UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Vilson Hennemann

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE ATÉ QUARTO GRAU: O LIMITE DAS SOLUÇÕES GERAIS POR RADICAIS

Santa Maria, RS
2021

Vilson Hennemann

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE ATÉ QUARTO GRAU: O LIMITE DAS SOLUÇÕES GERAIS POR RADICAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Roberto Lazzarin

Santa Maria, RS
2021

This study was financied in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001

HENNEMANN, VILSON
EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE ATÉ QUARTO GRAU: O LIMITE DAS SOLUÇÕES GERAIS POR RADICAIS / VILSON HENNEMANN.- 2021.
67 p.; 30 cm

Orientador: JOÃO ROBERTO LAZZARIN
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2021

1. NÚMEROS COMPLEXOS 2. EQUAÇÕES POLINOMIAIS 3. MÉTODOS POR RADICAIS 4. RAÍZES 5. GALOIS I. LAZZARIN, JOÃO ROBERTO II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Endereço: Rua Vereador João Sérgio Follmann - Alecrim - RS
Fone (0xx) 55 999281410; End. Eletr.: hennemannvilson@gmail.com

Vilson Hennemann

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE ATÉ QUARTO GRAU: O LIMITE DAS SOLUÇÕES GERAIS POR RADICAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 15 de outubro de 2021:

João Roberto Lazzarin, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Lisandra de O. Sauer

Lisandra de Oliveira Sauer, Dra. (UFPel)

Janice Rachelli

Janice Rachelli, Dra. (UFSM)

Lucinéia Fabris

Lucinéia Fabris, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2021

DEDICATÓRIA

Dedico essa pesquisa aos meus pais, Gastão e Miguelina (In Memoriam) e a quem, assim como eles acreditavam, acreditam no poder da educação!

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade da Vida!

Agradeço muito aos meus pais (In Memoriam), que sempre caminharam ao meu lado e que continuam caminhando, hoje, de um modo diferente.

Agradeço a minha namorada Adriane e aos demais familiares pelo apoio e compreensão.

Agradeço aos professores que tive a oportunidade de conhecer no curso do PROFMAT, em especial ao meu orientador, o professor Lazzarin.

Agradeço aos colegas professores da EMEF São José - Alecrim - RS, pelo apoio e compreensão da minha ausência em alguns dias, em função das aulas do mestrado.

Agradeço a Administração Municipal (2017 - 2020) de Alecrim - RS pela cedência dos dias em que eu tinha aula, no mestrado, sem prejuízos a minha vida funcional. Um ato de reconhecimento da importância da formação do professor.

Agradeço as amizades, que o PROFMAT, oportunizou-me em fazer, de colegas de curso a grandes amigos, para toda vida.

"Escolha uma ideia. Faça dessa ideia a sua vida. Pense nela, sonhe com ela, viva pensando nela. Deixe cérebro, músculos, nervos, todas as partes do seu corpo serem preenchidas com essa ideia. Esse é o caminho para o sucesso."

(Swami Vivekananda)

RESUMO

EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE ATÉ QUARTO GRAU: O LIMITE DAS SOLUÇÕES GERAIS POR RADICAIS

AUTOR: Vilson Hennemann
ORIENTADOR: João Roberto Lazzarin

Ao tentar buscar o enriquecimento do ensino da matemática, tornou-se pauta deste trabalho a discussão de técnicas de soluções de equações polinomiais de até quarto grau, concentrando-se nas resoluções destas sentenças por meio de radicais. Com o objetivo de analisar as principais técnicas que conduzem à solução de equações polinomiais por meio de radicais, explorou-se um aporte teórico sobre polinômios e números complexos, capazes de promoverem a compreensão dessas técnicas empregadas ao longo da história como as Relações de Girard, a Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau e os métodos de: Viète, Cardano e Ferrari. Além disso, investigou-se as limitações que alguns métodos possuem - por várias circunstâncias - e que foram marcos importantes para a produção e revisão de parte da nossa literatura matemática, incluindo-se uma modesta abordagem à história e teoria de Galois. O desenvolvimento desse trabalho também oportunizou uma breve investigação do porquê de alguns métodos serem tão poucos difundidos quando comparados aos demais, deixando-nos a impressão que os excessos de pré-requisitos e a linguagem algébrica elaborada são fontes que contribuem para que estejam, em partes, esquecidos no tempo.

Palavras-chave: Números Complexos. Equações Polinomiais. Métodos por Radicais. Raízes. Galois.

ABSTRACT

POLYNOMIAL EQUATIONS OF UP TO FOURTH DEGREE: THE LIMIT OF GENERAL SOLUTIONS BY RADICALS

AUTHOR: Vilson Hennemann
ADVISOR: João Roberto Lazzarin

Trying to enrich the Maths teaching, discussion about techniques and equation solutions of up to fourth degree became the subject of this work, focusing on these sentences resolutions through radicals. In order to analize the main techniques which lead to the solution of polynomial equations through radicals, was explored a theoretical contribution on polynomials, complex numbers, able to promote understanding of the techniques used throughout history such as Girards Relations, the Solving Formula of a Quadratic Equation and the methods of: Viète, Carnado and Ferrari. In addition, was investigated the limitations of some methods for several situations and were very important for the production and revision of a part of our mathematical literature, including a modest approach to Galois history and theory. This works development also provided a brief investigation of why some methods are so little known when compared to others, leaving us the impression that the excesses of prerequisites and the elaborate algebraic language are sources that help to their being, in part, forgotten in time.

Keywords: Complex Numbers. Polynomial Equations. Radical Methods. Roots. Galois.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$BNCC$	Base Nacional Comum Curricular
$INEP$	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
$OCDE$	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
$PISA$	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao promover o ensino de matemática é preciso que o professor detenha um amplo saber, necessário para que possa utilizar e transferir conhecimentos (histórias e técnicas) e demais condições pertinentes, a construção de resultados significativos na aprendizagem matemática dos alunos envolvidos no processo. Inerente ao pressuposto acima defendido, buscamos através do referido trabalho, trazer um estudo das equações polinomiais, e dentro dele a apresentação e discussão de algumas técnicas que nos levam à solução por radicais das equações polinomiais de até quarto grau.

Além disso, precisamos aproveitar melhor as horas dispensadas na disciplina de matemática, tentando democratizar seu aprendizado a maioria dos estudantes, e desmistificar a ideia de que aprender matemática é coisa de uns poucos privilegiados. Bem pelo contrário, sua estada, dentro da composição curricular no ensino básico, necessita ser defendida e trabalhada no propóstio de oferecer momentos que potencialize a estruturação do pensamento lógico, a formação de diferentes estratégias e caminhos que levem aos resultados pretendidos.

Avançando um pouco mais nessa direção, Jordan Ellenberg em sua obra intitulada - O poder do pensamento matemático, afirma:

> Nós perdemos um monte de estudantes de matemática por causa disso. E perdemos um monte de futuros matemáticos. Mas este não é todo o problema. Acho que precisamos de mais estudantes de matemática que não se tornem matemáticos. Mais estudantes de matemática que acabem virando médicos, ou professores do ensino médio, ou presidentes de empresas, ou senadores. Mas não chegaremos lá enquanto não jogarmos fora o estereótipo de que a matemática só vale a pena para os pequenos gênios. (ELLENBERG, 2015, p. 303)

Nesse delinear, utilizando-se de métodos de resolução, por radicais, de equações polinomiais, pretendemos contribuir com uma pequena fração do que seja um estudo consistente, cadencialmente lógico e formal do que seja matemática, visando uma singela contribuição para professores que atuam no ensino de matemática ou amantes dessa área tão nobre.

Sendo assim, temos como objetivo geral: analisar algumas técnicas, que conduzem à solução de equações polinomiais por meio de radicais.

Para atingir este objetivo, elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Argumentar sobre a necessidade de se discutir o ensino de matemática, na Educação Básica, com bases em parâmetros de qualidade.
- Construir uma base teórica suporte ao desenvolvimento de técnicas para solucionar as equações.

- Apresentar um breve resumo da história das equações ao longo do tempo.
- Argumentar sobre a importância dos números complexos no processo e entendimento das soluções das equações polinomiais.
- Produzir algumas análises sobre a abordagem do processo de solução das equações e seu impacto no ensino das equações polinomiais em geral.
- Trazer a Teoria de Galois, de forma modesta, e sua implicação no estudo das equações polinomiais.

Considerando a estrutura do nosso trabalho, na primeira parte logo após essa seção, encontramos, no Capítulo 2, a defesa sobre o porquê da escolha das equações polinomiais como objeto de estudo. Nesse mesmo espaço tratamos de alguns dados produzidos pelo PISA, em relação a proficiência matemática dos estudantes e como as equações polinomiais estão envolvidas nesse contexto.

No capítulo 3, fazemos uma abordagem às equações polinomiais, de um modo a dividir esse enfoque em quatro partes. Na primeira, apresentamos os números complexos e construímos parte dessa teoria na intenção de que ela nos permita posteriormente trabalhar com alguns tipos de raízes, expandindo assim o conjunto dos números reais.

Ainda no capítulo 3, na segunda parte, tratamos conhecer os polinômios de forma isolada. Pelo fato de que, vamos fazer um estudo das equações apenas com característica de polinômio. Na terceira parte, apresentamos as equações polinomiais, suas características, bem como, o significado de raiz e solução, entre outros. Finalizando o capítulo, exibimos as relações de Girard, para equações de grau 2, 3 e generalizamos as relações para uma equação de grau n.

No capítulo 4, reunimos alguns métodos para a solução por radicais de equações polinomais de até quarto grau. Buscamos trazer esses métodos em um contexto histórico nos quais foram desenvolvidos. Após, falamos da insolubilidade geral das equações de grau ≥ 5, por radicais. E por fim, trazemos alguns casos particulares de equações de grau ≥ 5, que apresentam soluções por radicais, dividindo o capítulo em seis partes.

Detalhando um pouco melhor o capítulo 4, encontramos, na primeira parte, a trivial forma de resolver a equação do primeiro grau. Na sequência, falamos sobre a equação do segundo grau e sua solução pela Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau e pelo método de Viète. Na terceira parte, iniciamos propondo a transformação de uma equação de terceiro grau em sua forma reduzida. E, em seguida, considerando a forma reduzida, propomos sua solução pelo método de Cardano.

Na quarta parte do capítulo 4, iniciamos com a mudança de variável para transformar a equação geral do quarto grau para o formato em que se aplica o método de Ferrari. Na sequência desenvolvemos o método e alguns exemplos como nos demais casos.

Na quinta seção do capítulo 4, trazemos um pouco da história de Évariste Galois, como também, uma pequena parte das suas idéias, as quais, contribuíram para provar a característica insolúvel por radicais que as equações polinomias com grau maior do que 4 possuem. Organizamos essas informações, e tratamos da inexistência das soluções com base em uma modesta menção à Teoria de Grupos de Galois.

Ao finalizar o capítulo, presenteamos o leitor, com uma miscelânea de exemplos de equações polinomiais de grau ≥ 5, que apresentam suas soluções através de radicais, sendo considerados, alguns casos pontuais, que são possíveis de serem exibidos suas soluções por meio de radicais.

No Capítulo 5, apresentamos as considerações finais ao trabalho, no qual, expomos nossas ideias formalizadas acerca das equações polinomiais. E conseguinte, as referências utilizadas como fonte concreta e de créditos à escrita produzida.

Como Produto Educacional[1], resultado do presente trabalho, disponibilizamos uma série contendo três vídeos gravados, nos quais abordamos as técnicas de soluções das equações polinomais de até quarto grau.

[1] Produto Educacional - Vídeo 01 - Disponível em https://youtu.be/bwFX9invbj0. Produto Educacional - Vídeo 02 - Disponível em https://youtu.be/V71VEeCqTHo. Produto Educacional - Vídeo 03 - Disponível em https://youtu.be/8F4-XusjyNc.

2 JUSTIFICATIVA PARA ABORDAGEM DO TEMA

Ao fazermos uma busca pelo tema: equações polinomiais, tratando da solubilidade por radicais, percebemos que há poucos trabalhos desenvolvidos em comparação a outros assuntos matemáticos. Destacamos o trabalho de Carvalho (2015), no qual, buscou fazer um estudo sobre as equações polinomiais de uma e duas variáveis. Realizando um tratamento mais didático do Teorema de Galois. Já Dierings (2014) propõe uma nova forma de abordagem no ensino de polinômios voltada ao Ensino Superior. Matos (2014) elaborou uma proposta didática abordando as equações do terceiro grau no Ensino Médio, a partir da Equação de Van der Waals. Além de Matos, referenciamos o trabalho de Moretti (2014) que buscou apresentar um estudo sobre os métodos algébricos para a resolução de equações polinomais de até quarto grau.

Salientamos que as equações polinomiais representam um conhecimento abordado em grande parte nos anos finais do ensino fundamental e em ensino médio, e portanto, acreditamos que possui grande relevância em ser tratado.

De acordo com a BNCC, BRASIL (2018), em seu texto, estão previstas algumas habilidades, em relação as equações polinomiais, a serem desenvolvidas pelos alunos ao longo dos anos finais do ensino fundamental, são elas:

- (EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

- (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de $1^{\underline{o}}$ grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

- (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de $2^{\underline{o}}$ grau do tipo $ax^2 = b$.

- (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do $2^{\underline{o}}$ grau.

No contexto do Ensino Médio, em relaçao ao estudo das equações polinomiais, destacamos a seguinte habilidade proposta na BNCC:

- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Além disso, dentro da grande área da Matemática, as equações polinomiais estão fundamentadas no campo da Álgebra, e por sinal, o conhecimento e importância da linguagem algébrica, devem produzir grandes significados na vida em geral dos estudantes. E ainda, para Garbi (2010, p. 01), "qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente por meio das equações".

Considerando a Matemática enquanto disciplina curricular na educação básica, iremos pontuar em alguns aspectos, o retrato em geral da qualidade de ensino dessa área no Brasil. Segundo dados do PISA[1] 2018, os resultados não são nada animadores. Considerando a média OCDE, que é de 492 pontos, ficamos 108 pontos a baixo dela. Por uma ótica estatística estamos empatados com a Argentina, com uma das piores médias, conforme dados do INEP (2020).

Os números, produzidos pelo PISA, possuem um significado amplo. Um deles, remete para a necessidade de se discutir o ensino e aprendizagem de matemática nas escolas brasileiras. Ao mesmo tempo que o programa aponta deficiências na qualidade da educação dos países envolvidos, apresenta alguns comportamentos mantidos por algumas nações, os quais, merecem um olhar diferenciado.

Verificamos, em meio a copilação das informações geradas pelo PISA, que há uma forte ligação entre a exposição à matemática pura por parte dos estudantes e seu desempenho em Matemática. Em virtude disso, pontuamos que o índice de exposição à matemática pura quantifica a experiência expressa pelo estudante com base em tarefas de matemática que exigem conhecimento de álgebra (equações lineares e quadráticas).

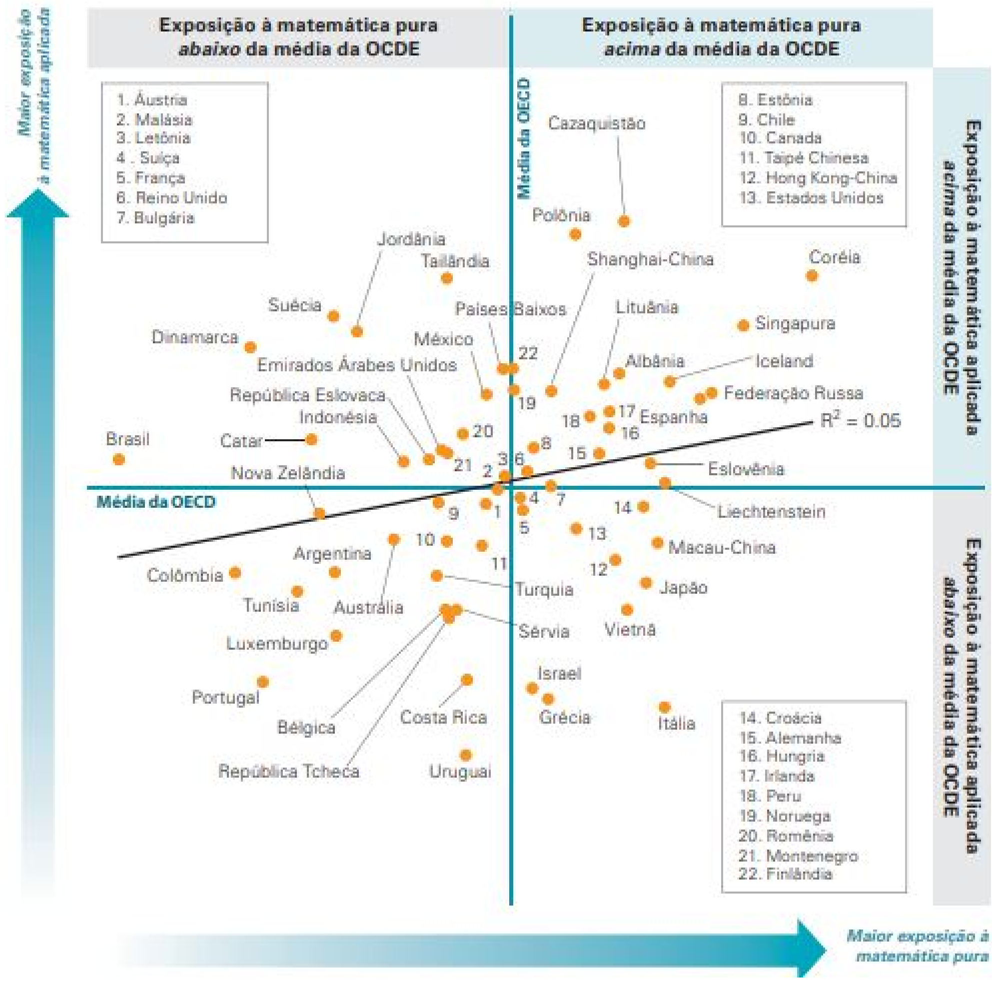
Inerente a composição do conhecimento algébrico (equações lineares e quadráticas), encontramos as equações polinomiais. Esse é o motivo pelo qual trouxemos as informações produzidas pelo PISA em relação a exposição dos estudantes à Matemática Pura; e em relação a exposição à Matemática Aplicada, tratamos a seguir.

O programa busca por meio da exposição à matemática aplicada, quantificar a experiência expressa pelo estudante com base, por exemplo, em calcular, de propriedade de uma tabela de horários de um trem, a demanda de tempo para ele ir de um lugar para outro ou estimar o preço de um computador após a incidência dos impostos.

No que concerne à confiança dos aspectos que acabamos de tratar, tornamos evidente as informações conforme pode ser observado na Figura 2.1. Esses dois aspectos, levados em consideração na hora de avaliar os estudantes em Matemática pelo PISA, comparados ainda com a média da OCDE (492 pontos), nos fornecem um panorama de cada país participante no quesito proficiência em Matemática.

[1] Programa Internacional de Avaliação de Estudantes criado no ano de 2000 pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). No Brasil, é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), avaliando, em cada edição três domínios: Leitura, Matemática e Ciências; permite cada país avaliar o conhecimento e as habilidades de cada um dos seus estudantes.

Figura 2.1 – Relação entre a exposição dos estudantes à matemática pura e aplicada, por país



Fonte: (OCDE, 2018, p.79)

Resumindo a abordagem realizada,

> [...] A relação entre exposição a matemática pura e o desempenho é forte e é observada em todos os países e economias do PISA. Uma análise mais profunda dos dados mostra que uma maior exposição à matemática pura aumenta as chances de que o aluno seja um dos com melhor desempenho em matemática, e reduz as chances que ele ou ela tenha um desempenho ruim. (OCDE, 2018, p. 80).

O ranking dos países participantes do PISA, com essas informações, podem ser consultados em OCDE (2018, p. 81).

Enfatizamos que essa exposição demonstra ser bastante importante. Contudo, não representa a única habilidade para a proficiência em matemática. A disposição, de enxergar a matemática como algo de utilidade, e que vale a pena investir nosso tempo para com ela, também se faz necessária.

Entendemos que o ensino de polinômios, bem como das equações polinomiais, permite o desenvolvimento do pensamento algébrico, desde o seu nível mais elementar ao mais complexo; pois, precisa envolver habilidades conceituais, de representação, raciocínio, comunicação, estratégicas, entre outras.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular BRASIL (2018, p.270), as equações representam o meio para soluções de determinadas situações. E é preciso que os estudantes consigam dominar os procedimentos utilizados(técnicas) para resolvê-las.

No contexto do emprego de técnicas para a solução das equações polinomiais, obtemos a seguinte contribuição:

> Em se tratando de polinômios, conteúdo estudado inicialmente no oitavo ano do ensino fundamental e aprofundado no terceiro ano do ensino médio, uma das maiores dificuldades é encontrar as raízes quando este polinômio tem grau superior a dois, visto que as fórmulas para encontrar tais raízes não fazem parte do conteúdo programático. (SANTOS; ALMEIDA, 2015, p. 440).

Outro fato interessante, é em relação à conduta dos professores.

> O ensino de polinômios, assim como o de outros conceitos matemáticos, exige professores capazes de: selecionar os conteúdos de acordo com os diferentes níveis escolares; fazer analogias, ilustrações; dar exemplos e explicações; saber resolver exercícios e problemas; saber utilizar notações e termos corretamente; identificar definições incorretas, assim como respostas incorretas dos exercícios. (LAUTENSCHLAGER; RIBEIRO, 2017, p. 239)

Ainda que, existam dificuldades, nas palavras de Einsenberg; Dreyfus (1995 apud, LAUTENSCHAGER; RIBEIRO, 2017), há possibilidade de aprender muitos aspectos do pensamento matemático, diante do estudo de polinômios e, em virtude disso, defendem a importância e a permanência desse conteúdo no currículo escolar.

Por fim, queremos destacar que, ao desenvolver um estudo sobre as equações polinomiais, esperamos dar suporte ao professor de matemática, de forma a apropriar ou ampliar o seu conhecimento em relação ao nosso objeto de estudo. E ao mesmo tempo, que essa escrita tenha ao trabalho de quem dela tiver acesso, uma forma de enriquecê-lo.

3 EQUAÇÕES POLINOMIAIS: CARACTERÍSTICAS E SOLUÇÕES

3.1 NÚMEROS COMPLEXOS

Embora, fugimos de uma ordem histórica cronológica, não deixamos de enfatizar que o advento dos números complexos aconteceu na busca pela solução das equações de terceiro grau. Quando os matemáticos se deparavam com raízes quadradas de números negativos, as ignoravam, não as aceitavam, o que gerou um abandono do estudo dos Números Complexos por um considerável período da história.

No entanto, essa intolerância às raízes quadradas negativas começou a se desfazer com Cardano[1]. Ele começou a considerar (mas não atribuindo significado) as expressões $5-\sqrt{-15}$ e $5+\sqrt{-15}$ como sendo solução do problema: Considerar dois números cuja soma seja igual a 10 e o produto igual a 40, contemplado em sua obra, Ars Magna de Cardano.

A partir desse fato, passados 25 anos aproximadamente, Bombelli[2] considerou na solução de algumas equações cúbicas, quando necessário, $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Contudo, foi Euler[3] o responsável pelo estudo do número complexo na forma $z = a + bi$, com $i^2 = -1$.

Considerando z um número complexo, podemos escrevê-lo na forma algébrica

$$z = a + bi$$

sendo a chamado de parte real de z e b chamado de parte imaginária de z, ambos números reais e $i = \sqrt{-1}$.

Definição 3.1.1 *Considerando o número complexo $z = a + bi$, definimos o conjugado de z como sendo $\overline{z} = a - bi$, de tal forma que as partes reais sejam iguais e as partes imaginárias simétricas.*

Dados dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ a soma será dada da seguinte forma:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Considerando os números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ a multiplicação

[1]Girolamo Cardano (1501 - 1576), matemático, médico, físico, filósofo e astrólogo de origem italiana.

[2]Raffaelle Bombelli (1526 - 1572), matemático e engenheiro, grande protagonista na compreensão dos números imaginários.

[3]Leonhard Euler (1707 - 1783), matemático suiço, que assumiu o compromisso pela padronização da matemática.

de z_1 por z_2 será dada por:

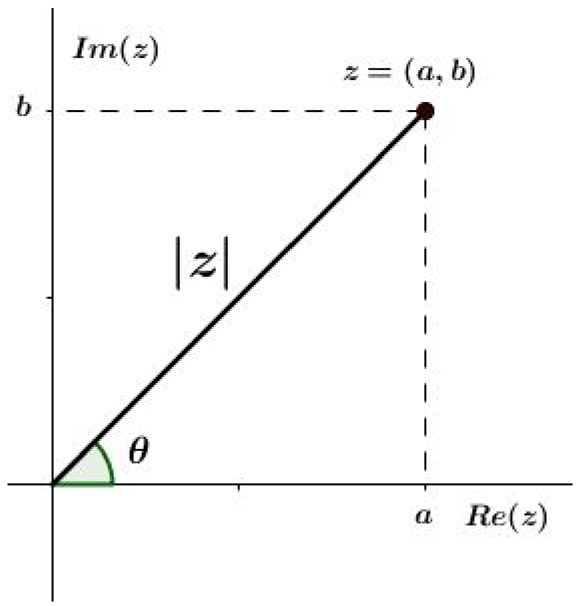
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

O quociente z dos números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, com $z_2 \neq 0$ será dado por $z = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$, ou seja, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, obtendo:

$$z = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{(a_2)^2 + (b_2)^2}.$$

Assim como representamos um número complexo na forma algébrica, podemos representar o na forma geométrica. Para isso, consideramos todo número complexo $z = a + bi$ como sendo um ponto $z = (a, b)$ no plano de Argand-Gauss[4]

Figura 3.1 – Representação de um Número Complexo no Plano de Argand-Gauss



Fonte: Autor

Considerando $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = arctan\frac{b}{a}$, sendo o ângulo entre o vetor (a, b) e o eixo real positivo - $Re(z)$ - (eixo polar), podemos obter a representação trigonométrica ou polar do número complexo z.

$$z = \rho\,(cos\theta + isen\theta)$$

Chamamos $|z| = \rho$ de módulo de z e θ o argumento de z.

Exemplo 3.1.1 *Vamos encontrar a forma trigonométrica do número complexo* $z = \sqrt{3} - i.$

[4]Plano de Argand-Gauss ou Plano Complexo, é uma adaptação do Plano Cartesiano para os números complexos, conforme ilustrado na Figura 3.1 e teve as contribuições dos matemáticos: Jean-Robert Argand (1768-1822), natural de Genebra e de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), natural de Brunswick na Alemanha.

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2$$
$$\theta = arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11\pi}{6}$$

Logo $z = 2\left(cos\frac{11\pi}{6} + isen\frac{11\pi}{6}\right)$, é a forma trigonométrica ou polar do número complexo.

Vamos trazer agora dois importantes resultados dentro do estudo dos números complexos, que por vez irão nos auxiliar na solução de algumas equações polinomiais abordadas mais a frente. São as duas conhecidas fórmulas de Moivre.

a) A primeira fórmula de Moivre

Seja $z = \rho\ (cos\theta + isen\theta)$, um número complexo na forma polar. A teoria garante que a potência n-ésima de z será dada por $z^n = \rho^n\ (cos(n\theta) + isen(n\theta))$
Demonstração: Fazendo a indução sobre n, vamos provar que $z^n = \rho^n\ (cos(n\theta)+isen(n\theta))$ é válida para todo n natural.

Para $n = 1$ é verdade, pois temos que,

$$z^1 = (\rho\ (cos(\theta) + isen(\theta))^1 = \rho^1\ (cos(\theta) + isen(\theta))^1 = \rho^1\ (cos(1\cdot\theta) + isen(1\cdot\theta)).$$

Agora, consideramos que a teoria seja válida para um certo número natural $n = k$, ou seja,

$$z^k = (\rho(cos(\theta) + isen(\theta)))^k = \rho^k(cos(k\theta) + isen(k\theta))$$

Queremos provar que a fórmula é válida para o sucessor de $n = k$, ou seja, para $n = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z^1 \Longrightarrow z^{k+1} = (\rho(cos(\theta) + isen(\theta)))^{k+1} \\ &= \rho^k(cos(k\cdot\theta) + isen(k\cdot\theta)) \cdot \rho(cos(\theta) + isen(\theta)) \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$z^{k+1} = \rho^{k+1}(cos(k\theta)\cdot cos(\theta) + icos(k\cdot\theta)\cdot sen(\theta) + isen(k\theta)\cdot cos(\theta) + i^2\cdot sen(k\theta)\cdot sen(\theta).$$

Considerando $i^2 = -1$, substituimos na expressão.

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= \rho^{k+1}(cos(k\theta)\cdot cos(\theta) + icos(k\theta)\cdot sen(\theta) + isen(k\theta)\cdot cos(\theta) - 1\cdot sen(k\theta)\cdot sen(\theta)) \\ &= \rho^{k+1}(cos(k\theta)\cdot cos(\theta) - sen(k\theta)\cdot sen(\theta) + i(sen(k\theta)\cdot cos(\theta) + cos(k\theta)\cdot sen(\theta))) \end{aligned}$$

Considerando as identidades trigonométricas da soma dos ângulos para as funções seno e cosseno, temos que:

$$sen(k\theta)\cdot cos(\theta) + cos(k\theta)\cdot sen(\theta) = sen(k\theta + \theta) = sen(\theta(k+1))$$

$$cos(k\theta) \cdot cos(\theta) - sen(k\theta) \cdot sen(\theta) = cos(k\theta + \theta) = cos(\theta(k+1))$$

Substituindo as identidades trigonométricas na expressão z^{k+1}, obtemos:

$$z^{k+1} = \rho^{k+1}(cos(\theta(k+1)) + isen(\theta(k+1))),$$

como queriamos demonstrar.

b) A segunda fórmula de Moivre

Dado o número complexo $w = \rho\ (cos\theta + isen\theta)$. Se z é uma raiz n-ésima de w, então z satisfaz a seguinte relação:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) com\ 0 \leq k \leq n-1. \tag{3.1}$$

Demonstração: Consideramos $i)\ \ z = r(cos(\alpha) + isen(\alpha))$ na sua forma polar, e sendo raiz do número complexo $ii)\ w = \rho\ (cos(\theta) + isen(\theta))$ de tal forma, que $iii)\ z^n = w$. Substituindo $i)$ e $ii)$ em $iii)$ temos

$$(r(cos(\alpha) + isen(\alpha))^n = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)).$$

Pela primeira fórmula de Moivre obtemos

$$r^n(cos(n\alpha) + isen(n\alpha)) = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)).$$

Para igualdade acima ser satisfeita entre números complexos, observamos que os módulos precisam ser iguais e os argumentos congruentes. Desse modo, $r^n = \rho \Longrightarrow\ r = \sqrt[n]{\rho}$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$. Entretanto, para buscarmos raízes distintas, percebemos que $0 \leq \alpha < 2\pi$, nesse caso, é preciso que $0 \leq k \leq n-1$. Logo,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \text{ com } 0 \leq k \leq n-1.$$

Como queríamos demonstrar.

Observamos que se z é uma raiz n-ésima de ω e $W = cos\dfrac{2\pi}{n} + isen\dfrac{2\pi}{n}$. Então, as raízes n-ésimas de ω serão $z \cdot W_n^r, r = 1, ..., n$.

A demonstração pode ser observada pelo fato de que $(z \cdot W_n^r)^n = z^n \cdot (W_n^n)^r = z \cdot 1^r = z$. Logo, $z \cdot W_n^r$ é raiz n-ésima de ω, para todo $r = 1, ..., n$.

Agora tomamos $\alpha \in \mathbb{C}$ como sendo uma raiz n-ésima de ω. Então, $\alpha^n = \omega = z^n$ e $1 = \alpha^n \cdot z^{-n} = (\alpha \cdot z^{-1})^n$ e $\alpha \cdot z^{-1}$ é uma raiz n-ésima da unidade. Desse modo, existe $r = 0, ..., n-1$, de maneira que $\alpha \cdot z^{-1} = W_n^r$, ou seja, $\alpha = z \cdot W_n^r$ para algum $r = 1, ..., n$.

De forma restrita, pensamos nas raízes cúbicas de $\omega = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))$, logo $W = cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ e as raízes serão determinadas por:

$$\begin{cases} z_o = \sqrt[3]{\rho}(\cos\frac{\theta}{3} + isen\frac{\theta}{3}) \\ \qquad z_1 = z_oW \\ \qquad z_2 = z_oW^2 \end{cases} \tag{3.2}$$

além disso,

$$1 + W + W^2 = \frac{1 - W^3}{1 - w} = 0$$

assim podemos concluir que:

$$z_o + z_oW + z_oW^2 = z_o(1 + W + W^2) = z_o \cdot 0 = 0$$

ou seja, a soma das três raízes cúbicas de um número complexo resulta sempre em zero.

Exemplo 3.1.2 *Vejamos, as raízes cúbicas de* $\omega = 2 + 11i$.

As raízes são dadas por

$$\begin{cases} z_o = 2 + i \\ z_1 = z_oW = (2 + i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)i \\ z_2 = (2 + i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i \end{cases}$$

Percebemos que, $2 + i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)i + \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i = 0$.

3.2 POLINÔMIOS

Nessa seção, vamos trazer algumas definições, teoremas e exemplos acerca de polinômios. Para tanto, examinamos parte da obra de Gonçalves (1979). Essa abordagem se faz necessária, uma vez que trataremos, na próxima seção, das equações com característica de polinômio.

Definição 3.2.1 *Um polinômio complexo na indeterminada* x*, está definido por uma expressão formal do tipo:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k,$$

sendo $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ *números reais, chamados de coeficientes, em especial* a_n *é chamado de coeficiente lider de* p*,* $a_n \neq 0$ *e* n *é um número inteiro não negativo.*

Exemplo 3.2.1 *As expressões:* $p_1(x) = 10$*,* $p_2(x) = 2x + \sqrt{2}$ *e* $p_3(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x - 8$ *são exemplos de polinômios na indeterminada* x.

Definição 3.2.2 *Chamamos um polinômio* $p(x) = 0 + 0x + ... + 0x^n = 0$ *de identicamente nulo se e somente se* $a_i = 0$*,* $i \in \mathbb{N}$*. Definimos um polinômio constante* a*, como sendo um polinômio* $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$*, onde* $a_0 = a$ *e* $a_i = 0, \forall\, i \geq 1$.

Definição 3.2.3 *Se* $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ *é tal que* $a_n \neq 0$*, dizemos que* n *é o grau do polinômio* $p(x)$*, e portanto, indicamos o grau de* $p(x)$ *por* $gr\ p(x) = n$.

A partir, da Definição 3.2.2 e 3.2.3, salientamos que o polinômio nulo não possui grau definido e o polinômio constante possui grau zero.

Definição 3.2.4 *Dizemos que os polinômios de mesmo grau,* $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *e* $p'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$*, são idênticos quando seus coeficientes correspondentes são iguais, isto é*

$$p = p' \Leftrightarrow a_k = b_k, k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Definição 3.2.5 *Considerando o polinômio* $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ *e* $p'(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$ *definimos:*
$p(x) + p'(x) = c_1 + ... + c_k x^k$*,* $c_i = (a_i + b_i) \in \mathbb{C}$*, para* $i = 1, ..., k =$ *máx{*n, m*}*
$p(x) \cdot p'(x) = c_0 + ... + c_k x^k$*,* $c_0 = a_0 b_0$*,* $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$*,* $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$*,...,* $c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + ... + a_{i-1} b_1 + a_i b_0$*,* $i = 0, ..., k = m + n$*.*

Definição 3.2.6 *Seja* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ *um polinômio com coeficientes reais, definimos a avaliação de* p *em* z*, com* $z \in \mathbb{C}$*, como sendo o número complexo:*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + ... + a_1 z + a_0,$$

ou seja, substituimos a indeterminada x *por* z*.*

Quando z produzir $p(z) = 0$ temos a seguinte definição:

Definição 3.2.7 *Definimos a raiz do polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *como sendo* z*, com* $z \in \mathbb{C}$*, de tal forma que* $p(z) = 0$*, ou seja,* $a_n (z)^n + a_{n-1} (z)^{n-1} + a_{n-2} (z)^{n-2} + ... + a^2 (z)^2 + a_1 (z) + a_0 = 0$*.*

Exemplo 3.2.2 *São raízes do polinômio* $p(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 11$ *os números complexos* $z_1 = -\sqrt{2} + 3i$ *e* $z_2 = -\sqrt{2} - 3i$*, pois* $p(z_1) = (-\sqrt{2} + 3i)^2 + 2\sqrt{2}(-\sqrt{2} + 3i) + 11 = 0$ *e* $p(z_2) = (-\sqrt{2} - 3i)^2 + 2\sqrt{2}(-\sqrt{2} - 3i) = 0$*.*

Lema 3.2.1 *(Divisão Euclidiana). Dados dois polinômios não-nulos* p *e* d*, existem dois polinômios únicos* q *(o quociente) e* r *(o resto) tais que*

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x), \text{ com } gr(r) < gr(d) \text{ ou } r(x) = 0.$$

Vamos primeiramente provar a existência. Consideramos:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \text{ e } d(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m.$$

Se $p(x) = 0$ é suficiente tomar $q(x) = r(x) = 0$. Agora vamos supor $p(x) \neq 0$ (grau de $p = n$). Então teremos dois casos a considerar. O primeiro, se $n < m$, basta tomar $q(x) = 0$ e $r(x) = p(x)$. O segundo caso, se $n \geq m$. Para isso, vamos considerar o polinômio $p_1(x)$ definido por:

$$p(x) = a_n b_m^{-1} \cdot d(x) + p_1(x). \tag{3.3}$$

Observamos que o $gr\ p_1 < gr\ p$ e em seguida vamos demonstrar o teorema por indução sobre $gr\ p = n$.

Para $n = 0$, $n \geq m \Longrightarrow m = 0$, dessa forma, concluimos que $p(x) = a_0 \neq 0$, e $d(x) = b_0 \neq 0$ e portanto, teremos, $p(x) = a_0 b_0^{-1}$ e $r(x) = 0$.

Isolando $p_1(x)$ na Equação 3.3, decorre da hipótese de indução que: $\exists\ q_1(x), r(x)$ de tal forma que:

$$p_1(x) = q_1(x) \cdot d(x) + r_1(x),$$

onde $r_1(x) = 0$ ou $gr\ r_1(x) < gr\ d(x)$. Em virtude disso, temos que:

$$p(x) = (q_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m}) d(x) + r_1(x),$$

agora tomando $q(x) = q_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m}$ e $r_1(x) = r(x)$, temos provado, portanto, a existência dos polinômios $q(x)$ e $r(x)$ de tal forma que $p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, com $r(x) = 0$ ou $grr(x) < grd(x)$.

Pelo método de redução ao absurdo, vamos provar agora a unicidade de p e r. Imaginamos a existência de dois pares de polinômios q_1 e r_1, q_2 e r_2 de forma que

$$p(x) = q_1(x) \cdot d(x) + r_1(x),\ gr(r_1) < gr(d) \tag{3.4}$$

$$p(x) = q_2(x) \cdot d(x) + r_2(x),\ gr(r_2) < gr(d) \tag{3.5}$$

Agora, subtraindo 3.4 de 3.5, obtemos a equação seguinte

$$d(x) \cdot (q_2(x) - q_1(x)) = r_1(x) - r_2(x). \tag{3.6}$$

As condições $gr(r_1) < gr(d)$ e $gr(r_2) < gr(d) \Longrightarrow gr(r_1 - r_2) < gr(d)$.

Entretanto, o lado esquerdo da Equação 3.6 também deve ter grau menor que d, o que só ocorre se $q_2 - q_1$ for o polinômio nulo:

$$gr(d(q_2 - q_1)) < gr(d) \Longrightarrow q_2 - q_1 = 0 \Longrightarrow q_1 = q_2.$$

Retornando a substituição desse resultado na Equação 3.6, concluimos que $r_2 - r_1 = 0$ $\Longrightarrow r_2 = r_1$, provando dessa forma a unicidade.

Corolário 3.2.1 *Seja p um polinômio não constante de grau n e z um número complexo, temos que:*

$$p(z) = 0 \text{ se e somente se } x - z \text{ divide } p(x),$$

ou seja, podemos escrever

$$p(x) = (x - z) \cdot q(x),$$

sendo q um polinômio de grau $n - 1$.

Ao aplicar o Lema 3.2.1 com $d(x) = x - z$, temos:

$$p(x) = (x - z)q(x) + r(x) \Longrightarrow p(z) = 0q(z) + r(z) = 0 \Longrightarrow r(z) = 0$$

O Lema 3.2.1 nos garante ainda que $gr(r) < gr(d) = 1$, o que resta concluir que r é constante, um polinômio nulo. Observamos agora que $p = d \cdot q \Longrightarrow gr(p) = gr(d) + gr(q) \Longrightarrow n = 1 + gr(q)$, demonstrando que $gr(q) = n - 1$.

3.2.1 O algoritmo de Briot-Ruffini

O algoritmo que vamos trazer nesse espaço é um dispositivo prático para determinar a divisão de um polinômio de grau $n \geq 1$ por um polinômio do tipo $x - u$ e pode ser encontrado em Domingues e Iezzi (2003, p.299).

Consideramos $p(x)$ escrito na seguinte forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \text{ com } (a_n \neq 0),$$

e o quociente representado por

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0.$$

Indicando o resto por r, temos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
&a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \\
&= (x - u)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0) + r \\
&= b_{n-1}x^n - ub_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-1} - ub_{n-2}x^{n-2} + ... - ub_2 x^2 + bx^2 - ubx + b_0 x - \\
&ub_0 + r.
\end{aligned}$$

Pelo princípio de identidade de polinômios temos:

$$\begin{aligned}
a_n &= b_{n-1},\\
a_{n-1} &= b_{n-2} - ub_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + ub_{n-1},\\
&\vdots\\
a_1 &= b_0 - ub_1 \Rightarrow b_0 = a_1 + ub_1,\\
a_0 &= r - ub_0 \Rightarrow r = a_0 + ub_0.
\end{aligned}$$

Assim sendo, o quociente e o resto podem ser obtidos mediante o dispositivo abaixo, em que o primeiro elemento da terceira linha é a_n e os demais são as somas dos elementos correspondentes da primeira linha com o produto de u pelo elemento da terceira linha e coluna anterior.

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0	u
	ub_{n-1}	ub_{n-2}	...	ub_1	ub_0	
$a_n = b_{n-1}$	$ub_{n-1} + a_{n-1} = b_{n-2}$	$ub_{n-2} + a_{n-2} = b_{n-3}$	...	$a_1 + ub_1 = b_0$	$a_0 + ub_0 = r$	

Exemplo 3.2.3 *Vamos determinar a divisão de $x^4 + 1$ por $x + 2$.*

Utilizando o método de Briot-Ruffini, temos que,

1	0	0	0	1	-2
1	$-2 \cdot 1 + 0$	$-2 \cdot (-2) + 0$	$-2 \cdot 4 + 0$	$-2 \cdot (-8) + 1$	
1	-2	4	-8	17	

Portanto, o quociente é dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, e o resto $r = 17$.

Exemplo 3.2.4 *Vamos determinar a divisão de $x^3 - 7x^2 + 17x - 15$ por $x - 3$.*

Novamente pelo algoritmo de Briot-Ruffini, obtemos que,

1	-7	17	-15	3
1	$3 \cdot 1 - 7$	$3 \cdot (-4) + 17$	$3 \cdot 5 - 15$	
1	-4	5	0	

Logo, o quociente é dado por $q(x) = x^2 - 4x + 5$ e o resto $r = 0$. Indicando assim, que $x = 3$ é uma raiz do polinômio $x^3 - 7x^2 + 17x - 15$.

3.3 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Essencialmente nessa seção, vamos tratar das equações em geral com característica de polinômio, objeto este, estudado anteriormente. Iniciaremos, trazendo algumas definições e em seguida algumas proposições com base na obra de Domingues e Iezzi (2003), como suporte à solução das equações polinomiais .

Definição 3.3.1 *Uma equação polinomial com coeficientes complexos é uma expressão do tipo*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

com n um número natural, x e $a_k \in \mathbb{C}$, para k $\in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Definição 3.3.2 *Consideremos que $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz ou zero da equação polinomial $p(x) = 0$ se $p(z) = 0$.*

No que concerne as raízes de uma equação polinomial, vejamos o que o seguinte teorema nos garante. Sua demonstração, pode ser encontrada em Alves (2015, p.44).

Teorema 3.3.1 *(Teorema Fundamental da Álgebra). Toda equação polinomial, nos complexos, de grau n, com $n \geq 1$, possui exatamente n raízes complexas (distintas ou não).*

Observamos que a demonstração original do Teorema Fundamental da Álgebra, foi feita por Carl Friedrich Gauss em seu trabalho de tese do doutorado no ano de 1799. A partir da prova desse teorema, temos estabelecido diretamente o seguinte corolário:

Corolário 3.3.1 *Todo polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$, com $a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{C}$ e de grau $n \geq 1$ pode ser fatorado na forma*

$$p(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)...(x - z_n),$$

onde n é o coeficiente lider de p e $z_1, z_2, ..., z_n$ são raízes de p.

Demonstração: Vamos provar pelo Método da Indução Finita.
Base de indução: Seja $n = 1$ e $p(x) = a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$. Então

$$p(x) = a_n(x - z_1), \text{ onde } a_n = a_1 \text{ e } z_1 = -\frac{a_0}{a_1}$$

Hipótese de Indução: Vamos supor que o teorema é válido para algum polinômio $q(x)$ de grau $n - 1$, com $n \geq 2$.

Seja $p(x)$ um polinômio de grau n. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra $p(x)$ possui uma raiz complexa $z_n \in \mathbb{C}$, ou seja $p(z_n) = 0$ e dessa forma, pelo Corolário 3.2.1, existe um polinômio $q(x)$ de grau $n - 1$ tal que

$$p(x) = (x - z_n)q(x), \; x \in \mathbb{C}$$

Como $q(x)$ possui grau $n - 1$, pela hipótese de indução temos

$$q(x) = a_n(x - z_1)...(x - z_{n-1})$$

sendo $z_1, ..., z_{n-1}$ raízes de $q(x)$, não necessariamente distintas, assim

$$p(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)...(x - z_n)$$

Dessa forma pelo Princípio da Indução Finita podemos afirmar que o corolário é verdadeiro.

O teorema posterior presume que, caso existirem, as raízes complexas não reais de um polinômio $p(x)$ ocorrerão aos pares.

Teorema 3.3.2 *Se um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, for raiz da equação polinomial $p(x) = 0$, de coeficientes reais, o seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ será também raiz da mesma equação.*

Demonstração: Consideremos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$, com $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ e $a_0 \in \mathbb{R}$ e a seguinte propriedade dos números complexos:

$$a_k \overline{z}^k = \overline{a_k}\overline{z}^k = \overline{a_k}\overline{z^k} = \overline{a_k z^k},$$

para cada k = 0, 1, 2, ..., n e z $\in \mathbb{C}$

Então podemos escrever $p(\overline{z})$ na forma:

$p(\overline{z}) = a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + a_{n-2}\overline{z}^{n-2} + ... + a_1 \overline{z} + a_0$
$p(\overline{z}) = \overline{a_n}\overline{z}^n + \overline{a_{n-1}}\overline{z}^{n-1} + ... + \overline{a_1}\overline{z} + \overline{a_0}$
$p(\overline{z}) = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + ... + \overline{a_1}\overline{z} + \overline{a_0}$
$p(\overline{z}) = \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_1 x + a_0}$
$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0$
como desejávamos demonstrar.

Corolário 3.3.2 *Todo polinômio com coeficientes reais, de grau ímpar, tem uma raiz real.*

Demonstração: Dado um polinômio de grau ímpar, suponhamos que todas as suas raízes sejam complexas não reais. Pelo Teorema 3.3.2, elas formariam pares com seus conjugados. E, portanto, teríamos um número par de raízes. Pelo Teorema 3.3.1, o polinômio teria grau par, o que é falso. Portanto, no mínimo uma raiz precisa ser real.

Definição 3.3.3 *Se z é considerada uma raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$) de $p(x)$ então podemos escrever $p(x) = (x - z)^m q(x)$, com $q(z) \neq 0$.*

Teorema 3.3.3 *(Teorema das Raízes Racionais). Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a \neq 0$, $n > 0$ e de coeficientes inteiros. Consideremos um número racional $\frac{f}{g}$, de tal forma que f e $g \in \mathbb{Z}^*$ e sejam primos entre si. Dessa forma, se $z = \frac{f}{g}$ for raiz de $p(x)$, então f é divisor de a_0 e g é divisor de a_n.*

Demonstração: Queremos demonstrar que f é divisor de a_o e g é divisor de a_n (Tese). Nossa hipótese é que $\frac{f}{g}$ é raiz de $p(x)$, com g, $f \in \mathbb{Z}^*$ e primos entre si, ou seja, o Máximo Divisor Comum - M.D.C. $(f, g) = 1$.

Por hipótese $\frac{f}{g}$ é raiz de $p(x)$, então $p(\frac{f}{g}) = 0$. Logo,

$$a_n(\frac{f}{g})^n+a_{n-1}(\frac{f}{g})^{n-1}+...+a_2(\frac{f}{g})^2+a_1(\frac{f}{g})+a_0=0 \Leftrightarrow a_n\frac{f^n}{g^n}+a_{n-1}\frac{f^{n-1}}{g^{n-1}}+...+a_2\frac{f^2}{g^2}+a_1\frac{f}{g}+a_0=0$$

Multiplicando a expressão acima por g^n, temos:

$$a_n(\frac{f^n}{g^n})g^n + a_{n-1}(\frac{f^{n-1}}{g^{n-1}})g^n + ... + a_2(\frac{f^2}{g^2})g^n + a_1(\frac{f}{g})g^n + a_0g^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_nf^n + a_{n-1}f^{n-1}g + ... + a_2f^2g^{n-2} + a_1fg^{n-1} + a_0g^n = 0 \tag{3.7}$$

Agora, somando o termo $-a_0g^n$ aos membros da Equação 3.7, obtemos:

$$a_nf^n + a_{n-1}f^{n-1}g + ... + a_2f^2g^{n-2} + a_1fg^{n-1} = -a_0g^n \tag{3.8}$$

Como o termo f é comum no lado esquerdo da Equação 3.8, então colocando-o em evidência, temos a seguinte expressão:

$$f(a_nf^{n-1} + a_{n-1}f^{n-2}g + ... + a_2fg^{n-2} + a_1g^{n-1}) = -a_0g^n.$$

Por fim, multiplicando a equação anterior por $\frac{1}{f}$, temos que:

$$a_nf^{n-1} + a_{n-1}f^{n-2}g + ... + a_2fg^{n-2} + a_1g^{n-1} = \frac{-a_0g^n}{f}. \tag{3.9}$$

Observamos que o membro esquerdo da Equação 3.9 representa um número inteiro, pelo fato que os coeficientes são números inteiros, f e g são números inteiros e $n > 0$. Então o termo do lado direito é um número inteiro, matematicamente representado por $-a_0\frac{g^n}{f}$. Contudo, para que isso ocorra f precisa dividir a_0, uma vez que f e g são primos entre si.

De modo análogo, somando o termo $-a_nf^n$ a ambos os membros da Equação 3.7 temos:

$$a_{n-1}f^{n-1}g + ... + a_2f^2g^{n-2} + a_1fg^{n-1} + a_0g^n = -a_nf^n \tag{3.10}$$

Percebemos que g é fator comum dos termos do membro esquerdo da Equação 3.10 e colocando-o em evidência, temos:

$$g(a_{n-1}f^{n-1} + ... + a_2f^2g^{n-3} + a_1fg^{n-2} + a_0g^{n-1}) = -a_ng^n.$$

Por fim, multiplicando a equação acima por $\frac{1}{g}$, temos:

$$a_{n-1}f^{n-1} + ... + a_2f^2g^{n-3} + a_1fg^{n-2} + a_0g^{n-1} = -a_n\frac{f^n}{g} \tag{3.11}$$

Vejamos, o membro esquerdo da Equação 3.11 representa um número inteiro, porque os coeficientes são números inteiros, f e g também são números inteiros e $n > 0$.

Logo, o termo do membro direito é um número inteiro, ou seja, $-a_n \frac{f^n}{q} \in \mathbb{Z}$. No entanto, para que isso ocorra, g precisa dividir a_n, uma vez que f e g são primos entre si.

Exemplo 3.3.1 *Quais são as possíveis raízes da equação polinomial* $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$*?*

Tomando f como sendo os divisores de $a_0 = 12$, então $f = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Agora, tomando g como sendo os divisores de $a_n = 1$, obtemos $g = \pm 1$.

Considerando que as possíveis raízes serão da forma $\dfrac{f}{g}$, com f e g primos entre si, teremos as possibilidades: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, e ± 12. Substituindo, as possibilidades encontradas, na equação polinomial $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$, identificamos que -1, 3 e 4 tornam a equação nula, o que nos permite concluir, que $x = -1$, $x = 3$ e $x = 4$ são soluções da equação.

Pontuamos que a todo momento falamos da possibilidade de $\dfrac{f}{g}$ ser raiz. Em virtude, que o Teorema 3.3.3 apenas garante que se $\dfrac{f}{g}$ for raiz, com f e g primos entre si, então f é um divisor de a_0 e g um divisor de a_n, do contrário nada podemos afirmar.

3.4 AS RELAÇÕES DE GIRARD

Relacionando, pela soma e produto, as raízes com os coeficientes, ambos de uma mesma equação, Albert Girard (1595-1632), apresentou seu método capaz de encontrar as raízes de uma equação polinomial. Embora nascido na França, viveu grande parte de sua vida na Holanda, estudando e fazendo parte do exército de Frederico Henrique de Nassau, como engenheiro militar.

Segundo Domingues e Iezzi (2003), Girard foi o primeiro matemático, a ter uma percepção de que o número de raízes associados a um polinômio com coeficientes numéricos é igual ao seu grau, desde que, considerasse os números negativos e complexos.

Além disso, ao tratar dos números negativos dentro da geometria, com um aspecto contrário associado aos números positivos, Girard colaborou para a compreensão e aceitação desses números.

Para desenvolver as relações, consideramos primeiramente a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e x_1 e x_2 como sendo suas raízes. Desse modo, podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{a}{a}(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Com base no princípio da identidade entre polinômios, tiramos as relações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Faremos de modo análogo para equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$. Primeiramente consideramos suas raízes como sendo x_1, x_2 e x_3 e escrevemos a equação em sua forma fatorada.

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \Leftrightarrow \\ \frac{a}{a}x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = \frac{a}{a}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \Leftrightarrow \\ x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \end{aligned}$$

Multiplicando o segundo membro da equação acima e agrupando os termos semelhantes temos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

E as relações entre raízes e coeficientes ficam estabelecidos da seguinte maneira

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Para generalizar as Relações de Girard para uma equação de grau $n \geq 1$, vamos considerar o polinômio:

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0 = 0, a_n \neq 0$ para o qual são raízes $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ e escrevemos sua forma fatorada,

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n).$$

Multiplicando e agrupando os termos semelhantes, obtemos

$$
\begin{aligned}
a_n x^n - a_n \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)}_{S_1} x^{n-1} + \\
a_n \underbrace{(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n)}_{S_2} x^{n-2} - \\
a_n \underbrace{(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n)}_{S_3} x^{n-3} + ... + \\
(-1)^k a_n S_k x^{n-k} + ... + (-1) a_n \underbrace{(x_1x_2x_3...x_n)}_{S_n}
\end{aligned}
$$

Trabalhando com o princípio da identidade entre polinômios, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
S_1 &= x_1 + x_2 + \dots x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
S_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
S_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
&\vdots \\
S_n &= x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}
\end{aligned}
$$

No entanto, as n relações de Girard, não são suficentes para solucionar uma equação polinomial de grau n. Em determinados casos, é preciso outras informações como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.4.1 *Utilizando as Relações de Girard vamos resolver a equação* $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$.

Pelas Relações de Girard temos que:
$i)$ $x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 + x_3 = 1 - x_1$
$ii)$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -4$
$iii)$ $x_1x_2x_3 = -2 \Longrightarrow x_2x_3 = \dfrac{-2}{x_1}$

Substituimos (i) e (iii) em (ii)
$x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = -4$
$x_1(1 - x_1) - \frac{2}{x_1} = -4$ (Multiplicamos por x_1 a equação)
$x_1^2(1 - x_1) - 2 = -4x_1$
$x_1^2 - x_1^3 - 2 = -4x_1$
$-x_1^3 + x_1^2 + 4x_1 - 2 = 0$ (Multiplicando por (-1)), obtemos: $x_1^3 - x_1^2 - 4x_1 + 2 = 0$.

Podemos perceber que recaímos na equação inicialmente dada no problema, no entanto representada em x_1. Nesse caso, precisaríamos mais informações, ou seja, as informações produzidas pelas Relações de Girard não foram suficientes para determinarmos as raízes da equação.

Exemplo 3.4.2 *Sabendo que a soma de duas raízes é igual a* 1*, vamos resolver a equação* $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$.

Com base nas informações do problema e nas Relações de Girard temos:
$i)$ $x_1 + x_2 = 1$
$ii)$ $x_1 + x_2 + x_3 = -3$
$iii)$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -6$
$iv)$ $x_1x_2x_3 = 8$

Substituindo i em ii encontramos $x_3 = -4$. Agora substituindo $x_3 = -4$ em iii e iv temos o sistema simplificado:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$. Portanto, temos como solução da equação $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = -4$.

4 SOLUÇÕES POR RADICAIS

4.1 EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

A equação polinomial do primeiro grau, como a conhecemos hoje, se apresenta na forma $ax + b = 0$, em que x é a incógnita e a e b representam números reais, $a \neq 0$.

A solução pode ser obtida da seguinte maneira:

$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax + b - b = 0 - b \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow \dfrac{ax}{a} = \dfrac{-b}{a} \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$.

Portanto, a solução é dada por $x = -\dfrac{b}{a}$. Percebemos que todas as operações realizadas em ambos os membros, garantem a preservação da equação inicial dada.

Contudo, nem sempre foi trivial resolver uma equação do primeiro grau. Para entender um pouco melhor, voltamos a mais de três milênios no tempo. Mais precisamente para os documentos matemáticos encontrados com data de 1650 a.C., são eles: Papiro de Ahmes (ou Rhind) e Papiro de Moscou, ambos egípcios.

Segundo Teixeira (2017), há uma provável chance que tenham existido outros papiros, no entanto, estes foram os únicos que sobreviveram ao tempo. E neles, são possíveis identificar os primeiros registros de equações do primeiro grau, embora, em uma aparência que não corresponde a sua verdadeira natureza.

Talvez a dificuldade em resolver algumas equações do primeiro grau, estava na limitação do simbolismo para a época e na ausência de uma fómula, como conhecemos hoje. Entretanto, dispunham de uma artimanha muito engenhosa, conhecida como "Regra da Falsa Posição".

Apresentamos um problema usando essa regra.

> Por exemplo: qual o número que somado à sua terça parte dá 16?
> Pela Regra da Falsa Posição, fazia-se uma hipótese inicial qualquer (que fosse conveniente) a respeito do número e verificava-se o que ocorria. Suponhamos, em nosso caso, que tal número fosse 6. Ora, 6 somado com a sua terça parte dá 6 + 2 = 8, exatamente a metade dos 16 que deveria dar. Portanto, o número procurado é o dobro de 6, ou seja, 12. (TEIXEIRA, 2017, p. 04).

Entretanto, tomamos um exemplo um pouco mais elaborado, podemos dizer assim. Um problema do papiro Ahmes:[1] Uma quantidade, somada a seus $\dfrac{2}{3}$, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é esta quantidade?

Hoje, sem dificuldade, escreveríamos: $x + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{7}x = 33$, ou seja, $\dfrac{97}{42}x = 33$. Contudo, percebemos que sem utilizar o nosso conhecimento atual, apenas a Regra

[1] Problema encontrado no papiro de Ahmes, segundo o autor Garbi (2010).

da Falsa Posição, buscaríamos resolver por tentativas seguidas de erros até encontrar a quantidade desconhecida, o que poderia demandar um bom tempo de dedicação ao problema.

Enfim, quando nos propomos hoje resolver as equações do primeiro grau, com as ferramentas que dispomos é algo muito tranquilo. Por outro lado, essa tranquilidade é fruto do trabalho de vários matemáticos que não se opuseram a lidar com números conhecidos ou não, ao longo de séculos.

4.2 EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Vamos abordar, de modo histórico, alguns métodos empregados na resolução das equações do segundo grau ao longo de algumas civilizações. Nos basearemos no trabalho de Silva e Victer (2017) e faremos uma caminhada até a Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau, no Brasil chamada de Fórmula de Bhaskara e as Fórmulas de Viète, as quais, receberão um enfoque um pouco maior e não apenas histórico.

Começando pelos babilônios, percebemos que, por meio de um estilo retórico, registrado através de sua escrita cuneiforme[2] e em um sistema de numeração posicional de base 60, documentavam alguns problemas, os quais representavam o desenvolvimento da solução da equação do segundo grau. A solução tem por base um raciocínio muito semelhante ao pensamento dos hindus, por volta de 3 mil anos depois, o chamado "completamento de quadrados". Estes registros, com data de 1700 a.C., integram o que podemos chamar de álgebra babilônica.

Avançando para o campo da civilização grega, tivemos grandes matemáticos, como: Tales de Mileto, Pitágoras e Euclides de Alexandria - responsável pela notável obra, chamada "Os Elementos"[3]. A paixão grega pela Geometria, em conjunto com o sistema de numeração literal grego, são fatores que possivelmente contribuíram para a dificuldade na utilização dos números.

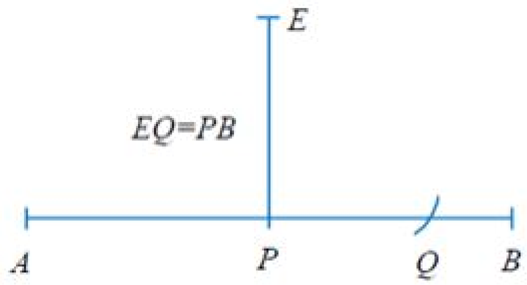
Desse fato, muitos problemas dos gregos eram interpretados de modo geométrico, inclusive as equações e seu modo de resolver. Acompanhamos a seguir a resolução da equação $x^2 - 10x + 9 = 0$.

> Trace o segmento $AB = 10$. Por P, ponto médio de AB, levante o segmentos perpendicular $PE = 3$ (igual á raiz quadrada de 9) e, com centro em E e raio PB, trace um arco de circunferência que corta AB no ponto Q. A raiz desejada

[2] Escrita cuneiforme: estilo de escrita utilizada pelos babilônios. Os registros eram feitos com marcas de estiletes em placas de argilas, as quais posteriormente recebiam cozimento ou eram secadas ao sol, para aumentar seu tempo de vida.

[3] Os Elementos: obra composta por 13 livros, destes os 6 primeiros versam sobre geometria plana, os próximos 3 sobre diferentes tipos de números, 1 sobre segmentos incomensuráveis e os 3 restantes sobre Geometria no espaço.

será dada pelo comprimento AQ.



(FRAGOSO, 2000, p.21).

Da construção, concluimos, que $AQ = \dfrac{10}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{10}{2}\right)^2 - (\sqrt{9})^2} = 9$, ou seja, a raiz é igual a 9.

Do tratamento das equações do segundo grau nas mãos dos gregos, passamos para as mãos dos árabes. Nesse contexto, destacamos a figura do grande matemático - Al-Khwarizmi - segundo Alves e Machado (2016), mulçumano, que viveu no período de 780 d.C. á 850 d.C. e teve sua vida dedicada, além da matemática, à geografia e a astronomia.

Na epóca, o grande interesse de Al-Mamum[4] era transformar Bagdá no maior centro científico do mundo. Para tanto, reuniu grandes sábios entre eles Al-Khwarizmi.

Segundo Boyer (1974), as equações de Al-Khwarizmi eram formadas por três espécies de quantidades: raízes, quadrados e números (x, x^2 e números), que precisavam ser compreendidas, a priori, ao desenvolvimento da álgebra das equações do próprio Al-Khwarizmi. Todas essas informações, e muitas outras, eram encontradas em sua importante obra chamada Al-jabr wal muqãbalah, um livro, cujo de seu nome originou o ramo da matemática chamado Álgebra.

O método consistia em "completar quadrados", primeiramente reduzindo as equações lineares ou quadráticas em um dos seis formatos possíveis descritos a seguir, exigindo que essas equações possuíssem coeficientes positivos.

1º Quadrados iguais a raízes. $(ax^2 = bx)$

2º Quadrados iguais a um número. $(ax^2 = c)$

3º Raízes iguais a um número. $(bx = c)$

4º Quadrados e raízes iguais a um número. $(ax^2 + bx = c)$

5º Quadrados e um número iguais a raízes. $(ax^2 + c = bx)$

6º Raízes e um número iguais a quadrados. $(bx + c = ax^2)$.

Embora, na época não se usasse ainda as notações algébricas conhecidas e utilizadas atualmente, o desenvolvimento do seu método evidenciava um pensamento algébrico no formato generalizado, o qual é extremamente coerente com a álgebra que conhecemos

[4]Al Mamum - (786 - 833) - Foi um califa (guia temporal espiritual) em Bagdá que reinou entre os anos de 813 e 833.

e utilizamos.

A importância da solução da equação do segundo grau dada pelos hindus - (Bhaskara) e pelos europeus - (entre eles Viète) será mostrada de modo particular, a seguir.

4.2.1 Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau

A matemática, a qual nos reportamos como "indiana", teve suas origens no Sul da Ásia, conforme Silva e Victer (2017). E ainda, os autores defendem que os problemas matemáticos indianos possuíam alguma fonte de inspiração nos babilônios e gregos, documentando seus registros em forma de verso.

Bhaskara (1114 - 1185) representa o último matemático medieval da India com grande relevância, tendo uma significativa importância no processo de solução da equação do segundo grau, como veremos na sequência do texto, entretanto, não foi o único matemático ao longo da história.

Um avanço que sustenta a busca por uma solução de equações quadráticas, hoje, relacionando os coeficientes da equação. Desse modo, podendo encontrar suas raízes, ou até mesmo concluir que determinadas equações não "fazem sentido" em alguns contextos. Mas, para o período de Bhaskara, tudo era construído em forma de versos, o que talvez por momento o dificultara a estabelecer uma fórmula geral através dos coeficientes.

Por conta disso, a escrita da fórmula, como conhecemos hoje, aconteceu mais tarde com Françóis Viète (1540 - 1603), Thomas Harioot (1560 - 1621) e René Descartes (1596 - 1650) em um momento que podemos chamar de transformação no campo da Álgebra.

Portanto, a solução expressa por radicais da equação do segundo grau, teve a contribuição de vários matemáticos até chegar no formato que a conhecemos hoje. Em virtude disso, chamaremos de Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau, assim como é conhecida em outras literaturas matemáticas. Destacamos que apenas é chamada de Fórmula de Bhaskara na literatura matemática brasileira.

Acompanhamos, a partir de algumas manipulações algébricas, sobre a equação genérica do segundo grau, à chegada na fórmula que expressa sua solução.

Ao tomarmos a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b e $c \in R$ e $a \neq 0$) e dividindo-a por a temos:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Longrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

somando $-\dfrac{c}{a}$ em ambos os membros, obtemos

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a} \Longrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

somamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros e ficamos com a seguinte expressão,

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 \Longrightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Organizando a equação, temos

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \Longrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}.$$

Na sequência, extraímos a raiz quadrada em ambos os lados, e obtemos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

.

Logo, chegamos na Fórmula Resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$.

Considerando $b^2 - 4ac = \Delta$, podemos reescrever a fórmula, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. O Δ é chamado discriminante da equação e representa um número real.

Como nos encontramos presos a uma operação de raiz quadrada, podemos nos deparar com números não reais. Dessa forma, através do estudo do discriminante Δ podemos analisar os tipos de raízes produzidos pela própria variação do Δ, ou seja, os possíveis valores para x.

1ª ocorrência: Δ assume um número real positivo ($\Delta > 0$).

Lembrando que a $\sqrt{\Delta}$ se mantém real e teremos nessas condições duas quantidades reais e diferentes para a variável x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x" = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2ª ocorrência: Δ assume um número real negativo ($\Delta < 0$).

No contexto dos números reais, $\sqrt{\Delta}$ não será um número real, logo não há valores reais para que a variável x assuma, ou seja, a equação não possui raízes reais.

3ª ocorrência: $\Delta = 0$.

Como temos $\Delta = 0$, isso implica em $\sqrt{\Delta} = 0$, o que garante a existência de duas raízes reais e iguais.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}.$$

Exemplo 4.2.1 *Vamos resolver a equação* $x^2 - 2x - 7 = 0$*.*

Primeiramente vamos encontrar o valor de Δ e analisá-lo.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-7) = 32 > 0,$$

desse modo, teremos duas raízes reais e diferentes. Aplicando a Fórmula Resolutiva, teremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{32}}{2(1)} \Longrightarrow x = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow$$

$$x = 1 \pm 2\sqrt{2} \Longrightarrow x_1 = 1 + 2\sqrt{2} \text{ e } x_2 = 1 - 2\sqrt{2}.$$

Exemplo 4.2.2 *Considerando a equação polinomial* $x^2 - 6x + 10 = 0$*, vamos determinar suas raízes.*

Aplicando a Fórmula Resolutiva na equação, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(1)(10) = 36 - 40 = -4 < 0,$$

analisando o valor do Δ percebemos que p terá raízes não reais.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{-4}}{2(1)} \Longrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \Longrightarrow$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-1) \cdot 4}}{2} \Longrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2}.$$

Do campo dos Números Complexos, por definição $\sqrt{-1} = i$, logo

$$x = \frac{6 \pm 2i}{2} \Longrightarrow x = 3 \pm i, \text{ ou seja, } x_1 = 3 + i \text{ e } x_2 = 3 - i.$$

4.2.2 Método de Viète

Segundo Pereira e Santos (2020), Françóis Viète, era um matemático francês, que nasceu no ano de 1540 em Fontenay e morreu no ano de 1603 em Paris. Para Viète dedicar-se à matemática era uma atividade exercida exclusivamente como forma de lazer.

Embora, não fizesse da matemática sua profissão, produziu contribuições à Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria. Entretanto, foi em Álgebra que ocorreram suas mais significativas contribuições. Em sua obra, foi encontrada pela primeira vez no campo da Álgebra uma diferenciação entre o conceito de *parâmetro* e a ideia de uma *quantidade desconhecida*.

Francóis Viète participou da renovação do simbolismo e na construção de soluções das equações quadráticas, cúbicas e quárticas. Desenvolvendo novos métodos de solução, verificou algumas relações entre coeficientes e raízes de uma equação.

Descrevendo seu método para a resolução de equações completas do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, Viète chegou à Fórmula Resolutiva. Tomando $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, obteve:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0 \Longrightarrow a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u+v) + c = 0$$

organizando a equação na incógnita v, obteve

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0$$

Tomando $u = \dfrac{-b}{2a}$, Viète transformou a equação acima em uma equação incompleta do segundo grau

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

$v^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ (realizando as manipulações algébricas necessárias, isolou v^2)

Considerando $b^2 - 4ac \geq 0$, temos $v = \pm\dfrac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ e como $u = \dfrac{-b}{2a}$, então

$x = u + v = \dfrac{-b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$ (Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau).

Exemplo 4.2.3 *Determinar as raízes da equação* $x^2 - 6x - 16 = 0$*, pelo método de Viète.*

Fazendo $x = u + v$ e substituindo temos:

$$(u+v)^2 - 6(u+v) - 16 = 0 \Longrightarrow$$

$$u^2 + v^2 + 2uv - 6u - 6v - 16 = 0 \Longrightarrow$$

$$v^2 + (2u - 6)v + u^2 - 6u - 16 = 0$$

Para tomar a equação no formato incompleto façamos $2u - 6 = 0$, ou seja, $u = 3$.

$$v^2 + (2(3) - 6)v + (3)^2 - 6(3) - 16 = 0 \Longrightarrow v^2 + 0v + 9 - 18 - 16 = 0 \Longrightarrow$$

$$v^2 - 25 = 0 \Longrightarrow v = \pm\sqrt{25} \Longrightarrow v = \pm 5$$

Como $x = u + v$, então $x = 3 \pm 5 \Longrightarrow x = 8$ ou $x = -2$.

Exemplo 4.2.4 *Determinar as raízes da equação* $x^2 - 17x + 16 = 0$*, pelo método de Viète.*

Iniciamos a solução, fazendo a mudança de variável $x = u + v$.

$$(u+v)^2 - 17(u+v) + 16 = 0 \Longrightarrow v^2 + (2u-17)v + u^2 - 17u + 16 = 0.$$

Tomamos $u = \dfrac{17}{2}$, para anular o termo em v,

$$v^2 + \left(2 \cdot \frac{17}{2} - 17\right) v + \left(\frac{17}{2}\right)^2 - 17\left(\frac{17}{2}\right) + 16 = 0 \Longrightarrow v^2 + \frac{289}{4} - \frac{289}{2} + 16 = 0 \Longrightarrow$$

$$v^2 - \frac{225}{4} = 0 \Longrightarrow v = \pm\sqrt{\frac{225}{4}} \Longrightarrow v = \pm\frac{15}{2}.$$

Considerando a mudança de variável $x = u + v$, então $x = \dfrac{17}{2} \pm \dfrac{15}{2} \therefore x_1 = 1$ e $x_2 = 16$.

4.3 EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU

4.3.1 Equações Cúbicas na Forma Reduzida

Vamos apresentar nessa etapa, a equação cúbica na forma reduzida, ou seja, na forma $y^3 + py + q = 0$. Logo adiante, perceberemos, que ao resolvê-la, estaremos resolvendo também a equação geral do terceiro grau. Vejamos a seguir como procedemos para reduzir uma equação cúbica para a forma reduzida.

Para tanto, consideramos a equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com a, b, c e d $\in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Em seguida, façamos $x = y + h$.

$$\begin{aligned} a(y+h)^3 + b(y+h)^2 + c(y+h) + d = 0 \Leftrightarrow \\ ay^3 + 3ay^2h + 3ayh^2 + ah^3 + by^2 + 2byh + bh^2 + cy + ch + d = 0 \Leftrightarrow \\ ay^3 + (3ah+b)y^2 + (3ah^2 + 2bh + c)y + (ah^3 + bh^2 + ch + d) = 0 \end{aligned}$$

Para eliminar o termo y^2, fazemos $h = -\dfrac{b}{3a}$ e substituímos na equação:

$$ay^3 + \left(3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c\right)y + \left(a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{-b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d\right) = 0.$$

Organizando a expressão temos:

$$\begin{aligned} ay^3 - \frac{1}{3}\frac{y}{a}b^2 + cy + \frac{2}{27a^2}b^3 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}c + d = 0 \Leftrightarrow \\ ay^3 + \left(\frac{3ac-b^2}{3a}\right)y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Dividindo a expressão por a, podemos escrever

$$y^3 + py + q = 0,$$

com $p = \dfrac{3ac-b^2}{3a^2}$ e $q = \dfrac{2b^3 - 9abc + 27da^2}{27a^3}$.

Exemplo 4.3.1 *Vamos encontrar a forma reduzida da equação* $-2x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x - 6 = 0.$

Consideramos a mudança de variável $x = y + h$, subsituimos na equação dada e a organizamos.

$$\begin{aligned} & -2(y+h)^3 + (y+h)^2 + \frac{1}{3}(y+h) - 6 = \\ = \;& -2y^3 - 4hy^2 - 2hy^2 + y^2 - 2h^2y - 4h^2y + 2yh + \frac{1}{3}y - 2h^3 + h^2 + \frac{1}{3}h - 6 \\ = \;& -2y^3 + (-6h+1)y^2 + \left(-6h^2 + 2h + \frac{1}{3}\right)y + \left(-2h^3 + h^2 + \frac{1}{3}h - 6\right) = 0. \end{aligned}$$

Para anular o termo y^2 precisamos encontrar o valor de h de tal forma que $-6h+1 = 0$, o que implica em $h = \frac{1}{6}$. Substituindo o valor de h obtemos:

$$\begin{aligned} & -2y^3 + 0 + \left(-6\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3}\right)y + \left(-2\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right) - 6\right) = \\ = \;& -2y^3 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)y + \left(-\frac{1}{108} + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} - 6\right) \\ = \;& y^3 - \frac{1}{4}y + \frac{80}{27} = 0. \end{aligned}$$

Poderiamos, encontrar também, de maneira mais direta, os valores para p e q da equação $y^3 + py + q = 0$, considerando, inicialmente, as fórmulas obtidas para p e q e os coeficientes da equação $-2x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x - 6 = 0$. Dessa forma teríamos:

$$p = \frac{3ac-b^2}{3a^2} \Longrightarrow p = \frac{3(-2)\left(\frac{1}{3}\right) - (1)^2}{3(-2)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$q = \frac{2b^3 - 9abc + 27da^2}{27a^3} \Longrightarrow q = \frac{2(1)^3 - 9(-2)(1)\left(\frac{1}{3}\right) + 27(-6)(-2)^2}{27(-2)^3} = \frac{80}{27}.$$

Substuindo na equação $y^3 + py + q = 0$, os valores de p e q, obtemos,

$$y^3 - \frac{1}{4}y + \frac{80}{27} = 0.$$

Exemplo 4.3.2 *Vamos encontrar a forma reduzida da equação* $x^3 - 24x^2 + 160x - 256 = 0.$

Queremos transformar a equação na forma $y^3+py+q = 0$, para isso, determinamos p e q sabendo que:

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} \text{ e } q = \frac{2b^3 - 9bc + 27da^2}{27a^3}.$$

Então,

$$p = \frac{3 \cdot 1 \cdot 160 - (-24)^2}{3 \cdot (1)^2} = -32 \text{ e } q = \frac{2(-24)^3 - 9(-24)(160) + 27(-256)(1)^2}{27(1)^3} = 0.$$

Logo a equação reduzida é $y^3 - 32y = 0$.

4.3.2 Solução da equação reduzida: A Fórmula de Cardano

Girolamo Cardano apresentou em 1545 em sua obra Ars Magna, fórmulas para solucionar as equações reduzidas, tratadas na seção anterior. Nesse mesmo livro, contemplou inclusive fórmulas para solucionar equações de quarto grau, assunto que vamos abordar no próximo tópico.

Embora, apresentasse as fórmulas, Cardano reconheceu não ser sua a essência dos métodos. E menciona em seu livro, que as fórmulas já haviam sido descobertas por Ferro[5] e posteriormente redescobertas por Tartaglia[6].

A resolução de

$$x^3 + px + q = 0 \tag{4.1}$$

será feita levando em conta a mudança de variável sugerida por Cardano:

$$x = u + v \tag{4.2}$$

e assim teremos

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= (u+v)^3 + p\,(u+v) + q \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q \\ &= u^3 + v^3 + \big(3u^2v + pu\big) + \big(3uv^2 + pv\big) + q. \end{aligned}$$

[5]Scipione Del Ferro - (1465 - 1526) matemático italiano que segundo Cardano foi o primeiro a resolver as equações cúbicas.

[6]Niccolò Fontana - (1499 - 1557) - conhecido por Tartaglia, foi um matemático italiano que revelou a Cardano, na condição de segredo, a fórmula para solucionar equações cúbicas.

Escolheremos u e v tais que

$$\left\{\begin{array}{l} 3u^2v + pu = 0 \\ 3uv^2 + pv = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow uv = -\frac{p}{3}$$

portanto, estaremos procurando u e v tais que

$$\left\{\begin{array}{c} u^3 + v^3 + q = 0 \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{array}\right. . \tag{4.3}$$

Isolando $v = -\dfrac{p}{3u}$ na segunda equação e substituindo na primeira obteremos:

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

que é uma equação biquadrada cujas soluções para u^3 são dadas pela Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau:

$$u_1^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad e \quad u_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Como $x = u+v$, temos que encontrar os valores de v associado a cada u. Para u_1^3 teremos (observe a equação 4.3):

$$v_1^3 = -q - u_1^3 = -q - \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right) = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

e para u_2^3 teremos

$$v_2^3 = -q - u_2^3 = -q + \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Segue que, a solução por radicais da equação reduzida é dada por:

$$x = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{4.4}$$

ou

$$x = u_2 + v_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

que são idênticas (apenas invertidas).

Para simplificar façamos

$$\omega_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \text{ e } \omega_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Lembrando que, para cada ω, real ou complexo, suas raízes são $\sqrt[3]{\omega}$,$\sqrt[3]{\omega}W$ e $\sqrt[3]{\omega}W^2$, então na equaçao 4.4 temos nove possibilidades aparentes para a solução x :

$$x = W^m \sqrt[3]{\omega_1} + W^n \sqrt[3]{\omega_2} \qquad m, n = 0, 1, 2$$

No entanto, as combinações adequadas são[7]:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{\omega_1} + \sqrt[3]{\omega_2} \\ x_2 = \sqrt[3]{\omega_1}W + \sqrt[3]{\omega_2}W^2 \\ x_3 = \sqrt[3]{\omega_1}W^2 + \sqrt[3]{\omega_2}W \end{cases} \tag{4.5}$$

Poderíamos pensar de outro modo, considerando as Equações 4.2 e 4.3, temos $x = u + v$, e $uv = -\dfrac{p}{3}$. Com isso, asseguramos que quando tomamos u entre as 3 possibilidades existentes o valor associado a v fica determinado. Assim, teremos 3 raízes apenas.

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 4.3.3 *Considerando a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, vamos determinar suas raízes.*

Temos que $p = -15$ e $q = -4$ substituindo em 4.4 obtemos a expressão:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\left(\frac{-4}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{-4}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{(2)^2 + (-5)^3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{(2)^2 + (-5)^3}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}. \end{aligned}$$

Considerando $W = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, ou seja, W uma raiz cúbica da unidade, então pelo Exemplo 3.1.2, sabemos que as três raízes de $2+11i$ são $\begin{cases} 2+i \\ (2+i)\,W \\ (2+i)\,W^2 \end{cases}$, agora calculando as três raízes de $2 - 11i$ obtemos $\begin{cases} 2-i \\ (2-i)\,W \\ (2-i)\,W^2 \end{cases}$.

Portanto, as soluções da equação são:

$$\begin{cases} x_1 = (2+i) + (2-i) = 4 \\ x_2 = (2+i)\,W + (2-i)\,W^2 = -2 - \sqrt{3} \\ x_3 = (2+i)\,W^2 + (2-i)\,W = -2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

[7] Estas escolhas satisfazem as relações de Girard. Veja o porque na subseção 4.3.3.

Refletimos, por um momento, sobre as raízes acima e nos questionamos. Por que $(2+i)+(2-i)W$ não aparece como solução?

A resposta pode ser concebida pelo fato de que $uv = -\frac{p}{3}$. Nesse caso, temos $uv = 5$. Se tomarmos $u = (2+i)$ e $v = (2-i)W$, teremos $(2+i)(2-i)W \neq 5$.

Para as demais cinco possibilidades, o mesmo acontece:

$$\begin{cases} (2+i)(2-i)W^2 \neq 5 \\ (2+i)W(2-i) \neq 5 \\ (2+i)W(2-i)W \neq 5 \\ (2+i)W^2(2-i) \neq 5 \\ (2+i)W^2(2-i)W^2 \neq 5. \end{cases}$$

Diferentemente para as outras três possibilidades, as quais, tomamos como solução da equação.

$$\begin{cases} (2+i)(2-i) = 5 \\ (2+i)W(2-i)W^2 = 5 \\ (2+i)W^2(2-i)W = 5. \end{cases}$$

Percebemos que a solução da equação é compreendida pelos números reais. Contudo, para encontrarmos as raízes, foi necessário percorrer caminhos complexos não reais. Bombelli[8] liderou a solução da equação historicamente conhecida, $x^3 - 15x - 4 = 0$. Esse marco, produziu ainda mais argumentos sobre a necessidade de aceitação e apoderamento sobre os números imaginários[9] por parte dos matemáticos. Se de fato, a vontade era encontrar soluções reais e de boa utilidade, seria indispensável aceitar e aprender a manejar estes números, não muito apreciados para a época.

Exemplo 4.3.4 *Vamos encontrar a solução da seguinte equação* $x^3 + 18x + 19 = 0.$

Observamos que $p = 18$ e $q = 19$, substituindo na fórmula de Cardano, Equação 4.4, temos que

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{-19}{2} - \sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{19}{2} + \sqrt{\left(\frac{19}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{3}\right)^3}} \\ &= \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{8}. \end{aligned}$$

[8]Rafael Bombelli (1526 - 1573) operava formalmente com os números complexos chamando de tais operações de "ideias loucas"

[9]Números imaginários - uma nomenclatura (não muito significativa do ponto de vista matemático) criada por René Descartes (1596 - 1650) para números que representam a raiz quadrada de valores negativos.

As raízes cúbicas de $\omega_1 = -27$ são $\begin{cases} -3 \\ -3W \\ -3W^2 \end{cases}$ e de $\omega_2 = 8$, $\begin{cases} 2 \\ 2W \\ 2W^2 \end{cases}$.

Logo, as soluções da nossa equação são:

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 2 = -1 \\ x_2 = -3W + 2W^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{5\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = -3W^2 + 2W = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}i. \end{cases}$$

Acabamos de explorar a aplicação do método de Cardano na solução das equações na forma reduzida. No entanto, um pouco antes, também exploramos o método de transformação da equação geral para sua forma reduzida. O que nos garante que toda equação polinomial de grau 3, pode ser resolvida pelo método de Cardano.

A partir do desenvolvimento do método de Cardano, nos perguntamos: o porquê do seu método ser tão pouco usual, quando comparado com a Fórmula Resolutiva da Equação do Segundo Grau?

Percebemos que enquanto o método para resolver a equação do segundo grau tem uma aplicação direta na equação geral do segundo grau, o mesmo não acontece com o método de Cardano em relação a equação geral do terceiro grau. É preciso, através de uma mudança de variável sobre a equação geral do terceiro grau, chegar na forma $x^3 + px + q = 0$, para o método ser aplicado. Tal mudança, pode dar um pouco de trabalho.

Entretanto, o trabalho não para por aí. Aplicando o método de Cardano, chegamos, muitas vezes, em expressões do tipo $\sqrt[3]{2 + 11i}$. Interpretando essa raiz cúbica, estamos interessados em todo número complexo que elevado ao cubo seja igual a $2 + 11i$. E sabemos que existem três. No entanto, para encontrá-los precisamos recorrer a Fórmula de Moivre 3.1. De posse dessas raízes, podemos buscar as combinações perfeitas que expressam a solução da equação reduzida, para depois, considerando a mudança de variável feita, exibir a solução da equação geral do terceiro grau.

Utilizar o método de Cardano, pode ser sinônimo de trabalho, como já mencionamos, mas também, de dificuldade para muitos. Pois enquanto, para utilizar a Fórmula Resolutiva de Uma Equação do Segundo Grau, basta praticamente, considerarmos a definiçao $\sqrt{-1} = i$, quando necessário, o método de Cardano exige conhecer mais a fundo os números complexos e como trabalhá-los para chegarmos nas soluções desejadas.

4.3.3 Soluções compatíveis

Porque

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{\omega_1} + \sqrt[3]{\omega_2} \\ x_2 = \sqrt[3]{\omega_1}W + \sqrt[3]{\omega_2}W^2 \\ x_3 = \sqrt[3]{\omega_1}W^2 + \sqrt[3]{\omega_2}W \end{cases}$$

são as soluções da equação 4.1?

Se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação 4.1 então,

$$x^3 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

desenvolvendo o lado direito desta igualdade obteremos as relações de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ x_1x_2x_3 = -q \end{cases}$$

como,

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt[3]{\omega_1} \cdot 0 + \sqrt[3]{\omega_2} \cdot 0 = \sqrt[3]{\omega_1}(1 + W + W^2) + \sqrt[3]{\omega_2}\left(1 + W + W^2\right) = \\ &= \left(\sqrt[3]{\omega_1} + \sqrt[3]{\omega_2}\right) + \left(\sqrt[3]{\omega_1}W + \sqrt[3]{\omega_2}W^2\right) + \left(\sqrt[3]{\omega_1}W^2 + \sqrt[3]{\omega_2}W\right) = x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Verificamos, desse modo, que a primeira relação é válida.

Para a segunda relação temos que

$$\begin{aligned} & x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ = & \sqrt[3]{\omega_1^2}W(1 + W + W^2) + \sqrt[3]{\omega_2^2}W(1 + W + W^2) + \sqrt[3]{\omega_1\omega_2}(2W + 3W^2 + W^4) \\ = & \sqrt[3]{\omega_1\omega_2}(2W + 3W^2 + W^4) = -3\sqrt[3]{\omega_1\omega_2} \\ = & -3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)} \end{aligned}$$

=-3 $\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^2} = -3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$

=-3 $\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -3\left(-\frac{p}{3}\right) = p$,. Logo, a escolha é verdadeira para a segunda relação de Girard também.

Para a terceira e última escrevemos

$$\begin{aligned}
& x_1x_2x_3 \\
= \ & (\sqrt[3]{\omega_1} + \sqrt[3]{\omega_2})(\sqrt[3]{\omega_1}W + \sqrt[3]{\omega_2}W^2)(\sqrt[3]{\omega_1}W^2 + \sqrt[3]{\omega_2}W) \\
= \ & W^3(\omega_1 + \omega_2) + W^2\sqrt[3]{\omega_1^2\omega_2}(W^2 + W + 1) + W^2\sqrt[3]{\omega_1\omega_2^2}(W^2 + W + 1) \\
= \ & W^3(\omega_1 + \omega_2) \\
= \ & 1\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right) \\
= \ & -\frac{2q}{2} = -q.
\end{aligned}$$

De fato, concluimos que as escolhas para as três raízes satisfazem as relações de Girard.

4.4 EQUAÇÕES DE QUARTO GRAU: MÉTODO DE FERRARI

Como comentamos anteriormente, Girolamo Cardano apresentou em sua obra Ars Magna, uma técnica para solucionar equações do quarto grau. Durante a exposição do método, Cardano atribui o mérito ao jovem Ferrari[10] que conseguiu, através de algumas manipulações algébricas, chegar em uma fórmula capaz de resolver as equações quárticas. Acompanhamos a descrição de seu método a seguir.

Considerando a equação geral do quarto grau

$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0 \tag{4.6}$$

enfatizamos que, fazendo uma mudança de variável $y = x + m$ e pensando em m na condição de anular o termo de terceiro grau, podemos transformar a Equação 4.6 em outra da forma:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \tag{4.7}$$

Vejamos o passo a passo para chegar na equação 4.7.

[10]Ludovico Ferrari (1522 - 1560) - Discípulo de Cardano, que teve uma contribuição muito significativa nas publicações de seu mestre, em relação às soluções das equações cúbicas e quárticas.

Primeiramente façamos $y = x + m$,

$$\begin{gathered}a(x+m)^4 + b(x+m)^3 + c(x+m)^2 + d(x+m) + c = \\ a(x^4 + 4x^3m + 6x^2m^2 + 4xm^3 + m^4) + b(x^3 + 3x^2m + \\ 3xm^2 + m^3) + c(x^2 + 2xm + m^2) + + d(x+m) + e = 0.\end{gathered}$$

Multiplicamos toda a equação por $\frac{1}{a}$ e a organizamos em x.

$$x^4 + \left(4m + \frac{b}{a}\right)x^3 + \left(6m^2 + 3\tfrac{b}{a}m + \frac{c}{a}\right)x^2 + \left(4m^3 + 3\frac{b}{a}m^2 + 2\frac{c}{a}m + \frac{d}{a}\right)x + m^4 + \\ + \frac{b}{a}m^3 + \frac{c}{a}m^2 + \frac{d}{a}m + \frac{e}{a} = 0.$$

Como nosso objetivo é anular o termo de terceiro grau, devemos considerar, $4m + \frac{b}{a} = 0$, ou seja, $m = -\frac{b}{4a}$.

Substituindo em m a expressão $-\frac{b}{4a}$, obtemos:

$$x^4 + \left(6\left(-\frac{b}{4a}\right)^2) + 3\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{4a}\right) + \frac{c}{a}\right)x^2 + \\ \left(4\left(-\frac{b}{4a}\right)^3 + 3\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{4a}\right)^2 + 2\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{4a}\right) + \frac{d}{a}\right)x\left(-\frac{b}{4a}\right)^4 + \frac{b}{a}\left(-\frac{b}{4a}\right)^3 + \frac{c}{a}\left(-\frac{b}{4a}\right)^2 + \\ \frac{d}{a}\left(-\frac{b}{4a}\right) + \frac{e}{a} = 0.$$

Organizando os coeficientes de x, apresentamos a equação:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Com

$$p = \frac{3b^2}{8a^2} - \frac{3b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$q = -\frac{b^3}{16a^3} + \frac{3b^3}{16a^3} - \frac{2bc}{4a^2} + \frac{d}{a}$$

$$r = \frac{b^4}{256a^4} - \frac{b^4}{64a^4} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{e}{a}.$$

Desse modo, ao resolver a equação incompleta do tipo

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{4.8}$$

temos condições de resolver qualquer equação do quarto grau apresentada.

O pensamento de Ferrari foi o seguinte: tentar buscar reorganizar e transformar a Equação 4.8 em dois polinômios quadrados perfeitos e na sequência extrair suas raízes quadradas. Assim, teríamos equações do segundo grau. Para isso, começou escrevendo da seguinte maneira a Equação 4.8

$$x^4 + px^2 + r = -qx.$$

Na sequência, somou em ambos os lados os termos αx^2 e β.

$$x^4 + px^2 + r + \alpha x^2 + \beta = -qx + \alpha^2 + \beta$$

$$x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta) = \alpha x^2 - qx + \beta.$$

Lembrando que α e β são números que precisam ser determinados, de tal forma que a igualdade entre os polinômios quadrados perfeitos seja garantida.

Nessas condições, analisando o primeiro membro, verificamos que

$$2x^2\sqrt{r + \beta} = 2(p + \alpha)x^2 \Longrightarrow (p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0.$$

Fazendo a mesma análise para o segundo membro, temos que

$$2\sqrt{\alpha}x\sqrt{\beta} = -qx \Longrightarrow q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Longrightarrow \beta = \frac{q^2}{4\alpha}.$$

Substituindo a expressão para β na equação do primeiro membro $(p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0$ teremos

$$(p + \alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0$$

organizando a expressão, possuímos uma equação em α de terceiro grau. Como já conhecemos a solução desse tipo de equação, encontramos o valor de α, em seguida de β e por último extraímos as raízes quadradas

$$\sqrt{x^4 + (p + \alpha)x^2 + (r + \beta)} = \pm\sqrt{\alpha x^2 - qx + \beta}.$$

Já é conhecido que uma equação do segundo grau possui duas raízes. Logo, para cada sinal + ou - acima, temos duas possibilidades de soluções, o que resulta no encontro de quatro raízes para a equação do quarto grau.

Exemplo 4.4.1 *Vamos determinar as raízes da equação* $x^4 - 12x^2 - 16x - 4 = 0.$

Desenvolvendo a solução a partir do método de Ferrari, vamos determinar α e β na condição de que

$$x^4 + (-12 + \alpha)x^2 + (-4 + \beta) = \alpha x^2 + 16x + \beta \tag{4.9}$$

representem (ambos os membros da igualdade) quadrados perfeitos.

Nessas condições

$$4(\beta - 4) - (\alpha - 12)^2 = 0$$

$$256 - 4\alpha\beta = 0 \Longrightarrow \beta = \frac{64}{\alpha}$$

que podem ser descritas pela equação $\alpha^3 - 24\alpha^2 + 160\alpha - 256 = 0$.

Fazendo uma mudança de variável $\alpha = y + h$, com $h = -\dfrac{b}{3a}$ chegamos na equação $y^3 - 32y = 0$, equação encontrada no Exemplo 4.3.1. A qual, possui raízes $y_1 = 0$, $y_2 = -4\sqrt{2}$ e $y_3 = 4\sqrt{2}$.

Logo, como temos que $\alpha = y + h$, concluímos que $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = -4\sqrt{2} + 8$ e $\alpha_3 = 4\sqrt{2} + 8$.

Para $\alpha = 8$, temos $\beta = 8$. Substituindo esses valores na Equação 4.9, e extraindo a raiz quadrada, teremos as seguintes equações do segundo grau:

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 2 = 0 \tag{4.10}$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 2 = 0 \tag{4.11}$$

Resolvendo, encontramos para a Equação 4.10 as raízes $x_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2(2 - \sqrt{2})}$ e $x_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2(2 - \sqrt{2})}$. Para a Equação 4.11 as raízes $x_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$ e $x_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$. Desse modo, determinamos quatro raízes para a equação de quarto grau dada.

No entanto, usamos até o momento um valor, dentre os 3 encontrados para α, e, em correspondência um para β. E os outros valores? Para cada α teremos quatro raízes? Terá 12 raízes ao total a equação de quarto grau?

Vejamos a seguir o que acontece quando utilizamos os demais valores para α.

Para $\alpha = -4\sqrt{2} + 8$ encontramos $\beta = 16 + 8\sqrt{2}$. Substituindo novamente na Equação 4.9 e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da expressão, chegamos às duas equações a seguir:

$$x^2 - \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}x - \sqrt{16 + 8\sqrt{2}} - \sqrt{12 + 8\sqrt{2}} = 0 \tag{4.12}$$

$$x^2 + \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}x + \sqrt{16 + 8\sqrt{2}} - \sqrt{12 + 8\sqrt{2}} = 0. \tag{4.13}$$

Resolvendo cada uma delas, encontramos para a Equação 4.12 as soluções $x_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2(2 - \sqrt{2})}$ e $x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$. Para a equação 4.13, as soluções são $x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2(2 - \sqrt{2})}$ e $x_4 = \sqrt{2} - \sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$.

Tomando $\alpha = 4\sqrt{2} + 8$ encontramos $\beta = 16 - 8\sqrt{2}$. Substituindo na Equação 4.9 e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da expressão, obtemos as seguintes equações:

$$x^2 + \sqrt{4\sqrt{2} + 8}x + \sqrt{16 - 8\sqrt{2}} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}} = 0 \tag{4.14}$$

$$x^2 - \sqrt{4\sqrt{2}+8}x - \sqrt{16-8\sqrt{2}} + \sqrt{12-8\sqrt{2}} = 0 \tag{4.15}$$

Resolvendo a Equação 4.14 encontramos as raízes $x_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2(2-\sqrt{2})}$ e $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2(2+\sqrt{2})}$. E para a Equação 4.15 as soluções são $x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2(2-\sqrt{2})}$ e $x_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2(2+\sqrt{2})}$.

Analisando agora, as quatro raízes encontradas para cada valor de α, percebemos que o grupo de raízes é o mesmo, apenas dispostas de um modo diferente. Portanto, basta tomar um valor apenas de α que encontraremos duas equações do segundo grau, a solução de cada uma delas gera duas raízes, logo teremos as quatro raízes da equação do quarto grau pelo método de Ferrari.

Exemplo 4.4.2 *Vamos encontrar as raízes da equação* $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$.[11]

A partir do método de Ferrari, temos que:

$$x^4 - (15-\alpha)x^2 + (24+\beta) = \alpha x^2 + 10x + \beta. \tag{4.16}$$

Extraímos as seguintes informações, considerando ambos os lados da igualdade, quadrados perfeitos.

$$(15-\alpha)^2 - 4(24+\beta) = 0$$

$$100 - 4\alpha\beta = 0 \Longrightarrow \beta = \frac{25}{\alpha},$$

essas informações nos conduzem à equação $\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0$.

Suas raízes são $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = 25$.

Considerando $\alpha_1 = 1$, encontramos $\beta_1 = 25$, substituímos o par de informações na Equação 4.16, obtemos

$$x^4 - (15-1)x^2 + (24+25) = x^2 + 10x + 25 \Longrightarrow$$

$$x^4 - 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25 \Longrightarrow$$

$$(x^2-7)^2 = (x-5)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados, chegamos em

$$(x^2-7) = \pm(x+5).$$

Esta equação expressa, na verdade, as seguintes equações do segundo grau:

$$x^2 - x - 12 = 0 \tag{4.17}$$

[11] Exemplo proposto por Garbi (2010, p. 45), em sua obra: O Romance das Equações Algébricas.

de raízes $x_1 = 4$, $x_2 = -3$ e

$$x^2 + x - 2 = 0 \tag{4.18}$$

de raízes $x_3 = -2$ e $x_4 = 1$.

Tomando $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = \dfrac{25}{4}$ e realizando o processo análogo ao que fizemos anteriormente, encontramos as seguintes equações de grau 2:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \tag{4.19}$$

de raízes $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ e

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \tag{4.20}$$

de raízes $x_3 = 1$ e $x_4 = -3$.

Para $\alpha_3 = 25$, $\beta = 1$ encontramos as equações do segundo grau:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \tag{4.21}$$

de raízes $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ e

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \tag{4.22}$$

de raízes $x_3 = -3$ e $x_4 = -2$.

Portanto, as raízes da equação dada são -3, -2, 1 e 4. Para os 3 casos de α, as raízes são as mesmas o que muda é a ordem apenas como aparecem.

4.5 EQUAÇÕES DE GRAU MAIOR OU IGUAL A 5: INEXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO POR MEIO DE RADICAIS

O Teorema Fundamental da Álgebra, já visto, nos garante que uma equação de grau $n \geq 1$, tem n soluções. No entanto, não nos fornece um algorítmo capaz de determinar essas soluções.

Vimos nas seções anteriores, que existem métodos e fórmulas que relacionando os coeficientes das equações de grau: 1, 2, 3 e 4, em conjunto com algumas operações algébricas, pudessem solucioná-las. Portanto, buscar soluções através destes tipos de fórmulas para equações em geral, parece ser uma busca autêntica, embora, que os métodos para algumas dessas equações sejam bastante trabalhosos.

Contudo, quais são os argumentos que sustentam a afirmação contida no título dessa seção? Para entendermos um pouco melhor, e buscarmos respostas, nos apropriaremos da história, vida e parte da obra de Évariste Galois, conforme Garbi (2010).

Nascido em Bourg-la-Reine, cidade próxima de Paris, no ano de 1811, Évariste Galois foi um grande revolucionário no campo da Álgebra. Em seus estudos, trabalhou as condições necessárias e suficientes para que uma equação polinomial tenha suas raízes sendo escritas a partir de radicais.

Aos primeiros doze anos de idade, Galois recebeu educação apenas em casa, juntamente com seu irmão mais novo Alfred Galois de sua mãe Adéläide Marie Demante; uma mulher, com grande capacidade intelectual, a ponto de realizar estudos dos clássicos da antiguidade, em latim; proporcionando ao jovem gênio matemático, uma orientação claramente humanista.

Posterior a esse período, por volta do ano de 1823, foi enviado à escola, Louis-le-Grand, um espaço de prestígio e autoritarismo. Galois, obteve grandes êxitos, em parte de seus estudos, fruto do aprendizado junto a sua mãe, de grandes clássicos.

No entanto, como dissemos, seu sucesso acontecia em partes, enquanto em matemática era um gênio, em outras áreas suas notas eram muito ruins. Sua paixão pela matemática o tornava desinteressado por outro assunto e incompreendido, por vezes, na área da matemática, pelos próprios professores.

Seu grande sonho era estudar na École Polytechnique, uma escola de grande renome em Paris. No entanto, para ser admitido era preciso passar em um exame. Galois, não cumprindo com todas as exigências do exame, foi reprovado por duas vezes.

Não desanimado, continuou seus estudos na escola Louis-le-Grand, sendo orientado pelo professor Louis-Paul-Émile Richard (1795 - 1849) - o qual, incentivou a Galois em suas pesquisas. E ainda, por meio do curso teve acesso à obras de matemáticos como as de Cauchy e Gauss, entre outras.

No ano de 1829, Galois lança dois importantes trabalhos. O primeiro, um artigo, intitulado: *Demonstração de um teorema sobre as frações contínuas e periódicas*. Um trabalho abordando as frações contínuas com aplicações para as equações quadráticas. E o segundo, chamado de: *Pesquisas sobre equações algébricas de grau primo*. Em relação ao primeiro, o segundo foi muito mais importante, tratando da resolubilidade das equações algébricas, acabou submetendo a Academia de Ciências de Paris. Nele, constava descobertas sobre a Teoria de Grupos que tornaria Galois jamais esquecido. No entanto, nunca fora publicado.

Por volta da metade do segundo semestre do ano de 1829, Galois foi admitido na École Normale Supérieure, instituição que detinha a função de formar professores para escolas e universidades. No primeiro semestre do ano de 1830, Évariste Galois, fez publicações de novos artigos no principal jornal científico da França, o Bulletin de Ferrussac: *Análise de uma memória sobre a resolução algébrica de equações, Resolução de equações numéricas e Teoria dos Números.*

Lançado, em 1830, um novo grande prêmio de matemática pela Academia de Ciências, Galois reescreve desde o princípio seu artigo, nunca publicado, e o batiza de: *Memória sobre as condições de resolubilidade das equações por radicais.* Contudo, mais uma vez, seu trabalho não chegara as mãos dos avaliadores, perdendo-se, com a morte de Jean Baptiste Joseph Fourier, secretário da Academia.

Com a morte de seu pai, o jovem Galois, adentra ainda mais no campo político, para defender os interesses da República, da Liberdade, da Revolução Francesa, entre outros. Foi preso, por duas vezes, em uma delas por mencionar o desejo à morte do Rei Louiss Phippe. Entretanto, foi absolvido pelo júri.

Sua vida amorosa, custou um preço caro e o mais alto de todos. Galois, envolveu-se com uma moça chamada Stéphanie Potterin du Motel. No entanto, ela já era comprometida, seu noivo Pescheux dHerbinville, ao saber de sua infidelidade, desafiou Galois a um duelo de pistolas.

Évariste Galois, tendo em mente, o experiente atirador que seu adversário era, na noite que precedia ao duelo escreveu algumas cartas, contendo teoremas e demontrações sobre a Teoria de Grupos. As cartas foram endereçadas ao seu amigo Auguste Chevalier, em formato de testamento.

Não enganado, o jovem Évariste Galois, com 20 anos de idade é morto em 31 de maio de 1832, vítima de um tiro de pistola, durante o duelo.

4.5.1 Uma aplicação da teoria de Galois

Galois buscou dentro de seus estudos, explorar o ambiente onde estão as raízes de uma dada equação polinomial. Ao tomá-la, com coeficientes em um conjunto, o qual atendendo a algumas propriedades, chamamos esse conjunto de corpo, corpo F.

No entanto, o corpo F, corpo base assim também chamado, que contém os coeficientes da equação polinomial, nem sempre da conta de suas raízes. Para tanto, a esse corpo F, de quantidades conhecidas, introduzimos novos elementos. Dessa forma, criamos uma extensão K do corpo F, (denotada $K|F$ e lida *k sobre F*), que em seu campo, conterá as raízes desejadas da equação em questão.

Em sua teoria, Galois investigou a permutação das raízes de uma equação que possui algumas propriedades que são mantidas por toda equação que conecta essas raízes, mesmo após elas terem sido permutadas. Entretanto, é necessário conhecer a natureza dos coeficientes, e a qual corpo estão restritos, pois essas "novas" equações precisam continuar com seus coeficientes restritos ao mesmo corpo. Essas possíveis permutações, formam o Grupo de Galois.

Uma importante aplicação da teoria de Galois, considerando S_n, um grupo de Galois, com $n \geq 5$ da equação polinomial $p(x) = 0$ sobre F, foi a prova que esse grupo não é solúvel. O que implica que $p(x) = 0$, com grau $n \geq 5$, nesse caso não possui soluções por radicais de modo em geral.

4.6 OUTROS TÓPICOS SOBRE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Nessa seção, vamos apresentar as equações biquadradas e alguns métodos, que mesclados, nos ajudam na resolução de algumas equações polinomiais de grau maior do que quatro. São alguns casos restritos, que conseguimos resolver por meio de radicais.

4.6.1 Equações biquadradas

De modo geral, uma equação biquadrada, é uma equação nos complexos que se apresenta no formato

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \tag{4.23}$$

com $n \in \mathbb{N}$, e $a \neq 0$. Fazendo uma mudança de variável $x^n = y$ a transformamos em uma equação do segundo grau, $ay^2 + by + c = 0$. Resolvendo a equação do segundo grau estaremos conhecendo duas das $2n$ raízes da Equação 4.23. No entanto, com o auxílio das coordenadas polares (Segunda Fórmula de Moivre) conseguimos determinar as $2n-2$ raízes restantes. Vejamos um exemplo a seguir.

Exemplo 4.6.1 *Determinar as raízes complexas da equação* $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Para isso reescrevemos a equação

$$x^8 - 17x^4 + 16 = (x^4)^2 - 17(x^4) + 16 = 0. \tag{4.24}$$

Fazendo $x^4 = y$, substituímos em 4.24 e obtemos:

$$y^2 - 17y + 16 = 0. \tag{4.25}$$

A Equação 4.25 é o Exemplo 4.2.4, o qual, resolvemos pelo método de Viète, encontrando as seguintes raízes:

$$y_1 = 1 \text{ e } y_2 = 16$$

Logo,

$$x^4 = 1 = 1(cos\ (0) - isen\ (0)) \text{ e } x^4 = 16 = 16(cos\ (0) + isen\ (0)).$$

Observamos, que não basta extrairmos as raízes quárticas para os dois valores de y, pois não será suficente para determinarmos as oito raízes da equação 4.24. Para isso, chamamos a Fórmula de Moivre 3.1,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \text{ com } 0 \leq k \leq n-1.$$

Considerando $x^4 = 1 = 1(cos\ 0 - isen\ 0)$ teremos 4 raízes para $k = 0, 1, 2, 3.$

$$x_0 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{4} + isen\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{4}\right) = 1(cos\ 0 + isen\ 0) = 1$$

$$x_1 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0+2\cdot 1\cdot \pi}{4} + isen\frac{0+2\cdot 1\cdot \pi}{4}\right) = 1\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$x_2 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0+2\cdot 2\cdot \pi}{4} + isen\frac{0+2\cdot 2\cdot \pi}{4}\right) = 1(cos\pi + isen\pi) = -1$$

$$x_3 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0+2\cdot 3\cdot \pi}{4} + isen\frac{0+2\cdot 3\cdot \pi}{4}\right) = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\right) = -i.$$

De modo análogo, faremos para $x^4 = 16 = 16(cos\ 0 + isen\ 0)$.

$$x_0 = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{4} + isen\frac{0+2\cdot 0\cdot \pi}{4}\right) = 16(cos\ 0 + isen\ 0) = 16$$

$$x_1 = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{0+2\cdot 1\cdot \pi}{4} + isen\frac{0+2\cdot 1\cdot \pi}{4}\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$x_2 = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{0+2\cdot 2\cdot \pi}{4} + isen\frac{0+2\cdot 2\cdot \pi}{4}\right) = 2(cos\pi + isen\pi) = -2$$

$$x_3 = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{0+2\cdot 3\cdot \pi}{4} + isen\frac{0+2\cdot 3\cdot \pi}{4}\right) = 2\left(cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

Logo as soluções da equação $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ são as seguintes raízes: -1, -2, 1, 2, $-2i$, $-i$, i, $2i$.

Exemplo 4.6.2 *Determinar as raízes complexas da equação* $p(x) = x^{10} - 31x^5 - 32 = 0.$

Fazendo $x^5 = y$ obtemos a equação $y^2 - 31y - 32 = 0.$

Aplicando a Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau na equação em y acima, temos que:

$$y = \frac{31 \pm \sqrt{32^2 - 4\cdot 1\cdot(-32)}}{2} = \frac{31 - \sqrt{1089}}{2} = \frac{31 \pm 33}{2}.$$

Logo $y_1 = -1$ e $y_2 = 32.$

Usando a fórmula de Moivre 3.1,

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \text{ com } 0 \leq k \leq n-1,$$

vamos determinar as raízes das equação $x^5 = -1$ e $x^5 = 32$.

Considerando, $x^5 = -1 = 1(cos(\pi) + isen(\pi))$ com $\rho = 1$ e $k = 0, 1, 2, 3, 4$ obtemos as 5 raízes a seguir.

$$x_0 = 1\left(cos\frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{5} + isen\frac{\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{5}\right) = cos\frac{\pi}{5} + isen\frac{\pi}{5}$$

$$x_1 = 1\left(cos\frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{5} + isen\frac{\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{5}\right) = cos\frac{3\pi}{5} + isen\frac{3\pi}{5}$$

$$x_2 = 1\left(cos\frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{5} + isen\frac{\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{5}\right) = cos\pi + isen\pi = -1$$

$$x_3 = 1\left(cos\frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{5} + isen\frac{\pi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{5}\right) = cos\frac{7\pi}{5} + isen\frac{7\pi}{5}$$

$$x_4 = 1\left(cos\frac{\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{5} + isen\frac{\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{5}\right) = cos\frac{9\pi}{5} + isen\frac{9\pi}{5}.$$

De modo análogo, considerando $x^5 = 32 = 32(cos(0) + isen(0))$ com $\rho = 32$ e $k = 0, 1, 2, 3, 4$ obtemos as outras 5 raízes, expressas a seguir.

$$x_0 = \sqrt[5]{32}\left(cos\frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{5} + isen\frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{5}\right) = 2\left(cos\frac{0}{5} + isen\frac{0}{5}\right) = 2$$

$$x_1 = \sqrt[5]{32}\left(cos\frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{5} + isen\frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{5}\right) = 2\left(cos\frac{2\pi}{5} + isen\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$x_2 = \sqrt[5]{32}\left(cos\frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{5} + isen\frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{5}\right) = 2\left(cos\frac{4\pi}{5} + isen\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$x_3 = \sqrt[5]{32}\left(cos\frac{0 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{5} + isen\frac{0 + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{5}\right) = 2\left(cos\frac{6\pi}{5} + isen\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$x_4 = \sqrt[5]{32}\left(cos\frac{0 + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{5} + isen\frac{0 + 2 \cdot 4 \cdot \pi}{5}\right) = 2\left(cos\frac{8\pi}{5} + isen\frac{8\pi}{5}\right).$$

4.6.2 Aplicações de Girard em equações de grau 2 e 3

Exemplo 4.6.3 *Sabendo que -2 é uma raiz de multiplicidade 3 da equação polinomial $p(x) = x^5 + 11x^4 + 28x^3 - 16x^2 - 128x - 112 = 0$, vamos determinar as demais raízes.*

Pela Definição 3.3.3, se -2 é uma raiz de multiplicidade 3 de $p(x)$, então podemos escrever:

$$p(x) = (x+2)^3 q(x), \text{ com } q(-2) \neq 0.$$

Desenvolvendo $(x+2)^3$, encontramos o polinômio $x^3+6x^2+12x+8$. Divindo $p(x)$ por $(x+2)^3$ obtemos o quociente $q(x) = x^2+5x-14$.

Usando as relações de Girard para a equação $x^2+5x-14=0$, obtemos as seguintes informações:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 x_2 = -14. \end{cases}$$

Ora, dois números que somados resultam em -5 e multiplicados em -14, temos os números -7 e 2, que satisfazem essas condições. Logo as raízes de $p(x)$ são: -7, -2 de multiplicidade 3 e 2.

Exemplo 4.6.4 *Resolva a equação $x^3-4x^2+x+6=0$, sabendo que uma raiz é igual à soma de outras duas.*[12]

Tomamos qualquer uma das três raízes igual as outras duas, por exemplo $x_1 = x_2 + x_3$.

Pelas relações de Girard temos que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \Longrightarrow x_1 = 2 \ e \ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 x_2 x_3 = -6 \Longrightarrow x_2 \cdot x_3 = -3. \end{cases}$$

Organizando novamente obtemos:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 x_3 = -3 \end{cases}$$

Duas raízes que somadas resultam em 2 e multiplicadas em -3, são satisfeitas pelos valores -1 e 3. Portanto as raízes são -1, 2 e 3.

4.6.3 Aplicações do teorema das raízes racionais em alguns casos de equações polinomiais

Exemplo 4.6.5 *Considerando a equação polinomial $p(x) = x^3-9x^2+28x-30=0$, vamos determinar suas raízes nos complexos.*

Pelo Teorema 3.3.3, as possíveis raízes são, $x = \pm1; \pm2; \pm3; \pm5; \pm6; \pm10; \pm15$ e ±30. Substituindo-as na equação, encontramos que:

$$(3)^3 - 9(3)^2 + 28(3) - 30 = 0.$$

[12] Exercício retirado do livro de Domingues e Iezzi (2003, p. 316).

Logo, concluímos que $x = 3$ é uma raiz. Chamamos $d(x) = x - 3$, pelo corolário 3.2.1, podemos escrever

$$x^3 - 9x^2 + 28x - 30 = x - 3 \cdot q(x),$$

dividindo agora $x^3 - 9x^2 + 28x - 30$ por $d(x)$ pelo Algoritmo de Briot-Ruffini 3.2.1,

1	-9	28	-30	3
1	$3 \cdot 1 - 9$	$3 \cdot (-6) + 28$	$3 \cdot 10 - 30$	
1	-6	10	0	

Encontramos o quociente:

$$q(x) = x^2 - 6x + 10,$$

$q(x)$, é o exemplo 4.2.2 resolvido, que possuí raízes $x_1 = 3 + i$ e $x_2 = 3 - i$

Portanto, as raízes de $p(x)$ são $x_1 = 3, x_2 = 3 + i$ e $x_3 = 3 - i$, percebemos que temos duas raízes complexas não reais, sendo que uma é o conjugado da outra, reafirmando o Teorema 3.3.2.

Exemplo 4.6.6 *Determinar as raízes complexas da equação polinomial* $p(x) = x^{11} + x^{10} - 31x^6 - 31x^5 - 32x - 32 = 0$.

Novamente, Pelo Teorema 3.3.3, as possíveis raízes são, $x = \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16; \pm 32$. Fazendo a verificação percebemos que $x = -1$, $x = 2$ são raízes da equação.

Logo, pelo Corolário 3.2.1, $(x + 1)$ e $(x - 2)$ são expressões que dividem $p(x)$. Fazendo a primeira divisão, ou seja, $p(x)$ por $x + 1$ pelo Algoritmo de Briot-Ruffini 3.2.1

1	1	-31	-31	-32	-32	-1
1	$-1 \cdot 1 + 1$	$-1 \cdot 0 - 31$	$-1 \cdot (-31) - 31$	$-1 \cdot 0 - 32$	$-1 \cdot (-32) - 32$	
1	0	-31	0	-32	0	

encontramos um quociente $q(x) = x^{10} - 31x^5 - 32$ que na verdade é a equação do Exemplo 4.6.2, a qual já conhecemos suas raízes.

Relembrando, para $x = \sqrt[5]{-1}$, temos

$$x_0 = cos\frac{\pi}{5} + isen\frac{\pi}{5},\ x_1 = cos\frac{3\pi}{5} + isen\frac{3\pi}{5},\ x_2 = cos\pi + isen\pi = -1$$

$$x_3 = cos\frac{7\pi}{5} + isen\frac{7\pi}{5},\ x_4 = cos\frac{9\pi}{5} + isen\frac{9\pi}{5}.$$

De modo análogo, para $x = \sqrt[5]{32}$ obtivemos as outras 5 raízes.

$$x_0 = 2\left(cos\frac{0}{5} + isen\frac{0}{5}\right) = 2,\ x_1 = 2\left(cos\frac{2\pi}{5} + isen\frac{2\pi}{5}\right),\ x_2 = 2\left(cos\frac{4\pi}{5} + isen\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$x_3 = 2\left(cos\frac{6\pi}{5} + isen\frac{6\pi}{5}\right),\ x_4 = 2\left(cos\frac{8\pi}{5} + isen\frac{8\pi}{5}\right).$$

5 CONCLUSÃO

Ao longo do desenvolvimento desse trabalho, buscamos tratar das equações polinomiais. Mais propriamente das suas soluções definitivas e limitadas por radicais. Diante disso, trouxemos a solução das equações polinomiais de até quarto grau de modo geral, e alguns casos pontuais em relação as equações com grau maior do que quatro.

Percebemos, durante a escrita, o quanto que a evolução do simbolismo algébrico, facilitou o processo de solução das equações. Exemplo claro é a equação polinomial do primeiro grau, hoje trivialmente resolvida, no entanto, que nem sempre foi assim concebida.

Além disso, o quanto que as equações polinomiais de terceiro grau foram importantes para que os números complexos fossem aceitos e dignos de serem estudados. E como essa aquiescência, impulsionou a descoberta ou invenção de mais matemática. O próprio Garbi (2010), em sua obra O Romance das Equações Algébricas, enfatiza que a resposta à solução das equações do terceiro grau dadas por Cardano ao invés de acalentar parece despertar um vespeiro, com questões estranhíssimas e insondáveis a serem compreendidas (números complexos).

Um outro ponto destaque, é o quanto trabalhosos podem se tornar os métodos de Cardano e Ferrari quando unicamente utilizados nas soluções das equações de terceiro e quarto grau. Nossa vontade, foi mostrar que existe sim, fórmulas que exibem as soluções desses tipos de equações por meio de radicais. E o quão interessante seja que o professor saiba da existência dessas fórmulas e possa delas se apropriar para dar mais clareza ao estudo, das próprias equações polinomiais.

Um exemplo disso, são os aspectos envolvidos na solução de equações polinomiais de grau maior, por meio de radicais, os quais, requerem o uso do conhecimento em resolver as equações de grau menor. Tomando o método de Ferrari para a solução das equações do quarto grau, ao aplicá-lo sobre uma equação, recaímos em uma equação de terceiro grau, para qual, conhecemos o método de Cardano, e assim, através dele encontramos as raízes que irão produzir duas equações do segundo grau, das quais suas soluções expressam a solução da equação do quarto grau.

Em outras palavras, como o conhecimento matemático está interligado e o seu desenvolvimento se apoia em seus próprios pilares. Podemos dizer que ensinar matemática, exige não apenas conhecer o objeto de estudo em particular, no entanto, conhecer sua origem e tudo aquilo que lhe da sustentação enquanto verdade.

Podemos enfatizar também que a compreensão da história que cerca os grandes feitos matemáticos é de fundamental importância. E ai percebemos a matemática, ora sendo desenvolvida para resolver problemas necessários, de determinada época, com um sentido prático, ora sendo uma fonte de prazer e de estilo de vida.

Ao comparar, há uma difusão muito maior da Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau em relação as fórmulas de Cardano e Ferrari. A partir disso, levantamos algumas hipóteses que podem estar contribuindo para a disparidade em difundir essas técnicas. Em primeiro lugar, precisamos ter em mente que são técnicas empregadas para solucionar equações de graus diferentes. Em relação as demais equações, parece termos uma familiaridade um pouco maior, com a do segundo grau. Logo, a familiaridade também aumenta com as técnicas para solucioná-la, nesse caso, a Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau é uma delas.

De um modo pensado, a maioria das equações polinomiais de grau 3 e 4 ensinadas, são escolhidas na condição de serem resolvidas usando o Teorema 3.3.3, das Raízes Racionais em consonância com o Algoritmo 3.2.1, de Briout Ruffini. Por meio, do algoritmo, é possível em alguns casos reduzir a equação de grau maior para uma equação de grau 2 e então resolvê-la pelas técnicas que conhecemos. E em casos mais específicos ainda, as equações de grau 4, são direcionadas para o formato das biquadradas. Deixando os métodos de Cardano e Ferrari de lado.

Em contrapartida, ao exibir a solução das equações de grau 3 e 4, pelo método de Cardano e Ferrari, exige do professor, um conhecimento bastante amplo sobre os números complexos. No entanto, ao mesmo tempo que exige um certo domínio, estabelece um sentido ainda maior para o estudo dos Números Complexos (Fórmulas de Moivre, como exemplo).

Essa exigência, pode em alguns casos, deslocar para longe o conhecimento dessas técnicas e sua exibição pelo professor. Nos reportarmos novamente a Fórmula Resolutiva de uma Equação do Segundo Grau, e percebemos a simplicidade que esse método oferece ao fornecer as duas raízes da equação do segundo grau. Enquanto, que o método de Cardano aparentemente fornece uma, onde encontraremos as outras duas? É uma pergunta que para respondê-la, precisamos conhecer e trabalhar com os números complexos.

Como cerne deste trabalho, e já mencionamos isso, trouxemos a solução das equações polinomias de até quarto grau por radicais, e alguns casos particulares de equações de graus maiores. Contudo, buscamos fazer referência a Galois, trazendo sua história de vida e relatando suas contribuição em provar que as soluções por radicais, de modo em geral, se limitam a equações de até quarto grau. Deixamos como proposta de continuidade desse trabalho, uma aborgem mais enfática à teoria de Galois aplicada a solubilidade por radicais de equações polinomiais. Tal como, o tratamento das soluções por uma trajetória numérica, das equações. E, ou ainda, uma proposta de uma atividade de ensino envolvendo o tema discutido nesse espaço.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. de P. **Desmistificando o Teorema Fundamental da Álgebra**. 2015. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática Em Rede Nacional-PROFMAT) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=07697241676&d=20210317151701&h=fbf18d1e0e528544591ce42293fe1fd00f21a8ac>. Acesso em: 28 mar. 2021.

ALVES, E. F.; MACHADO, B. B. L. **UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU**. In: **XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. São Paulo: São Paulo: [s.n.], 2016. p. 1–12. ISSN 2178 - 034x. Disponível em: <//www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7485_3724_ID.pdf>. Acesso em: 20 maio. 2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática,1906**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1974. 252 p. Tradução: Elza F. Gomide.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: MEC/SEB. [S.l.]: Brasília, 2018.

CARVALHO, K. M. de. **A álgebra das equações polinomiais e sua solubilidade**. 2015. 150 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

DIERINGS, A. R. **ENSINO DE POLINÔMIOS NO ENSINO MÉDIO UMA NOVA ABORDAGEM.** 2014. 70 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 2003. único.

ELLENBERG, J. **O poder do pensamento matemático A ciência de como não estar errado**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda., 2015. 364 p. Tradução: George Schlesinger.

FRAGOSO, W. da C. Uma abordagem histórica da equaçao do 2º grau. **Revista do professor de matemática**, v. 43, p. 20–25, 2000.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. 194 p.

INEP. **Relatório BRASIL no PISA 2018**. 2020. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/relatorio_brasil_no_pisa_2018.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2020.

LAUTENSCHLAGER, E.; RIBEIRO, A. J. Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios mathematics teacher education and teaching of polynomials. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 2, 2017.

MATOS, E. B. de. **ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DA EQUAÇÃO DE VAN DER WAALS**. 2014. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

MORETTI, V. R. **Um estudo sobre métodos algébricos de resolução de equações algébricas com proposta de atividades para o ensino básico**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

OCDE. **10 QUESTÕES PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA... E COMO O PISA PODE AJUDAR A RESPONDÊ-LAS**. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 104 p. Tradução: Thiago Pandim. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2018/02/Livro_Dez_Questoes-PISA_2018.pdf>.

PEREIRA, E. da C.; SANTOS, A. S. Uma abordagem sobre equações do 2º grau. **Multidebates**, Maranhão, v. 4, n. 4, p. 42–59, 2020.

SANTOS, R. S.; ALMEIDA, K. E. d. Atividades para o ensino básico envolvendo Relações de Girard e Aritmética. **CIÊNCIA e NATURA 35 anos**, Santa Maria, v. 37, n. 13, p. 438–451, 2015. ISSN 0100-8307. Disponível em: <http://oaji.net/articles/2017/1602-1486726347.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2021.

SILVA, T. F. F. da; VICTER, E. das F. Nem tudo é por: uma abordagem histórica. **Revista Digital Simonsen**, Universidade Cândido Mendes, Rio de Janeiro, v. 6, p. 134–149, Maio 2017. Disponível em: <http://www.simonsen.br/revista-digital/wp-content/uploads/2017/05/pronto-para-o-site.pdf#page=134>. Acesso em: 20 maio. 2021.

TEIXEIRA, A. L. **A história da Matemática e os exercícios problemas como ferramenta para o ensino das equações algébricas do 1º ao 4º graus**. 2017. 78 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática Em Rede Nacional-PROFMAT) — Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.