Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Uma proposta para encontrar raízes de funções utilizando os métodos numéricos da bisseção e de Newton-Raphson no ensino médio

Carlos Alberto Mota Santos Filho

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2022

Uma proposta para encontrar raízes de funções utilizando os métodos numéricos da bisseção e de Newton-Raphson no ensino médio

Carlos Alberto Mota Santos Filho

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa.

Salvador - Bahia

Fevereiro de 2022

Uma proposta para encontrar raízes de funções utilizando os métodos numéricos da bisseção e de Newton-Raphson no ensino médio

Carlos Alberto Mota Santos Filho

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 18/02/2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Nelson Bastos Barbosa
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Jorge Costa do Nascimento
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

À minha família, em especial, aos sobrinhos: Pedro, João, Lucas e Julie.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela saúde e por me proporcionar a realização de mais uma conquista.

Ao meu pai, Carlos Alberto, pelo companherismo e apoio nos momentos bons e ruins, à minha mãe Teresa Maria pelos bons ensinamentos. Aos meus irmãos, Alberto Carlos e Carla Teresa pelo apoio e união de sempre. Aos meus tios e tias. Em especial, tia Diana, por ter sido minha professora no primário. A família é base de tudo.

Aos meus colegas do mestrado, pela partilha de conhecimentos e pelos bons momentos de descontração.

Ao meu orientador, José Nelson Bastos Barbosa, pelo suporte e pela sua disponibilidade em me auxiliar na realização deste trabalho.

Aos professores Jorge Costa do Nascimento e Joseph Nee Anyah Yartey por aceitarem participar da banca examinadora.

Aos professores do programa de mestrado PROFMAT.

"Se há uma ciência que parece refratária
à poesia, de certo é a matemática."
Medeiros e Albuquerque

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de ensino dos métodos numéricos da bisseção e de Newton-Raphson para os alunos do ensino médio. Inicialmente, estudamos algumas formas de encontrar raízes reais de funções polinomiais. Posteriormente, abordamos superficialmente o conceito de funções contínuas e descrevemos de forma intuitiva o Teorema do Valor Intermediário. Finalmente, apresentamos os métodos numéricos sem utilizar o conceito formal de derivada como se aprende no ensino superior. Nas aplicações de cada método, utilizamos o processo iterativo para encontrar soluções aproximadas e comparamos estes resultados com os encontrados no software Geogebra. Analisando os resultados, podemos constatar qual foi o método mais eficiente.

Palavra-chave: Raízes de Funções, Funções Contínuas, Métodos Numéricos e Aplicações.

Abstract

In this work, we present a proposal for teaching the numerical methods of bisection and Newton-Raphson for high school students. Initially, we study some ways to find real roots of polynomial functions. Posteriorly, we superficially approach the concept of continuous functions and intuitively describe the Intermediate Value Theorem. Finally, we present numerical methods without use the formal concept of derivative as learned in higher education. In the applications of each method, we use the iterative process to find approximate solutions and compare these results with those found in the Geogebra software. Analyzing the results, we can verify which was the most efficient method.

keyword: Function Roots, Continuous Functions, Numerical Methods and Applications.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Na área das ciências exatas, surgem vários problemas em que devemos encontrar as raízes de funções, ou seja, encontrar uma solução da equação $f(x) = 0$. Na maioria dos casos, não encontramos fórmulas matemáticas prontas para resolver esses problemas. Neste caso, devemos utilizar métodos que encontrem uma solução aproximada, que, em geral, são processos iterativos que buscam convergir para uma raiz. Embora estes métodos não disponibilizem raízes exatas, as mesmas poderão ser calculadas com a precisão que o problema necessite, finalizando-se o procedimento quando as condições impostas pela função forem atendidas.

Nesta dissertação, apresentaremos uma proposta de ensino dos métodos numéricos da bisseção e de Newton-Raphson no ensino médio.

O presente trabalho é constituído de quatro capítulos e está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, faremos uma revisão sobre raízes de funções polinomiais, no qual apresentaremos algumas formas para encontrar as raízes de funções polinomiais como: o dispositivo prático de Briot-Ruffini, o Teorema das Raízes Racionais e as relações de Girard.

No capítulo 2, faremos uma breve apresentação sobre funções contínuas e alguns teoremas clássicos do cálculo, de forma que seja possível a compreensão de um discente do ensino médio.

No capítulo 3, apresentaremos os métodos numéricos da bisseção e de Newton-Raphson. Não utilizaremos o conceito formal de derivadas no método de Newton-Raphson, mas improvisaremos uma apresentação que seja acessível aos discentes do ensino médio.

No capítulo 4, apresentaremos três exercícios de aplicação dos métodos do capítulo anterior. Os exercícios exigem interpretação e têm como objetivo avaliar o entendimento do aluno com relação aos métodos estudados no capítulo anterior. Nos mesmos, utilizaremos o software Geogebra, com o intuito de comparar a solução gráfica com a solução encontrada, utilizando o processo iterativo dos métodos.

Capítulo 1

Raízes de Funções Polinomiais

Neste capítulo, estamos trabalhando com funções polinomiais cujos domínio e contradomínio é o conjunto dos números reais. Portanto, estamos interessados em encontrar raízes reais para essas funções.

Definição 1. *Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando são dados números reais a_0, a_1,...a_n tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que f tem grau n.

A determinação das raízes em uma função polinomial de grau n se faz mediante a solução da seguinte equação algébrica:

$$a_n {x_i}^n + a_{n-1} {x_i}^{n-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0 = 0,$$

onde x_i é a i-ésima raiz do polinômio $f(x)$.

Quando a função é polinomial de primeiro grau, encontramos a raiz resolvendo a equação $f(x) = a_1 x + a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$. Nesse caso, os estudantes aprendem a manipular algebricamente a equação, isolando a incógnita x.

Já para as funções polinomiais de segundo grau, um dos métodos é a utilização da conhecida “Fórmula de Bhaskara”. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_2 \neq 0$, então as raízes da função serão:

$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$ e $x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$, desde que $a_1^2 - 4a_2 a_0 > 0$.

Se $a_1^2 - 4a_2 a_0 = 0$, temos uma raiz dupla $x_1 = x_2 = -\frac{a_1}{2a_2}$.

A seguir, apresentaremos algumas formas de encontrar raízes de uma função polinomial com grau maior que dois.

1.1 Divisão de uma função polinomial por $x - \alpha$

Considere a função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$.

Na divisão de $f(x)$ por $x - \alpha$, mas em especial quando α for uma raiz da função, o resto da divisão será igual a zero.

Daí, pela divisão euclidiana, temos que $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$, onde o grau de $q(x)$ é $n - 1$.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - \alpha) \cdot (q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1x + q_0)$$

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 = q_{n-1}x^n+\cdots+q_1x^2+q_0x-(\alpha q_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha q_1x+\alpha q_0)$$

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 = q_{n-1}x^n+(q_{n-2}-\alpha q_{n-1})\cdot x^{n-1}+\cdots+(q_0-\alpha q_1)\cdot x-\alpha q_0.$$

Assim, igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtemos os resultados dos valores de q.

$$a_0 = -\alpha q_0, \quad q_0 = a_1 + \alpha q_1, \quad q_1 = a_2 + \alpha q_2, \ldots \quad q_{n-2} = a_{n-1} + \alpha q_{n-1}, \quad q_{n-1} = a_n.$$

Agora, considere a função $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_3 \neq 0$ e α raiz de $g(x)$.

Fazendo a divisão de $g(x)$ por $x - \alpha$, encontramos uma função do segundo grau $q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$, onde $q_2 = a_3$, $q_1 = a_2 + \alpha q_2$ e $q_0 = \alpha q_1 + a_1$. Utilizando a fórmula de Bhaskara, podemos determinar as outras duas raízes da função $q(x)$.

Os cálculos para obter $q(x)$ indicados acima torna-se mais rápido com a aplicação do dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Esse dispositivo é bastante utilizado, mas para isso precisamos conhecer previamente uma das raízes da equação.

1.1.1 Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Desenvolvido por Charles Auguste Briot (1817 - 1882), matemático francês e Paolo Ruffini (1765 -1822), médico e matemático italiano que iniciou os seus estudos de matemática e medicina na Universidade de Modena, onde recebeu o grau de doutor.

Considere a função $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_3 \neq 0$.

Os valores de q_2, q_1, q_0 são determinados de acordo com o seguinte processo:

1. O valor de α e os coeficientes da equação a_3, a_2, a_1, a_0 são colocados na primeira linha.
2. A segunda linha é determinada através dos seguintes passos:

$$\begin{cases} q_2 &= a_3 \\ q_1 &= \alpha q_2 + a_2 \\ q_0 &= \alpha q_1 + a_1 \\ r &= 0 \end{cases}$$

Resultando em,

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & q_2 & q_1 & q_0 & 0 \end{array}$$

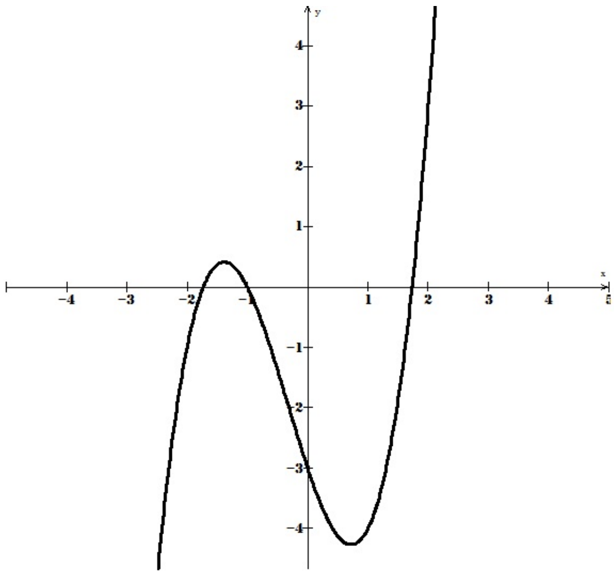
Exemplo 1. *Sabendo que* -1 *é raiz da função* $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$. *Determine as outras raízes dessa função.*

Solução:

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

Portanto, os valores de q_2, q_1 e q_0 são respectivamente 1, 0 e -3. Assim, podemos afirmar que $x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x + 1) \cdot (x^2 - 3) = 0$. As raízes $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ da função f são obtidas, resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - 3 = 0$.

Figura 1.1: Gráfico de $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$



1.2 Teorema das Raízes Racionais

O teorema das raízes racionais garante que, caso existam raízes racionais num polinômio com coeficientes inteiros, ele fornece todas as possibilidades para tais raízes.

Teorema 1. *Seja uma equação polinomial de coeficientes inteiros* $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$*, com* $a_n \neq 0$*. Se o número racional* $\frac{p}{q}$*,* $p \in \mathbb{Z}$ *e* $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ *com* p *e* q *primos entre si, é raiz dessa equação, então* p *é divisor de* a_0 *e* q *é divisor de* a_n*.*

Demonstração: Como $\frac{p}{q}$ é raiz da equação, temos:

$$a_n(\tfrac{p}{q})^n + a_{n-1}(\tfrac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_2(\tfrac{p}{q})^2 + a_1(\tfrac{p}{q}) + a_0 = 0.$$

$$a_n(\tfrac{p^n}{q^n}) + a_{n-1}(\tfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}}) + \cdots + a_2(\tfrac{p^2}{q^2}) + a_1(\tfrac{p}{q}) + a_0 = 0.$$

Multiplicando a equação acima por q^n, obtemos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0.$$

Vamos colocar duas situações, na primeira devemos isolar o valor de a_np^n, e na segunda devemos isolar a_0q^n.

$$a_np^n = -q \cdot (a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}).$$

$a_0q^n = -p \cdot (a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1})$.

Como foi definido que todos os coeficientes são inteiros, e os valores de p e q também são números inteiros, então temos que a_np^n e a_0q^n também são números inteiros, logo podemos fazer as seguintes substituições:

$\alpha = a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}$.

$\beta = a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}$.

Resultando em, com α e $\beta \in \mathbb{Z}$,

$a_np^n = -q\alpha$ e $a_0q^n = -p\beta$, ou equivalentemente

$\frac{a_np^n}{q} = -\alpha$ e $\frac{a_0q^n}{p} = -\beta$.

Essas igualdades mostram as seguintes relações de divisibilidade entre os coeficientes:

1. a_np^n é divisível por q. Como p^n e q são primos entre si, a_n é divisível por q, isto é, q é divisor de a_n.

2. a_0q^n é divisível por p. Como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p, isto é, p é divisor de a_0.

Exemplo 2. *Determine as raízes da função* $g(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$.

Solução:

Os possíveis valores para p são: -1, 1, -2 e 2.

Os possíveis valores para q são: -1, 1, -3 e 3.

Dividimos os valores de p e q para obtermos as possíveis raízes da função g, que são: -1, 1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, -2, 2, $-\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Substituímos esses valores na função g e obtemos os seguintes valores:

Para $x = -1$, temos:

$g(-1) = 3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) + 2 = 8$.

Para $x = 1$, temos:
$g(1) = 3 \cdot (1)^3 + 2 \cdot (1)^2 - 7 \cdot (1) + 2 = 0.$

Para $x = -\frac{1}{3}$, temos:
$g(-\frac{1}{3}) = 3 \cdot (-\frac{1}{3})^3 + 2 \cdot (-\frac{1}{3})^2 - 7 \cdot (-\frac{1}{3}) + 2 = \frac{40}{9}.$

Para $x = \frac{1}{3}$, temos:
$g(\frac{1}{3}) = 3 \cdot (\frac{1}{3})^3 + 2 \cdot (\frac{1}{3})^2 - 7 \cdot (\frac{1}{3}) + 2 = 0.$

Para $x = -2$, temos:
$g(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 2 = 0.$

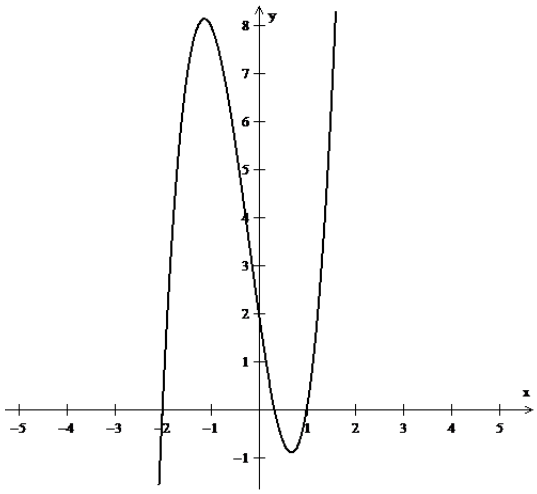
Para $x = 2$, temos:
$g(2) = 3 \cdot (2)^3 + 2 \cdot (2)^2 - 7 \cdot (2) + 2 = 20.$

Para $x = -\frac{2}{3}$, temos:
$g(-\frac{2}{3}) = 3 \cdot (-\frac{2}{3})^3 + 2 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - 7 \cdot (-\frac{2}{3}) + 2 = \frac{20}{3}.$

Para $x = \frac{2}{3}$, temos:
$g(\frac{2}{3}) = 3 \cdot (\frac{2}{3})^3 + 2 \cdot (\frac{2}{3})^2 - 7 \cdot (\frac{2}{3}) + 2 = -\frac{8}{9}.$

As raízes da função g são: 1, $\frac{1}{3}$ e -2.

Figura 1.2: Gráfico de $g(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$



1.3 Relações de Girard

O matemático Francês Albert Girard nasceu em 1595 em Saint Mihiel na França e morreu no dia 8 de dezembro de 1632 em Leiden na Holanda. Sua dedicação em matemática foi principalmente no campo da álgebra, trigonometria e aritmética. Foi o primeiro a publicar as abreviaturas *sen* , *cos* e *tg* em seu tratado sobre trigonometria em 1626. Também ficou famoso por ser o primeiro a formular a definição da sucessão de Fibonacci, que é expressa da seguinte forma $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Algumas relações entre coeficientes de uma função polinomial e suas raízes, conhecidas como relações de Girard, constituem uma ferramenta importante no estudo das raízes de um polinômio, quando conhecemos alguma informação sobre elas.

Assim como o dispositivo prático de Briot–Ruffini, as relações de Girard são válidas para polinômios de grau n.

Consideremos a função:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_3 \neq 0$ e cujas raízes são x_1, x_2, x_3.

Decompondo a função polinomial em fatores de primeiro grau, obtemos:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

$$x^3 + \tfrac{a_2}{a_3}x^2 + \tfrac{a_1}{a_3}x + \tfrac{a_0}{a_3} = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

$$x^3 + \tfrac{a_2}{a_3}x^2 + \tfrac{a_1}{a_3}x + \tfrac{a_0}{a_3} = (x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) \cdot (x - x_3)$$

$$x^3 + \tfrac{a_2}{a_3}x^2 + \tfrac{a_1}{a_3}x + \tfrac{a_0}{a_3} = x^3 - x^2x_1 - x^2x_2 + xx_1x_2 - x^2x_3 + xx_1x_3 + xx_2x_3 - x_1x_2x_3$$

$$x^3 + \tfrac{a_2}{a_3}x^2 + \tfrac{a_1}{a_3}x + \tfrac{a_0}{a_3} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \cdot x - x_1x_2x_3.$$

Portanto, igualando os coeficientes cujos termos são equivalentes, obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}$$
$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

Agora, consideremos uma função polinomial de grau n.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e cujas raízes são x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n.

Decompondo a função polinomial em fatores de primeiro grau, obtemos:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ... + a_1 x + a_0 = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \frac{a_{n-3}}{a_n}x^{n-3} + ... + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n} = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n) =$$

$= x^n - (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n) \cdot x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n) \cdot x^{n-2} - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n) \cdot x^{n-3} + ... + (-1)^m \cdot S_n \cdot x^{n-m} + ... + (-1)^n \cdot (x_1x_2x_3...x_n)$.

Portanto, igualando os coeficientes cujos termos são equivalentes, obtemos:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ...x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$S_m = \text{Soma de todas as } C_{n,m} \text{ produtos de } m \text{ raízes} = (-1)^m \cdot \tfrac{a_{n-m}}{a_n}$$

$$S_n = x_1x_2x_3...x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

Exemplo 3. *Dada uma função $g(x) = ax^2 + bx + c$. Determine a soma e o produto das raízes de $g(x)$.*

Solução: Utilizando as relações de Girard, temos que:
$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Exemplo 4. *Sabendo que uma das raízes é igual à soma das outras duas raízes da função $h(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$. Determine as três raízes dessa função.*

Solução: Sendo x_1, x_2 e x_3, as raízes dessa equação e os coeficientes $a_3 = 1$, $a_2 = -8$, $a_1 = 19$ e $a_0 = -12$, temos pelas relações de Girard as seguintes equações:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 19$$

$$x_1x_2x_3 = 12$$

Mas sabemos que $x_1 = x_2 + x_3$, e substituindo na primeira relação de Girard, obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 4.$$

Substituindo os valores de $x_1 = 4$ e $x_2 = 4 - x_3$ na segunda relação de Girard, obtemos:

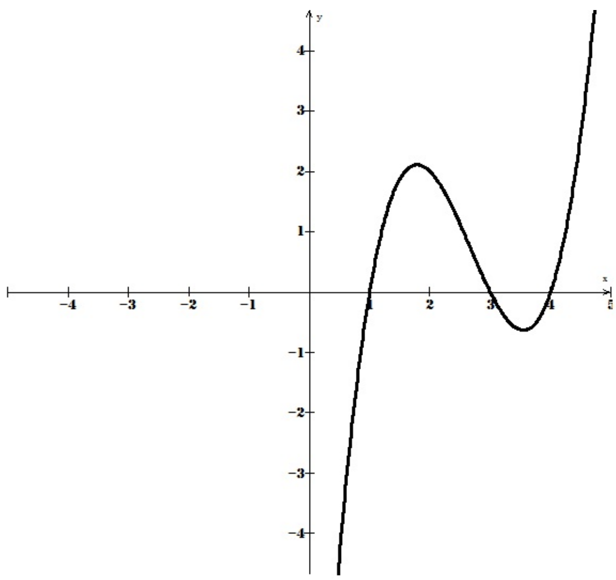
$$4x_2 + 4x_3 + (4 - x_3) \cdot x_3 = 19 \;\Leftrightarrow\; 4 \cdot (x_2 + x_3) + 4x_3 - {x_3}^2 = 19 \;\Leftrightarrow\; 16 + 4x_3 - {x_3}^2 = 19 \;\Leftrightarrow\; {x_3}^2 - 4x_3 + 3 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $x_3 = 1$ ou $x_3 = 3$.

Para $x_3 = 1$, temos que $x_2 = 3$. Para $x_3 = 3$, temos que $x_2 = 1$.

As raízes da função h são: 1, 3, e 4.

Figura 1.3: Gráfico de $h(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$



Capítulo 2

Funções Contínuas

Neste capítulo, não utilizaremos o conceito formal de continuidade de funções.

Apresentaremos uma definição que seja acessível a um aluno do ensino médio.

Desta forma, diremos que uma função é contínua quando conseguimos desenhar seu gráfico completo sem tirar o lápis do papel, ou seja, de maneira ininterrupta. Ou ainda, quando o gráfico da função não possui "quebras"ou "saltos"em todo seu domínio. Se o gráfico da função apresentar "quebras"ou "saltos", diremos que a função é descontínua.

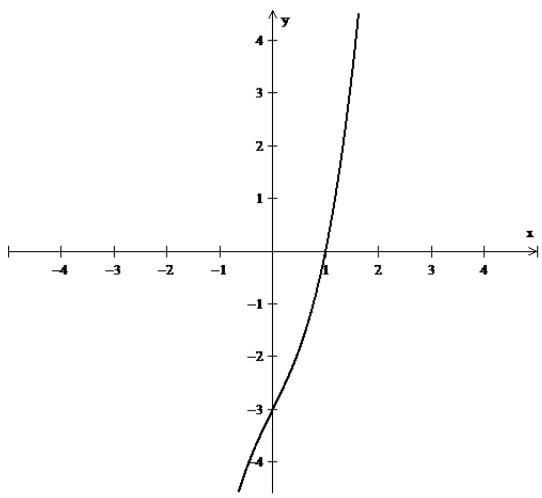
Faremos uma análise gráfica, para verificarmos se uma função é contínua ou descontínua.

A seguir, iremos apresentar alguns exemplos.

2.1 Alguns exemplos

Exemplo 5. *As funções polinomiais são contínuas em todo seu domínio* $\mathbb{R}$.

Figura 2.1: Gráfico de $g(x) = x^3 + 2x - 3$



Exemplo 6. *As funções trigonométricas* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *e* $g(x) = \cos x$ *são contínuas em todo seu domínio* $\mathbb{R}$.

Figura 2.2: Gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$

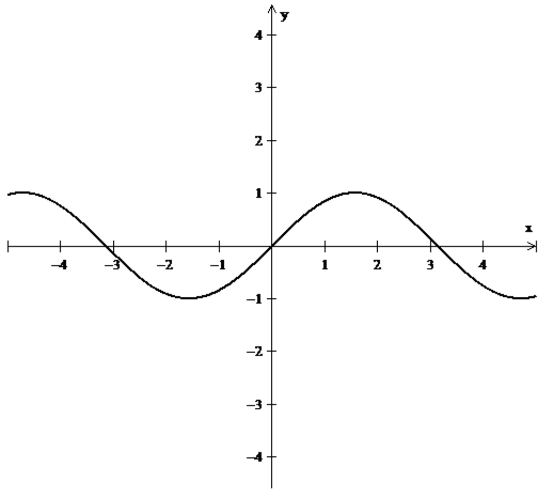
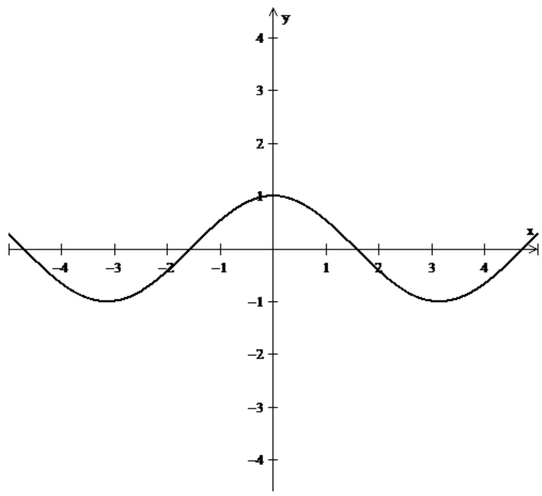
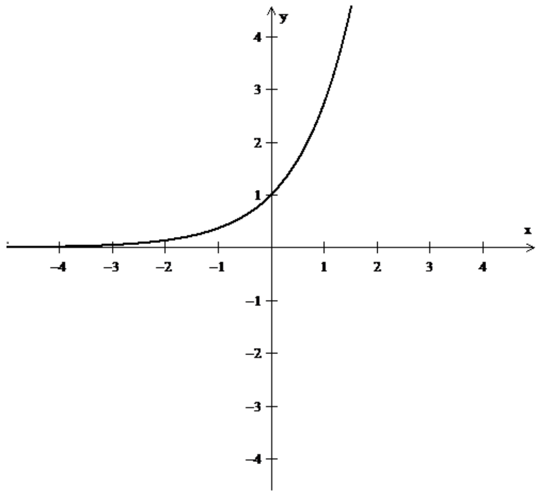


Figura 2.3: Gráfico de $g(x) = \cos x$



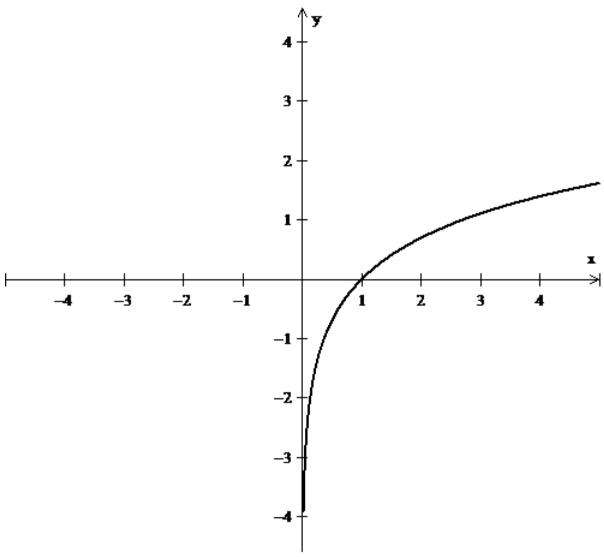
Exemplo 7. *A função exponencial* $f(x) = e^x$ *é contínua em todo seu domínio* $\mathbb{R}$.

Figura 2.4: Gráfico de $f(x) = e^x$



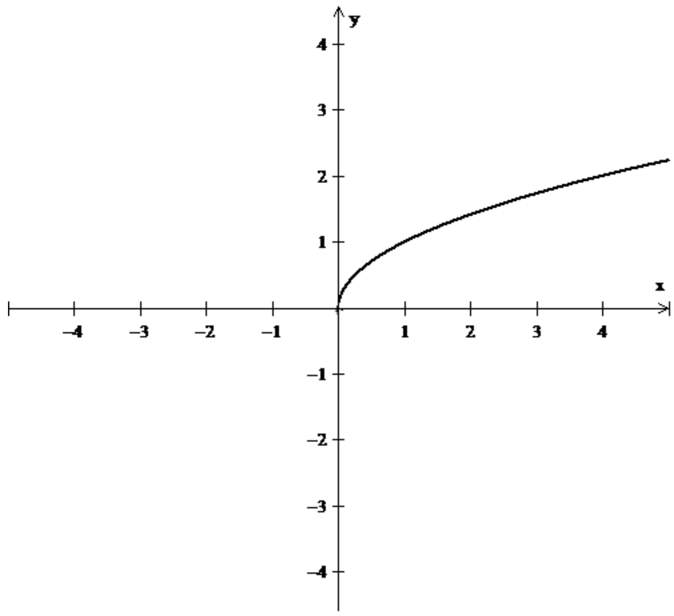
Exemplo 8. *A função logarítmica* $f(x) = \ln x$ *é contínua em todo seu domínio* $(0, +\infty)$.

Figura 2.5: Gráfico de $f(x) = \ln x$



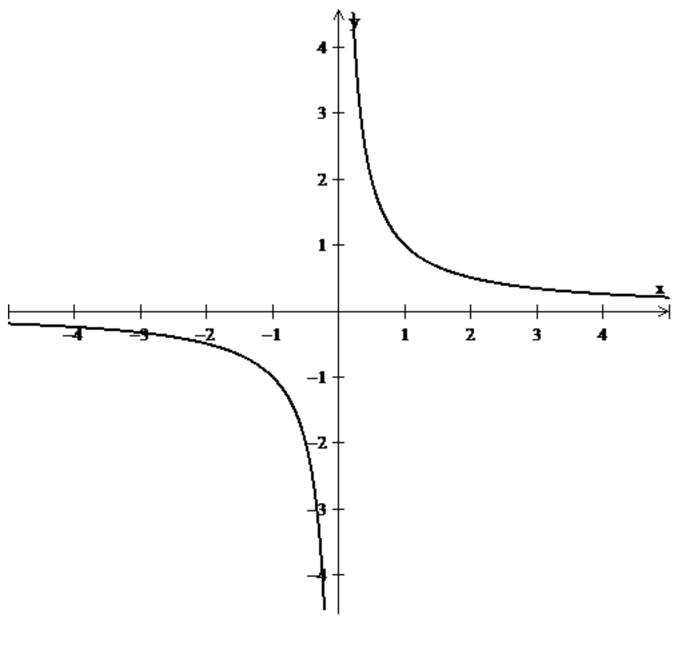
Exemplo 9. *A função raiz quadrada* $f(x) = \sqrt{x}$ *é contínua em todo seu domínio* $[0, +\infty)$.

Figura 2.6: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$



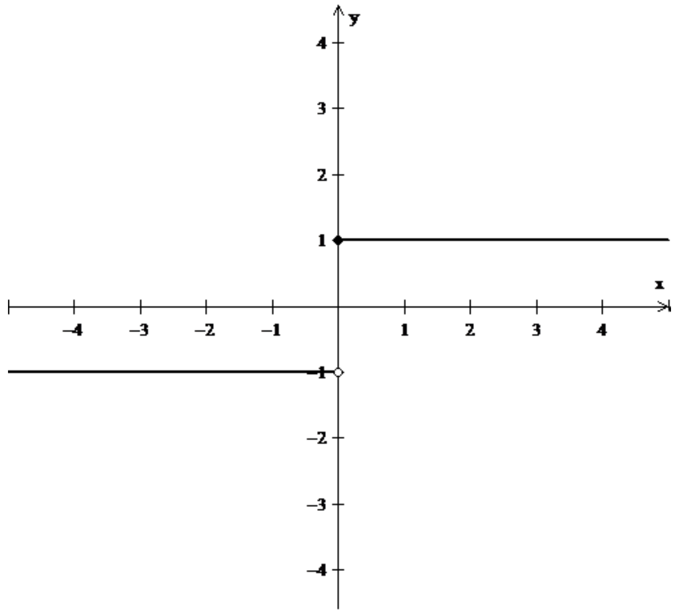
Exemplo 10. *A função inversa* $f(x) = \frac{1}{x}$ *é contínua em todo seu domínio* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Figura 2.7: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$



Exemplo 11. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$. Verifique se f é contínua.*

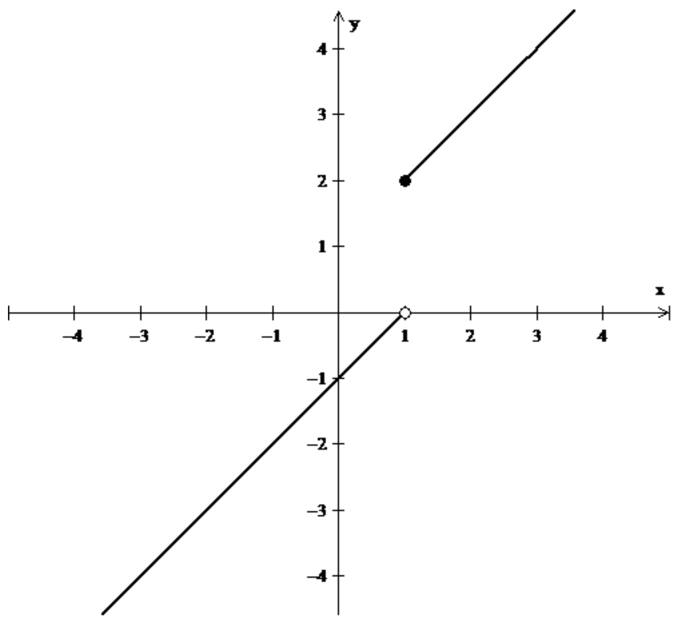
Figura 2.8: Gráfico de $f(x) = \frac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$



O gráfico da função f apresenta um salto em $x = 0$, logo f não é contínua em $\mathbb{R}$.

Exemplo 12. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$, se $x \geq 1$ e $f(x) = x - 1$, se $x < 1$. Verifique se f é contínua.*

Figura 2.9: Gráfico de $f(x) = x + 1$, se $x \geq 1$ e $f(x) = x - 1$, se $x < 1$



O gráfico da função f apresenta um salto em $x = 1$, logo f não é contínua em $\mathbb{R}$.

2.2 Teorema do Valor Intermediário

O teorema seguinte estabelece matematicamente, o princípio bastante plausível de que uma função contínua definida num intervalo não pode passar de um valor para outro sem passar por todos valores intermediários.

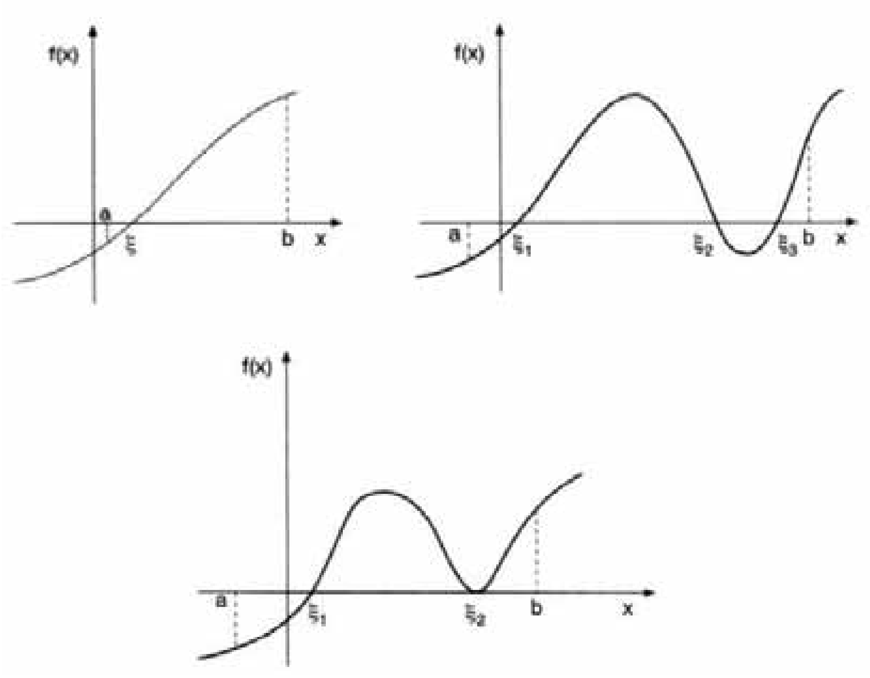
Teorema 2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe pelo menos um $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = d$.*

A seguir, apresentaremos o Teorema de Bolzano, que é um caso particular do Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 3. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$.*

Lembrando que, para alunos do ensino médio, podemos passar uma ideia intuitiva, ilustrada a seguir.

Figura 2.10: Gráficos que mostram que se $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais contrários, então existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$.



Fonte: Afuso. A. Y, 2014, p.44

Em geral, as aplicações do Teorema do Valor Intermediário recaem no caso particular do Teorema de Bolzano. Uma das aplicações mais úteis deste teorema está relacionada ao problema da existência de raízes reais para uma dada função.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de aplicações do Teorema de Bolzano, que será de essencial importância para o próximo capítulo.

Exemplo 13. *Seja* $f(x) = x^3 - 9x + 3$*, determine os intervalos que contenham raízes reais.*

Solução:

Por opção própria, o autor escolheu os cinco valores inteiros negativos e os quatro valores inteiros positivos mais próximos de $x = 0$. A tabela abaixo, mostra o valor da imagem de cada x.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-77	-25	3	13	11	3	-5	-7	3	31

A função f é contínua, pois se trata de uma função polinomial. Utilizando o Teorema de Bolzano, constatamos a existência de raízes nos seguintes intervalos $[-4, -3]$, $[0, 1]$ e $[2, 3]$.

Exemplo 14. *Seja* $f(x) = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130$*, determine os intervalos que contenham raízes reais.*

Solução:

x	-5	-4	-3	0	1	2	3	4	5	7	10
$f(x)$	970	190	-184	-130	-20	46	50	-2	-80	-74	1870

A função f é contínua, pois se trata de uma função polinomial. Utilizando o Teorema de Bolzano, constatamos a existência de raízes nos seguintes intervalos $[-4, -3]$, $[1, 2]$, $[3, 4]$ e $[7, 10]$.

Exemplo 15. *Mostre que* $f(x) = x^5 + x + 1$ *admite pelo menos uma raiz real.*

Solução:

A função f é contínua, pois se trata de uma função polinomial. Além disso, observe que $f(0) = 1$ e $f(-1) = -1$. Pelo Teorema de Bolzano, temos que existe pelo menos um $\xi \in (-1, 0)$ tal que $f(\xi) = 0$. Portanto, a função f admite pelo menos uma raiz real entre -1 e 0.

Exemplo 16. *Mostre que* $f(x) = x \cdot ln(x) - 3$ *admite pelo menos uma raiz real.*

Solução:

A função f é contínua em $(0, +\infty)$. Além disso, observe que $f(1) = -3$, $f(2) = ln(4) - 3 < 0$, pois $ln(4) < ln(e^3) = 3$; e o valor de $f(3) = ln(27) - 3 > 0$, pois $ln(27) > ln(e^3) = 3$. Pelo Teorema de Bolzano, temos que existe pelo menos um $\xi \in (2, 3)$ tal que $f(\xi) = 0$. Portanto, a função f admite pelo menos uma raiz real entre 2 e 3.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Neste capítulo, estudaremos os métodos numéricos da bisseção e de Newton-Raphson. Estes métodos iterativos fazem o refinamento da aproximação inicial obtida na fase de isolamento das raízes, ou seja, eles calculam aproximações para as raízes reais de uma função f que estejam suficientemente próximas das raízes.

Um método numérico iterativo constrói uma sequência de aproximações x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ... para a raiz de f. A sequência construída converge para a raiz de f de modo que, em um número finito de repetições do procedimento, é possível obter uma aproximação que satisfaça uma precisão prefixada.

3.1 Método da Bisseção

O método da bisseção irá determinar uma sequência de valores x_i que convergem para a raiz de f.

Vejamos passo a passo o método:

• Seja a função f contínua no intervalo $I = [a, b]$.

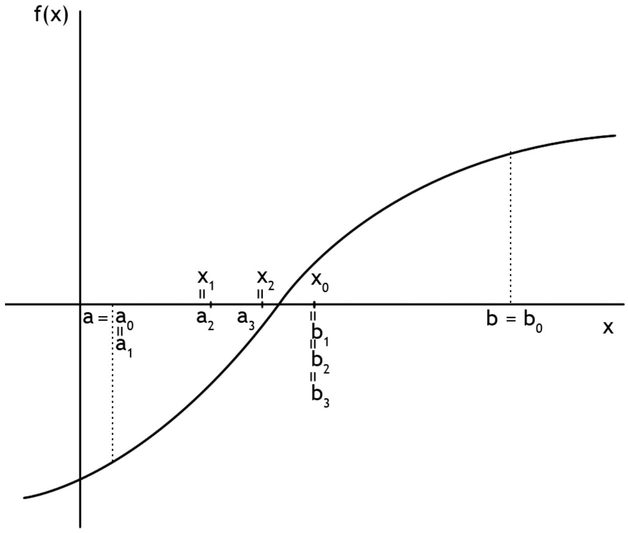
• Garanta que na escolha do intervalo $[a, b]$, tenhamos $f(a) \cdot f(b) < 0$.

• Vamos supor, para simplificar, que o intervalo (a, b) contenha uma única solução da equação $f(x) = 0$.

• O objetivo deste método é reduzir a amplitude de intervalos que contêm a raiz de f , obtendo intervalos $I_i = [a_i, b_i]$, com $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$, e determinando a cada passo, um novo $x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$, cada vez mais próximo da raiz procurada.

• O método é finalizado quando $E_i = |x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$, sendo ε uma constante positiva que chamaremos de precisão.

Figura 3.1: Método da bisseção graficamente



Fonte: Afuso. A. Y, 2014, p.47

3.1.1 Estimativa para o número de Iterações

Ao desenvolver o método, teremos a seguinte sequência de intervalos $[a_k, b_k]$ tal que:

$$
\begin{aligned}
|b_1 - a_1| &= \frac{|b_0 - a_0|}{2} \\
|b_2 - a_2| &= \frac{|b_1 - a_1|}{2} = \frac{|b_0 - a_0|}{2^2} \\
&\vdots \\
|b_k - a_k| &= \frac{|b_0 - a_0|}{2^k}
\end{aligned}
$$

Como queremos que $b_k - a_k < \varepsilon$, temos que $\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon$. Desta forma:

$$\frac{b_0-a_0}{2^k} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{b_0-a_0}{\varepsilon} < 2^k \Leftrightarrow \log(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}) < \log(2^k) \Leftrightarrow \log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon) < k\log(2).$$

Desta forma, utilizando o erro absoluto como critério de parada, temos um limitante para o número mínimo de iterações a serem realizadas para determinar a raiz de uma função através do método da bisseção:

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}.$$

3.1.2 Algoritmo do Método da Bisseção

Seja a função f contínua no intervalo $I = [a, b]$ e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Para encontrar o valor $\bar{x}$ aproximado da raiz da função f no intervalo $I = [a, b]$, com precisão ε, façamos o seguinte:

Considere $x_0 = \frac{a+b}{2}$ e os intervalos $[a, x_0]$ e $[x_0, b]$, que são as duas metades do intervalo inicial $I = [a, b]$. Calculamos o valor de $f(x_0)$ e verificamos se $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ ou $f(x_0) \cdot f(b) < 0$.

Assim, determinaremos em qual metade, I_1, estará o valor aproximado $\bar{x}$ da raiz de f.

Em seguida, repetimos o processo para o intervalo que contém $\bar{x}$: dividimos o intervalo ao meio, no valor x_1, e verificamos em qual metade estará $\bar{x}$, no intervalo I_2 .

Assim, repetimos o processo até um valor x_k tal que $E_k = |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$, onde ε é a precisão desejada.

Exemplo 17. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^3 - 9x + 3$ *e uma precisão* $\varepsilon = 0,1$.

(a)Determine o menor número de iterações que faremos para determinar aproximadamente a menor raiz positiva da função f, utilizando o método da bisseção.

(b) Determine a menor raiz positiva da função f*, utilizando o método da bisseção.*

Solução da letra (a):

Vimos, no capítulo anterior, que a função f possui raízes nos intervalos $[-4, -3]$, $[0, 1]$ e $[2, 3]$. Portanto a menor raiz positiva de f será $\xi \in [0, 1]$.

Dessa forma:

$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)} = \frac{\log(1-0) - \log(0,1)}{\log(2)} \approx 3,3.$

Assim, faremos no mínimo 4 iterações.

Solução da letra (b):

- $I_0 = [0, 1]$

- $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0,5$

- Como $f(0,5) < 0$, $f(0) > 0$ e $f(1) < 0$, temos o novo intervalo $I_1 = [0; 0,5]$

- $x_1 = \frac{0+0,5}{2} = 0,25$

- Como $|x_1 - x_0| = |0,25 - 0,5| = 0,25 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(0,25) > 0$, $f(0) > 0$ e $f(0,5) < 0$, temos o novo intervalo $I_2 = [0,25; 0,5]$

- $x_2 = \frac{0,25+0,5}{2} = 0,375$

- Como $|x_2 - x_1| = |0,375 - 0,25| = 0,125 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(0,375) < 0$, $f(0,25) > 0$ e $f(0,5) < 0$, temos o novo intervalo $I_3 = [0,25; 0,375]$

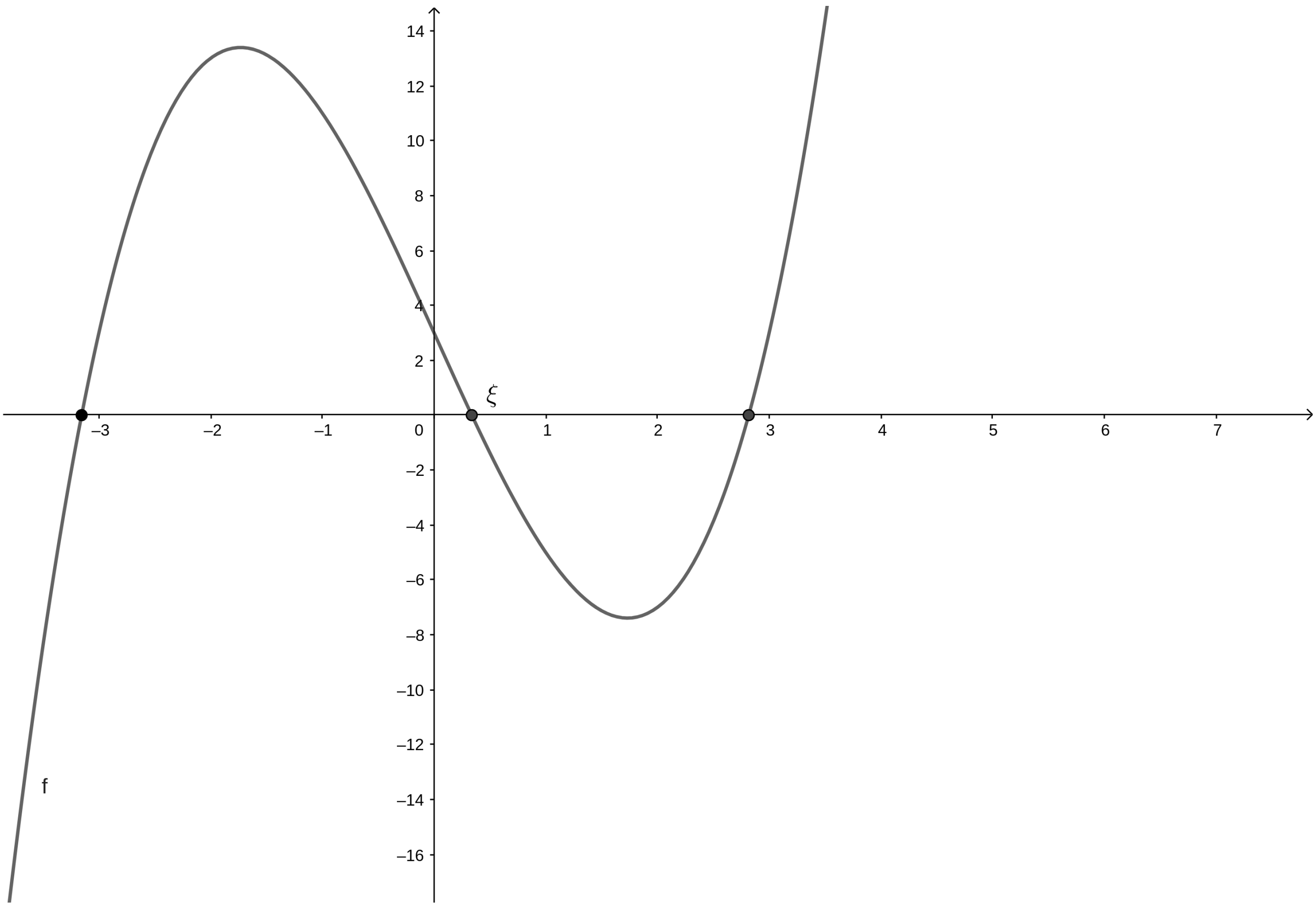
- $x_3 = \frac{0,25+0,375}{2} = 0,3125$

- Como $|x_3 - x_2| = |0,3125 - 0,375| = 0,0625 < \varepsilon$, paramos o processo.

Portanto, a menor raiz positiva da função f é, aproximadamente, $\bar{x} = 0,3125$.

Ao traçar o gráfico utilizando o software Geogebra, encontramos a raiz de f igual a $\xi = 0,3376089559$ com um arredondamento de 10 casas decimais, que ajuda a ratificar o resultado encontrado utilizando o método.

Figura 3.2: $f(x) = x^3 - 9x + 3$



Exemplo 18. *Encontre a raiz da função* $f(x) = x^5 + x + 1$ *pertencente ao intervalo* $[-1, 0]$ *e com precisão* $\varepsilon = 0,01$.

Solução:

- $I_0 = [-1, 0]$

- $x_0 = \frac{-1+0}{2} = -0,5$

- Como $f(-0,5) > 0$, $f(-1) < 0$ e $f(0) > 0$, temos o novo intervalo $I_1 = [-1; -0,5]$

- $x_1 = \frac{(-1)+(-0,5)}{2} = -0,75$

- Como $|x_1 - x_0| = |-0,75 - (-0,5)| = 0,25 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(-0,75) > 0$, $f(-1) < 0$ e $f(-0,5) > 0$, temos o novo intervalo $I_2 = [-1; -0,75]$

- $x_2 = \frac{(-1)+(-0,75)}{2} = -0,875$

- Como $|x_2 - x_1| = |-0,875 - (-0,75)| = 0,125 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(-0,875) < 0$, $f(-1) < 0$ e $f(-0,75) > 0$, temos o novo intervalo $I_3 = [-0,875; -0,75]$

- $x_3 = \frac{(-0,875)+(-0,75)}{2} = -0,8125$

- Como $|x_3 - x_2| = |-0,8125 - (-0,875)| = 0,0625 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(-0,8125) < 0$, $f(-0,875) < 0$ e $f(-0,75) > 0$, temos o novo intervalo $I_4 = [-0,8125; -0,75]$

- $x_4 = \frac{(-0,8125)+(-0,75)}{2} = -0,78125$

- Como $|x_4 - x_3| = |-0,78125 - (-0,8125)| = 0,03125 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(-0,78125) < 0$, $f(-0,8125) < 0$ e $f(-0,75) > 0$, temos o novo intervalo $I_5 = [-0,78125; -0,75]$

- $x_5 = \frac{(-0,78125)+(-0,75)}{2} = -0,76563$

- Como $|x_5 - x_4| = |-0,76563 - (-0,78125)| = 0,01562 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(-0,76563) < 0$, $f(-0,78125) < 0$ e $f(-0,75) > 0$, temos o novo intervalo $I_6 = [-0,76563; -0,75]$

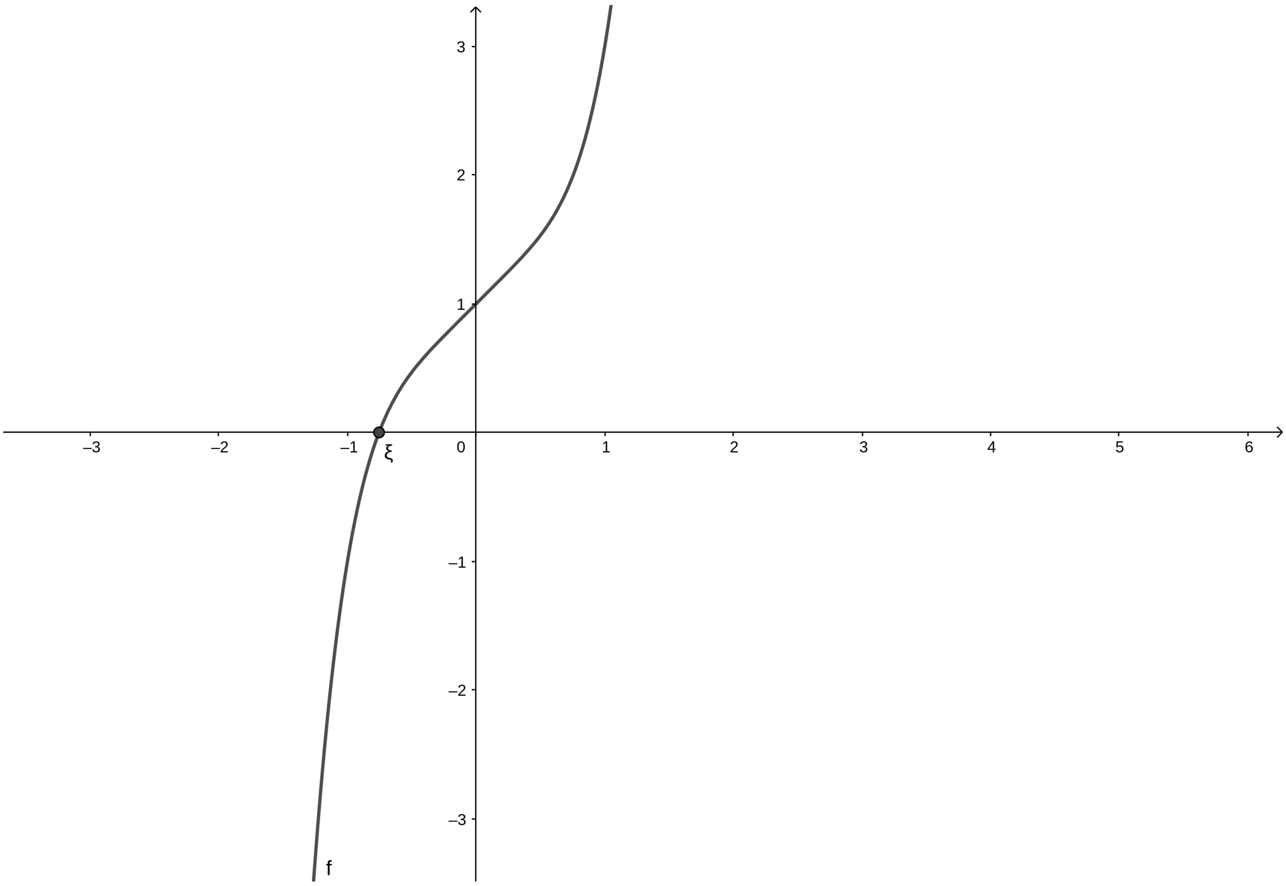
- $x_6 = \frac{(-0,76563)+(-0,75)}{2} = -0,75782$

- Como $|x_6 - x_5| = |-0,75782 - (-0,76563)| = 0,00781 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, a raiz procurada é, aproximadamente, $\bar{x} = -0,75782$.

Ao traçar o gráfico utilizando o software Geogebra, encontramos a raiz de f igual a $\xi = -0,7548776662$ com um arredondamento de 10 casas decimais, que ajuda a ratificar o resultado encontrado utilizando o método.

Figura 3.3: $f(x) = x^5 + x + 1$



Exemplo 19. *Encontre a raiz da função* $f(x) = x \cdot ln(x) - 3$ *pertencente ao intervalo* $[2,3]$ *e com precisão* $\varepsilon = 0,01$.

Solução:

- $I_0 = [2,3]$

- $x_0 = \frac{2+3}{2} = 2,5$

- Como $f(2,5) < 0$, $f(2) < 0$ e $f(3) > 0$, temos o novo intervalo $I_1 = [2,5;3]$

- $x_1 = \frac{2,5+3}{2} = 2,75$

- Como $|x_1 - x_0| = |2,75 - 2,5| = 0,25 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(2,75) < 0$, $f(2,5) < 0$ e $f(3) > 0$, temos o novo intervalo $I_2 = [2,75; 3]$

- $x_2 = \frac{2,75+3}{2} = 2,875$

- Como $|x_2 - x_1| = |2,875 - 2,75| = 0,125 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(2,875) > 0$, $f(2,75) < 0$ e $f(3) > 0$, temos o novo intervalo $I_3 = [2,75; 2,875]$

- $x_3 = \frac{2,75+2,875}{2} = 2,8125$

- Como $|x_3 - x_2| = |2,8125 - 2,875| = 0,0625 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(2,8125) < 0$, $f(2,75) < 0$ e $f(2,875) > 0$, temos o novo intervalo $I_4 = [2,8125; 2,875]$

- $x_4 = \frac{2,8125+2,875}{2} = 2,84375$

- Como $|x_4 - x_3| = |2,84375 - 2,8125| = 0,03125 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(2,84375) < 0$, $f(2,8125) < 0$ e $f(2,875) > 0$, temos o novo intervalo $I_5 = [2,84375; 2,875]$

- $x_5 = \frac{2,84375+2,875}{2} = 2,859375$

- Como $|x_5 - x_4| = |2,859375 - 2,84375| = 0,015625 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(2,859375) > 0$, $f(2,84375) < 0$ e $f(2,875) > 0$, temos o novo intervalo $I_6 = [2,84375; 2,859375]$

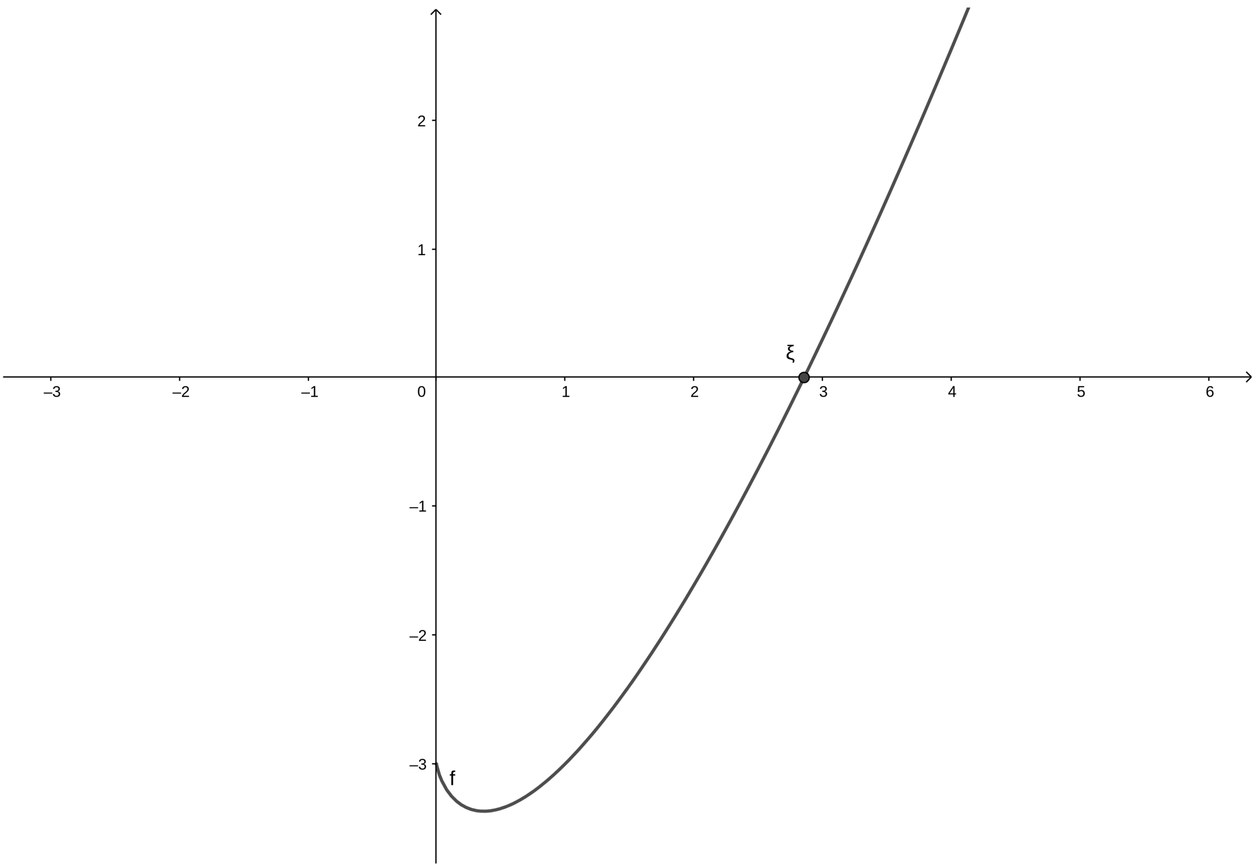
- $x_6 = \frac{2,84375+2,859375}{2} = 2,8515625$

- Como $|x_6 - x_5| = |2,8515625 - 2,859375| = 0,0078125 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, a raiz procurada é, aproximadamente, $\bar{x} = 2,8515625$.

Ao traçar o gráfico utilizando o software Geogebra, encontramos a raiz de f igual a $\xi = 2,8573907836$, com um arredondamento de 10 casas decimais, que ajuda a ratificar o resultado encontrado utilizando o método.

Figura 3.4: $f(x) = x.ln(x) - 3$



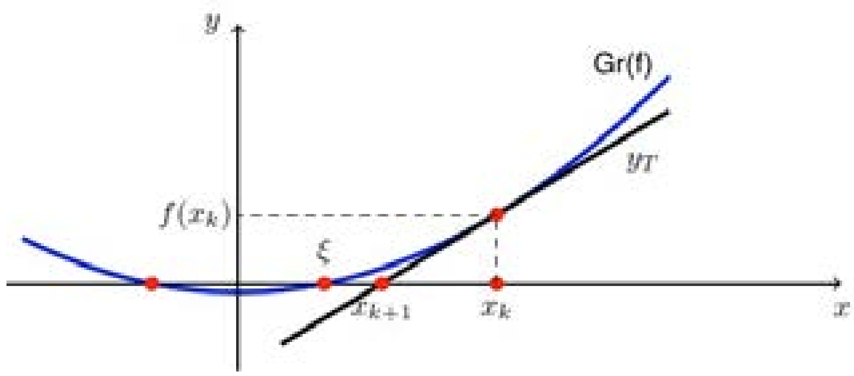
3.2 Método de Newton-Raphson

Esse método, também conhecido como método das tangentes, tem por objetivo a determinação de valores aproximados das raízes de uma função, e foi proposto por Isaac Newton em dois momentos: em 1669 em sua obra *De analysi per aequationes número terminorum infinitas*, onde era composta por ideias adquiridas em 1665-1666 sendo publicado apenas em 1711 e em sua outra obra *De metodis fluxionum et serierum infinitarum*, escrito em 1671, sendo aprimorado para qualquer tipo de função real em 1690 por Joseph Raphson. Daí sua popularidade como método de Newton-Raphson. Entretanto foi extremamente importante a atuação de tantos outros grandes matemáticos como L. A. Cauchy, J. Fourier, Kantorovich, Fine e Bennet, entre outros, os quais contribuíram com o método provando que o mesmo convergia quadraticamente desde que o ponto inicial fosse tomado em uma vizinhança da solução procurada (Fourier), que o mesmo se estende para funções de várias variáveis, e que pode ser utilizado para se provar a existência de raízes de outras equações (Cauchy).

3.2.1 Interpretação Geométrica do Método

Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com $\Delta f(x_k, h) \neq 0$ e $h \neq 0$, onde $\Delta f(x_k, h) = \frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h}$. A partir de um valor arbitrário x_k , podemos determinar a reta y_T que chamaremos de tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_k, f(x_k))$. Esta reta y_T intersectará o eixo x no ponto $Q(x_{k+1}, 0)$ e fará um ângulo β com este eixo, conforme a figura abaixo.

Figura 3.5: Reta tangente ao Gráfico de f



Fonte: Afuso. A. Y, 2014, p.51

Sabemos, do cálculo diferencial, que o coeficiente angular da reta y_T , isto é, $\tan(\beta)$, é dado pelo valor da derivada de f em x_k.

Como esse trabalho é destinado aos alunos do ensino médio, não utilizaremos o conceito de derivada do cálculo diferencial.

Diremos que número $\Delta f(x_k, h)$ se aproxima de $\tan(\beta)$, quando h se aproxima de zero. Assim, temos que:

$\tan(\beta) = \frac{f(x_k)-0}{x_k-x_{k+1}}$

$\Delta f(x_k, h) \approx \frac{f(x_k)}{x_k-x_{k+1}}$

$\Delta f(x_k, h) \cdot (x_k - x_{k+1}) \approx f(x_k)$

$x_k - x_{k+1} \approx \frac{f(x_k)}{\Delta f(x_k,h)}$.

Assim, a fórmula recursiva é:

$x_{k+1} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{\Delta f(x_k,h)}$, para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

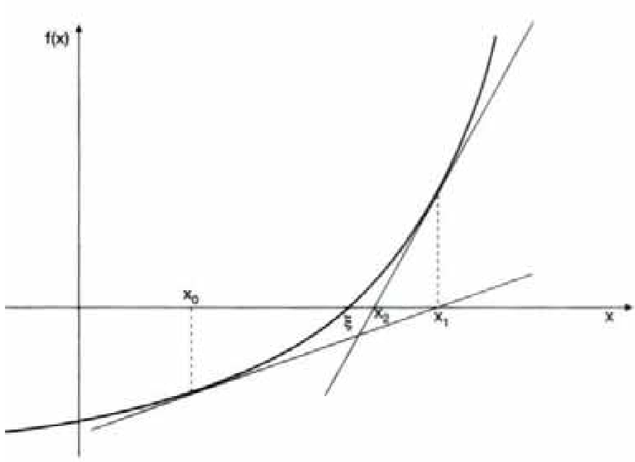
A escolha de uma boa aproximação inicial x_0 é essencial para uma boa e rápida convergência do método.

Uma aproximação inicial x_0 longe da solução ou tal que $\Delta f(x_0, h) \approx 0$, pode acarretar em um número grande de iterações para determinar a solução desejada.

Já a escolha de uma aproximação inicial x_0 tal que $\Delta f(x_0, h) = 0$, impossibilitará a realização do método.

O valor aproximado $\bar{x}$ da raiz da função f será igual a x_{k+1} se, dado a precisão ε, $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Figura 3.6: Método de Newton-Raphson graficamente



Fonte: Afuso. A. Y, 2014, p.53

Exemplo 20. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^3 - 9x + 3$ *e uma precisão* $\varepsilon = 0,1$. *Determine a menor raiz positiva da função* f, *utilizando o método de Newton-Raphson.*

Solução:

$$\Delta f(x_k, h) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = \frac{(x_k + h)^3 - 9 \cdot (x_k + h) + 3 - (x_k^3 - 9x_k + 3)}{h} =$$

$$\frac{3x_k^2 h + 3x_k h^2 + h^3 - 9h}{h} = \frac{h \cdot (3x_k^2 + 3x_k h + h^2 - 9)}{h} = 3x_k^2 + 3x_k h + h^2 - 9.$$

Quando $h \approx 0$, $\Delta f(x_k, h) \approx 3x_k^2 - 9$.

$x_{k+1} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{\Delta f(x_k,h)} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{3x_k^2 - 9}$.

Vimos, no capítulo anterior, que a função f possui raízes nos intervalos $[-4, -3]$, $[0, 1]$ e $[2, 3]$. Portanto a menor raiz positiva de f será $\xi \in [0, 1]$.

A escolha de x_0 poderia ser qualquer valor no intervalo $[0, 1]$. Por opção do autor, foi escolhido $x_0 = \frac{1}{2}$.

- $f(x_0) = -1,375$

- $x_1 \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{3x_0^2 - 9} \approx \frac{1}{2} - \frac{-1,375}{3.(0,5)^2 - 9} \approx 0,33333$

- Como $|x_1 - x_0| \approx |0,33333 - 0,5| \approx 0,16667 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- $f(x_1) \approx 0,03707$

- $x_2 \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{3x_1^2 - 9} \approx 0,33333 - \frac{0,03707}{3.(0,33333)^2 - 9} \approx 0,33761$

- Como $|x_2 - x_1| \approx |0,33761 - 0,33333| \approx 0,00428 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, a raiz procurada é, aproximadamente, $\bar{x} = 0,33761$.

Ao traçar o gráfico utilizando o software Geogebra, encontramos a raiz de f igual a $\xi = 0,3376089559$ com um arredondamento de 10 casas decimais, que ajuda a ratificar o resultado encontrado utilizando o método.

Portanto, observamos uma melhor aproximação da raiz encontrada, utilizando o método de Newton-Raphson do que o valor da raiz $\bar{x} = 0,3125$, encontrada utilizando o método da Bisseção, no exemplo 17.

Exemplo 21. *Encontre a raiz da função* $f(x) = x^5 + x + 1$ *pertencente ao intervalo* $[-1, 0]$ *e com precisão* $\varepsilon = 0,01$.

Solução:

$$\Delta f(x_k, h) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = \frac{(x_k + h)^5 + x_k + h + 1 - (x_k^5 + x_k + 1)}{h} = \frac{(x_k + h)^5 - x_k^5 + h}{h} =$$
$$\frac{5x_k^4 h + 10x_k^3 h^2 + 10x_k^2 h^3 + 5x_k h^4 + h^5 + h}{h} = \frac{h \cdot (5x_k^4 + 10x_k^3 h + 10x_k^2 h^2 + 5x_k h^3 + h^4 + 1)}{h} =$$
$$5x_k^4 + 10x_k^3 h + 10x_k^2 h^2 + 5x_k h^3 + h^4 + 1.$$

Quando $h \approx 0$, $\Delta f(x_k, h) \approx 5x_k^4 + 1$.

$x_{k+1} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{\Delta f(x_k, h)} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{5x_k^4 + 1}$.

Seja $x_0 = -\frac{1}{2}$.

- $f(x_0) = 0,46875$

- $x_1 \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{5x_0^4+1} \approx -\frac{1}{2} - \frac{0,46875}{5.(-0,5)^4+1} \approx -0,85714$

- Como $|x_1 - x_0| \approx |-0,85714 - (-0,5)| \approx 0,35714 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- $f(x_1) \approx -0,31980$

- $x_2 \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{5x_1^4+1} \approx -0,85714 - \frac{-0,31980}{5.(-0,85714)^4+1} \approx -0,77068$

- Como $|x_2 - x_1| \approx |-0,77068 - (-0,85714)| \approx 0,08646 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- $f(x_2) \approx -0,04256$

- $x_3 \approx x_2 - \frac{f(x_2)}{5x_2^4+1} \approx -0,77068 - \frac{-0,04256}{5.(-0,77068)^4+1} \approx -0,75528$

- Como $|x_3 - x_2| \approx |-0,75528 - (-0,77068)| \approx 0,0154 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- $f(x_3) \approx -0,00106$

- $x_4 \approx x_3 - \frac{f(x_3)}{5x_3^4+1} \approx -0,75528 - \frac{-0,00106}{5.(-0,75528)^4+1} \approx -0,75490$

- Como $|x_4 - x_3| \approx |-0,75490 - (-0,75528)| \approx 0,00038 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, a raiz procurada é, aproximadamente, $\bar{x} = -0,75490$.

Ao traçar o gráfico utilizando o software Geogebra, encontramos a raiz de f igual a $\xi = -0,7548776662$ com um arredondamento de 10 casas decimais, que ajuda a ratificar o resultado encontrado utilizando o método.

Portanto, observamos uma melhor aproximação da raiz encontrada, utilizando o método de Newton-Raphson do que o valor da raiz $\bar{x} = -0,75782$, encontrada utilizando o método da Bisseção, no exemplo 18.

Capítulo 4

Aplicação dos métodos numéricos

Neste capítulo, apresentaremos uma atividade com três exercícios de aplicação dos métodos do capítulo anterior.

Os professores poderão aplicar a atividade, nas turmas do ensino médio, após a abordagem teórica dos métodos numéricos. Para a realização dela, é necessário que os alunos tenham um conhecimento prévio sobre o software Geogebra.

Abaixo, algumas recomendações aos professores, na aplicação da atividade:

- Uma estimativa de tempo de três horas;

- Ser realizada em um laboratório de matemática, com disponibilidade de um computador para cada aluno;

- Auxiliar os alunos, em possíveis dificuldades na resolução;

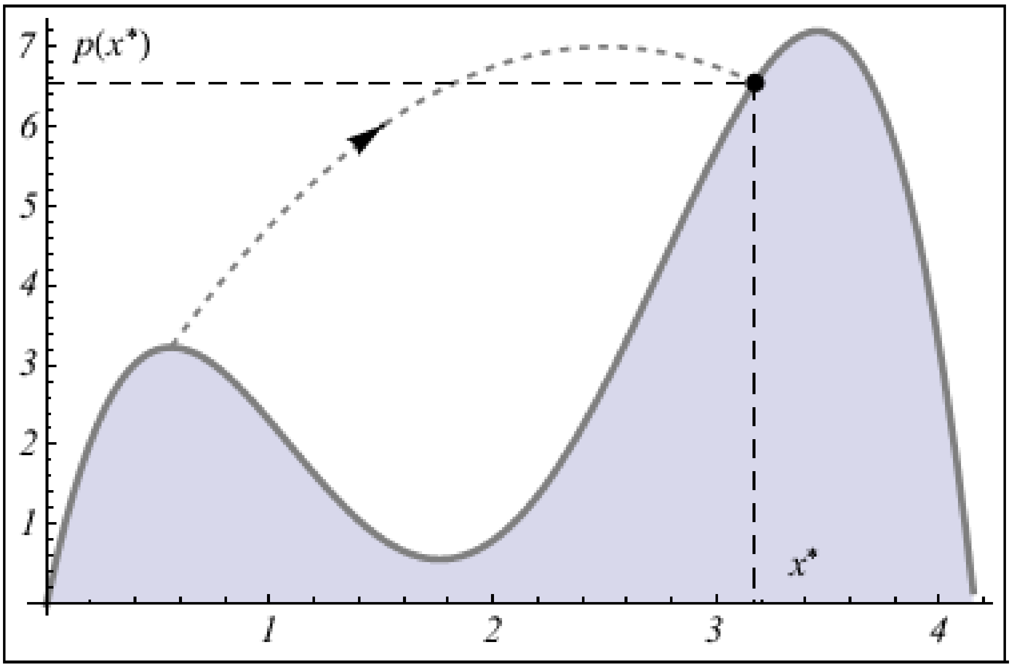
- Os alunos poderão utilizar calculadora;

- Não considerar a atividade como uma prova de avaliação. Ela poderá ser considerada como uma atividade valendo uma pontuação extra.

A seguir, a atividade de aplicação dos métodos numéricos.

Exercício 1. A região sombreada do gráfico apresentado a seguir representa o perfil de duas elevações dado pela função $p(x) = -x^4 + 7,7x^3 - 18x^2 + 13,6x$. Um projétil é lançado a partir da menor elevação e descreve uma curva dada por $q(x) = -x^2 + 5x + 0,75$. Determine a altura na qual ocorre o impacto com a maior elevação.

Figura 4.1: Gráfico-exercício 1



Fonte: Álvaro Tadeu Ferreira, J, 2013, p.30

a) Utilizando o método da bisseção, com precisão $\varepsilon = 0,03$;

b) Utilizando o método de Newton-Raphson, com precisão $\varepsilon = 0,03$;

c) Utilizando o Geogebra, encontre a solução com 10 casas decimais e compare com os valores obtidos nas letras a) e b).

Solução: a) O ponto de impacto é aquele no qual $p(x) = q(x)$, ou seja:

$-x^4 + 7,7x^3 - 18x^2 + 13,6x = -x^2 + 5x + 0,75.$

Resultando, na seguinte equação a ser resolvida:

$f(x) = -x^4 + 7,7x^3 - 17x^2 + 8,6x - 0,75 = 0.$

Pelo gráfico, verifica-se que a raiz de interesse está em $(3; 3,4)$ ou $(3; 3,2)$.

Aplicando o método da bisseção:

$f(3) = -1,05$ $f(3,4) = 0,977$ $f(3,2) = 0,146$. Logo, a raiz está no intervalo $(3; 3,2)$.

• $x_0 = \frac{3+3,2}{2} = 3,1$

• Como $f(3) < 0$, $f(3,1) = -0,4214 < 0$ e $f(3,2) > 0$, temos o novo intervalo $I_1 = [3,1; 3,2]$

• $x_1 = \frac{3,1+3,2}{2} = 3,15$

• Como $|x_1 - x_0| = |3,15 - 3,1| = 0,05 > \varepsilon$, continuamos o processo.

• Como $f(3,1) < 0$, $f(3,15) = -0,1283 < 0$ e $f(3,2) > 0$, temos o novo intervalo $I_2 = [0,25; 0,5]$

• $x_2 = \frac{3,15+3,2}{2} = 3,175$

• Como $|x_2 - x_1| = |3,175 - 3,15| = 0,025 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, o valor aproximado de x é $3,175$.

O valor aproximado da altura no ponto de impacto é dada por $q(3,175) = 6,544$.

Solução b) Aplicando o método de Newton-Raphson

$$\Delta f(x_k, h) = \frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h} = \frac{-(x_k+h)^4+7,7\cdot(x_k+h)^3-17\cdot(x_k+h)^2+8,6\cdot(x_k+h)-0,75-(-x_k^4+7,7x_k^3-17x_k^2+8,6x_k-0,75)}{h}$$

$$= \frac{-4x_k^3h-6x_k^2h^2-4x_kh^3-h^3+23,1x_k^2h+23,1x_kh^2+7,7h^3-34x_kh-17h^2+8,6h}{h} =$$

$$= \frac{h(-4x_k^3-6x_k^2h-4x_kh^2-h^2+23,1x_k^2+23,1x_kh+7,7h^2-34x_k-17h+8,6)}{h} =$$

$$= -4x_k^3 - 6x_k^2h - 4x_kh^2 - h^2 + 23,1x_k^2 + 23,1x_kh + 7,7h^2 - 34x_k - 17h + 8,6.$$

Quando $h \approx 0$, $\Delta f(x_k, h) \approx -4x_k^3 + 23,1x_k^2 - 34x_k + 8,6$.

$x_{k+1} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{\Delta f(x_k,h)} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{-4x_k^3+23,1x_k^2-34x_k+8,6}$.

Seja $x_0 = 3,1$.

- $f(x_0) = -0,4214$

- $x_1 \approx 3,1 - \frac{-0,4214}{-4.(3,1)^3+23,1.(3,1)^2-34.3,1+8,6} \approx 3,1699$

- Como $|x_1 - x_0| \approx |3,1699 - 3,1| \approx 0,0699 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- $f(x_1) \approx -0,0166$

- $x_2 \approx 3,1699 - \frac{-0,0699}{-4.(3,1699)^3+23,1.(3,1699)^2-34.3,1699+8,6} \approx 3,1729$

- Como $|x_2 - x_1| \approx |3,1729 - 3,1699| \approx 0,003 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, o valor aproximado de x é $3,1729$.

O valor aproximado da altura no ponto de impacto é dada por $q(3,1729) = 6,547$.

Solução: c) Utilizando o Geogebra, encontramos $x \approx 3,1729163047$; e o valor da altura no ponto de impacto é $q(3,1729163047) \approx 6,5471836469$.

Comparando com os valores obtidos nas letras a) e b), observamos uma melhor aproximação para a solução, utilizando o método da letra b).

Exercício 2. Um engenheiro deseja construir um reservatório com a capacidade de 5000 litros, usando $20m^2$ de um certo material nas paredes, fundo e tampa. Sabe-se que esse reservatório tem forma de um prisma reto de altura h e base quadrada com área x^2. Com base no que foi dito, determine:

a) A função que representa a área total do reservatório A_t, em função de x;

b) Os valores aproximados de x e h com precisão $\varepsilon = 0,05$, utilizando o método da bisseção;

c) Os valores aproximados de x e h com precisão $\varepsilon = 0,05$, utilizando o método de Newton-Raphson;

d) Utilizando o Geogebra, encontre os valores de x e h com 10 casas decimais e os compare com os valores obtidos nas letras b) e c).

Solução: a) Utilizando as fórmulas do volume e da área total de um prisma reto, temos que:
$V = x^2 \cdot h$ e $A_t = 2x^2 + 4hx$.

Como o volume do prisma é de 5000 litros, que equivale a $5m^3$, temos que:

$$5 = x^2 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \tfrac{5}{x^2}.$$

Substituindo o valor de h em A_t, obtemos:

$$A_t(x) = 2x^2 + \tfrac{20}{x}.$$

Solução: b) A área total do reservatório é de $20m^2$, então:

$$2x^2 + \tfrac{20}{x} = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3 - 20x + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 10x + 10 = 0\ .$$

Considere que $f(x) = x^3 - 10x + 10$. Como estamos trabalhando com medidas de um prisma, desejamos encontrar as raízes positivas, que neste caso são duas. Assim, experimentando o primeiro, o segundo e o terceiro valor positivo inteiro na função, temos $f(1) = 1$, $f(2) = -2$ e $f(3) = 7$. Portanto, pelo Teorema de Bolzano temos uma raiz no intervalo $[1; 2]$ e outra raiz no intervalo $[2; 3]$.

Vamos utilizar o método da bisseção, para encontrar a primeira raiz positiva.

- $x_0 = \frac{1+2}{2} = 1,5$

- Como $f(1,5) < 0$, $f(1) > 0$ e $f(2) < 0$, temos o novo intervalo $I_1 = [1; 1,5]$

- $x_1 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25$

- Como $|x_1 - x_0| = |1,25 - 1,5| = 0,25 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(1,25) < 0$, $f(1) > 0$ e $f(1,5) < 0$, temos o novo intervalo $I_2 = [1; 1,25]$

- $x_2 = \frac{1+1,25}{2} = 1,125$

- Como $|x_2 - x_1| = |1,125 - 1,25| = 0,125 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(1,125) > 0$, $f(1) > 0$ e $f(1,25) < 0$, temos o novo intervalo $I_3 = [1,125; 1,25]$

- $x_3 = \frac{1,125+1,25}{2} = 1,1875$

- Como $|x_3 - x_2| = |1,1875 - 1,125| = 0,0625 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(1,1875) < 0$, $f(1,125) > 0$ e $f(1,25) < 0$, temos o novo intervalo $I_4 = [1,125; 1,1875]$

- $x_4 = \frac{1,125+1,1875}{2} = 1,15625$

- Como $|x_4 - x_3| = |1,15625 - 1,1875| = 0,03125 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, o valor aproximado de x é $1,15625$.

Como $h = \frac{5}{x^2}$, temos que o valor aproximado de h é:

$h \approx \frac{5}{(1,15625)^2} \approx 3,73996$.

Vamos agora, encontrar a segunda raiz positiva.

- $x_0 = \frac{2+3}{2} = 2,5$

- Como $f(2,5) > 0$, $f(2) < 0$ e $f(3) > 0$, temos o novo intervalo $I_1 = [2; 2,5]$

- $x_1 = \frac{2+2,5}{2} = 2,25$

- Como $|x_1 - x_0| = |2,25 - 2,5| = 0,25 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(2,25) < 0$, $f(2) < 0$ e $f(2,5) > 0$, temos o novo intervalo $I_2 = [2,25; 2,5]$

- $x_2 = \frac{2,25+2,5}{2} = 2,375$

- Como $|x_2 - x_1| = |2,375 - 2,25| = 0,125 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(2,375) < 0$, $f(2,25) < 0$ e $f(2,5) > 0$, temos o novo intervalo $I_3 = [2,375; 2,5]$

- $x_3 = \frac{2,375+2,5}{2} = 2,4375$

- Como $|x_3 - x_2| = |2,4375 - 2,375| = 0,0625 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(2,4375) > 0$, $f(2,375) < 0$ e $f(2,5) > 0$, temos o novo intervalo $I_4 = [2,375; 2,4375]$

- $x_4 = \frac{2,375+2,4375}{2} = 2,40625$

- Como $|x_4 - x_3| = |2,40625 - 2,4375| = 0,03125 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, o valor aproximado de x é $2,40625$.

Como $h = \frac{5}{x^2}$, temos que o valor aproximado de h é:

$h \approx \frac{5}{(2,40625)^2} \approx 0,86355$.

Então, chegamos a conclusão de que as dimensões do reservatório em forma de um prisma reto de base quadrada, serão aproximadamente:

$x \approx 1,15625\ m$ e $h \approx 3,73996\ m$ ou $x \approx 2,40625\ m$ e $h \approx 0,86355\ m$.

Solução: c) Considere que $f(x) = x^3 - 10x + 10$. Vamos utilizar o método de Newton-Raphson, para encontrar a primeira raiz positiva.

$$\Delta f(x_k, h) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = \frac{(x_k + h)^3 - 10 \cdot (x_k + h) + 10 - (x_k^3 - 10x_k + 10)}{h} =$$

$$\frac{3x_k^2 h + 3x_k h^2 + h^3 - 10h}{h} = \frac{h \cdot (3x_k^2 + 3x_k h + h^2 - 10)}{h} = 3x_k^2 + 3x_k h + h^2 - 10.$$

Quando $h \approx 0$, $\Delta f(x_k, h) \approx 3x_k^2 - 10$.

$x_{k+1} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{\Delta f(x_k,h)} \approx x_k - \frac{f(x_k)}{3x_k^2 - 10}$.

Seja $x_0 = 1,5$.

- $f(x_0) = -1,625$
- $x_1 \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{3x_0^2 - 10} \approx 1,5 - \frac{-1,625}{3.(1,5)^2 - 10} \approx 1$
- Como $|x_1 - x_0| \approx |1 - 1,5| \approx 0,5 > \varepsilon$, continuamos o processo.
- $f(x_1) \approx 1$
- $x_2 \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{3x_1^2 - 10} \approx 1 - \frac{1}{3.(1)^2 - 10} \approx 1,14286$
- Como $|x_2 - x_1| \approx |1,14286 - 1| \approx 0,14286 > \varepsilon$, continuamos o processo;
- $f(x_2) \approx 0,06412$
- $x_3 \approx x_2 - \frac{f(x_2)}{3x_2^2 - 10} \approx 1,14286 - \frac{0,06412}{3.(1,14286)^2 - 10} \approx 1,1534$

- Como $|x_3 - x_2| \approx |1,1534 - 1,14286| \approx 0,01054 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, o valor aproximado de x é $1,1534$.

Como $h = \frac{5}{x^2}$, temos que o valor aproximado de h é:

$h \approx \frac{5}{(1,1534)^2} \approx 3,75846$.

Vamos agora, encontrar a segunda raiz positiva.

Seja $x_0 = 2,5$.

- $f(x_0) = 0,625$

- $x_1 \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{3x_0^2-10} \approx 2,5 - \frac{0,625}{3.(2,5)^2-10} \approx 2,42857$

- Como $|x_1 - x_0| \approx |2,42857 - 2,5| \approx 0,07143 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- $f(x_1) \approx 0,03789$

- $x_2 \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{3x_1^2-10} \approx 2,42857 - \frac{0,03789}{3.(2,42857)^2-10} \approx 2,42364$

- Como $|x_2 - x_1| \approx |2,42364 - 2,42857| \approx 0,00493 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, o valor aproximado de x é $2,42364$.

Como $h = \frac{5}{x^2}$, temos que o valor aproximado de h é:

$h \approx \frac{5}{(2,42364)^2} \approx 0,8512$.

Então, chegamos a conclusão de que as dimensões do reservatório em forma de um prisma reto de base quadrada, serão aproximadamente:

$x \approx 1,1534\ m$ e $h \approx 3,75846\ m$ ou $x \approx 2,42364\ m$ e $h \approx 0,8512\ m$.

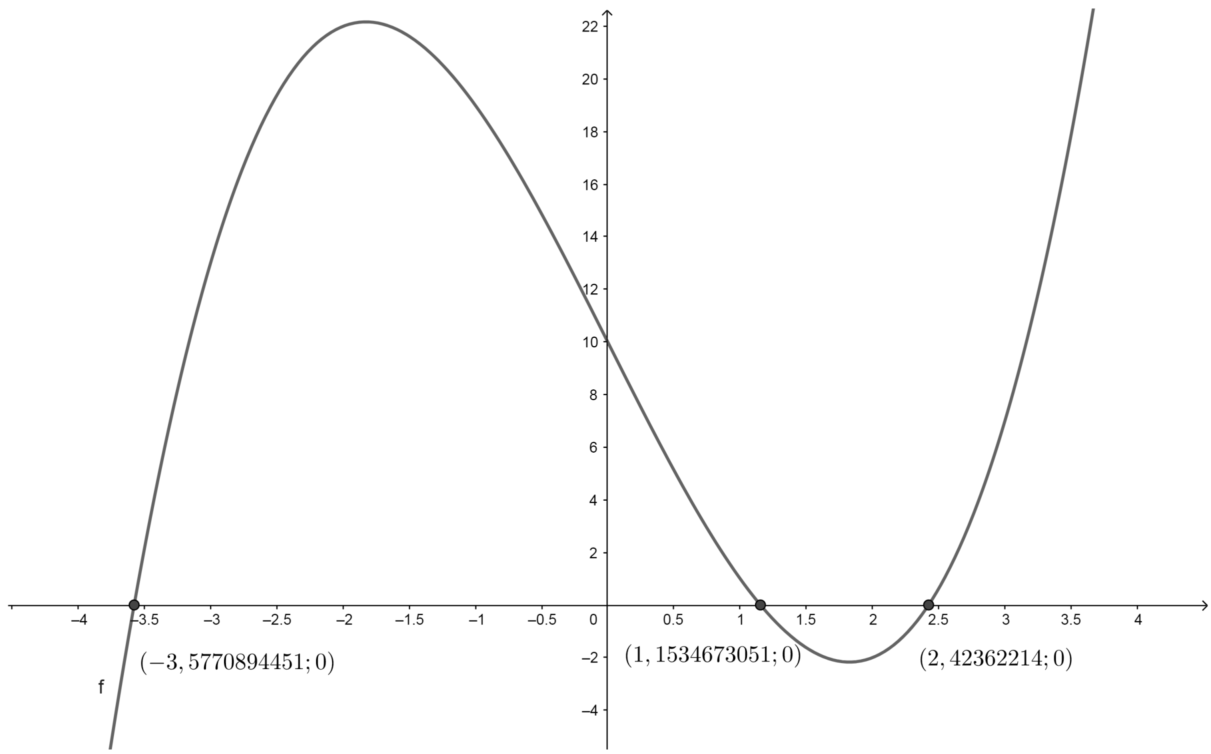
Solução: d) Ao traçar o gráfico no Geogebra, encontramos os seguintes valores:

$x \approx 1,1534673051\ m$ e $h \approx \frac{5}{(1{,}1534673051)^2} \approx 3,7580229357\ m$ ou

$x \approx 2,42362214\ m$ e $h \approx \frac{5}{(2{,}42362214)^2} \approx 0,8512167913\ m.$

Comparando esses valores, com os valores obtidos nas letras b) e c), observamos uma melhor aproximação e uma convergência mais rápida para a solução, utilizando o método da letra c).

Figura 4.2: $f(x) = x^3 - 10x + 10$



Exercício 3. Um automóvel cujo o preço à vista é de $R\$ \ 80.000,00$, será pago em 60 prestações mensais iguais a $R\$ \ 2.000,00$.
Sabendo que $PV = P \cdot (\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n \cdot i})$, onde PV = preço à vista, P = valor das prestações, i = taxa de juros mensal e n = número de prestações.

$$PV \cdot (1+i)^n \cdot i = P \cdot ((1+i)^n - 1)$$

$$PV \cdot (1+i)^n \cdot i - P \cdot ((1+i)^n - 1) = 0.$$

Suponha $f(i) = PV \cdot i \cdot (1+i)^n - P \cdot (1+i)^n + P$ e tome $x = 1+i$, com $i \neq 0$. Então, temos que:

$$g(x) = PV \cdot (x-1) \cdot x^n - P \cdot x^n + P, \text{ com } x \neq 1$$

$$g(x) = PV \cdot x^{n+1} - (PV + P) \cdot x^n + P.$$

a)Determine a taxa de juros mensal com precisão $\varepsilon = 0,001$, utilizando o método numérico da bisseção no intervalo $[1,01; 1,04]$;

b)Determine a taxa de juros mensal com precisão $\varepsilon = 0,001$, utilizando o método numérico de Newton-Raphson. No cálculo do $\Delta f(x_k, h)$, adote $h = 0,005$ e $x_0 = 1,01$;

c) Utilizando o Geogebra, encontre a taxa de juros mensal com 10 casas decimais e compare com os valores obtidos nas letras a) e b).

Solução: a) $g(x) = 80.000 \cdot x^{n+1} - 82.000 \cdot x^n + 2.000 = 0$. Dividindo por 2.000, obtemos:

$$40 \cdot x^{n+1} - 41 \cdot x^n + 1 = 0.$$

Vamos utilizar o método da bisseção, para encontrar a raiz de $g(x)$ no intervalo $[1,01; 1,04]$.

- $x_0 = \frac{1,01+1,04}{2} = 1,025$

- Como $f(1,01) < 0$, $f(1,025) > 0$ e $f(1,04) > 0$, temos o novo intervalo $I_1 = [1,01; 1,025]$

- $x_1 = \frac{1{,}01+1{,}025}{2} = 1,0175$

- Como $|x_1 - x_0| = |1,0175 - 1,025| = 0,0075 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(1,01) < 0$, $f(1,0175) > 0$ e $f(1,025) > 0$, temos o novo intervalo $I_2 = [1,01; 1,0175]$

- $x_2 = \frac{1{,}01+1{,}0175}{2} = 1,01375$

- Como $|x_2 - x_1| = |1,01375 - 1,0175| = 0,00375 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(1,01) < 0$, $f(1,01375) < 0$ e $f(1,0175) > 0$, temos o novo intervalo $I_3 = [1,01375; 1,0175]$

- $x_3 = \frac{1{,}01375+1{,}0175}{2} = 1,015625$

- Como $|x_3 - x_2| = |1,015625 - 1,01375| = 0,001875 > \varepsilon$, continuamos o processo.

- Como $f(1,01375) < 0$, $f(1,015625) > 0$ e $f(1,0175) > 0$, temos o novo intervalo $I_4 = [1,01375; 1,015625]$

- $x_4 = \frac{1{,}01375+1{,}015625}{2} = 1,0146875$

- Como $|x_4 - x_3| = |1,0146875 - 1,015625| = 0,0009375 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, o valor aproximado de x é $1,0146875$. Como $x = 1 + i$, temos que a taxa mensal $i = 0,0146875$, que corresponde a $1,46875\%$.

Solução: b) Vamos utilizar o método de Newton-Raphson, para encontrar a raiz de $g(x)$, adotando $h = 0,005$ e $x_0 = 1,01$.

$$\Delta g(x_0, h) = \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{g(1,015) - g(1,01)}{h} =$$

$$\frac{40 \cdot (1,015)^{61} - 41 \cdot (1,015)^{60} + 1 - [40 \cdot (1,01)^{61} - 41 \cdot (1,015)^{60} + 1]}{0,005} \approx 22,54.$$

- $g(1,01) = -0,09$

- $x_1 \approx 1,01 - \frac{-0,09}{22,54} \approx 1,014$

- Como $|x_1 - x_0| \approx |1,014 - 1,01| \approx 0,004 > \varepsilon$, continuamos o processo.

$$\Delta g(x_1, h) = \frac{g(x_1 + h) - g(x_1)}{h} = \frac{g(1,019) - g(1,014)}{h} =$$
$$\frac{40 \cdot (1,019)^{61} - 41 \cdot (1,019)^{60} + 1 - [40 \cdot (1,014)^{61} - 41 \cdot (1,014)^{60} + 1]}{0,005} \approx 54,18.$$

- $g(1,014) \approx -0,0133$

- $x_2 \approx 1,014 - \frac{-0,0133}{54,18} \approx 1,0142$

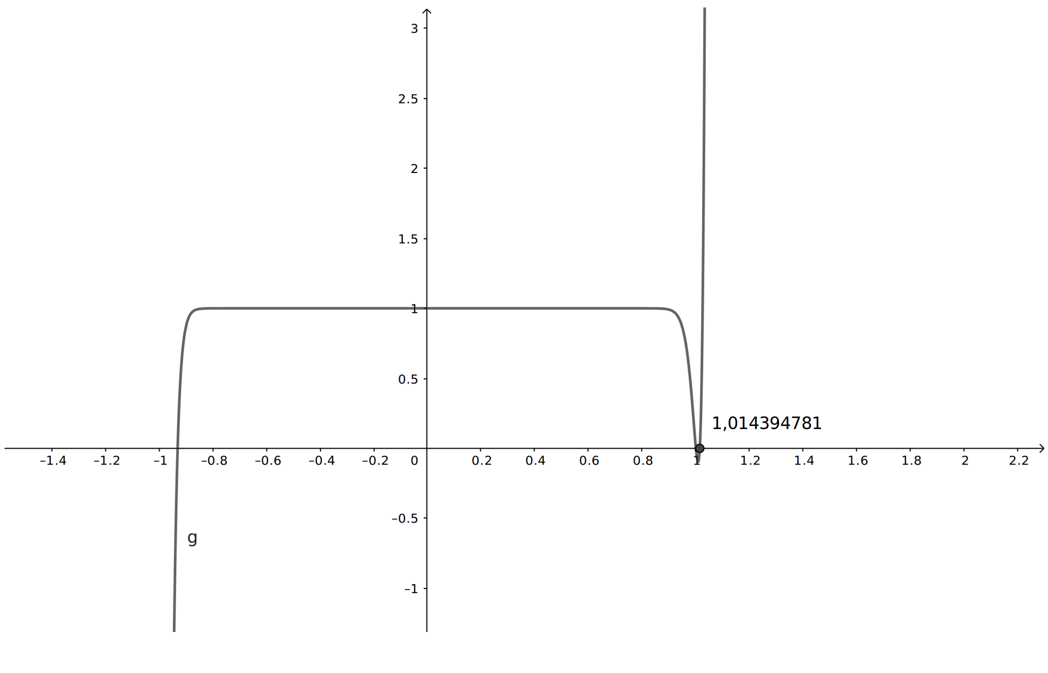
- Como $|x_2 - x_1| \approx |1,0142 - 1,014| \approx 0,0002 < \varepsilon$, paramos o processo.

Assim, o valor aproximado de x é $1,0142$. Como $x = 1 + i$, temos que a taxa mensal $i = 0,0142$, que corresponde a $1,42\%$.

Solução: c) Ao traçar o gráfico no Geogebra, encontramos $x \approx 1,014394781$. Como $x = 1 + i$, temos que a taxa mensal $i = 0,014394781$, que corresponde a $1,4394781\%$.

Comparando esse valor, com os valores obtidos nas letras a) e b), observamos uma melhor aproximação e uma convergência mais rápida para a solução, utilizando o método da letra b).

Figura 4.3: $g(x) = 40x^{61} - 41x^{60} + 1$



Considerações Finais

Esse trabalho servirá como uma proposta de ensino, para os professores do ensino médio.

Ao ensinar e realizar atividades sobre os métodos da bisseção e de Newton-Raphson, o professor deverá esperar que aluno compreenda que os dois métodos apresentaram as soluções desejadas, porém com desempenhos diferentes, pelo fato dos mesmos possuírem atributos peculiares que os diferem no procedimento realizado para o cálculo da raiz aproximada. O método da bisseção mostrou-se ser eficiente no que diz respeito ao objetivo principal, entretanto, a atualização da raiz sempre dividindo o intervalo ao meio demanda um tempo maior para convergir, apesar de ter convergência garantida. O método de Newton-Raphson apresentou resultados, com uma melhor precisão e com rapidez na convergência.

A utilização do software Geogebra auxiliou na constatação do método mais eficiente.

Referências Bibliográficas

[1] Afuso, A. Y. Métodos Numéricos para Encontrar Zeros de Funções: Aplicações para o Ensino Médio. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

[2] Carneiro, R. d. S. Métodos de Resolução de Equações do Terceiro Grau. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015.

[3] Cunha, F. G. M.; Castro, J. K. d. S. *Licenciatura em Matemática. Cálculo Numérico.* UAB, Fortaleza, 2010.

[4] Defendi, M. L., Oliveira, M. B. d., Ferreira, F., and Nascimento, D. S. Teorema Fundamental da Álgebra, 2016.

[5] Ferreira, J. A. T. *Cálculo Numérico -Notas de Aula - Resolução de Equações Não Lineares.* Universidade Federal de Ouro Preto, 2013.

[6] Lima, E. L. *Curso de análise vol.1.* IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[7] Neto, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo.* SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[8] Pereira, P. G. Técnicas do Cálculo Numérico Aplicadas no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.

[9] Pilling, S. *Métodos Numéricos para Encontrar Raízes (zeros) de Funções Reais.* Universidade do Vale do Paraíba, São José dos Campos - SP.