do segmento h' compôs uma série de segmentos paralelos e congruentes ao segmento h , e com uma de suas extremidades no polígono a , e com isso o conjunto adquiriu a forma de um prisma de base triangular. Já na Figura 5.5c, foi alterado o valor do controle deslizante n para 5 e, ao movimentar o ponto E , obtém-se um prisma de base pentagonal. Na Figura 5.5d, foi alterada a posição do ponto Q , obtendo-se um prisma oblíquo ao movimentar o ponto E sobre o polígono.

5.2.2 Segunda atividade: Cálculo do volume de um prisma

Esta atividade se constituiu como uma continuação da terceira atividade do primeiro

encontro da oficina (subseção 5.1.3). Buscou-se com ela, estender a aplicabilidade do processo de cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo, ou seja, um prisma reto de base retangular, que consiste basicamente em multiplicar a área da base pela altura, também aos prismas com bases não retangulares.

Nesse processo, utilizou-se de uma apresentação de *slides* para iniciar a atividade (Apêndice B, item 2, *slides* de 7 a 14), e chamar a atenção para a necessidade de encontrar um método para obter o volume de prismas com bases não retangulares. Posteriormente, utilizou-se o aplicativo para elaborar uma construção geométrica que permitiu ao aluno constatar visualmente que, se dois prismas possuem a mesma altura; suas bases estão apoiadas sobre o mesmo plano; e todo plano, paralelo ao plano da base, secciona cada um dos prismas formando figuras geométricas de mesma área, então estes prismas possuem o mesmo volume.

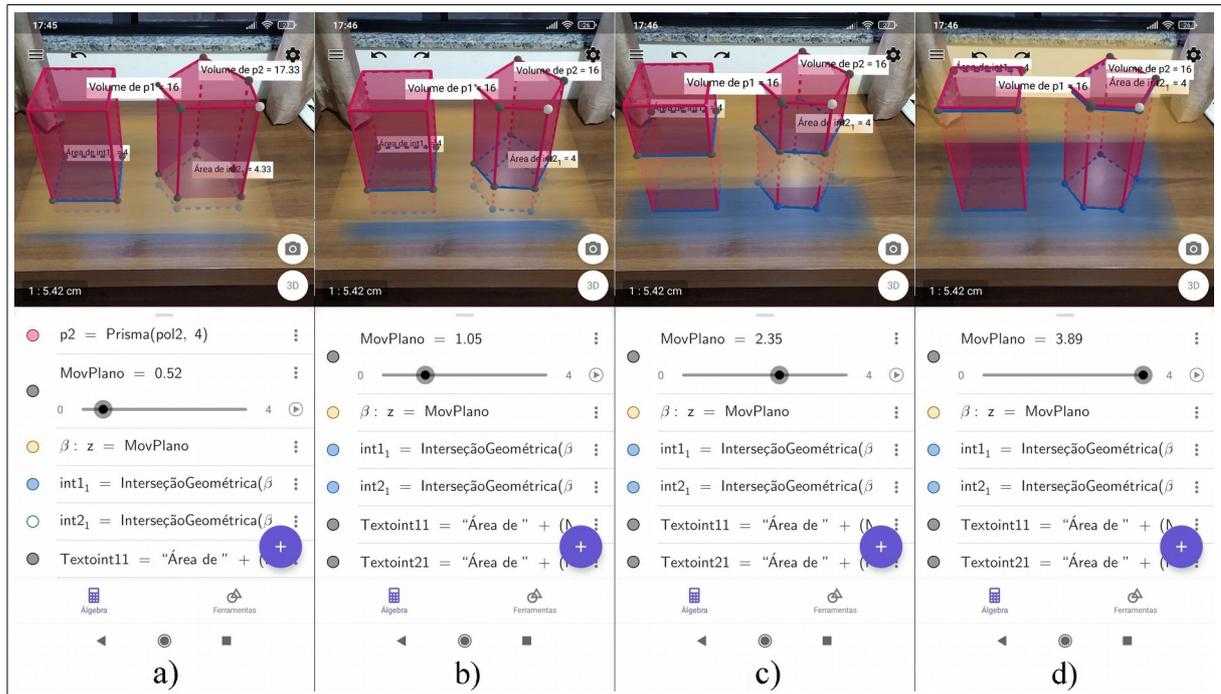
As orientações repassadas aos alunos para a execução dessa construção estão listadas a seguir:

1. Acesse as configurações, tocando no ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque as opções *Exibir Eixos* e *Exibir Plano*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Crie o plano α , inserindo no campo *Entrada* o comando: $\alpha : z = 0$;
3. Construa um quadrado sobre o plano α , inserindo o comando: $pol1 = Polígono((0,0),(2,0),4)$. Note que o quadrado foi nomeado como $pol1$;
4. Utilize o quadrado de nome $pol1$ para construir um prisma de nome $p1$, com altura medindo quatro unidades de comprimento. Para isso, utilize o comando: $p1 = Prisma(pol1,4)$;
5. Selecione a ferramenta *Polígono* ( *Polígono*), e construa um polígono convexo qualquer com, pelo menos, cinco lados, sobre o plano α , ao lado do polígono $pol1$. Para isso, tendo selecionado a ferramenta *Polígono*, basta tocar em cinco pontos diferentes do plano α , e em seguida tocar no ponto inicial para fechar o polígono. Em seguida, altere o nome deste polígono, tocando sobre ele e selecionando o ícone , e modificando o conteúdo do campo *Nome* para $pol2$;
6. Construa um prisma a partir do polígono $pol2$, com altura medindo quatro unidades de comprimento. Para isso, utilize o comando: $p2 = Prisma(pol2, 4)$;
7. Crie um controle deslizante com nome *MovPlano*, por meio do comando: $MovPlano = Controle\ deslizante(0,4,0.01)$;

8. Crie um plano móvel de nome β , que se movimentará com base no valor obtido no controle deslizante *MovPlano*. Para isso, utilize o comando: $\beta : z = \text{MovPlano}$;
9. Faça a interseção entre o plano β e os prismas $p1$ e $p2$. Para isso, utilize os comandos a seguir: $\text{inter1} = \text{InterseçãoGeométrica}(\beta, p1)$ e $\text{inter2} = \text{InterseçãoGeométrica}(\beta, p2)$;
10. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
11. Calcule a área das interseções do plano β com cada um dos prismas. Para isso, selecione a ferramenta *Área* () , e toque sobre os polígonos que representam as interseções. Para facilitar o uso da ferramenta *Área*, já que as interseções ficaram no interior dos prismas, pode-se aumentar o valor do controle deslizante *MovPlano*, e ocultar os dois prismas, localizando-os na janela de álgebra e tocando sobre o ícone  correspondente a cada um. Após obter as áreas, torne a exibir os prismas, executando o mesmo procedimento usado para ocultá-los;
12. Calcule o volume dos prismas, selecionando a ferramenta *Volume* () , e tocando sobre cada um deles;
13. Agora, selecione a ferramenta *Mover* () , e movimente os pontos que fazem parte da base do prisma $p2$, de modo que a área da interseção do plano β com este prisma se torne igual à área da interseção do plano β com o prisma $p1$;
14. Movimente o controle deslizante *MovPlano*, de modo que se possa observar todas as interseções do plano β com os prismas, desde a base inferior até a base superior, e observe o que acontece com suas áreas. Note que, em qualquer distância que o plano β esteja do plano da base, a área de sua interseção com o prisma $p2$ é igual à área de sua interseção com o prisma $p1$. Agora, compare o volume dos dois prismas.

Na Figura 5.6 a seguir, são apresentadas algumas capturas de tela referentes a esta construção, sendo a sua conclusão, ao final do passo 11, representada na Figura 5.6a. Ela mostra o prisma $p1$ à esquerda, o prisma $p2$ à direita, e o plano β em amarelo. Nessa imagem, pode-se perceber que a área das secções do plano β com cada um dos prismas são diferentes entre si, e também o volume dos prismas são diferentes entre si.

Figura 5.6 – Princípio de Cavalieri e o cálculo do volume de prismas de bases não retangulares.



Fonte: O autor.

Na Figura 5.6b, consta o resultado da manipulação dos vértices da base do prisma p_2 , que tornou a área de sua interseção com o plano β igual à área da interseção deste plano com o prisma p_1 . Nesse momento, o aluno consegue perceber que a manipulação também tornou iguais entre si o volume dos prismas. Ele ainda pode movimentar o controle deslizante *MovPlano*, e perceber que todas as interseções possíveis entre o plano β e cada um dos prismas geram polígonos de áreas equivalentes, o que está ilustrado nas outras capturas.

Após a exploração desta construção, utilizou-se uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 2), para fazer a formalização do Princípio de Cavalieri. Nessa apresentação, foi enunciado o princípio de Cavalieri, e se demonstrou algebricamente que, se dois prismas possuem alturas iguais, suas bases possuem a mesma área e estão apoiadas sobre o mesmo plano, e todo plano, paralelo ao plano da base, secciona cada um dos prismas formando figuras geométricas com áreas iguais, então o Princípio de Cavalieri garante a igualdade entre os seus volumes.

5.2.3 Terceira atividade: Construção da definição de pirâmide

Nesta construção, foi abordada a definição de pirâmide, de acordo com Pompeu e Dolce (2005). Esta atividade foi iniciada com a leitura da definição de pirâmide, seguida de uma releitura dessa definição, destacando e construindo no aplicativo, os elementos da

geometria espacial nela envolvidos. Após a conclusão da construção, os alunos podem manipular determinadas partes da construção, e visualizar diversos tipos de pirâmides.

As orientações repassadas aos participantes para o desenvolvimento dessa construção são listados a seguir:

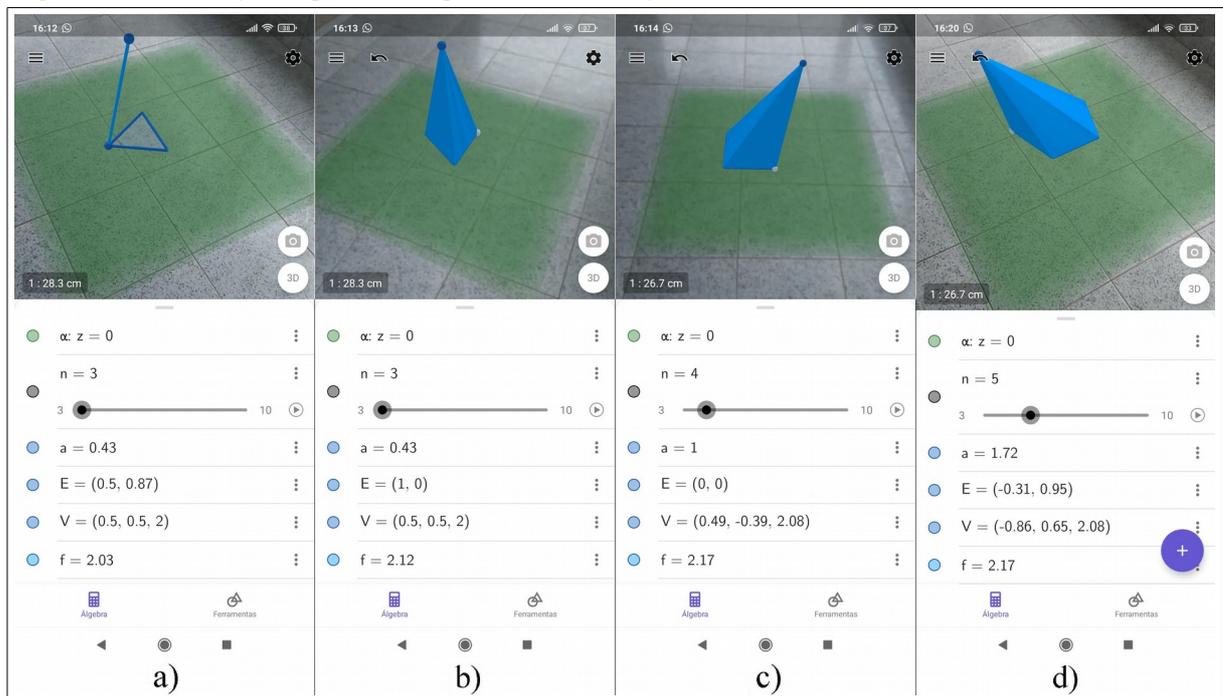
1. Acesse as configurações, tocando no ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque as opções *Exibir Eixos* e *Exibir Plano*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Crie o plano α , inserindo no campo *Entrada* o comando: $\alpha : z = 0$;
3. Crie um controle deslizante de nome n , por meio do comando: $n = \text{ControleDeslizante}(3,10,1)$;
4. Crie um polígono regular com nome a , sobre o plano α , em que o número de lados é determinado pelo valor obtido no controle deslizante n . Isso pode ser feito utilizando o comando: $a = \text{Polígono}((0, 0), (1, 0), n)$. Pode-se também optar pela criação de um polígono convexo não-regular, utilizando a ferramenta *Polígono* () , e tocando em três ou mais lugares diferentes do plano α , de modo que seja criado um polígono convexo com três ou mais lados;
5. Crie o ponto E , interior ao polígono a , executando o comando: $E = \text{PontoEm}(a)$;
6. Crie um ponto com nome V , fora do plano α . Para isso, utilize o comando: $V = (0.5, 0.5, 2)$;
7. Construa um segmento que liga o ponto V ao ponto E . Para isso, selecione a ferramenta *Segmento* () , e toque no ponto V e depois no ponto E ;
8. Selecione uma cor clara para o segmento criado no passo anterior, tocando sobre ele e selecionando o ícone . Isso favorecerá a sua visualização;
9. Selecione a ferramenta *Mover* () , toque no segmento criado, selecione o ícone de configurações () , e habilite a opção *Rastro* para este segmento;
10. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
11. Movimente diversas vezes o ponto E sobre o polígono a , de modo que se possa observar o maior número de segmentos com uma das extremidades em V , e a outra em um dos pontos do polígono. Todos estes seguimentos representarão uma

pirâmide, cuja base é o polígono a , e o vértice é o ponto V ;

12. Elimine o rastro deixado pelo segmento VE , desativando e ativando novamente o modo de visualização em RA. Para isso, basta tocar no botão , no canto inferior direito da janela gráfica, e tocar novamente no botão ;
13. Posicione o ponto E próximo do centro do polígono a , e modifique algumas partes da construção, como o controle deslizante n , alterando o número de lados do polígono a , e também a posição do o ponto V , de modo que, pela movimentação do ponto E sobre o polígono a , possa-se obter pirâmides oblíquas, e com diferentes tipos de base.

Na Figura 5.7 a seguir, são mostradas algumas capturas de tela referentes ao desenvolvimento dessa construção. Sua conclusão, ao final do passo 9, está ilustrada na Figura 5.7a.

Figura 5.7 – Construção de pirâmides a partir de sua definição.



Fonte: O autor.

A Figura 5.7b mostra a conclusão do passo 10, que é a movimentação do ponto E sobre o polígono a . Ao movimentar diversas vezes esse ponto, o conjunto de segmentos que compõem o rastro do segmento VE , comporá o corpo de uma pirâmide reta, de base triangular regular. Já na Figura 5.7c, mostra-se a possibilidade de visualização de uma pirâmide oblíqua,

de base quadrada, ajustando-se o controle deslizante n para a posição 4 e movimentando o ponto V . Na última captura, Figura 5.7c, apresenta-se o resultado da manipulação do ponto V e do controle deslizante n para a posição 5, gerando assim uma pirâmide oblíqua, com base pentagonal.

5.2.4 Quarta atividade: Volume da pirâmide

Esta atividade foi desenvolvida como forma de dar prosseguimento ao que foi abordado na segunda atividade deste encontro. Para isso, utilizou-se uma apresentação de slides (Apêndice B, item 2) para retomar o processo de cálculo do volume de prismas, e foi enfatizado o caso específico do prisma reto, de base triangular, que pôde ser dividido em três pirâmides de mesmo volume.

O estudo desse caso específico foi feito com o auxílio aplicativo, efetuando-se a construção do prisma de base triangular, já dividido em três pirâmides de mesmo volume. Ao concluir corretamente todos os passos da construção, o aluno pôde visualizar e interagir com a mesma, representada em RA; tendo liberdade para visualizar de diversos ângulos, movimentar cada uma das pirâmides separadamente, e constatar visualmente que elas possuem volumes iguais; e portanto, o volume de cada uma equivale à terça parte do volume do prisma.

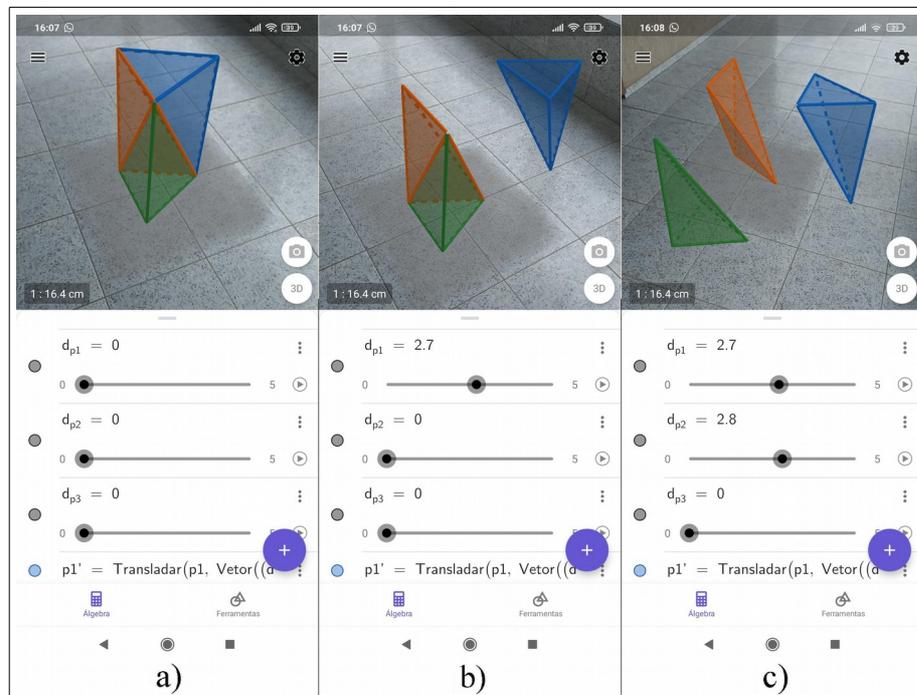
Veja a seguir, a lista de passos necessários para o desenvolvimento dessa construção.

1. Acesse as configurações, tocando no ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque as opções *Exibir Eixos*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Utilize o campo *Entrada*, para inserir os seguintes pontos: $A = (0,0)$, $B = (0,2)$, $C = (2,1)$, $D = (0,0,4)$, $E = (0,2,4)$ e $F = (2,1,4)$.
3. Construa três pirâmides a partir dos pontos inseridos no passo anterior. Para isso, utilize os seguintes comandos: $p1 = \text{Pirâmide}(D, E, F, C)$, $p2 = \text{Pirâmide}(A, B, D, C)$ e $p3 = \text{Pirâmide}(B, D, E, C)$;
4. Localize, na janela de álgebra, as pirâmides e os pontos criados nos passos anteriores, e oculte-os, tocando sobre o ícone  correspondente a cada um deles. Após esse procedimento, a janela gráfica deve ficar vazia;
5. Crie três controles deslizantes, que serão responsáveis pelo deslocamento de cada uma das pirâmides. Para isso, utilize os comandos a seguir: $d_{p1} = \text{ControleDeslizante}(0,5,0.1)$, $d_{p2} = \text{ControleDeslizante}(0,5,0.1)$ e $d_{p3} = \text{ControleDeslizante}(0,5,0.1)$;

6. Execute os seguintes comandos: $Transladar(p1, (d_{p1}, 0, 0))$, $Transladar(p2, (0, -d_{p2}, 0))$ e $Transladar(p3, (0, d_{p3}, 0))$. Modifique a cor de cada uma das pirâmides que surgiram na tela, tocando sobre elas e selecionando o ícone ;
7. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
8. Movimente os controles deslizantes para fazer o deslocamento de cada uma das pirâmides que compõem o prisma.

Ilustra-se a seguir, na Figura 5.8, a construção concluída a partir da execução de cada um dos passos descritos.

Figura 5.8 – Visualização do volume da pirâmide.



Fonte: O autor.

Observando a Figura 5.8a, tem-se a ilustração da construção ao final do passo 6. Nas imagens *b* e *c*, mostra-se a execução do passo 7, em que são feitas manipulações nos controles deslizantes, deslocando cada uma das pirâmides na tela.

Nessa construção, o aluno pode se beneficiar da RA para explorar os sólidos, observando-os livremente de diversos ângulos, ao mesmo tempo em que manipula os controles deslizantes, movimentando cada uma das pirâmides. Nesse processo, busca-se conduzir o aluno a identificar as características que permitem provar a igualdade entre os volumes das pirâmides.

Após concluir a exploração visual, utiliza-se uma apresentação de *slides* para fazer a formalização do cálculo do volume da pirâmide.

5.3 TERCEIRO ENCONTRO

Nesse encontro, abordou-se a definição e o cálculo do volume de cilindros e cones. Utilizou-se algumas apresentações de *slides* para introduzir e fazer a formalização dos conteúdos estudados, e foram realizadas construções geométricas no aplicativo, baseadas na definição de cada um desses sólidos, dando enfoque aos elementos da geometria espacial que cada uma delas envolve; e o aluno pôde explorá-las em RA, modificando diferentes elementos, e com isso, visualizando diferentes tipos de cilindros e cones.

O estudo do cálculo do volume foi feito com base na aplicação do Princípio de Cavalieri, efetuando-se construções geométricas que visavam auxiliar o aluno a perceber que um prisma e um cilindro com a mesma área da base e mesma altura, possuem volumes iguais; e o mesmo se dá entre uma pirâmide e um cone com essas características. Dessa forma, buscou-se facilitar o entendimento de que, não somente para os prismas, mas também para os cilindros, o volume pode ser obtido se efetuando o produto da área da base pela altura, e o mesmo se dá entre as pirâmides e os cones, sendo possível obter o volume destes dois tipos de sólidos, calculando-se a terça parte do produto da área da base pela altura.

5.3.1 Primeira atividade: Estudo da definição de cilindro

A construção desenvolvida e explorada nessa atividade, tem por objetivo estudar a definição de cilindro, com base em Pompeo e Dolce (2005). Nesse processo, utilizou-se uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 3), apresentando a referida definição e destacando cada um dos elementos da geometria espacial que ela envolve, e em seguida realizou-se a construção desses elementos no aplicativo. Ao final, o aluno pôde interagir, em RA, com todos os elementos da definição, sendo possível realocar a maioria deles e visualizar diversos tipos de cilindro.

As instruções repassadas para os participantes, para o desenvolvimento desta construção são listados a seguir:

1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque as opções *Exibir Eixos* e *Exibir Plano*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para

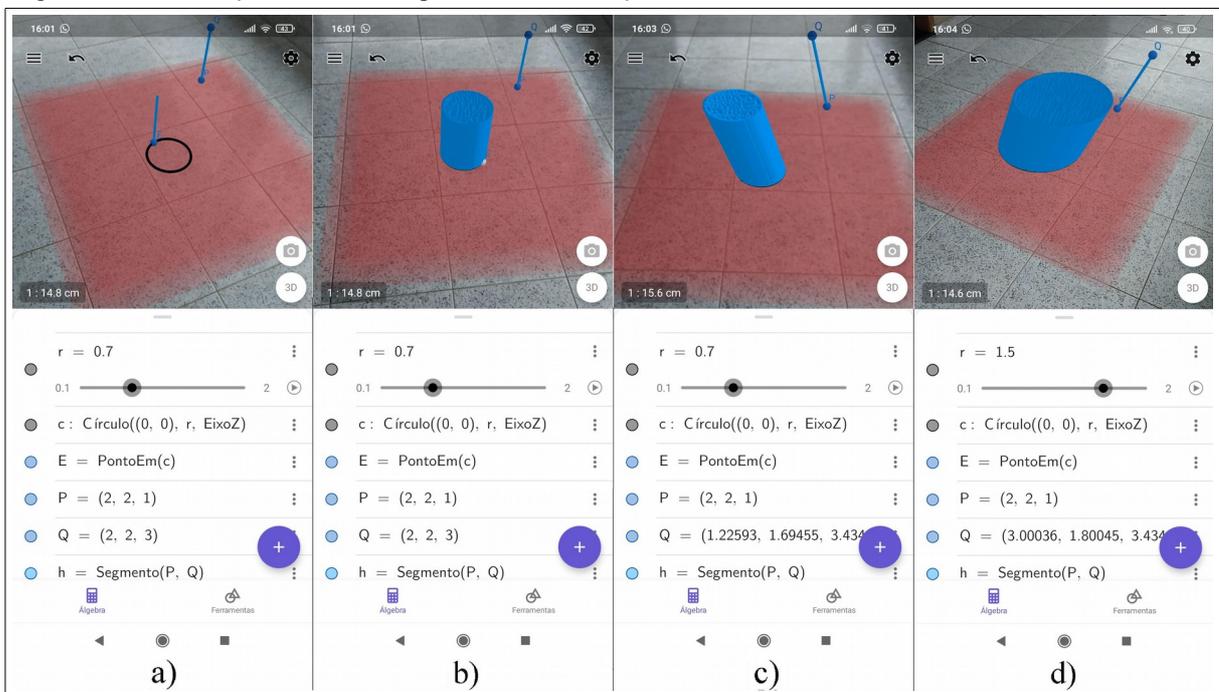
voltar à tela inicial;

2. Crie o plano α , inserindo no campo *Entrada* o comando: $\alpha : z = 0$;
3. Crie o controle deslizante r , por meio do comando: $r = \text{ControleDeslizante}(0.1, 2, 0.1)$;
4. Construa o círculo c , pertencente ao plano α , com centro na origem, e raio igual ao valor obtido no controle deslizante r . Para isso, utilize o comando: $c : \text{Circulo}((0, 0), r, \text{EixoZ})$;
5. Crie o ponto E , interior ao círculo c , executando o comando: $E = \text{PontoEm}(c)$;
6. Crie os pontos P e Q , no espaço, inserindo os seguintes comandos no campo entrada: $P = (2, 2, 1)$ e $Q = (2, 2, 3)$;
7. Construa o segmento h , passando pelos pontos P e Q , utilizando o comando: $h = \text{Segmento}(P, Q)$. Selecione uma cor clara para esse segmento, tocando sobre ele e selecionando o ícone . Isso favorecerá a sua visualização;
8. Crie uma cópia do segmento h , com origem no ponto E , que está no interior do círculo c . Para isso, utilize o comando a seguir: $h' = \text{Transladar}(h, E - P)$. Após a execução desse comando, basta ocultar os pontos P' e Q' , localizando-os na janela de álgebra e tocando sobre o ícone , que corresponde a cada um deles;
9. Note que o segmento criado no passo anterior ficou nomeado como h' . Sendo assim, habilite a função *Rastro* para o segmento h' , e aplique a mesma cor utilizada no segmento h . Para isso, toque sobre o segmento h' , na janela gráfica, toque no ícone , que surge ao lado do objeto, e nas opções que aparecerão, altere o parâmetro *Cor* e ative a opção *Exibir rastro*;
10. Movimente o ponto E no interior do círculo c . Se isso não for possível, toque sobre o ponto E , selecione o ícone , e ative e desative o parâmetro *Fixo*;
11. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
12. Agora, basta movimentar o ponto E , de modo que toda a superfície do círculo c seja encoberta com o rastro do segmento h' . Com isso, se obterá um conjunto de segmentos paralelos e congruentes ao segmento h , com uma das extremidades no círculo c , e pertencentes a um mesmo semiespaço, dos determinados por α . Observe que, quanto mais se movimenta o ponto E sobre a superfície de c , o conjunto de segmentos adquire o formato de um cilindro;

13. Visualize outros tipos de cilindro. Para isso, desative e ative novamente o modo de RA, para eliminar rastro deixado pelo segmento h' , modifique o raio do círculo c e a posição do ponto Q , e mova novamente o ponto E sobre o círculo c , até que o conjunto de segmento que compõem rastro do segmento h' adquira o formato de um novo cilindro. Ressalta-se que o segmento PQ , de nome h , nunca deve estar paralelo ao plano α , pois contrariaria a definição de cilindro utilizada na construção.

Na Figura 5.9 a seguir, são mostradas algumas capturas de tela referentes à essa construção. Sua conclusão, ao final do passo 9, está ilustrado na Figura 5.9d.

Figura 5.9 – Construção do cilindro a partir de sua definição.



Fonte: O autor.

A Figura 5.9b mostra o resultado da movimentação do ponto E sobre o círculo c , de modo que todos os segmentos que representam o rastro do segmento h' , compõem o corpo de um cilindro reto. Nas imagens c e d , da Figura 5.9, manipula-se o controle deslizante r , que modifica o raio do círculo da base, e também o ponto Q , de modo que o novo rastro do segmento h' representará cilindros oblíquos, e com diferentes raios da base.

5.3.2 Segunda atividade: Construção do cilindro de revolução

Nessa atividade, foram estudados os cilindros de revolução. Para isso, desenvolveu-

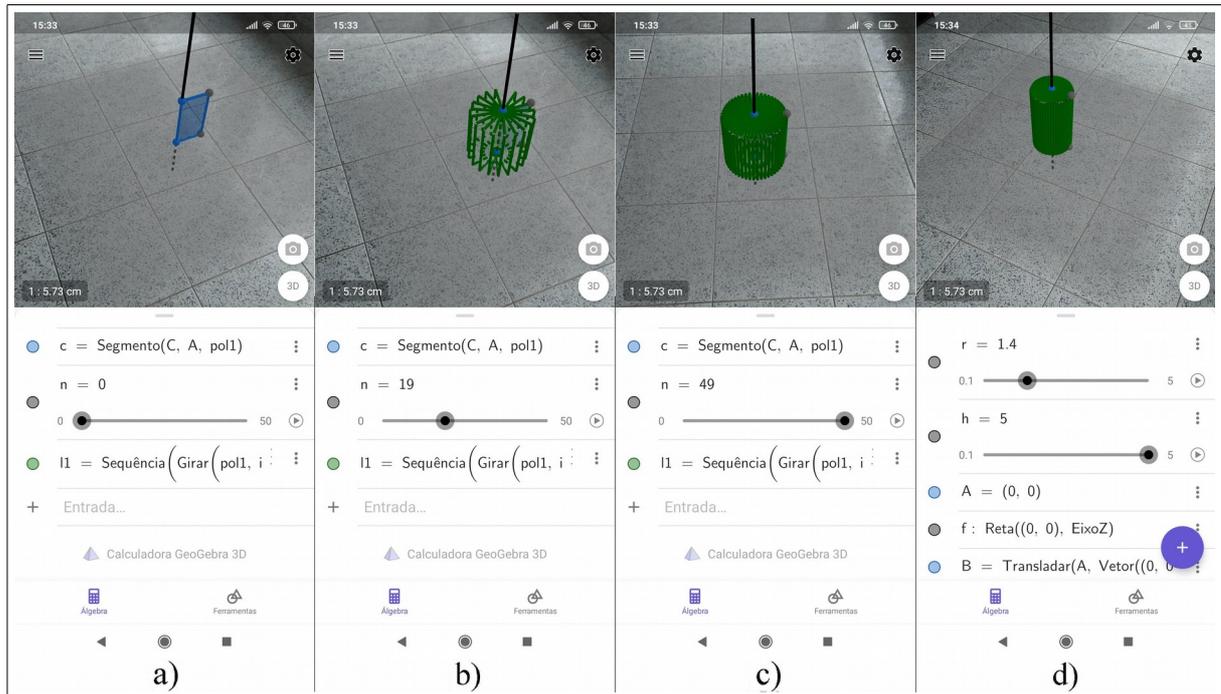
se uma construção dinâmica que permitiu aos participantes, obter diversos tipos de cilindro a partir da revolução de um retângulo em torno de um eixo, o qual contém um dos lados desse retângulo.

Os passos para o desenvolvimento dessa construção serão listados a seguir:

1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque a opção *Exibir Eixos*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Construa o eixo de rotação do cilindro de revolução, por meio do comando: $Reta((0,0), EixoZ)$;
3. Crie o controle deslizante r , que definirá o raio da base do cilindro, por meio do comando: $r = ControleDeslizante(0.1,5,0.1)$;
4. Crie o controle deslizante h , que definirá a altura do cilindro, por meio do comando: $h = ControleDeslizante(0.1,5,0.1)$;
5. Crie os vértices A e B , do retângulo de rotação, executando os seguintes comandos: $A = (0,0)$ e $B = (0,0,h)$;
6. Crie os vértices C e D do retângulo de rotação, executando os seguintes comandos: $C = (r,0)$ e $D = (r,0,h)$;
7. Construa o retângulo de rotação a partir dos pontos A , B , C e D , executando o seguinte comando: $poll = Poligono(A, B, D, C)$;
8. Crie o controle deslizante n , que definirá o número de réplicas do polígono $poll$, rotacionadas em torno do eixo de rotação, por meio do comando: $n = ControleDeslizante(0, 50, 1)$;
9. Crie uma sequência de rotações do polígono $poll$ em torno do eixo de rotação, por meio do comando: $Sequência(Girar(poll, i 2\pi / n), i, 1, n)$;
10. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
11. Agora, basta dimensionar o retângulo $poll$, manipulando os controles deslizantes r e h , e escolher o número de réplicas suas, que serão exibidas rotacionadas em torno do eixo de rotação, e formarão o cilindro de revolução.

Veja a seguir, na Figura 5.10, algumas capturas de tela que mostram a conclusão dessa construção no aplicativo.

Figura 5.10 – Construção do cilindro de revolução.



Fonte: O autor.

A Figura 5.10a ilustra uma captura da tela do aplicativo, que mostra a construção concluída ao final do passo 9, com o controle deslizante n na posição inicial, e os controles deslizantes h e r nas posições 2 e 4, respectivamente. Na Figura 5.10b começa-se a aumentar o valor do controle deslizante n , e é deixado na posição 50 na Figura 5.10c. Na Figura 5.10d, faz-se um novo dimensionamento do retângulo $pol1$, manipulando-se os controles deslizantes n e r .

5.3.3 Terceira atividade: Estudo do volume do cilindro

Nessa atividade, foi desenvolvida uma construção que visava aplicar o Princípio de Cavalieri para calcular o volume de um cilindro. Para isso, foram construídos sobre um mesmo plano, um cilindro e um paralelepípedo retângulo, ambos com a mesma área da base e a mesma altura, e o aluno pôde interagir com um segundo plano, que permanecia sempre paralelo ao plano da base. Ao movimentar este plano, o aluno percebe visualmente que, em qualquer distância que ele esteja do plano da base, sua interseção com cada um dos sólidos gera figuras geométricas com áreas iguais.

A seguir, são apresentadas as instruções repassadas para os participantes, para a elaboração desta construção:

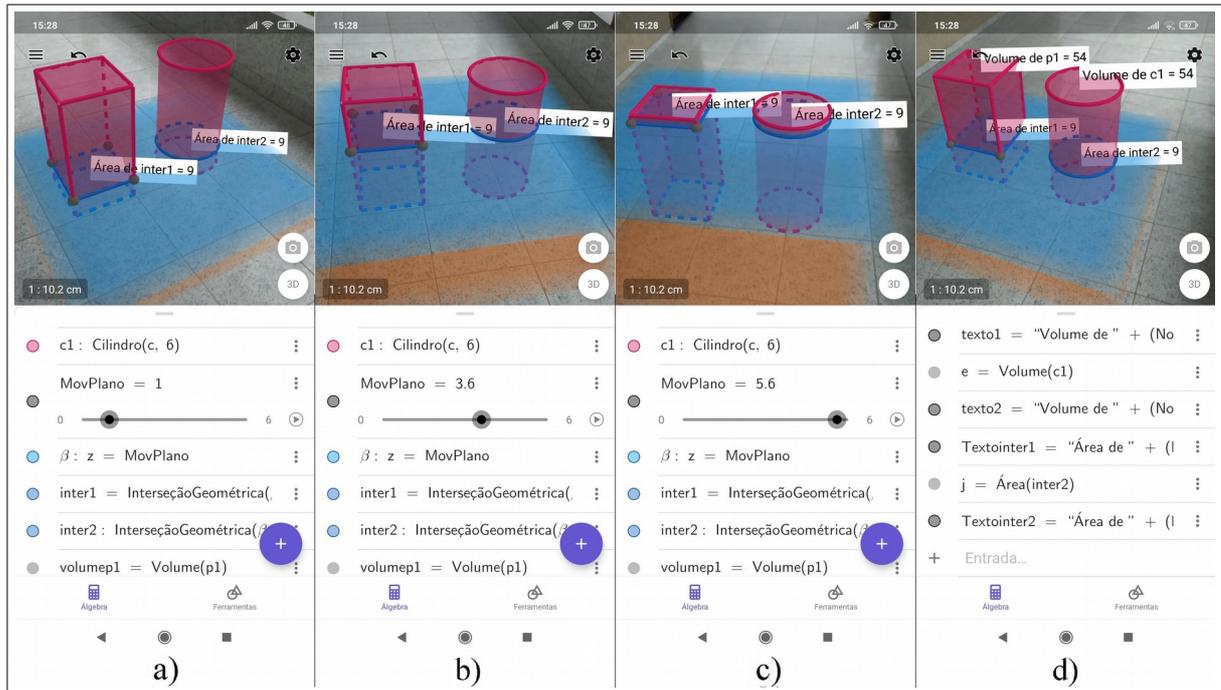
1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Janela de Visualização*,

desmarque as opções *Exibir Eixos* e *Exibir Plano*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;

2. Crie o plano α , inserindo no campo *Entrada* o comando: $\alpha : z = 0$;
3. Construa o polígono $poll$, que será a base do prisma retangular reto, executando o comando: $poll = Polígono((0,0),(3,0),4)$;
4. Construa o prisma $p1$, a partir do polígono $poll$, com altura medindo 6 unidades de comprimento. Para isso, execute o comando: $p1 = Prisma(poll,6)$;
5. Construa o círculo c , com a mesma área do polígono $poll$. Para isso, utilize o comando: $c : Círculo((7,1.5),sqrt(9/pi),EixoZ)$;
6. Construa o cilindro $c1$, a partir do círculo c , construído anteriormente. Para isso, utilize o comando: $c1 = Cilindro(c,6)$;
7. Crie o controle deslizante $MovPlano$, executando o comando: $MovPlano = ControleDeslizante(0, 6, 0.1)$;
8. Construa o plano β , que se movimentará de acordo com o valor ajustado no controle deslizante $MovPlano$. Para isso, execute o comando: $\beta : z = MovPlano$;
9. Faça a interseção do plano β com o prisma $p1$ e com o cilindro $c1$, por meio dos comandos: $inter1 = InterseçãoGeométrica(p1,\beta)$ e $inter2 = InterseçãoGeométrica(c1,\beta)$;
10. Obtenha na tela a área das interseções $inter1$ e $inter2$. Para isso, selecione a ferramenta *Área* () e toque sobre os polígonos $inter1$ e $inter2$. Para facilitar o uso da ferramenta *Área*, já que as interseções ficaram no interior dos sólidos, pode-se aumentar o valor do controle deslizante $MovPlano$, e ocultar os dois sólidos, localizando-os na janela de álgebra e tocando sobre o ícone  correspondente a cada um. Após obter as áreas, torne a exibir os sólidos, executando o mesmo procedimento usado para ocultá-los;
11. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
12. Manipule o controle deslizante $MovPlano$, movimentando o plano β entre as bases dos sólidos. Observe que, em qualquer lugar que o plano β intercepta os sólidos, a área de sua interseção com o prisma $p1$ é igual à área de sua interseção com o cilindro $c1$;

13. Calcule o volume dos prismas, selecionando a ferramenta *Volume* (), e tocando sobre cada um deles. Perceba que os dois sólidos possuem volumes iguais. Veja a seguir, na Figura 5.11, algumas capturas de tela que mostram a conclusão dessa construção, no aplicativo.

Figura 5.11 – Aplicação do Princípio de Cavalieri para obter o volume do cilindro.



Fonte: O autor.

Nas capturas de tela mostradas na Figura 5.11, observando da esquerda para a direita, as três primeiras capturas mostram o resultado da manipulação do controle deslizante *MovPlano*, aumentando gradualmente o seu valor. Neste momento, o aluno pode perceber que, em todas as posições possíveis para o plano β , sua interseção com o prisma gera um polígono com área equivalente a área do círculo, gerado pela interseção deste plano com o cilindro. A finalização da exploração está retratada na Figura 5.11d, que é o momento em que o aluno obtém o volume dos sólidos, e constata a sua igualdade.

Após essa exploração, foi utilizada uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 3, *slide* 6), para fazer a abordagem algébrica da construção, demonstrando que se os dois sólidos possuem a mesma área da base e a mesma altura, qualquer plano, paralelo ao plano da base, intercepta-os formando figuras geométricas com áreas iguais. A partir disso, concluiu-se que o processo de cálculo do volume do paralelepípedo retângulo, que consiste no produto da área da base pela altura, também pode ser aplicado para obter o volume de um cilindro.

5.3.4 Quarta atividade: Estudo da definição de cone

Nessa atividade, utilizou-se uma apresentação de *slides* para auxiliar no destaque aos elementos da geometria espacial que fazem parte da definição de cone (Apêndice B, item 3, *slide* 8), com base em Pompeo e Dolce (2005). Em seguida, utilizou-se o aplicativo para fazer a construção de cada um desses elementos, de modo que o aluno conseguisse visualizá-los em RA, e também interagir com alguns deles, o que lhe permitiu visualizar diversos tipos de cone.

A seguir, são apresentadas as instruções repassadas aos participantes para o desenvolvimento dessa construção:

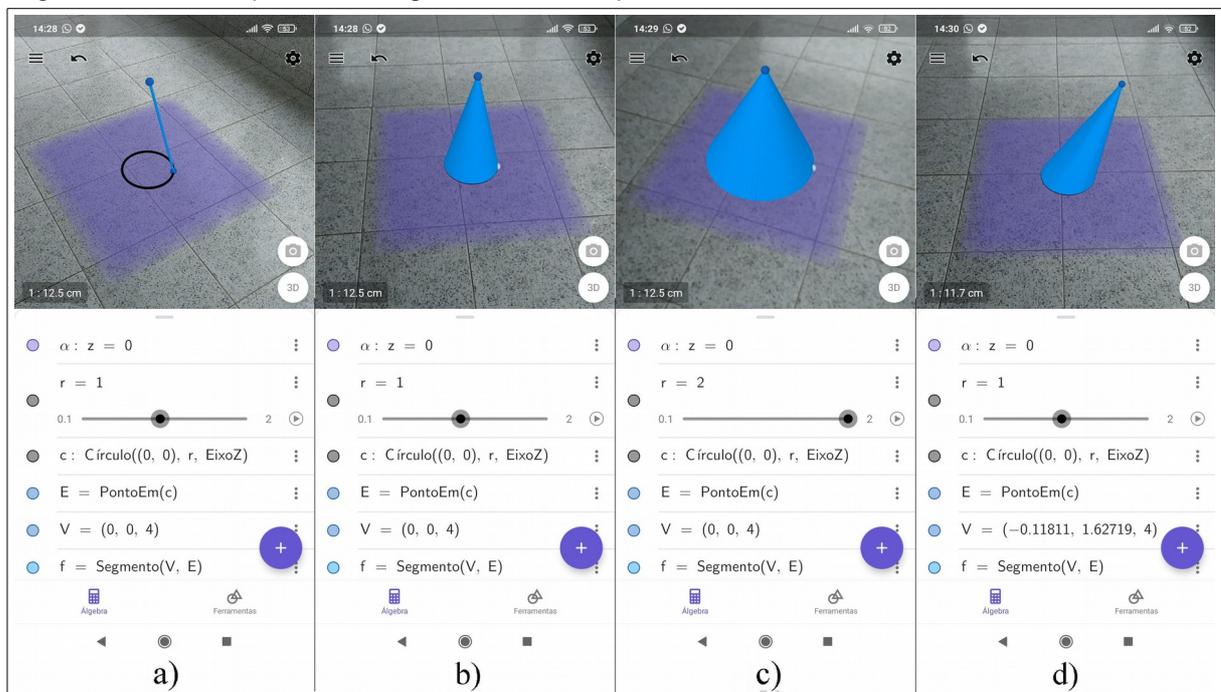
1. Acesse as configurações, tocando no ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque as opções *Exibir Eixos* e *Exibir Plano*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Crie o plano α , inserindo no campo *Entrada* o comando: $\alpha : z = 0$;
3. Crie um controle deslizante de nome r , que determinará o raio da base do cone, por meio do comando: $r = \text{ControleDeslizante}(0.1, 2, 0.1)$;
4. Crie o círculo c , sobre o plano α , com centro na origem, e raio igual ao valor obtido no controle deslizante r . Para isso, execute o comando: $c : \text{Circulo}((0,0), r, \text{EixoZ})$;
5. Crie o ponto E , interior ao círculo c , executando o comando: $E = \text{PontoEm}(c)$;
6. Crie um ponto com nome V , fora do plano α . Para isso, utilize o comando: $V = (0, 0, 4)$;
7. Construa um segmento que liga o ponto V ao ponto E . Para isso, selecione a ferramenta *Segmento* () e toque no ponto V e depois no ponto E ;
8. Selecione uma cor clara para o segmento criado no passo anterior, tocando sobre ele e selecionando o ícone . Isso favorecerá a sua visualização;
9. Selecione a ferramenta *Mover* () e toque no segmento criado, selecione o ícone de configurações () e habilite o parâmetro *Rastro*;
10. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
11. Movimente diversas vezes o ponto E sobre o círculo c , de modo que os segmentos

resultantes do rastro do segmento VE , encubram toda a superfície do círculo c . Note que o rastro do segmento VE , compõe o corpo de um cone com a base no círculo c , e vértice em V ;

- Desative e ative novamente o modo de visualização em RA para eliminar o rastro do segmento VE . Observe diferentes tipos de cone, alterando o raio do círculo c , por meio do controle deslizante r , e reposicionando o ponto V .

Na Figura 5.12 a seguir, são mostradas algumas capturas de tela referentes ao desenvolvimento dessa construção, sendo a sua conclusão, ao final do passo 9, ilustrada na Figura 5.12a.

Figura 5.12 – Construção de cones a partir de sua definição.



Fonte: O autor.

A Figura 5.12b mostra o resultado da movimentação do ponto E sobre o círculo c , e o rastro do segmento VE preenche o corpo do cone. Na Figura 5.12c, modifica-se o raio do círculo c , manipulando-se o controle deslizante r ; e na Figura 5.12d, modifica-se também a posição do ponto V , que representa o vértice do cone, obtendo-se um cone oblíquo.

5.3.5 Quinta atividade: Construção do cone de revolução

Nessa atividade, foi realizada uma construção que visava obter um cone a partir da rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos. Nessa

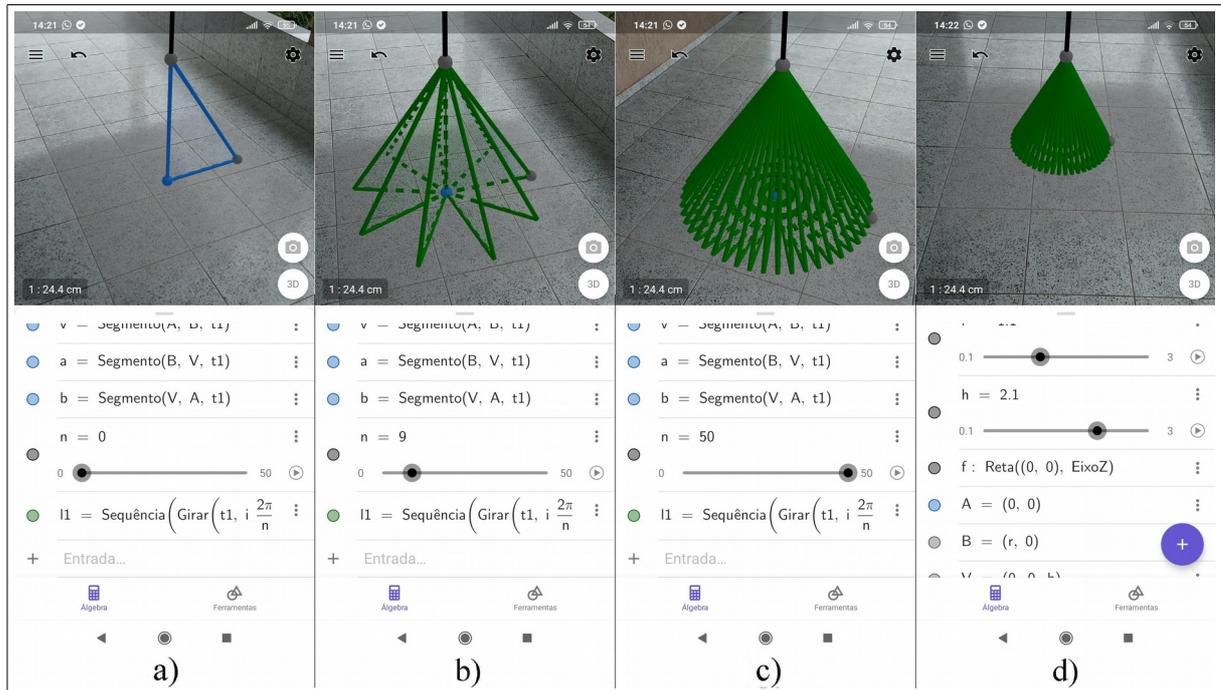
construção, o aluno teve a liberdade para manipular o comprimento de cada um dos catetos, que definiram a altura e o raio do cone de revolução, e também pôde controlar a rotação deste triângulo em torno do eixo de rotação.

As instruções repassadas para os participantes para o desenvolvimento dessa construção são listados a seguir:

1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque a opção *Exibir Eixos*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Crie o controle deslizante r , que definirá o raio da base do cone, por meio do comando: $r = \text{ControleDeslizante}(0.1, 3, 0.1)$;
3. Crie o controle deslizante h , que definirá a altura do cone, por meio do comando: $h = \text{ControleDeslizante}(0.1, 3, 0.1)$;
4. Construa o eixo do cone de revolução, por meio do comando: $\text{Reta}((0, 0), \text{EixoZ})$;
5. Crie o ponto A , que será o centro do círculo da base, por meio do comando: $A = (0, 0)$;
6. Crie um ponto B , por meio do comando: $B = (r, 0)$;
7. Crie o ponto V , que será o vértice do cone de revolução, executando o comando: $V = (0, 0, h)$;
8. Crie o triângulo $t1$, executando o comando: $t1 = \text{Polígono}(A, B, V)$.
9. Crie o controle deslizante n , que definirá o número de réplicas do triângulo $t1$, rotacionadas em torno do eixo, por meio do comando: $n = \text{ControleDeslizante}(0, 50, 1)$;
10. Crie uma sequência de rotações do polígono $pol1$ em torno do eixo de rotação, por meio do comando: $\text{Sequência}(\text{Girar}(t1, i, 2\pi/n), i, 1, n)$;
11. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
12. Ajuste os controles deslizantes r e h para os valores 2 e 3, respectivamente.
13. Aumente gradualmente o valor do controle deslizante n ;
14. Agora, basta redimensionar o triângulo $t1$, manipulando os controles deslizantes r e h , e escolher o número de réplicas suas, que serão exibidas rotacionadas em torno do eixo, formando o cone de revolução.

Observe a seguir, na Figura 5.13, algumas capturas de tela que mostram a conclusão dessa construção, no aplicativo.

Figura 5.13 – Construção do cone de revolução.



Fonte: O autor.

A Figura 5.13a, mostra a conclusão da construção, ao final do passo 10. Nesse momento, o aluno consegue perceber com clareza a figura que será rotacionada, e também o eixo em torno do qual ocorrerá a rotação. Já nas imagens *b* e *c*, da Figura 5.13, ilustra-se o aumento gradual do valor do controle deslizante n , que levará à formação do cone de revolução. Na Figura 5.13d, faz-se um redimensionamento do triângulo tI , movimentando-se os controles deslizantes r e h , obtendo um novo cone de revolução.

5.3.6 Sexta atividade: Cálculo do volume do cone

Nessa atividade, foi desenvolvida uma construção baseada na aplicação do Princípio de Cavalieri para a obtenção do volume de um cone. Nessa construção, o aluno teve a sua disposição uma pirâmide e um cone, com mesma área da base e mesma altura, apoiados sobre um mesmo plano, e pôde interagir com um segundo plano, que permanece sempre paralelo ao plano da base. Ao movimentar este plano, o aluno percebeu visualmente que, em qualquer distância que ele esteja do plano da base, sua interseção com cada um dos sólidos gera figuras geométricas com áreas iguais.

A seguir, são apresentadas as instruções repassadas para os alunos, para o desenvolvimento dessa construção:

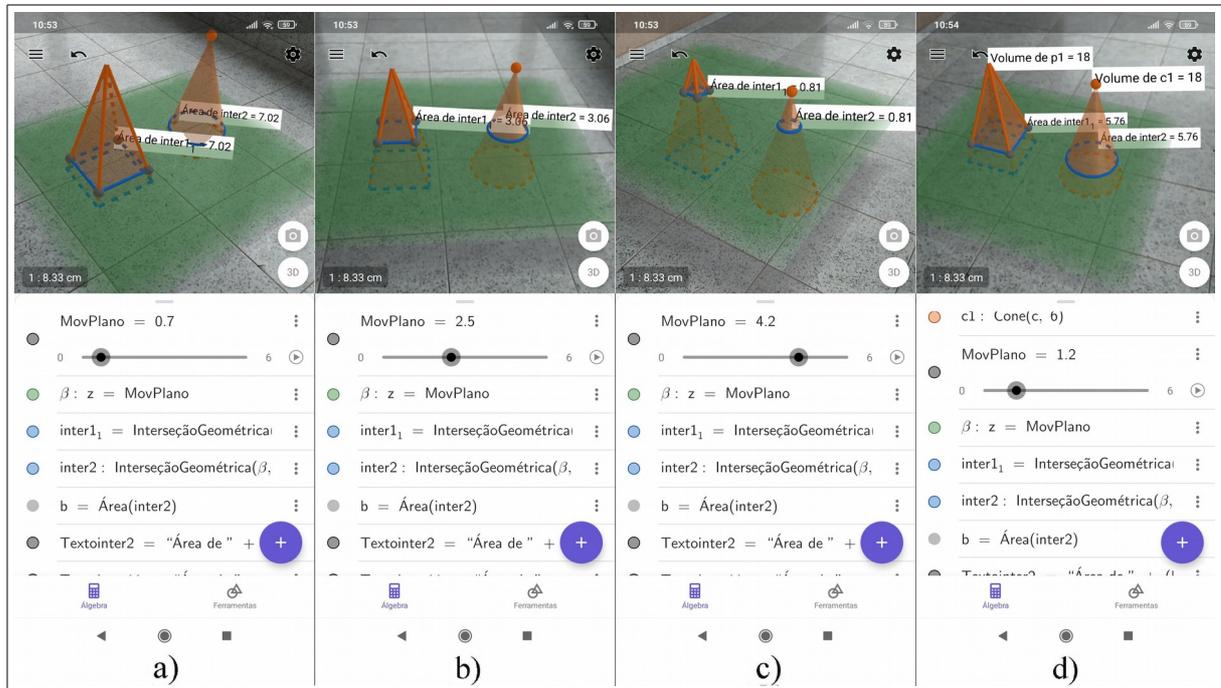
1. Acesse as configurações, por meio do ícone . Na aba *Janela de Visualização*,

desmarque as opções *Exibir Eixos* e *Exibir Plano*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;

2. Crie o plano α , inserindo no campo *Entrada* o comando: $\alpha : z = 0$;
3. Construa a polígono $pol1$, que será a base da pirâmide, executando o comando: $pol1 = Polígono((0,0),(3,0),4)$;
4. Construa a pirâmide $p1$, a partir do polígono $pol1$, com altura medindo 6 unidades de comprimento. Para isso, execute o comando: $p1 = Pirâmide(pol1,6)$;
5. Construa o círculo c , com a mesma área do polígono $pol1$. Para isso, utilize o comando: $c : Círculo((7,1.5),sqrt(9/pi),EixoZ)$;
6. Construa o cone $c1$, a partir do círculo c , construído anteriormente. Para isso, utilize o comando: $c1 = Cone(c,6)$;
7. Crie o controle deslizante $MovPlano$, executando o comando: $MovPlano = ControleDeslizante(0, 6, 0.1)$;
8. Construa o plano β , que se movimentará de acordo com o valor ajustado no controle deslizante $MovPlano$. Para isso, execute o comando: $\beta : z = MovPlano$;
9. Faça a interseção do plano β com a pirâmide $p1$ e com o cone $c1$, por meio dos comandos: $inter1 = InterseçãoGeométrica(p1,\beta)$ e $inter2 = InterseçãoGeométrica(c1,\beta)$;
10. Obtenha a área das interseções $inter1$ e $inter2$. Para isso, selecione a ferramenta *Área* () *Área*), e toque sobre os polígonos $inter1$ e $inter2$. Para facilitar o uso da ferramenta *Área*, já que as interseções ficaram no interior dos sólidos, pode-se aumentar o valor do controle deslizante $MovPlano$, e ocultar os dois sólidos, localizando-os na janela de álgebra e tocando sobre o ícone , correspondente a cada um. Após obter as áreas, torne a exibir os sólidos, executando o mesmo procedimento usado para ocultá-los.
11. Manipule o controle deslizante $MovPlano$, movimentando o plano β , e observe que, em qualquer posição que esteja o plano β , a área de sua interseção com a pirâmide $p1$ é igual à área de sua interseção com o cone $c1$;
12. Obtenha o volume dos sólidos, selecionando a ferramenta *Volume* () *Volume*), e tocando sobre cada um deles. Perceba que os dois sólidos possuem volumes iguais. Veja a seguir, na Figura 5.14, algumas capturas de tela que mostram a conclusão

dessa construção, no aplicativo.

Figura 5.14 – Aplicação do Princípio de Cavalieri para obter o volume do cone.



Fonte: O autor.

Observando a Figura 5.14, da esquerda para a direita, mostra-se nas três primeiras capturas de tela, a movimentação do plano β (em verde), de modo que o aluno consegue visualizar que em qualquer posicionamento deste plano em relação aos sólidos, as áreas das figuras geométricas formadas por sua interseção com cada um deles, são equivalentes. Já a Figura 5.14d mostra o momento em que se obtém o volume dos sólidos, e se constata a sua igualdade.

Após a exploração dessa construção, utilizou-se uma apresentação de *slides* para fazer a formalização do processo de cálculo do volume do cone. Nesse processo, mostrou-se algebricamente que se um cone e uma pirâmide possuem mesma área da base e mesma altura, e suas bases pertencem para um mesmo plano, qualquer plano paralelo ao plano da base, seccionará cada um dos sólidos formando figuras geométricas com áreas equivalentes. Com isso, retomou-se o Princípio de Cavalieri, que garante a igualdade entre os volumes dos dois sólidos.

5.4 QUARTO ENCONTRO

Este encontro foi composto por duas atividades, nas quais se abordou a construção e exploração de uma anticlépsidra de revolução, e o cálculo do volume de uma esfera. Nessas atividades, buscou-se elaborar construções que possibilitassem ao aluno perceber visualmente a região do espaço abarcada pela superfície de uma anticlépsidra, e também, constatar como é possível obter o volume de uma esfera por meio do cálculo do volume de uma anticlépsidra.

5.4.1 Primeira atividade: Construção e exploração de uma anticlépsidra de revolução

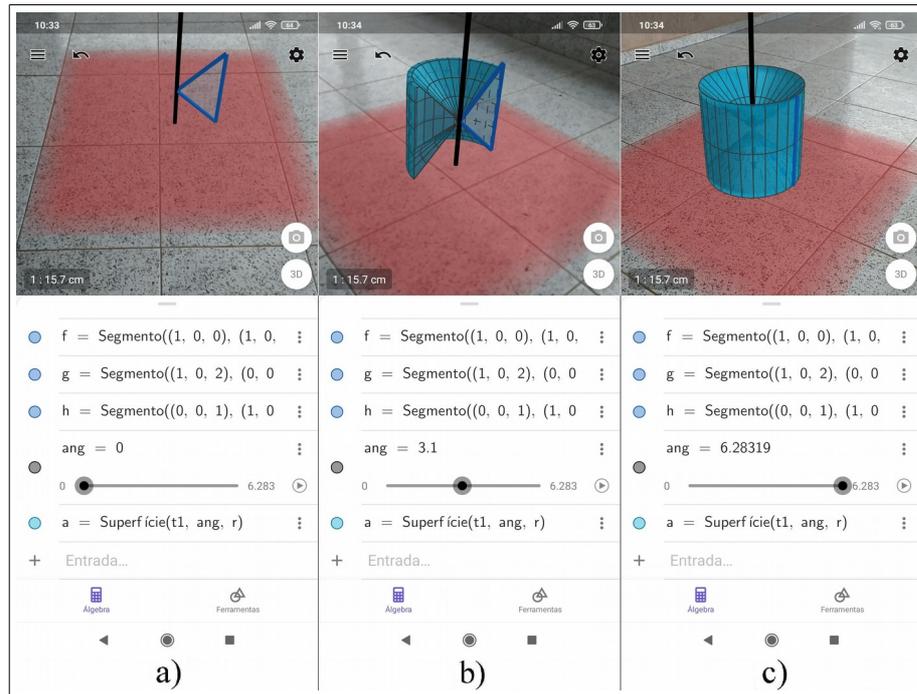
Com esta construção, o aluno pôde explorar uma anticlépsidra de revolução, contemplando-a visualmente de diversos ângulos, em RA, sendo-lhe possível inclusive controlar a rotação da figura geradora em torno do eixo, e perceber a região do espaço envolvido pela sua superfície.

Os passos repassados para os participantes, para o desenvolvimento dessa construção, são listados a seguir:

1. Acesse as configurações, tocando no ícone . Na aba *Janela de Visualização*, desmarque as opções *Exibir Eixos*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;
2. Construa a reta r , que será o eixo de revolução, para a construção da anticlépsidra. Para isso, utilize o comando: $r = \text{Reta}((0,0), \text{EixoZ})$;
3. Construa o triângulo $t1$, que será revolucionado em torno da reta r , e gerará a anticlépsidra. Para isso, execute o comando: $t1 = \text{Poligono}((1,0,0), (1,0,2), (0,0,1))$;
4. Construa o controle deslizante ang , que permitirá definir o ângulo de rotação do triângulo $t1$ em torno da reta r , para formar a anticlépsidra. Para isso, utilize o comando: $ang = \text{ControleDeslizante}(0, 2\pi, 0.01)$;
5. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
6. Crie a superfície da anticlépsidra, girando o triângulo $t1$ em torno da reta r . Para isso, execute o comando: $\text{Superfície}(t1, ang, r)$;
7. Explore visualmente a anticlépsidra movimentando o controle deslizante ang , de modo que se possa perceber a região do espaço delimitada por sua superfície;

A Figura 5.15 a seguir ilustra alguns passos da construção e exploração da anticlépsidra de revolução.

Figura 5.15 – Construção da anticlépsidra de revolução no aplicativo.



Fonte: O autor.

Na Figura 5.15a, mostra-se a conclusão da construção, com o controle deslizante ang na posição inicial ($ang = 0$), sendo possível perceber apenas o eixo de rotação e o triângulo que será rotacionado para gerar a anticlépsidra. Na Figura 5.15b, ajusta-se o controle deslizante ang para o valor 3,1, e pode-se observar a região do espaço que pertence para o interior da anticlépsidra. Na Figura 5.15c, mostra-se o resultado da movimentação do controle deslizante ang para o seu valor máximo, formando o respectivo sólido de revolução.

5.4.2 Segunda atividade: Cálculo do volume da esfera

Nesta atividade, foram construídas uma esfera e uma anticlépsidra, ambas apoiadas de forma conveniente sobre um mesmo plano, e o aluno pôde interagir com um segundo plano, que embora fosse móvel, permanecia sempre paralelo ao plano da base. Ao interagir com o plano móvel, o aluno constatou visualmente que, em qualquer distância que ele estivesse do plano da base, sua interseção com a esfera e com a anticlépsidra gerava figuras geométricas com áreas iguais. Em seguida, o aluno pôde utilizar ferramentas apropriadas do aplicativo e constatar que os dois sólidos geométricos possuem o mesmo volume.

A seguir, são listados os passos necessários para o desenvolvimento dessa construção, que foram repassados aos participantes:

1. Acesse as configurações, tocando no ícone . Na aba *Janela de Visualização*,

desmarque as opções *Exibir Eixos* e *Exibir Plano*. Na aba *Álgebra*, ajuste o parâmetro *Descrições Algébricas* para *Definição*. Toque na janela gráfica para voltar à tela inicial;

2. Crie o plano α , inserindo no campo *Entrada* o comando: $\alpha : z = 0$;
3. Construa o ponto A , que será o centro da esfera, com o comando: $A = (0, 0, 1)$;
4. Construa uma esfera com centro em A , e raio unitário, executando o comando: $e = \text{Esfera}(A, 1)$;
5. Construa os pontos que servirão para a construção da anticlépsidra, por meio dos comandos: $B = (3, 0, 0)$; $C = (3, 0, 1)$; $D = (3, 0, 2)$ e $E = (2, 0, 0)$;
6. Como não é possível fazer interseções geométricas e calcular áreas e volumes a partir de sólidos criados com o comando *Superfície*, obteremos a anticlépsidra a partir da construção de um cilindro e dois cones. Sendo assim, construa os cilindros e os cones a partir dos seguintes comandos: $\text{cone1} : \text{cone}(B, C, 1)$; $\text{cone2} : \text{cone}(D, C, 1)$ e $\text{cil} : \text{cilindro}(B, D, 1)$;
7. Crie o controle deslizante *MovPlano*, que será responsável por movimentar o plano β , que será paralelo ao plano α , e interceptará cada um dos sólidos. Para isso, utilize o comando: $\text{MovPlano} = \text{ControleDeslizante}(0, 2, 0.01)$;
8. Construa o plano β , a partir do valor obtido no controle deslizante *MovPlano*, com o comando: $\beta : z = \text{MovPlano}$;
9. Crie as retas r_1 e r_2 , que auxiliarão na obtenção da interseção geométrica entre o plano β e a anticlépsidra, por meio do comando: $r_1 = \text{Reta}(C, D)$ e $r_2 = \text{Reta}(C, E)$. Oculte essas retas;
10. Para obter a interseção geométrica entre o plano β e as superfícies cônicas da anticlépsidra, crie o ponto F , resultante da interseção entre o plano β e a reta r_2 , e em seguida construa um círculo com centro em r_1 , e tendo F como um de seus pontos. Para isso, execute os seguintes comandos: $F = \text{Interseção}(\beta, r_2)$ e $\text{inter1} : \text{Círculo}(r_1, F)$;
11. Para obter a interseção geométrica entre o plano β e a superfície cilíndrica da anticlépsidra, utilize o comando: $\text{inter2} : \text{InterseçãoGeométrica}(\beta, \text{cil})$;
12. Crie os números $A1$ e $A2$, que corresponderão às áreas das interseções do plano β com as superfícies cônica e cilíndrica da anticlépsidra, respectivamente. Para isso, execute os comandos: $A1 = \text{Área}(\text{inter1})$ e $A2 = \text{Área}(\text{inter2})$;
13. Calcule a área da interseção entre o plano β e a anticlépsidra. Para isso,

selecionado a ferramenta *Área* ()^{cm²}, toque sobre o círculo *inter2*, e perceba que o comando “*Textointer2 = “Área de” + (Nome(inter2)) + “ = ” + i*” surge na janela de álgebra. Modifique esse comando, tocando sobre ele, e deixe-o da seguinte forma: *Tesxtointer2 = “Área = ” + (A2 – A1)*;

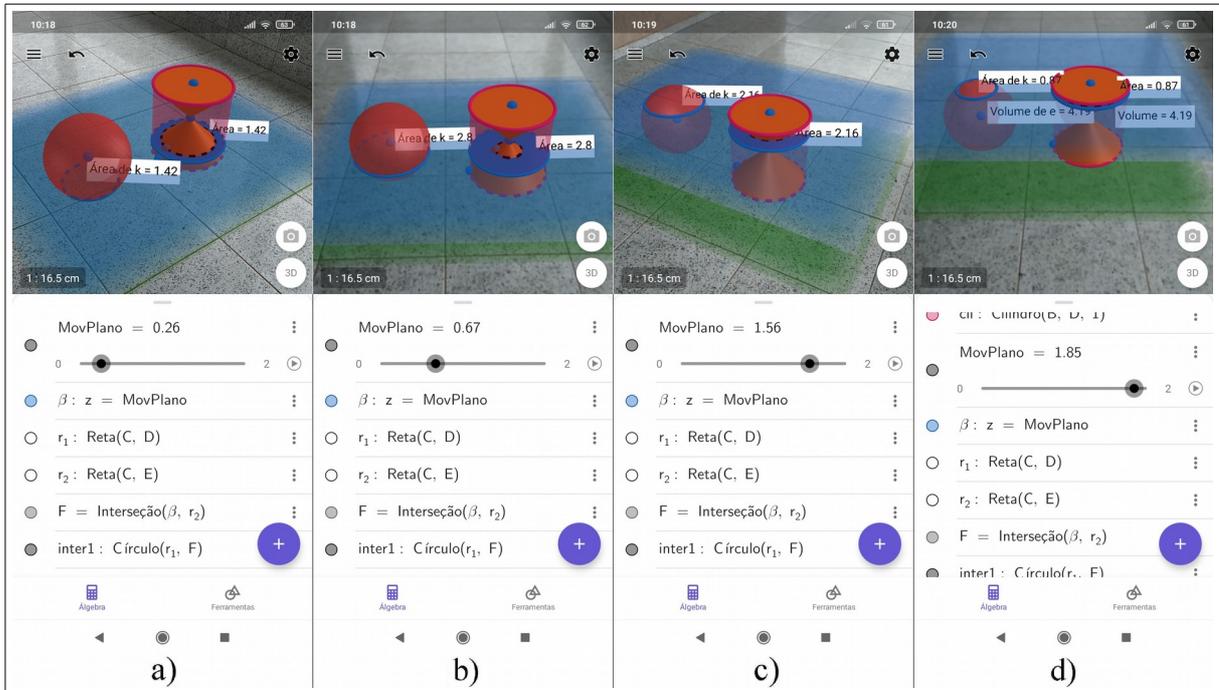
14. Faça a interseção geométrica entre o plano β e a esfera e , executando o comando: *int3: InterseçãoGeométrica(β , e)*;
15. Obtenha a área da interseção entre o plano β e a esfera e , selecionado a ferramenta *Área* ()^{cm²}, e tocando sobre o círculo localizado no interior da esfera e ;
16. Ative o modo de visualização em RA, tocando sobre o botão , que se encontra no canto inferior direito da janela gráfica;
17. Manipule o controle deslizante *MovPlano*, e observe a movimentação do plano β , comparando a área de sua interseção com a anticlépsidra e com a esfera;
18. Crie os números *volumecones* e *volumecil*, que corresponderão aos volumes dos cones e do cilindro, respectivamente. Para isso, execute os comandos: *volumecones = Volume(cone1)* e *volumecil = Volume(cil)*;
19. Agora é possível obter o volume da anticlépsidra, subtraindo do cilindro o volume dos cones. Para isso, selecione a ferramenta *Volume* ()^{cm³}, toque sobre o cilindro, e perceba que o comando “*Textocil = “Volume de” + (Nome(cil)) + “ = ” + volumecil*” surge na janela de álgebra. Modifique esse comando, deixando-o da seguinte forma: *Tesxtocil = “Volume = ” + (volumecil – 2 volumecones)*;
20. Obtenha também o volume da esfera, selecionando a ferramenta *Volume* ()^{cm³}, e tocando sobre ela na janela gráfica. Compare os volumes da esfera e da anticlépsidra, e perceba a sua igualdade.

Veja na Figura 5.16 a seguir, algumas capturas de tela do aplicativo, referentes a essa construção.

Observando a Figura 5.16, da imagem a) até a imagem c), se observa o resultado de um aumento gradativo no valor do controle deslizante *MovPlano*, o que leva a uma elevação do plano β (em azul). Com isso, o aluno consegue visualizar infinitas secções planas, paralelas ao plano α (em verde), feitas na esfera e também na anticlépsidra, e constatar que em qualquer posição do plano β , a área da figura geométrica resultante da secção na esfera é igual à área da figura geométrica resultante da secção na anticlépsidra. Já a Figura 5.16d,

ilustra o resultado da execução dos passos 19 e 20, em que o aluno consegue constatar que o volume dos dois sólidos é igual.

Figura 5.16 – Estudo do volume da esfera.



Fonte: O autor

Ao final da exploração da construção feita no aplicativo, utilizou-se uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 4), para provar algebricamente a equivalência entre as áreas das secções planas dos dois sólidos. Além disso, demonstrou-se também a fórmula por meio da qual se obtém o volume da anticlépsidra, e conseqüentemente o volume da esfera.

Embora se tenha estabelecido esta disposição para as atividades em cada encontro, durante a aplicação das mesmas foram necessárias algumas alterações. Estas alterações foram necessárias devido à ocorrência de alguns imprevistos durante o desenvolvimento das construções, como erros cometidos pelos participantes na digitação de comandos, e também problemas com o compartilhamento de construções prontas.

O detalhamento da aplicação das atividades aqui descritas é feito no próximo capítulo, onde descrevemos a forma como ocorreram cada um dos encontros da oficina, e também destacamos os momentos mais relevantes de cada um deles.

6 RELATO E ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA PROPOSTA DIDÁTICA

Neste capítulo, relata-se a forma como ocorreram cada um dos encontros, destacando o modo como as atividades foram desenvolvidas e o desempenho dos alunos em cada uma delas. São discutidos alguns dados obtidos a partir das respostas dos participantes aos questionários, e também, são apresentadas e analisadas algumas imagens obtidas a partir das capturas de tela enviadas pelos participantes ao pesquisador.

Como os dados fornecidos pelos participantes eram identificados com o nome e o Registro Acadêmico de cada um, optou-se por atribuir um nome fictício a cada participante, de modo a impossibilitar qualquer forma de identificação da autoria dos dados, ao relatá-los nesta dissertação. Para isso, organizou-se os Registros Acadêmicos dos participantes em uma lista ordenada de forma aleatória, e se atribuiu a identificação “P1” ao primeiro da lista, “P2” ao segundo, e assim por diante, de modo que ao último foi atribuído a identificação “P7”.

6.1 PRIMEIRO ENCONTRO

Este encontro ocorreu no dia 8 de abril de 2021, no período vespertino, e apenas um participante não acompanhou as atividades de forma síncrona. Esse foi um ponto positivo, dada a importância do pesquisador poder verificar de imediato o nível de conhecimento de cada um sobre as funcionalidades do aplicativo, para poder atender com mais precisão às suas necessidades durante o uso do mesmo.

A atividade inicial do encontro foi o preenchimento de um questionário breve (Apêndice A, item 1), que tinha por objetivo verificar se todos os participantes eram capazes de calcular o volume de um paralelepípedo, e também qual a visão que eles tinham sobre o conceito de volume propriamente dito.

Em seguida, fez-se uma verificação inicial dos conhecimentos prévios dos participantes sobre o aplicativo utilizando-se de questionamentos orais para isso. Ao realizar esses questionamentos, no início do primeiro encontro, percebeu-se que, embora já conhecessem algumas ferramentas básicas do GeoGebra, eles ainda tinham pouco domínio sobre algumas funcionalidades que seriam utilizadas no decorrer dos demais encontros.

Esse fato também se confirmou mais tarde, no início da terceira atividade, quando se disponibilizou um roteiro com a sequência de comandos para a execução da mesma, e nenhum dos participantes optou por segui-lo de forma autônoma. Diante disso, percebeu-se que o desenvolvimento das atividades precisaria ser feito de forma bem detalhada, de modo

que todos pudessem acompanhar com tranquilidade a execução de cada um dos passos das construções.

A primeira atividade executada no aplicativo consistiu na construção de um dodecaedro, como foi relatado na seção 5.1.1. Essa atividade visou abordar todas as funcionalidades do aplicativo que seriam utilizadas nos quatro dias da oficina. Explorou-se a busca e a execução de comandos, o uso de ferramentas geométricas na construção de elementos tridimensionais, e a visualização desses elementos em RA. Apesar dessa atividade ter demandado um tempo maior do que o esperado, todos os participantes obtiveram êxito em sua conclusão.

A segunda atividade tratava da translação de um cubo no plano, conforme foi relatado na seção 5.1.2. Para essa atividade utilizou-se alguns *slides* (Apêndice B, item 1.1), para dar suporte à ação no aplicativo, e a construção teve como propósito explorar os principais comandos e ferramentas do aplicativo, que seriam utilizados durante a oficina. Foi nessa atividade que se começou a enfrentar uma das dificuldades que se tornou recorrente durante toda a oficina: a identificação de erros cometidos por alguns participantes durante a digitação de comandos.

Este problema foi identificado pela primeira vez quando o participante P2 relatou que não conseguiu executar o comando $A = (Ox, Oy, Oz)$, que resultava na criação do ponto A utilizando os valores dos controles deslizantes Ox , Oy e Oz em suas coordenadas. Sua solução só foi possível depois que o pesquisador conduziu esse participante em uma revisão minuciosa em sua construção, possibilitando que ele identificasse que havia nomeado equivocadamente o controle deslizante Ox como ax . Após corrigir o erro, esse participante, assim como todos os outros, conseguiu executar com sucesso os passos seguintes para a conclusão da construção.

Como essas duas atividades também demandaram um tempo maior do que o planejado, foi necessário suprimir do encontro síncrono o processo de elaboração da terceira construção. Assim, no momento síncrono, o estudo da razão entre dois paralelepípedos retângulos foi iniciado utilizando-se de uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 1.2), e foi compartilhada a construção geométrica no aplicativo já concluída, de modo que os participantes pudessem explorá-la em RA com mais tranquilidade. O processo de elaboração dessa construção, que foi descrito na seção 5.1.3, foi abordado de forma assíncrona, por meio de um vídeo compartilhado com os participantes. Cabe ressaltar aqui, que o compartilhamento da construção se deu por meio da opção *Compartilhar*, do aplicativo *Calculadora Gráfica GeoGebra 3D*, utilizando-se do aplicativo de mensagens *WhatsApp* como ferramenta de

compartilhamento *on-line*.

A quarta atividade, que abordou diretamente a ideia de cálculo do volume, também teve seu processo de construção suprimido do encontro síncrono devido à falta de tempo. Sendo assim, do mesmo modo que na atividade anterior, optou-se pelo compartilhamento dessa construção completa, e o processo de elaboração, descrito na seção 5.1.4, foi disponibilizado em vídeo aos participantes, para que eles pudessem realizá-lo a qualquer momento após o término do encontro síncrono.

O desenvolvimento dessa construção, com o auxílio do vídeo, ocorreu de forma satisfatória, sendo concluída pela maioria dos participantes sem grandes dificuldades. Destacaremos apenas o erro cometido pelo participante P5 que, embora estivesse efetuado corretamente cada um dos passos da construção, inverteu sua ordem de execução em um determinado momento, fazendo um aninhamento do comando *Transladar* no comando *Sequência*, antes da criação do vetor que determinava as translações, como pode ser visto na Figura 6.1 a seguir.

Figura 6.1 – Desenvolvimento da quarta construção pelo participante P5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 6.1 pode-se perceber que, quando o participante P5 inseriu o comando e teclou *Enter*, o aplicativo não encontrou o objeto correspondente com o nome do vetor (v_c).

Isso ocorreu porque ele ainda não havia sido criado, e desse modo o aplicativo inseriu automaticamente um controle deslizante com esse nome, impossibilitando da mesma forma a execução do comando, visto que um controle deslizante se configura como uma entrada numérica. Com isso, o aplicativo exibiu apenas uma mensagem de erro, indicando “Adição inválida”.

A exploração dessa construção ocorreu de forma bastante produtiva, como pode ser constatado nos próximos parágrafos, ao se comparar as respostas do questionário aplicado no início da oficina (Apêndice A, item 1), com aquelas obtidas no questionário aplicado após a execução das atividades (Apêndice A, item 4).

Podemos destacar primeiramente que a experiência no aplicativo provocou uma mudança significativa na forma como estes alunos verbalizaram seu entendimento sobre o conceito de volume. Ao serem questionados no início, antes de realizar as atividades, sobre “O que você entende por volume de um sólido geométrico?”, percebeu-se que alguns participantes buscaram expressar, de alguma forma, que o volume de um sólido é a porção do espaço limitada por sua superfície, porém, a maioria deles demonstrou compreender esse conceito de forma bastante superficial, e em alguns casos fortemente ligado ao processo algébrico aplicado no cálculo.

Destacaremos aqui a resposta inicial do participante P7, que afirmou “É o todo do sólido, a massa”, indicando que ele buscou se referir ao espaço ocupado pelo sólido, mas sem utilizar o termo “Espaço”, afirmando apenas que o volume é “o todo do sólido”, possivelmente fazendo referência a todo o espaço ocupado pelo sólido. A maioria manifestou ideias bastante superficiais, como: “São sólidos tridimensionais”, “Área da base x altura do sólido” e “Três dimensões: altura, largura e comprimento”, indicando entendimentos bastante atrelados ao processo algébrico utilizado no cálculo do volume de alguns sólidos.

Após a realização do encontro, ainda se percebeu algumas respostas associadas com o processo algébrico, como no caso do participante P3, que respondeu “o número de unidades de volume que ocupam o espaço do sólido”, mas se notou que essas respostas já não estavam tão restritas ao simples valor numérico. A forma como eles se expressaram indicou que o valor obtido no processo algébrico passou a estar relacionado com a representação visual do sólido, ou seja, eles passaram a demonstrar que o valor obtido no cálculo representava o número de unidades que preenchem o espaço ocupado pelo sólido.

Houve também alguns participantes que se expressaram de forma bastante pessoal, indicando que suas respostas estavam fortemente ligadas com a experiência vivenciada no aplicativo, como o caso do participante que respondeu “Volume de um sólido geométrico é a

área de dentro do sólido que é limitada pela superfície”, em que se observou um equívoco ao se referir ao termo “área”, sendo que, pela forma como ele o colocou, entende-se que queria se referir a “Espaço”, pois finalizou a sua afirmação utilizando os termos “dentro” e “superfície”, relacionados ao conceito de espaço. Com isso, percebeu-se que o aplicativo permitiu aos participantes melhorar suas habilidades de compreensão das figuras geométricas tridimensionais, corroborando com Lainufar, Mailizar e Johar (2021a), ao concluírem que o aplicativo contribui para o aprimoramento das habilidades visuais-espaciais dos alunos.

6.2 SEGUNDO ENCONTRO

Este encontro ocorreu no dia 15 de abril, de 2021, e abordou prismas e pirâmides, com ênfase à definição e ao cálculo do volume desses sólidos. Ao contrário do primeiro, neste encontro a maioria dos participantes realizou as atividades de forma assíncrona, acompanhando-as por meio da gravação do encontro síncrono.

Este encontro foi iniciado com a aplicação do questionário inicial, que continha questões relacionadas a algumas características e propriedades dos prismas e das pirâmides, e também algumas questões relacionadas ao cálculo do volume desses sólidos. Em seguida, iniciou-se as atividades do encontro com uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 2), e o uso do aplicativo ocorreu de forma intercalada, servindo como um meio pelo qual os participantes elaboravam e exploravam construções geométricas em RA, baseadas nos conteúdos abordados nos *slides*.

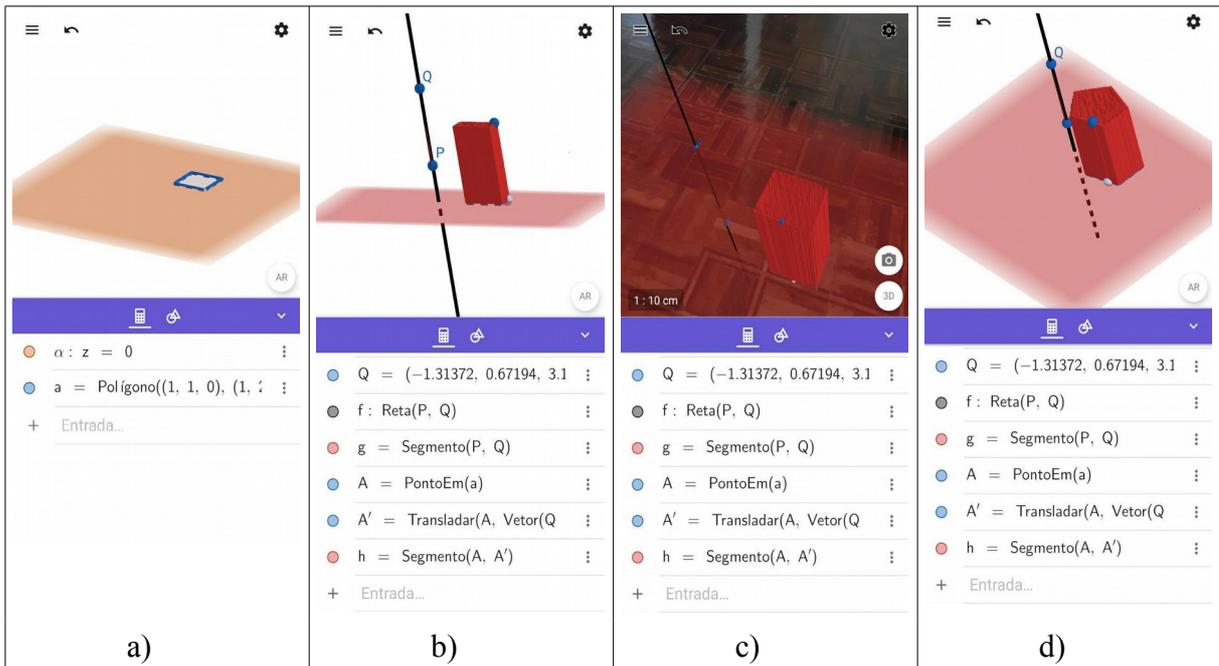
O primeiro conteúdo abordado foi a definição de prisma. Para isso, apresentou-se inicialmente alguns sólidos geométricos e se fez várias observações sobre eles, buscando identificar os prismas e ressaltar as características que os fazem ser classificados como tal. Em seguida, apresentou-se a definição de prisma, com base em Pompeo e Dolce (2005), e se efetuou a primeira construção, a qual se baseava nessa definição, conforme os passos descritos na seção 5.2.1. Nessa construção, os participantes conseguiam visualizar e interagir com diferentes elementos da geometria espacial envolvidos na definição, e com isso visualizar diversos tipos de prismas em RA.

O desenvolvimento dessa construção ocorreu de forma bastante tranquila, com exceção de um problema relatado por um dos participantes. Segundo ele, ao executar o quarto passo da construção, o comando $a = \text{Polígono}((1, 1, 0), (1, 2, 0), n)$ resultou na representação gráfica de duas linhas, e não de um polígono com número de lados de acordo com o valor do controle deslizante n , como era esperado. A solução desse problema só foi possível após o

comando ser apagado da janela de álgebra e executado novamente pelo participante.

A seguir, são apresentadas algumas imagens que ilustram como um dos participantes desenvolveu e explorou essa primeira construção, que ocorreu após a exibição do *slide 5* (Apêndice B, item 2). Na Figura 6.2, temos quatro capturas de tela enviadas por esse participante, feitas no decorrer do desenvolvimento da atividade.

Figura 6.2 – Desenvolvimento da primeira construção por um dos participantes.



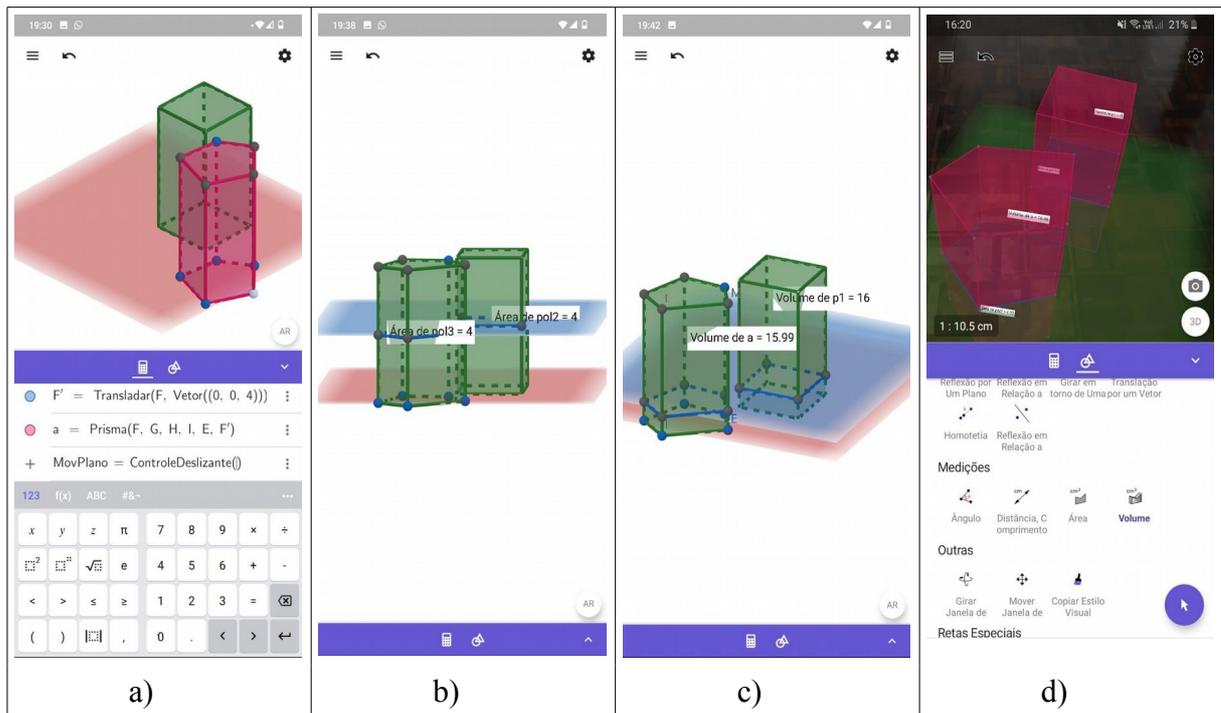
Fonte: Dados da pesquisa.

Observando a imagem a), da Figura 6.2, vemos a construção em seu início, em que o participante havia construído apenas o plano e o polígono. Já nas imagens b) e c) da Figura 6.2, nota-se que toda a construção havia sido concluída, e o participante já modificou a posição do ponto Q , que lhe permitiu observar um prisma oblíquo, utilizando a RA para explorá-lo. A última imagem dessa construção (Figura 6.2d), mostra o resultado da modificação do controle deslizante n , ajustando-o para o valor 5, e observando um prisma oblíquo de base pentagonal.

No desenvolvimento da segunda atividade, cujos passos para a elaboração da construção geométrica no aplicativo estão descritos na seção 5.2.2, nenhum participante relatou ter encontrado dificuldades. Nessa atividade se estudou o cálculo do volume de prismas com base em uma aplicação do princípio de Cavalieri, com o objetivo de mostrar que se dois prismas quaisquer possuem a mesma área da base e mesma altura, então eles também possuem o mesmo volume.

Na Figura 6.3, a seguir, temos algumas imagens enviadas por dois participantes, em que um deles exibe vários passos do desenvolvimento da construção, e o outro compartilha a sua exploração em RA. Essa construção foi executada após a exibição do *slide* 11 (Apêndice B, item 2).

Figura 6.3 – Desenvolvimento e exploração da segunda construção por dois participantes.



Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 6.3a mostra o segundo prisma (em vermelho) já construído pelo primeiro participante, e no campo *Entrada* é possível perceber que está sendo digitado o comando $MovPlano = ControleDeslizante()$, que resulta na criação do controle deslizante que permitirá movimentar o plano β (em azul) entre as bases dos dois prismas. Já na imagem b), da Figura 6.3, esse mesmo participante exibe as secções feitas pelo plano β em cada um dos prismas, e é possível perceber que ele já havia modificados a posição dos vértices da base do segundo prisma, tornando iguais as áreas das secções planas. A última imagem que o participante enviou, Figura 6.3c, mostra que ele conseguiu constatar a igualdade entre os volumes dos prismas, na medida em que a área das secções se igualou. A Figura 6.3d foi enviada pelo outro participante, e mostra a exploração dessa mesma construção em RA.

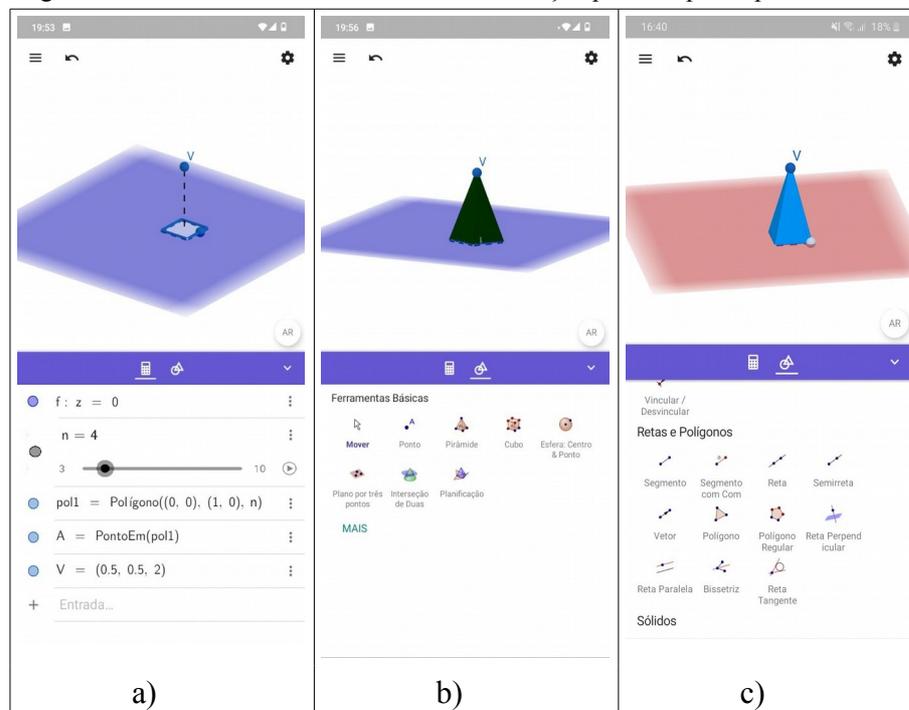
Ao observar a Figura 6.3c, vemos que os volumes dos prismas não ficaram exatamente iguais, embora as áreas das secções mostradas na Figura 6.3b o estivessem. Essa situação já era prevista pelo pesquisador, o qual buscou esclarecê-la explicando aos

participantes que as construções desenvolvidas no aplicativo são bastante precisas, porém existe um arredondamento nos valores das medidas. Como forma de amenizar esse problema, orientou-se que eles ajustassem a exibição dos valores numéricos para até duas casas decimais, porém ainda não foi suficiente.

Após a conclusão dessa construção, voltou-se para os *slides* 12 e 13 (Apêndice B, item 2), para mostrar, de forma algébrica, a aplicação do Princípio de Cavalieri para a obtenção do volume de prismas de bases não retangulares.

Na terceira atividade, cujos passos para o desenvolvimento da construção geométrica no aplicativo estão escritos na seção 5.2.3, e que abordou a definição de pirâmide, percebeu-se pouca interação dos participantes com a construção. A Figura 6.4 mostra que, apesar de ser uma construção em que era possível modificar a posição do vértice, permitindo obter pirâmides retas e oblíquas, e com diferentes alturas, e também permitia a modificação do número de lados do polígono da base, eles apenas concluíram a construção e movimentaram o ponto E pertencente à base, o qual permitia visualizar o rastro do segmento VE compondo o corpo da pirâmide. Essa construção foi executada após a exibição do *slide* 16 (Apêndice B, item 2).

Figura 6.4 – Desenvolvimento da terceira construção por dois participantes diferentes.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nas imagens a) e b), da Figura 6.4, um dos participantes mostra como ficou a

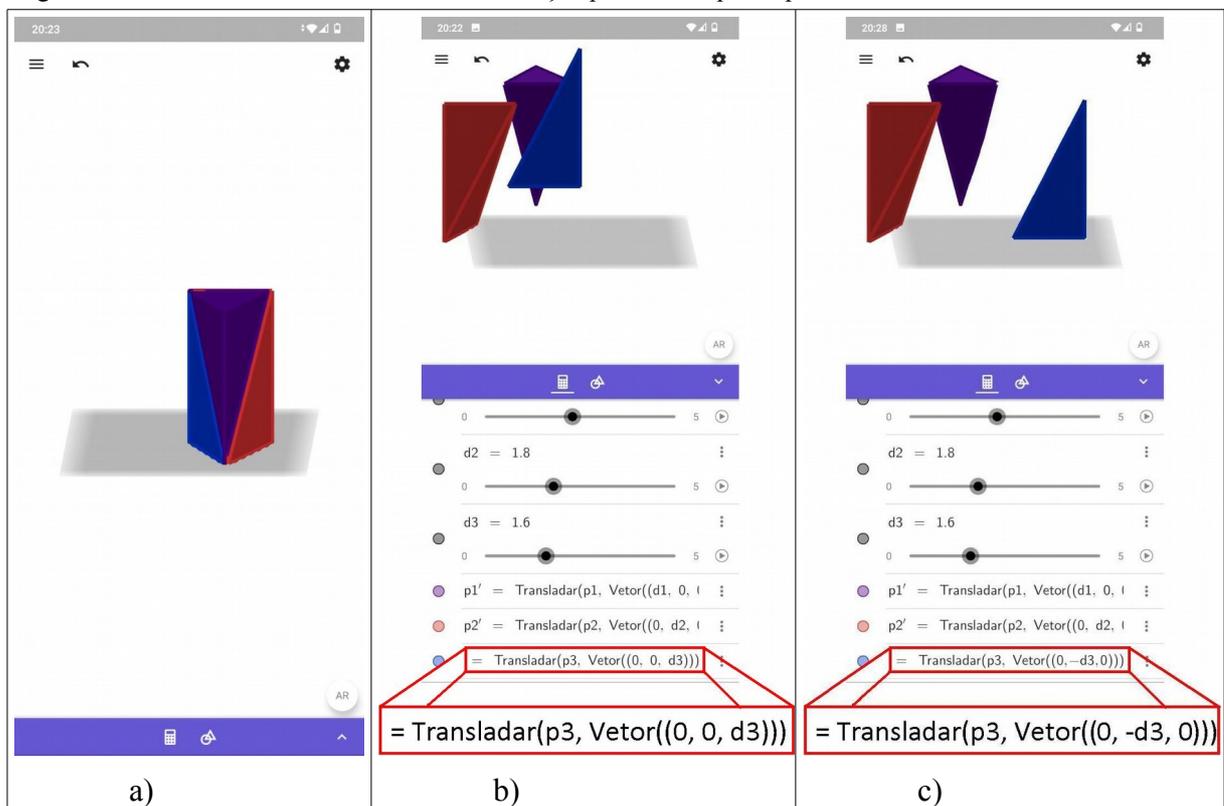
construção após a criação dos pontos V e E , e em seguida exibe o resultado da movimentação do ponto E sobre a base da pirâmide, fazendo com que o rastro do segmento VE completasse o corpo da pirâmide.

Na Figura 6.4c, tem-se a finalização dessa mesma construção por um outro participante, o qual utilizou uma cor mais clara para o segmento VE , como foi indicado no desenvolvimento da construção, o que lhe permitiu visualizar o corpo da pirâmide com mais clareza.

A atividade seguinte, que teve o processo de elaboração da construção geométrica no aplicativo descrito na seção 5.2.4, abordou o volume da pirâmide. Nesta atividade, os participantes construíram um prisma reto, de base triangular, que era dividido em três pirâmides. Com a exploração dessa construção, eles poderiam identificar as características de cada uma das pirâmides, que os faria perceber que seus volumes eram todos iguais.

A conclusão desta atividade por um dos participantes é apresentada a seguir, na Figura 6.5, em que se registra a finalização da construção, e um pequeno erro cometido por ele ao digitar o comando que resulta na construção da terceira pirâmide. A execução dessa construção ocorreu após a exibição do *slide* 19.

Figura 6.5 – Desenvolvimento da terceira construção por um dos participantes.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 6.5a, o participante mostra como ficou sua construção ao final da conclusão de todos os passos. Porém, ao movimentar o controle deslizante $d3$, responsável pela movimentação da pirâmide em azul, ele percebeu que essa pirâmide se movimentou na vertical, e não na horizontal, como era esperado. Analisando a sequência de comandos executada por esse participante, se constatou que ele inseriu erroneamente o valor do controle deslizante $d3$ na coordenada z do vetor de translação da pirâmide. Com isso, esse participante foi orientado que fizesse a correção do erro, para que a movimentação da terceira pirâmide ocorresse na horizontal, como é mostrado na Figura 6.5c.

Ao analisar as respostas dos questionários aplicados neste segundo dia de oficina (Apêndice A, itens 2 e 5), percebeu-se que, antes de realizar as atividades, diversos participantes revelaram portar uma imagem mental de prismas e pirâmides bastante superficial. Uma das evidências disso estava relacionada com o formato da base de uma pirâmide, que vários participantes indicaram como sendo sempre um polígono regular, o que está incorreto, pois segundo Pompeo e Dolce (2005), a base de qualquer pirâmide é formada por um polígono qualquer. Outra evidência estava relacionada com a altura dos prismas. Observou-se que alguns participantes concordaram com uma afirmação que indicava essa medida como sendo a distância entre as duas bases, o que não é correto, pois segundo Pompeo e Dolce (2005), a altura de qualquer prisma corresponde à distância entre os planos das bases.

Alguns participantes ainda se equivocaram com o formato das faces laterais dos prismas. Pois, antes de executar as atividades, eles não concordaram com a afirmação que indicava a possibilidade de um prisma ter suas faces laterais em formato de paralelogramo.

Na questão relacionada ao Princípio de Cavalieri, antes de realizar as atividades da oficina, apenas um dos participantes afirmou conhecê-lo. Porém, esse mesmo participante discordou de sua relação com o cálculo do volume de sólidos geométricos.

Um fato que chamou a atenção foi o domínio que os participantes tinham sobre do processo algébrico do cálculo do volume de prismas. No questionário inicial, foi possível perceber que a maioria deles não somente o conheciam, mas também eram capazes de perceber que o volume de um prisma independe do formato de sua base, e sim apenas do valor de sua área e da medida da altura desse sólido.

Vale lembrar que uma situação bastante parecida já se havia percebido no primeiro encontro, quando vários participantes definiram volume se referindo ao processo algébrico aplicado no cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo. Isso pode ser um indicativo de que a forma como esses alunos tiveram contato com esse conteúdo na educação básica foi fortemente atrelada ao processo algébrico, fazendo com que eles o lembrassem com mais

facilidade.

Após a conclusão das atividades da oficina, por meio do questionário final, observou-se que vários participantes agregaram inúmeras características às imagens mentais que tinham desses sólidos. Uma dessas características é a forma como se obtém a altura de um prisma, que antes de realizar as atividades eles haviam indicado como sendo a distância entre as duas bases, e agora esses mesmos participantes afirmaram ser a distância entre os planos que contém as bases.

Várias outras características relacionadas com aspectos visuais de prismas e pirâmides foram identificadas por eles no momento posterior ao desenvolvimento das atividades. Algumas relacionadas com o formato das faces laterais; com paralelismo de arestas laterais, no caso dos prismas; outras estavam relacionadas com as arestas laterais das pirâmides; enfim, percebeu-se que o uso da RA enriqueceu a imagem mental desses sólidos que muitos dos participantes tinham em mente.

Em relação ao cálculo do volume dos sólidos abordados, destacamos que após realizar as atividades da oficina, percebeu-se que os participantes não tiveram dificuldade para afirmar que o volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma com mesma área da base e mesma medida da altura. Além disso, propôs-se ainda dois problemas relacionados com o cálculo do volume de prismas e pirâmides, e se notou que eles não tiveram dificuldades para resolvê-los. O que indicou uma boa assimilação dos elementos visuais e algébricos envolvidos no processo.

6.3 TERCEIRO ENCONTRO

Este encontro ocorreu no dia 6 de maio de 2021, três semanas após a realização do encontro anterior. No decorrer das atividades desenvolvidas, estudou-se os cilindros e cones de revolução, foi desenvolvida a construção desses sólidos a partir de sua definição, e se estudou o cálculo do volume do cilindro. Embora se tenha planejado estudar o volume do cone neste encontro, isso não foi possível devido a um problema encontrado no compartilhamento de construções geométricas prontas. Este problema também implicou no adiamento, para o próximo encontro, da aplicação do questionário final referentes às atividades deste encontro.

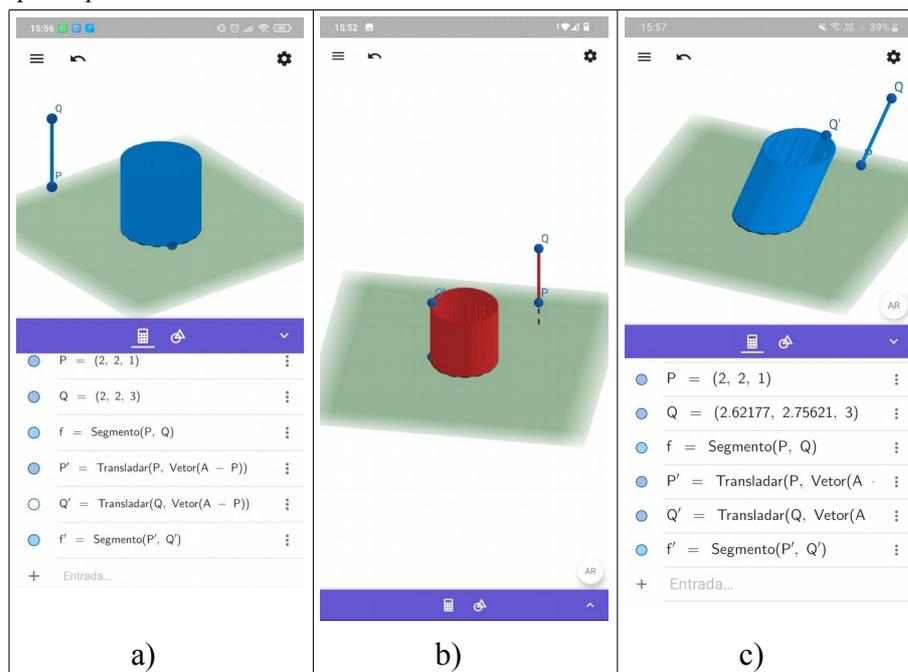
Antes de iniciar as atividades, da mesma forma que nos anteriores, foi disponibilizado o questionário inicial deste encontro (Apêndice A, item 3), para o preenchimento, e em seguida se iniciou a primeira atividade com apresentação de *slides*

(Apêndice B, item 3), e logo após a exibição do segundo *slide*, iniciou-se a primeira construção no aplicativo. Esta construção, cujos passos para seu desenvolvimento estão descritos na seção 5.3.1, se baseou na definição de cilindro, e permitia aos participantes modificar determinadas partes, e com isso visualizar diversos tipos de cilindros em RA.

O desenvolvimento dessa construção pelos participantes ocorreu sem grandes dificuldades, sendo que apenas um deles teve um problema com a execução do comando que resultava na construção do círculo c sobre o plano α ($c : \text{Circulo}((0,0),r,\text{EixoZ})$). Esse problema foi solucionado rapidamente assim que o participante apagou o comando do campo *Entrada* e o reinsериu novamente.

Na Figura 6.6 a seguir, mostra-se algumas capturas de tela feitas por três participantes diferentes, após a conclusão dessa atividade.

Figura 6.6 – Finalização da construção da definição de cilindro por três participantes diferentes.

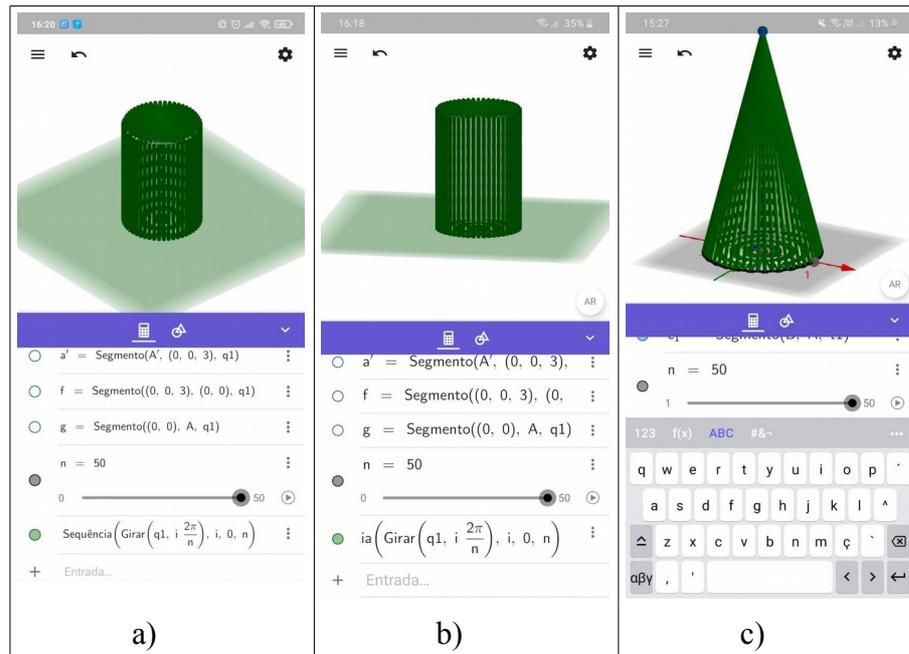


Fonte: Dados da pesquisa.

Na imagem a), da Figura 6.6, o participante mostra como ficou a construção do cilindro logo após a conclusão do último passo. Já na imagem b) dessa mesma figura, outro participante modifica a posição do ponto Q , e movimenta o ponto E em torno do círculo c , fazendo com que o rastro do segmento componha apenas uma superfície cilíndrica. A última captura, mostrada na Figura 6.6c, mostra o resultado obtido por um terceiro participante, após modificar a posição do ponto Q , obtendo com isso um cilindro oblíquo.

Nas construções dos sólidos de revolução, nenhum dos participantes encontrou dificuldades, dado que foram construções bastante simples e necessitavam de poucos comandos para a sua conclusão. A finalização dessas atividades por alguns participantes pode ser vista na Figura 6.7 a seguir.

Figura 6.7 – Construção de cilindros e cones de revolução por diferentes participantes.



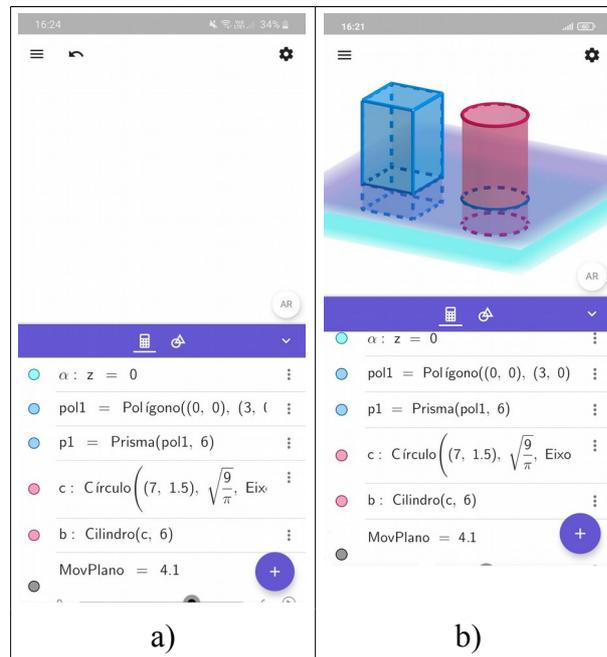
Fonte: Dados da pesquisa.

Nas imagens a) e b) da Figura 6.7, temos a finalização da construção do cilindro de revolução por dois participantes diferentes. Já na imagem c), um terceiro participante enviou uma captura de tela que mostra a finalização da construção do cone de revolução.

Ao finalizar a construção dos sólidos de revolução, percebeu-se que o tempo para a finalização do encontro não seria suficiente para concluir as construções referentes ao cálculo de volume. Sendo assim, buscou-se adotar a estratégia utilizada no primeiro encontro, enviando as construções prontas para os participantes, de modo a priorizar a sua exploração em RA no encontro presencial. Porém, dessa vez não foi possível devido à ocorrência de um erro na abertura do arquivo compartilhado pelo pesquisador.

Ao tentar abrir o arquivo, um dos participantes relatou que visualizava apenas uma tela em branco. Diante dessa situação, o pesquisador solicitou o envio de uma captura de tela, como forma de tentar identificar o problema ocorrido. Essa imagem pode ser vista na Figura 6.8a a seguir.

Figura 6.8 – Problema encontrado por um participante ao abrir um arquivo compartilhado pelo pesquisador.



Fonte: Dados da pesquisa.

Como pode ser visto na Figura 6.8a, que foi enviada pelo participante, a sequência de comandos exibidos na janela de álgebra estava exatamente igual à construção compartilhada pelo pesquisador (Figura 6.8b), inclusive com os ícones, ao lado dos comandos, indicando que a exibição dos objetos estava ativa, porém a janela gráfica do participante permanecia em branco. Uma última tentativa de solucionar o problema foi a restauração da visualização padrão, tocando sobre o ícone de configurações (⚙️), e na aba *Janela de Visualização*, selecionando o ícone de *Visualização Padrão* 🏠, porém, mesmo assim o participante não conseguiu visualizar a construção em seu *smartphone*. Diante desse problema, desenvolveu-se a construção referente ao cálculo do volume do cilindro, enquanto que a referente ao volume do cone foi deixada para o próximo encontro.

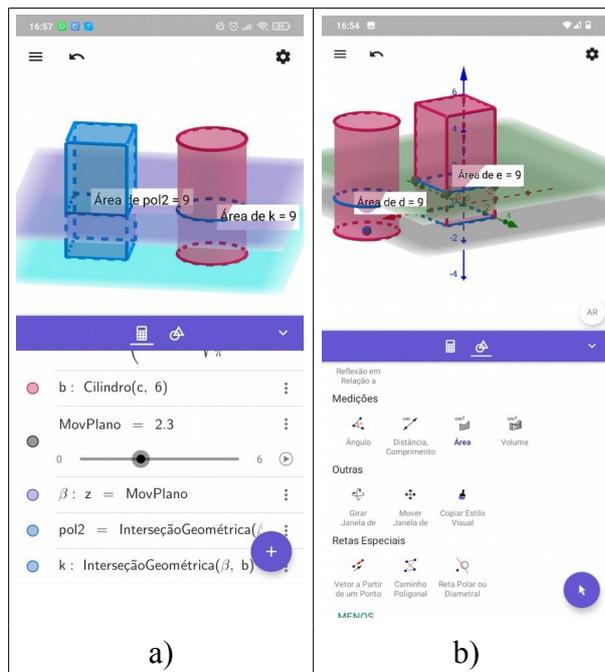
Na construção referente ao cálculo do volume do cilindro, busca-se estudar uma aplicação do Princípio de Cavalieri para provar que se um prisma e um cilindro possuem a mesma área da base e a mesma mediada da altura, então eles também possuem o mesmo volume. Essa construção foi executada após a exibição do *slide* 5 (Apêndice B, item 3), seguindo os passos descritos na seção 5.3.3.

Na elaboração dessa construção, um dos participantes não conseguiu executar o comando $c : \text{Circulo}((7, 1.5), \text{sqrt}(9/\pi), \text{EixoZ})$, utilizado para obter um círculo com a mesma área da base do prisma já construído. Diante disso, buscou-se obter o mesmo círculo por meio

da ferramenta *Círculo(Centro – Raio + Direção)* (), mas desta vez, o participante não conseguiu inserir o valor $\sqrt{9/\pi}$ no campo destinado ao valor do raio, relatando problemas para digitar as letras *sqrt*. Sendo assim, foi orientado que utilizasse um valor numérico aproximado para o raio, que é $1,69$, sendo essa a única forma que esse participante obteve sucesso na construção do círculo desejado.

Diante dessa situação, foi incentivado que os outros participantes também utilizassem ferramentas geométricas em vez de comandos, como pode ser visto na Figura 6.9, a seguir, que mostra capturas de tela enviadas por dois participantes diferentes, os quais intercalaram o uso de ferramentas geométricas e comandos durante a construção, o que implicou na atribuição de rótulos diferenciados para alguns objetos.

Figura 6.9 – Visualização das secções planas do prisma e do cilindro.



Fonte: Dados da pesquisa.

Na Figura 6.9a, um dos participantes mostra o resultado obtido após a conclusão do penúltimo passo, que é o momento em que ele movimentou o plano β , e constatou que todas as secções feitas por esse plano em cada um dos sólidos eram iguais. Nesse caso, ele utilizou a ferramenta *Interseção de Duas Superfícies* (), para obter as interseções. Já a Figura 6.9b mostra uma captura de tela enviada por outro participante, em que ele fez as mesmas interseções utilizando o comando *InterseçãoGeométrica*, sem atribuir rótulo, fazendo com que o aplicativo rotulasse-as automaticamente.

Após constatar que todas as secções feitas pelo plano β no prisma e no cilindro eram iguais, os participantes utilizaram ferramenta *Volume*(), para obter o volume dos sólidos, e constatar a sua igualdade. Ao concluir a exploração, utilizou-se uma apresentação de *slides* para mostrar algebricamente como ocorre a aplicação do Princípio de Cavalieri para a obtenção do volume de um cilindro.

Após a conclusão dessa atividade, encerrou-se o encontro síncrono, adiando o desenvolvimento e exploração da construção referente ao volume do cone para o quarto encontro. Com isso, a aplicação do questionário final referente às atividades do terceiro encontro também precisou ser transferida para o quarto encontro síncrono.

Ao analisar as respostas fornecidas pelos participantes aos questionários aplicados antes e depois do desenvolvimento dessas atividades (Apêndice A, itens 3 e 6), se observou que o uso da RA favoreceu a percepção de uma série de características dos cilindros e dos cones que antes eles não haviam percebido, ou ainda tinham uma visão limitada sobre elas.

Ao abordar características como altura, geratriz e eixo de um cilindro, observou-se que, antes de realizar as atividades, os participantes apresentaram uma tendência em descrever essas características se baseando apenas em cilindros retos. Isso se comprovou quando se constatou por meio do questionário inicial, que eles concordaram com algumas afirmações que indicavam, por exemplo, que a altura de qualquer cilindro pode ser obtida calculando a distância entre suas bases, ou até mesmo que o eixo de qualquer cilindro é uma reta ortogonal aos planos que contém as bases. Com isso, se percebeu que eles ainda tinham uma compreensão restrita de algumas características desses sólidos.

Situação parecida se observou ao abordar características relacionadas aos cones. No questionário inicial, antes de realizar as atividades, vários participantes concordaram com afirmações como “Em qualquer cone, a projeção ortogonal do vértice sobre o plano que contém a sua base, é sempre um ponto interno ao círculo que a representa” e “Em todo cone, a altura é igual a distância entre o vértice e a base”. Com isso, percebeu-se que a referência para as respostas era sempre um cone reto, ou até mesmo oblíquo, mas com um grau limitado de deformação.

Após a aplicação das atividades, percebeu-se que os participantes adquiriram uma imagem mental mais dinâmica desses sólidos. Esse fato se comprovou com a análise das respostas ao segundo questionário, pois se constatou que eles não haviam cometido os erros destacados anteriormente, além de identificar outras características pertencentes a esses sólidos, como no caso da altura do cone, que somente no segundo questionário eles

identificaram como sendo a distância entre o vértice e o plano da base.

Em relação ao cálculo do volume desses sólidos, observou-se uma situação bastante parecida com a encontrada nos encontros anteriores. Tanto em relação ao cálculo do volume de cilindros, quanto de cones, os participantes não apresentavam dificuldade para lembrar as fórmulas, nem mesmo para fazer cálculos básicos a respeito desses sólidos. Entretanto, alguns tinham a fórmula em mente, mas não entendiam a sua origem, e desse modo manifestaram satisfação em compreender a razão pela qual se utiliza essas fórmulas, e o papel do Princípio de Cavalieri nesse processo.

6.4 QUARTO ENCONTRO

Este encontro ocorreu no dia 13 de maio de 2021, e foi composto por três atividades diferentes no aplicativo, sendo que a primeira ainda fazia parte do encontro anterior. Assim, iniciou-se o encontro abordando o cálculo do volume do cone, para só em seguida fazer a construção e exploração da anticlépsidra de revolução, e finalizar o encontro estudando o volume da esfera.

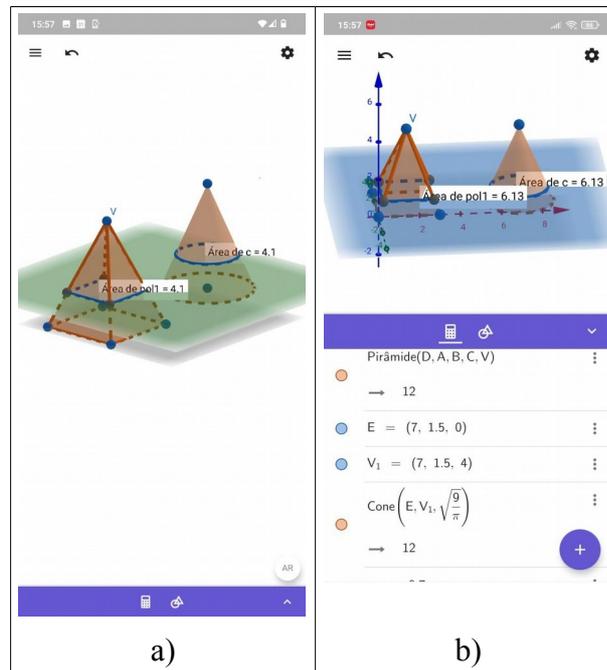
Como este encontro foi iniciado com uma atividade ainda pertencente ao encontro anterior, optou-se por não aplicar o questionário inicial referente ao estudo do volume da esfera. Desse modo, ao final deste encontro aplicou-se apenas um questionário referente aos conteúdos abordados no terceiro encontro, e o questionário referente ao *feedback* das atividades deveria abranger os dois últimos encontros.

Diante das dificuldades encontradas por alguns participantes para executar alguns comandos, e também da diminuição do tempo disponível para a execução das atividades referentes a este encontro, optou-se por utilizar as *Ferramentas básicas* do aplicativo com mais frequência. Com isso, se observou que eles tiveram menos problemas durante a elaboração das construções, o que reduziu o tempo para sua conclusão.

O desenvolvimento da primeira construção, realizada de acordo com os passos descritos na seção 5.3.6, e que abordava o cálculo do volume do cone, ocorreu de forma bastante rápida, uma vez que os participantes já haviam se habituado com várias funcionalidades do aplicativo. Isso permitiu que todos chegassem ao final da construção, e pudessem explorá-la com tranquilidade. Esta construção ocorreu logo após a exibição do *slide* 11 (Apêndice B, item 3).

Na Figura 6.10, a seguir, temos duas capturas de tela referentes a essa construção, que foram enviadas por dois participantes diferentes.

Figura 6.10 – Visualização das secções planas do cone e da pirâmide.



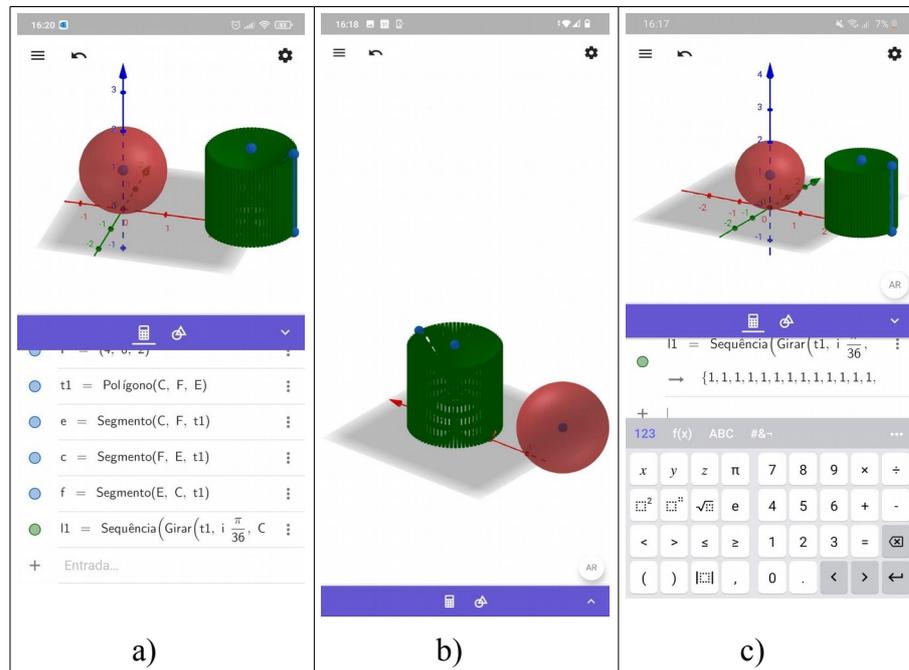
Fonte: Dados da pesquisa.

Nessas imagens, pode-se perceber que eles concluíram corretamente a construção, e conseguiram constatar visualmente que as secções feitas pelo plano β em cada um dos sólidos eram iguais, qualquer que fosse a posição desse plano. Após a exploração dessa construção, voltou-se para o *slide* 11 (Apêndice B, item 3), para mostrar algebricamente como se dá a aplicação do Princípio de Cavalieri para obter o volume do cone.

A próxima atividade, programada como primeira do quarto encontro, consistiu na construção de uma anticlépsidra de revolução, e os passos para sua elaboração estão descritos na seção 5.4.1. Optou-se por fazer essa construção devido a que nenhum dos participantes afirmou lembrar da forma desse sólido. Sendo assim, optou-se por fazê-la por meio da revolução de um triângulo em torno de uma reta que passa por um de seus vértices e é paralela ao lado oposto a esse vértice. A conclusão dessa construção por alguns participantes pode ser vista na Figura 6.11 a seguir.

Na Figura 6.11, pode-se observar que, além da anticlépsidra de revolução, há também uma esfera já construída na tela de cada um dos participantes. Isso ocorreu devido a construção da anticlépsidra fazer parte da construção relacionada ao volume da esfera, a qual foi desenvolvida na sequência.

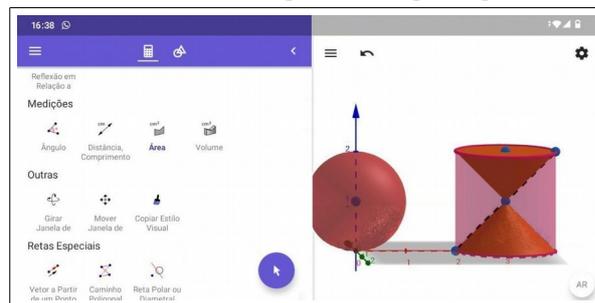
Figura 6.11 – Construção da anticlépsida de revolução por três participantes diferentes.



Fonte: Dados da pesquisa.

Para o estudo do volume da esfera, foram utilizados os passos descritos na seção 5.4.2, e optou-se por construir uma nova anticlépsida utilizando-se de um cilindro e dois cones, como pode ser visto na Figura 6.12 a seguir. Essa imagem mostra como um dos participantes reconstruiu esse sólido.

Figura 6.12 – Construção da anticlépsida a partir de um cilindro e dois cones por um dos participantes.



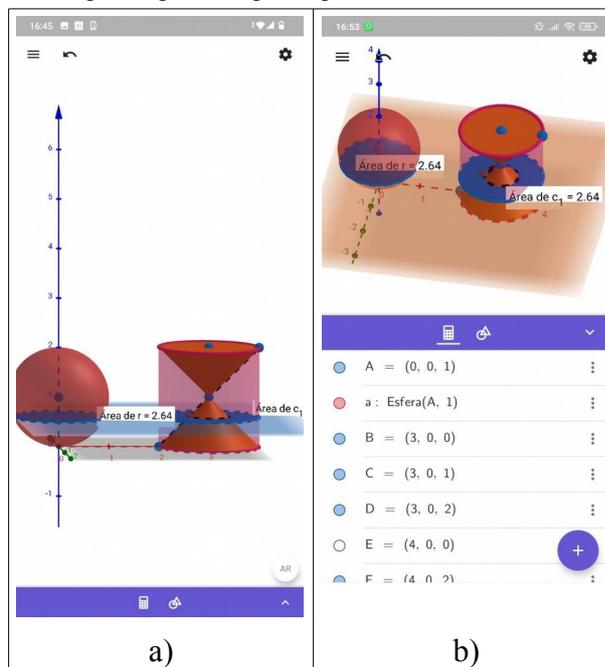
Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa construção, foi enfatizado aos participantes a importância de se construir o cilindro e os dois cones com o mesmo raio da esfera, sendo que o cilindro deveria ter a altura igual ao dobro do raio da esfera, e os vértices dos cones deveriam estar localizados exatamente no centro do cilindro.

A conclusão dessa construção por alguns participantes, após a construção do plano β

e de suas interseções com os sólidos, pode ser vista na Figura 6.13 a seguir.

Figura 6.13 – Visualização das secções na esfera e na anticlépsidra por dois participantes diferentes.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nas imagens a) e b) da Figura 6.13, temos a finalização da construção por dois participantes diferentes. Entre eles, apenas o participante que enviou a captura de tela mostrada na imagem a) conseguiu fazer a exploração em RA, pois o *smartphone* do outro participante não contava com essa funcionalidade.

Durante a exploração, eles conseguiram constatar visualmente que todas as secções feitas pelo plano β em cada um dos sólidos eram iguais. Ao final da exploração, os participantes conseguiram constatar a igualdade entre os volumes dos sólidos por meio da utilização da ferramenta $Volume(\text{cm}^3)$.

A abordagem algébrica do volume da esfera foi efetuada utilizando-se de uma apresentação de *slides* (Apêndice B, item 4), em que se provou a igualdade da área das secções feitas pelo plano β em cada um dos sólidos.

6.5 ANÁLISE DO *FEEDBACK* DOS PARTICIPANTES SOBRE SUAS HABILIDADES EM GEOMETRIA ESPACIAL E SOBRE AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NA OFICINA

Nesta seção, analisaremos alguns pontos relacionados ao questionário inicial

(Apêndice A, item 1), e também aos questionários aplicados ao final de cada um dos encontros (Apêndice A, itens 4, 5 e 6). Buscamos investigar, por meio das respostas obtidas, as impressões dos participantes sobre o seu próprio desempenho em geometria espacial, sobre a forma como as atividades foram desenvolvidas, seu desempenho no aplicativo durante a execução das construções, e também como eles julgaram as atividades em relação a sua capacidade de melhorar o aprendizado dos conteúdos abordados.

A análise do *feedback* dos participantes sobre cada encontro poderia ser feita de forma individual, nas seções anteriores, porém, se observou que as repostas obtidas em algumas questões se mostraram bastante convergentes. Sendo assim, optou-se por apresentar apenas uma análise generalizada dessas respostas, ressaltando alguns pontos que se julgou importantes no que diz respeito às conclusões sobre as atividades desenvolvidas.

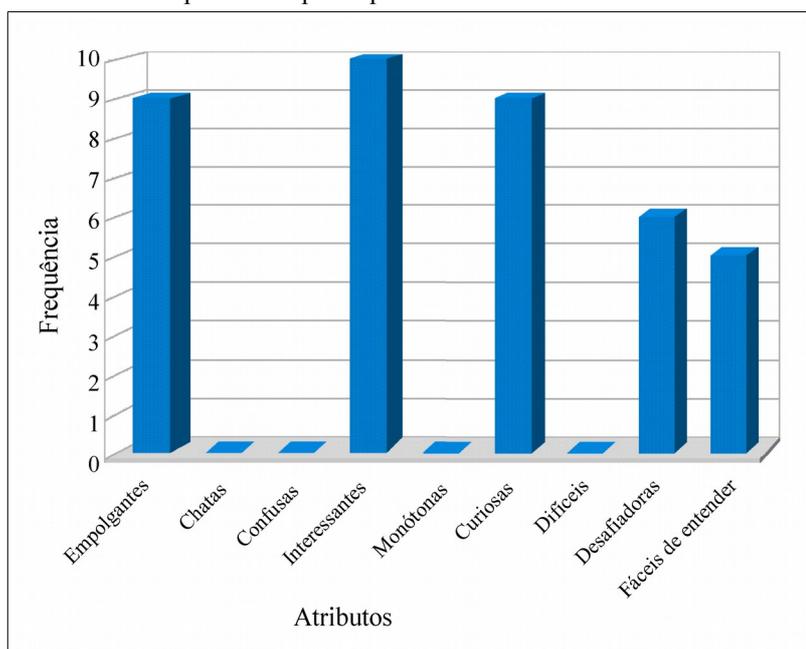
O primeiro ponto que destacaremos aqui é com relação à visão que cada relatou em relação às próprias habilidades em geometria. Constatou-se, no questionário aplicado no início do primeiro encontro da oficina (Apêndice A, item 1), que aproximadamente 57% deles afirmou ter facilidade para aprender geometria, e entre os participantes que não selecionaram essa opção, apenas um terço indicou ter facilidade para desenhar figuras geométricas tridimensionais utilizando régua lápis e papel, ou mesmo compreendê-las quando representadas de forma bidimensional, e dois terços indicaram ter facilidade para fazer cálculos envolvendo sólidos geométricos. Este fato se confirmou no segundo e no terceiro encontros, como foi relatado nas seções 6.2 a 6.3, em que se percebeu a facilidade com que os participantes desenvolviam as atividades relacionadas com o processo algébrico do cálculo do volume de paralelepípedos e prismas.

Em relação a parte visual desses conteúdos, como foi relatado nas seções 6.2 e 6.3, percebeu-se que os participantes tinham uma imagem mental dos sólidos um pouco limitada, apresentando um entendimento bastante superficial de suas características. Imagem essa que, de acordo com as respostas obtidas com os questionários aplicados ao final dos encontros, se constatou ter ganhado mais clareza e dinamicidade. Estes resultados corroboram com as pesquisas de Andrade (2017), Silva (2017), Silva (2019) e Oliveira (2019), os quais constataram que o uso da RA em sala de aula proporciona uma forma de visualização mais efetiva dos sólidos geométricos tridimensionais, e com isso, facilita a sua compreensão pelos alunos.

Por meio das respostas obtidas, observou-se que os participantes foram unânimes ao afirmar que as atividades desenvolvidas no aplicativo contribuíram positivamente para o aprendizado dos conteúdos abordados, corroborando com Ancochea e Cárdenas (2020), que

constataram em sua pesquisa que os alunos demonstraram ter aprimorado seus conhecimentos de geometria espacial. Além disso, ao disponibilizar nos questionários finais uma lista com atributos positivos e negativos, que podem ser vistos no Gráfico 6.1 a seguir, e solicitar que eles selecionassem aqueles que melhor expressavam sua opinião em relação as atividades, se constatou que ninguém utilizou os atributos negativos. A frequência com que cada um deles foi escolhido pode ser vista no Gráfico 6.1, a seguir.

Gráfico 6.1 – Opinião dos participantes sobre as atividades desenvolvidas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Outro ponto que se pode observar no Gráfico 6.1, é a preferência dos participantes em utilizar o atributo “Interessantes”. Isso pode ser um indicativo de que as atividades desenvolvidas tiveram potencial para despertar o interesse deles, corroborando com Widada *et al.* (2021), os quais concluíram que as aulas tornaram-se mais interessantes e divertidas ao utilizar GeoGebra AR. Além disso, podemos destacar a opinião de um dos participantes da oficina que, com suas próprias palavras, afirmou “Gostei muito da forma que o conteúdo foi abordado”, indicando que as atividades realmente despertaram seu interesse.

Constatou-se também, analisando as respostas dos questionários, que a maioria dos participantes afirmou ter enfrentado dificuldades em algum momento. Esse resultado já era esperado, tendo em vista o que foi relatado nas seções 6.1 a 6.3, onde se descreveu e se ilustrou alguns dos problemas enfrentados por eles. Mas, apesar desses relatos, observou-se que nenhum dos participantes afirmou ter enfrentado muitas dificuldades, ou mesmo não ter

conseguido concluir alguma construção.

Diante desses resultados, pode-se observar que o aplicativo se mostrou como uma ferramenta de fácil utilização, e apresentou resultados positivos com relação ao aprendizado. As considerações finais dessa pesquisa são apresentadas no próximo capítulo, em que faremos uma síntese dos resultados da revisão de literatura, associando-os com determinados pontos dos resultados desta pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento desta pesquisa, buscou-se investigar as contribuições que o aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA, pode trazer para o estudo dos sólidos geométricos. Observou-se que o uso dessa tecnologia no ensino tem grande potencial para tornar as atividades educativas mais interessantes e significativas para os alunos, bem como promover a autonomia deles durante o aprendizado.

A revisão bibliográfica realizada no início desta pesquisa permitiu elucidar o quanto o aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA, ainda era pouco explorado nas pesquisas de Mestrado e Doutorado. Constatou-se que, no período compreendido entre o ano de 2015 e o mês de outubro de 2020, apenas o trabalho de Ferreira (2018), abordou esse tema.

Em sua dissertação, Ferreira (2018) analisa a diferença no grau de dificuldade da resolução de exercícios de geometria espacial, com e sem o uso da RA. Para isso, o autor seleciona uma gama de exercícios e utiliza o aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA, para criar e visualizar modelos geométricos tridimensionais que auxiliam a sua resolução. Embora o autor não tenha feito a aplicação de seu método a nenhum grupo de alunos, a experiência com a elaboração e exploração desses modelos lhe permitiu concluir que o uso da RA facilita a compreensão de construções geométricas tridimensionais, contribuindo significativamente para a resolução de problemas de geometria espacial.

Já na busca por artigos científicos, que abrangeu o período compreendido entre o ano de 2015 e o mês de agosto de 2021, encontrou-se nove trabalhos, sendo que todos foram realizados fora do Brasil. As pesquisas apontam que o uso do aplicativo trouxe bons resultados para o aprendizado, entretanto Ancochea e Cárdenas (2020) e Budinski e Lavicza (2019), indicam que tiveram problemas quanto a compatibilidade entre o aplicativo e os dispositivos móveis utilizados pelos alunos durante as atividades, sendo necessário organizar os alunos em pequenos grupos, como relatado ao final da seção 2.2 desta dissertação.

Problema semelhante a esse se enfrentou durante a aplicação da oficina, no decorrer desta pesquisa. Se constatou que entre os sete participantes, apenas quatro tinham a possibilidade de realizar atividades utilizando o aplicativo com RA em seu próprio dispositivo, sendo que os outros três utilizaram apenas a versão 3D do mesmo, devido aos seus aparelhos não suportarem a RA.

A incompatibilidade dos aparelhos com a RA está diretamente ligada com o aparato de *hardware* de cada dispositivo, como foi citado na sessão 3.3. Isso acaba encarecendo estes dispositivos, e deste modo dificultando o acesso a eles por alunos economicamente menos

favorecidos. Esse fato pode ser um indicativo do baixo número de pesquisas envolvendo a utilização da *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA, na educação básica do Brasil.

Outro problema encontrado no decorrer da oficina foi a dificuldade de compartilhamento de construções geométricas prontas, em que um participante não conseguia abrir os arquivos, como foi relatado na seção 6.3. Apesar de não ter sido feita a checagem da versão do aplicativo instalado no aparelho receptor, não foi possível identificar a causa para este problema.

Para além dessas questões, pode-se observar que, após a realização da oficina, a maioria dos participantes manifestou uma compreensão mais efetiva dos conteúdos abordados. A começar pelo estudo do volume de um sólido geométrico, que se observou um enriquecimento do significado desse conceito para eles, o qual passou a envolver elementos visuais e algébricos de forma mais equilibrada.

Após a realização das experiências em RA, observou-se também que os participantes demonstraram ter compreendido a ideia de volume de um sólido como sendo o espaço ocupado por ele. Constatou-se, nas respostas dos questionários, que eles passaram a perceber que o valor obtido no processo algébrico representa o número de unidades de volume que preenchem o espaço ocupado por este sólido, não sendo apenas o resultado de uma operação matemática entre suas medidas. Observou-se também, que eles passaram a compreender melhor o Princípio de Cavalieri, e a perceber sua aplicabilidade no cálculo do volume de prismas.

Outro fato importante a ser destacado é com relação a representação visual dos sólidos geométricos abordados. Percebeu-se que alguns participantes tinham uma imagem mental dos sólidos um pouco limitada. Após as experiências envolvendo a RA, se constatou que eles passaram a perceber esses sólidos com mais clareza e dinamicidade, demonstrando, por exemplo, compreender que nem todo prisma ou pirâmide possui sua base em formato de polígono regular, que as faces laterais de um prisma nem sempre são em formato retangular, e até mesmo em relação a medida da altura de um prisma, que nem sempre coincide com a distância entre as duas bases, sendo considerada por Pompeo e Dolce (2005), como sendo a distância entre os planos das bases.

Quanto ao aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, percebeu-se que foi bem aceito pelos participantes, que qualificaram positivamente as atividades desenvolvidas, conforme relatado na seção 6.5, sendo que nenhum deles utilizou atributos negativos para qualificá-las, nem relatou ter encontrado muitos problemas para concluí-las, embora todos tenham relatado pouco contato com o aplicativo. Houve inclusive, alguns participantes que

optaram por expressar a aprovação do uso da RA com suas próprias palavras, indicando a boa receptividade dessa tecnologia.

Com isso, podemos concluir que o uso do aplicativo *Calculadora gráfica GeoGebra 3D*, com RA, no ensino de geometria espacial, pode trazer diversas contribuições, a começar pela possibilidade de auxiliar os alunos na visualização de sólidos geométricos tridimensionais, facilitando-lhes a percepção de inúmeras características que poderiam passar despercebidas em uma representação bidimensional.

Observou-se também, que o uso do aplicativo permitiu que os alunos agissem com mais autonomia na abordagem dos conteúdos. Durante a aplicação da proposta didática, se observou que eles exploraram as construções geométricas, interagindo com elas em RA, e conseguiram obter, por meio de sua própria ação, inúmeras representações visuais das construções que lhes permitiram observar de diferentes formas as propriedades aplicadas. Com isso, se percebeu ainda que o aplicativo contribuiu para que os alunos melhorassem suas habilidades de compreensão das construções geométricas tridimensionais.

Por fim, podemos destacar que o uso do aplicativo proporcionou momentos de aprendizagem bastante atrativos para eles. Como pôde ser observado no gráfico 6.1, embora o atributo “fáceis de entender” tenha uma frequência de escolha baixa, o atributo “Interessantes” foi o preferido dos participantes para qualificar as atividades, e ainda, muitos deles não deixaram de indicar que elas foram “Empolgantes” e “Curiosas”. Com isso, podemos observar que, de certa forma, o uso do aplicativo também contribuiu para que as atividades se tornassem mais envolventes.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

Diante desse cenário, cabe-nos considerar a possibilidade de novas aplicações das atividades da proposta didática aqui desenvolvida, porém, em formato presencial. Desse modo, espera-se poder acompanhar com mais proximidade o desempenho dos participantes, ter mais facilidade para orientá-los durante a interação com as construções em RA, e poder identificar com mais precisão a forma como eles trabalham no aplicativo.

Como uma primeira experiência, pretende-se fazer algumas adaptações na proposta didática aqui descrita, e aplicá-la para alunos do segundo ano do ensino médio. Desse modo, buscar-se-á conhecer mais profundamente como se dá o uso dessa tecnologia no contexto da educação básica, observando a forma como esses alunos agem mediante o uso dessa ferramenta, e se os benefícios observados no ensino superior também se concretizam na

educação básica.

Cabe considerar também, a possibilidade elaborar e aplicar uma nova proposta didática envolvendo conteúdos relacionados a noções primitivas de geometria espacial e de posição, que também são abordados no segundo ano do ensino médio. Dado que são conceitos abstratos, espera-se que a interatividade proporcionada pelo aplicativo e possibilidade de visualização em RA proporcionem uma compreensão mais efetiva desses conteúdos.

REFERÊNCIAS

- ANCOCHEA, B.; CÁRDENAS, M. I. Exploring Real World Environments using Potential of GeoGebra AR. *In: ROSETA ONLINE CONFERENCE*, 2020, Borsdorf. **Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age [...]** Borsdorf: Münster, 11 jun. 2020, v. 6, p. 41-46. DOI: 10.37626/GA9783959871440.0.05. Disponível em: <https://www.wtm-verlag.de/DOI-Deposit/978-3-95987-144-0/978-3-95987-144-0-05.pdf>. Acesso em: 22 set. 2021.
- ANDRADE, V. G. **O desenvolvimento do aplicativo RA.Geo**: contribuições da realidade aumentada para o ensino de geometria espacial. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Goiás, Jataí, 2017.
- ARRUDA, E. P. Educação remota emergencial: elementos para políticas públicas na educação brasileira em tempos de covid-19. **Em Rede**: Revista de Educação a Distância, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 257-275, mai. 2020. Disponível em: <https://www.auniredede.org.br/revista/index.php/emrede/article/view/621>. Acesso em: 20 set. 2021.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.
- BUDINSKI, N.; LAVICZA, Z. Teaching Advanced Mathematical Concepts with Origami and GeoGebra Augmented Reality. *In: BRIDGES 2019 CONFERENCE*, 2019, Linz. **Bridges Linz 2019 [...]** Linz: Tessellations Publishing, jul. 2019, p. 387-390. Disponível em: <https://archive.bridgesmathart.org/2019/bridges2019-387.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2021.
- BULLMAN, C. L. **Aprendizagem de conceitos de geometria espacial por estudantes do ensino médio**: entendimentos produzidos a partir da teoria dos registros de representação semiótica. 2018. Dissertação (Mestrado em educação nas ciência) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2018.
- CROMPTON, H.; A historical overview of mobile learning: Toward learner-centered education. *In: BERGE, Z. L.; MUILENBURG, L. Y. (Eds.). Handbook of mobile learning*. Nova Yorque: Routledge, 2013. p. 3-14. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Helen-Crompton-2/publication/263852116_A_historical_overview_of_mobile_learning_Toward_learner-centered_education/links/5d1cd819299bf1547c95201d/A-historical-overview-of-mobile-learning-Toward-learner-centered-education.pdf. Acesso em: 18 jun. 2021.
- CROMPTON, H. TRAXLER, J. Learning with mobile devices. *In: KHOSROW-POUR, M. (Ed.). Advanced Methodologies and Technologies in Modern Education Delivery*. Pensilvânia: IGI Global, 2019, p. 793-808. DOI: 10.4018/978-1-5225-7365-4.ch062.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da matemática elementar**: geometria espacial, posição e métrica. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.

DUNG, T. M. Engaging pre-service Mathematics teacher in using Augmented Reality technology: The case of "3D Calculator" APP. **Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science**. Ho Chi Minh City, v. 17, n. 3, p. 486-499, mar. 2020. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Tang-Dung/publication/340296208_Engaging_pre-service_mathematics_teacher_in_using_augmented_reality_technology_the_case_of_3D_calculator_app/links/5e82c6a8a6fdcc139c175044/Engaging-pre-service-mathematics-teacher-in-using-augmented-reality-technology-the-case-of-3D-calculator-app.pdf. Acesso em: 12 jul. 2021.

DUTRA, J. M.; MORAES, A. F. M.; GUIMARÃES, M. G. V. Ensino remoto e a pandemia da Covid-19: experiências e aprendizados. **Em Rede: Revista de Educação a Distância**, Porto Alegre, v. 8, n. 1, p. 1-15, jul. 2021. Disponível em: <https://www.aunirede.org.br/revista/index.php/emrede/article/view/729>. Acesso em: 18 ago. 2021.

FERREIRA, H. S. **O uso de *software* e seu impacto no tipo de resolução de exercícios de geometria**. 2018. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em rede nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2018.

GARCIA, T. C. M.; MORAIS, I. R. D.; ZAROS, L. G.; RÊGO, M. C. F. D. **Ensino remoto emergencial**: proposta de design para organização de aulas. Recurso Eletrônico. Natal: SEDIS/UFRN, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/29767/1/ENSINO%20REMOTO%20EMERGENCIAL_proposta_de_design_organizacao_aulas.pdf. Acesso em: 22 jun. 2021.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOODWIN, F. C. **Estudo de alguns poliedros com o auxílio do *Software Geogebra no tablet***. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017.

HODGES, C.; MOORE, S.; LOCKEE, B.; TRUST, T.; BOND, A. The Difference Between Emergency Remote Teaching and Online Learning. **EDUCAUSE review**. Louisville, 27 mar. 2020. Disponível em: <https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning>. Acesso em: 24 ago. 2021.

HOHENWARTER, M. GeoGebra 4.4 – from Desktops to Tablets. **Indagatio Didactica**, Aveiro, vol. 5, n.1, p. 8-18, jul. 2013. Disponível em: <https://proa.ua.pt/index.php/id/article/view/4296/3230>. Acesso em: 14 jul. 2021.

HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Mathematics teacher development with ICT: towards an international GeoGebra institute. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**, Northampton, v. 27, n. 3, p. 49-54, nov. 2007. Disponível em: <https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-27-3-09.pdf>. Acesso em: 19 jul. 2021.

HOHENWARTER, M.; JARVIS, D.; LAVICZA, Z. Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra software and the establishment of the international GeoGebra institute. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, Plymouth, v. 16, n. 2, p. 83-87, abr. 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Daniel_Jarvis2/publication/307936818_Linking_geometry_algebra_and_mathematics_teachers_GeoGebra_software_and_the_establishment_of_the_International_GeoGebra_Institute/links/57d2a92108ae601b39a4012c/Linking-geometry-algebra-and-mathematics-teachers-GeoGebra-software-and-the-establishment-of-the-International-GeoGebra-Institute.pdf. Acesso em: 17 jun. 2021.

HOUNSELL, M. S.; TORI, R.; KIRNER, C. Realidade Aumentada. *In*: TORI, R.; HOUNSELL, M. S. (Org.). **Introdução a Realidade Virtual e Aumentada**. Porto Alegre: SBC, 2018.

IBGE. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua**. (Acesso à Internet e à televisão e posse de telefone móvel celular para uso pessoal 2019). Rio de Janeiro: IBGE, 2021. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101794_informativo.pdf. Acesso em: 19 jul. 2021.

KOUNLAXAY, K.; SHIM, Y.; KANG, S.; KWAK, H.; KIM, S. K. Learning Media on Mathematical Education based on Augmented Reality. **KSII Transactions on Internet and Information Systems**, Nanchang, v. 15, n. 3, p. 1015-1029, mar. 2021. DOI: 10.3837/tiis.2021.03.011. Disponível em: <https://www.koreascience.or.kr/article/JAKO202116739518290.page>. Acesso em: 18 jun. 2021.

LAINUFAR, MAILIZAR; JOHAR, R. A need analysis for the development of augmented reality based-geometry teaching instruments in junior high schools. *In*: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS, SCIENCE & TECHNOLOGY EDUCATION (AICMSTE), 1., 2019, Banda Aceh. **Journal of Physics: Conference Series** [...] Banda Aceh: IOP Science, mar. 2021a, v. 1460, 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1460/1/012034. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1460/1/012034/pdf>. Acesso em: 11 jul. 2021.

LAINUFAR; MAILIZAR, M.; JOHAR, R. Exploring the potential use of GeoGebra augmented reality in a project-based learning environment: The case of geometry. *In*: THE SOUTH EAST ASIA INTERNATIONAL SCIENCE-TECHNOLOGY, ENGINEERING, AND MATHEMATICS (SEA-STEM) INTERNATIONAL CONFERENCE, 1., 2020, Banda Aceh. **Journal of Physics: Conference Series** [...] Banda Aceh: IOP Science, mai. 2021b, v. 1882, 012045. DOI: 10.1088/1742-6596/1882/1/012045.

LAVICZA, Z., HAAS, B., KREIS, Y. Discovering Everyday Mathematical Situations Outside the Classroom with MathCityMap and GeoGebra 3D. *In*: ROSETA ONLINE CONFERENCE, 2020, Borsdorf. **Research on Outdoor STEM Education in the digital Age** [...] Borsdorf : Münster, 11 jun. 2020, v. 6, p. 41-46. DOI: 10.37626/GA9783959871440.0.05. Disponível em: <https://orbi.lu.uni.lu/bitstream/10993/43471/1/Lavicza%20et%20al.%20-%202020%20-%20Discovering%20Everyday%20Mathematical%20Situations%20Outsi.pdf>. Acesso em: 23 ago. 2021.

MAILIZAR.; JOHAR, R. Examining Students' Intention to Use Augmented Reality in a Project-Based Geometry Learning Environment. **International Journal of Instruction**, Eskisehir, v. 14, n. 2. p. 773-790, abr. 2021. DOI: 10.29333/iji.2021.14243a. Disponível em: https://www.e-iji.net/dosyalar/iji_2021_2_43.pdf. Acesso em: 17 jul. 2021.

MEIRELLES, L. F. T.; TAROUÇO, L. M. R. Framework para Aprendizagem com Mobilidade. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 16., 2005, Juiz de Fora. **Anais [...]** Juiz de Fora: UFJF, 2005, p. 623-633. Disponível em: <https://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/446>. Acesso em: 24 jun. 2021.

MÜLBERT, A. L.; PEREIRA, A. T. C. Um panorama da pesquisa sobre aprendizagem móvel (m-learning). *In*: SIMPÓSIO NACIONAL DA ABCiber, 5., 2011, Florianópolis. **Anais [...]** Florianópolis: ABCiber, 2011, nov. 2011, 1 CD-ROM. Disponível em: <https://abciber.org.br/simposio2011/anais/Trabalhos/artigos/Eixo%201/7.E1/80.pdf>. Acesso em 22 set. 2021.

NEVES, V. N. S.; ASSIS, V. D.; SABINO, R. N. Ensino remoto emergencial durante a pandemia de COVID-19 no Brasil: estado da arte. **Revista do Pemo**, Fortaleza, v. 3, n. 2, e325271, 2021. DOI: 10.47149/pemo.v3i1.5271. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/revpemo/article/view/5271>. Acesso em: 18 jul. 2021.

OLIVEIRA, P. N. **Criação de um aplicativo de realidade aumentada para o ensino da geometria**. 2019. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em rede nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2019.

PINTO, K. E. V.; MARTINS, R. X. A implantação do Ensino Remoto Emergencial em escolas públicas e particulares da Educação Básica: estudo de caso em um município mineiro. **Em Rede: Revista de Educação a Distância**, Porto Alegre, v. 8, n. 1, p. 1-20, jul. 2021. Disponível em: <https://www.aunirede.org.br/revista/index.php/emrede/article/view/738>. Acesso em: 27 jul. 2021.

ROSS, A. D.; DAHMER, A. M.; MEDEIROS, F. M. B.; MARTINS, C. B. M. J. Ensino Remoto Emergencial durante a pandemia da COVID-19: A visão dos professores de escolas de línguas de Curitiba sobre o ensino com crianças. **Em Rede: Revista de Educação a Distância**, Porto Alegre, v. 8, n. 1, p. 1-22, jul. 2021. Disponível em: <https://www.aunirede.org.br/revista/index.php/emrede/article/view/694>. Acesso em: 10 jul. 2021.

SACCOL, A. I. C. Z.; SCHLEMMER, E.; REINHARD, N.; SARMENTO, C. M-learning ou aprendizagem com mobilidade: um estudo exploratório sobre sua utilização no Brasil. *In*: ENCONTRO DA ANPAD, 31., 2007, Rio de Janeiro. **Anais [...]** Maringá: ANPAD, set. 2007. Disponível em: <http://www.anpad.org.br/admin/pdf/ADI-B706.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2021.

SANCHEZ JÚNIOR, S. L.; SOUZA, P. F. C.; LORDANI, S. F. S.; SCHABARUM, M. I. Ensino Remoto Emergencial em tempos de pandemia covid-19: Um relato de experiência na educação superior. **Revista Valore**, Volta Redonda, v. 6, e-6016, jul. 2021. Disponível em: <https://revistavalore.emnuvens.com.br/valore/article/view/587>. Acesso em: 16 jul. 2021.

SHARPLES, M.; MCANDREW, P.; WELLER, M.; FERGUSON, R.; FITZGERALD, E.; HIRST, T.; MOR, Y.; GAVED, M.; WHITELOCK, D. **Innovating Pedagogy 2012**: Open University Innovation Report 1. Milton Keynes: The Open University, 2012. Disponível em: <https://www.learntechlib.org/d/195465>. Acesso em: 21 jul. 2021.

SHARPLES, M.; ROOCK, R.; FERGUSON, R.; GAVED, M.; HERODOTOU, C.; KOH, E.; KUKULSKA-HULME, A.; LOOI, C-K; MCANDREW, P.; RIENTIES, B.; WELLER, M.; WONG, L. H. **Innovating Pedagogy 2016**: Open University Innovation Report 5. Milton Keynes: The Open University, 2016. Disponível em: <https://www.learntechlib.org/d/195462>. Acesso em 21 jul.2021.

SILVA, F. O. **Utilização de dispositivos móveis e recursos de Realidade Aumentada nas aulas de Matemática para elucidação dos Sólidos de Platão**. 2017. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em rede nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do rio Preto, 2017.

SILVA, P. **GEOMETRIA ESPACIAL: Uso do Aplicativo GeoGebra em Smartphones**. 2018. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em rede nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2018.

SILVA, R. C. D. S. **Realidade aumentada como interface para a aprendizagem de poliedros do tipo prismas**. 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2019.

TOMASCHKO, M., HOHENWARTER, M. Augmented reality in mathematics education: the case of GeoGebra AR. *In: Augmented Reality in Educational Settings*. Lieden: BRILL, p.325-346. 2019. DOI: 10.1163/9789004408845_014.

TRAPPMAIR, A.; HOHENWARTER, M. Driving augmented reality: geogebra’s new ar features in teaching mathematics. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING*, 14., 2019, Essen. **Anais [...]** Essen: UNIVERSITY OF DUISBURG, jul. 2019, p. 136-143. DOI: 10.17185/dupublico/70752. Disponível em: https://dupublico2.uni-due.de/receive/dupublico_mods_00070752. Acesso em: 19 mai. 2021.

UNESCO. **Diretrizes de políticas da UNESCO para a aprendizagem móvel**. Paris: UNESCO, 2013.

UNESCO. **O Futuro da aprendizagem móvel: implicações para planejadores e gestores de políticas**. Brasília: UNESCO, 2014.

WIDADA, W.; HERAWATY, D.; NUGROHO, K. U. Z.; ANGGORO, A. F. D. Augmented Reality assisted by GeoGebra 3-D for geometry learning. *In: MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION INTERNATIONAL SEMINAR (MASEIS)*, 1., 2019, Bengkulu. **Journal of Physics: Conference Series [...]** Banda Aceh: IOP Science, mar. 2021, v. 1731, 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1731/1/012034. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1731/1/012034>. Acesso em: 12 jul. 2021.

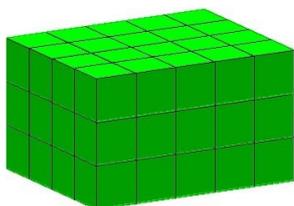
ZORZAL, E. R. Dispositivos Móveis. In: TORI, R.; HOUNSELL, M. S. (org.). **Introdução a Realidade Virtual e Aumentada**. Porto Alegre: SBC, 2018.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIOS APLICADOS**1 QUESTIONÁRIO APLICADO NO INÍCIO DO PRIMEIRO ENCONTRO**

1) Digite aqui o número do seu Registro Acadêmico (RA):

2) O que você entende por volume de um sólido geométrico?

3) O paralelepípedo a seguir está dividido em unidades de volume. Qual o volume total deste paralelepípedo?



4) Você tem FACILIDADE para aprender Geometria espacial?

Sim.

Não.

Se você marcou “Não”, por favor, responda os itens de 5 a 7.

5) Quando você visualiza ilustrações de sólidos geométricos tridimensionais nos livros e no quadro, você tem facilidade para entendê-las?

Sim.

Não.

6) Você tem facilidade para desenhar sólidos geométricos tridimensionais utilizando instrumentos físicos, como régua, lápis e papel?

Sim.

Não.

7) Você tem facilidade para fazer cálculos com base em figuras geométricas tridimensionais?
(Se quiser ser mais específico em sua resposta, pode utilizar a terceira opção)

Sim.

Não.

2 QUESTIONÁRIO APLICADO NO INÍCIO DO SEGUNDO ENCONTRO

1) Digite aqui o número do seu Registro Acadêmico (RA):

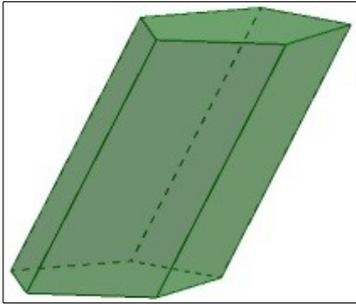
2) Sobre os PRISMAS, assinale o que for correto:

- Possui apenas uma base.
- A altura é a distância entre as duas bases.
- As arestas laterais nem sempre são paralelas.
- Possui pelo menos três faces laterais.
- As bases são sempre paralelas.
- As faces laterais são sempre perpendiculares às bases.
- Todas as arestas laterais são paralelas.
- As faces laterais são sempre retangulares.
- É possível que as faces laterais sejam paralelogramos.
- As faces laterais são sempre quadriláteros.
- As bases são sempre polígonos regulares.
- A altura é a distância entre os planos que contém as bases.

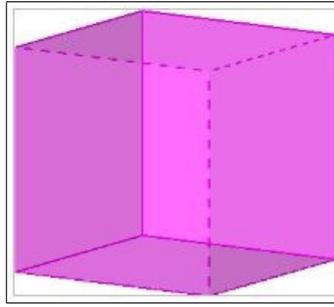
3) Sobre as PIRÂMIDES, assinale o que for correto:

- As arestas laterais podem ser paralelas.
- Possui pelo menos três faces laterais.
- A altura é a distância do vértice até a base.
- O apótema de uma pirâmide está localizado sobre o polígono da base.
- O apótema de uma pirâmide está localizado sobre sua face lateral.
- Todas as arestas laterais se interceptam em um único ponto.
- As faces laterais formam sempre ângulos agudos com a base.
- As faces laterais são sempre triangulares.
- As faces laterais podem ser formadas por quadriláteros.
- A base é sempre um polígono regular.
- A altura é a distância do vértice até o plano que contém a base.
- Se o ponto V' é a projeção ortogonal do vértice V de uma pirâmide sobre o plano que contém a base, então V' é um ponto interior ao polígono da base.

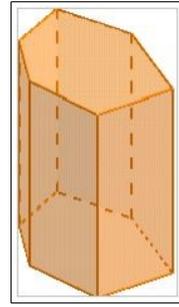
4) Entre as figuras a seguir, assinale aquelas que representam prismas:



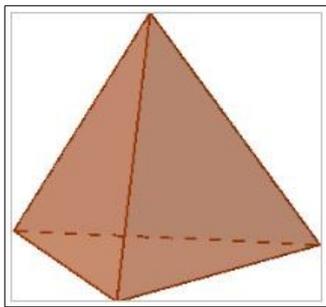
Sólido 1



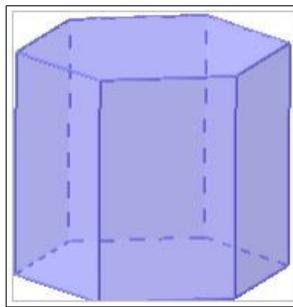
Sólido 2



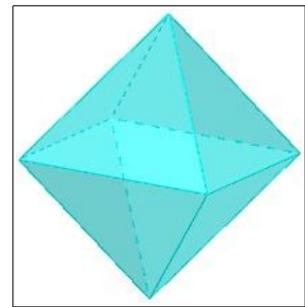
Sólido 3



Sólido 4

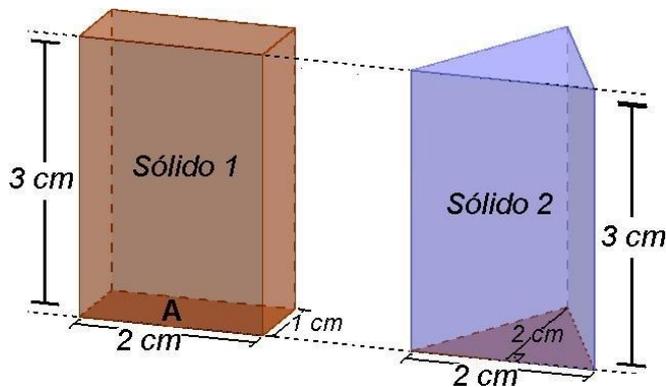


Sólido 5



Sólido 6

5) Sobre os sólidos geométricos abaixo, assinale a(s) alternativa(s) CORRETA(S):



- O volume do sólido 1 é maior do que o volume o sólido 2;
- A base do sólido 2 é equivalente à base do sólido 1;
- O volume do sólido 2 é maior do que o volume o sólido 1;
- Os sólidos são equivalentes;
- Todas as afirmações são falsas.

6) Considere que a altura de um PRISMA RETO DE BASE RETANGULAR mede 10 centímetros, e a sua base tem 9 centímetros quadrados de área.

a) Qual é o volume deste prisma?

- b) E se a base do prisma for um PENTÁGONO REGULAR, cuja área mede 9 centímetros quadrados, qual será o seu volume?
- 7) Sejam "b" e "h" números reais positivos. Considere que a altura de um PRISMA RETO DE BASE RETANGULAR mede "h" centímetros, e a sua base tem "b" centímetros quadrados de área.
- a) Escreva a expressão que representa o cálculo do volume deste prisma.
- b) Agora considere que a base do prisma é um HEXÁGONO REGULAR, cuja área mede "b" centímetros quadrados. Escreva a expressão que representa o volume deste prisma.
- 8) Se um PRISMA e uma PIRÂMIDE possuem bases iguais a um quadrado de lado medindo 2 centímetros, e ambos têm altura medindo 3 centímetros, qual é a razão entre o volume do prisma e o volume da pirâmide?
- 9) Você conhece o Princípio de Cavalieri?
- Sim.
- Não.
- 10) Se você marcou “Sim” na resposta anterior, entre as alternativas abaixo, marque aquelas que ESTÃO RELACIONADAS com o Princípio de Cavalieri:
- Secções planas de determinados sólidos geométricos.
- Classificação de sólidos geométricos em poliedros, prismas e corpos redondos.
- Relação entre o número de vértices, faces e arestas de um poliedro convexo.
- Cálculo do volume de determinados sólidos geométricos.
- Nenhuma das alternativas tem relação com o Princípio de Cavalieri.

3 QUESTIONÁRIO APLICADO NO INÍCIO DO TERCEIRO ENCONTRO

1) Digite aqui o número do seu Registro Acadêmico (RA):

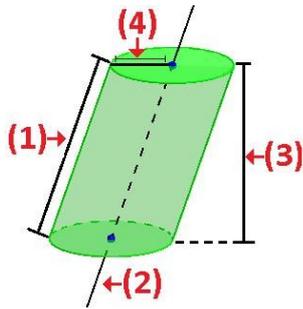
2) Sobre os CILINDROS, assinale o que for correto:

- Possui sempre duas bases.
- As bases nem sempre são paralelas.
- Em todo cilindro equilátero, a altura é igual ao seu raio.
- Em todo cilindro, a altura é igual a distância entre as duas bases.
- O comprimento da geratriz de um cilindro é sempre maior ou igual à sua altura.
- Em um cilindro de revolução, a altura é sempre igual a geratriz.
- O eixo de um cilindro é sempre ortogonal aos planos que contém as bases.
- A geratriz de um cilindro é sempre paralela a sua altura.
- Em todo cilindro equilátero, a altura é igual ao dobro de seu raio.
- A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contém as bases.

3) Sobre os CONES, assinale o que for correto:

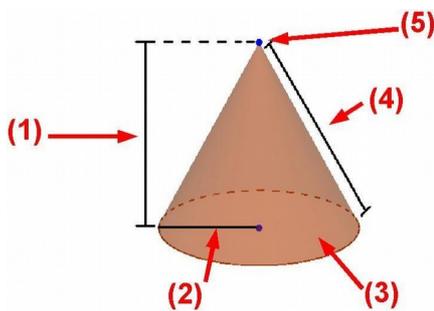
- Possui apenas uma base;
- Em qualquer cone, a projeção ortogonal do vértice sobre o plano que contém a sua base, é sempre um ponto interno ao círculo que a representa;
- Em um cone equilátero, a medida da altura é igual a medida do seu raio;
- Em todo cone, a altura é igual a distância entre o vértice e a base;
- A medida da geratriz de um cone é sempre maior ou igual à sua altura;
- Em um cone equilátero, a medida da geratriz é igual ao dobro da medida do seu raio;
- Em um cone reto, a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é um ponto localizado no centro do círculo que forma a base;
- Em todo cone equilátero, a altura é igual ao dobro de seu raio;
- Em um cone equilátero, a medida da altura é igual ao dobro medida do seu raio;
- A altura de um cone é a distância entre o vértice e o plano que contém a base.

4) Associe o nome com o número que indica cada uma das partes do cilindro:



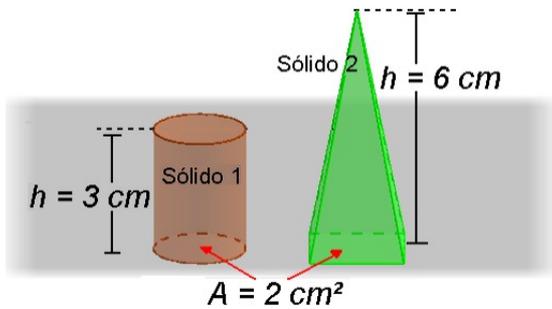
	1	2	3	4
Altura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Eixo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Raio	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Geratriz	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

5) Associe o nome com o número que indica cada uma das partes do cone:



	1	2	3	4
Vértice	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Geratriz	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Altura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Base	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Raio	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

6) O que você pode afirmar sobre o volume dos sólidos a seguir:



- O volume do Sólido 1 é maior que o volume do Sólido 2.
- O volume do Sólido 2 é maior que o volume do Sólido 1.
- Os dois sólidos possuem o mesmo volume.
- Todas as afirmações são falsas.

4. QUESTIONÁRIO APLICADO NO FINAL DO PRIMEIRO ENCONTRO

1) Digite aqui o número do seu Registro Acadêmico (RA):

2) Você fez o uso de Realidade Aumentada?

Sim.

Não.

3) Você participou das atividades de forma síncrona?

Sim.

Não.

4) Assinale as alternativas que mais representam o que você achou das atividades: (Se achar necessário, você pode utilizar a última opção para ser mais específico em sua resposta)

Empolgantes.

Chatas.

Confusas.

Interessantes.

Monótonas.

Curiosas.

Difíceis.

Desafiadoras.

Fáceis de entender.

Outro: _____

5) Você teve alguma dificuldade para executar as construções geométricas no aplicativo? (Se quiser, você pode utilizar a última opção para ser mais específico em sua resposta)

Não

Sim. Algumas.

Sim. Muitas.

Não consegui executar todas as construções.

Outro: _____

6) O aplicativo ajudou a entender melhor o conceito de volume? (Se quiser, você pode fazer uma crítica ou elogio na última opção)

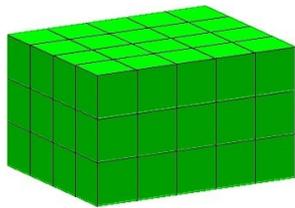
Sim.

Não.

Outro: _____

7) O que você entende por volume de um sólido geométrico?

8) O paralelepípedo a seguir está dividido em unidades de volume. Qual o volume total deste paralelepípedo?



5. QUESTIONÁRIO APLICADO NO FINAL DO SEGUNDO ENCONTRO

1) Digite aqui o número do seu Registro Acadêmico (RA):

2) Você fez o uso de Realidade Aumentada?

Sim.

Não.

3) Você participou das atividades de forma síncrona?

Sim.

Não.

4) Assinale as alternativas que mais representam o que você achou das atividades: (Se achar necessário, você pode utilizar a última opção para ser mais específico em sua resposta)

Empolgantes.

Chatas.

Confusas.

Interessantes.

Monótonas.

Curiosas.

Difíceis.

Desafiadoras.

Fáceis de entender.

Outro: _____

5) Você teve alguma dificuldade para executar as construções geométricas no aplicativo? (Se quiser, você pode utilizar a última opção para ser mais específico em sua resposta)

Não

Sim. Algumas.

Sim. Muitas.

Não consegui executar todas as construções.

Outro: _____

6) Você considera que o uso do aplicativo facilita a interpretação das definições de Prisma e Pirâmide?

- Sim.
- Não.
- Talvez.

7) Você considera que o uso do aplicativo ajuda a entender o processo de cálculo do volume de prismas e pirâmides?

- Sim.
- Não.
- Talvez.

8) Você considera que o uso do aplicativo favorece o entendimento do Princípio de Cavalieri?

- Sim.
- Não.
- Talvez.

9) Sobre os PRISMAS, assinale o que for correto:

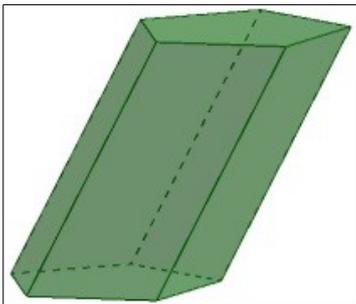
- Possui apenas uma base.
- A altura é a distância entre as duas bases.
- As arestas laterais nem sempre são paralelas.
- Possui pelo menos três faces laterais.
- As bases são sempre paralelas.
- As faces laterais são sempre perpendiculares às bases.
- Todas as arestas laterais são paralelas.
- As faces laterais são sempre retangulares.
- É possível que as faces laterais sejam paralelogramos.
- As faces laterais são sempre quadriláteros.
- As bases são sempre polígonos regulares.
- A altura é a distância entre os planos que contém as bases.

10) Sobre as PIRÂMIDES, assinale o que for correto:

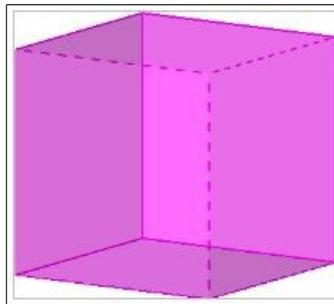
- As arestas laterais podem ser paralelas.

- Possui pelo menos três faces laterais.
- A altura é a distância do vértice até a base.
- O apótema de uma pirâmide está localizado sobre o polígono da base.
- O apótema de uma pirâmide está localizado sobre sua face lateral.
- Todas as arestas laterais se interceptam em um único ponto.
- As faces laterais formam sempre ângulos agudos com a base.
- As faces laterais são sempre triangulares.
- As faces laterais podem ser formadas por quadriláteros.
- A base é sempre um polígono regular.
- A altura é a distância do vértice até o plano que contém a base.
- Se o ponto V' é a projeção ortogonal do vértice V de uma pirâmide sobre o plano que contém a base, então V' é um ponto interior ao polígono da base.

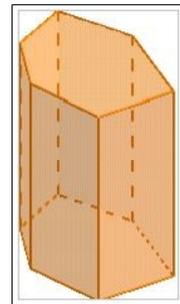
11) Entre as figuras a seguir, assinale aquelas que representam prismas:



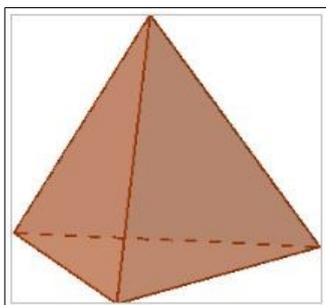
Sólido 1



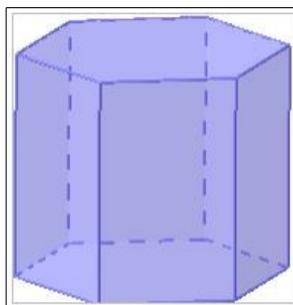
Sólido 2



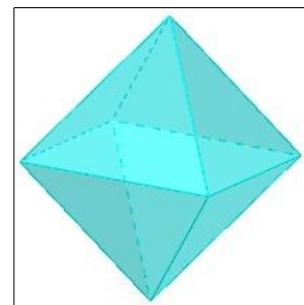
Sólido 3



Sólido 4

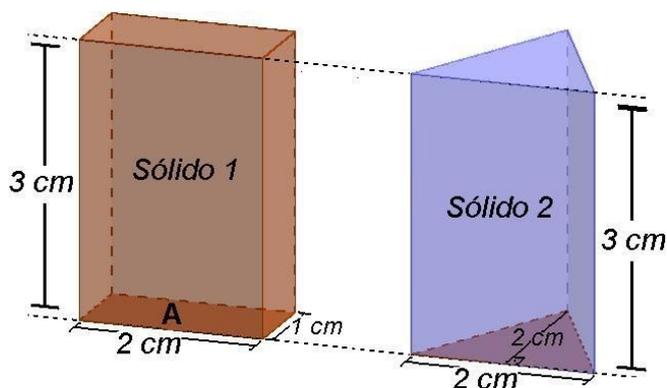


Sólido 5



Sólido 6

12) Sobre os sólidos geométricos abaixo, assinale a(s) alternativa(s) CORRETA(S):



- O volume do sólido 1 é maior do que o volume o sólido 2.
- A base do sólido 2 é equivalente à base do sólido 1.
- O volume do sólido 2 é maior do que o volume o sólido 1.
- Os sólidos são equivalentes.
- Todas as afirmações são falsas.

13) Considere que a altura de um PRISMA RETO DE BASE RETANGULAR mede 10 centímetros, e a sua base tem 9 centímetros quadrados de área.

- a) Qual é o volume deste prisma?
- b) E se a base do prisma for um PENTÁGONO REGULAR, cuja área mede 9 centímetros quadrados, qual será o seu volume?

14) Sejam "b" e "h" números reais positivos. Considere que a altura de um PRISMA RETO DE BASE RETANGULAR mede "h" centímetros, e a sua base tem "b" centímetros quadrados de área.

- a) Escreva a expressão que representa o cálculo do volume deste prisma.
- b) Agora considere que a base do prisma é um HEXÁGONO REGULAR, cuja área mede "b" centímetros quadrados. Escreva a expressão que representa o volume deste prisma.

15) Se um PRISMA e uma PIRÂMIDE possuem bases iguais a um quadrado de lado medindo 2 centímetros, e ambos têm altura medindo 3 centímetros, qual é a razão entre o volume do prisma e o volume da pirâmide?

16) Você conhece o Princípio de Cavalieri?

- Sim.
- Não.

17) Se você marcou “Sim” na resposta anterior, responda: Entre as alternativas abaixo, marque aquelas que ESTÃO RELACIONADAS com o Princípio de Cavalieri:

- Secções planas de determinados sólidos geométricos.
- Classificação de sólidos geométricos em poliedros, prismas e corpos redondos.
- Relação entre o número de vértices, faces e arestas de um poliedro convexo.
- Cálculo do volume de determinados sólidos geométricos.
- Nenhuma das alternativas tem relação com o Princípio de Cavalieri.

6. QUESTIONÁRIO APLICADO NO FINAL DO QUARTO ENCONTRO

1) Digite aqui o número do seu Registro Acadêmico (RA):

2) Você fez o uso de Realidade Aumentada?

Sim.

Não.

3) Você participou das atividades de forma síncrona?

Sim.

Não.

4) Assinale as alternativas que mais representam o que você achou das atividades: (Se achar necessário, você pode utilizar a última opção para ser mais específico em sua resposta)

Empolgantes.

Chatas.

Confusas.

Interessantes.

Monótonas.

Curiosas.

Difíceis.

Desafiadoras.

Fáceis de entender.

Outro: _____

5) Você teve alguma dificuldade para executar as construções geométricas no aplicativo? (Se quiser, você pode utilizar a última opção para ser mais específico em sua resposta)

Não.

Sim. Algumas.

Sim. Muitas.

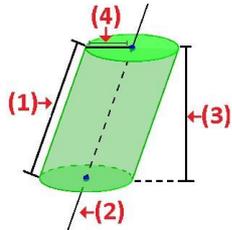
Não consegui executar todas as construções.

Outro: _____

- 6) Você considera que o uso do aplicativo facilita a interpretação das definições de cada um dos corpos redondos?
- Sim.
 - Não.
 - Talvez.
- 7) Você considera que o uso do aplicativo favorece o entendimento da aplicação do Princípio de Cavalieri para o cálculo do volume dos corpos redondos?
- Sim.
 - Não.
 - Talvez.
- 8) Sobre os CILINDROS, assinale o que for correto:
- Possui sempre duas bases.
 - As bases nem sempre são paralelas.
 - Em todo cilindro equilátero, a altura é igual ao seu raio.
 - Em todo cilindro, a altura é igual a distância entre as duas bases.
 - O comprimento da geratriz de um cilindro é sempre maior ou igual à sua altura.
 - Em um cilindro de revolução, a altura é sempre igual a geratriz.
 - O eixo de um cilindro é sempre ortogonal aos planos que contém as bases.
 - A geratriz de um cilindro é sempre paralela a sua altura.
 - Em todo cilindro equilátero, a altura é igual ao dobro de seu raio.
 - A altura de um cilindro é a distância entre os planos que contém as bases.
- 9) Sobre os CONES, assinale o que for correto:
- Possui apenas uma base;
 - Em qualquer cone, a projeção ortogonal do vértice sobre o plano que contém a sua base, é sempre um ponto interno ao círculo que a representa;
 - Em um cone equilátero, a medida da altura é igual a medida do seu raio;
 - Em todo cone, a altura é igual a distância entre o vértice e a base;
 - A medida da geratriz de um cone é sempre maior ou igual à sua altura;
 - Em um cone equilátero, a medida da geratriz é igual ao dobro da medida do seu raio;
 - Em um cone reto, a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é um ponto localizado no centro do círculo que forma a base;

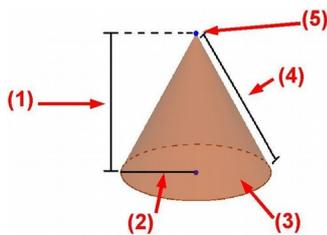
- Em todo cone equilátero, a altura é igual ao dobro de seu raio;
- Em um cone equilátero, a medida da altura é igual ao dobro medida do seu raio;
- A altura de um cone é a distância entre o vértice e o plano que contém a base.

10) Associe o nome com o número que indica cada uma das partes do cilindro:



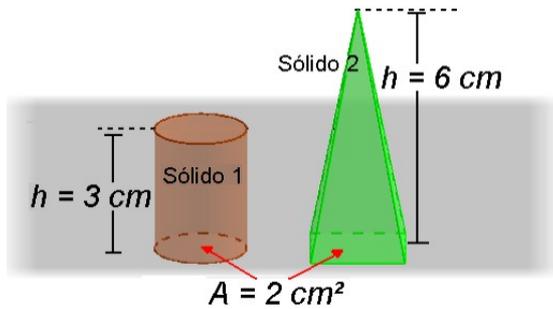
	1	2	3	4
Altura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Eixo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Raio	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Geratriz	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

11) Associe o nome com o número que indica cada uma das partes do cone:



	1	2	3	4
Vértice	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Geratriz	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Altura	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Base	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Raio	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

12) O que você pode afirmar sobre o volume dos sólidos a seguir:



- O volume do Sólido 1 é maior que o volume do Sólido 2.
- O volume do Sólido 2 é maior que o volume do Sólido 1.
- Os dois sólidos possuem o mesmo volume.
- Todas as afirmações são falsas.

APÊNDICE B – SLIDES UTILIZADOS NOS ENCONTROS

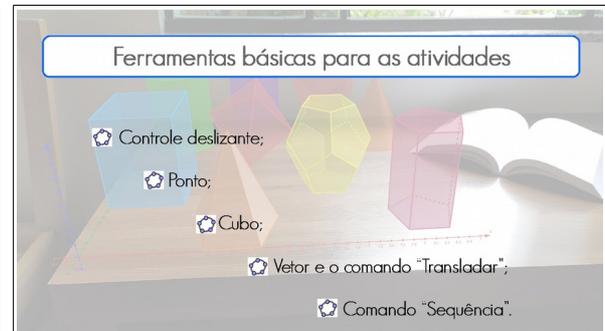
1 PRIMEIRO ENCONTRO

1.1 Ferramentas básicas para as atividades:

Slide 1



Slide 2



Slide 3

Ferramentas necessárias para a primeira Atividade

Controle deslizante

Comando:
"ControlDeslizante(<mínimo>, <máximo>, <incremento>)"

Exemplos:

- Comando: "z" →
- Comando: "Oz=ControlDeslizante(0, 5, 1)" →

Valor mínimo Valor máximo Incremento

Slide 5

Ferramentas necessárias para a primeira Atividade

Cubo

Ferramenta geométrica "Cubo"

Comando
"Cubo(<ponto>, <ponto>)"

Ex.:

- "Cubo(A,B)"
- "a = Cubo(A,B)"
- "Cubo((0,0,0),(1,0,0))"

Slide 7

Ferramentas necessárias para a primeira Atividade

Transladar

Comando
"Transladar(<objeto>, <vetor>)"

> "Transladar(a, 1 . u)"

Objeto "a" transladado na direção do vetor "u", e com deslocamento igual ao módulo desse vetor.

Objeto "a" Vetor "u"

Multiplicador

Slide 4

Ferramentas necessárias para a primeira Atividade

Ponto

Ferramenta geométrica "Ponto"

Comando

- "(x, y, z)"
- "A = (x, y, z)"

Ex.:

- "(1, 0, 0)"
- "A = (1, 0, 0)"

Slide 6

Ferramentas necessárias para a primeira Atividade

Vetor

Ferramenta geométrica "Vetor"

Comando
"letra minúscula = <ponto>"

Ex.:

- "u = (1,1,2)"
- "a = A"

Slide 8

Ferramentas necessárias para a primeira Atividade

Sequência

Comando
"Sequência(<expressão>, <variável>, <valor inicial>, <valor final>)"

1. **Entrada:** Sequência(2n+1, n, 0, 6)

Execução:

2n+1 =>	n=0	=>	1
2n+1 =>	n=1	=>	3
2n+1 =>	n=2	=>	5
2n+1 =>	n=3	=>	7
2n+1 =>	n=4	=>	9
2n+1 =>	n=5	=>	11
2n+1 =>	n=6	=>	13

> **Retorna:** l1 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

Slide 8

Ferramentas necessárias para a primeira Atividade

Sequência

Comando
 "Sequência(<expressão>,<variável>,<valor inicial>,<valor final>)"

1. Entrada: Sequência(2n+1, n, 0, 6)
 Execução:

2n+1 =>	n=0 =>	1
2n+1 =>	n=1 =>	3
2n+1 =>	n=2 =>	5
2n+1 =>	n=3 =>	7
2n+1 =>	n=4 =>	9
2n+1 =>	n=5 =>	11
2n+1 =>	n=6 =>	13

>Retorna: l1 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

Slide9

Ferramentas necessárias para a primeira Atividade

Sequência

Comando
 "Sequência(<expressão>,<variável>,<valor inicial>,<valor final>)"

1. Entrada: Sequência((n, n, n), n, 0, 6)
 Execução:

(n, n, n) =>	n=0 =>	(0,0,0)
(n, n, n) =>	n=1 =>	(1,1,1)
(n, n, n) =>	n=2 =>	(2,2,2)
(n, n, n) =>	n=3 =>	(3,3,3)
(n, n, n) =>	n=4 =>	(4,4,4)
(n, n, n) =>	n=5 =>	(5,5,5)
(n, n, n) =>	n=6 =>	(6,6,6)

>Retorna: l1 = (0,0,0), (1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)

Slide 10

Ferramentas necessárias para a primeira Atividade

Sequência

Comando
 "Sequência(<expressão>,<variável>,<valor inicial>,<valor final>)"

> Entrada: Sequência(Transladar(a, 1 . u), 1, 3)
 Execução:

Transladar(a, 1 . u)
Transladar(a, 2 . u)
Transladar(a, 3 . u)

Objeto "a" transladado de acordo com a execução do comando sequência
 Objeto "a"
 Vetor "u"

1.2 Estudo do volume de sólidos:

Slide 1

Cálculo do volume de sólidos geométricos

$V = a \times b \times c$

Slide 2

Cálculo do volume de sólidos geométricos

O método que comumente utilizamos para calcular o volume de sólidos geométricos resulta do cálculo da razão entre dois sólidos geométricos.

Slide 3

Cálculo do volume de sólidos geométricos

Considere os sólidos (entenda os valores indicados nas figuras como número de unidades de comprimento):

Sólido A Sólido B

Slide 4

Cálculo do volume de sólidos geométricos

O cálculo da razão entre o sólido A e sólido B pode ser feito da seguinte forma:

Sólido A Sólido B

$\frac{\text{Sólido A}}{\text{Sólido B}} = \frac{6}{2} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} = 3$

Slide 5

Cálculo do volume de sólidos geométricos

Vamos fazer essa experiência no GeoGebra...

Slide 6

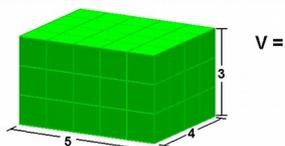
Cálculo do volume de sólidos geométricos

O volume de um paralelepípedo retângulo ou de um cubo pode ser obtido calculando-se a razão entre este sólido e um cubo de aresta medindo 1 u.c. (unidade de comprimento). Este cubo é denominado "unidade de volume".

Slide 7

Cálculo do volume de sólidos geométricos

Vamos calcular o volume do sólido A a seguir:

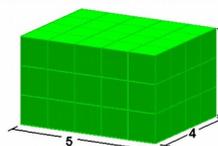


Unidade de volume: 

Slide 8

Cálculo do volume de sólidos geométricos

Vamos calcular o volume do sólido A a seguir:



$$V = \frac{\text{Sólido A}}{\text{Unidade de volume}}$$

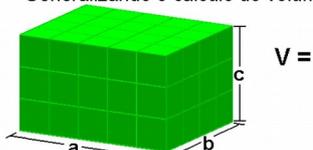
$$V = \frac{5}{1} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{1} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ u.v.}$$

Unidade de volume: 

Slide 9

Cálculo do volume de sólidos geométricos

Generalizando o cálculo do volume do sólido A ...

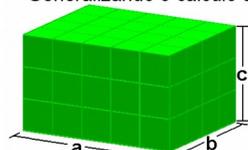


Unidade de volume: 

Slide 10

Cálculo do volume de sólidos geométricos

Generalizando o cálculo do volume do sólido A ...



$$V = \frac{\text{Sólido A}}{\text{Unidade de volume}}$$

$$V = \frac{a}{1} \times \frac{b}{1} \times \frac{c}{1} = a \times b \times c$$

Unidade de volume: 

Slide 11

Cálculo do volume de sólidos geométricos

"O volume de um sólido é a medida da região do espaço limitada por sua superfície." (IEZZI *et al.*, 2013).

"O volume de um prisma corresponde a um único número real ' V ' positivo obtido pela comparação da porção do espaço ocupado pelo prisma com a porção de espaço ocupado por uma unidade de medida de volume." (BARROSO org., 2010).

2 SEGUNDO ENCONTRO

Slide 1

PRISMAS

Slide 2

Prismas

Que características um sólido geométrico precisa ter para que ele seja denominado PRISMA???

Slide 3

Prismas

Slide 4

Prismas

DEFINIÇÃO - "Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABCD...MN$ situado num plano α e um segmento de reta PQ , cuja reta suporte intercepta o plano α . Chama-se *prisma* (ou prisma convexo) a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ , com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α ." (DOLCE; POMPEO, 2005)

Slide 5

Prismas

Vamos estudar esta definição no GeoGebra...

Slide 6

Elementos de um Prisma

Slide 7

Cálculo do volume do prisma

Generalizando o cálculo do volume do **Prisma reto, de base retangular**: (considere que a , b e c são números reais positivos)

$$V = \frac{\text{Prisma}}{\text{Undade de volume}}$$

$$V = \frac{a}{1} \times \frac{b}{1} \times \frac{c}{1} = a \times b \times c$$

Unidade de volume: ¹_{1 1}

Slide 8

Cálculo do volume do prisma

Generalizando o cálculo do volume do **Prisma reto, de base retangular**:

$$V = \frac{\text{Prisma}}{\text{Undade de volume}}$$

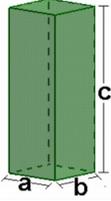
$$V = \frac{a}{1} \times \frac{b}{1} \times \frac{c}{1} = \boxed{a \times b} \times \boxed{c}$$

Área da base ↓ Altura

Slide 9

Cálculo do volume do prisma

Generalizando o cálculo do volume do **Prisma reto, de base retangular:**



Podemos afirmar então que:

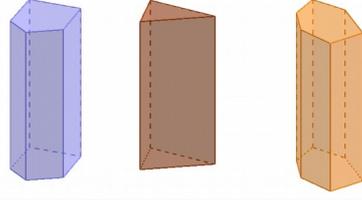
$V = A_b \times h$

A_b = Área da base
 h = Altura do prisma

Slide 10

Cálculo do volume do prisma

E se o **Prisma reto não for de base retangular???**



Slide 11

Cálculo do volume do prisma

Vamos explorar essa ideia no GeoGebra...

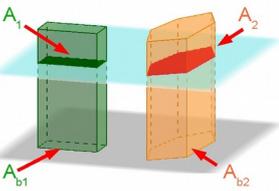
Slide 12

Cálculo do volume do prisma

PRINCÍPIO DE CAVALIERI – Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

Slide 13

Cálculo do volume do prisma



Podemos afirmar então que:

$$V_1 = A_{b1} \times h$$

$$A_1 = A_2$$

$$A_1 = A_{b1} \text{ e } A_2 = A_{b2}$$

$$A_{b1} = A_{b2}$$

$$V_1 = A_{b1} \times h = A_{b2} \times h = V_2$$

Slide 14

Cálculo do volume do prisma

Portanto, o volume de qualquer prisma pode ser obtido multiplicando a área da base pela sua altura.

$V = A_b \times h$

A_b = Área da base
 h = Altura do prisma

Slide 15

Pirâmides

DEFINIÇÃO - "Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABCD...MN$ situado num plano α e um vértice V fora de α . Chama-se *pirâmide* (ou pirâmide convexa) a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono." (DOLCE; POMPEO, 2005)

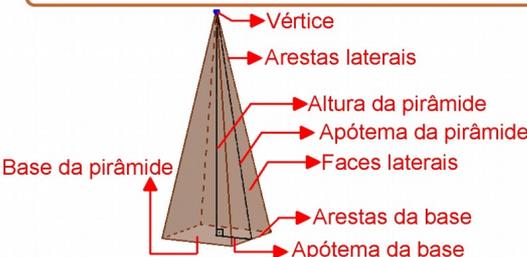
Slide 16

Pirâmides

Vamos estudar essa definição no GeoGebra...

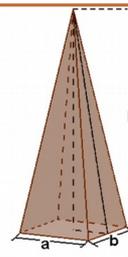
Slide 17

Elementos de uma pirâmide



Slide 18

Volume da Pirâmide



O volume de uma pirâmide pode ser obtido com o seguinte cálculo:

$V = \frac{A_b \times h}{3}$

A_b = Área da base
 h = Altura do prisma

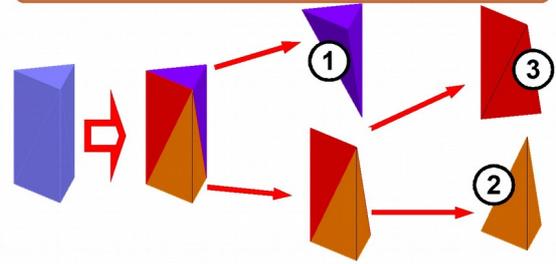
Slide 19

Volume da Pirâmide

Vamos verificar isso no GeoGebra...

Slide 20

Volume da Pirâmide



3 TERCEIRO ENCONTRO

Slide 1

Cilindro

DEFINIÇÃO – "Consideremos um círculo (região circular) de centro O e raio r , situado num plano α , e um segmento de reta PQ , não nulo, não paralelo e não contido em α . Chama-se **cilindro circular** ou **cilindro**, a reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ , com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α ." (DOLCE; POMPEO, 2005)

Slide 2

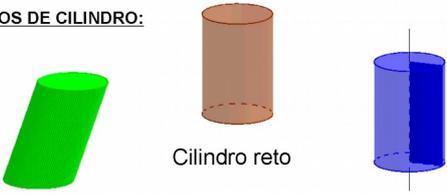
Cilindro

Vejamos algumas formas de construir um cilindro de revolução no GeoGebra...

Slide 3

Cilindro

TIPOS DE CILINDRO:

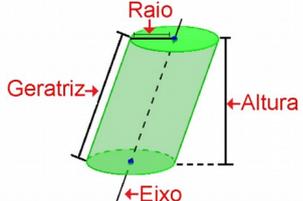


Cilindro oblíquo Cilindro reto Cilindro de revolução

Slide 4

Cilindro

ELEMENTOS DE UM CILINDRO:



Slide 5

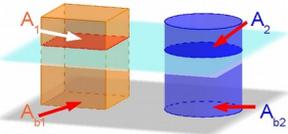
Cálculo do volume do Cilindro

Vamos obter o volume de um cilindro por meio de uma aplicação do princípio de Cavalieri. Estudaremos a secção plana de um cilindro e de um prisma de alturas iguais e bases equivalentes.

Vamos explorar essa ideia no GeoGebra...

Slide 6

Cálculo do volume do Cilindro



Podemos afirmar então que:

$$V_1 = A_{b1} \times h$$

$$A_{b1} = A_{b2}$$

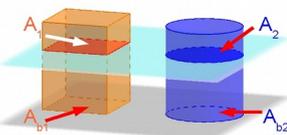
$$A_1 = A_{b1} \text{ e } A_2 = A_{b2}$$

$$A_1 = A_2$$

$$V_1 = A_{b1} \times h = A_{b2} \times h = V_2$$

Slide 7

Cálculo do volume do Cilindro



Podemos afirmar então que:

$$V_2 = A_{b2} \times h$$

A_{b2} = Área da base do cilindro
 h = Altura do cilindro

Slide 8

Cone

DEFINIÇÃO – "Considere um círculo (região circular) de centro O e raio r situado em um plano α e um ponto V fora de α . Chama-se **cone circular** ou **cone** a reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e outra nos pontos do círculo." (DOLCE; POMPEO, 2005)

Slide 9

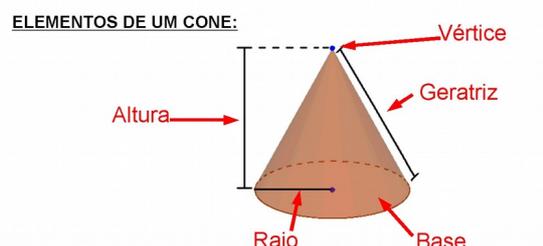
Cone

Vejam algumas formas de construir um cone de revolução no GeoGebra...

Slide 10

Cone

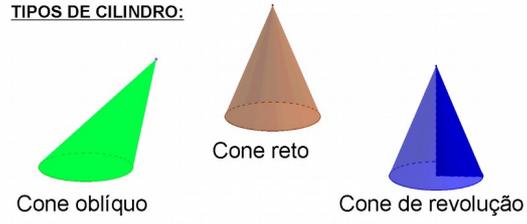
ELEMENTOS DE UM CONE:



Slide 11

Cone

TIPOS DE CILINDRO:

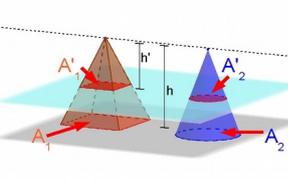


Cone oblíquo
Cone reto
Cone de revolução

Slide 12

Cálculo do volume do Cone

Podemos afirmar então que:



$$\frac{A'_1}{A_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2, \quad \frac{A'_2}{A_2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

$$\frac{A'_1}{A_1} = \frac{A'_2}{A_2} \quad \boxed{A'_1 = A'_2}$$

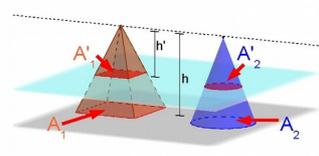
Slide 13

Cálculo do volume do Cone

Podemos afirmar então que:

$$\boxed{V = \frac{A_b \times h}{3}}$$

A_b = Área da base
 h = Altura do cone



4 QUARTO ENCONTRO

Slide 1

Esfera

DEFINIÇÃO – "Consideremos um ponto O e um segmento de medida r . Chama-se **Esfera de centro O e raio r** , o conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja menor ou igual a r " (DOLCE; POMPEO, 2005)

Slide 2

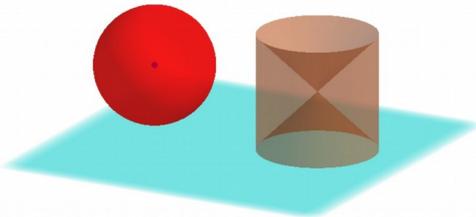
Esfera

Podemos obter o volume de uma esfera estudando a área das secções planas de uma anticlépsida.

Vamos explorar essa ideia no GeoGebra...

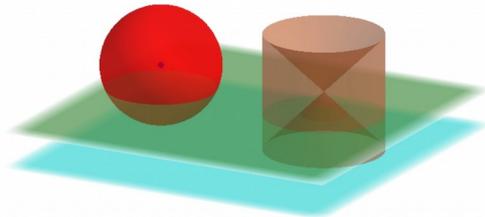
Slide 3

Cálculo do volume da Esfera



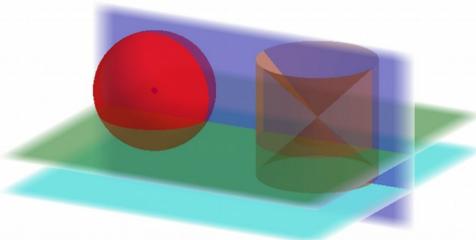
Slide 4

Cálculo do volume da Esfera



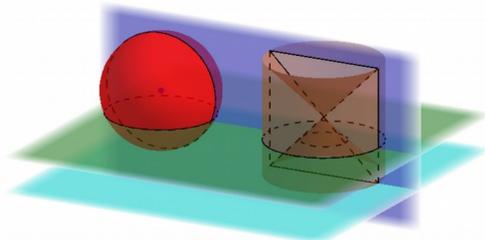
Slide 5

Cálculo do volume da Esfera



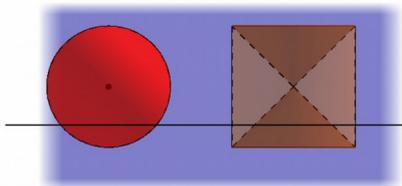
Slide 6

Cálculo do volume da Esfera



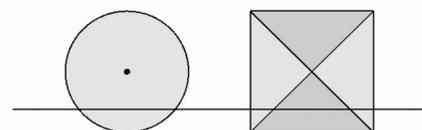
Slide 7

Cálculo do volume da Esfera

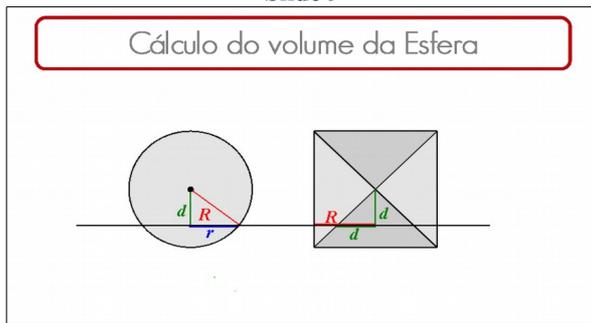


Slide 8

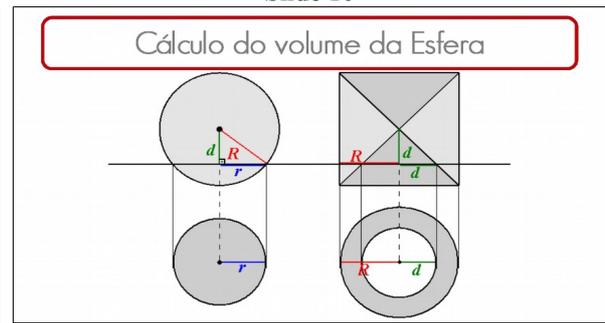
Cálculo do volume da Esfera



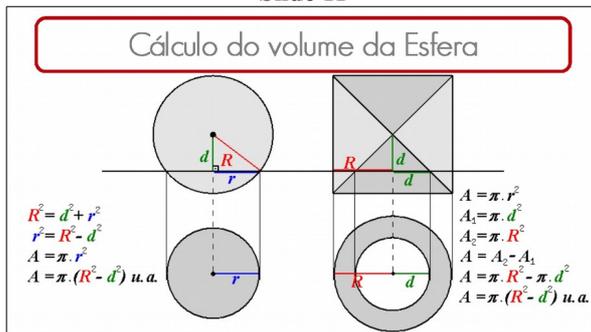
Slide 9



Slide 10



Slide 11



Slide 12

