UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA
CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RODRIGO DOS SANTOS FERREIRA

FUNÇÃO EXPONENCIAL E GEOGEBRA: UM ESTUDO SOBRE ABORDAGENS E TAREFAS PARA O ENSINO MÉDIO

BARREIRAS
2021

RODRIGO DOS SANTOS FERREIRA

FUNÇÃO EXPONENCIAL E GEOGEBRA: UM ESTUDO SOBRE ABORDAGENS E TAREFAS PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – modalidade profissional – da Universidade Federal do Oeste da Bahia como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Pereira da Costa

BARREIRAS
2021

FUNÇÃO EXPONENCIAL E GEOGEBRA: UM ESTUDO SOBRE ABORDAGENS E TAREFAS PARA O ENSINO MÉDIO

Por

RODRIGO DOS SANTOS FERREIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – modalidade profissional – da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Pereira da Costa

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Fernanda Andréa Fernandes Silva
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, UFRPE
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos
Doutora em Ensino de Ciências e Matemática, UFRPE
Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira
Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências, UFBA/UEFS
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Prof. Dr. André Pereira da Costa (orientador)
Doutor em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Prof. Dr. Alexandre Luis de Sousa Barros (suplente)
Doutor em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Profa. Dra. Sara Ruth Bispo de Menezes Oliveira (suplente)
Doutora em Matemática, UFBA
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Ficha catalográfica

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

Descartes (1596 – 1650)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelas conquistas que me permitiram chegar até aqui.

Agradeço a toda minha família, minha base, pessoas que tem grande influência na forma como enxergo os significados de respeito, amizade e união. Em especial, agradeço à minha mãe, Roselita dos Santos Almeida, e minha irmã, Raylaine dos Santos Ferreira.

Agradeço a todos os meus professores, representados, aqui, por meu orientador, André Pereira da Costa, que me deu suporte, direcionamentos, ensinamentos, contribuindo e acompanhando de perto todo o processo de construção desta pesquisa.

Agradeço a todos os meus amigos, representados, aqui, por Ulisses Suriano da Silva Neto, um velho parceiro de longa data que sempre me apoiou e me deu força na vida pessoal e acadêmica, valeu por tudo "meu velho".

Agradeço também aos grupos de pesquisa LABORATÓRIO DE INOVAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (LIPEM) - UFOB e o GRUPO DE PESQUISA E ESTUDOS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA (GRUPEDIMA) - UPE por todas as discussões e debates que certamente foram de grande valia, não apenas para esta dissertação, como também para minha constituição como pesquisador e professor.

Por fim, também agradeço a oportunidade de ter sido membro, como representante estudantil, do colegiado do PROFMAT – UFOB. Esta experiência me permitiu aprender, amadurecer e abstrair muita coisa relacionada à vida docente na perspectiva de aluno e professor.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo geral compreender a abordagem sobre o ensino de funções exponenciais, associadas ao uso do GeoGebra, no Ensino Médio em produções científicas, em livros didáticos e em tarefas matemáticas. Para isso, o caminho metodológico do estudo qualitativo compreendeu: a análise das abordagens e discussões sobre as funções exponenciais, associadas à ferramenta GeoGebra, na literatura brasileira científica mais recente; a análise da abordagem das tarefas e suas representações sobre este conceito em livros didáticos de Matemática voltados à supracitada etapa da Educação Básica e, por fim, a análise e proposição de uma abordagem envolvendo tarefas com funções exponenciais por meio do uso didático do software GeoGebra para o citado nível escolar. Verificamos que, no meio científico, o ensino de funções exponenciais está muito associado a contextos da realidade, de modo que sua aplicação como modelo de estudo de fenômenos físicos (termodinâmica), financeiros (juros) e biológicos (reprodução de bactérias) é recorrente nas pesquisas filtradas. Além disso, entre os estudos analisados, há uma preocupação comum em permitir que os estudantes estabeleçam relações entre as representações semióticas deste tipo de função matemática, principalmente, a algébrica e a gráfica. Nesta vertente, a principal contribuição didática, proveniente da associação entre as funções exponenciais e o GeoGebra, é o caráter experimental que este software imprime em sala de aula, permitindo que os estudantes desenvolvam sua autonomia, passando a perceber relações entre diferentes representações. Verificamos que os livros didáticos apresentam, exclusivamente, tarefas na forma de exercícios e problemas. Carecem, assim, de tarefas de estrutura aberta, que permitam que os alunos experimentem, durante as aulas de funções exponenciais, processos investigativos. Desta forma, poderiam exercitar sua capacidade de conjectura, reflexão e descoberta pela experimentação, em vez de receber e aplicar definições e propriedades prontas e de forma objetiva. Entendemos que tal caráter experimental pode ser alcançado com auxílio do GeoGebra, conforme apontam as pesquisas recentes e as tarefas propostas neste estudo.

Palavras-chaves: Função exponencial; GeoGebra; Produções científicas; Livros Didáticos; Tarefas Matemáticas.

ABSTRACT

This research had as general objective to understand the approach on the teaching of exponential functions, associated with the use of GeoGebra, in high school in scientific productions, in textbooks and in mathematical tasks. For this, the methodological path of the qualitative study included: the analysis of approaches and discussions on exponential functions, associated with the GeoGebra tool, in the most recent Brazilian scientific literature; the analysis of the approach to tasks and their representations of this concept in Mathematics textbooks aimed at the aforementioned stage of Basic Education and, finally, the analysis and proposition of an approach involving tasks with exponential functions through the didactic use of GeoGebra software for the aforementioned school level. We found that, in the scientific world, teaching of exponential functions is much associated with contexts of reality, so that its application as a model for the study of physical (thermodynamic), financial (interest) and biological (bacterial reproduction) phenomena is recurrent in filtered searches. In addition, among the studies analyzed, there is a common concern in allowing students to establish relations between the semiotic representations of this type of mathematical function, mainly algebraic and graphical. In this aspect, the main didactic contribution, derived from the association between exponential functions and GeoGebra, is the experimental character that this software prints in the classroom, allowing students to develop their autonomy, starting to perceive relations between different representations. We verified that the textbooks present, exclusively, tasks in the form of exercises and problems. Thus, they lack tasks with an open structure, which allow students to experience, during classes of exponential functions, the investigative processes. In this way, they could exercise their capacity for conjecture, reflection and discovery through experimentation, instead of receiving and applying ready-made definitions and properties in an objective manner. We understand that such an experimental character can be achieved with the help of GeoGebra, as pointed out by recent research and the tasks proposed in this study.

Keywords: Exponential function; GeoGebra; Scientific productions; Didatic books; Math Tasks.

LISTA DE SIGLAS

BNCC	BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR
COVID-19	CORONA VIRUS DISEASE[1]
EDO	EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA
FNDE	FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO
IF-USP	INSTITUTO DE FÍSICA - UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
IGI	INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE
KVA	KIT VIRTUAL DE APOIO
LDCA	LIVRO MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES
LDCM	LIVRO CONTATO MATEMÁTICA
LDXA	LIVRO MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES
NTIC	NOVAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO
PIBID	PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA
PNLD	PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO E DO MATERIAL DIDÁTICO
PROFMAT	MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
SAEB	SISTEMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA
SIMAD	SISTEMA DE CONTROLE DE MATERIAIS DIDÁTICOS
TDIC	TECNOLOGIAS DIGITAIS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO
TIC	TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO
TRRS	TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA
UFOB	UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA
UNEB	UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
UPE	UNIVERSIDADE DE PERNAMBUCO

[1] O “**19**” se refere a 2019, quando surgiram os primeiros casos.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, descrevemos o percurso pessoal, acadêmico e profissional até esta dissertação. Também, apresentamos a justificativa da pesquisa, pautada em sua relevância. Em seguida, são discutidos os temas que fazem parte do núcleo central deste trabalho, além de seus objetivos, aspectos metodólogos e a forma como está estruturado.

1.1. PERCURSO PESSOAL, ACADÊMICO E PROFISSIONAL

Minha aproximação com a matemática surge ainda como aluno no ensino básico, quando, além de sempre gostar da disciplina, também sempre tive o costume de me voluntariar para ser monitor formal e informal dos professores responsáveis pela matéria escolar. Quando digo “informal” me refiro às situações em que, por conta própria, formava grupos de estudos no turno oposto ao das aulas regulares, para ajudar colegas que tinham dificuldades de aprendizagem referente à Matemática.

Dessa forma, já cultivava uma aptidão com a Matemática e com a docência, o que me levou, em 2013, a ingressar no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado da Bahia (UNEB) em Barreiras, oeste da Bahia. Na graduação, tive a oportunidade de participar do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), no subprojeto de Matemática, o qual me permitiu iniciar a construção de minha identidade profissional na docência. Projetos como este dão aos estudantes de licenciatura a oportunidade de fazer experiências, ter um contato menos “formal” e mais próximo dos alunos da Educação Básica. Assim, conheci um pouco mais, como futuro professor, da realidade da educação pública e, junto aos meus colegas e amigos que participaram do PIBID, pudemos desenvolver oficinas centradas no trabalho específico das dificuldades de aprendizagem que emergiam entre os alunos na escola básica.

Após o fim da graduação, em 2017, também conclui uma especialização em Ensino de Matemática e, em 2019, consegui ingressar no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) no polo da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB). Foi uma oportunidade única de conseguir fazer o mestrado na minha área de interesse e na minha cidade. Conhecia o programa desde a graduação, por meio de professores e amigos que haviam conseguido ingressar e se formar nele.

O trabalho com as funções matemáticas sempre esteve presente em minha vida acadêmica, tanto que fizeram parte do núcleo central de minha monografia na graduação, intitulada: *O software GeoGebra como ferramenta didática para o estudo de aplicações de áreas no cálculo integral*. Falando especificamente das funções exponenciais, não estudei devidamente este tipo de função no ensino básico, tanto que só fui conhecer muitas de suas propriedades algébricas e gráficas, bem como suas inúmeras aplicações como modelo de descrição de fenômenos naturais, a partir do ensino superior.

Em meu trabalho de conclusão de curso já havia empregado o *software* GeoGebra como ferramenta didática, além de ter me embasado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), idealizada por Raymond Duval. Por influência do meu orientador no mestrado, André Pereira da Costa, pude me aprofundar mais sobre o tema, tanto sobre a ferramenta tecnológica quanto sobre a teoria, ao mesmo tempo, em que tive a oportunidade de conhecer os estudos de João Pedro da Ponte, acerca das tarefas matemáticas. Foi também por meio do professor André que conheci o formato de produções acadêmicas *multipaper*, como está estruturado este trabalho e que será devidamente explicado mais adiante.

Desta forma, desenvolvi esta pesquisa buscando investigar sobre função exponencial, de modo a contribuir com o ensino deste saber escolar. Para isso, optei por utilizar o *software* GeoGebra, amplamente discutida na Educação Matemática, como ferramenta didática, além de embasamento científico e documental, que me permitiram fazer análises e inferências acuradas, sob a perspectiva da importância deste conteúdo na educação básica.

1.2.JUSTIFICATIVA

As funções matemáticas são alguns dos conteúdos mais discutidos e explorados na Educação Básica, de forma explicita e implícita. A forma implícita ocorre, por exemplo, nos anos iniciais do Ensino Fundamental quando as crianças, no estudo de números, estabelecem uma relação funcional entre os objetos, ao seu redor, com números (no processo de contagem). Já nos anos finais do Ensino Fundamental, no cálculo de áreas de regiões poligonais, quando o professor pede para o aluno alterar os valores das dimensões dos terrenos, isso é função. No caso do quadrado, por exemplo, temos que sua área é dada por $A = a^2$, com "A" sendo a área e "a" seu lado. Com a alteração das dimensões, "A" e "a" tornam-se variáveis e não são mais incógnitas. O estudo explícito e sistemático ocorre no ensino médio. No ensino superior, as funções são base para o estudo dos Cálculos.

Falando especificamente sobre as funções exponenciais, do ponto de vista pessoal, o contato limitado que tive com o conteúdo no ensino médio foi uma das razões que me levaram a querer investigar e estudar mais a fundo este tipo de função. Além disso, com relação aos documentos oficiais, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz ao longo do seu texto várias habilidades e aptidões matemáticas, necessárias para os alunos do Ensino Médio, relacionadas a este tipo de função, tais como,

> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. (BNCC, 2018, p. 536)
> (EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (BNCC, 2018, p. 544)

A última habilidade (EM13MAT403) acima, referente à Matemática e suas Tecnologias (MAT) e que pode ser desenvolvida em qualquer série (13) do Ensino Médio (EM), embasa e faz referência explícita à possiblidade do emprego das tecnologias digitais. Ao optar pela abordagem com apoio desses recursos tecnológicos, nesta pesquisa, escolhemos o GeoGebra. Este software tem sua relevância justificada pelas inúmeras pesquisas e debates desenvolvidos na área de Educação Matemática, associados a diferentes objetos matemáticos (geometria plana, espacial, funções, etc.), que o tem como principal recurso didático em sala de aula (SILVA, 2016; FARIA; SOUZA JUNIOR; CARDOSO, 2016; SOUSA, VIALI; RAMOS, 2017; GOLDINI, 2019, CARDOZO; POSSAMAI, 2019).

. A própria existência dos Institutos GeoGebra corrobora com isso. Tais institutos são organizações sem fins lucrativos presentes em todos os continentes (no Brasil, com sedes em estados como São Paulo, Rio Grande do Norte e Rio de Janeiro) com o propósito de divulgar pesquisas sobre o uso deste programa nas aulas de Matemática.

Importante ressaltar que a mesma habilidade supracitada, que fala sobre as tecnologias digitais, também faz menção à necessidade do estudante saber relacionar as diferentes representações semióticas de uma função exponencial. Não por acaso, o GeoGebra permite o estudo das funções pela análise concomitante, principalmente, de suas representações algébrica e gráfica. Do ponto de vista da TRRS, isso se configura com uma das condições para que se torne possível uma análise mais precisa do processo de compreensão dos estudantes, sobre um determinado assunto matemático (DUVAL, 2017). Algumas pesquisas recentes (SANTOS;

BIANCHINI, 2012; SILVA, 2016; COELHO, 2016; SILVA; LAZZARIN, 2018; GOLDINE, 2019) indicam a dificuldade dos alunos do ensino básico, quanto às funções exponenciais, muito associada ao impasse em reconhecê-la e realizar operações em duas ou mais representações semióticas distintas.

Somando-se a este cenário mencionado, dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) (BRASIL, 2019) indicam desempenhos insatisfatórios dos estudantes sobre este conteúdo. De acordo com os resultados, apenas 0,03% dos alunos do ensino médio baiano foram capazes de reconhecer a expressão algébrica de uma função exponencial a partir de dados fornecidos por um texto (representação em língua natural) ou gráfico (representação gráfica). Praticamente, os números não melhoram quando se analisa o quantitativo de estudantes do Brasil como um todo, que alcançaram esta mesma habilidade (apenas 0,07%).

Outro aspecto que vem sendo foco de discussão na Educação Matemática é a importância que deve ser dada às tarefas matemáticas. Pesquisas recentes, como as de Bonotto e Bisognin (2015), Junkerfeurbom e Klüber (2017), Cunha (2020) e Santos (2020), mostram preocupação centrada, justamente, na natureza das tarefas que o professor aplica em sala de aula na escola básica. Todas estas pesquisas, inclusive, têm embasamento nos estudos de Ponte (2005) que, basicamente, aponta a necessidade de serem levados em conta, na hora de propor uma tarefa, fatores como: o conteúdo com o qual se trabalha; as competências que se quer desenvolver nos estudantes; além de suas capacidades e experiências anteriores com o assunto estudado. Dessa forma, para o autor português, existem diferentes tipos de tarefas, com diferentes finalidades e características, associadas a todos estes fatores. Assim, é exigido um senso crítico do professor na hora de planejar, principalmente com relação ao uso do livro didático.

Santos e Bianchini (2012) alegam que o uso apenas do livro didático, como única ferramenta de trabalho, não é capaz de suprir as dificuldades dos estudantes, com relação às funções exponenciais. Os pesquisadores reforçam a necessidade de diversificação dos métodos de trabalho por parte do professor frente a este conteúdo. Indicam, inclusive, o GeoGebra como uma alternativa possível para superação de tais dificuldades.

Dessa forma, a necessidade da realização desta pesquisa se justifica tendo por base a relevância do conteúdo sobre funções exponenciais para a formação do aluno na Educação Básica, reconhecida pela BNCC (BRASIL, 2018), as dificuldades dos estudantes do ensino básico com relação a este conteúdo, constatada pelo SAEB (BRASIL, 2019), e na forte relação existente entre este objeto matemático e suas múltiplas representações que, por sua vez, podem ser exploradas didaticamente com apoio do GeoGebra e de tarefas que sejam devidamente planejadas.

1.3.FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma função é uma relação entre grandezas que, no trabalho com duas variáveis, associa a cada variável x de um conjunto A (domínio) um único elemento y de um conjunto B (contradomínio), sendo o subconjunto de B constituído dos elementos que se relacionam com os de A chamado de imagem. A função exponencial é um modelo que, como já dito, é base para descrição da relação de várias grandezas, geralmente associadas ao tempo (decaimento radioativo, juros compostos, curva de aprendizagem, etc.) e é definida, algebricamente, com base em Lima (2013), pela aplicação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ monótona injetiva (crescente ou decrescente) com as seguintes propriedades:

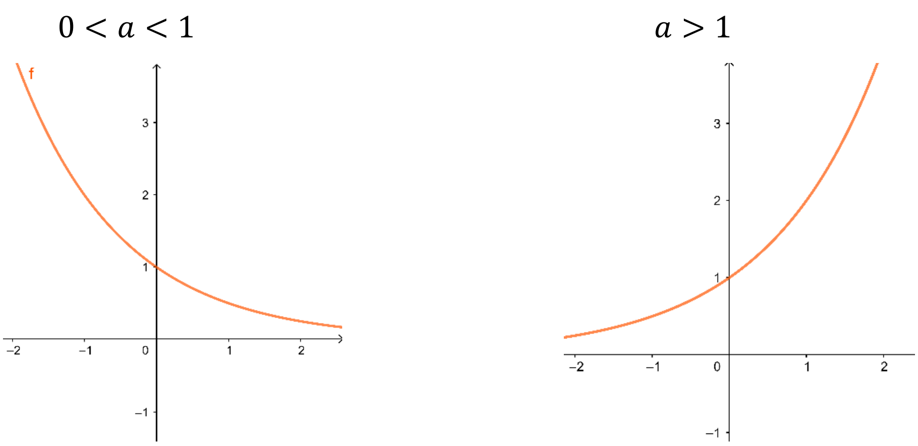
I. $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
II. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
III. $f(x+y) = f(x)f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

A principal diferença desta para as demais funções é que não se preserva um valor absoluto na imagem na diferença de intervalos fixos de seu domínio. O que é mantido, na verdade, é uma proporção de variação com relação ao estado inicial:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = k$$

sendo k uma constante real. Da propriedade II acima, temos que para $a > 1$a função é crescente e para $0 < a < 1$ é decrescente, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1 - Condições de crescimento e decrescimento de uma função exponencial.



Fonte: Autor, 2020

Uma variação importante desta função, que são as ditas funções do tipo exponencial, é definida por Lima (2013) como $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, no qual a e b são constantes positivas. É importante ressaltar, porém, a existência de outras funções derivadas de f que possuem um comportamento exponencial, mesmo não mantendo as mesmas propriedades desta, dadas por

$$h(x) = ba^{cx+d} + k$$

Não há uma conformidade sobre a forma com os livros didáticos de Matemática apresentam estas funções do tipo exponencial de tal forma que alguns se preocupam em diferenciá-las das funções exponenciais, outros não. Nesta pesquisa, nos referiremos à ambas como funções exponenciais, mesmo que, em alguns casos, quando necessário, as diferenciaremos. É um consenso, apenas, que estas funções do tipo exponencial são essenciais no momento em que se estuda o comportamento de fenômenos naturais, de uma forma geral, por serem, na verdade, os reais modelos usados para descrever a relação entre as grandezas mencionadas à priori (FARIA; SOUZA JUNIOR; CARDOSO, 2016).

1.4.EDUCAÇÃO, TECNOLOGIA E GEOGEBRA

A velocidade com a qual as informações circulam, as opiniões mudam, os paradigmas são quebrados e o novo se torna ultrapassado, tudo isso são fatores sociais diretamente guiados por um avanço tecnológico de grande magnitude, que impactam a sociedade como um todo. No que se refere à educação e, mais especificamente, à Educação Matemática, o impacto da tecnologia em sala de aula é uma tendência amplamente discutida no meio acadêmico, cujas pautas envolvem diversos conceitos matemáticos, fazendo emergir mudanças na realidade educacional.

Os termos Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) e, mais recentemente, Novas Tecnologias da Informação e Comunicação (NTIC) e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) são cada vez mais comuns no cotidiano da escola. Kenski (2011) ressalta o fenômeno da “tecnologia da inteligência”, que denota a capacidade e necessidade humana de comunicação por meio de uma linguagem e como a internet diversifica e impulsiona este fato.

Um dos primeiros pontos de discussão sobre a tecnologia na escola é a demanda de conhecimento por parte do professor tanto de natureza técnica (saber utilizar a tecnologia do ponto de vista técnico e instrumental) quanto de ordem didática (saber utilizar a tecnologia para o ensino). Neste sentido, é fundamental a formação de professores para o uso adequado das tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Na universidade, muitos docentes e licenciandos acabam desenvolvendo uma visão superficial de seu emprego em sala de aula em que, apesar de reconhecer sua importância, não são capazes de pensar em uma abordagem de fato (CARVALHO, 2017).

Contudo, recentemente, este cenário tem sido modificado em decorrência da pandemia do *Coronavirus Disease 2019* (COVID-19), logo, professores e estudantes de diferentes níveis escolares mergulhados no ensino remoto, estão ressignificando saberes e experiências, nos quais as tecnologias digitais assumem papel de destaque na mediação pedagógica. Almeida, Nunes e Silva (2021), ao relatarem uma experiência envolvendo o ensino remoto em uma escola pública estadual com alunos do Ensino Médio, já durante a pandemia, alertam que a dificuldade dos professores em acessar e usar os recursos da plataforma *Meet* e do *Google Forms* foram algumas das razões que tornaram a experiência, segundo os mesmos, insatisfatória. Salientam, assim, a necessidade de capacitação técnica e formação continuada por parte dos professores no que diz respeito ao uso das TDIC.

Neste sentido, Leite (2020) associa as metodologias ativas (centradas no protagonismo do aluno em sala de aula) com as tecnologias digitais, entendo esta junção como um caminho para uma “aprendizagem tecnológica ativa” que …

> … possibilita caminhos para uma aprendizagem sólida, centrada nos estudantes, permitindo que o professor acompanhe o processo de construção do conhecimento dos estudantes atuando como orientador, supervisor, facilitador do processo de aprendizagem. Também é possível por meio da aprendizagem personalizada a adaptação da práxis nos ambientes de aprendizagem para atender às necessidades e aspirações individuais dos estudantes, por meio das TDIC neste processo (LEITE, 2020, p.21),

Outro fator essencial é reconhecer a importância do planejamento a nível docente e institucional, dado que, empregar o uso de um determinado recurso tecnológico durante uma aula, como um *software*, por exemplo, exige que o professor antecipe questionamentos, como: Qual aspecto de um determinado assunto ele quer que os alunos analisem? De que forma os alunos podem e devem usar a ferramenta para tal? Quais as possíveis perguntas e entraves que podem surgir? Quais problemas técnicos podem ocorrer? Qual a postura que deve assumir na função de mediador e até que ponto ele deve intervir afim de estimular a autonomia dos estudantes? Tais questões devem ser consideradas quando se pretende utilizar as tecnologias digitais como recurso didático em sala de aula.

De acordo com Sousa *et al* (2017), alguns dos fatores que dificultam a inserção das tecnologias digitais em sala de aula são a baixa infraestrutura tecnológica da instituição ou sua defasagem, a falta de tempo para execução e planejamento das propostas, a falta de interesse de muitos estudantes e o despreparo dos professores para com o uso didático destes recursos. É importante reconhecer, no entanto, que este processo de inserção tecnológica é gradual e demanda tempo até os professores e, consequentemente, a escola se sentirem confortáveis para adaptar, de forma natural, o uso de determinados aparatos com a realidade individual e coletiva do seus alunos(KENSKI, 2013). É importante levar em conta, também, que quando pensamos em ensino público uma série de intervenções e atos administrativos burocráticos são necessários para tornar estas abordagens possíveis, não ficando, assim, somente a cargo da escola e dos professores esta tarefa.

O uso de *softwares* nos mais variados contextos em sala de aula está no núcleo desta discussão justamente por sua implementação (se feita corretamente) poder modificar, na maioria das vezes, toda a dinâmica da aula em termos do que e como se ensina. Em Matemática, um dos *softwares* mais discutidos e empregados é o GeoGebra, proveniente da chamada *Matemática Dinâmica*, entendida como "um atributo dinâmico e interativo de ambientes computacionais, que podem ser utilizados como recursos para os processos de ensino e de aprendizagem" de Matemática (PEREIRA DA COSTA, 2016). Em seu ambiente é possível criar e manipular os parâmetros de um determinado objeto matemático como forma de analisá-lo e estudá-lo (ALVES; SOARES, 2003).

O GeoGebra foi desenvolvido em 2001 por Markus Hohenwarter, pesquisador da Universidade de Salzburg na Áustria, como fruto de sua tese, com o propósito de atribuir à Matemática um caráter experimental, no qual os estudantes pudessem comparar a relação existente entre o aspecto algébrico e geométrico de um objeto matemático, por meio de manipulações dos seus parâmetros (HOHENWARTE; FUCHS, 2004). Definido por seu desenvolvedor como um *software* de matemática dinâmica de código aberto e multiplataforma, o GeoGebra combina a facilidade de *softwares* de geometria dinâmica com as possibilidades de sistemas computacionais de álgebra (HOHENWARTER, 2008).

Hohenwarter e Fuchs (2004) reiteram que o GeoGebra pode ser útil para demonstrações visuais, para construções dinâmicas, para preparação de material didático e para a aprendizagem pela descoberta. De forma geral, o programa permite, assim como defendido por Bassanezi

(2018), que os alunos experimentem a sensação de conjecturar, deduzir com base em ensaios empíricos e/ou contextualizados para, só então, chegarem à formalização do conceito estudado. Com relação aos recursos, de modo geral, o programa oferece:

> […] pontos, vetores, segmentos, polígonos, linhas retas, seções cônicas e funções em x. Com o GeoGebra, construções dinâmicas podem ser feitas como em qualquer outro sistema de geometria dinâmica. Essas construções podem ser alteradas dinamicamente arrastando objetos livres. Além disso, é possível inserir coordenadas de pontos ou vetores, equações de retas, seções cônicas ou funções e números ou ângulos diretamente (HOHENWARTER; FUCHS, p. 2, 2004).

Com as atualizações ao longo dos tempos, o *software* foi aprimorando certos recursos, que são de grande valia para o trabalho com funções, como a análise bivariada (regressão matemática) e os controles deslizantes. Por estas e outras ferramentas, este programa é amplamente discutido e empregado como proposta de intervenção em aulas de Matemática, no ensino básico e superior. O próprio Instituto São Paulo GeoGebra elenca como as principais virtudes do programa o fato de ser disponibilizado em vários idiomas, ter uma interface amigável e intuitiva, ser gratuito e, por conta disso,

> vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático (IGI, s.d.).

Na perceptiva dos alunos, o GeoGebra torna as representações semióticas dos objetos, nele trabalhados, mais atrativas e acessíveis, dado que abstração excessiva tende a distanciar e desmotivar os alunos (LEÃO, 2016). Já na perspectiva dos docentes, Carneiro (2013) ressalta um entusiasmo dos professores ao lidarem e reafirmarem a ideia de que os estudantes aprendem fazendo, a partir de visualizações e manipulações. Este autor também reitera que muitas vezes as dificuldades de implementação deste tipo de método residem em aspectos estruturais e técnicos, como a inexistência ou carência no laboratório de informática.

1.5.TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Duval (2018) associa a compreensão em Matemática à mobilização dos registros de representação semiótica dos objetos matemáticos. Neste sentido, o autor desenvolveu a TRRS que se incube de evidenciar maneiras de identificar, compreender e aplicar esta associação em sala de aula.

Buscando uma teoria que incorporasse e atendesse ao funcionamento cognitivo característico da compreensão em Matemática, Duval (2018) estabelece que tal compreensão não ocorre da mesma maneira que em outros domínios do conhecimento (tal como muitas teorias cognitivas defendiam até os anos 1990) e que tal distinção se justifica, em grande parte, justamente pela dependência existente entre a Matemática e as múltiplas representações de seus objetos (MORETTI, 2002).

Nesse sentido, o próprio desenvolvimento de certos conceitos e operações de cálculo só foi possível a partir do desenvolvimento de determinados sistemas de representação, como o caso do sistema decimal - que oferece mais possibilidades que os sistemas romano e grego - ou o sistema cartesiano de coordenadas - diferente do proposto e trabalhado por Euclides - (DUVAL, 2017; MORETTI, 2002).

Temos, então, que umas das principais diferenças da **Matemática** para as **demais áreas do conhecimento** é que, enquanto na primeira os sistemas geradores de representações semióticas são semióticos, no segundo grupo tais sistemas podem ser não semióticos, ou seja, constituídos de instrumentos que permitem acesso direto aos objetos que se quer estudar, diferente da Matemática em que os objetos são ideias e abstrações (DUVAL, 2018). O telescópio é um exemplo de sistema não semiótico que permite acesso, por exemplo, à lua, objeto que existe independente deste instrumento que, por sua vez, se incumbe de fornecer representações (imagens) para análise e estudo.

Ao assumir que os objetos matemáticos são ideias não concretas, cujo acesso se dá exclusivamente por uma representação, Duval (2012c, 2018) impõe que um objeto não pode ser confundido com sua representação uma vez que "uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo" (DUVAL, 2012c, p. 268).

Em Matemática esta distinção é essencial dados a natureza, o significado e a complexidade que cada representação pode ter (MORETTI, 2002). Por exemplo, os signos $\log_5 5$, $\frac{5}{5}$, $5-4$ e *1* fazem referência ao mesmo objeto, porém possuem significados operatórios diferentes, que justificam um aluno reconhecê-lo e saber operá-lo usando $5-4$, mas não com $\log_5 5$, por exemplo. Desta forma, o aluno não pode entender o signo 1 como sendo o *objeto um*, da mesma forma que não deve entender a expressão $f(x) = b \cdot a^x$ como sendo o *objeto função exponencial*, mas sim, uma de suas representações.

Entender a compreensão em Matemática como sendo diferente da que ocorre em outras áreas do conhecimento, ao estabelecer a necessidade de sistemas semióticos para o acesso aos objetos matemáticos, que são ideias abstratas que os estudantes não devem confundir ou associar a apenas uma determinada representação, gera o que Duval (2018) chama de "paradoxo cognitivo".

> Se os objetos matemáticos não são acessíveis fora da produção matemática de uma representação semiótica, como não confundir o objeto matemático e a representação semiótica utilizada?
> Se existem diversas representações semióticas de um mesmo objeto matemático, que parecem não ter algo em comum, o que permite saber que não se trata do mesmo objeto, mas de objetos diferentes? (DUVAL, 2018, p.5).

Para entender e solucionar este paradoxo e elucidar a relevância das representações semióticas para o funcionamento do pensamento humano, Duval (2012c) elenca três respostas: **a economia de tratamento**, **a complementariedade dos registros** e a **coordenação de diferentes registros de representação**. Antes de detalhar estas respostas, algumas definições sobre sua teoria precisam ser pontuadas, dentre elas o conceito e distinção entre representação e registro.

Parafraseando Descartes, Duval (2017) usa o termo "registro" de representação para classificar quatro tipos bem distintos, como disposto no Quadro 1.

Quadro 1 - Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**

REGISTROS MULTIFUNCIONAIS:
Os tratamentos não são algorotimizáveis.
	• Língua Natural
	• Associações verbais (conceituais).
	• Formas de raciocinar:
	  • Argumentação a partir de observações, de crenças …;
	  • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.
		• Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configuração em dimensões 0,1,2 ou 3).
		  ○ Apreensão operatória e não somente perceptiva;
		  ○ Construção com instrumentos.

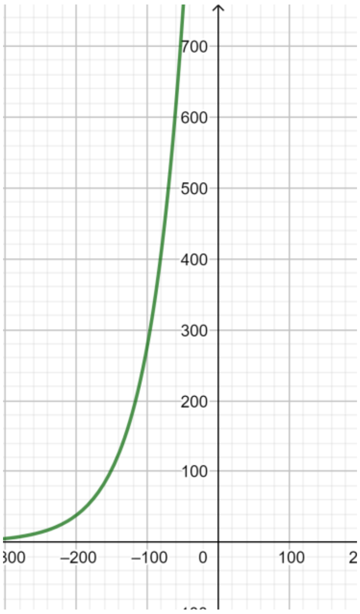
REGISTROS MONOFUNCIONAIS:	• Sistemas de escrita:
	  ○ Numéricas (binária, decimal, fracionária…);
		• Gráficos cartesianos
		  ○ Mudanças de sistema de coordenadas;

Os tratamentos são principalmente algoritmos.	○ Algébricas; ○ Simbólicas (línguas formais). • Cálculo	○ Interpolação e extrapolação.

Fonte: Duval (2017, p.14)

Temos, então, que "$M(t) = 2000 \cdot 1{,}02^{t}$" e o "gráfico cartesiano que associa os pontos $(t, M(t))$ de $M(t) = 2000 \cdot 1{,}02^{t}$" (Figura 2) são, respectivamente, as representações algébricas e gráfica de uma função exponencial. A primeira se configura como um registro monofuncional discursivo, cujos tratamentos se dão por algoritmos, ou seja, a operação de substituição é realizada por cálculo. Já a segunda é um registro monofuncional não discursivo em que, devido a bidimensionalidade, a operação de substituição não é realizada de forma linear, sendo os principais tratamentos o zoom, interpolação e extrapolação.

Figura 2 - Gráfico de $\boldsymbol{M(t) = 2000 \cdot 1,02^{t}}$



Fonte: Autor, 2021

Em contrapartida, a língua natural, por exemplo, é uma representação de um registro multifuncional discursivo e o enunciado: "Determine a relação que associa o montante gerado em uma aplicação inicial de R$ 2000,00 à taxa de 2% ao ano em um tempo qualquer" não é algorotimizável, ou seja, suas expressões podem ser substituídas por outras, obedecendo as regras constitutivas do idioma, mantendo a referência.Temos, então, quatro tipos de registros constituídos, cada qual, de múltiplas representações semióticas.

Ao definir a “semiose” como a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e a “noesis” como a apreensão conceitual de um objeto, Duval (2012c) estabelece como uma das justificativas do paradoxo mencionado à priori o fato de que não há “noesis” sem “semiose”, afirmando também que o uso de múltiplas representações semióticas e registros durante a aula de Matemática contribui para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com sua representação. Assim, o autor ratifica que para um sistema semiótico ser um registro de representação deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a “semiose”, sendo elas a **formação de uma representação identificável**, o **tratamento** e a **conversão**.

A **formação de uma representação identificável** remete à constituição de uma representação dotada de regras de formação próprias (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema algébrico, passos de construção para gráficos, etc.) que torne possível tanto sua identificação quanto sua utilização para **tratamentos** (DUVAL, 2012c).

O **tratamento** de uma representação é uma transformação interna em que se permanece no mesmo registro em que foi formada, tal como a paráfrase para as línguas naturais e o cálculo para as representações simbólicas (DUVAL, 2012c). Encontrar as raízes de uma função em sua forma algébrica, bem como seus extremos, inflexões e assíntotas, utilizando procedimentos estritamente algébricos (regras de derivação e integração, equação de Báskara, etc.) é um tipo de tratamento, diferente de quando, por exemplo, recorremos ao gráfico desta função para evidenciar ou manipular estas informações. Neste caso, teríamos outro tipo de transformação, a **conversão.**

Na **conversão** temos a mudança de um registro de um objeto matemático para outro em que se mantém, total ou parcialmente, o conteúdo da representação inicial (DUVAL, 2012c). Tal conteúdo está relacionado às **unidades significantes** de cada representação, que são variáveis próprias de cada sistema que se relacionam com os demais, tal como os coeficientes da representação algébrica de uma função (nulos, positivos, negativos, inteiros ou racionais, etc.) e o comportamento de seu gráfico (concavidade, inflexão, indeterminação, interação com os eixos, etc.).

O autor ratifica que a conversão não poder ser confundida com uma interpretação ou uma codificação, uma vez que a primeira remete a uma simples analogia, uma mudança de quadro teórico, mas não necessariamente de registro. Já a codificação é uma “transcrição” de uma representação para outro sistema, de forma mecânica e processual. Isso é observado em alunos que só conseguem esboçar ou ter uma ideia do tipo de comportamento do gráfico de uma função apenas se estiver disposta algebricamente de uma maneira específica (evidenciando raízes, vértices, com coeficientes inteiros, com as variáveis representadas por x e y, etc.).

Segundo o pesquisador, "a regra de codificação permite não mais do que duas coisas: a leitura de uma dupla de números sobre o gráfico a partir de um ponto designado, ou a designação de um ponto, a partir de uma dupla de números" (DUVAL, 2012c, p.275). As dificuldades dos estudantes surgem quando se exige a conversão inversa, ou seja, da representação gráfica para a algébrica, dado que possuem unidades significantes distintas e apenas a compreensão do significado de cada uma e a relação existente entre elas é que permite ao estudante reconhecer e transitar entre as representações semióticas de um objeto independente da ordem de conversão (DUVAL, 2018).

Quando se discute a conversão, outro fenômeno vem à tona, a congruência semântica, responsável, basicamente, por relacionar as representações de partida e chegada de um mesmo objeto matemático. Este processo pode ser trivial (há congruência semântica) ou pode exigir análises, procedimentos e inferências mais aguçadas (não há congruência semântica). Duval (2012c) elenca três critérios para que se possa medir a congruência semântica entre dois registros em um processo de conversão, tal como no Quadro 2.

Quadro 2 - Critérios de congruênia entre dois registros

CRITÉRIOS	CARACTERÍSTICAS
A possibilidade de uma **correspondência "semântica"** de elementos significantes	A cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar
A **univocidade "semântica"** terminal	A cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada
A **organização das unidades significantes**	As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjamento das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão

Fonte: Duval (2012c, p. 283 – 284)

Por exemplo, a conversão da representação em língua natural (a relação que associa o montante gerado em uma aplicação inicial de R$ 2000,00 à taxa de 2% ao ano em um tempo qualquer) para a algébrica ($M(t) = 2000 \cdot 1{,}02^t$) do exemplo anterior é não congruente dado que as duas unidades significantes "2" e "%" na representação de partida se demudaram em "1,02" na representação de chegada. Não foi respeitada a univocidade semântica.

Voltando, enfim, para as respostas mencionadas à priori, começamos pela **economia de tratamento.** O estudante, conhecendo várias representações semióticas de um mesmo objeto, poderá transitar entre elas, a fim de buscar a mais prática e econômica para se realizar determinadas operações (MORETTI, 2002). Um aluno que saiba trabalhar com as representações fracionária e decimal saberá, de acordo com a Tabela 1, que o método II é mais prático que o I e conseguirá realizar essa transição.

Tabela 1 - Adição usando as representações fracionária e decimal

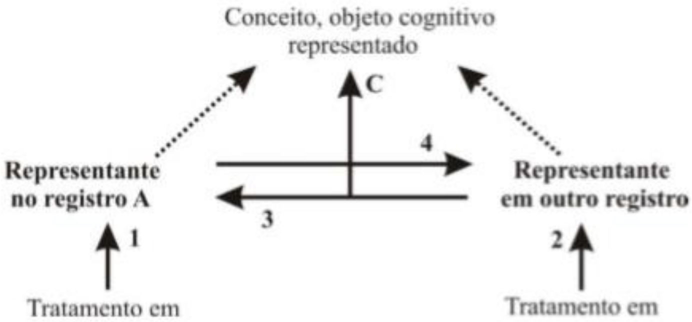
I	$\frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$
II	$0{,}05 + 0{,}125 + 0{,}40 + 0{,}50$

Fonte: Adaptado de Duval (1999 *apud* MORETTI, 2002)

A **complementaridade dos registros** remete ao fato de que "a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa" (DUVAL, 2012c). Neste sentido, algumas representações semióticas oferecem mais possibilidades e conveniências para determinados anseios, de tal forma que, por exemplo, as representações gráficas são mais úteis quando se quer apresentar dados, estados, comportamentos e projeções, mas não são muito práticas quando se quer realizar verificações e demonstrações que, por sua vez, são mais favorecidas pelas representações algébrica e numérica. Assim, o autor afirma que cada representação é parcial ao objeto que representa e que, de um sistema a outro, há mudança de conteúdos e unidades significantes que mantêm entre sim uma relação de implicação.

Por fim, quando Duval (2018, 2012c) diz que a **conceitualização implica coordenação de registros de representação,** se baseia em duas hipóteses que são, de acordo com Moretti (2002), fundamentais para a TRRS. A primeira diz que se um registro de representação é bem escolhido, as representações deste registro são suficientes para a compreensão do conceito representado. Apesar de parecer suficiente para aqueles que têm um bom domínio em Matemática, essa hipótese não contempla estudantes que têm dificuldades acentuadas em Matemática, o que remete à segunda hipótese, que diz que a compreensão total de um determinado objeto matemático perpassa pela necessidade de coordenação de ao menos dois registros de representação por meio da conversão, tal como na Figura 3.

Figura 3 - Hipótese fundamental de compreensão: estrutura da representação em função de conceitualização.



Fonte: Duval (2012c, p.282)

De acordo com Moretti (2002), este esquema retrata o caso mais elementar de coordenação entre dois registros, em que as setas 1 e 2 são as transformações internas a um registro, as 3 e 4 são as transformações externas, ou seja, as conversões por mudanças de registros (em ambos os sentidos). A seta C corresponde à compreensão integral do conteúdo. Desta forma, em suma, é que se torna possível reverter o paradoxo cognitivo, evitar as codificações e garantir a compreensão de um determinado objeto matemático sem que este seja confundido com sua representação.

1.6. GRÁFICO E EXPRESSÃO ALGÉBRICA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL: ARTICULAÇÃO DE DOIS REGISTROS

Neste tópico, faremos uma análise da função exponencial com foco em suas representações gráfica e algébrica. Para tal, nos baseamos em um trabalho desenvolvido por Duval (2011), publicado em um artigo intitulado “Gráficos e equações: a articulação de dois registros”, o qual centrou-se no estudo da função afim. A priori, é importante ressaltar que nos concentraremos na chamada função do tipo exponencial que, diferente da definição formal apresentada na Educação Básica, tem a inclusão de mais coeficientes.

Lima (2013) define algebricamente esta função por meio da expressão $g(x) = b \cdot a^x$ para todo x real, no qual a e b são constantes positivas. Acrescentaremos a esta definição as constantes c e d, gerando $h(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$ e consideraremos a possibilidade de todas (exceção de a) serem negativas. Apesar de não manter as mesmas propriedades da função exponencial, estas funções do tipo exponencial são resultadas de variações e composições relevantes e, por vezes, ignorados nos livros didáticos, mesmo sendo modelos de descrição e análise de uma série de fenômenos naturais, como a lei de resfriamento de Newton (FARIA; SOUZA JUNIOR; CARDOSO, 2016).

Duval (2011) reforça a dificuldade de muitos estudantes em mobilizar simultaneamente as representações algébrica e gráfica de uma função, principalmente a conversão do sentido gráfico para o algébrico. O autor afirma, ainda, que, para este último caso, a técnica de construção de gráfico ponto a ponto[2] não é suficiente, sendo necessária uma técnica de interpretação global que permitirá ao estudante identificar como a modificação de uma determinada unidade significante no gráfico (sua inclinação, por exemplo) implicará na sua expressão algébrica e vice-versa.

Segundo autor, na representação algébrica, as unidades significantes são mais facilmente discriminadas com algumas particularidades: o coeficiente 1 e o caráter positivo dos coeficientes maiores que zero são omitidos, exigindo assim uma interpretação básica, mas importante, das regras deste registro. “A discriminação das propriedades figurais de uma representação gráfica é, em contrapartida, menos evidente” (DUVAL, 2011, p. 99). Para tanto, nos baseando no trabalho do pesquisador com as funções afins, discriminaremos aqui duas variáveis gráficas gerais (estáticas) e três relativas (que sofrem variações).

A primeira variável geral é o fato de o gráfico da função do tipo exponencial ser uma linha (poderia ser uma zona, para o caso de inequações). A segunda é o fato de ser curva (poderia ser reta, no caso da afim). As três variáveis relativas correspondem à relação de implicação entre as modificações dos elementos visuais com os algébricos, considerando o modelo $h(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$, tal como no Quadro 3.

Quadro 3 - Correlação entre as váriveis visuais e algébricas dafunção quadrática

Variáveis visuais	**Variáveis algébricas correspondentes**
Monotonicidade (crescimento e decrescimento)	a, b e c
Inclinação da reta tangente a um ponto qualquer da função (curvatura)	
Posição da assíntota horizontal em relação ao eixo OX (acima, abaixo ou correspondente)	d

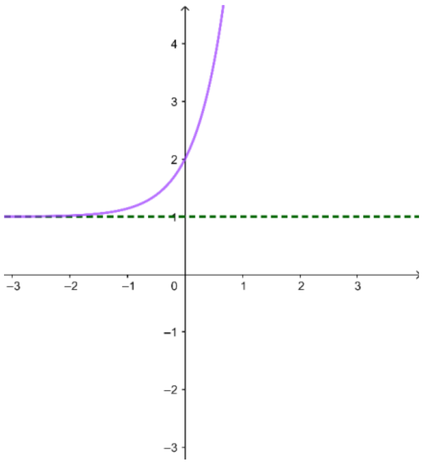
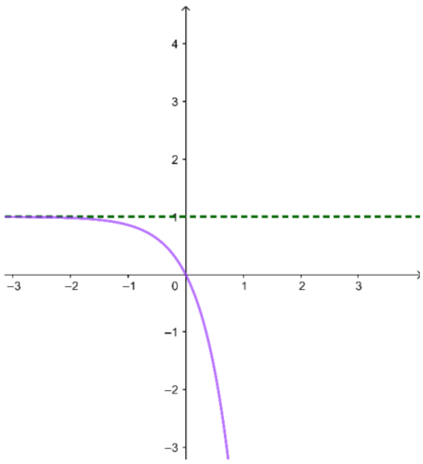
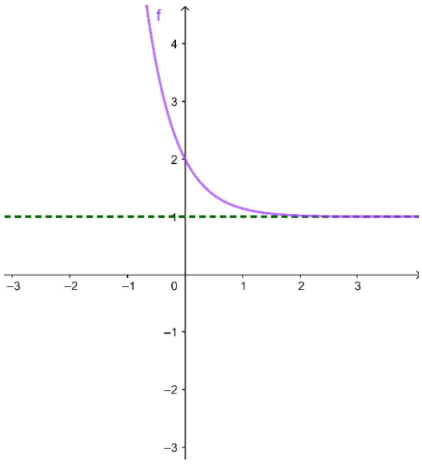
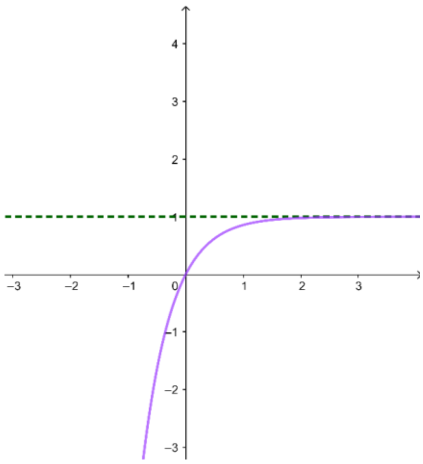
Fonte: Autor, 2020

Desta forma, a variação de a, b ou c modifica, simultaneamente, duas unidades significantes da representação gráfica (sua monotonicidade e curvatura). Não foi respeitada a univocidade semântica terminal. Desse modo, temos a não congruência semântica da passagem do gráfico para expressão algébrica desta função. No Quadro 4, observemos as representações

[2] Em que se traça a curva por meio da associação de múltiplos pontos do plano cartesiano.

gráficas visualmente diferentes de modo significativo desta função do tipo exponencial, com base na variação dos coeficientes a, b e c, mantendo d constante, sendo, arbitrariamente, igualado a 1.

Quadro 4 - Representaçoes gráfica visualmente distintas de $\boldsymbol{f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d}$

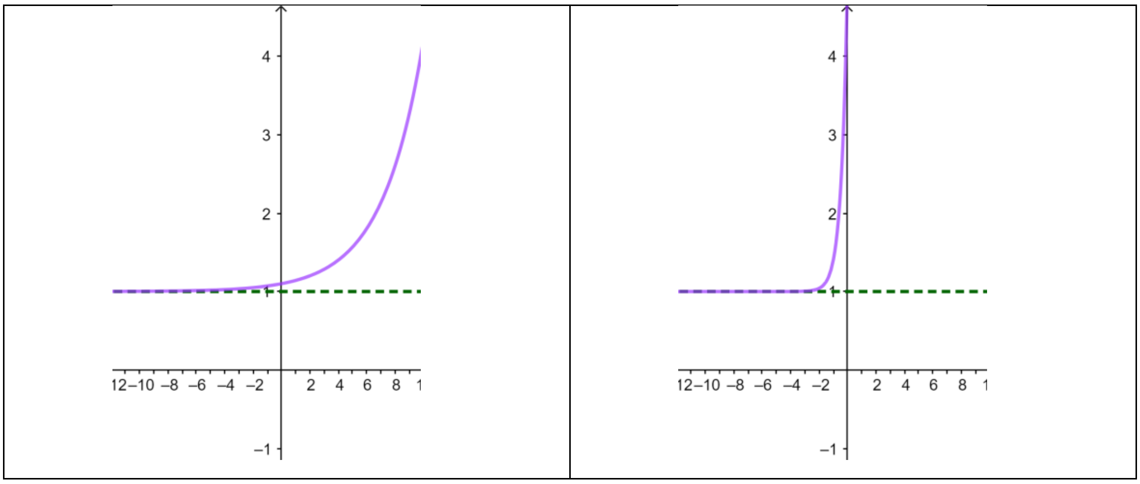
Caso 01: $b > 0$, $a > 1$ e $c > 0$ ou $b > 0$, $0 < a < 1$ e $c < 0$ 	**Caso 02**: $b < 0$, $a > 1$ e $c > 0$ ou $b < 0$, $0 < a < 1$ e $c < 0$ 
Caso 03: $b > 0$, $0 < a < 1$ e $c > 0$ ou $b > 0$, $a > 1$ e $c < 0$ 	**Caso 04**: $b < 0$, $0 < a < 1$ e $c > 0$ ou $b < 0$, $a > 1$ e $c < 0$ 

Fonte: Autor, 2020

A relação entre os coeficientes a, b e c com a curvatura do gráfico pode ser observada usando a caso 01 do quadro anterior, conforme o Quadro 5.

Quadro 5 - Variação dos coeficientes $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$ da função $\boldsymbol{f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d}$ mantendo $\boldsymbol{d}$ fixo

Caso 01a: $f(x) = 0{,}1 \cdot 2^{\frac{1}{2}x} + 1$	Caso 01b: $f(x) = 4 \cdot 10^{x} + 1$



Fonte: Autor, 2020

Conforme apresentado no Quadro 5, podemos perceber que a curva se tornou mais íngreme do Caso 01a para o Caso 01b. A variação do coeficiente d translada verticalmente a função, por definição, sendo que quando $d = 0$ a assíntota horizontal (destacada em verde nos quadros anteriores) coincide com o eixo OX.

De todo modo, destacamos a importância de se estudar essa relação entre as representações algébrica e gráfica deste tipo de função por meio da variação dos coeficientes algébricos. Mesmo que o aluno não identifique visualmente as funções algébricas correspondentes aos gráficos acima, por meio da interpretação global, ele poderá compreender as condições em que os coeficientes da função se encontram (maiores ou menores que zero, por exemplo). Do mesmo modo, ao olhar para uma expressão algébrica, o aluno terá condições de identificar se a função é crescente ou decrescente e se ela descreve um modelo, por exemplo, de variação de temperatura, em que podemos ter um líquido resfriando até encontrar a temperatura ambiente (comportamento do Caso 03) ou aquecendo até ela (comportamento do Caso 04).

1.7.TAREFAS

Ponte (2005), em seus estudos, traz à tona o conceito, a classificação e a relevância das tarefas. O pesquisador é defensor de um ensino de Matemática no qual o aluno é ativo em sala de aula. Aponta que existem diversos tipos de tarefas que atendem demandas específicas, como as que servem para avaliar o que o aluno aprendeu - tarefas para avaliação - e as que servem para compreender pontualmente as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos - tarefas para investigação - (PONTE, 2014; PONTE, *et al*, 2015).

Incialmente, Ponte (2005, 2014), se baseando em B.Christiansen e G.Walther, estabelece uma distinção entre **atividade** e **tarefa**. A primeira remete ao aluno e suas ações em um determinado contexto, enquanto que a tarefa é, geralmente, proposta pelo professor e internalizada/interpretada pelos discentes representando, portanto, um objetivo das ações/atividades.

De forma geral, uma tarefa é uma ferramenta de mediação no ensino e na compreensão de Matemática, que pode ser promissora para o desenvolvimento de certos conceitos e também pode gerar diversas atividades, a depender de fatores como o planejamento e a proposta, do ambiente de compreensão e as experiências anteriores. A BNCC (BRASIL, 2018) traz em todo o seu texto, no que se refere à Matemática, várias menções à necessidade do emprego de tarefas em sala de aula, apesar de, em nenhum momento, trazer uma definição específica do que considera uma tarefa podendo ocorrer, inclusive, uma divergência com as classificações de Ponte (2005, 2014).

Para distinguir e classificar os tipos de tarefas, Ponte (2005, 2014) utiliza, inicialmente, dois critérios: os graus de **desafio** e de **estrutura**. O grau de desafio remete à percepção da dificuldade de uma tarefa para o aluno e varia entre os polos **"reduzido"** e **"elevado"**. Já o grau de estrutura mede a forma como são solicitadas as respostas para uma tarefa e as informações que os estudantes usarão para tal. Este indicador varia entre os polos **"fechado"** (as perguntas, bem como as informações e ferramentas para alcançar as repostas, são claras e objetivas) e **"aberto"** (possui um grau de indeterminação no que se pede ou nas informações que se dá). Com base nestes critérios tem-se a seguinte classificação, conforme a Figura 4.

Figura 4 - Tipos de tarefas com base em seus graus de desafio e estrutura.

Fonte: Ponte (2005, p.8)

Mesmo com esta classificação, nem sempre é clara a demarcação que separa uma da outra ficando isto condicionado, também, à análise do professor quanto aos conhecimentos prévios dos estudantes antes de aplicar uma tarefa (PONTE, 2005, 2014). Neste sentido, o pesquisador refuta a ideia de que os estudantes só podem realizar uma tarefa se, previamente, tiverem tido contato com o conceito formal em questão e defende que os alunos trazem de suas vidas (além dos muros da escola) conhecimentos que podem mobilizar para, de maneira inversa, chegarem ao conceito por meio de abordagens exploratórias.

Temos, então, que os **problemas** são tarefas fechadas e de nível mais elevado, exemplificados por Ponte (2005) pela seguinte proposição:

Em 18 quilogramas de café-mistura há 15 quilogramas de café de S. Tomé. Que quantidade deste café haverá em 270 gramas da mesma mistura?[3]

O autor ressalta que, como dito à priori, esta tarefa pode ser um problema para alguns e apenas um simples exercício para outros, estando esta circunstância condicionada a alguns fatores como o estudante ter algum conhecimento prévio do procedimento de regra de três simples e, consequentemente, razões e proporções. Pontua também que, apesar de certo grau de dificuldade ser apreciável e relevante do ponto de vista didático, é necessário ter cuidado para que não seja tão elevado a ponto de o estudante desistir rapidamente e nem tão baixo a ponto de se tornar um exercício.

O **exercício**, por sua vez, possui um grau de dificuldade baixo e estrutura fechada e é exemplificado por Ponte (2005) pelas seguintes tarefas, que é uma continuação do problema apresentado anteriormente:

Qual a percentagem de café de S. Tomé no café-mistura da questão anterior?

Se o lote de 18 quilogramas de café-mistura custar 40 mil reis já agora continuemos com as unidades monetárias da época, quanto custa o quilograma de café?

Com 2 mil réis[4] *que quantidade de café posso comprar?*[5]

[3] Fonte: Ponte (2005, p.2)
[4] Importante ressaltar que João Pedro da Ponte é um pesquisador português, o justifica os sistema monetários distintos.
[5] Fonte: Ponte (2005, p.4)

Vemos aqui uma tarefa bem mais simples e direta que poderia ser empregada para exercitar alunos do ensino fundamental que estão nos estágios iniciais do estudo da multiplicação. De fato, os exercícios têm, em geral, esta finalidade de pôr em prática conceitos que acabaram de ser construídos, afim de compreendê-los e internalizá-los. No entanto, muitos (e apenas) exercícios seguidos tendem a empobrecer os desafios e desmotivar os estudantes ao lhes dar a falsa impressão de aprendizagem do conteúdo apenas com tarefas, por exemplo, do tipo "resolva…" (PONTE, 2005).

Exemplificadas e definidas as tarefas fechadas, um último fator importante de se destacar é que não é o fato de uma tarefa estar em um contexto aplicado ou puramente matemático que vai delimitar se ela é um problema ou um exercício (PONTE, 2005; PONTE, *et al*, 2011). É possível ter problemas em contextos puramente algébricos e exercícios em aplicações cotidianas (como no exemplo anterior), tudo depende muito mais de o aluno possuir ou não previamente as ferramentas e conhecimentos necessários para a resolução.

As tarefas de **investigação** são abertas e de desafio mais elevado, exemplificadas por Ponte (2003) pela seguinte questão proposta para alunos do 5º ano[6]:

Escreve em coluna os 20 primeiros múltiplos de 5. Repara nos algarismos das unidades e das dezenas. Que observas? E o que acontece com os múltiplos de 4 e de 6? E com os múltiplos de outros números?

Importante notar que temos uma tarefa em um contexto matemático, mas que exige um nível de análise bem mais aguçado, dado às perguntas abertas. As investigações, mais do que nos problemas, requerem uma participação mais ativas dos estudantes tanto no processo de resolução como também na sua formulação (PONTE, 2005). São comuns em questões de estatística, por exemplo, em que são exigidas interpretações e inferências que, por sua vez, determinam o que os alunos devem fazer para chegar a alguma conclusão e os dados que vão utilizar para tal, sem que estas informações estejam aparentes.

Por fim, as **tarefas de exploração** são abertas e de desafio reduzido, exemplificada por Ponte, Branco e Quaresma (2011) com a seguinte questão aplicada à alunos do 2º ciclo[7], que já haviam estudado números decimais e operadores fracionários sem usar a notação formal de fração:

[6] De acordo com o sistema de ensino de Portugal
[7] De acordo com o sistema de ensino de Portugal

1. Encontra três tiras de papel geometricamente iguais. Dobra-as em partes iguais: - a primeira em duas; - a segunda em quatro; - a terceira em oito. Depois de dobrares cada uma das tiras, representa de diferentes formas as partes obtidas.

2. Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem. Registra as tuas conclusões.

3. Em cada uma das tiras, determina a razão entre cada um dos comprimentos das partes obtidas após as dobragens e o comprimento da tira. Registra as tuas conclusões.

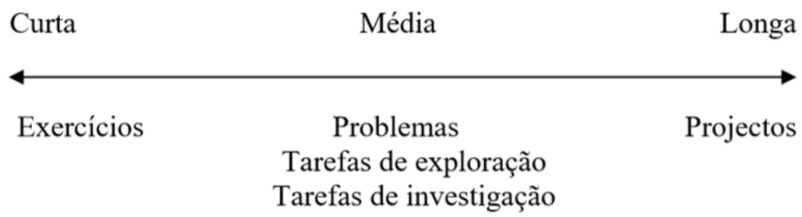
Vemos aqui uma tarefa cuja resolução também passa uma análise processual do contexto proposto além da exigência de comparações e interpretações. Assim como na relação entre os exercícios e os problemas, a diferença entre investigações e explorações está no grau de desafio para os estudantes que, se puderem começar a responder imediatamente sem muito planejamento, estão diante de uma exploração, caso contrário, será uma investigação (PONTE, 2005). Mais especificamente,

> [...] falamos de investigações quando se trata de tarefas num contexto matemático mais sofisticado com um considerável grau de desafio matemático e de explorações quando se trata de situações que permitem um fácil envolvimento da generalidade dos alunos (PONTE; BRANCO; QUARESMA, 2011, p.3).

As tarefas de exploração e investigação são privilegiadas pelo uso de tecnologias, tais como o GeoGebra, que permitem explorar, conjecturar, inferir e verificar ideias por meio de procedimentos com caráter experimental (PONTE; BRANCO; QUARESMA, 2011). Porém, o pesquisador reitera a possibilidade de usufruir destas tarefas de estrutura aberta mesmo sem o uso da tecnologia, como no caso da tarefa anterior e, no geral, em questões que envolvem modelagem matemática.

Outras duas dimensões que Ponte (2005, 2014) utiliza para classificar as tarefas são sua duração e contexto. Uma tarefa pode ser curta ou longa, a depender de seus objetivos, sendo o **projeto** um exemplo de uma tarefa de longa duração, que tem como virtude a possibilidade de desenvolvimento de propostas mais ricas e profundas. Porém, tais projetos correm o risco de defasagem, perda do interesse por parte dos estudantes ou de conflito com outras atividades. Quanto à duração, as tarefas se distribuem de acordo com a Figura 5.

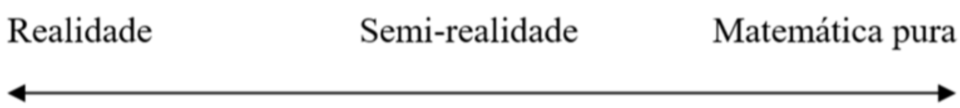
Figura 5 - Diversos tipos de tarefas, quanto à duração



Fonte: Ponte (2005, p. 10)

Por fim, podemos ter tarefas em dois **contextos,** o puramente matemático e o da realidade. Skovsmose (2000 *apud* Ponte, 2005) considera um nível intermediário de contexto, o da semirrealidade, na qual se encontram aquelas tarefas que, apesar de se basearem em aplicações reais, acabam se tornando muito ideais ou abstratas (vide o Joãozinho que lançou uma moeda ao ar 2000 vezes) ou ignoram certas propriedades, afim de focar apenas em alguma específica (como acontece em tarefas com aplicação em física). Segue a distribuição das tarefas segundo seu contexto na Figura 6, lembrando que, diferente da duração, não há uma distribuição definida para as tarefas pelo seu contexto, pois, como dito, podemos ter tarefas abertas e fechadas em contextos matemáticos ou da realidade.

Figura 6 - Tarefas de acordo com o contexto



Fonte: Ponte, Branco e Quaresma (2011, p.11)

1.8.OBJETIVOS E PROBLEMÁTICA

Esta pesquisa tem como problemática: Como se dá a abordagem sobre o ensino de funções exponenciais, associadas ao GeoGebra, no ensino médio em produções científicas, em livros didáticos e em tarefas matemáticas? Assim, buscando responder tal questão de pesquisa, elaboramos o seguinte objetivo geral: Compreender a abordagem sobre o ensino de funções exponenciais, associadas ao uso do GeoGebra, no Ensino Médio em produções científicas, em livros didáticos e em tarefas matemáticas.

Tendo por base o objetivo geral, estruturamos esta pesquisa em três etapas. Para isso optamos por utilizar o formato *multipaper*, logo o texto da dissertação é constituído por três artigos, cada qual com um objetivo específico, tal como descritos a seguir.

O primeiro objetivo específico foi investigar como a abordagem sobre ensino de função exponencial vinculado ao uso do GeoGebra vem sendo discutida em artigos publicados entre os anos 2010 - 2019 em periódicos brasileiros da área de Ensino, cujo escopo contenha o ensino de Matemática e/ou de ciências.

O segundo objetivo específico foi investigar os tipos de tarefas matemáticas, bem como as representações semióticas envolvidas, nos capítulos sobre função exponencial de três livros didáticos do 1º ano do ensino médio de coleções distintas selecionados no atual PNLD (2016 – 2020) por escolas públicas da cidade de Barreiras – BA. Para realizar tal análise nos baseamos na classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017).

O terceiro objetivo especifico foi propor e analisar tarefas matemáticas, bem como suas representações semióticas, envolvendo as funções do tipo exponencial com o emprego do software GeoGebra. Para isso, nos ancoramos nos estudos sobre o conceito e classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017).

1.9.ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta é uma pesquisa qualitativa, pois nos centramos no aprofundamento da compreensão dos fenômenos estudados e nas relações diretas entre os objetivos traçados, os pressupostos teóricos e os dados empíricos analisados (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). O seu caminho metodológico compreendeu: o mapeamento das pesquisas desenvolvidas sobre o ensino de funções exponenciais associado ao software GeoGebra, publicadas na literatura brasileira científica mais recente; a análise da abordagem das tarefas sobre este conceito em livros didáticos de Matemática voltados à supracitada etapa da Educação Básica e, por fim, a proposição de uma abordagem envolvendo tarefas com funções exponenciais por meio do uso didático do *software* GeoGebra para o citado nível escolar.

Para alcançar o objetivo do primeiro artigo, correspondente à primeira etapa da pesquisa, nos valemos de uma pesquisa descritiva e bibliográfica (GIL, 2002). Tal estudo tem por base a descrição das características de um determinado fenômeno (o ensino da função exponencial com suporte do software GeoGebra) a partir do levantamento de material (artigos) produzido e publicado em diferentes revistas científicas (GIL, 2002). Dessa forma, buscamos estabelecer uma contextualização da forma como este conteúdo associado a este *software* vem sendo discutidos na literatura mais recente.

O segundo artigo se desdobra em uma pesquisa exploratória, quanto aos seus objetivos, e documental, quanto aos seus procedimentos técnicos, uma vez que é desenvolvida exclusivamente com base em materiais já elaborados (livros didáticos) dos quais os dados foram colhidos, criticados, confrontados e analisados (GIL, 2002). Este momento correspondeu à segunda etapa da pesquisa.

Assim, fizemos um levantamento sobre os livros didáticos de Matemática aprovados no atual Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e adotados pelas escolas públicas de ensino médio da cidade de Barreiras – BA. Em seguida, nos valemos dos estudos de Ponte (2005) e Duval (2017) para analisar criticamente a forma como são apresentadas as tarefas matemáticas.

Por fim, na terceira etapa da pesquisa, para alcançar o objetivo do terceiro artigo, nos valemos de uma pesquisa qualitativa (GERHARDT; SILVEIRA, 2009) e interpretativista (DIVAN; OLIVEIRA, 2008), uma vez que nos concentramos em propor diferentes tarefas matemáticas sobre o conceito de função exponencial para serem trabalhadas no ensino médio. Levamos em conta fatores como a natureza dos dados coletados, o público alvo, os instrumentos de pesquisa e os pressupostos teóricos que nortearam a investigação.

1.10. ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está estruturada no formato *multipaper*, caracterizado pela apresentação de uma coletânea de artigos publicáveis acompanhados (ou não) por um capítulo introdutório e outro com as considerações finais (MUTTI; KLÜBER, 2018). Este modelo se apresenta como uma alternativa além do considerado "modelo tradicional", que, por sua vez, se apresenta de forma contínua (tal como um livro), por um documento extenso (normalmente 200-400 páginas), sobre um único tema, apresentado por meio de capítulos (cinco ou seis) separados pela introdução, revisão da literatura, metodologia, resultados e conclusões (FRANK, 2013; DUKE; BECK, 1999).

Uma das principais vantagens apontadas pelo formato *multipaper* é o alcance que permite às produções (DUKE; BECK, 1999). O fato de os artigos serem obras completas, e independente dos demais, permite ao estudante e seu orientador a publicação da pesquisa sem que se tenha a preocupação e a dificuldade de se reduzir longos textos para artigos objetivos.

Dessa forma, este formato é mais eficiente para aqueles que almejam a divulgação imediata de seus resultados de investigação (FRANK, 2013).

Mutti e Klüber (2018) constatam um *movimento de abertura* para o formato *multipaper* em programas de pós-graduação *stricto sensu* brasileiros das áreas de Ensino e de Educação. Para isso, analisaram o que se mostra sobre este formato nos documentos que orientam a elaboração de dissertações e teses destes programas. Ao avaliarem 335 programas, os pesquisadores verificaram em 30 destes a existência de documentos que apresentavam menções a possibilidade de construção de dissertações e teses com estrutura multipaper. Um dos fatores que levaram estes autores a reconhecerem este movimento de abertura foi a aceitação deste formato por programas de pós-graduação stricto sensu em universidades como UNESP, UEL, UFBA e UEM. Isso se justifica pelo fato de tais instituições possuírem reconhecida experiência no desenvolvimento de pesquisas nas áreas de Educação, Ciências e Educação Matemática.

Para tanto, esta dissertação está restruturada, além desta introdução, em quatro capítulos: Artigo 01; Artigo 02; Artigo 03 e Considerações Finais.

No Artigo 01, intitulado "Função exponencial e GeoGebra: o que vem sendo discutido na literatura brasileira?", foi desenvolvida uma pesquisa qualitativa bibliográfica na qual foi realizado um levantamento sobre como o ensino de função exponencial, vinculado ao uso do GeoGebra, vem sendo discutido em artigos publicados entre os anos 2010 e 2019 em periódicos brasileiros da área de Ensino, cujo escopo contenha o ensino de Matemática e/ou de ciências.

No Artigo 02, intitulado "Função exponencial: uma análise de tarefas presentes em livros didáticos de Matemática", por meio de uma pesquisa qualitativa documental, foram investigadas as tarefas dos capítulos sobre função exponencial de três livros didáticos do 1º ano do ensino médio de três coleções distintas selecionados no atual PNLD (2016 – 2020) por escolas públicas da cidade de Barreiras – BA. Como quadro teórico, utilizamos a classificação de tarefas proposta por Ponte (2005) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval (2017).

No Artigo 03, intitulado "Função exponencial: uma proposição de tarefas matemáticas", a partir de uma pesquisa qualitativa e interpretativista, foram propostas e analisadas tarefas matemáticas envolvendo as funções do tipo exponencial com o emprego do software GeoGebra. Para isso, nos ancoramos nos estudos sobre o conceito e classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017).

Nas considerações finais apresentamos a consonância dos resultados e constatações de cada artigo com o objetivo geral da pesquisa, além de também elaborarmos um conjunto de orientações didáticas direcionadas ao professor de Matemática com intuído de lhe dar suporte na aplicação das tarefas propostas no terceiro artigo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. NUNES, Lincoln Ferreira; SILVA, Vanessa Thomazini da. Educação em tempos de isolamento social: o ensino via google meet e google forms. **Pesquisa e Ensino**, Barreiras, v. 2, n. 1, p. 1-29, abr. 2021. Disponível em: https://revistas.ufob.edu.br/index.php/pqe/article/view/715. Acesso em: 20 abr. 2021.

BONOTTO, A. K.; BISOGNIN, E. Contribuições de um Objeto de Aprendizagem e dos Registros de Representações Semióticas no Estudo da Função Exponencial. **Novas Tecnologias na Educação**, Rio Grande do Sul, v. 13, n. 2, p. 1-11, dez. 2015. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/61443/36330. Acesso em: 20 out. 2020.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, MEC / CONSED / UNDIME, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. SAEB [recurso eletrônico]. Brasília: INEP, 2019. Disponível em: https://bit.ly/2U6cxoB. Acesso em: 15 de out. 2020.

CARNEIRO, G. S. **Atividades investigativas com o GEOGEBRA**: contribuições de uma proposta para o ensino de matemática. 2013. 149 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Científica, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/161645. Acesso em: 15 out. 2020.

CARVALHO, R. L. **Contribuições do campo conceitual multiplicativo para a formação inicial de professores de matemática com suporte das tecnologias digitais**. 2017. 182 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/22155. Acesso em: 18 out. 2020.

COELHO, J. P. **O geogebra no ensino das funções exponenciais**. 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Ciênciasetecnologia, Universidadeestadualdo Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016José-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 01 jan. 2021.

CUNHA, D. M. **Grandezas e medidas no ensino fundamental**: uma análise da literatura e de livros didáticos. 2020. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Oeste da Bahia, Barreiras, 2020. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171052212. Acesso em: 01 dez. 2020.

DUKE, Neel K.; BECK, Sarah W.. Research News And Comment: Education Should Consider Alternative Formats for the Dissertation. Educational Researcher, Nova Iorque, v. , n. , p. 1-2, abr. 1999. Disponível em: https://www.semanticscholar.org/paper/Research-News-

And-Comment%3A-Education-Should-Formats-Duke-Beck/58606a2ba7d4c142a07ea35e50a1589c814fceaa. Acesso em: 20 abr. 2021.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreenção em matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Ancântara. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2017. p. 11-34.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. **Diferenças semânticas e coerência matemática**: introdução aos problemas de congruência. Revemat: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 1, p. 97-117, 16 jul. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. **Gráficos e equações**: a articulação de dois registros. Revemat: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 6, n. 2, p. 96-112, 10 maio 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamentoRegistres** de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Revemat: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 2, p. 266-297, 13 dez. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

DUVAL, R.; MORETTTI, Méricles Thadeu. **Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática?** Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, [S.L.], v. 13, n. 2, p. 1-27, 12 dez. 2018. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2018v13n2p1.

FARIA, T. A.; SOUZA JÚNIOR, J. C. de; CARDOSO, A. **Matemática Dinâmica para compreender a função exponencial**. Sigmae, Alfenas, v. 5, n. 1, p. 1-11, dez. 2016. Disponível em: https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/view/509. Acesso em: 02 out. 2020.

FRANK, A. G. **Formatos alterativos de teses e dissertações**. 2013. Disponível em: https://cienciapratica.wordpress.com/2013/04/15/formatos-alterativos-de-teses-e-dissertacoes/. Acesso em: 20 maio 2021.

GOLDINI, E. K. S. Matemática aplicada ao estudo da área ocupada pelo crescimento de micro-organismos como ferramenta para o ensino da função exponencial. **Revista Professor de Matemática On Line**, [S.L.], v. 7, n. 02, p. 166-174, nov. 2019. Sociedade Brasileira de Matematica. http://dx.doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo712.Acesso em: 02 nov. 2020.

HOHENWARTER, M.; FUCHS, K. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In: **Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference**. 2004. Disponível: <https://archive.geogebra.org/static/publications/pecs_2004.pdf/>. Acesso em: 22 ago. de 2020.

HOHENWARTER, M.. **Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra**. Semantic Scholar. v. , n. , p. 1-2, out. 2008. Disponível em: https://www.semanticscholar.org/paper/Teaching-and-Learning-Calculus-with-Free-Dynamic-mhohen/58b41d9c8662c6301d9a655532751a45d7500413?p2df. Acesso em: 14 out. 2020.

JUNKERFEURBOM, M. A.; KLÜBER, T. E. Tipos de tarefas de investigação matemática em livros didáticos do 8º ano. **Encontro Paranaense de Educação Matemática**, Cascavel, v. 1, n. 1, p. 1-15, set. 2020. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/68/127. Acesso em: 02 dez. 2020.

KENSKI, V. M**. Educação e Tecnologias**: O novo ritmo da informação. Campinas - SP: Papirus, 2011.

KENSKI, V. M. **Tecnologias E Ensino Presencial E a Distância**. São Paulo: Papirus, 2013.

LEÃO, H. S. **O uso do GeoGebra na aprendizagem de proporcionalidade**. 2016. 116 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: http://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/5091. Acesso em: 15 out. 2020.

LEITE, B. S. Estudo do corpus latente da internet sobre as metodologias ativas e tecnologias digitais no ensino das Ciências. **Pesquisa e Ensino**, [S.L.], v. 1, p. 1-30, 2 maio 2020. Pesquisa e Ensino. http://dx.doi.org/10.37853/pqe.e202012. Disponível em: https://revistas.ufob.edu.br/index.php/pqe/article/view/644. Acesso em: 30 abr. 2021

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem em matemática. **Contrapontos**, Itajaí, v. 2, n. 3, p. 343-362, dez. 2002. Disponível em: https://www6.univali.br/seer/index.php/rc/article/view/180/152. Acesso em: 02 dez. 2020.

MUTTI, G. de S. L.; KLÜBER, T. E. **Formato multipaper nos programas de pós-graduação stricto sensu brasileiros das áreas de educação e ensino**: UM PANORAMA. Sipeq, Foz do Iguaçu, v. 1, n. 1, p. 1-14, maio 2018. Disponível em: https://sepq.org.br/eventos/vsipeq/documentos/02858929912/11. Acesso em: 20 abr. 2021.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental**: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 243 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/17129/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o_Andr%c3%a9Pereira.pdf. Acesso em: 01 ago. 2020.

PONTE, J. P. da. **Gestão curricular em Matemática**. O Professor e O Desenvolvimento Curricular, Lisboa, v. , n. , p. 11-34, jan. 2005. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/3008. Acesso em: 02 nov. 2020.

PONTE, J. P. da. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática**. In: PONTE, João Pedro da (org.). Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Lisboa: Fct, 2014. Cap. 1. p. 13-30.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; BRANCO, N. **Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática**. Educação Matemática em Foco, Lisboa, v. 01, n. 01, p. 1-21, mar. 2011. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/260987156_Tarefas_de_exploracao_e_investigacao_na_aula_de_matematica. Acesso em: 15 jan. 2021.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**, Lisboa, v. 24, n. 2, p. 111-135, out. 2015.. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/22628. Acesso em: 02 nov. 2020.

PUC-SP (Brasil). Instituto GeoGebra (IGI) (org.). Home Page. 2020. Disponível em: https://www.pucsp.br/geogebrasp/. Acesso em: 15 out. 2020.

SANTOS, A. T. dos; BIANCHINI, B. L. Análise das estratégias utilizadas pelos estudantes no estudo de funções logarítmicas e exponenciais. **Vidya**, Santa Maria, v. 32, n. 1, p. 35-50, jun. 2012. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/265/240. Acesso em: 01 jan. 2021.

SANTOS, V. A. dos. **O conceito de probabilidade no ensino médio: análise da literatura, de livros didáticos e de tarefas matemáticas**. 2020. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Ufob, Barreiras, 2020.

SILVA, D. S. da; LAZZARIN, J. R. Funções: construindo conceitos a partir da análise gráℵca. **Revista Ciˆencias Exatas e Naturais**, Paraná, v. 01, n. 01, p. 91-104, jun. 2018. Disponível em: https://revistas.unicentro.br/index.php/RECEN/about/editorialPolicies#focusAndScope. Acesso em: 01 jan. 2021.

SILVA, W. O. Kit Virtual de Apoio: uma proposta para o ensino de gráficos de funções. Colbeduca, **Joinville**, v. , n. , p. 594-606, set. 2016. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8412. Acesso em: 02 out. 2020.

SOUSA, C. V. de; SOUSA, C. V. de; TOMANIN, C. R.; WAGNER, J. Planejando o uso da Tecnologia por meio da Tecnologia: uma Experiência com Professores da Educação Básica. **Control+E**, Paraíba, v. 2, n. 1, p. 1-12, 20 maio 2020. Disponível em: http://ctrle.ci.ufpb.br/. Acesso em: 20 out. 2020.

CAPÍTULO I - ARTIGO 01

FUNÇÃO EXPONENCIAL E GEOGEBRA: O QUE VEM SENDO DISCUTIDO NA LITERATURA BRASILEIRA?

RESUMO

Esta pesquisa é parte de uma dissertação de mestrado e o objetivo é foi investigar como a abordagem sobre ensino de função exponencial vinculado ao uso do GeoGebra vem sendo discutida em artigos publicados entre os anos 2010 - 2019 em periódicos brasileiros da área de Ensino, cujo escopo contenha o ensino de Matemática e/ou de ciências. Este é um trabalho qualitativo bibliográfico e descritivo. Foi constatado que o ensino de função exponencial tem sido potencializado, muito por conta de suas aplicações em contexto de realidade (como na biologia e na matemática financeira) que, associadas ao GeoGebra, otimizam a aula de matemática, concedendo-a um caráter experimental que estimula a autonomia dos estudantes, aos lhes permitir construir os conceitos por meio de suas múltiplas representações, a partir da supervisão do professor que, além de mediador, precisa incorporar e ter domínio sobre o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação em sala de aula.

Palavras-chave: Função Exponencial; GeoGebra; Produções científicas;

ABSTRACT

This research is part of a master's thesis and the aim is to investigate how the approach to teaching exponential function linked to the use of GeoGebra has been discussed in articles published between 2010 - 2019 in Brazilian journals in the field of Education, whose scope contains the teaching of Mathematics and/or science. This is a qualitative bibliographic and descriptive work. It was found that the teaching of exponential function has been enhanced, largely because of its applications in the context of reality (as in biology and financial mathematics) which, associated with GeoGebra, optimize the mathematics class, giving it an experimental character that encourages students' autonomy by allowing them to build concepts through their multiple representations, based on the supervision of the teacher who, in addition to being a mediator, needs to incorporate and have mastery over the use of Information and Communication Technologies in the classroom.

Key-words: Exponential Function; GeoGebra; Scientific Productions.

1. INTRODUÇÃO

Em geral, a função exponencial é definida para um a real positivo diferente de 1 como uma aplicação $f: R \rightarrow R^{+}$ indicada com a notação $f(x) = a^{x}$. No entanto, autores como Faria, Souza Junior e Cardoso (2016) afirmam que os livros didáticos costumam enfatizar apenas essa definição, destacando a falta de atenção dada às variações da função exponencial (as funções do tipo exponencial) representadas, de forma geral, por $f(x) = ka^{bx+c} + d$, com k, b, c e d sendo constantes reais. Esses pesquisadores reiteram que, apesar de não satisfazerem a caracterização de uma função exponencial, tal função mantém forte relação com seu comportamento. Além disso, por serem modelos de fenômenos naturais e aparecerem em diversas tarefas, o estudo dos seus parâmetros, responsáveis por translações, reflexões, expansões e compressões no plano cartesiano, merece ser considerado.

Este objeto matemático é fonte de discussão, em diversas pesquisas em Educação Matemática, tanto pela relevância teórica e prática do conteúdo quanto pelos índices de dificuldades que muitos alunos apresentam ao estudar este conteúdo, muitas vezes é deixado de lado no ensino médio, seja por não haver tempo hábil para discuti-lo durante o ano letivo ou por, contraditoriamente, os estudantes apresentarem mais dificuldades com ele (PIANO, 2016).

Os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) evidenciam o reflexo de aprendizagem dos estudantes nos descritores que contemplam esse assunto. Além disso, seus resultados, que variam em notas de 0 a 500, são apresentados em uma escala de desempenho, dividida em 10 níveis, que reúnem as competências e habilidades que os estudantes demonstram ter desenvolvido. Sendo assim, os níveis 5 (325 à 350), 7 (375 à 400) e 9 (425 à 450) são os que exigem habilidades relacionadas às funções exponenciais, e, a Tabela 1 indica o quão insatisfatórios são os percentuais de estudantes aos quais alcançam esses níveis na rede estadual da cidade de Barreiras – Bahia (onde trabalham e residem os autores deste artigo) e de todo o estado.

Tabela 2 - Dados do SAEB que indicam o percentual (%) de estudantes da rede estadual da cidade de Barreiras – BA e de todo o estado da Bahia aos quais alcançam os níveis de proficiência 5, 7 e 9

	Nível 5	Nível 7	Nível 9
Barreiras – BA	4,5	0,24	0
Bahia	4,93	0,57	0,03

Fonte: SAEB (2019)

Nota-se que, uma das principais aplicações desse saber, é o seu uso como ferramenta de descrição, previsão e análise de fenômenos naturais, muito bem explorados na modelagem matemática entendida por Bassanezi (2018, p.16) como a “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. São exemplos de aplicações dessa função, o estudo do decaimento radioativo, dos juros compostos, dos terremotos, da pressão atmosférica, das curvas de aprendizagem, do crescimento populacional, da meia vida dos medicamentos, dentre outras.

De acordo com Lima (2013), as funções exponenciais, ao lado das afins e das quadráticas, são os modelos matemáticos mais utilizados para resolução de problemas no ensino básico. Santos (2014) aponta, no entanto, que é comum, no ensino deste conteúdo, a omissão de propriedades e provas que acaba restringindo a potencialidade cognitiva do mesmo. Toledo

(2018) justifica tal empobrecimento didático do conteúdo pelo tempo reduzido destinado a ele (em média 4 horas/aula) que permite apenas fazer a sua introdução com poucas aplicações e sem muitas discussões sobre o desempenho individual dos estudantes.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2018) enfatiza como necessária a habilidade de se trabalhar com as múltiplas representações e aplicações deste objeto matemático. Neste sentido, outro fator relevante, do ponto de vista epistemológico, é a relação entre as representações (algébrico, geométrico, tabular, …) de uma função e as informações que a capacidade do estudante em transitar entre elas pode fornecer ao professor a respeito do seu nível de aprendizagem. Sendo assim, a BNCC (2018) destaca que uma das aptidões que os estudantes do Ensino Médio devem desenvolver é,

> [...] analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (2018, p. 539).

Acerca da questão epistemológica, trata-se de um tema debatido por diversos autores, em especial Duval (2011), que em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) condiciona a compreensão à mobilização de ao menos dois registros com o estudante sendo capaz de, por exemplo, reconhecer as características e alternar entre as representações algébrica e geométrica da função exponencial. Além disso, a BNCC (BRASIL, 2018) traz como uma competência específica para o Ensino Médio (que valoriza o trabalho em sala de aula com a passagem entre as representações semióticas): “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (2017, p. 538).

Destacamos, assim, a relevância do ensino e da aprendizagem matemática ancorado na exploração das múltiplas representações dos objetos matemáticos discutidos e em suas possíveis aplicações em situações cotidianas. Concordamos com Bassanezi (2015, 2018) ao constatar que ao invés da sequência “enunciado→ demonstração→ aplicação”, praticados em sala de aula, muitas vezes o movimento contrário de recriar o processo de conjectura do conceito por meio da motivação, formulação e validação de hipóteses, pode atribuir à aula de Matemática um caráter experimental, estimulante e criativo.

A escolha em discutir a função exponencial neste trabalho é justificada, portanto, por seu potencial em descrever fenômenos naturais de diferentes áreas do conhecimento por intermédio de múltiplas representações. Este artigo foi produzido no final do ao de 2020, período em que o mundo sofre com a pandemia causada pelo COVID 19, cuja reprodução e propagação fez o mundo dar atenção às características de comportamentos exponenciais. Além disso, este é um conteúdo pouco explorado na educação básica, cujos estudantes apresentam índices comprovados de dificuldade em habilidades básicas e avançadas relacionadas ao tema.

É importante destacar, ainda, outro elemento que faz parte do núcleo central desta pesquisa: o GeoGebra aplicado ao estudo deste tipo de função. Outrossim, a BNCC (BRASIL, 2018) realça a relevância de se empregar tecnologias digitais (no mesmo parágrafo em que discute a habilidade necessária de se trabalhar com as funções exponenciais) além de fazer menção a estes recursos em diversas passagens ao longo de toda a educação básica, sempre enfatizando seu potencial na inter-relação entre geometria, estatística e álgebra. Ademais, são eficientes no momento em que o professor pretende estabelecer significados e aplicações dos conceitos matemáticos pelas possiblidades de manipulação e trabalho simultâneo entre as representações semióticas.

A escolha pelo estudo do GeoGebra associado às funções exponenciais se deu, portanto, por este software ser uma ferramenta rica em termos de possibilidades de articulação e manipulação, entre as representações de objetos matemáticos, em especial as funções. A relevância da discussão deste programa em Educação Matemática é justificada, por exemplo, pela existência de Institutos GeoGebra espalhados por todos os continentes (aqui no Brasil com sedes em estados como São Paulo, Rio de Janeiro e Rio Grande do Norte) onde são desenvolvidos materiais para oficinas com o GeoGebra, treinamento para professores em atuação, e/ou em formação, projetos de pesquisa que discutem, bem como, avaliam os benefícios do software relatados e debatidos por todo o mundo (IGI, s.d.).

Além disso, um aspecto importante na análise de trabalhos aos quais envolvem propostas didáticas com e sem intervenção em sala de aula, são os tipos de tarefas adotados e o que podem exigir e produzir dos estudantes em termos de aprendizagem. Por isso, destacamos as concepções de Ponte (2005) ao classificar os tipos de tarefas com base em seu grau de desafio matemático (que pode ser reduzido ou elevado) e o seu grau de estrutura que pode ser fechado (é claramente dito o que é dado e o que é pedido do aluno, são tarefas mais objetivas) e aberto (comporta alguma indeterminação, os estudantes terão que fazer conjecturas, análises e testes para encontrar a melhor forma de resolução e sua resposta). Assim, podemos ter tarefas na forma de exercícios (fechada e desafio reduzido), problemas (fechada e desafio elevado), explorações (aberta e desafio reduzido) e investigações (aberta e desafio elevado).

Desta forma, o objetivo deste trabalho, o qual é parte de uma dissertação de mestrado, é investigar como a abordagem sobre ensino de função exponencial vinculado ao uso do

GeoGebra vem sendo discutida em artigos publicados nos últimos 10 anos (2010-2019) em periódicos brasileiros da área de Ensino, cujo escopo contenha o ensino de Matemática e/ou de ciências. A seguir, apresentamos a metodologia da pesquisa.

2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa, quanto aos seus objetivos, é descritiva, e, quanto aos seus procedimentos, é bibliográfica, dado que tem por base descrição das características de um determinado fenômeno (o ensino da função exponencial com suporte do software GeoGebra) a partir do levantamento de material (artigos) produzido e publicado em diferentes revistas científicas (GIL, 2002). Dessa forma, buscamos estabelecer uma contextualização da forma como este conteúdo associado a este software vem sendo discutidos na literatura mais recente.

O levantamento foi realizado em revistas brasileiras, das quais foram consideradas para análise as que tinham em seu escopo o ensino de Matemática ou de Ciências. Vale mencionar que, no sistema de busca de cada revista, por meio das etiquetas "exponencial" e "exponenciais", foram encontrados 70 trabalhos. Destes, filtramos as pesquisas em português publicadas na última década completa, (2010 a 2019), período em que houve uma série de marcos tecnológicos como a abrangência do acesso às redes WIFI (até 2010 era difícil encontrar domicílios com conexão sem fio). Além disso, também houve o desenvolvimento do conceito de leitores biométricos, de câmeras digitais em dispositivos móveis, crescimento e consolidação das redes sociais, de aplicativos de mensagens (que substituíam os torpedos), assistentes virtuais por reconhecimento de voz, e, etc. (LISZEWSKI, 2019). Estes são exemplos de recursos que impactaram e geraram discussões em diversos setores da sociedade, dos quais destacamos a educação, que se viu na necessidade de acompanhar tal evolução.

Como critérios de exclusão, a partir da análise dos artigos, foram considerados: 1º Critério: Pesquisas que se encontravam fora do recorte temporal supracitado; 2º Critério: Pesquisas que, apesar de citarem as funções exponenciais, não as tinham em seu núcleo de investigação; 3º Critério: Pesquisas que, embora abordem as funções exponenciais, não usam o GeoGebra como uma ferramenta didática presente em seu núcleo de pesquisa. O último critério, por sua vez, se justifica por existirem muitas pesquisas que empregam este *software* apenas como uma ferramenta técnica para gerar gráficos, como em estudos estatísticos, teóricos, nas áreas das engenharias, ou mesmo em trabalhos com cunho educacional, mas que não apresentam discussões ou considerações didáticas a respeito dos recursos e relevância do programa.

Desta forma, o corpo em análise foi reduzido de 70 para 14 artigos por apresentarem em seu núcleo de pesquisa as funções exponenciais associadas didaticamente à ferramenta GeoGebra. Não foram considerados, por exemplo, os trabalhos de: Damazio (2011) que, apesar de fazer referência a comportamentos exponenciais, foca sua pesquisa no estudo da potenciação com alunos do sétimo ano do ensino fundamental; Breda, Hummes e Lima (2013) que, apesar de apresentarem uma reflexão sobre o processo de aprendizagem do conceito de Função Exponencial no Ensino Médio, citam o GeoGebra como uma sugestão metodológica para pesquisas futuras; Monteiro et al (2020) que, apesar de analisar o GeoGebra como potencializador na aplicação de função exponencial, tem sua publicação fora do intervalo de tempo de interesse.

Desse modo, foram considerados 14 artigos, que foram classificados em três categorias mutuamente exclusivas, tal como no Quadro 6.

Quadro 6 - Categorias para subdivisão e analise dos artigos

TRABALHOS SEM INTERVENÇÃO NO ENSINO MÉDIO	Trabalhos com propostas didáticas para o estudo da função exponencial com o uso do GeoGebra sem intervenção/aplicação em sala de aula no Ensino Médio.
TRABALHOS COM INTERVENÇÃO NO ENSINO MÉDIO	Trabalhos com propostas didáticas para o estudo da função exponencial com o uso do GeoGebra por meio de intervenção/aplicação em sala de aula no Ensino Médio.
TRABALHOS COM INTERVENÇÃO NO ENSINO SUPERIOR	Trabalhos com propostas didáticas para o estudo de função exponencial com o uso do GeoGebra por meio de intervenção/aplicação em sala de aula no Ensino Superior.

Fonte: Autor, 2020.

Além desta categorização, foram extraídas informações chaves de cada artigo, tais como, o tipo de abordagem (estritamente teórica ou prática), o público alvo e os objetos e ferramentas de auxílio e análise técnicos (softwares, laboratórios, etc.).

Por fim, apresentamos o Quadro 7 com a lista dos artigos associados aos periódicos em que foram encontrados.

Quadro 7 - Trabalhos filtrados para análise

REVISTA	AUTOR
REVISTA DO INSTITUTO GEOGEBRA	REZENDE, PESCO E BARTOLOSSI (2012)
VIDYA	SANTOS E BIANCHINI (2012)
REVISTA UDESC	SILVA (2016)
SIGMAE	FARIA, SOUZA JUNIOR E CARDOSO (2016)

REVISTA THEMA	MARTINS, DOERING E BARTZ (2017)
REVISTA EXITUS	SOUSA E RAMOS (2017)
REVISTA CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS	SILVA E LAZZARIN (2018)
REVISTA BRASILEIRA DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO	MENDONÇA E FILHO (2018)
REVEMAT	AGUIAR, MACALÓS E LIMA (2019)
PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE	GOLDONI (2019)
REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	MACÊDO E SANTOS (2019)
VIVÊNCIAS EDUCACIONAIS	TOBIAS E DIAS (2019)
REVISTA ACTA SCIENTIAE	CARDOZO E POSSAMAI (2019)
NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO	BONOTTO E BISOGNIN (2015)

Fonte: Autor, 2020

Destas pesquisas, têm-se a maioria composta por oito artigos publicados em revistas do sul do país (com cinco pertencentes ao Rio Grande do Sul), seguido de quatro na região sudeste e dois do Nordeste (uma delas na Bahia). Com relação aos periódicos, observa-se que, um possui QUALIS A1, três são qualificados em A3, outro em A4, três em B1, dois em B3 e quatro com QUALIS C. Os demais aspectos serão devidamente apresentados e discutidos no próximo tópico.

3. APRESENTAÇÃO DE DISCUSSÃO DOS DADOS

Segue, a discussão dos artigos com base nos elementos seccionados pelas categorias dadas por trabalhos sem intervenção no Ensino Médio, trabalhos com intervenção no Ensino Médio e trabalhos com intervenção no Ensino Superior, conforme explicado no Quadro 01.

3.1. TRABALHOS SEM INTERVENÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Nesta categoria foi identificado um trabalho, o de Rezende, Pesco e Bartolossi (2012), no qual foram elaborados materiais na forma de *applets*[8] a partir do GeoGebra no intuído de evidenciar a importância de se compreender o conceito de função exponencial por meio da relação de variabilidade entre grandezas. Os pesquisadores analisaram o comportamento de uma variável em função da manipulação de outras. Ademais, foi dada atenção à relação entre

[8] S*oftware* que executa uma atividade específica dentro de outro programa maior, como um Plugin, por exemplo.

as representações numéricas, algébricas e gráficas da função exponencial sem que fossem trabalhadas, nesta proposta, com aplicações do conteúdo em outras áreas do conhecimento, como a Física e a Biologia. Neste caso, o foco é direcionado aos aspectos formais do ponto de vista matemático, como com propriedades, teoremas e caracterização.

Em um primeiro momento, discute-se a função $f(x) = a^x$ por meio da variação do parâmetro a, dos pontos do domínio x_n e de um acréscimo em relação a cada ponto (Δx). Nesse sentido, os pesquisadores objetivam que sejam compreendidas, através da manipulação de controles deslizantes, a relação de crescimento e decrescimento da função condicionados à a. Além disso, exploram a correspondência entre x_n, $f(x_n)$ e $\frac{f(x_n+\Delta x)}{f(x_n)}$ quando o primeiro se comporta como uma progressão aritmética (PA) fazendo os demais se tornarem, respectivamente, uma progressão geométrica (PG) e a razão desta.

Além disso, explorando mais a fundo as funções do tipo exponencial $f(x) = ka^x$, os pesquisadores, a partir da observação de tabelas, e também da manipulação de controles deslizantes, criaram um mecanismo o qual permite a verificação da propriedade que estabelece a razão $\frac{f(\mathrm{x}+\Delta x)}{f(\mathrm{x})} = \frac{ka^{x+\Delta x}}{ka^x} = a^{\Delta x}$ como não depende da variável x, permanecendo constante para algum Δx fixado.

Percebe-se a atenção voltada para a caracterização da função exponencial por meio da relação estreita entre seu comportamento algébrico e geométrico. Esta é uma abordagem interessante por se concentrar nos aspectos formais do conteúdo que, mesmo abrindo mão de correlações e aplicações em outras áreas do conhecimento, se dedica a tornar didática e acessível a visualização e compreensão destas propriedades. Tal proposta evidencia que trabalhar com as justificavas provenientes da Matemática pura com estudantes do Ensino Médio não é algo impossível ou proibido. São tarefas de investigação e exploração como estas que muitas vezes podem cumprir o papel de desmistificar o caráter “axiomático” e formuláico pregado majoritariamente nas aulas de Matemática. Trabalhar com fórmulas e teoremas prontos, sem que os estudantes entendam de onde eles vêm e porque assumem determinados comportamentos, podem gerar mais desinteresse, enquanto que da forma como é proposto aqui, o aluno tem a oportunidade de construir, conjecturar e visualizar a validação destas fórmulas e teoremas.

Vemos aqui, o caráter experimental e analítico que o GeoGebra pode imprimir durante a aula de Matemática, por meio de manipulações e experimentações que contribuem para “convencer” os alunos de certas generalizações e “fatos” matemáticos a partir de tarefas de exploração, dado que as atividades no *software* são previamente apresentadas de modo que os estudantes devem, a partir delas, chegar a estas conclusões.

3.2. TRABALHOS COM INTERVENÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Nesta categoria enquadraram-se nove trabalhos, com diferentes tipos de abordagens e considerações a respeito do conceito de função exponencial e do *software* GeoGebra. Deste quantitativo, duas pesquisas (SANTOS; BIANCHINI, 2012; TOBIAS; DIAS, 2019) optaram por discutir os aspectos algébricos e geométricos das funções exponenciais, em detrimento de suas aplicações em contexto de realidade.

Santos e Bianchini (2012) buscaram instigar alunos do 3º ano do Ensino Médio a encontrarem a função inversa da exponencial (a função logarítmica) com suporte dos conceitos de simetria e geometria plana (no que confere às distancias entre retas). O interessante desta abordagem foi o objetivo dos pesquisadores em levar os alunos a esta constatação por tentativas e erros, onde teriam que encontrar uma expressão algébrica para a inversa da exponencial. Para tanto, geraram e analisaram alguns outros gráficos, como os das funções afim e quadrática. Tal possiblidade de testar vários tipos de funções de modo dinâmico e rápido, comparando-as visualmente, é apontado aqui como uma virtude do GeoGebra do ponto de vista cognitivo, pois evidencia as diferenças entre cada uma.

Os autores utilizaram como fundamentação teórica e metodológica, por meio de exercícios e explorações, o estudo das representações semióticas, a análise dos processos do pensamento matemático avançado e a engenharia didática. Vale salientar que o trabalho com as representações fora empregado como instrumento de comparação em exercícios e explorações que solicitaram dos estudantes uma análise de regularidades entre diferentes registros, a fim de constatarem as diferenças entre as funções.

Dentre as principais considerações de Santos e Bianchini (2012) está a constatação da dificuldade dos estudantes em transitarem entre as representações tabular e algébrica. Além disso, afirmam que utilizar apenas o livro didático não é suficiente para a promoção de aprendizagem deste conteúdo, evocando, assim, a importância de o professor elaborar e aplicar tarefas de caráter investigativo as quais complementem o proposto no material de apoio.

Tobias e Dias (2019), por sua vez, optaram por propor que estudantes do 2º ano do Ensino Médio Técnico, construíssem manualmente o gráfico de funções do tipo exponencial para em seguida, inserirem estes mesmos gráficos no GeoGebra. O objetivo foi, por meio de problemas, explorar os benefícios do *software*, como a otimização do tempo, a acessibilidade e a facilidade de manuseio. Ademais, os autores destacaram que o uso de tecnologias em sala de aula não invalida a “aula tradicional”, mas sim à complementa, tornando-a mais significativa. Assim, evidenciar a facilidade e a utilidade do uso deste tipo de ferramenta aos estudantes na comparação com o trabalho realizado sem ela, pode ser também uma estratégia para a conquista da atenção e do interesse da turma, cuja aprendizagem também está condicionada ao seu grau de envolvimento com a proposta da aula.

Ainda, nesta categoria, foram filtrados sete trabalhos que exploraram as aplicações deste tipo de função dentro das ramificações da matemática e em outras áreas do conhecimento, como a Física e a Biologia. Os temas abordados foram as leis de resfriamento de Newton, crescimento de um investimento aplicado a juros compostos, concentração de um medicamento no organismo, eficiência do trabalho, o crescimento bacteriano e da mosca da fruta.

É importante notar que o uso da modelagem matemática em sala de aula concede ao professor a possibilidade de instigar a criatividade de seus alunos, não apenas no que concerne às habilidades matemáticas, mas, principalmente, na formulação de problemas originais. Em sua maioria oriundos de medições e organização de dados em planilhas e tabelas, tais tarefas permitem a identificação e visualização de leis e padrões de comportamentos (BASSANEZI, 2015).

Foi possível averiguar também, em alguns trabalhos, além dos já supracitados, a existência desse tipo de experimento com os estudantes. Assim, por meio de tarefas de investigação e exploração, essas pesquisas tiveram a missão de coletar e modelar uma função (do tipo exponencial) que melhor descrevesse um determinado fenômeno natural.

Os trabalhos de Martins, Doering e Bartz (2017) e Cardozo (2019) relatam experiências laboratoriais envolvendo a lei de resfriamento de Newton no qual os alunos (em ambas as pesquisas, do 1º ano do Ensino Médio), por meio de termômetros de álcool ou culinário, registraram as mudanças de temperatura de líquidos previamente aquecidos e, com auxílio do GeoGebra, ajustaram os dados a uma função. O uso do *software* neste tipo de tarefa potencializa o caráter experimental da atividade e fornece vários caminhos que induzem à generalização. Valoriza-se, assim, uma aprendizagem pautada em descobertas e não em aceitação de verdades prontas. Na proposta, desenvolvida por Martins, Doering e Bartz (2017), os alunos inseriram os pontos (tempo, temperatura) no programa e, por meio de controles deslizantes aplicados aos parâmetros da função do tipo $f(x) = a + (b - a)e^{-kx}$ (que o professor previamente debateu ao explicar a lei de resfriamento), foram ajustando até chegarem ao modelo ideal que descrevesse a relação entre o decaimento da temperatura do líquido em função do tempo, manipulando simultaneamente as representações algébrica e geométrica de f.

Cardozo (2019) também propôs uma tarefa de investigação baseada na lei de resfriamento de Newton com alunos do 1º ano do Ensino Médio que tiveram a missão de medir e analisar, em intervalos fixos de tempo, a temperatura de um determinado líquido. Foram orientados previamente sobre o comportamento e o significado dos coeficientes do modelo exponencial proposto por Newton ($T(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + T_m$ (onde C é a diferença entre a temperatura ambiente, T_me a inicial do corpo, e k uma constante de proporcionalidade) e incentivados a, algebricamente, encontrarem uma função da forma $f(x) = ae^{kx} + d$ que se adequasse aos dados coletados. Assim, analisaram, por conta própria, seus resultados por meio do GeoGebra se defrontando com alguns erros até obterem sucesso de fato.

Do ponto de vista das representações semióticas, aqui, os estudantes tiveram a oportunidade de correlacionar as unidades significantes da função exponencial em sua representação algébrica (os coeficientes) e gráfica (crescimento e decrescimento, curvatura, interseção com o eixo das ordenadas). Diante disso, identificar esta função em mais de uma representação e entender a correspondência entre os elementos pertinentes a cada uma é um dos aspectos que o professor deve levar em conta para analisar o nível de compreensão de seus alunos (DUVAL, 2011).

Outras duas pesquisas que também exploram as representações da função exponencial foram as de Mendonça e Filho (2018) e a de Bonotto e Bisognin (2015). A primeira, tem como público alunos do 1º ano do Ensino Médio e, se embasando na teoria dos registros de representação semiótica, desenvolveu um estudo que explorou a função exponencial na matemática financeira (na análise de juros compostos). A partir de tarefas do tipo problema, buscaram compreender como a utilização do *software* GeoGebra pode auxiliar alunos do Ensino Médio na aprendizagem deste tipo de função por meio da mobilização, manipulação e coordenação de representações semióticas.

Outrossim, ao relatarem que de fato o programa permitiu aos estudantes transitarem entre diferentes registros do objeto estudado, Mendonça e Filho (2018) chamam a atenção para alunos com dificuldades de compreender e enxergar certas generalizações e propriedades algébricas em Matemática. E, com a intervenção do *software*, melhoraram seu desempenho, justamente, devido a possibilidade de visualização e manipulação simultânea de várias representações.

Vale acrescentar que Bonotto e Bisognin (2015), por sua vez, além das representações semióticas, também se embasaram nos conceitos de tarefas investigativas no Ensino Médio (PONTE, 2005) pautadas na matemática financeira e nos objetos de aprendizagens, recursos digitais empregados como suporte ao ensino que o torna mais dinâmico e efetivo (WILLEY, 2002 apud BONOTTO; BISOGNIN, 2015). Tais recursos surgem por meio de simulações de compras, em que os estudantes são induzidos a generalizar a lei responsável por definir o montante de uma aplicação a juros compostos em função do tempo. Por conseguinte, ao propor a discussão que leva à expressão $M = C \cdot (1 + i)^t$, os alunos usaram o GeoGebra para estudar a função dada por $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x}$ na expectativa de entender o que a variação de seus coeficientes provoca no gráfico e sua relação com os problemas financeiros analisados.

Os autores defendem que recursos como o GeoGebra são ferramentas de mediação que exigem do professor conhecimento técnico para empregá-las da maneira devida, pois é necessário saber mesclá-las às tarefas investigativas, que concedam aos estudantes um papel ativo no processo de construção do conceito da função exponencial. Bonotto e Bisognin (2015) alertaram para a possiblidade de os estudantes terem sucesso através de tentativa randômicas, nas quais não estariam de fato pensando analiticamente sobre suas ações, gerando erros sucessivos e excessivos (que não, necessariamente, representam uma virtude). É destacado, aqui, a importância do professor saber como e quando intervir, promovendo um ambiente de discussão sobre as conjecturas de seus alunos de modo a corrigi-las, adequá-las ou validá-las.

Destacamos, ainda, o trabalho de Goldini (2019) que objetivou compreender e modelar matematicamente o crescimento de micro-organismos coletados da saliva de alunos do 1º ano do Ensino Médio (participantes da pesquisa). Objetivou instigar a autonomia dos alunos ao lhes delegar a tarefa de descobrir a relevância e o significado da Matemática na prática. O autor julga que o tratamento apenas teórico deste tipo de função limita a compreensão de sua relevância em outras áreas do conhecimento. Afirma que a estrutura não interdisciplinar e fragmentada entre as disciplinas da grade curricular no Ensino Médio, dificulta a contextualização de certos conteúdos. Dessa forma, os estudantes coletaram, cultivaram, registraram, analisaram e modelaram o comportamento dos microrganismos ao longo tempo.

O estudo das aplicações de funções na aula de Matemática pode ser melhor explorado com apoio de especialistas e professores formados na área específica de aplicação, como nesta pesquisa, por exemplo, em que, foi solicitado o suporte do professor de Biologia para a discussão mais acurada sobre o comportamento bacteriano e o manuseio dos instrumentos de coleta e análise. O GeoGebra é apontado neste estudo como um recurso que possibilita a representação das diferentes facetas do objeto estudado, diversificando as possiblidades de mediação pelo professor. Os alunos utilizaram os controles deslizantes do *software* para ajustar a curva exponencial $g(x) = ba^{cx}$ aos pontos associados a área ocupada pelos microrganismos em função dos dias. Além disso, Goldini (2019) considera o uso de laboratórios promissor na aula de Matemática, pois torna a aula mais dinâmica e mais apreciável para se trabalhar a função exponencial de forma mais envolvente, proporcionando um aprendizado mais significativo para os envolvidos.

Outra aplicação explorada, foi a meia vida de medicamentos no organismo, na pesquisa de Aguiar, Macalós e Lima (2019), com alunos do 1º ano do Ensino Médio de duas escolas distintas. Eles relataram um estudo e reflexão, desenvolvido por dois professores de Matemática, sobre o comportamento de anticoncepcionais no organismo humano, levando em conta tanto o aspecto matemático como também o biológico. Nota-se, aqui, outra situação em que um dos professores sentiu a necessidade de apoio da professora de Biologia para a discussão do tema. Desta forma, antes do estudo da função exponencial, foi dedicado um momento de debate sobre questões relacionadas, por exemplo, à como este medicamento age no organismo feminino, seus malefícios e sua relação com a incidência ou prevenção de doenças ou reações físicas.

Guiado pela técnica de Polya de resolução de problemas, Aguiar, Macalós e Lima (2019) propuseram tarefas contextualizadas aos estudantes, nas quais deveriam responder tanto a questionamentos fechados como o preenchimento de tabelas com informações do enunciado, da mesma forma que deveriam responder perguntas mais abertas. Através de explorações, os alunos foram convidados a refletir sobre se algum dia a substancia ingerida (anticoncepcional) desapareceria do organismo, com base no comportamento apontado no gráfico, o qual deveriam construir no GeoGebra. Ao final da proposta os estudantes deveriam construir um banner digital contendo o gráfico da função, representando o comportamento da substância do organismo humano, além de explicações técnicas sobre o tema.

Nessa direção, Aguiar, Macalós e Lima (2019) constatam a relevância didática do uso das tecnologias digitais para a aprendizagem por possibilitarem a organização e uma intepretação mais precisa dos dados. Citam como exemplo os gráficos da exponencial apresentados nos posters digitais que permitiram enxergar, analisar e prever como o medicamento é absorvido pelo corpo, além de fazerem uma crítica ao ensino pautado apenas na memorização e repetição, constatando uma forte relação entre o "aprender" e o "fazer", tal como alertou Goldini (2019).

Outra pesquisa que também explorou uma aplicação em outra área do conhecimento, mas sem trabalho campal, com suporte da teoria de resolução de problema de Polya foi a de Silva e Lazzarin (2018). Estes pesquisadores objetivaram atribuir significado ao conceito de função por meio da construção e interpretação de gráficos com o suporte do GeoGebra. Realizado com alunos do 3º ano do ensino médio, este trabalho explorou problemas prontos sobre crescimento bacteriano que instigavam os alunos a conjecturar uma fórmula que descrevesse este fenômeno em função tempo (função exponencial), encontrando sua inversa (função logarítmica) em seguida. A partir desta proposta, foi apresentada a definição formal de ambas as funções e depois os estudantes analisaram algumas de suas propriedades a partir da variação de seus coeficientes com os controles deslizantes do GeoGebra.

De forma geral, Silva e Lazzarin (2018) reportam, dentre as principais vantagens do GeoGebra com relação à aprendizagem dos estudantes, o fato de instigarem sua motivação e interesse. Além de possuir recursos (em especial sua calculadora gráfica), a qual permitem um rápido auxílio visual para que sejam levantadas e testadas hipóteses que reforçam a autonomia dos envolvidos e otimizam o tempo de execução das tarefas, tal como relatado por outras pesquisas aqui analisadas,

3.3. TRABALHOS COM INTERVENÇÃO NO ENSINO SUPERIOR

Dos quatro trabalhos desenvolvidos em Ensino Superior, três tiveram como público alvo professores formados e em formação (SILVA, 2016; FARIA, SOUZA JUNIOR, CARDOSO, 2016; MACÊDO, SANTOS, 2019). É importante ressaltar que estas pesquisas tiveram maior enfoque no estudo das propriedades da função exponencial, se guiando pelos aspectos provenientes da Matemática pura. Ademais, o único destes desenvolvido em cursos de bacharelado (SOUSA; RAMOS, 2017), foi o que teve foco maior nas aplicações em contexto de realidade. Além disso, nota-se como fator comum a todas estas pesquisas o emprego variado de diversos tipos de tarefas em uma mesma proposta. Outro escopo comum entre os trabalhos desenvolvidos com licenciandos e professores, foi a atenção dada à compreensão da caracterização formal da função exponencial, e na forma como o GeoGebra lhes poderia ser útil, tanto na perspectiva de estudantes quanto na perspectiva de docentes.

Destacamos a importância de projetos de iniciação à docência como meios de incentivo a estas práticas, como no trabalho de Faria, Souza Junior e Cardoso (2016), que descreveram uma experiência em um subprojeto do PIBID, dedicado ao uso do GeoGebra para o estudo de funções. Na forma de curso de extensão, os participantes foram professores da educação básica supervisores do projeto e licenciandos bolsistas. Aqui, o objetivo partiu da exploração de conceitos básicos de potenciação sobre os quais os envolvidos tinham lacunas conceituais constatadas na pesquisa como, por exemplo, o fato de poucos professores conseguirem explicar e justificar a propriedade relativa a potências de expoente igual a 0. Outro objetivo, foi explorar o comportamento da função exponencial, por meio do GeoGebra. Ainda assim, também discutiram algumas aplicações como o crescimento de vendas, a análise da idade de rochas, as taxas de juros, as equações diferenciais ordinárias, o decrescimento de taxa de radiação, a queda da temperatura e também, a decomposição de um cadáver.

Percebe-se aqui, novamente, o emprego dos controles deslizantes como recursos para análise da relação entre as representações algébricas e geométrica da exponencial. Fator importante para professores, justamente, por enriquecer seu repertório didático no momento em que, ao invés das fórmulas prontas, podem construir essas relações, de modo que fique claro aos seus estudantes o porquê, e a relação entre as unidades significantes de cada registro em quaisquer que sejam as representações. Em suas principais considerações, Faria, Souza Junior e Cardoso (2016) reiteram resultados positivos, afirmando que,

> […] inicialmente, apenas cerca de 25% dos cursistas consideravam-se satisfeitos com seus conhecimentos, ao final o índice de satisfação subiu para quase 91%. Embora com menor impacto, o nível de conhecimento das ferramentas do GeoGebra também apresentou incremento. Antes do curso, cerca de 70% dos cursistas consideravam péssimo ou razoável seu conhecimento e, no fim do curso pouco mais de 78% afirma estar satisfeito com as habilidades desenvolvidas no uso do software. Observa-se que, alguns dos 30% dos cursistas, que considerava bons seus conhecimentos, puderam aprender mais ferramentas e aplicá-las no contexto didático (p.8).

Outro trabalho que também se preocupou com o estudo da relação entre as formas algébricas e geométricas da função exponencial, foi o de Silva (2016), que elaborou um Kit Virtual de Apoio (KVA) disponibilizado online contendo videoaulas e *applets* confeccionados no GeoGebra. Com este material, analisou o conhecimento de alunos do terceiro período de um curso de licenciatura em Matemática, por meio de tarefas investigativas a respeito de propriedades dos tipos de gráficos de funções, dentre os quais a exponencial.

Neste estudo, Silva (2016) destaca o problema de muitos livros didáticos de Matemática apresentarem variações do conceito de função, o que acarreta em dificuldades por parte dos estudantes, corroborando também com a pesquisa de Faria, Souza Junior e Cardoso (2016). Segundo estes, não é dada muita atenção à família das transformações e composições da função do tipo exponencial, representada por $f(x) = ka^{bx+c} + d$ (com k, b, c e d sendo constantes reais) as quais não possuem as mesmas caracterizações da exponencial propriamente dita, mas aparece em diversos modelos estudados em várias áreas do conhecimento. Isso justifica a importância de se ensinar relações e propriedades que, mesmo fugindo do proposto nos livros didáticos, podem contribuir para a aprendizagem dos estudantes, ao conferir uma visão mais global de como aplicar e interpretar este tipo de função, em contextos reais ou puramente matemáticos.

Nesta mesma linha, temos a pesquisa de Macêdo e Santos (2019) que procurou investigar as contribuições do uso das tecnologias digitais (além do GeoGebra, também o WINPLOT), na construção da autonomia docente dos acadêmicos de licenciaturas em Matemática e Física. Isso, a partir de exercícios e problemas envolvendo as funções transcendentais que incluem, dentre outras, as funções exponenciais e logarítmicas.

Percebe-se, a atenção dos pesquisadores voltada para que os estudantes compreendam a distinção da função exponencial para as demais, com base em erros e dúvidas comuns. Justificam a escolha deste assunto ao constatarem que, muitas vezes, não são devidamente discutidos no Ensino Médio e nos períodos iniciais da graduação. Com foco nas relações algébricas e geométricas do conteúdo, explicam a escolha por trabalharem com o GeoGebra por este ser um software livre, acessível, dinâmico e gratuito. Reiteram a importância da capacitação de professores para com o uso das novas tecnologias, como forma de explorar as diferentes maneiras de se trabalhar com um mesmo conteúdo, bem como de captar o interesse dos estudantes.

Por fim, analisamos a pesquisa de Sousa e Ramos (2017) que descreveu uma atividade ocorrida pela construção e análise de alguns modelos matemáticos, no contexto do estudo de funções exponenciais, utilizando dados empíricos, com o auxílio de ferramentas da área de Informática, tal como, o GeoGebra. Nesse viés, com aporte da teoria da aprendizagem significativa, a pesquisa ocorreu com alunos dos cursos de Ciências Biológicas, Química, Engenharia Florestal, Farmácia e Ciências Econômicas. Os modelos empregados por meio de problemas e exercícios foram o crescimento de um investimento aplicado a juros compostos, com taxa fixa, a concentração de um medicamento no organismo, a eficiência no trabalho, o crescimento bacteriano e o crescimento da mosca das frutas.

Nesta pesquisa, os autores constatam que muitas ferramentas como o GeoGebra e o Excel não fazem parte da rotina acadêmica e profissional dos graduandos, sejam em cursos de bacharelado ou licenciaturas. Afirmam, ainda, que o ensino e aprendizagem podem se tornar significativos, no momento em que se estuda Matemática em contextos aplicados, ao se relacionar tanto com a vida acadêmica como também com a profissional dos estudantes, segundo os autores,

> […] a utilização de dados empíricos referentes a algum problema real, processados num ambiente informatizado, como o Excel ou o GeoGebra, possibilitam que conteúdos matemáticos estudados desde o Ensino Básico até o Ensino Superior apresentem-se mais úteis nas aplicações e análises de situações-problema, permitindo que os estudantes possam dar mais significado ao que estudam, ao percebê-los em diversos contextos da sua realidade (SOUSA; RAMOS, 2017, p.72).

Com relação ao Ensino Superior, percebemos uma divergência de abordagens no que diz respeito aos bacharelados e as licenciaturas. Assim, quando se ensina para futuros professores, é comum o foco nos aspectos que caracterizam a função exponencial, em diferentes representações. Neste caso, o GeoGebra é empregado como uma ferramenta a qual permite a investigação de propriedades que os estudantes devem dominar e saber mediar. Em bacharelados, existe uma preocupação maior com a relevância prática desta Matemática, na vida profissional dos graduandos, que se reflete na exploração de modelos matemáticos que permitem a análise e previsão de comportamentos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho, parte de uma dissertação de mestrado, foi investigar como a abordagem sobre ensino de função exponencial vinculado ao uso do GeoGebra vem sendo discutida em artigos publicados entre os anos 2010 - 2019 em periódicos brasileiros da área de Ensino, cujo escopo contenha o ensino de Matemática e/ou de ciências. Foram filtrados 14 artigos que atenderam a estes critérios.

Verificamos que este tipo de função tem sua relevância marcada, indiscutivelmente, por suas aplicações na descrição de diversos fenômenos físicos, sociais e biológicos que, quando usadas em sala de aula, permitem aos estudantes enxergar utilidade no assunto, cujo estudo muitas vezes fica restrito a repetições, tarefas unicamente na forma de exercícios ou problema e uma tendência à predominância dos tratamentos unicamente algébricos, o que pode acarretar em problemas na aprendizagem.

Entre as pesquisas analisadas, um método de ensino interessante, derivado desta vasta aplicabilidade, é o trabalho laboratorial, que se revelou um grande motivador para alunos do Ensino Médio, no momento em que lhes é dada a oportunidade de serem ativos no processo de aprendizagem. Explorações e investigações deste tipo envolvem a coleta de dados, a elaboração de hipóteses, a análise de resultados, a escolha/busca por um modelo apropriado, conjecturas e conclusões que podem ser retiradas a partir desta atividade específica.

Além disso, destaca-se a interdisciplinaridade como essencial no ambiente escolar, por contribuir com situações em que certos conceitos, discutidos em uma aula de Matemática, baseados em contextualizações em outras áreas do conhecimento, podem ser melhor explorados quando em parceira com outros professores de outras áreas.

Vale salientar que, o trabalho simultâneo com as múltiplas representações deste objeto matemático, é um procedimento válido e necessário, uma vez que, cede aos estudantes recursos para compreenderem o comportamento exponencial, quando em posse de uma tabela de dados, de uma curva ou de uma lei codificada. Nas publicações analisadas, foi notória a preocupação dos pesquisadores em estabelecer relações entre estes registros, corroborando com a necessidade de mobilização e compreensão, ao menos, de dois tipos de representação, para ser constatado algum tipo de aprendizagem defendida por Duval (2011).

O GeoGebra é um recurso amplamente discutido no meio acadêmico, principalmente quando se fala em ensino de Matemática. Além disso, o *software* possui ferramentas que beneficiam o trabalho com os objetos estudados em sala de aula por permitir a exploração de diversos aspectos, formas e perspectivas. Com ele é possível, em um momento cuja finalidade é formalizar o conceito e evidenciar comportamentos e características da função exponencial, por exemplo, criar controles deslizantes, que permitem, em um processo de experimentação constante, que os estudantes cheguem a estas constatações. Sendo assim, o que se descobre e deduz por conta própria tende a ser internalizado e compreendido de forma mais efetiva e duradoura, em detrimento de quando são apenas dadas informações e definições, com as quais não existe nenhum tipo de familiaridade.

Como defendido por diversos pesquisadores, o emprego do GeoGebra, bem como qualquer outro *software*, em sala de aula não invalida uma boa aula expositiva ou a exploração dos aspectos formais e algébricos do conteúdo. O emprego de tecnologias digitais permite uma diversificação metodológicas ao professor. Além da estruturação da escola, é reforçado que o professor precisar ter, não apenas domínio sobre o programa, mas também um entendimento geral básico de tecnologia para ser capaz de solucionar problemas técnicos básicos, sanar dúvidas que fogem ao planejamento inicial e ser inventivo quanto ao planejamento de suas intervenções.

Todavia, para que este tipo de intervenção em que todos (alunos e professor) sejam ativos aconteça, a escola precisa ser capaz de atender tal demanda, e conceder ao estudante um acesso justo a todos os elementos que tornam este método possível (ambiente adequado, computadores de qualidade, internet, etc.). Chamamos, assim, atenção para a necessidade de intervenção governamental, para que isso seja possível do ponto de vista estrutural nas escolas públicas.

Com relação à função exponencial, o *software* contribuiu para transparecer aos estudantes a relação entre as unidades significantes de diferentes representações semióticas, principalmente a língua natural, a gráfica e a algébrica. O caráter manipulativo do GeoGebra, associado às tarefas investigativas, dão condições para que possam ser trabalhados os aspectos formais do conteúdo, ao mesmo tempo em que se discute assuntos oriundos de outras áreas do conhecimento, por meio de suas aplicações.

De forma geral, um benefício comum averiguado nas pesquisas com o GeoGebra, é a otimização de diversos aspectos da aula. Com o programa, os alunos podem, por conta própria, analisar suas tarefas, verificar suas respostas, comparar suas construções gráficas e embasar suas conclusões. Isto, por meio de manipulações e tentativas que passam por erros e acertos, além de estimular a autonomia do aluno, também fornece ao professor elementos e informações que lhes permite uma apreciação mais refinada de como está acontecendo esta aprendizagem e por meio de quais caminhos e de que forma ele deve intervir, dinamizando seu trabalho.

A diversificação das formas de intervenção em sala de aula é evocada nas pesquisas como uma necessidade para o trabalho com as funções exponenciais e do tipo exponencial. É posto que muitas vezes apenas o livro didático e suas tarefas (na maioria exercícios e problemas), não são suficientes para uma boa discussão do conteúdo, o qual é melhor aproveitado e debatido por meio de investigações e explorações, como com o GeoGebra.

Este trabalho pode instigar outras reflexões, seja como referencial teórico de outras pesquisas que se preocupam em entender e embasar como estão as discussões sobre o assunto na literatura nacional mais recente sobre o ensino de função exponencial, atrelado ao GeoGebra, ou como fonte de inspiração para o desenvolvimento de trabalhos que queiram discutir outros temas de forma semelhante (como uma análise centrada em outros tipos de softwares vinculados a outros tipos de funções). Do ponto de vista dos professores, com acesso a este estudo, espera-se que seja instigada uma reflexão sobre sua prática e como sua aula sobre funções exponenciais pode ser implementada com auxílio do GeoGebra, baseado em todo o material aqui levantado e debatido.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino - aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, MEC / CONSED / UNDIME, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. SAEB [recurso eletrônico]. Brasília: INEP, 2019. Disponível em: https://bit.ly/2U6cxoB. Acesso em: 15 de out. 2020.

BREDA, A.; HUMMES, V. B.; LIMA, V. M. do R. Torre de Hanói virtual e a construção do conceito de Função Exponencial no Ensino Médio. **Novas Tecnologias na Educação**, Rio Grande do Sul, v. 11, n. 1, p. 1-9, jul. 2013. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/41693. Acesso em: 20 out. 2020.

DAMAZIO, A. O Processo de Elaboração do Conceito de Potenciação de Números Fracionários: uma abordagem histórico-cultural. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 219-244, abr. 2011. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4602. Acesso em: 20 out. 2020.

DUVAL, R.; MACHADO, S. D (ORG). A. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. Machado, S. P. A. (org.). In: A aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. 8 ed. Campinas: Papirus, 2011, p. 11-33.

FARIA, T. A.; SOUZA JÚNIOR, J. C. de; CARDOSO, A. Matemática **Dinâmica para compreender a função exponencial**. Sigmae, Alfenas, v. 5, n. 1, p. 1-11, dez. 2016. Disponível em: https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/view/509. Acesso em: 02 out. 2020.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LISZEWSKI, A. **As tecnologias que mais evoluíram nos últimos 10 anos**. 2019. Disponível em: https://gizmodo.uol.com.br/tecnologias-mais-evoluiram-ultimos-10-anos/. Acesso em: 19 out. 2020.

MONTEIRO, R.; LARANJEIRA, S. R. A.; ANDRADE, L. D. M. de; RIBEIRO NETO, J. G. **O geogebra como potencializador na aplicação de função exponencial**. Reamec - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, [S.L.], v. 8, n. 2, p. 688-699, 4 jul. 2020. Revista REAMEC. http://dx.doi.org/10.26571/reamec.v8i2.9693.

PIANO, C. **Diferentes abordagens para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas**. 2016. 112 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2016. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1982. Acesso em: 15 out. 2020.

PONTE, J. P. da. **Gestão curricular em Matemática**. O Professor e O Desenvolvimento Curricular. Lisboa, p. 11-34. out. 2005. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/242643133_Gestao_curricular_em_Matematica. Acesso em: 01 ago. 2020.

PUC-SP (Brasil). Instituto GeoGebra (IGI) (org.). Home Page. 2020. Disponível em: https://www.pucsp.br/geogebrasp/. Acesso em: 15 out. 2020.

SANTOS, G. N. **Funções exponenciais**: uma proposta para professores do ensino médio.. 2014. 85 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Pará, Belém, 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?cpf=61002771234&d=20200115011013&h=b4cc97b7c3473b7e0671f370d4714961ae44b211. Acesso em: 20 out. 2020.

TOLEDO, L. A. de. **Ensino da função exponencial**: análise de resultados. 2018. 124 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2018. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/157239. Acesso em: 18 out. 2020

CAPÍTULO II – ARTIGO 02

FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA ANÁLISE DE TAREFAS PRESENTES EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

RESUMO

Este artigo faz parte de uma dissertação de mestrado estruturada em formato multipaper e tem como objetivo investigar os tipos de tarefas matemáticas, bem como as representações semióticas envolvidas, nos capítulos sobre função exponencial de três livros didáticos do 1º ano do ensino médio de coleções distintas selecionados no atual PNLD (2016 – 2020) por escolas públicas da cidade de Barreiras – BA. Para realizar tal análise nos baseamos na classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017). Esta é, portanto, uma pesquisa exploratória, quanto aos seus objetivos, e documental, quanto aos procedimentos. Como principais conclusões, constatamos uma forte tendência dos livros didáticos em propor tarefas de estrutura fechada principalmente atrelados a objetivos de fixação e repetição, além de problemas vinculados às aplicações da função exponencial, uma constante nas três obras. Verificamos também uma priorização massiva pela representação algébrica, tanto em tarefas que exigiam apenas tratamentos quanto naquelas que envolviam conversões (em que, corriqueiramente, a representação algébrica era a representação de partida ou de chegada). Também constatamos uma maioria de tarefas que exigiam transição entre registros com o privilégio à conversões congruentes. Recomendamos os fundamentos da TRRS como ferramenta se seleção de tarefas e que o processo avaliativo das resoluções dos estudantes leve em conta o fenômeno da congruência.

Palavras – Chave: Função exponencial. Tarefas. Representações semióticas.

Abstract

This article is part of a master's thesis structured multipaper format and aims to investigate the types of mathematical tasks, as well as the semiotic representations involved in the chapters on exponential function of three textbooks for the 1st year of high school selected distinct collections in the current PNLD (2016 – 2020) by public schools in the city of Barreiras – BA. To carry out such analysis, we based on the classification of tasks by Ponte (2005) and the Theory of Records of Semiotic Representation of Duval (2017). This is, therefore, an exploratory research, in terms of its objectives, and documentary, in terms of procedures. As main conclusions, we note a strong tendency of textbooks to propose tasks of closed structure mainly linked to the objectives of fixation and repetition, in addition to problems related to the applications of the exponential function, a constant in the three works. We also verified a massive prioritization by algebraic representation, in addition to a majority of tasks that required transition between records with the privilege to congruent senses. We recommend the fundamentals of TRRS as a tool for selecting tasks for evaluations so that the evaluation process takes into account the phenomenon of congruence.

Key words: Exponential function. Tasks. Semiotic representations

1. INTRODUÇÃO

A função exponencial é um objeto matemático presente na ementa curricular escolar do 1º ano do ensino médio brasileiro. Atualmente, é um tema amplamente discutido no meio acadêmico/científico (SILVA, 2016; FARIA; SOUZA JUNIOR; CARDOSO, 2016; SOUSA;

VIALI; RAMOS, 2017; GOLDINI, 2019, CARDOZO; POSSAMAI, 2019), sendo que uma das principais pautas nestas pesquisas é a dificuldade que muitos alunos apresentam no momento de aplicar e correlacionar as propriedades deste conceito (SILVA, 2016).

Dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) (BRASIL, 2019) indicam que apenas 0,07% dos estudantes do Ensino Médio no Brasil são capazes de determinar a expressão algébrica correspondente a uma função exponencial, a partir de dados fornecidos em texto ou gráfico. Na Bahia, o percentual de alunos que alcançam este mesmo nível de proficiência cai para 0,03%. Já na cidade de Barreiras- BA (onde residem, trabalham e pesquisam os autores deste estudo) este percentual é zerado, indicando uma situação mais alarmante ainda.

Temos que a função exponencial é, ao lado das funções afins e quadráticas, uma das mais empregadas em tarefas no ensino médio (LIMA, 2013). Uma das justificativas para tal pode ser atribuída ao fato de este tipo de função ser modelo de descrição de uma série de comportamentos de fenômenos, como o decaimento radioativo, montante em juros compostos e divisão celular, muito presentes nos livros didáticos. Na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) é enfatizada como habilidade necessária para o ensino médio "resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros" (p.536). Isso reforça, então, a relevância, reconhecida documentalmente, das aplicações em contexto de realidade da exponencial.

No ensino de Matemática no Brasil, temos que o livro didático é um instrumento de trabalho intrínseco à vida escolar tanto do professor quanto do aluno. Alguns pesquisadores, como Ginez (2020), Junkerfeurbom e Klüber (2017) e Cunha (2020), se propuseram a analisar as tarefas apresentadas em livros didáticos de Matemática, com vistas a esmiuçar o que realmente podem despertar e instigar no aluno em termos de aprendizagem e autonomia intelectual, com base em sua estrutura, nível de dificuldade e representações semióticas envolvidas (algébrica, gráfica, etc.).

As reflexões produzidas nestes estudos são válidas ao se pensar sobre até que ponto o professor deve se apoiar somente no que o livro didático traz e se as tarefas apresentadas, da forma como aparecem e são propostas, são capazes de despertar interesse, desafio e, consequentemente, alguma evolução epistemológica nos estudantes.

São questionamentos como estes que embasam nosso objetivo de investigar os tipos de tarefas matemáticas, bem como as representações semióticas envolvidas, nos capítulos sobre função exponencial de três livros didáticos do 1º ano do ensino médio de coleções distintas selecionados no atual PNLD (2016 – 2020) por escolas públicas da cidade de Barreiras – BA. Para realizar tal análise nos baseamos na classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017). Assim, apresentaremos tabelas gerais e comparativos dos livros e avaliaremos algumas tarefas específicas.

2. TAREFAS

Neste trabalho, nos embasamos nos estudos de Ponte (2005) sobre a classificação e as definições de tarefas matemáticas. O autor reitera a existência de diferentes de tipos de tarefas que atendem a demandas específicas, como as destinadas à avaliação e aquelas para análise de processos de pensamento e dificuldades particulares, as de investigação (PONTE, 2014; PONTE, *et al*, 2015).

Pesquisadores como Santos (2020), Cunha (2020) e Bonotto e Bisognin (2015) utilizaram os preceitos dos estudos de Ponte (2005) para propor intervenções e analisar livros didáticos de Matemática, se ancorando, principalmente, nas competências que uma tarefa se destina a desenvolver e nas capacidades individuais dos estudantes para tal.

Desta forma, uma tarefa é uma ferramenta de mediação no ensino e na aprendizagem de Matemática, que pode ser promissora para o desenvolvimento de certos conceitos e também pode gerar diversas atividades, levando em conta o planejamento, a proposta, o ambiente de aprendizagem e as experiências anteriores dos estudantes (PONTE, 2005, 2014).

Para classificar os tipos de tarefas, o pesquisador português utiliza, inicialmente, dois critérios: o grau de desafio e a estrutura da tarefa. Entende-se por grau de desafio o nível de dificuldade que uma determinada tarefa pode representar para um estudante, que pode ser reduzido ou elevado. Já a estrutura, remete à forma com a tarefa é apresentada. Se no enunciado são claras as informações e orientações do que o aluno deve fazer, estamos diante de uma tarefa de estrutura fechada. Caso contrário, se o aluno tiver que coletar informações, conjecturar soluções, fazer inferências e testes ou pensar em diferentes caminhos para solução que, por sua vez, pode não ser única (isto é, não há apenas uma resposta/solução possível para a tarefa), trata-se de uma tarefa de estrutura aberta.

Desta forma, temos quatro tipos de tarefas: os exercícios (estrutura fechada e desafio reduzido); os problemas (estrutura fechada e desafio elevado); as explorações (estrutura aberta e desafio reduzido) e as investigações (estrutura aberta e desafio elevado).

Mesmo com estas demarcações, quando se trata de intervenções didáticas em sala de aula na escola básica, a percepção dos estudantes deve ser levada em conta no momento de classificar uma tarefa. Suas experiências anteriores com certo assunto, por exemplo, colaboram diretamente para que uma tarefa seja para ele um problema (em vez de um exercício) ou uma investigação (em vez de uma exploração) (PONTE, 2005, 2014).

As tarefas de estrutura fechada são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, uma vez que este raciocínio se baseia numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados (PONTE, 2005). O professor deve ter sensibilidade didática e saber dosar o nível de dificuldade, para que não haja desestímulo dos estudantes pela impossibilidade de resolução (no excesso de problemas), mas também para que as tarefas não se resumam a exercícios simples ou mecânicos de forma acentuada ("encontre os gráficos das funções algébricas nas letras de a à h abaixo"), de modo que isto leve à estagnação, sem que seja desenvolvida nenhuma competência nova.

Já as tarefas de cunho aberto são importantes para o desenvolvimento de autonomia e independência. Atribuem à aula de Matemática um caráter experimental, permitindo que os estudantes, em vez de aplicarem direta e mecanicamente conceitos e propriedades prontas, descubram-nas e as validem em um processo no qual são ativos para tomar decisões e verificar suas repostas, tendo o professor como mediador (PONTE, 2014).

Tais investigações e explorações são como aquelas em que os alunos precisam fazer medições e anotações da temperatura de um corpo ponto tem temperatura ambiente e encontrar um modelo exponencial que melhor o descreva ou analisar regularidades (como encontrar as regras que condicionam os divisores de um número inteiro).

Outras duas dimensões secundarias que Ponte (2005) usa para demarcar as tarefas são sua duração e contexto. Uma tarefa pode ter duração curta (exercícios), média (problemas, explorações e investigações) e longa (projetos). Este último se caracteriza por permitir intervenções com diversos tipos de tarefas por um período maior, mas que é complexo de se aplicar (PONTE, 2005).

Quanto ao contexto de uma tarefa, ele pode ser puramente matemático (quando se trabalha com definições e propriedades estritamente algébricas, por exemplo), ou estar centrado na realidade (quando se discute as funções como modelos de fenômenos naturais). Há, ainda, um nível intermediário, o da semirrealidade, no qual se encontram aquelas tarefas que, apesar de se situarem em contexto de realidade, acabam se tornando muito idealizadas ("uma criança lança um dado 35 vezes …") (Skovsmose, 2000 *apud* PONTE, 2005).

3. REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

A Teoria Dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), idealizada e discutida por Duval (2018), parte da premissa de que a compreensão em Matemática está vinculada à dependência entre os objetos matemáticos (uma função, um quadrilátero, um logaritmo, etc.) e suas múltiplas representações semióticas (MORETTI, 2002).

Tal dependência distingue a Matemática de outras áreas do conhecimento, como a biologia, a qual possui sistemas não semióticos, instrumentos (como o microscópio) que permitem o estudo direto de seus objetos que, por sua vez, são independentes de tais sistemas. Os objetos matemáticos, por sua vez, são ideias, abstrações, acessíveis apenas por meio de suas representações semióticas, seus sistemas semióticos (DUVAL, 2018).

Duval (2012c, 2018) estabelece que um objeto matemático não deve ser confundido com suas representações semióticas. Desta forma, um aluno não deve restringir sua concepção de função exponencial apenas à lei algébrica $f(x) = a^x$, considerando que há seu gráfico, sua representação tabular e a representação em língua natural (na forma de enunciados em tarefas, por exemplo).

A dependência entre os objetos matemáticos e suas representações, aliada ao fato de os estudantes não poderem confundi-los, gera o que Duval (2018) chama de paradoxo cognitivo. Nessa direção, a solução para este fenômeno está na necessidade de coordenação de ao menos dois registros de representação de um mesmo objeto matemático, para que se garanta que os estudantes não associam um objeto a uma representação específica e que eles consigam entender a relação existente entre tais representações semióticas.

Duval (2012c) afirma que um sistema semiótico deve permitir três atividades cognitivas para ser considerado um registro: a formação de uma representação identificável; o tratamento e a conversão. A formação de uma representação identificável ocorre quando o sistema semiótico é dotado de regras que permitem tanto seu reconhecimento quanto sua manipulação. É o caso das propriedades de comutação, associação e transitividade para a representação algébrica.

O tratamento é a manipulação, uma transformação interna de um registro, como encontrar as assíntotas e raízes de uma função algébrica. Isso pode ser feito sem necessidade de transitar para outra representação, o que seria, por sua vez, uma conversão. Esta última remete à mudança entre registros de representação de um mesmo objeto mantendo, total ou parcialmente, o conteúdo da representação inicial (DUVAL, 2012c).

Esta atividade de conversão não deve ser confundida com uma simples codificação mecânica, na qual o aluno só é capaz, por exemplo, de construir o gráfico de uma função se esta estiver em sua forma geral, representação por $f(x)$ e com coeficientes inteiros. O objetivo é que consiga, não apenas reconhecer e saber converter esta lei algébrica em qualquer forma, em que se apresente neste registro, como também deve compreender a correlação existente entre as unidades significantes das representações de partida e chegada, respectivamente (ou vice-versa) (DUVAL, 2012c).

Tais unidades significantes são variáveis próprias de cada sistema semiótico, como os coeficientes da representação algébrica de uma função e as assíntotas de seu gráfico na representação gráfica. A relação entre estas variáveis em representações semióticas distintas evoca o que o pesquisador chama de fenômeno da congruência. Quando esta relação, a visualização e a transição entre as apresentações de partida e chegada em uma conversão acorre por meio de uma continuidade do pensamento natural, dizemos que houve congruência semântica (como na construção do gráfico da exponencial com base em seus pontos distribuídos em uma tabela), caso contrário, dizemos que não há congruência semântica. Duval (2012c) elenca três critérios para que se possa medir a congruência semântica entre dois registros em um processo de conversão, tal como no Quadro 2.

Quadro 8 - Critérios de congruênia entre dois registros

CRITÉRIOS	CARACTERÍSTICAS
A possibilidade de uma **correspondência "semântica"** de elementos significantes	A cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar
A **univocidade "semântica"** terminal	A cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada
A **organização das unidades significantes**	As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjamento das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão

Fonte: Duval (2012c, p. 283 – 284)

Neste sentido, há indícios de compreensão ao se coordenar ao menos dois registros de representação de um mesmo objeto matemático. Dessa maneira, quando conveniente, o estudante poderá escolher trabalhar com uma representação que lhe seja mais prática e econômica em uma dada situação (como operar somas e produtos com números decimais, em vez de sua forma fracionária), tendo em mente que, mesmo após a mudança de registro, permanece uma relação direta de implicação entre suas unidades significantes (MORETTI, 2002; DUVAL, 2012c).

Desta forma, do pondo de vista do professor, é possível ter evidências de compreensão ao constatar que o aluno é capaz de reconhecer e operar uma função exponencial em mais de um registro de representação, como o algébrico e o gráfico. Isso pode ser verificado observando sua capacidade de identificar a relação direta entre os coeficientes e as variáveis algébricas com o estado de monotonicidade, posição e inclinação do gráfico correspondente, sabendo quando é mais conveniente usar cada tipo de registro na situação didática vivenciada.

. As funções são fontes riquíssimas para exploração de transição entre registros, no entanto, mesmo quando há, outros aspectos devem ser levados em conta, principalmente quando se trata da relação entre as representações algébrica e gráfica para as quais Duval (2011) destaca, principalmente, duas abordagens possíveis. A abordagem ponto a ponto, caracteriza a técnica em que, geralmente, são introduzidas e definidas as representações gráficas em que a construção de gráficos está ancorada na inserção dos pontos cartesianos no plano e no, posterior, traçado da curva. Segundo o autor, este modo associativo limita-se a alguns valores específicos e aos pontos marcados no plano referencial.

A abordagem de interpretação global de propriedades figurais, por sua vez, caracteriza a técnica em que o conjunto traçado/eixos forma uma configuração visual que referencialmente equivalente ao mesmo objeto descrito em uma expressão algébrica (DUVAL, 2011). Toda modificação desta imagem modifica algo na expressão algébrica (e vice-versa) o que estabelece uma relação entre as unidades significantes de ambas as representações que não pode ser analisada pela abordagem ponto a ponto.

O autor pontua, ainda, ser importante, no trabalho com as funções, que seja cobrado do aluno não apenas a conversão de uma função de sua representação algébrica para a gráfica, mas, principalmente, no sentido inverso que, por sua vez, exigirá a dita abordagem de interpretação global, envolvendo a relação de congruência semântica entre as unidades significantes de ambas as representações semióticas, nas quais a abordagem ponto a ponto bem como a técnica de codificação (na qual o aluno aplica procedimentos mecânicos e preconcebidos) não serão mais suficientes.

4. METODOLOGIA

Esta é uma pesquisa exploratória quanto aos seus objetivos e documental quanto aos seus procedimentos técnicos, uma vez que é desenvolvida exclusivamente com base em materiais já elaborados (livros didáticos) dos quais os dados foram colhidos, criticados, confrontados e analisados (GIL, 2002).

Através do portal FNDE[9] acessamos o SIMAD[10], no qual é possível obter informações das coleções de livros didáticos adotadas por cada escola no Brasil de acordo com o PNLD[11]c (2016 – 2020) do Ensino Médio em vigor. Filtramos os livros de Matemática do 1º ano (nos quais é estudada a função exponencial de forma sistemática) selecionados pelas escolas públicas estaduais da cidade de Barreiras - Bahia. A cidade em questão foi escolhida por ser local de residência, trabalho e pesquisa destes que vos escrevem. Ao todo, são 14 instituições que adotaram quatro coleções distintas, tal como no Quadro 9.

Quadro 9 - Distribuição de frequência das coleções adotadas pelas escolas públicas estaduais da cidade de Barreiras – BA

Livros	**Autor**	**Código**	**Frequência**
MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES	IEZZI *et al* (2016)	LDCA	06
QUADRANTE MATEMÁTICA	CHAVANTE E PRESTES (2018)	LDQM	01
CONTATO MATEMÁTICA	SOUZA E GARCIA (2016)	LDCM	04
MATEMÁTICA - CONTEXTO & APLICAÇÕES	DANTE (2016)	LDXA	03
			14

Fonte: Autor, 2020

Desta forma, escolhemos analisar as coleções “Matemática, ciências e aplicações”, “Contato Matemática” e “Matemática, contexto e aplicações” por, conforme o Quadro 9, serem as mais empregadas pelas escolas da cidade de Barreiras - BA no atual PNLD. Além disso, a partir de agora, tais livros serão referenciados neste trabalho por meio dos códigos estipulados também no quadro anterior, por uma questão de praticidade e objetividade.

Foram analisadas as tarefas dos livros didáticos presentes nos capítulos sobre função exponencial. Ratificamos que nos concentramos na análise das tarefas referentes, essencialmente, a este conteúdo, propostas para que os estudantes resolvessem. Descartamos, assim, questões resolvidas passo a passo no corpo do capítulo, bem como aquelas sobre conceitos que os livros trouxeram como revisão (propriedades de potenciação, radiciação e notação científica, por exemplo) antes de adentrar no assunto principal. Consideramos, dos tópicos de equações e inequações exponenciais, apenas as questões que envolviam funções.

[9] Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - https://www.fnde.gov.br/
[10] Sistema do Material Didático - https://www.fnde.gov.br/distribuicaosimadnet/filtroDistribuicao
[11] Programa Nacional do Livro e do Material Didático – http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld

Dito isto, tais tarefas foram classificadas em Exercícios, Problemas, Explorações, Investigações ou Projetos de acordo com as definições de Ponte (2005, 2010, 2014). Além disso, nos baseamos na TRRS de Duval (2012c, 2018) para fazer o levantamento dos tipos de operações (Tratamentos ou Conversões), das representações semióticas e sentidos de conversão (quando há) envolvidos em cada tarefa.

Importante ressaltar que o próprio Ponte (2005, 2010, 2014) reforça que um dos principais critérios de classificação das tarefas é capacidade e bagagem de conhecimentos do aluno, fator que influencia no grau de desafio que um dado item terá para ele. Como se trata de uma análise imparcial de livros didáticos, levamos em conta (além das tarefas propriamente ditas) a estrutura, a ordem e a forma como os livros apresentavam cada tarefa dado que, por exemplo, uma questão que exige a aplicação de uma determinada propriedade e que aparece logo após o livro exemplificar como usá-la, em uma situação muito parecida (como com apenas a mudança de alguns coeficientes, por exemplo), certamente terá seu grau de desafio reduzido.

Outra questão importante é que uma conversão pode envolver múltiplos tratamentos, portanto, consideraremos tratamentos apenas as tarefas que envolveram unicamente este tipo de transformação, pontuando a natureza desta (tratamento algébrico, tabular, gráfico, etc.).

Quanto às representações semióticas das funções exponencias envolvidas, os tipos foram: algébrica, gráfica, tabular, simbólica (representação de intervalos contendo imagem e domínio da função, por exemplo), fracionária, decimal e língua natural. Os dados serão analisados a seguir de forma conjunta, porém ocorrerão comentários específicos de cada coleção.

5. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Como dito à priori, achamos importante ressaltar algumas características sobre como o conceito de função exponencial é apresentado e discutido em cada livro, pois isso, definitivamente, influencia na forma como são apresentas as tarefas.

O LDCM apresenta a definição algébrica de função exponencial por meio da expressão$f(x) = a^x, com\ a > 0\ e\ a \neq 1$ e também define as funções do tipo exponencial como$f(x) = ba^x + c$ com $a > 0, a \neq 1$ e $b \neq 0$. O livro LDCA opta uma definição próxima da apresentada pelo livro LDCM.

O livro LDXA, além de apresentar a mesma definição algébrica do LDCM para a função exponencial, indica e orienta o estudo da função do tipo exponencial a partir do GeoGebra no próprio tópico sobre o assunto. É dada uma sequência que guia o estudante no processo de estudar os coeficientes deste tipo de função por meio de controles deslizantes do *software*. Já o LDCA menciona o uso deste mesmo programa para o estudo de funções, porém apenas nas orientações didáticas no fim do manual do professor, acompanhado de propostas de intervenção e indicação de literatura (que auxilia no trabalho com esta e outras ferramentas em sala de aula). O livro LDCM também indica o GeoGebra em uma guia no final do livro chamada "Acessando Tecnologias" na qual também instrui sobre como estudar os coeficientes de uma função por meio da variação de seus coeficientes, além de também evidenciar outros recursos.

Destacamos a importância de estes livros didáticos citarem e trabalharem com estas funções do tipo exponencial, visto que estas, apesar de não manterem as mesmas propriedades da função exponencial (como a relação entre as progressões aritmética e geométrica associadas, respectivamente, ao domínio e imagem desta função), mantêm forte relação com seu comportamento. Estas funções são modelos de diversos fenômenos naturais (juros compostos e decaimento de temperatura, por exemplo) e a variação de seus coeficientes (responsável por translações, reflexões, expansões e compressões no plano cartesiano) favorecem a compreensão do assunto (FARIA; SOUZA JUNIOR; CARDOSO, 2016).

Neste sentido, outro fator interessante é o ponto em comum entre os livros ao indicarem e empregarem o GeoGebra como uma ferramenta que permite o estudo destas variações, evidenciando a relação intrínseca, principalmente, entre as representações algébrica e gráfica desta função.

5.1. A NATUREZA DAS TAREFAS E AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS ENVOLVIDAS

Partindo, enfim, para o estudo das tarefas, começamos por apresentar os resultados da distribuição e classificação com base em sua estrutura (aberta ou fechada) e grau de desafio (reduzido ou elevado) nos baseando nos trabalhos de Ponte (2005, 2010, 2014) para, em seguida, analisar os resultados sob o norte da TRRS. No total, foram analisados 73 itens, sendo 29 do LDCM, 27 do LDXA e 17 do LDCA. Assim, obtemos os seguintes resultados apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 - Classificação percentual das tarefas por livros.

Tipos de tarefas	**LDCM (%)**	**LDXA (%)**	**LDCA (%)**	**Os três livros juntos (%)**
Exercício	48	52	41	48
Problema	52	48	59	52
Exploração	0	0	0	0
Investigação	0	0	0	0
Projeto	0	0	0	0

Fonte: Autor, 2020

Com base na Tabela 3, observamos que só foram detectadas tarefas de estrutura fechada, com a maioria das questões sendo do tipo problemas. Apenas o livro LDXA obteve uma maioria de exercícios, com uma frequência de 52%. Nestes dois tipos de tarefas é claramente dito o que é dado e o que é pedido. São questões que, independentemente de estarem em um contexto de realidade, não instigam muitas conjecturas e inferências nos alunos (PONTE, 2003).

Os exercícios são tarefas que servem para praticar e “fixar” alguns conceitos (como a identificação e operação com as funções) e técnicas (como a construção dos gráficos) estudados logo antes de sua resolução (seguindo a ordem em que os livros didáticos apresentam seus conceitos e questões). Nos três livros, encontramos um grande número de tarefas com este caráter. Sabemos que é comum, por uma série de circunstâncias, não ser possível explorar e aplicar todas as tarefas propostas no material do aluno e, mesmo quando há a possibilidade de exploração total do livro, é sugerido que os professores selecionem cautelosamente os exercícios a serem aplicados. O objetivo é exercitar um dado conceito, sem que isto se torne uma atividade cansativa, repetitiva e desmotivadora.

Com relação aos problemas (52% das questões), este tipo de tarefa comporta um grau de desafio mais elevado, quando comparado aos exercícios, e também podem, ao contrário do que muitos pensam, ser apresentados em contexto de realidade ou puramente matemático. Um fator interessante é que, no livro LDXA, as tarefas em contexto puramente matemático e as em contexto da realidade (e semirrealidade) foram separadas, de modo que as últimas foram apresentadas em um tópico único, no final da seção, catalogadas por áreas de aplicação (química, biologia, etc.). É necessária atenção na hora de recomendar determinados problemas aos alunos, dado que se forem demasiadamente difíceis também podem despertar frustração e desinteresse repentinos (PONTE, 2005). Em nossa análise dos deparamos com diferentes níveis de dificuldades que serão exemplificados em seções posteriores.

A concentração massiva de tarefas na forma de exercícios e problemas revela e reforça a linha tênue existente entre os dois, além de levantar questionamentos interessantes acerca do nível de complexidade que deve ser exigido do estudante na resolução de uma questão e do momento certo para tal. Desta forma, o planejamento do professor deve também contemplar uma diversificação dos tipos de tarefas, necessária para atender a objetivos específicos de forma linear e coerente (PONTE, 2005, 2014).

Falando em diversificação dos tipos de tarefas, chegamos àquelas com estrutura aberta, divididas entre as de exploração e investigação. Assim como Junkerfeurbom e Klüber (2017), ao analisar as tarefas de 10 livros de 8º ano aprovados na PNLD de 2014 e Cunha (2020), ao avaliar quatro livros de uma mesma coleção (6º, 7º, 8º e 9º anos) aprovados no PNLD de 2017 (com foco nas questões sobre grandezas e medidas), também verificamos uma carência grande de explorações e investigações dado que não identificamos nenhuma tarefa desses dois tipos.

A ausência de tarefas desta natureza representa uma situação de alerta do pondo de vista epistemológico dado que, diferente dos exercícios e problemas, a resolução de uma tarefa investigativa envolve uma situação aberta que delega ao aluno o desafio de concretizar os vários modos de partida (interpretação, conjecturarão, resolução, etc.) trazendo como benefício o desenvolvimento de sua autonomia em termos de aprendizagem (PONTE, 2003).

Ratificamos que, tal como Junkerfeurbom e Klüber (2017), também nos deparamos com questões que não possuíam estrutura aberta, mas que tinham potencial para tal, com algumas modificações. Em muitos problemas é possível inserir hipóteses, deixar aberta a estrutura do enunciado, induzir que o estudante relacione possíveis respostas e verifique a que melhor satisfaz o que se pede, bem como analise certas regularidades (PONTE, BRANCO, QUARESMA, 2011).

Com relação à TRRS de Duval (2011, 2012c, 2018), analisamos cada tarefa e identificamos as representações semióticas das funções exponenciais, os tipos de operações (tratamento ou conversão) e, em caso de conversão, os sentidos de transição. A

Tabela 4 apresenta o resultado destas representações semióticas registradas nos três livros didáticos.

Tabela 4 - Registro das representações por frequência (%) de uso nos três livros didáticos

	Algébrica	Língua Natural	Gráfica	Tabular	Simbólica	Decimal	Fracionária
LDCM	47	24	11	6	7	5	0
LDXA	52	11	11	11	6	7	2
LDCA	46	14	19	13	8	0	0
Todos	49	17	13	9	7	4	1

Fonte: Autor, 2020

Percebemos, então, uma prevalência massiva da representação algébrica que também foi, em escalas parecidas, identificada na análise individual dos livros. Uma primeira e imediata justificativa é atribuída ao conteúdo abordado ser o de funções, histórica e habitualmente muito associado a este tipo de representação. Porém, retomamos o conceito de "paradoxo cognitivo" enunciado por Duval (2018) para relembrar os perigos vinculados a uma associação muito estreita entre um objeto matemático e uma representação específica, com foco ao risco de o estudante confundi-los e não reconhecer ou saber lidar com o mesmo conteúdo apresentado em outros registros.

O segundo lugar atribuído à representação em língua natural se justifica pelo grande número de questões dadas em contexto de realidade e semirrealidade. A representação gráfica também é muito associada ao estudo de funções. Contudo, diferente do que se costuma observar no tratamento com as funções afim e quadrática, aqui esta representação não foi tão requisitada quanto as anteriores, dada a menor frequência.

Notamos que, nos livros, a função exponencial é fortemente vinculada às suas aplicações, possuindo seções, tarefas e/ou momentos específicos para sua discussão ao longo dos capítulos. Percebemos, também, que a representação gráfica é anexa às tarefas de fixação (exercícios) e à sub-perguntas de outras tarefas em contexto de realidade e semirrealidade, em que solicitava-se, ao final em alguns casos, o esboço do gráfico do fenômeno em questão. A Tabela 5 nos permitirá interpretações mais aprofundadas.

Tabela 5 - Dsitribuiçao percentual dos tipos de operações entre representações empregados nos três livros didáticos.

	Tratamento	Conversão
LDCM	31%	69%
LDXM	44%	56%
LDCA	41%	59%
Todos	38%	62%

Fonte: Autor, 2020

A partir destes últimos dados, observamos um resultado interessante, do ponto de vista da compreensão, dado que a conversão é uma transformação essencial no processo de análise e avaliação de desempenho (na perspectiva do professor) e na própria internalização e conceitualização de um dado assunto (na perspectiva do aluno), por conta da diversidade dos registros de representação que engloba (DUVAL, 2012c).

Os tratamentos, evidentemente, também possuem sua relevância considerando que todo processo de conversão pode exigir múltiplos tratamentos. Falando especificamente das tarefas que envolveram apenas transformações internas, destacamos os tratamentos algébricos que aqui foram recorrentes (26 questões) principalmente em exercícios que solicitavam, por exemplo, o encontro da imagem de um valor real do domínio dada à forma algébrica da exponencial, conforme podemos apurar na Tabela 6.

Tabela 6 - Distribuição das tarefas na forma de tratamentos dos três livros.

Tratamento Tabular	Tratamento fracionário	Tratamento Decimal	Tratamento algébrico
1	1	2	26

Fonte: Autor, 2020

A maioria de tarefas com conversões também foi registrada na análise individual dos três manuais e uma das justificativas mais fortes para tal também é o objeto em questão

No que diz respeito aos sentidos das conversões, apresentamos a Tabela 7.

Tabela 7 - Distribuição dos sentidos de conversão registrados nas tarefas

	LDCM	**LDXA**	**LDCA**
Algébrico → Gráfico	**4**	**2**	**4**
Algébrico → Simbólico	**2**	**2**	**0**
Algébrico → Lín. Natural	**3**	**2**	**0**
Algébrico → Decimal	**1**	**1**	**0**
Gráfico → Algébrico	**1**	**2**	**2**
Gráfico → Simbólico	**1**	**1**	**3**
Tabular → Algébrico	**1**	**2**	**0**
Tabular → Gráfico	**0**	**1**	**0**
Lín. Natural → Algébrico	**8**	**3**	**5**
Lín. Natural → Gráfico	**0**	**0**	**1**
Lín. Natural → Tabular	**2**	**1**	**5**
Lín. Natural → Simbólico	**1**	**0**	**0**
Lín. Natural → Decimal	**2**	**0**	**0**

Fonte: Autor, 2020

Importante ressaltar que o número de tratamentos e conversões não são complementares com relação ao número de questões, dado que foram verificadas tarefas que envolviam mais de um tipo de conversão. Omitimos as conversões que não foram identificadas em nenhum dos três livros (Gráfico → Tabular, por exemplo), destacamos com a mesma cor os sentidos inversos de uma mesma conversão e mantivemos em branco aquelas que só foram identificadas em um único sentido em ao menos um dos três manuais.

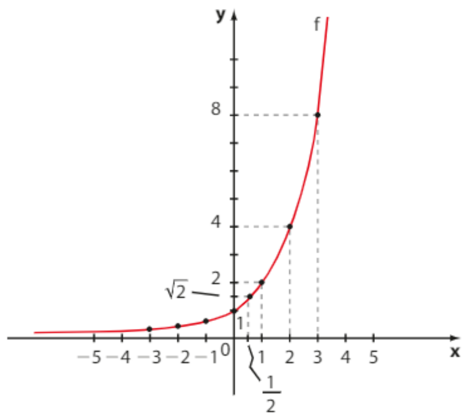
Ginez (2020), ao analisar como são propostas a mobilização e a coordenação de diferentes Registros de Representação Semiótica da função exponencial nos Caderno do Professor e no livro didático Matemática- Ciências e Aplicação- de Iezzi et al. (2016) do 1º ano, reforça que tarefas que envolvem conversões não congruentes (em ambos os sentidos) precisam ser aplicadas com mais frequência, dado que são essenciais para o desenvolvimento de habilidades e competências que são adquiridas com atividades mais complexas.

No que diz respeito à relação entre as representações algébrica e gráfica mencionada por Duval (2011), percebemos que ambos os sentidos de conversão foram contemplados em todos os livros. No entanto, fato é que a orientação Gráfica → Algébrica foi menos recorrente, sendo ela justamente a que faz surgir os problemas relacionados à compreensão e que permite ao professor identificar/solucionar o paradoxo cognitivo. Observamos uma prevalência da sugestão da abordagem ponto a ponto, como na Figura 7.

Figura 7 - Abordagem Ponto a Ponto para contrusção de gráficos no livro LDCM

Vejamos como construir o gráfico da função **f**, cuja lei é $y = 2^x$.
Vamos usar o método de localizar alguns pontos do gráfico e ligá-los por meio de uma curva.

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$
1	2
2	4
3	8



Fonte: LDCM, 2016, p. 146

Observamos também muitas conversões no sentido Língua Natural → Algébrica. Isso ocorre, basicamente, em decorrência do grande número de tarefas em contexto de realidade e semirrealidade que, ao apresentar as informações de um determinado fenômeno com comportamento exponencial (estado inicial, condição de crescimento/decrescimento, etc.), exigiam do estudante a obtenção de uma lei algébrica que melhor o descrevesse. Percebemos, também, uma incidência bem inferior da orientação Algébrica →Língua Natural requisitada, principalmente, em exercícios que ao apresentar a forma algébrica da exponencial solicitavam sua classificação em "crescente" ou "decrescente".

Finalizamos esta seção comentado sobre as orientações Tabular → Gráfica e Tabular → Algébrica que foram identificadas com pouca frequência. Na perspectiva da TRRS, dos tipos de tarefas com base em Ponte (2005) e com auxílio de *softwares*, como o GeoGebra, são sentidos de conversão importantes que podem ser empregados por intermédio de atividades que envolvam tarefas exploratórias/investigativas. Um objetivo poderia ser exigir dos estudantes a modelação do comportamento de um determinado fenômeno natural por meio da coleta de dados reais (como a temperatura de um dado líquido inicialmente quente em função do tempo) organizados por pares reais tabulados. O *software* possui recursos interessantes, como a análise bivariada e controles deslizantes, que permitem aos estudantes encontrarem tanto o gráfico quanto a lei algébrica que melhor descreva este comportamento, a partir de uma sequência didática que, se bem mediada pelo professor, pode ser epistemologicamente relevante e produtiva.

5.2. DISCUTINDO ALGUMAS TAREFAS

Nesta seção, discutiremos algumas tarefas com base em sua natureza e nas representações semióticas envolvidas. Como só identificamos dois tipos de tarefas (problemas e exercícios), apresentaremos três exemplos de tarefas para cada tipo identificado, sendo uma questão de cada livro em ambos os casos. Começando pelos exercícios, vamos analisar o Quadro 10.

Quadro 10 - Alguns exercícios dos três livros didáticos

17 Construa os gráficos das funções exponenciais definidas pelas leis seguintes, destacando seu conjunto imagem: **a)** $f(x) = 4^x$ **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$ **d)** $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$	LDCA

28. Identifique as funções exponenciais. a; d; f a) $f(x)=(0{,}3)^{2x}$ c) $f(x)=1^{6x}$ e) $f(x)=(-4)^{x}$ b) $f(x)=2x^{8}$ d) $f(x)=\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{x}{7}}$ f) $f(x)=12^{\frac{2}{3}x}$	LDCM
35. f, g e h são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2 \cdot 3^{x}$, $g(x) = 5^{x} - 2$ e $h(x) = 5^{x-2}$. Determine: a) $f(2)$; $f(2) = 18$ e) $g(0)$; $g(0) = -1$ b) $g(2)$; $g(2) = 23$ f) $h(0)$; $h(0) = \frac{1}{25}$ c) $h(2)$; $h(2) = 1$ g) x tal que $h(x) = 125$; $x = 5$ d) $f(-1)$; $f(-1) = \frac{2}{3}$ h) x tal que $g(x) = 3$. $x = 1$	LDXA

Fonte: Autor, 2020

Um fator em comum nestas três tarefas é o seu caráter de fixação e prática pela repetição. São aplicadas imediatamente após os três livros discorrerem sobre as propriedades e técnicas cobradas.

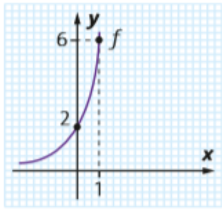
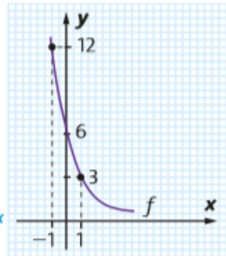
A tarefa do livro LDCA envolve uma conversão no sentido Algébrico → Gráfico. Apesar de, teoricamente, exigir um custo cognitivo maior, com relação aos tratamentos, tal transição é orientada pela abordagem ponto a ponto que não favorece uma coordenação entre os dois registros, apesar de essa tarefa ser de conversão.

Essa questão é a primeira após o livro exemplificar como se constrói um gráfico (abordagem ponto a ponto) e este é um assunto que sucede os de função afim e quadrática, nos quais os estudantes, provavelmente, também já aplicaram este procedimento. Daí a importância do bom senso e planejamento do professor na hora de escolher as tarefas, uma vez que há outras que cobram a construção dos gráficos, mas que também exigem outras conversões e tratamentos.

As tarefas dos livros LDXA e LDCM exploram tratamentos algébricos que incitam o reconhecimento e capacidade de operação com este tipo de função. Observamos que 64% dos tratamentos ocorreram na forma de exercícios, reforçando uma relação estreita entre este tipo de tarefa e esta transformação interna associada a objetivos didáticos de fixação e consolidação do conteúdo.

Apresentamos, no Quadro 11 a seguir, três problemas para análise.

Quadro 11 - Alguns problemas dos três livros didáticos.

31. Cada gráfico abaixo representa uma função exponencial do tipo $f(x) = b \cdot a^x$. Escreva no caderno a lei de formação de cada uma delas. a)  $f(x) = 2 \cdot 3^x$ b)  $f(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	LDXA
35. Há uma lenda que credita a invenção do xadrez a um brâmane de uma corte indiana, que, atendendo a um pedido do rei, inventou o jogo para demonstrar o valor da inteligência. O rei, encantado com o invento, ofereceu ao brâmane a escolha de uma recompensa. De acordo com essa lenda, o inventor do jogo de xadrez pediu ao rei que a recompensa fosse paga em grãos de trigo da seguinte maneira: 1 grão para a casa 1 do tabuleiro, 2 grãos para a casa 2, 4 para a casa 3, 8 para a casa 4 e assim sucessivamente. Ou seja, a quantidade de grãos para cada casa do tabuleiro correspondia ao dobro da quantidade da casa imediatamente anterior.  artemisphoto/ Shutterstock.com O tabuleiro de xadrez possui casas alternadamente claras e escuras, sendo 32 de cada. As peças utilizadas para jogar também são claras e escuras, sendo 16 peças para cada jogador. O jogo de xadrez estimula o raciocínio lógico, entre outros benefícios. a) De acordo com a lenda, qual é a quantidade de grãos de trigo correspondente à casa 6 do tabuleiro? E à casa 10? 32 grãos de trigo; 512 grãos de trigo b) Escreva uma função *f* que expresse a quantidade de grãos de trigo em função do número *x* da casa do tabuleiro. $f(x) = 2^{x-1}$ c) Sabendo que o tabuleiro de xadrez possui 64 casas, qual o conjunto domínio da função *f*? $D(f) = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq x \leq 64\}$ d) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de trigo devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez. 2^{63}	LDCM
22 Grande parte dos brasileiros guarda suas reservas financeiras na caderneta de poupança. O rendimento líquido anual da caderneta de poupança gira em torno de 6%. Isso significa que, a cada ano, o saldo dessa poupança cresce 6% em relação ao saldo do ano anterior. **a)** Álvaro aplicou hoje R$ 2 000,00 na poupança. Faça uma tabela para representar, ano a ano, o saldo dessa poupança nos próximos cinco anos. **b)** Qual é a lei da função que relaciona o saldo (**s**), em reais, da poupança de Álvaro e o número de anos (**x**) transcorridos a partir de hoje (x = 0)? **c)** É possível que em 10 anos o saldo dessa poupança dobre? Use $1{,}06^{10} \simeq 1{,}8$.	LDCA

Fonte: Autor, 2020

O problema do livro LDXA exige uma mudança de registro da representação gráfica para a algébrica. É uma conversão não congruente dado que o critério da correspondência semântica não é satisfeito, tendo em vista que as unidades significantes “6” e “12” dos gráficos dos itens *a* e *b*, respectivamente, não são transparecidas na representação algébrica final. Aqui, o aluno, por meio de uma interpretação global (DUVAL, 2011), deverá relacionar as informações do gráfico (curvatura, monotonocidade, pontos cartesianos, …) no enunciado da questão para ter sucesso, podendo fazer uso de um sistema de equações (tratamento no registro algébrico), por exemplo.

A tarefa do livro LDCM é apresentada em língua natural a partir da qual o aluno deverá fazer múltiplas transformações internas e externas. No item *a* é exigido um tratamento com base nas informações do enunciado. O item b exige uma transformação no sentido Língua Natural → Algébrico que se apresenta como uma conversão não congruente por esta transição exigir certas interpretações e manipulações para que, por meio de uma recorrência, o aluno chegue na expressão correta.

Para chegar ao $x-1$ do expoente da função é necessário interpretar $1 = 2^0$ como a primeira recompensa, para ficar claro que na sequência (r_x): $r_1 = 2^0$;$r_2 = 2^1$;$r_3 = 2^2$;…;$r_x = 2^{x-1}$ existe essa relação entre imagem e domínio. O item *c* solicita uma conversão não congruente no sentido Algébrico → Simbólico, pois não existe correspondência semântica entre as unidades significantes da expressão algébrica com os símbolos $\in, \mathbb{N}^*, |, \leq$ e $\geq$, o que requer muito da interpretação e conceitualização do aluno sobre o assunto. O item *d* recai sobre um tratamento algébrico com base nos resultados anteriores.

Uma última reflexão cabe a esta questão. O problema é apresentado de modo que tanto a imagem quanto o domínio da função devem ser inteiros positivos. O conceito de função perpassa por suas múltiplas representações semióticas, dentre elas a gráfica. Uma vez dada a expressão algébrica que descreve este fenômeno (as recompensas em função das casas do xadrez), somos levados a pensar no gráfico desta função dado por uma curva contínua que possui intervalos reais, como $(1,2)$, em sua imagem que não se relacionam (levando em conta a situação real dada) com nenhum elemento do domínio. Reforçamos, então, a importância do olhar crítico do professor sobre o livro didático na perspectiva de sempre resolver previamente todas as tarefas atribuídas aos estudantes como forma prever possíveis dúvidas e questionamentos dos mesmos.

A tarefa do livro LDCA exige duas conversões. A primeira é no sentido Língua natural → Tabular. Uma das formas, inclusive recomendada pelo manual do professor, para construção da tabela na letra a é fazer: $1^{\underline{o}}\ ano: 2000 + 0{,}06 \times 2000 = 2120$; $2^{\underline{o}}\ ano: 2120 + 0{,}06 \times 2120 = 2247{,}20\ldots$ Buscando estabelecer uma correspondência ($\sim$) entre as unidades significantes de ambas as representações semióticas, temos:"$a\ cada\ ano$"$\sim$"$x^{\underline{o}}\ ano$"; "$o\ saldo\ dessa\ poupança$"$\sim$"$2000{,}2120, \ldots$"; "$cresce$"$\sim$"$+$"; "$6\%$"$\sim$"$0{,}06$"; "$em\ relação$"$\sim$"$\times$"; "$ao\ saldo\ do\ ano\ anterior$"$\sim$"$2000{,}2120, \ldots$".

Percebemos que houve a necessidade de algumas modificações, uniões e interpretações de signos para fazer acontecer a correspondência, como $\mathbf{6}$ e % se tornarem $\mathbf{0,06}$ e $\boldsymbol{em}$ e $\boldsymbol{rela}$ção se tornarem $\times$. Essas transformações necessárias para tornar as duas sequências comparáveis justificam a não congruência semântica desta conversão dado que não temos uma univocidade semântica (DUVAL, 2012b, 2012c).

O item b também exige uma transformação no sentido Língua natural → Algébrico cujo resultado final é $s(x) = 2000 \times 1{,}06^x$ sendo $s(x)$ o saldo no ano x. Tal expressão pode ser encontrada por meio de um processo de fatoração e análise por recorrência do processo anterior, empregado para construir os termos da tabela: $1º\ ano: 2000 \times 1{,}06$; $2º\ ano: 2000 \times 1{,}06 + 2000 \times 1{,}06 \times 0{,}06 = 2000 \times 1{,}06^2$; $\ldots$; $xº\ ano: 2000 \times 1{,}06^x$. Tal como no caso anterior, aqui também foi necessária uma série de transformações pra se chegar ao registro final, dentre elas a interpretação e mudança de $0{,}06$ para $1{,}06$ e isso justifica a não congruência semântica desta conversão.

O último item exige apenas um tratamento algébrico sobre a expressão encontrada no item anterior.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa surgiu com o objetivo investigar as tarefas matemáticas dos capítulos sobre função exponencial de três livros didáticos do 1º ano do ensino médio de coleções distintas selecionados no atual PNLD (2016 – 2020) por escolas públicas da cidade de Barreiras – BA. Para realizar tal análise nos baseamos na classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017).

Constatamos uma unanimidade de tarefas com estrutura fechada sendo a maioria de problemas. As três coleções, em especial a LDXA, dão muita ênfase aos exercícios de fixação e repetição ao mesmo tempo em que apostam, em especial LDCA e LDCM, em problemas que exigem certo grau de abstração e interpretação. Ambos os casos são importantes e válidos dentro de sala de aula, mas o professor deve estar atento ao tipo de questão adequada a objetivos específicos que levem em conta as capacidades e limitações de seus alunos, de modo a não tornar a aula e as atividades gerais (sejam elas presenciais ou não) pouco desafiadoras (no excesso de exercícios) e/ou muito difíceis e desestimulantes (na proposição de problemas para os quais os estudantes não tenham ferramentas mínimas suficientes para resolução).

A ausência de tarefas de estrutura aberta é certamente uma das constatações mais importantes desta pesquisa e traz como reflexão imediata a necessidade de o professor não restringir seu trabalho ao livro didático, fazendo deste um importante, mas não único, aporte. Investigações e explorações são importantes e válidas, por exemplo, para a iniciação do conteúdo. Por mais que os livros tenham trazido nas introduções dos capítulos referentes à função exponencial algumas situações que visavam ter este caráter especulativo e exploratório, ou são muito breves ou possuem estruturas fechadas. Surgem, por exemplo, com a premissa instigara generalização do modelo algébrico de uma função exponencial por meio da exploração do crescimento de uma planta, porém não concede espaço para reflexões por parte do aluno quando faz uso de perguntas muito objetivas e fechadas.

O professor pode, neste caso, elaborar tarefas com vistas de fato a evocar experiências investigativas que instiguem inferências, comparações e conjecturas. Como a função exponencial é um assunto posterior às funções afim e quadrática, seria interessante, previamente, propor que os alunos encontrem um modelo para um fenômeno com comportamento exponencial que os faria descobrir a impossibilidade de fazer isso com as expressões do 1º e 2º grau. Esta análise de regressão poderia ser feita com auxílio de *softwares* como o GeoGebra, uma forma de dinamizar a aula e dar à classe a oportunidade de ter uma experiência similar à que tiveram aqueles que de fato fizeram estas descobertas.

Observamos uma distribuição desproporcional entre as representações semióticas envolvidas nas tarefas, com a grande maioria privilegiando a algébrica, seguida das em língua natural e gráfica (em menor escala). Apesar da maior parte das transformações serem conversões, recomendamos, assim como Ginez (2020), que o professor, mesmo que o livro didático não o faça, opte por propor as tarefas, no que concerne aos registros envolvidos, de forma gradativa, seguindo o princípio de abordagem que comece por tratamentos simples (o que equivale à exercícios de fixação), passe à conversões com congruência semântica (que podem ser problemas mais elaborados) e vá até às não congruentes (tarefas de estruturas aberta ou fechada com maior grau de desafio).

De uma forma geral, observamos virtudes na análise das tarefas por meio da conjunção de sua natureza (PONTE, 2005) e de suas representações semióticas (DUVAL, 2012c). Didaticamente falando, a classificação das tarefas, com base em sua estrutura e grau de desafio, é parcial aos alunos com os quais se trabalha de modo que, além de todos os argumentos postos aqui, um dos principais fatores que distinguem um problema de um exercício ou uma investigação de uma exploração é a capacidade e a bagagem epistemológica de cada estudante frente a esta tarefa.

Como explicado na metodologia, nos propomos a fazer este levantamento de forma imparcial, mas levamos em conta a estrutura e a forma com os livros apresentavam o conteúdo, bem como as representações semióticas envolvidas para embasar a classificação. De forma geral, o professor não pode ficar alheio às necessidades e capacidades individuais de sua classe e, por mais que o sistema o obrigue a padronizar seu trabalho para o atendimento de uma grande demanda, é importante uma sondagem e análise da turma para que, mesmo coletivamente, suas tarefas sejam adequadas.

Já a análise dos registros de representação, apesar de também levarem em conta as capacidades e limitações dos estudantes, são mais imparciais a eles (no sentido de não levarem em conta estas características) de modo que uma conversão que for incongruente para um aluno com dificuldades continuará incongruente para um que consiga a realizar com facilidade. O que se distingue aqui é a análise que o professor fará sobre as duas produções. Certamente o aluno que teve sucesso nesta tarefa chegou a níveis de abstração e conceitualização constatados com um grau de certeza maior do que se poderia ter em caso de êxito apenas em tratamentos simples ou conversões congruentes.

Nessa direção, recomendados os fundamentos da TRRS como uma excelente ferramenta para seleção de tarefas destinadas à avaliações e demais tipos de atividades, de modo que o processo avaliativo realizado pelo professor leve em conta o fenômeno da congruência semântica. É uma forma fazer caminhar juntos os aspectos qualitativos e quantitativos inerentes e necessários em nosso sistema de ensino.

Indicamos como forma de extensão e continuidade do que foi discutido nesta pesquisa trabalhos que se proponham a analisar as tarefas de outras coleções tanto sobre os capítulos de função exponencial como também sobre outros objetos matemáticos (como os demais tipos de funções). Tais pesquisas são relevantes pela natureza hierárquica da Matemática, em que um trabalho bem desenvolvido (aqui em termos da natureza e das representações envolvidas nas tarefas sobre função exponencial dos livros didáticos) com um determinado conteúdo base (como as propriedades de potências e radiciações), acarreta em um bom aproveitamento em estudos subsequentes.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, MEC / CONSED / UNDIME, 2018.

BRASIL. Constituição (1968). Autarquia nº 872, de 1968. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. DF, 1969.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. SAEB [recurso eletrônico]. Brasília: INEP, 2019. Disponível em: https://bit.ly/2U6cxoB. Acesso em: 15 de out. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Guia de livros didáticos: PNLD 2016: Matemática: Ensino Médio. Brasília. In: FNDE, 2013.

BRASIL. Sistema nº ., de fevereiro de 2020. Sistema do Material Didático. DF, 1969. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/distribuicaosimadnet/filtroDistribuicao. Acesso em: 02 out. 2020.

CARDOZO, D.; POSSAMAI, J. P. The Dimensions of Making Sense: the understanding of exponential functions from an investigative activity. **Acta Scientiae**, [S.L.], v. 21, n. 4, p. 2-19, 4 set. 2019. Galoa Events Proceedings. http://dx.doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss4id4565. Disponível em: 10.17648/acta.scientiae.v21iss4id4565. Acesso em: 02 out. 2020.

CUNHA, D. M. da. **Grandezas e medidas no ensino fundamental**: uma análise da literatura e de livros didáticos. 2020. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Universidade Federal do Oeste da Bahia, Barreiras, 2020. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171052212. Acesso em: 01 dez. 2020.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Ancântara. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2017. p. 11-34.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. **Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência**. Revemat: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 1, p. 97-117, 16 jul. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 6, n. 2, p. 96-112, 10 maio 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamentoRegistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 2, p. 266-297, 13 dez. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

DUVAL, R.; MORETTTI, Méricles Thadeu. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, [S.L.], v. 13, n. 2, p. 1-27, 12 dez. 2018. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2018v13n2p1.

FARIA, T. A.; SOUZA JÚNIOR, J. C. de; CARDOSO, A. Matemática Dinâmica para compreender a função exponencial. **Sigmae**, Alfenas, v. 5, n. 1, p. 1-11, dez. 2016. Disponível em: https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/view/509. Acesso em: 02 out. 2020.

GIL, A.C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GINEZ, P. C. **Fenômeno de congruência e não congruência sobre a função exponencial em materiais didáticos**. 2020. 107 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/12645/Ginez%2C%20Patricia%20Costa.pdf?sequence=2&isAllowed=y. Acesso em: 01 dez. 2020.

GOLDONI, E. K. S. Matemática aplicada ao estudo da área ocupada pelo crescimento de micro-organismos como ferramenta para o ensino da função exponencial. **Revista Professor de Matemática On Line**, [S.L.], v. 7, n. 02, p. 166-174, nov. 2019. Sociedade Brasileira de Matematica. http://dx.doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo712.Acesso em: 02 nov. 2020.

JUNKERFEURBOM, M. A.; KLÜBER, T. E. Tipos de tarefas de investigação matemática em livros didáticos do 8º ano. **Encontro Paranaense de Educação Matemática**, Cascavel, v. 1, n. 1, p. 1-15, set. 2020. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/68/127. Acesso em: 02 dez. 2020.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem em matemática. **Contrapontos**, Itajaí, v. 2, n. 3, p. 343-362, dez. 2002. Disponível em: https://www6.univali.br/seer/index.php/rc/article/view/180/152. Acesso em: 02 dez. 2020.

PONTE, J. P. da. Exercícios, problemas e explorações: perspetivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**, Lisboa, v. 24, n. , p. 11-134, dez. 2015. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/22628. Acesso em: 02 nov. 2020.

PONTE, J. P. da. Explorar e Investigar em Matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. **Unión** - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Lisboa, v. , n. , p. 13-30, mar. 2010. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/3043. Acesso em: 02 nov. 2020.

PONTE, J. P. da. **Gestão curricular em Matemática. O Professor e O Desenvolvimento Curricular**, Lisboa, v. , n. , p. 11-34, jan. 2005. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/3008. Acesso em: 02 nov. 2020.

PONTE, J. P. da. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, Lisboa, v. 2, n. 1, p. 1-75, jan. 2003. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4071/1/03-Ponte%20%28Rev-SPCE%29.pdf. Acesso em: 05 nov. 2020.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, João Pedro da (org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Fct, 2014. Cap. 1. p. 13-30.

SILVA, W. O. Kit Virtual de Apoio: uma proposta para o ensino de gráficos de funções. **Colbeduca**, Joinville, v. , n. , p. 594-606, set. 2016. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8412. Acesso em: 02 out. 2020.

SOUSA, E. S. de; VIALI, L.; RAMOS, M. G. Construção e análise de modelos exponenciais de forma significativa: uma experiência de ensino em sala de aula. **Revista Exitus**, [S.L.], v. 7, n. 2, p. 55-75, 26 abr. 2017. Universidade Federal do Oeste do Para. http://dx.doi.org/10.24065/2237-9460.2017v7n2id302. Disponível em: http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/302. Acesso em: 02 out. 2020.

CAPÍTULO III – ARTIGO 03

FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA PROPOSIÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS

RESUMO

Este artigo faz parte de uma dissertação de mestrado em formato multipaper cujo objetivo foi propor e analisar tarefas matemáticas, bem como suas representações semióticas, envolvendo as funções do tipo exponencial com o emprego do software GeoGebra. Para isso, nos ancoramos nos estudos sobre o conceito e classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017). Esta é uma pesquisa qualitativa (GERHARDT; SILVEIRA, 2009) e interpretativista (DIVAN; OLIVEIRA, 2008). A construção das propostas passou pela elaboração e adaptação das tarefas por meio de testagem no GeoGebra, seguida pela composição das orientações didáticas ao professor. Ressaltamos a importância do trabalho em sala de aula seja marcado por uma diversificação de tipos de tarefas considerando o assunto a ser ensinado, as características dos alunos e as competências e habilidades que se pretende desenvolver. O *software* GeoGebra se mostrou um recurso didático adequado para a proposição de tarefas sobre funções do tipo exponencial por possibilitar um caráter experimental à aula, o que poderá conceber ao aluno do ensino médio a autonomia para testar hipóteses, gerar conjecturas, analisar simultaneamente a relação entre elementos de representações distintas e aprender pela descoberta e não pela simples aceitação teórica.

Palavras – Chave: Função exponencial. GeoGebra. Tarefas. Representações semióticas.

ABSTRACT

This article is part of a master's thesis in multipaper format whose objective was to propose and analyze mathematical tasks, as well as their semiotic representations, involving exponential-type functions using GeoGebra software. For this, we anchored in studies on the concept and classification of tasks by Ponte (2005) and in Duval's Theory of Semiotic Representation Records (2017). This is a qualitative (GERHARDT; SILVEIRA, 2009) and interpretive (DIVAN; OLIVEIRA, 2008) research. The construction of the proposals went through the elaboration and adaptation of the tasks through testing in GeoGebra, followed by the composition of the didactic guidelines for the teacher. We emphasize the importance of work in the classroom being marked by a diversification of types of tasks considering the subject to be taught, the characteristics of the students and the skills and abilities to be developed. The GeoGebra software proved to be an adequate didactic resource for proposing tasks on exponential-type functions as it allows an experimental character to the class, which can give the high school student the autonomy to test hypotheses, generate conjectures, simultaneously analyze the relationship between elements of distinct representations and learning through discovery rather than mere theoretical acceptance.
Key words: Exponential function. GeoGebra. Tasks. Semiotic representations.

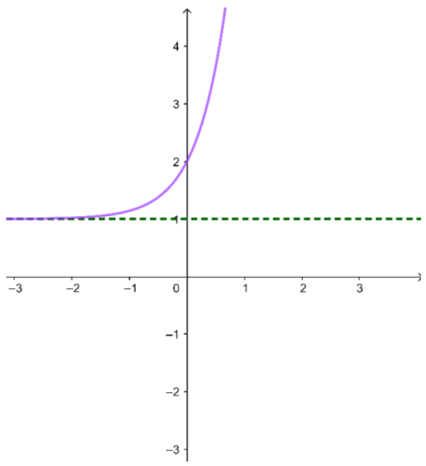
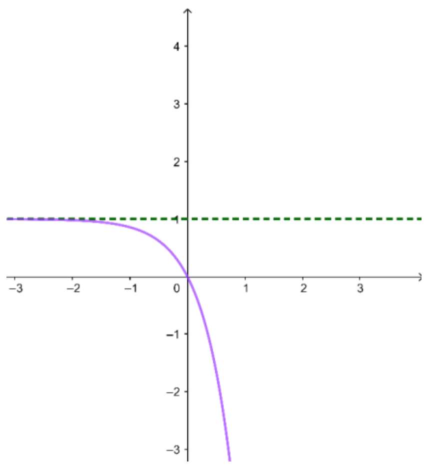
1. INTRODUÇÃO

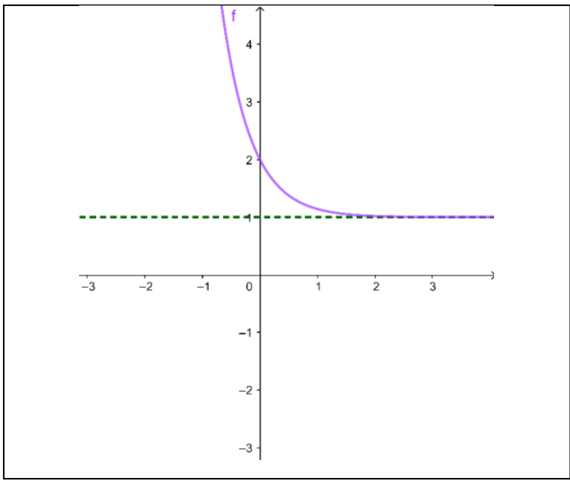
O conceito de função é um dos objetos matemáticos mais explorados no ensino básico. Apesar de que o trabalho mais sistemático com o ensino do conteúdo ocorra no ensino médio, a BNCC (BRASIL, 2018) reforça que sua noção intuitiva pode ser explorada ainda no ensino fundamental, por meio de tarefas simples, envolvendo a relação entre variações proporcionais de grandezas (como, por exemplo, na comparação das medidas de açúcar para se produzir uma determinada quantidade de suco).

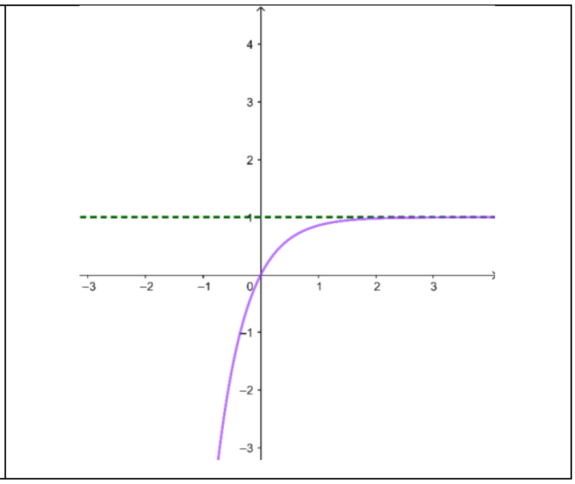
Com relação à função exponencial, alguns pesquisadores e professores relatam, no entanto, dificuldades dos alunos já no ensino médio em compreender o conteúdo no que diz respeito a aspectos como: reconhecê-la em duas representações distintas e até operacionalizá-la em sua forma algébrica (SANTOS; BIANCHINI, 2012; SILVA, 2016; COELHO, 2016; SILVA; LAZZARIN, 2018; GOLDONE, 2019).

Além da função exponencial, definida algebricamente por $f(x) = a^x$ com $a > 0$, existem as chamadas funções do tipo exponencial dadas por $g(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$ que serão discutidas nesta pesquisa. Apesar de não atenderem à todas as características e propriedades da função exponencial, este tipo de função tem sua relevância marcada, principalmente, pela manipulação de seus coeficientes permitir um estudo mais global do comportamento exponencial (FARIA; SOUZA JUNIOR; CARDOSO, 2016). Na perspectiva das representações semióticas, o gráfico de g possui quatro configurações visualmente distintas, conforme ilustrado no Quadro 12.

Quadro 12 - Representaçoes gráfica visucalmente distintas de $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$

Caso 01: $b > 0$, $a > 1$ e $c > 0$ ou $b > 0$, $0 < a < 1$ e $c < 0$	Caso 02: $b < 0$, $a > 1$ e $c > 0$ ou $b < 0$, $0 < a < 1$ e $c < 0$
	
Caso 03: $b > 0$, $0 < a < 1$ e $c > 0$ ou $b > 0$, $a > 1$ e $c < 0$	Caso 04: $b < 0$, $0 < a < 1$ e $c > 0$ ou $b < 0$, $a > 1$ e $c < 0$





Fonte: Autor, 2020

Do ponto de vista didático, Piano (2016) reforça que o conceito de função exponencial é corriqueiramente prejudicado no currículo escolar, no qual os alunos apresentam inúmeras dificuldades de aprendizagem. Para o autor, tais dificuldades emergem muitas vezes, do tempo insuficiente para uma boa abordagem/exploração do conceito em sala de aula, que acaba sendo preterido em relação aos demais modelos de funções.

De todo modo, no mesmo grupo das funções afins e quadráticas, a função exponencial é um dos modelos mais discutidos no ensino médio (LIMA, 2013), podendo tal recorrência ser justificada por suas inúmeras aplicações como modelo de descrição, previsão e análise de uma série de fenômenos naturais tais como o montante em juros compostos, variação de temperatura, curvas de aprendizagem, a pressão atmosférica e o crescimento/reprodução de bactérias e vírus (como o comportamento pandêmico da COVID-19 em função do tempo).

No entanto, corroborando com a constatação de Piano (2016), dados de avaliações nacionais revelam um baixo desempenho dos estudantes nos níveis progressivos de proficiência[12] que exigem competências sobre funções exponenciais. O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) (BRASIL, 2019) revela que apenas 1,11% dos estudantes de ensino médio do Brasil alcançaram o nível 7 no qual encontra-se a habilidade de resolver problemas envolvendo as funções exponenciais. Neste mesmo nível, na Bahia, chegaram 0,57% e na cidade de Barreiras – BA (onde residem, trabalham e pesquisam os autores deste artigo) o número cai para 0,24%. Com relação ao nível 9 que contempla a habilidade de determinar a

[12] “Os resultados dos testes de aprendizagem realizados são apresentados em uma escala de proficiência, composta por níveis progressivos e cumulativos, da menor para a maior proficiência. Significa dizer que quando um percentual de estudantes está posicionado em determinado nível da escala, pressupõe-se que, além de terem desenvolvido as habilidades referentes a este nível, provavelmente também desenvolveram as habilidades referentes aos níveis anteriores” (SAEB, 2019, encurtador.com.br/agyRX)

expressão algébrica de uma função exponencial a partir de um texto ou gráfico, o alcançaram apenas 0,07% no Brasil, 0,03% na Bahia e 0% em Barreiras – BA.

Com base nesses dados, conjecturamos que uma das justificativas para tal baixo rendimento, e conforme já citado por Coelho (2016), é o défice de tempo que este tema sofre no currículo escolar ou, até mesmo, a dificuldade do professor em ensiná-lo. Nessa direção, Santos e Bianchini (2012) evocam a necessidade de diversificação das metodologias por parte do professor, alegando que apenas o uso do livro didático não supre as necessidades dos estudantes frente a este conteúdo, e indicam o *software* GeoGebra como um importante instrumento de mediação.

Neste contexto, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) são, por sua vez, recursos com ampla discussão entre pesquisadores da Educação Matemática, que podem contribuir na superação desses problemas relativos ao ensino de funções exponenciais. Os *softwares* provenientes da Matemática e, em especial da Matemática dinâmica, tais como o GeoGebra, tem como caraterísticas gerais o fato de concederem à aula de Matemática possiblidades de manipulação, interação e análise simultâneas de um dado objeto matemático, em especial as funções.

É importante frisar a necessidade de capacitação didática e técnica do professor acerca do uso de um determinado recurso tecnológico, para que realmente seja possível explorar as possibilidades didáticas dessa metodologia. Muitos professores, apesar de reconhecerem a importância de tais ferramentas e, em alguns casos, afirmarem que os empregam em sala de aula, contudo, possuem uma visão superficial e limitada da sua utilização didática, que não os permitem realizar explorações mais eficientes em sala de aula (CARVALHO, 2017).

Usar um projetor multimídia, uma apresentação em slides ou o próprio GeoGebra, esporadicamente, sem planejamento e domínio didático básico tanto sobre o programa quanto sobre o próprio sistema operacional do computador, são casos que fragilizam a aula e podem colocar o professor em situação desconfortável. Tal fato pode ser evidenciado, por exemplo, no momento em que surgir um problema técnico simples ou uma pergunta mais incisiva e complexa do aluno sobre como usar um recurso Y para analisar um problema X.

Assim, o GeoGebra pode ser um importante recurso didático em sala de aula, visto que pode atribuir à aula de Matemática um caráter experimental que permite aos estudantes a comparação, principalmente, das representações algébrica e gráfica dos objetos matemáticos (HOHENWARTER E FUCHS, 2004).

Alguns estudiosos no Brasil (REZENDE; PESCO; BARTOLOSSI, 2012; SANTOS; BIANCHINI, 2012; SILVA, 2016; FARIA; SOUZA JUNIOR; CARDOSO, 2016; MARTINS;

DOERING; BARTZ, 2017; SOUSA; RAMOS, 2017; SILVA; LAZZARIN, 2018; GOLDONI, 2019) se dedicaram a pesquisar os efeitos didáticos de metodologias que combinavam o ensino da função exponencial associado ao uso do GeoGebra. Tais estudos explicitam que, de forma geral, uma das principais características do programa é o caráter empírico que pode imprimir à aula, instigando nos estudantes autonomia e a possibilidade de trabalho concomitante com as múltiplas representações semióticas da função.

Desta forma, o objetivo foi propor tarefas matemáticas envolvendo as funções do tipo exponencial com o emprego do software GeoGebra. Para isso, nos ancoramos nos estudos sobre o conceito e classificação de tarefas de Ponte (2005) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2017). O intuito foi evidenciar os aspectos didáticos que os professores deverão levar em conta, como o planejamento, leituras e competências técnico/didáticas, além da forma como o *software* pode ser empregado de modo a explorar competências especificas relativas às funções exponenciais.

2. TAREFAS MATEMÁTICAS

Ponte (2005) é um professor e pesquisador em Educação Matemática que dedica parte de seus estudos à discussão do conceito de tarefa, se preocupando com as formas de intervenção e objetivos didáticos que geram, segundo o autor, exigências distintas a depender do contexto educacional em questão. De imediato, é posto que a discussão sobre as tarefas só é relevante em um ensino que leve em conta o papel ativo dos alunos, sendo que as **tarefas** são elementos organizadores de sua **atividade** (PONTE *et al*, 2015). Uma tarefa é uma ferramenta de mediação que pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno; ser conjecturada pelo aluno e discutida com o professor; ser proposta logo no início da aula ou ir se formulando ao longo dela (PONTE, 2005).

De forma geral, uma **tarefa** é um objetivo de uma ação, de uma **atividade** que, por sua vez, remete àquilo que o aluno faz em um dado contexto, ou seja, uma tarefa pode gerar diversas atividades. Para isso, é necessário levar em conta: a forma como foi proposta (no início ou no fim, pronta ou formulada durante a aula); o perfil dos alunos (se são mais especulativos, por exemplo); o ambiente escolar e a própria experiência do professor (PONTE, 2014). Assim, por exemplo, a “questão 27 do capítulo 7 sobre função exponencial” é uma tarefa e a forma como o aluno resolverá, as discussões que ele fizer tanto com professor quanto com seus colegas, os instrumentos que empregou (o GeoGebra, por exemplo) na resolução e a forma como justificou e interpretou sua resposta, tudo isso constitui uma atividade.

Definido o conceito de tarefa, Ponte (2005, 2014) estabelece sua classificação e tipologia com base em alguns aspectos. Os mais fundamentais são o **grau de desafio** e **estrutura**. O primeiro remete a percepção de dificuldade que o aluno terá, frente à uma determinada tarefa, e varia entre os polos **elevado** e **reduzido.** O grau de estrutura pode ser **fechado** (tanto o que se pede, quanto as informações dadas na questão são claras e objetivas, o aluno terá a missão de aplicar de imediato algum conceito) e **aberto** (comporta alguma indeterminação nas informações do enunciado ou na resposta em si; o aluno, possivelmente, terá que fazer análises, inferências, conjecturas mais profundas para encontrar a melhor forma de resolução e a resposta mais adequada). Com base nestes aspectos temos quatro tipos de tarefas, tal como ilustrado no Quadro 13.

Quadro 13 - Tipos de tarefas com base em seu grau de desafio e estrutura

	Grau de desafio **elevado**	Grau de desafio **reduzido**
Estrutura **aberta**	Investigações	Explorações
Estrutura **fechada**	Problemas	Exercícios

Fonte: Adaptado de Ponte (2005, p.8)

Mesmo com esta demarcação, Ponte (2005) reforça, no que diz respeito ao grau de desafio, que o principal fator que distingue uma investigação de uma exploração, e um problema de um exercício, é o fato de o aluno possuir ou não previamente as ferramentas (técnicas e cognitivas) para a resolução da tarefa. Se não possuir, estará diante de uma questão com grau de desafio elevado, caso contrário, será reduzido. É reforçada, então, a importância da bagagem epistemológica que o aluno traz de casa, fruto de suas experiências, bem como o conhecimento produzido em outras disciplinas ou em outras séries e unidades, reforçando, assim, o caráter hierárquico e a transversalidade da Matemática.

Outros dois aspectos que Ponte (2005, 2014) agrega para classificar as tarefas acima são a **duração** e o **contexto**. Uma tarefa pode ser aplicada com diferentes durações, mas é necessário cuidado com tarefas muito curtas que, talvez, não sejam suficientes para atender uma demanda específica de um aluno ou da turma. A mesma atenção deve ocorrer com tarefas muito longas que, apesar de permitirem o desenvolvimento de atividades mais abrangentes e graduais, correm o risco de se tornarem desgastantes (para professores e alunos). Quanto ao tempo, temos a seguinte demarcação de acordo com o Quadro 14.

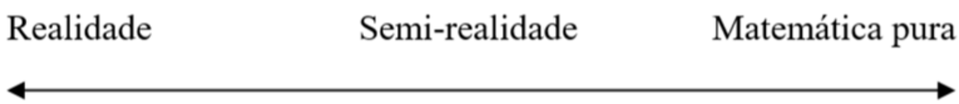
Quadro 14 - Classificação das tarefas quanto à sua duração

Duração		
Curta	**Média**	**Longa**
Exercícios	Problemas Explorações Investigações	Projetos

Fonte: Adaptado de Ponte (2005, p.10)

O contexto, de acordo com Ponte (2014), tem como extremos os polos **realidade** (uso das funções exponenciais na matemática financeira, biologia e química, por exemplo) e **matemática pura** (operações e demonstrações com o emprego de técnicas e propriedades estritamente algébricas, por exemplo). Skovsmose (2000, *apud* PONTE, 2005) considera, ainda, um nível intermediário dado pela **semirrealidade,** na qual se enquadram aquelas tarefas que são pseudoreais, por serem utópicas ("um homem realiza um trajeto de carro que descreve perfeitamente a parábola a seguir…") ou por descriminarem excessivamente algumas propriedades e fatores externos em prol da interpretação e resolução da questão ("…calcule o tempo de percurso considerando todo o trajeto retilíneo, a velocidade constante e a viajem sem pausas …"). Desta forma, temos a Figura 8.

Figura 8 - Classificação das questões por seu contexto



Fonte: Ponte, Branco e Quaresma (2011, p.11)

Ponte (2005) reforça, ainda, que não é possível associar um tipo de tarefa específica a um dado contexto, já que é possível haver problemas centrados na Matemática pura e exercícios em contexto de realidade, por exemplo.

Na seção 6 apresentaremos exemplos de proposição e resolução de cada tipo de tarefa mencionado, à priori, (tal como no Quadro 15).

Quadro 15 - Descrição sintetizada de cada tipo de tarefa

TIPOS DE TAREFAS	**DESCRIÇÃO**

Exercício	Tarefa de estrutura fechada e grau de desafio reduzido. Muito associada a questões de fixação e repetição do tipo “Resolva”, por exemplo.
Investigação	Tarefa de estrutura aberta e grau de desafio elevado. São, por exemplo, tarefas em que os alunos precisam modelar uma função para a relação entre duas grandezas por meio de experiência laboratoriais.
Exploração	Tarefa de estrutura aberta e grau de desafio reduzido. A análise de regularidades com materiais manipulativos, como no trabalho com sólidos geométricos.
Problema	Tarefa de estrutura fechada e grau de desafio elevado. Questões que solicitam a conversão da representação gráfica para a algébrica de uma função exponencial, por exemplo.

Fonte: Adaptado de PONTE (2005)

3. TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Esta teoria, idealizada por Duval (2011), parte da premissa de que a compreensão em Matemática passa, necessariamente, pela compreensão e operacionalização de representações semioticas. Isso se justifica pela diferença entre a Matemática e as demais áreas do conhecimento cujos objetos estudados são não semióticos e, portanto, acessíveis por meio de instrumentos (telescópio para a astronomia, por exemplo). Os objetivos matemáticos são semióticos, só sendo possível ter acesso a eles por meio de suas múltiplas representações semióticas (DUVAL, 2017, 2018; MORETTI, 2002, 2013).

Nesse sentido, um objeto matemático pode ser a função exponencial, uma circunferência ou o número um, ao passo que suas representações semióticas podem ser dadas por "$f(x) = a^x$", *“conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo”* e "$\log_2 2$", respectivamente. Entender esta diferença e saber lidar com ela é uma tarefa necessária e relevante para o professor de Matemática. São comuns as discussões sobre alunos que não reconhecem um determinado objeto matemático em mais de uma representação (SANTOS, 2012; SILVA, 2016), como, por exemplo, não saber identificar a curva de crescimento de casos de COVID-19 como uma representação do conceito de função exponencial, reconhecendo-a apenas por sua lei algébrica. Outra situação é que, por uma questão de otimização, é mais fácil usar o gráfico de uma função para fazer análises comparativas e projeções do que sua forma algébrica, por exemplo.

De forma geral, não confundir um objeto matemático com sua representação e identificar este mesmo objeto em várias representações semióticas distintas gera o que Duval (2014) chama de “paradoxo cognitivo”. Antes de apresentar a solução dada por sua teoria para contornar tal paradoxo, o pesquisador acrescenta, ainda, um terceiro fator na relação entre representante e representado, as unidades significantes. Tais unidades são os elementos característicos de cada representação que carregam consigo um conteúdo próprio dotado de propriedades (tais como variáveis, coeficientes, traços, curvatura, etc.).

Ocorre que, em sala de aula, dar-se-á mais atenção às representações mentais (conceito que um aluno tem sobre um objeto) do que às representações semióticas (DUVAL, 2012c; HILLESHEIM; MORETTI, 2013). Para designar diferentes tipos de representações semióticas na Matemática, Duval (2017), parafraseando Descartes, utiliza o termo **registro** dos quais destacamos: a língua natural, as escritas algébricas e numéricas (binária, decimal e fracionária, por exemplo), as e as figuras geométricas. No trabalho com funções também é comum o uso da representação por tabelas (associando grandezas). O autor também aponta que para ser considerado um sistema semiótico, o registro deve permitir três atividades cognitivas essenciais: a **formação de uma representação identificável,** o **tratamento** e a **conversão.**

A **formação de uma representação identificável** remete a um sistema semiótico dotado de regras e propriedades que torne possível seu reconhecimento e operacionalização, como as regras gramaticais para os sistemas de escritas e as geométricas para polígonos (DUVAL, 2012c). Esta atividade cognitiva permite que sejam feitos os tratamentos.

O **tratamento** é uma transformação interna de um registro que está condicionada a suas regras. O cálculo e a reconfiguração são exemplos de tratamentos dos registros algébricos e geométricos, respectivamente (DUVAL, 2012c). Acontece que, em muitos casos, não basta permanecer em um mesmo registro para se resolver um problema, como no caso em que é necessário construir um gráfico estatístico de uma série de dados postos em tabelas. Neste caso temos uma **conversão**.

A **conversão** é uma transformação externa em que se transita de um registro a outro, preservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial (DUVAL, 2012c). O autor reforça que a conversão é uma atividade cognitiva diferente dos tratamentos, pois muitos alunos podem, por exemplo, saber encontrar pontos cartesianos de uma função exponencial bem como, com seu gráfico pronto, saber interpretar se é crescente ou decrescente, mas são incapazes de associar o gráfico com a expressão algébrica ou de compreender em que momento um é mais útil que o outro e realizar essa transição, sem que lhes seja solicitado.

A conversão tem seu valor, do ponto de vista didático, por ser para o aluno um instrumento que lhe permite fazer a escolha do melhor sistema para resolução de uma tarefa. Para o professor, é uma excelente ferramenta de análise que permite constatar se o aluno entende o que é, por exemplo, uma função exponencial ou se ele só a reconhece quando apresentada algebricamente, com coeficientes específicos e usando os símbolos "x" e "$f(x)$"

para designar seu domínio e imagem. Talvez, isso ocorra por não ser explorada em atividades de demonstração, operacionalização e prova (na qual se sobressaem os tratamentos), assim, a conversão não desperta tanta atenção (HILLESHEIM; MORETTI, 2013).

Do ponto de vista do professor de Matemática que está analisando a resolução de uma tarefa desenvolvida por certo aluno, o que deve ser levado em conta? Quais critérios deverão ser considerados para analisar esta resolução e, antes disso, para elaborar esta tarefa? Aqui surge a necessidade de compreensão do fenômeno da congruência semântica relacionado à transição entre registros de representação.

A congruência semântica remete à associação das unidades significantes dos registros de partida e de chegada referentes a um mesmo objeto matemático que pode ser trivial (dizemos que há congruência semântica) ou pode exigir certas correspondências para que isso seja possível (não há congruência semântica). Duval (2012c) estabelece três critérios para que se possa analisar a congruência semântica entre dois registros, conforme apresentado no Quadro 16.

Quadro 16 - Critérios de congruencia semântica entre dois registros

CRITÉRIOS	CARACTERÍSTICAS
A possibilidade de uma **correspondência "semântica"** de elementos significantes	A cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar
A **univocidade "semântica"** terminal	A cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada
A **organização das unidades significantes**	As organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjamento das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão

Fonte: Adaptado de Duval (2012c, p. 283 – 284)

É importante, desta forma, o professor ter atenção com as tarefas desenvolvidas com os seus alunos, pois aquelas que exigem representações congruentes (como a construção do gráfico de uma função, a partir de uma tabela) podem dar uma falsa impressão de compreensão, quando, na verdade, é o inverso (não congruente), que revela suas dificuldades em reconhecer o mesmo objeto em duas representações semióticas distintas (DUVAL, 2005 *apud* HILLESHEIM; MORETTI, 2013).

Em suma, a solução proposta por Duval (2012c, 2018) para o paradoxo cognitivo é condicionar a compreensão matemática à coordenação e reconhecimento, por parte do aluno, de ao menos dois registros de e um mesmo objeto matemático. Existirão indícios de compreensão, por parte do aluno, quando ele souber transitar entre tais registros (conversão), reconhecendo a relação entre suas unidades significantes em situações quando há e, principalmente, quando não há congruência semântica, sabendo executar as operações e transformações internas de cada sistema semiótico (tratamentos).

4. METODOLOGIA

Esta é uma pesquisa qualitativa, quanto à sua abordagem, pois não se preocupa com representatividade numérica, mas sim com o aprofundamento da compreensão sobre os objetivos estudados (GERHARDT; SILVEIRA, 2009). Epistemologicamente, é interpretativista, levando em conta, justamente, a ênfase no aspecto qualitativo e que os pesquisadores são partes ativas nos processos de construção e interpretação das propostas (DIVAN; OLIVEIRA, 2008).

Nos concentramos em propor diferentes tarefas matemáticas sobre o conceito de função exponencial para serem trabalhadas no ensino médio (em situações reais de sala de aula). Assim, foi dada ênfase no que o professor deve planejar e antecipar e ao que se espera que o aluno mobilize por meio de embasamento em materiais já elaborados em termos de teorias (representações semióticas e classificação das tarefas), ferramentas (GeoGebra) e demais dados técnicos e científicos (tarefas adaptadas de outros materiais e informações empíricas para construção de modelos).

Apresentaremos exemplos dos quatro tipos de tarefas (exercícios, problemas, explorações e investigações) discutidos por Ponte (2005). Para isso, nos norteamos nos pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) , no que diz respeito à necessidade de coordenação de múltiplos registros de um mesmo objeto, à relação de congruência semântica e aos comportamentos da função exponencial discutidos no tópico anterior. Com relação à classificação das tarefas, apresentaremos as virtudes e cuidados que o professor deve ter ao aplicá-las, bem como os momentos convenientes para tal.

A finalidade é que esta proposta seja um roteiro de aula para que o professor discuta o conteúdo de funções exponenciais, uma forma de facilitar e auxiliar seu trabalho por meio do

GeoGebra. Cientes de problemas tais como os citados por Piano (2016), com relação ao tempo insuficiente para um trabalho bem desenvolvido e detalhado, nos basearemos em uma carga horária de 06 horas/aula dedicados exclusivamente ao assunto.

As etapas deste estudo referente à proposição das tarefas foram: 1ª etapa: elaboração e adaptação (a priori) das tarefas; 2ª etapa: testagem no GeoGebra; 3 ª etapa: retomada das tarefas (modificações realizadas após o primeiro teste no GeoGebra); 4ª etapa: (re)testagem no GeoGebra; 5ª etapa: elaboração das orientações sobre o uso das tarefas.

Logo, apresentaremos duas propostas didáticas, as quais o professor poderá incluir no trabalho sobre função exponencial (em termos da ordem em que serão apresentados e dos objetivos impressos em cada etapa) sendo, evidentemente, válidas e bem-vindas implementações que agreguem e estejam em sintonia com os fundamentos aqui apresentados.

5. PROPOSIÇÃO DAS TAREFAS

Esta proposição de tarefas se baseia nos conceitos de *ensino e aprendizagem exploratórios* defendido por Ponte (2005), nos quais o professor não procura explicar tudo, mas sim deixar uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento para que os alunos realizem. Este modelo é marcado pela ênfase em tarefas de exploração e investigação, apesar de os exercícios e problemas também possuírem sua relevância.

Este método é um contraponto ao que o autor chama de *ensino direto* marcado pela centralidade do professor. Neste caso, mesmo que, por vezes, solicitando participação dos alunos ou propondo algumas tarefas de estrutura aberta, verifica-se uma participação ativa esporádica da turma. Dessa maneira, fazer perguntas objetivas aos alunos de forma que as repostas sejam um determinado resultado de uma conta, alternativas como “sim” ou “não”, ou até mesmo análises sobre procedimentos previamente encaminhados, não tiram essa centralidade do docente.

Dito isso, uma possibilidade de se introduzir um conteúdo novo é, em vez de apresentar definições e propriedades de imediato, propor aos alunos tarefas exploratórias. Esse cenário permitirá que eles realizem conjecturas, reflexões e debates sobre o assunto de maneira que, mesmo não chegando à definição formal de forma estrita, consigam se aproximar dela de maneira ativa e não passiva.

Esta metodologia exige o uso do laboratório de informática ou qualquer ambiente (virtual, por exemplo) no qual todos os envolvidos tenham acesso a um computador ou celular com o

GeoGebra instalado. Além disso, seria interessante, se possível, que aos estudantes já tenham tido algum contato com o programa em alguma aula anterior.

5.1.ROPOSTA 01

Esta é uma proposta que reúne dois conjuntos de tarefas independentes, mas articuladas. O primeiro conjunto com estrutura fechada (exercícios e problemas) e o segundo com estrutura aberta (explorações e/ou investigações). Antes de iniciar a proposta (que assume o caráter de oficina) os estudantes precisam ser alocados à um contexto que norteará toda a experiência. Serão apresentados à uma situação que envolve um comportamento exponencial associado ao cenário da pandemia provocada pelo COVID – 19.

Figura 9 – Tarefa com estrutura fechada

Tarefa: Vitória-régia

Em abril de 2020, período inicial da pandemia do coronavírus, um pesquisador brasileiro propôs um enigma para popularizar a explicação sobre como ocorre a disseminação do vírus e sua multiplicação em crescimento exponencial. Maurício Féo (engenheiro, mestre em Instrumentação pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e estudante de doutorado em Física de Partículas em Genebra, na Suíça) gravou um vídeo fazendo analogia com vitórias-régias, um lago, e a quantidade dessa planta aquática que é possível tirar do lago, durante um período de tempo. Para isso, considerou que, a cada dia, cada uma das plantas se reproduz gerando outra vitória régia.

(Fonte: Informação retirada e adaptada dehttps://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/10/enigma-da-vitoria-regia-vira-exemplo-em-video-que-explica-o-que-e-o-crescimento-exponencial-da-pandemia.ghtml)

Com base neste contexto, responda as questões abaixo:

1. Considere que, tal como no contexto anunciado, cada vitória régia se reproduz gerando uma outra ao longo de um dia e que no primeiro dia em que se deseje estudar tal reprodução haja cinco vitórias régias no lago. Qual o número de vitórias régias nos primeiros dias?
2. No GeoGebra, insira as coordenadas dadas pelos pontos (dia, número de vitórias régias) e analise seu comportamento. O que há de característico na forma como se comportam estes pontos?
3. É possível pensar em uma expressão algébrica (“fórmula”) que nos permita encontrar a quantidade de vitórias régias neste lago em um momento qualquer, sem muito trabalho? Insira a expressão algébrica encontrada no GeoGebra e verifique se, de fato, ela descreve o comportamento dos pontos (dia, número de vitórias-régias).
4. Em um determinado momento havia 10240 vitórias régias no lago. Você consegue dizer em qual dia, provavelmente, isso ocorreu?

FONTE: Elaborado pelos autores (2021)

Figura 10 - Tarefa de Estrutura Aberta

Tarefa: Vitória-régia

Em abril de 2020, período inicial da pandemia do coronavírus, um pesquisador brasileiro propôs um enigma para popularizar a explicação sobre como ocorre a disseminação do vírus e sua multiplicação em crescimento exponencial. Maurício Féo (engenheiro, mestre em Instrumentação pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e estudante de doutorado em Física de Partículas em Genebra, na Suíça) gravou um vídeo fazendo analogia com

vitórias-régias, um lago, e a quantidade dessa planta aquática que é possível tirar do lago, durante um período de tempo. Para isso, considerou que, a cada dia, cada uma das plantas se reproduz gerando outra vitória régia. (Fonte: Informação retirada e adaptada de encurtador.com.br/fgxJW) Com base neste contexto, responda as questões abaixo: 1. Considere a situação envolvendo a reprodução das vitórias régias do enunciado e que, portanto, a expressão algébrica que determine esta reprodução em função dos seja dada por $f(x) = 5 \cdot 2^{x-1}$, sendo x os dias e $f(x)$ o número de vitórias-régias correspondente. O que acontece com a expressão algébrica e com seu gráfico se variarmos o número de vitórias régias do primeiro dia ou o número de vitórias régias que uma gera ao longo de cada dia?

FONTE: Elaborado pelos autores (2021)

5.1.1. DISCUSSÃO DA TAREFA DE ESTRUTURA FECHADA

A primeira questão de estrutura fechada possui um grau de desafio reduzido, portanto, um exercício. Importante lembrar que a diversificação dos tipos de tarefas é um dos pontos mais discutidos por Ponte (2003, 2005, 2010). Além disso, o fato de uma proposta ser exploratória, não exclui a necessidade de exercícios e problemas, que são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos que, por sua vez, se baseiam numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados, como é o caso desta primeira questão.

Do ponto de vista das representações semióticas, trata-se de uma conversão da representação em língua natural (na qual se encontra o enunciado) para a representação decimal (na qual os alunos deverão realizar seus cálculos, ou seja, farão tratamentos).

Espera-se dos estudantes que utilizem técnicas intuitivas para encontrar respostas corretas ao que foi solicitado. Os estudantes podem pensar, tal como indica o enunciado: no primeiro dia há cinco vitórias régias, no segundo, como cada uma gerou uma outra, haverá dez… Um outro raciocínio possível que pode ser empregado pelos estudantes é:

$$2^{\underline{o}}\ dia: 5 + 5(geradas\ das\ demais) = 5 \times 2 = 10$$

$$3^{\underline{o}}\ dia: 10 + 10 = 5 \times 2 \times 2 = 20$$

$$4^{\underline{o}}\ dia: 20 + 20 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40$$

$$5^{\circ} dia: 40 + 40 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$

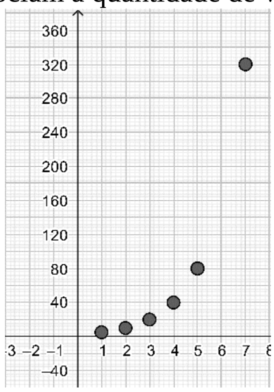
$$7^{\underline{o}} dia: 160 + 160 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 320$$

Esta conversão (da representação em língua natural para a decimal), apesar de poder ser intuitiva para alguns alunos, é não congruente por não respeitar a univocidade semântica. Isso se justifica, pois, as unidades significantes da representação inicial "$cada\ uma\ se\ reproduz\ gerando\ uma\ outra$" se transformou nas unidades significantes "$\times 2$" na representação final (na representação de chegada). Caso a expressão fosse "$se\ duplicasse$", poderíamos considerar a congruência semântica.

Importante salientar que é possível que os estudantes não representem a solução tal como está acima, embora encontrando o mesmo resultado. Assim, dispô-lo desta forma, ajuda a generalização que será cobrada em uma tarefa posterior. Além disso, após ou durante a realização da conversão, os estudantes podem cometer erros nos tratamentos algébricos relacionados às operações de soma e multiplicação. Importante, então, o professor estar atento à esta fase.

A segunda questão de estrutura fechada, também na forma de exercício, exige que os estudantes insiram no GeoGebra os pontos $(dia, quantidade\ de\ vitórias\ régis)$ encontrados anteriormente. Trata-se de uma conversão (da representação em pares ordenados para a representação gráfica) congruente, pois os alunos farão a correspondência entre pares ordenados e pontos no plano cartesiano (construção do gráfico ponto a ponto). Espera-se que cheguem à seguinte representação conforme Figura 11.

Figura 11 - Projeção dos pontos que associam a quantidade de vitórias-régias em função dos dias



Fonte: Autor, 2021

Ainda nesta questão, os estudantes terão quer refletir, conjecturar, comparar e recordar algumas propriedades relativas a diferentes tipos de funções, como a afim e a quadrática.

Espera-se que, de imediato, os estudantes notem o aspecto curvo do comportamento dos pontos e, com base nisso, descartem a possiblidade de se tratar de uma função afim.

O GeoGebra possui o recurso chamado de “controles deslizantes” por meio do qual é possível inserir uma função com coeficientes indefinidos. Assim, podem ser inseridas diferentes funções e criados controles que permitem variar os valores de seus coeficientes e notar o efeito disso simultaneamente no gráfico.

Espera-se, aqui, que estudantes se convençam que o comportamento do crescimento das vitórias régias não pode ser linear e nem quadrático (apesar dos pontos descrevem uma linha curva), uma excelente deixa para o que é exigido em seguida.

Na terceira questão de estrutura fechada temos um problema, pois é bem claro no que exige dos estudantes, além de possuir um grau de desafio alto. Espera-se que cheguem ao modelo $f(x) = 5 \times 2^{x-1}$ (ou $c(d) = 5 \times 2^{d-1}$) ou pelo menos à sua ideia, de forma que, mesmo não encontrando a relação algébrica formal, possam aplicá-la ao menos intuitivamente para encontrar a quantidade de vitórias-régias em um período qualquer.

Temos, aqui, uma conversão não congruente, pois, apesar de algumas unidades significantes da representação em língua natural transparecerem de forma única na representação algébrica (como a quantidade inicial de cinco vitórias-régias), temos também a conversão da expressão em língua natural "$cada\ uma\ se\ reproduz\ gerando\ uma\ outra$" para "$\times 2$" na forma algébrica e o "$x - 1$" no expoente da função que, em língua natural, seria representado por "$dia\ anterior$" o que também não é transparecido no enunciado.

A não congruência semântica desta e de outras conversões exigidas nesta proposta, apesar de, a princípio, denotar um obstáculo, indicam uma relevância epistemológica à tarefa, pois atribui à experiência um caráter desafiador que faz surgirem barreiras epistemológicas, que podem ser derrubadas pela mobilização simultânea de vários registros de um mesmo objeto, permitindo que os estudantes reconheçam o mesmo objeto matemático em diferentes representações semióticas (DUVAL, 2011, 2012b). Consequentemente, indicará os aspectos que deverão ser discutidos e analisados pelo professor como forma de vislumbrar essa relação existente entre registros de partida e chegada.

Tentar trabalhar o assunto apenas com tratamentos ("dada a função, encontre $f(5)$") ou conversões congruentes a um procedimento de encontrar pares ordenados e representá-los no plano cartesiano ("construa o gráfico da função a seguir"), isso pode gerar uma falsa noção de aprendizagem aos alunos, ou tornar toda a atividade (ligada ao assunto abordado) banal (muito parecido com o ensino direto, pautado apenas em exercícios e problemas).

Nesta mesma questão, os estudantes deverão inserir as funções descobertas no GeoGebra como forma de atestar e analisar se, de fato, tais modelos descrevem perfeitamente o comportamento dos pontos ao longo do plano cartesiano. Espera-se que exerçam sua autonomia e senso de autoavaliação para investigar suas produções e usar o *software* para refletir e avaliar possíveis equívocos, uma forma de usar os erros como ferramentas didáticas, e não como penalidades.

A questão quatro, um problema, exige um tratamento algébrico sobre o modelo encontrado na tarefa anterior. Apesar de ser um tratamento simples, dificuldades nesta etapa podem surgir. Os estudantes poderão apresentar o seguinte desenvolvimento:

$$10240 = 5 \cdot 2^{d-1}$$
$$\Rightarrow \frac{10240}{5} = 2^{d-1}$$
$$\Rightarrow 2048 = 2^{d-1}$$
$$\Rightarrow 2^{11} = 2^{d-1}$$
$$\Rightarrow 11 = d - 1$$
$$\Rightarrow d = 12$$

5.1.2. DISCUSSÃO DA TAREFA DE ESTRUTURA ABERTA

Passando agora para a tarefa exploratória, ela visa trabalhar com a questão fundamental relativa à compreensão na perspectiva das representações semióticas: reconhecer o mesmo objeto matemático em duas ou mais representações distintas, ao discriminar as unidades significantes de cada uma e compreender o que a mudança ou variação de uma afeta na outra.

Apresentamos aqui uma possiblidade de resolução na perspectiva de emular a forma como um estudante pode pensar a resolução desta tarefa. Uma das principais características de tarefas de estrutura aberta é justamente a oportunidade de várias formas de interpretação de resolução de uma mesma tarefa.

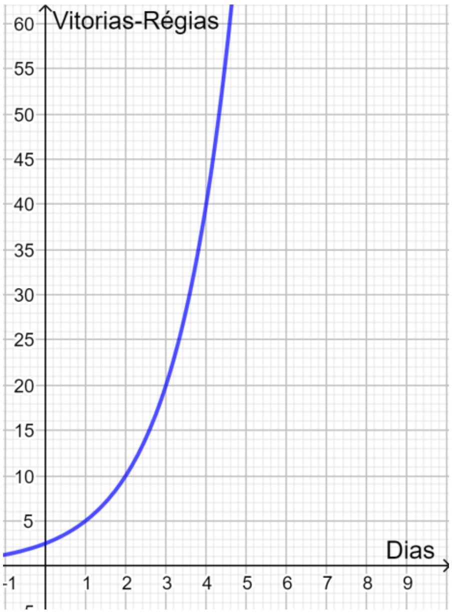
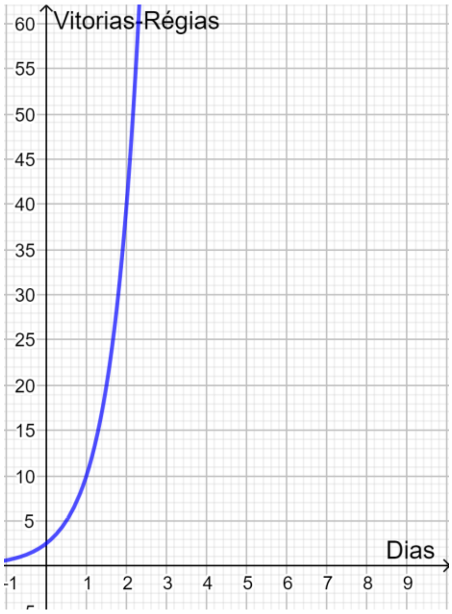
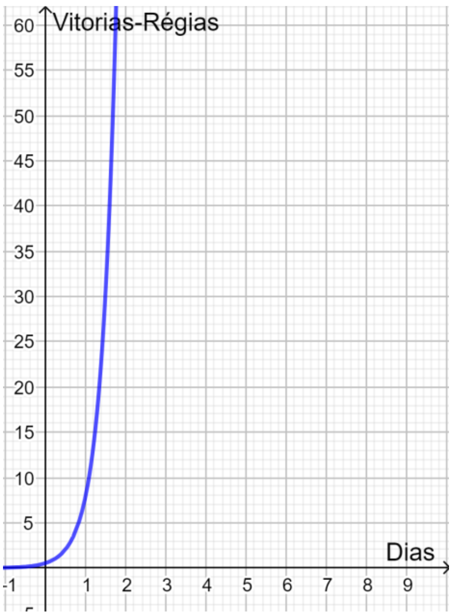
Como dito à priori, esta é uma tarefa independente que poderia, inclusive, ser aplicada sem as anteriores, considerando uma aula em que a modelagem não fosse o foco, mas sim, o estudo do modelo pronto. É comum nos livros didáticos tarefas que apresentam as funções prontas e, com base nelas, os estudantes devem executar o que se pede (encontrar uma imagem, construir um gráfico, etc.).

Considerando, então, a função $f(x) = 5 \cdot 2^{x-1}$ com f sendo o número de vitórias-régias em função dos dias (x), espera-se que os estudantes compreendam a unidade significante "5" como referente à quantidade de vitórias-régias no primeiro dia. Além disso, almeja-se que notem que, caso este número mude para seis ou sete, por exemplo, bastaria substituir este valor na expressão algébrica.

Analogamente, a unidade significante "2" na expressão algébrica, remete à duplicação implícita em língua natural do enunciado e que caso, em vez de cada uma gerar uma outra (duplicação), cada uma gerasse outras duas, teríamos uma triplicação (e o 2 seria substituído por 3 na expressão algébrica). O mesmo raciocínio valeria para o caso de quadruplicação, quintuplicação, etc.

Com relação a expressão gráfica desta função, espera-se que os estudantes percebam que a mudança na forma de reprodução (triplicação, quadruplicação, ...) ou no número de vitórias régias no primeiro dia irá modificar a inclinação e a monotonocidade do gráfico, como forme alguns exemplos no Quadro 17.

Quadro 17 - Análise gráfica da variação das unidades significantes da função exponencial sem sua representação em língua natural

<table>
<tr>
<td>5 vitórias régias no primeiro dia com cada uma gerando outras duas diariamente.

</td>
<td>10 vitórias régias no primeiro dia com cada uma gerando outras quatro diariamente.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">8 vitórias régias no primeiro dia com cada uma gerando outras 15 diariamente.

</td>
</tr>
</table>

Fonte: Autor, 2021

Entender a relação entre estas três representações é uma forma de induzir que os estudantes reconheçam o objeto matemático “função do tipo exponencial” em várias representações semióticas distintas, de forma intuitiva e não mecânica, de modo que alterar a nomenclatura das variáveis (se $f(x)$, $c(d)$ ou $g(n)$), algum coeficiente ou a ordem em que aparecem, não trará dúvidas ou obscurecerá sua percepção quanto ao assunto. Isso pode ocorrer pelo fato de não terem o estudado, ficando presos a exemplos específicos ou em uma aula que privilegia a teoria e o determinismo extremos, em detrimento da prática e da reflexão.

5.2.PROPOSTA 02

Esta é uma proposta que envolve dois conjuntos tarefas independentes, porém articulados. O primeiro, uma tarefa investigativa/exploratória, e o segundo com tarefas de estrutura fechada. Aqui os estudantes deverão fazer o estudo do processo de aquecimento de um líquido até a temperatura ambiente, empregando a Lei de Resfriamento de Newton.

Figura 12 - Tarefa de Estrutura Aberta

Tarefa: Experiência com a Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton determina que a perda de calor de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a ambiente. Utilizando este princípio, cada grupo fará o estudo de um copo de água previamente refrigerado posto em temperatura ambiente. Serão necessários 150 ml de água (à uma temperatura de cerca de 2°C) em um copo de vidro, um termômetro culinário e acesso ao GeoGebra. O ambiente precisa ter temperatura ambiente estável, devendo ser, então, fechado.

1. Insira a função $\boldsymbol{f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d}$ e no GeoGebra, reflita e faça anotações no caderno sobre os seguintes aspectos:

   a) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente $\boldsymbol{a}$?
   b) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente $\boldsymbol{d}$?
   c) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente $\boldsymbol{b}$?
   d) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente $\boldsymbol{c}$?

2. O que mais você observou ao realizar essa tarefa?

FONTE: Elaborado pelos autores (2021)

Figura 13 - Tarefa de Estrutura Fechada

Tarefa: Experiência com a Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton determina que a perda de calor de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a ambiente. Utilizando este princípio, cada grupo fará o estudo de um copo de água previamente refrigerado posto em temperatura ambiente. Serão necessários 150 ml de água (à uma temperatura de cerca de 2°C) em um copo de vidro, um termômetro culinário e acesso ao GeoGebra. O ambiente precisa ter temperatura ambiente estável, devendo ser, então, fechado.

1. Com o termômetro, meça e anote a temperatura ambiente. Em seguida, meça e anote a temperatura do líquido em intervalos fixos (de 5 em 5 min, 2 em 2 min, por exemplo) por um período de 30 à 50 min[13].

2. Insira os pontos (momento, temperatura) e a função $\boldsymbol{f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d}$ no GeoGebra e, utilizando os ajustes dos coeficientes no GeoGebra, encontre uma função que melhor modele o comportamento dos dados coletados.

3. Utilizando o modelo algébrico proposto por Newton, encontre a função que modela o comportamento dos dados coletados.

FONTE: Elaborado pelos autores (2021)

Os alunos deverão ser agrupados em trios e o professor, após os alunos já terem tido contato com a definição e os preceitos básicos das funções exponenciais (através da proposta 01, por exemplo), deverá levantar uma discussão sobre a lei de resfriamento de Newton (sem exibir o modelo propriamente dito) e deverá apresentar aos estudantes a função do tipo exponencial dada por $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$.

Como dito, as funções com comportamento exponencial são modelos de uma série de fenômenos naturais, como os de crescimento e reprodução de plantas ou bactérias, conforme explorado na proposta anterior. Uma destas aplicações é a lei do resfriamento de Newton, que considera a taxa de variação de temperatura de um corpo, em resfriamento em função do tempo $T(t)$, é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo (T) e a temperatura constante do meio ambiente (T_m) (ZILL; CULLEN, 2001). Desta forma, temos a relação

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m).$$

[13] Tanto os intervalos quanto a duração total da experiência (considerando um tempo mínimo de 30 min) ficam a critérios do professor e da sua disponibilidade de tempo. Importante, contudo, que todos realizem as medições por um mesmo período.

Tomando por hipótese que a temperatura do objeto dependa do tempo e seja a mesma em todos os pontos do líquido observado, que a temperatura ambiente seja constante durante o experimento e que a taxa de variação da temperatura obedeça a lei de resfriamento de Newton (conforme acima), por meio de uma Equação Diferencial Ordinárias (EDO), chegamos ao seguinte modelo:

$$T(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + T_m$$

no qual C é a diferença entre a temperatura ambiente (T_m) e a temperatura inicial do corpo e k uma constante de proporcionalidade, que depende da superfície exposta, do calor específico do corpo e das características do meio (SIAS e TEIXEIRA, 2006). Entre as muitas aplicações deste modelo estão a possiblidade de estimar a hora da morte de uma pessoa e prever o momento em que o leite atingirá a temperatura ideal (antes que ferva) no preparo de iogurte caseiro.

Esta proposta assume o caráter de *ensino e aprendizagem exploratórios* propostos por Ponte (2005), no qual os dados não serão entregues prontos e sim coletados e cada grupo terá a oportunidade de criar um modelo próprio além de poder verificar, com suporte do professor, se de fato sua função descreve o comportamento analisado. Trata-se, também, de uma proposta em contexto de realidade.

Do ponto de vista das representações semióticas (DUVAL, 2011, 2012b, 2012c), os estudantes terão a oportunidade de trabalhar simultaneamente com quatro representações semióticas: a tabular, a gráfica, a algébrica e a língua natural (no momento de interpretar seus resultados).

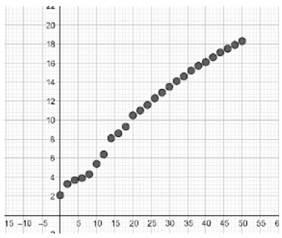
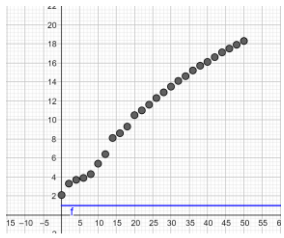
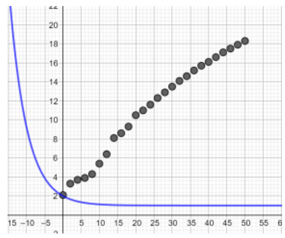
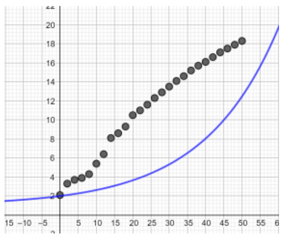
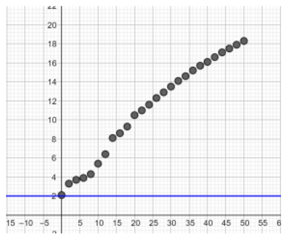
Faremos a descrição do método nos embasando em resultados de nossas próprias medições com os mesmos materiais e condições supracitadas.

5.2.1 DISCUSSÃO DA TAREFA DE ESTRUTURA ABERTA

Como dito à princípio, esta é uma tarefa independente que poderia ser aplicada de forma isolada, sem contexto de aplicação, ou associada a outras aplicações em outras áreas (biologia, por exemplo). Nesta tarefa investigativa os alunos se depararão com uma situação aberta, sobre a qual terão quer fazer análises e conjecturas a partir das quais deverão encontrar regularidades e deduzir propriedades importantes sobre a função exponencial. A estrutura aberta se justifica pelo caráter indeterminado das respostas e da forma como os estudantes podem às apresentar. É esperado que na análise dos coeficientes os estudantes façam anotações e tentem explicar, cada qual de sua forma, o comportamento que veem e as possíveis justificativas.

Ao manusear o controle do coeficiente a (mantendo os demais iguais a 1), por exemplo, os estudantes poderão perceber cinco comportamentos distintivos, tal como no Quadro 18:

Quadro 18 - Correspodência entre as representações gráfica e algébrica à partir da manipulação do coeficiente a

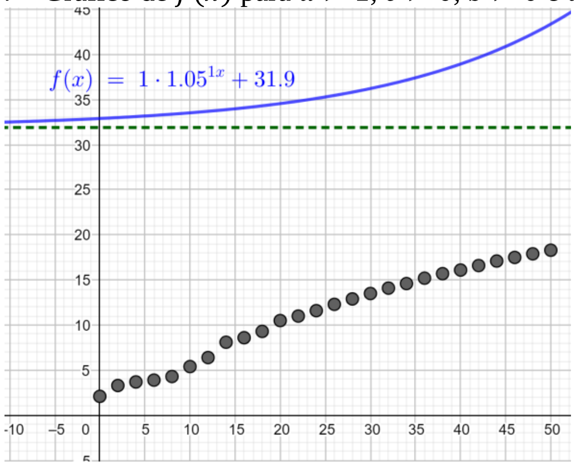
$a < 0$	$a = 0$	$0 < a < 1$
		
$a > 1$	$a = 1$	
		

Fonte: Autor, 2021

Esta é uma oportunidade de descobrir e discutir algumas propriedades aplicadas à base desta função, como sua condição de existência correlacionada à impossibilidade da base negativa e o estudo de sua monotonicidade.

Com o formato exponencial tomado pela função (por meio da manipulação de a), surge uma boa oportunidade de se discutir o coeficiente d. Deverão perceber que, na representação geométrica, a variação deste coeficiente provoca uma translação vertical e representa uma assíntota horizontal. Do ponto de vista da representação em língua natural (com relação à temperatura, por exemplo), espera-se que os estudantes assimilem que o d precisa ser o direcionamento da temperatura do líquido com o passar do tempo, de forma que fique próximo e estabilizado, ou seja, a temperatura ambiente, tal como na Figura 14, sendo a reta verde pontilhada a assíntota horizontal.

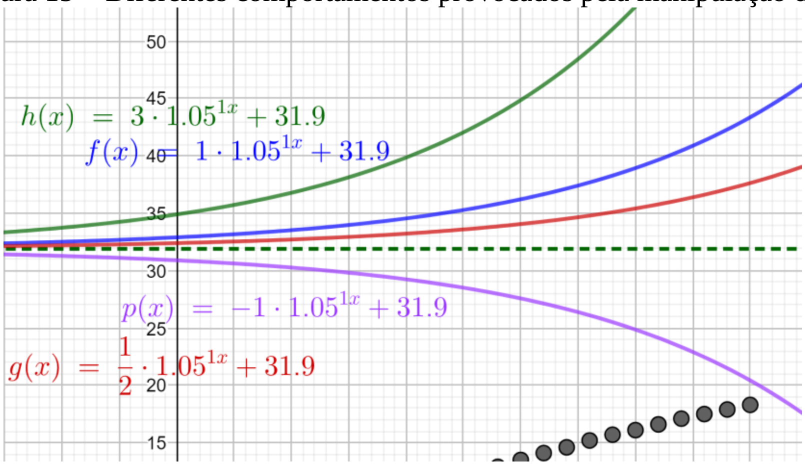
Figura 14 - Gráfico de $f(x)$ para $a > 1$, $c > 0$, $b > 0$ e $d = 31{,}9$



Fonte: Autor, 2021

Os coeficientes b e c provocam no gráfico o mesmo comportamento: alteram sua inclinação e seu status de crescimento, assim como o coeficiente a. Na perspectiva de uma aplicação, modificam a velocidade e a forma com a qual o fenômeno estudado muda até (ou a partir) de sua estabilidade (assíntota). Mantendo os demais coeficientes fixos ($a = 1{,}05$, $c = 1$ e $d = 31{,}9$) verificamos a influência de b sobre o gráfico, tal como na Figura 15.

Figura 15 - Diferentes comportamentos provocados pela manipulação de b

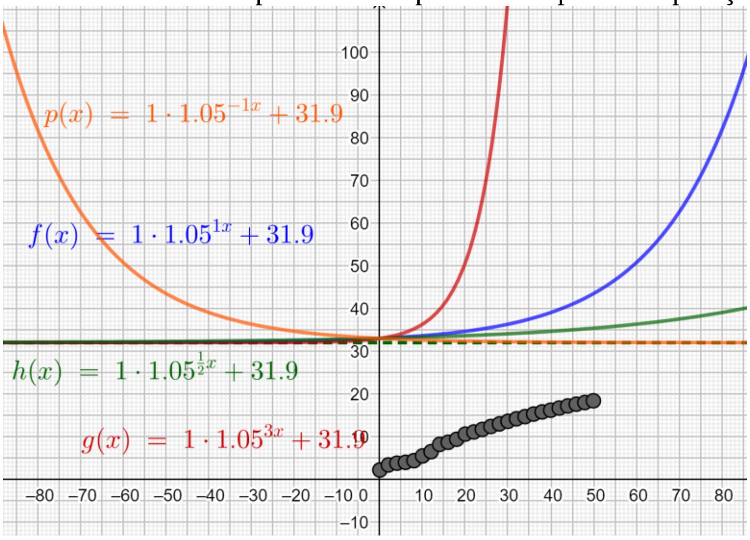


Fonte: Autor, 2021

Os alunos poderão perceber, ainda, analisando $p(x)$ e $f(x)$, que a função sofre uma reflexão em torno da assíntota para valores negativos de b. Além disso, é importante entenderem que para $b = 0$ temos $f(x) = d$, portanto, uma reta. De forma geral, almeja-se que percebam três comportamentos distintivos para b quando é negativo, nulo e positivo.

Podemos reescrever a função $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$ como $f(x) = b \cdot (a^c)^x + d$, usando algumas propriedades de potenciação. Desta forma, temos que c modifica potencialmente a base a e, por isso, incide sobre a inclinação da curva e sua condição de crescimento e decrescimento de forma mais "rápida". Mantendo os demais coeficientes fixos ($a = 1{,}05$, $b = 1$ e $d = 31{,}9$), verificamos a influência de c sobre o gráfico na Figura 16.

Figura 16 - Diferentes comportamentos provocados pela manipulação de c



Fonte: Autor, 2021

Os alunos poderão perceber, também, que valores negativos de c, enquanto os demais coeficientes constantes, provocam uma reflexão da função em torno do eixo das ordenadas (IF-USP, 2000), tal como evidenciado pela comparação entre as funções $p(x)$ e $f(x)$ na imagem anterior. Em suma, espera-se que anotem três comportamentos distintivos pra c, quando é negativo, nulo e positivo.

É colocada, ainda, uma questão que indaga o aluno sobre o que mais ele observou ao realizar esta tarefa. É uma oportunidade de instigá-lo a fazer o estudo de regularidades e trabalhar seu senso crítico sobre o que acabara de fazer. Todos ficarão livres para expor seus pontos de vista sobre a forma com a tarefa foi realizada e o professor poderá utilizar tais pareceres para verificar se os objetivos desta primeira etapa da proposta foram atendidos.

A seguir será discorrida a tarefa de estrutura fechada.

5.2.2 DISCUSSÃO DA TAREFA DE ESTRUTURA FECHADA

5.2.2.1 MEDINDO A TEMPERATURA AMBIENTE E DO LÍQUIDO

Empregamos o termômetro culinário Clink (Figura 17) que tem um funcionamento e comandos simples, além do baixo custo. Em nosso experimento a temperatura ambiente foi de 31,9°C.

Figura 17 - Início do experimento

Fonte: Autor, 2021.

Uma possiblidade de organização dos dados é, após a coleta, sua inserção em uma tabela. Realizando uma simulação e registrando os dados numéricos em intervalos de tempo de dois minutos, tal como os estudantes poderão fazer, chegamos à seguinte Tabela 8:

Tabela 8 - Registro do processo de aquecimento da água em função do tempo

Momento (Min)	Temperatura (°C)	Momento (Min)	Temperatura (°C)
0	2,1	26	12,3
2	3,3	28	12,9
4	3,7	30	13,5
6	3,9	32	14,1
8	4,3	34	14,6
10	5,4	36	15,2
12	6,4	38	15,7
14	8,1	40	16,1
16	8,6	42	16,6
18	9,3	44	17,1
20	10,5	46	17,5
22	11	48	17,9
24	11,6	50	18,3

Fonte: Autor, 2021.

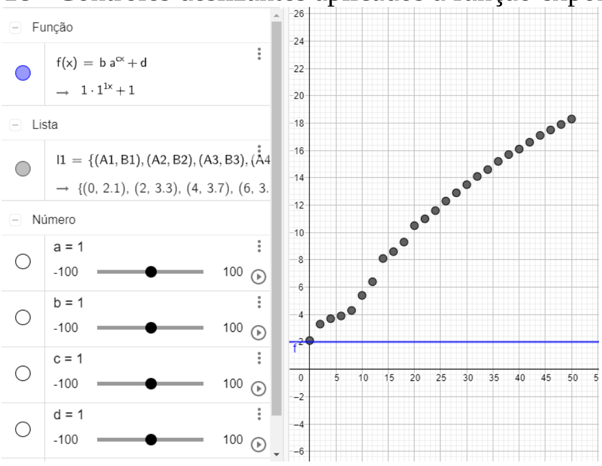
Aqui, percebemos o tratamento na representação tabular, cuja relevância está na organização e sistematização dos dados, para que seja possível seguir para as próximas etapas.

5.2.2.2 INSERÇÃO DOS PONTOS E DA FUNÇÃO NO GEOGEBRA E ENCONTRANDO UMA FUNÇÃO UTILIZANDO OS AJUSTES DOS COEFICIENTES

Ao inserir os pontos (momento, temperatura) no GeoGebra, os alunos estarão realizando uma conversão congruente da representação tabular para a gráfica por meio da técnica de construção de gráficos ponto a ponto.

No GeoGebra, ao inserir a função $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$, serão gerados controles deslizantes para os coeficientes b, a, c e d. Todos serão, inicialmente, por padrão, iguais a 1. Tais coeficientes são unidades significantes da representação algébrica, cuja manipulação permite variações comparativas, relativas à significação das representações semióticas. Isso permite a análise do comportamento do gráfico, ao se manipular cada coeficiente, mantendo os demais constantes (DUVAL, 2012c). Desta forma, os estudantes poderão estabelecer a relação existente entre gráfico e expressão algébrica, sem se prenderem a processos mecânicos, além de permitir que analisem as diferentes configurações visuais que a função exponencial pode assumir (como apresentado no Quadro 12 na introdução). A Figura 18 apresenta a simulação do resultado parcial deste experimento até esta etapa.

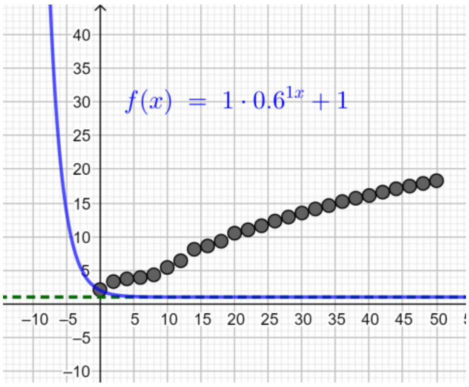
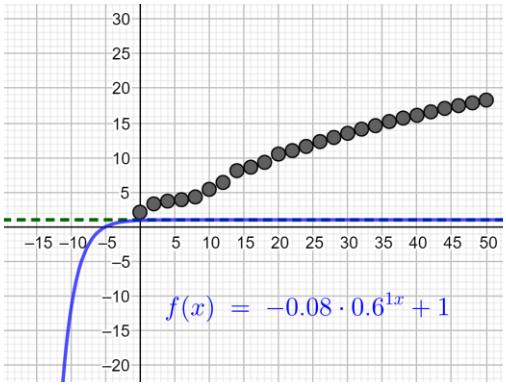
Figura 18 - Controles deslizantes aplicados à função exponencial



Fonte: Autor, 2021

Encontrar o modelo usando os ajustes dos controles deslizantes pode ser considerando um problema, porém o grau de desafio poderá ser menor após os estudantes fazerem o estudo dos coeficientes na tarefa de estrutura aberta do início da proposta. Neste momento, os estudantes terão liberdade para manusear os controles deslizantes dos coeficientes da função com base nas propriedades verificadas e discutidas até então. Seria interessante se, nesta etapa, todos voltassem para os coeficientes iguais a 1. Caso algum grupo opte, neste caso, por começar estabelecendo $0 < a < 1$, podem seguir a ordem de raciocínio sistematizado no Quadro 19 para se chegar à configuração visual desejada.

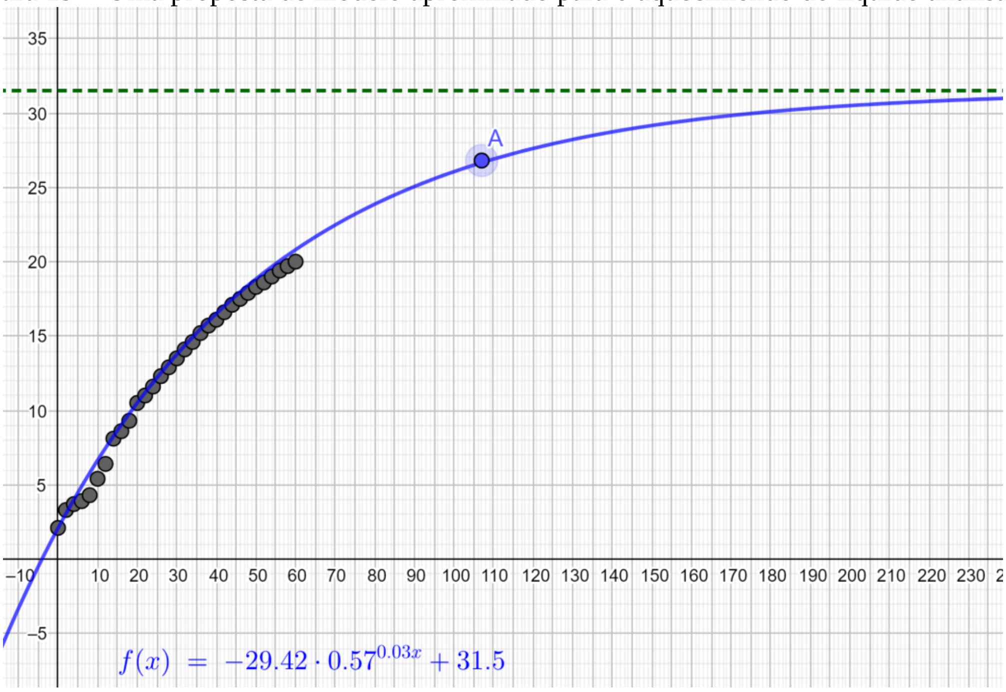
Quadro 19 - Uma forma de se modelar função para corresponder aos dados coletados usandos as propropriedades dos coeficientes

1) Estabelecendo $0 < a < 1$, temos: Uma função decrescente até a assíntota  	2) Em seguida, colocando $b < 0$, temos: Uma reflexão em torno da assíntota e, portanto, uma função crescente até a assíntota 

Fonte: Autor, 2021

Neste caso, já temos o comportamento necessário: a temperatura cresce até se estabilizar. O que é preciso ser feito agora é uma adequação dos valores dos coeficientes, se mantendo no Caso 04 do Quadro 12 (apresentado na introdução deste artigo), ou seja, $0 < a < 1$, $b < 0$ e $c > 0$. Deverão levar em conta, também, a adequação do coeficiente d como a temperatura ambiente ou o momento de estabilização. Desta forma, podemos chegar ao seguinte gráfico da Figura 19.

Figura 19 - Uma proposta de modelo aproximado para o aquecimendo do líquido analisado.



Fonte: Autor, 2021

Ajustamos os coeficientes almejando simular o que um estudante poderia fazer dado que, até então, não conheceria a lei de resfriamento de Newton e os significados exatos de alguns coeficientes (como a base igual a e). Além disso, em nosso experimento, monitoramos o líquido para além de 60 minutos e anotamos, após a função criada, o estado da temperatura no minuto 107 (para verificarmos a eficiência do nosso modelo). Assim, foi registrado $26{,}8°C$ que corresponde ao ponto A do gráfico anterior e reforça o grau de correlação entre a função e o comportamento natural térmico da água.

É interessante, assim, que os estudantes façam este exercício de verificação da validade de seus modelos tanto com relação aos dados já inseridos no gráfico, bem como, com o estado posterior do líquido em questão, dado que a projeção e previsão de dados constituem um dos principais objetivos da modelagem (BASSANEZI, 2018).

As representações algébrica e gráfica são muito associadas ao estudo das funções, e evocam a análise de congruência semântica entre estes dois registros, fenômeno este muito discutido por Duval (2011, 2012b). Como muito debatido, a passagem da representação algébrica para a gráfica da função do tipo exponencial pode ser feita pelo que o pesquisador chama de abordagem ponto a ponto, configurando sua congruência semântica.

Na análise inversa, contudo, percebemos, por exemplo, que a monotonicidade da curva exponencial está diretamente relacionada ao comportamento de três unidades significantes da expressão algébrica (a, b e c). Isso indica que não é preservada na análise Gráfico →Lei algébrica o critério da univocidade semântica, configurando, dessa forma, a não congruência semântica desta passagem. De uma forma geral, a conversão da representação gráfica para a algébrica exige uma interpretação global (DUVAL, 2011).

Tal interpretação depende do reconhecimento de todos os valores das variáveis visuais do gráfico e de seus correspondentes na expressão simbólica. Nesta proposta, a análise simultânea da correlação entre coeficiente e a curva por meio do GeoGebra permite que o estudante faça o estudo dessa relação, explorando - a, por conta própria.

5.2.2.3 ENCONTRANDO UMA FUNÇÃO UTILIZANDO O MODELO ALGÉBRICO PROPOSTO POR NEWTON

Em seguida, vem o trabalho formal com a Lei de Resfriamento propriamente dita, no qual os estudantes conhecerão a expressão algébrica e seus reais coeficientes dados por:

$$T(t) = (T_\circ - T_m)e^{k \cdot t} + T_m$$

em que $T_\circ$ é a temperatura inicial do corpo (nosso caso, $2{,}1°C$) e T_a a temperatura ambiente ($31{,}9°C$) com $k < 0$. Esta questão assume o status de problema por sua natureza fechada e grau mais elevado de desafio, que tem como principal virtude oferecer aos estudantes uma efetiva experiência matemática.

Além da relevância e necessidade dos momentos de exposição em práticas exploratórias, Ponte (2005) também salienta a importância da reflexão e debate sobre o objeto matemático, com o qual se está trabalhando. Isso é necessário para que não haja o risco de informações importantes não serem evidenciadas ou que os alunos fiquem confusos sobre o que estão aprendendo e com qual finalidade.

Ao serem apresentados ao modelo de Newton acima, um dilema pode surgir: esta função (pensando no modelo $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d$) está definida para $a = e$, ou seja, $a > 1$, além de $c < 0$, enquanto que em nosso modelo encontrado na Figura 19, temos $0 < a < 1$ e $c > 0$. Tal como nós, algum grupo pode chegar neste mesmo resultado, apesar de também ser possível que, experimentalmente, cheguem, aproximadamente, ao modelo de Newton. A resposta para isto está no Quadro 12, exibido na introdução deste artigo, no qual apresentamos as configurações gráficas visualmente distintas da função do tipo exponencial. No Caso 04, afirmamos que este comportamento (crescimento até uma assíntota) ocorre em dois casos. Um deles foi o encontrado em nossa manipulação ($0 < a < 1$, $b < 0$ e $c > 0$) e o outro é o que corresponde à lei de Newton ($b < 0$, $a > 1$ e $c < 0$).

Além de esta equivalência poder ser verificada graficamente por meio dos controles deslizantes, é possível constatá-la por um tratamento algébrico sobre a função f encontrada

(Figura 19). Desse modo, apliquemos a mudança de base sobre f, desconsiderando a constante $d = 31{,}5$, por ela ser a mesma em ambos os casos (pois, de todo modo, a temperatura ambiente não pode sofrer mudanças). Desta forma, temos:

$$h(x) = y = -29{,}42 \cdot 0{,}57^{0{,}03 \cdot x}$$

Aplicando ln em ambos os membros da equação, obtemos

$$\ln y = \ln(-29{,}42 \cdot 0{,}57^{0{,}03 \cdot x})$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln -29{,}42 + \ln 0{,}57^{0{,}03 \cdot x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln -29{,}42 + 0{,}03 \cdot \mathrm{x} \cdot \ln 0{,}57$$

$$\Rightarrow y = e^{\ln -29{,}42 + 0{,}03 \cdot x \cdot \ln 0{,}57}$$

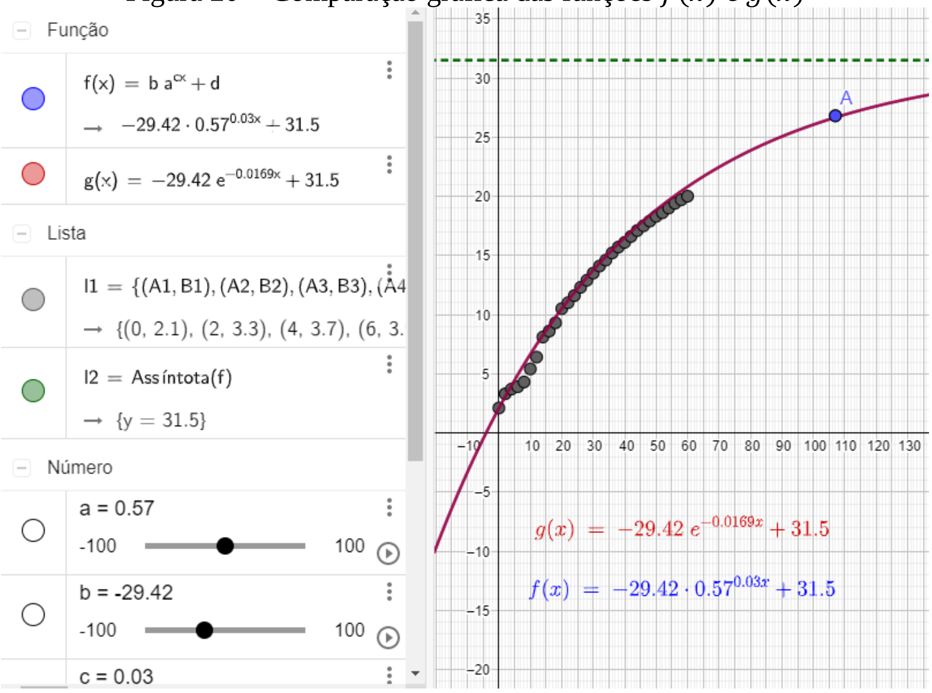
$$\Rightarrow y = e^{\ln -29{,}42} \times e^{0{,}03 \cdot x \cdot \ln 0{,}57}$$

Usando a propriedade que afirma que $e^{\ln a} = a$ e que $\ln 0{,}57 \cong -0{,}5621$, encontramos

$$y = -29{,}42 \cdot e^{-0{,}01686 \cdot x}$$

Logo, $g(x) = -29{,}42 \cdot e^{-0{,}01686x} + 31{,}5$ é uma função algebricamente equivalente à $f(x)$, como ilustrada na Figura 20.

Figura 20 - Comparação gráfica das funções $f(x)$ e $g(x)$



Fonte: Autor, 2021

Para finalizar, os estudantes podem encontrar tal modelo usando estritamente a função algébrica de resfriamento. Aqui, inclusive, eles poderão constatar que o coeficiente b representa a diferença entre a temperatura ambiente e a temperatura inicial do corpo resfriado, uma outra correspondência entre as representações algébrica e em língua natural (enunciado) deste objeto.

Substituindo os demais coeficientes e usando o ponto $(30, 13.5)$ para encontrar a constante k da lei, temos:

$$(2{,}1 - 31{,}9) \cdot e^{30 \cdot k} + 31{,}9 = 13{,}5$$

$$-29{,}8 \cdot e^{30 \cdot k} = 13{,}5 - 31{,}9$$

$$\Rightarrow e^{30 \cdot x} = \frac{-18{,}4}{-29{,}8}$$

$$\Rightarrow \ln e^{30 \cdot k} = \ln \frac{18{,}4}{29{,}8}$$

$$\Rightarrow 30 \cdot k \cdot \ln e = \ln \frac{18{,}4}{29{,}8}$$

$$\Rightarrow 30 \cdot k = \ln \frac{18{,}4}{29{,}8}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln \frac{18{,}4}{29{,}8}}{30}$$

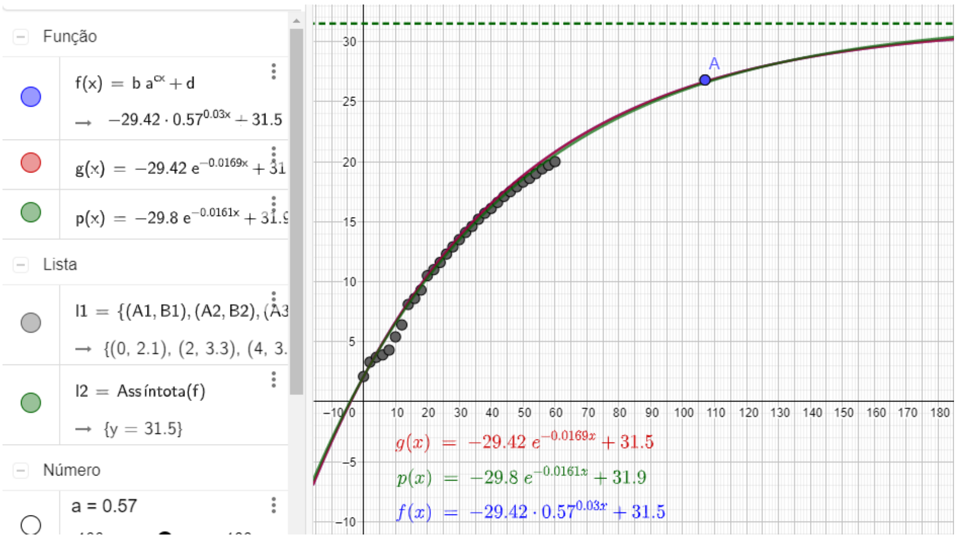
$$\Rightarrow k \cong -0{,}01607$$

Logo, a função de resfriamento, usando a lei formal, será dada por

$$p(x) = -29{,}8 \cdot e^{-0{,}01607 \cdot x} + 31{,}9$$

graficamente representada, tal como a Figura 21::

Figura 21 - Comparação gráfica entre as três funções encontradas para o comportamento térmico analisado



Fonte: Autor, 2021

Estes últimos tratamentos algébricos exigem, de fato, a aplicação de algumas propriedades de potências e logaritmos. Por isso, sua aplicação depende de uma série de fatores relacionados à turma e seus conhecimentos prévios. Esta proposta é recomendada, no entanto, para um encerramento do assunto, após, por exemplo, a aplicação da Proposta 01 aqui apresentada, quando os alunos já tenham tido algum contato precedente básico com as funções, com comportamento exponencial. Também pode ser aplicada antes ou durante o estudo da função logarítmica, dado que, geralmente, é posterior à função exponencial e mantém com esta uma relação estreita por se constituir como sua inversa.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo foi propor e analisar tarefas matemáticas envolvendo as funções do tipo exponencial com o emprego do *software* GeoGebra. Para isso, nos ancoramos nos estudos sobre o conceito e classificação de tarefas de Ponte (2005) e na TRRS de Duval (2017).

A partir da proposição das tarefas, acreditamos que um dos principais aspectos que o professor deve levar em conta no momento de planejar e executar qualquer intervenção em sala de aula (desde a aula mais comum até àquela envolvendo experimentos) é a natureza e a diversificação das tarefas que irá aplicar. Para isso, é necessário considerar o tema proposto, os objetivos de aprendizagem, a competência e as habilidades que deseja explorar, além de considerar as características cognitivas e sociais dos alunos com quem trabalhará.

Nos concentramos nos tipos de tarefas definidos por Ponte (2003, 2005 e 2014), que considera a existência de virtudes específicas relacionadas ao emprego de cada tarefa, como aquelas de natureza mais acessível (explorações e exercícios). Tal fato permite aos estudantes um certo grau de sucesso, favorecendo sua autoconfiança. Além disso, há propostas que se beneficiam de tarefas mais desafiantes (problemas e investigações), possibilitando uma efetiva experiência matemática aos estudantes.

As funções exponenciais são modelos aplicados para análise e descrição de uma série de fenômenos físicos, químicos e econômicos e isto é um dos principais fatores que embasam a relevância epistemológica do conteúdo que é enfatizada na BNCC (BRASIL, 2018) e, consequentemente, nos livros didáticos. Assim, neste trabalho, nos concentramos em duas propostas de tarefas, pensando em como introduzir o conteúdo (Proposta 01) e como consolidá-lo (Proposta 02). Esperamos, assim, que a partir da proposição apresentada, ao desenvolvê-la em situações reais de sala de aula, o professor tenha uma orientação de como explorar todas as potencialidades do conteúdo levando em conta a natureza das tarefas supracitadas, seus registros de representação semiótica e a ferramenta GeoGebra.

O GeoGebra permite o trabalho simultâneo com as representações tabular, algébrica e gráfica destas funções, além de viabilizar a relação delas com o contexto no qual se discute o conteúdo, ou seja, sua representação em língua natural. Duval (2012c), inclusive, ratifica que esta representação não deve ser negligenciada no ensino de Matemática na Educação Básica, por ser tão essencial quanto os demais tipos, particularmente aqueles em que os tratamentos e cálculos são possíveis.

Poder entender a correlação existente, principalmente, entre expressão algébrica, gráfico e contexto (de forma simultânea), é um dos aspectos que justificam a importância do GeoGebra no momento de permitir aos alunos reconhecer, aqui, a função exponencial e as funções do tipo exponencial em mais de um registro. Nessa direção, poderá perceber a relação existente, por exemplo, entre um coeficiente algébrico, a inclinação geométrica e a velocidade com a qual a temperatura de um determinado líquido aquece ou esfria, até sua temperatura ambiente que, por sua vez, se constitui como uma unidade significante distintiva que na expressão algébrica aparece como uma constante que se soma a uma função do tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^{c \cdot x}$ e que no plano cartesiano é uma assíntota horizontal.

O professor pode, então, mediar a exploração de uma série de conceitos, ao mesmo tempo, fazendo conexões entre registros de representação semiótica com os alunos, podendo estudar e analisar o que a variação de uma unidade significante em um altera e influi no outro (DUVAL, 2011, 2012b, 2017). O caráter experimental que o GeoGebra atribui a aula é, desta forma, um elemento didático importante, que permite à classe o desenvolvimento de sua autonomia e que vivenciem e simulem experiências matemáticas exploratórias centradas em conjecturas, testes e descobertas. Tal ação será um contraponto ao *ensino direto* discutido por Ponte (2005), no qual as informações lhe são dadas prontas e tem como característica marcante a passividade do aluno.

Desta forma, o ensino exploratório é beneficiado pela articulação de registros das funções exponenciais com suporte do GeoGebra, por meio do qual é possível instigar discussões interessantes entre professor e alunos, sem que estes fiquem presos à respostas direcionadas ou à perguntas objetivas do docente. Propostas como a 02 permitem este tipo de situação, por colocar os estudantes como sujeitos ativos no processo de matematizar um comportamento natural e que lhes permite descobrir, por conta própria, certas propriedades e, principalmente, se depararem com obstáculos que podem ser excelentes motivadores didáticos.

Ratificamos a importância da postura do professor neste tipo de intervenção que não deve ser esporádica e nem ficar restrita a determinados métodos. O fato de não ser a única figura central que veicula a aula e que propõem os questionamentos, não limita a ação do docente, mas sim, expande suas possiblidades de interação com a classe e abordagem do assunto. Fica claro, aqui, que tal metodologia exploratória não exclui a aplicação de tarefas de estrutura fechada, muito menos a necessidade da aula expositiva.

Em vários momentos de ambas as propostas, surgem brechas que necessitam tanto de uma boa explicação teórica do assunto (assíntota, mudanças de base, aspectos históricos, propriedades e demonstrações básicas sobre potências e logaritmos) como também de tarefas que, antes ou depois de cada proposta, objetivem compreender e praticar alguns conceitos (exercícios e problemas). Tudo é uma questão de diversificar e saber aplicar no momento certo cada tipo de tarefa, de quanto usar e se explorar criticamente o livro didático, além de identificar tipos de propostas que beneficiam o estudo de um dado conteúdo.

Lembrando, ainda, que, mesmo em se tratando de tarefas de estrutura aberta, é essencial que o professor mantenha certo grau de condução da aula, dado que é fácil os estudantes se perderem em devaneios e não conseguirem chegar às competências desejadas, em decorrência do aspecto muito "livre" da aula.

Esta pesquisa pode inspirar outros pesquisadores e professores a realizar estudos de outros objetos matemáticos, com a mesma abordagem ou outros métodos exploratórios envolvendo as funções com comportamento exponencial, por modelarem uma série de outros fenômenos que podem ser replicados ou analisados em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**. 2. ed. Sp: Pioneira Thompson Learning, 1999. Disponível em: http://gephisnop.weebly.com/uploads/2/3/9/6/23969914/0_metodo_nas_ciencias_naturais_e_sociais_-_pesquisa_quantitativa_e_qualitativa.pdf. Acesso em: 15 jan. 2021.

BASSANEZI, R. C. Ensino - aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 4. ed. São Paulo: **Contexto**, 2018.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, MEC / CONSED / UNDIME, 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. SAEB [recurso eletrônico]. Brasília: INEP, 2019. Disponível em: https://bit.ly/2U6cxoB. Acesso em: 15 de out. 2020.

CARDOZO, D.; POSSAMAI, J. P. The Dimensions of Making Sense: the understanding of exponential functions from an investigative activity. **Acta Scientiae**, [S.L.], v. 21, n. 4, p. 2-19, 4 set. 2019. Galoa Events Proceedings. http://dx.doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss4id4565. Disponível em: 10.17648/acta.scientiae.v21iss4id4565. Acesso em: 01 jan. 2021.

CARVALHO, R. L. **Contribuições do campo conceitual multiplicativo para a formação inicial de professores de matemática com suporte das tecnologias digitais**. 2017. 182 f.

Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/22155. Acesso em: 18 out. 2020.

COELHO, J. R. P. **O geogebra no ensino das funções exponenciais**. 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Ciênciasetecnologia, Universidadeestadualdo Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016José-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 01 jan. 2021.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreenção em matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Ancântara. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2017. p. 11-34.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 1, p. 97-117, 16 jul. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 6, n. 2, p. 96-112, 10 maio 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamentoRegistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 2, p. 266-297, 13 dez. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

DUVAL, R.; MORETTTI, Méricles Thadeu. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, [S.L.], v. 13, n. 2, p. 1-27, 12 dez. 2018. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2018v13n2p1.

FARIA, T. A.; SOUZA JÚNIOR, J. C. de; CARDOSO, Andréa. Matemática Dinâmica para compreender a função exponencial. **Sigmae**, Alfenas, v. 5, n. 1, p. 1-11, dez. 2016. Disponível em: https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/view/509. Acesso em: 02 out. 2020.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da Ufrgs, 2009. 120 p. Disponível em: http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf. Acesso em: 20 abr. 2021.

GIL, A.C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GOLDONI, E. K. S.. Matemática aplicada ao estudo da área ocupada pelo crescimento de micro-organismos como ferramenta para o ensino da função exponencial. **Revista Professor de Matemática On Line**, [S.L.], v. 7, n. 02, p. 166-174, nov. 2019. Sociedade Brasileira de Matematica. http://dx.doi.org/10.21711/2319023x2019/pmo712.Acesso em: 02 nov. 2020.

HILLESHEIM, S. F.; MORETTI, Méricles Thadeu. Alguns aspectos da noção da congruência semântica presentes no ensino dos números inteiros relativos. **Revista Espaço Pedagógico**, [S.L.], v. 20, n. 1, p. 119-135, 4 out. 2013. UPF Editora. http://dx.doi.org/10.5335/rep.2013.3511. Disponível em: https://doi.org/10.5335/rep.2013.3511. Acesso em: 15 jan. 2021.

HOHENWARTER, M.; FUCHS, K. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In: Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference. 2004. Disponível: <https://archive.geogebra.org/static/publications/pecs_2004.pdf/>. Acesso em: 22 ago. de 2020.

IF-USP (São Paulo). **FUNÇÕES EXPONENCIAIS**. 2000. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/exponencial/fexponencial.htm. Acesso em: 20 fev. 2021.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reai**s. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MARTINS, T.; DOERING, L.; BARTZ, M. Utilização do GeoGebra na resolução de problemas físicos: uma possibilidade para a modelagem matemática na educação básica. **Revista Thema**, [S.L.], v. 14, n. 2, p. 225-235, 23 maio 2017. Instituto Federal de Educacao, Ciencia e Tecnologia Sul-Rio-Grandense. http://dx.doi.org/10.15536/thema.14.2017.225-235.457. Disponível em: http://dx.doi.org/10.15536/thema.14.2017.225-235.457. Acesso em: 01 jan. 2021.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem em matemática. **Contrapontos**, Itajaí, v. 2, n. 3, p. 343-362, dez. 2002. Disponível em: https://www6.univali.br/seer/index.php/rc/article/view/180/152. Acesso em: 02 dez. 2020.

PIANO, C. **Diferentes abordagens para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas**. 2016. 112 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2016. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1982. Acesso em: 15 out. 2020.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**, Lisboa, v. 24, n. 2, p. 111-135, out. 2015.. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/22628. Acesso em: 02 nov. 2020.

PONTE, J. P. da. Gestão curricular em Matemática. O Professor e O Desenvolvimento **Curricular**, Lisboa, v. , n. , p. 11-34, jan. 2005. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/3008. Acesso em: 02 nov. 2020.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, João Pedro da (org.). Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. **Lisboa**: Fct, 2014. Cap. 1. p. 13-30.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; BRANCO, N. Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática. **Educação Matemática em Foco**, Lisboa, v. 01, n. 01, p. 1-21, mar. 2011. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/260987156_Tarefas_de_exploracao_e_investigacao_na_aula_de_matematica. Acesso em: 15 jan. 2021.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. **Igisp**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 74-89, jan. 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8370. Acesso em: 01 jan. 2021.

SANTOS, A. T. dos; BIANCHINI, B. L. Análise das estratégias utilizadas pelos estudantes no estudo de funções logarítmicas e exponenciais. **Vidya**, Santa Maria, v. 32, n. 1, p. 35-50, jun. 2012. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/265/240. Acesso em: 01 jan. 2021.

SIAS, D. B.; TEIXEIRA, R. M. R. -. RESFRIAMENTO DE UM CORPO: a aquisição automática de dados propiciando discus- sões conceituais no laboratório didá- tico de física no ensino médio. **Ens. Fís**, ., v. 23, n. 3, p. 360-381, dez. 2006. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6267/5803. Acesso em: 01 jan. 2021.

SILVA, D. S. da; LAZZARIN, J. R. Funções: construindo conceitos a partir da análise gráℵca. **Revista Ciˆencias Exatas e Naturais**, Paraná, v. 01, n. 01, p. 91-104, jun. 2018. Disponível em: https://revistas.unicentro.br/index.php/RECEN/about/editorialPolicies#focusAndScope. Acesso em: 01 jan. 2021.

SILVA, W. O. Kit Virtual de Apoio: uma proposta para o ensino de gráficos de funções. Colbeduca, Joinville, v. , n. , p. 594-606, set. 2016. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8412. Acesso em: 02 out. 2020.

SOUSA, E. S. de; VIALI, L.; RAMOS, M. G. Construção e análise de modelos exponenciais de forma significativa: uma experiência de ensino em sala de aula. Revista Exitus, [S.L.], v. 7, n. 2, p. 55-75, 26 abr. 2017. Universidade Federal do Oeste do Para. http://dx.doi.org/10.24065/2237-9460.2017v7n2id302. Disponível em: http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/302. Acesso em: 02 out. 2020.

ZILL, D. G.; CULLEN. **Equações Diferenciais**: volume 01. São Paulo: Pearson, 2001.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo geral compreender a abordagem sobre o ensino de funções exponenciais, associadas ao uso do GeoGebra, no Ensino Médio em produções científicas, em livros didáticos e em tarefas matemáticas. Para isso, estruturamos este estudo em três etapas, cada uma referente a um objetivo específico, que se materializou em um capítulo no formato de artigo : (i) investigar como a abordagem sobre ensino de função exponencial vinculado ao uso do GeoGebra vem sendo discutida em artigos publicados entre os anos 2010 - 2019 em periódicos brasileiros da área de Ensino, cujo escopo contenha o ensino de Matemática e/ou de ciências; (ii) investigar os tipos de tarefas matemáticas, bem como as representações semióticas envolvidas, nos capítulos sobre função exponencial de três livros didáticos do 1º ano do ensino médio de coleções distintas selecionados no atual PNLD (2016 – 2020) por escolas públicas da cidade de Barreiras – BA; (iii) propor e analisar tarefas matemáticas, bem como suas representações semióticas, envolvendo as funções do tipo exponencial com o emprego do software GeoGebra. Assim, considerando o formato multipaper, no total, foram produzidos três artigos, cada um correspondente a um objetivo específico.

Verificamos que, na literatura científica brasileira mais recente, há uma preocupação comum em estabelecer as relações entre as representações algébrica e gráfica das funções com comportamento exponencial. Para tanto, além das pesquisas concentradas exclusivamente nas definições e propriedades destas funções, há um grande quantitativo de estudos que optam pelo trabalho em contexto de realidade. Focam, assim, na construção de modelos para fenômenos naturais, como forma de conquistar o interesse do aluno por meio da relevância empírica do conteúdo.

Verificamos, de fato, uma grande diversidade de aplicações centradas nestas funções, tais como na matemática financeira (no estudo de juros compostos), na biologia (na reprodução de bactérias) e na física (na termologia). Por meio disso, também averiguamos que as estratégias de intervenção laboratoriais e experimentais são métodos recorrentes no estudo dinâmico das funções exponenciais. Isso chama a atenção para a necessidade da transversalidade e interdisciplinaridade da disciplina de Matemática. Propostas, com algumas destas aplicações, se realizadas com a parceira de professores e demais colegas da profissão docente de outras áreas (professores de Ciências Biológicas, de Física, etc.), tendem a ser promissoras.

Como discutido na introdução desta dissertação, não há um consenso sobre a definição das funções do tipo exponencial, mas fato é que são estas as mais empregadas como tais modelos para descrição de fenômenos naturais. Isso evidenciou a importância de abordagens, em sala de aula, que explorem a correlação do comportamento deste tipo de função, principalmente, o gráfico, explorando a variação de seus coeficientes, levando em conta o contexto que descrevem.

Neste sentido, a principal relevância, apontada pelas pesquisas, do emprego do GeoGebra em atividades com as funções exponenciais é justamente o caráter experimental que este programa imprime em sala aula. Por intermédio de seus recursos (tais como os controles deslizantes), os estudantes podem manipular e analisar a relação direta entre gráfico, álgebra e contexto, exercendo, assim, sua autonomia. A otimização de tempo que o uso deste *software* permite é outra virtude constatada. Certos tipos de tarefas (como as de construções e projeções gráficas, comparações de modelos, análises de regressão e verificações de erros) se tornam mais ágeis e dinâmicas com o uso desta ferramenta.

Constatamos que o uso do GeoGebra não invalida ou substitui a necessidade da exploração algébrica e/ou manual das propriedades das funções exponenciais. O que ocorre é uma complementação. Em diversos momentos de uma atividade com este tipo de programa vão surgir situações que exigem uma boa aula expositiva, relacionada a uma verificação ou demonstração algébrica, por exemplo. É exigido, de forma geral e unânime, um bom planejamento por parte do professor, o qual deverá saber os momentos adequados para o uso do GeoGebra, para tarefas laboratoriais ou para estudos e construções estritamente de natureza algébrica. Adjacente a esta requisição, o professor precisa ter tanto domínio sobre este *software*, como também conhecimento básico de informática, de modo que saiba lidar com certas contingências e adversidades, como projeção de tela, erros de registro ou problemas com a instalação do programa. Além disso, o docente também precisa ter conhecimento didático pedagógico sobre o uso do GeoGebra, sabendo o momento certo e as devidas maneiras de o empregar, de forma que possa suprir as necessidades epistemológicas de seus alunos.

No segundo artigo, investigamos como se dá a abordagem das tarefas sobre as funções exponenciais nos livros didáticos. Com relação à sua natureza, a principal constatação foi a unanimidade de tarefas de estrutura fechada, com uma maioria de problemas. Apesar de serem importantes e terem seu lugar até em propostas de ensino exploratório, é importante o professor ter cuidado com a excessiva proposição de exercícios ou problemas, pois podem tornar a aula pouco desafiadora (sem que os estudantes avancem no estudo do conceito) ou desestimulante (no caso de níveis de dificuldade para os quais não tenham conhecimentos mínimos e ferramentas prévias para tentar resolver).

A consequente ausência de tarefas de estrutura aberta nos levou a constatar a necessidade de o professor não restringir seu trabalho apenas ao uso do livro didático. Isso é dito levando em conta que, da mesma forma que há benefícios na proposição de exercícios e problemas (desenvolvimento do raciocínio matemático, da autoestima e da confiança), também há uma série de virtudes vinculadas às explorações e investigações. Dentre estas, estão a autonomia e a capacidade do aluno de lidar com situações complexas, que exigem, mais do que a aplicação direta de definições e propriedades, abstrações, conjecturas, análises e testes que irão norteá-lo sobre os procedimentos mais adequados que os levarão para as respostas devidas.

Confrontando os resultados dos dois primeiros artigos, verificamos que uma alternativa para complementação do trabalho com o livro didático, e consequentemente a diversificação dos tipos de tarefas em sala de aula, é a utilização do GeoGebra. A maioria das tarefas envolvendo o *software*, nas pesquisas filtradas, tem em comum o fato de assumirem o caráter investigativo/exploratório. Isso é verificado em tarefas que propõem a exploração de propriedades das funções exponenciais por meio da investigação da variação de seus coeficientes algébricos. Tais tarefas provocam, nos alunos, reflexões que permitem que cheguem, naturalmente, ao conceito matemático formal do que estão explorando (como as condições de crescimento e decrescimento de temperatura). As oficinas laboratoriais, nas quais os estudantes deveriam coletar dados e modelar uma função do tipo exponencial que melhor descresse um determinado comportamento, também podem assumir tal estrutura aberta.

Com relação à análise das representações semióticas, constatamos a prevalência e privilégio majoritário da representação algébrica, seguida das representações em língua natural e gráfica. Costumeiramente, o ensino de funções é muito associado à álgebra, diferente do que ocorre com a geometria plana, por exemplo, muito associada à representação visual. Mesmo assim, um equilíbrio maior entre as representações semióticas pode beneficiar o aluno, principalmente no que concerne às operações e transformações aplicadas sobre estas. Ainda, averiguamos uma maioria de tarefas envolvendo conversões, o que, a princípio, é um resultado interessante do ponto de vista das representações semióticas, dado que são essas operações que concedem informações mais precisas sobre a forma com o aluno está aprendendo. Contudo, é importante o cuidado com as abordagens para tais conversões, sendo que as que

A forte relação entre as funções exponenciais e suas aplicações também justifica uma maioria de conversões que partem da língua natural para o registro algébrico, seguida das que saem da representação algébrica para a gráfica. Esta última conversão também está muito associada ao trabalho com as funções, porém Duval (2012b) sempre realça a importância do sentido inverso (aqui com menor frequência), por fazer surgir o fenômeno da não congruência semântica, também essencial para o processo de análise do desempenho dos estudantes.

Igualmente, confrontando estes resultados (com relação às representações envolvidas nas tarefas dos livros didáticos) com os obtidos no primeiro artigo, percebemos que o GeoGebra é um recurso apropriado no momento em que se deseja explorar a análise concomitante de diferentes representações semióticas das funções exponenciais, em especial as algébrica, gráfica e em língua natural. O *software*, inclusive, é citado em todos os livros, seja no corpo do capítulo sobre o conteúdo ou nas orientações didáticas para o professor apresentadas ao final do livro.

Os resultados dos artigos 01 e 02 nos permitiram entender como ocorre a abordagem da função exponencial no ensino médio, tanto na literatura científica brasileira mais recente, associada ao GeoGebra, e nos livros didáticos, com foco na natureza e nas representações semióticas envolvidas em suas tarefas. Isso nos permitiu refletir e propor, no artigo 03, uma abordagem envolvendo as funções exponenciais com suporte didático do GeoGebra, para alunos do ensino médio.

Fizemos isto nos preocupando com a diversificação das tarefas (privilegiando o ensino exploratório, apesar de fazer uso de todos os tipos de tarefas, conforme os objetivos didáticos de cada situação) e com a importância da devida exploração dos registros de representação semiótica envolvidos (dando atenção não apenas aos tratamentos, mas principalmente, às conversões). Usamos estudos contextualizados e/ou empíricos como vertente e recurso que poderão despertar o interesse dos alunos e revelar a importância destas funções na vida real.

Este estudo pode inspirar outras pesquisas que: objetivem explorar o formato *multipaper* com base nas virtudes científicas que podem proporcionar; queiram investigar outros tipos de abordagens metodológicas sobre a função exponencial, tanto no meio acadêmico matemático quanto em livros didáticos, associada a outras ferramentas ou teorias; busquem aplicar a mesma abordagem metodológica deste estudo à outros objetos matemáticos, considerando que o GeoGebra é um recurso amplamente discutido e aplicado a diversos assuntos e que o livro didático, por ser uma ferramenta universal do professor de Matemática, precisa e deve ser sempre foco de discussões que visem torná-lo o mais eficiente possível.

A seguir, apresentamos algumas orientações didáticas sobre as tarefas propostas no artigo 03, configurando assim um produto educacional destinado aos professores da Educação Básica, referente ao ensino de funções exponenciais.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR SOBRE AS TAREFAS MATEMÁTICAS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL

1. APRESENTAÇÃO

Este material se constitui como um produto educacional oriundo dos resultados de uma dissertação, em formato *multipaper*, desenvolvida no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Campus UFOB. Com o objetivo geral de investigar a abordagem sobre funções exponenciais no Ensino Médio (em produções científicas, em livros didáticos e em tarefas matemáticas), foi realizado um levantamento em periódicos brasileiros da área de ensino à procura de artigos científicos que abordassem as funções exponenciais associadas ao *software* GeoGebra, além de uma análise em três livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio aprovados pelo PNLD (2016 – 2020), fazendo um estudo das tarefas sobre as funções exponenciais.

Os resultados oriundos destes dois objetivos específicos nos permitiram construir uma abordagem com duas propostas envolvendo as funções exponenciais, com suporte do GeoGebra. Como ferramentas teóricas, nos embasamos nos estudos de Duval (2017), sobre as representações semióticas, e Ponte (2005), sobre a natureza das tarefas. Tal abordagem encontra-se na forma de um artigo cientifico intitulado: "FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA PROPOSIÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS". Aqui, além do que foi apresentado neste artigo, incluímos algumas orientações centradas na forma como o professor deve mediar as discussões, como deve lidar com questionamentos dos alunos e algumas situações esperadas no decorrer da proposição das tarefas. Este guia é, portanto, um complemento ao artigo supracitado. Logo, recomendamos a leitura conjunta do artigo e deste guia, antes de aplicar as propostas em sala de aula, para melhor interação sobre os preceitos teóricos e metodológicos que envolveram esta abordagem.

Importante ressaltar que ambas as propostas podem ser aplicadas tanto no ensino presencial quanto no remoto, desde que sejam consideradas algumas adequações no planejamento e, consequentemente, na metodologia de ambas. A Proposta 02 é a que mais exige reajustes, dado que sua realização necessita de materiais mais específicos, em especial, um termômetro de precisão. Mesmo assim, é possível desenvolvê-la virtualmente e traremos mais à frente algumas sugestões para tal.

Além disso, para o caso do ensino remoto, recomendamos que os professores se atenham a detalhes metodológicos que fazem grande diferença no momento de aplicar ambas as propostas. Solicite que todas as câmeras dos estudantes estejam ligas e/ou suas telas sejam compartilhadas durante as dinâmicas. Esta é uma garantia de envolvimento mínimo por parte da classe. Se preocupe em solicitar a participação do maior e mais variado número de estudantes durante a aula. Na perspectiva de uma dinâmica exploratória, marcada pelas conjecturas e reflexões que devem partir dos estudantes, é essencial que seja mantida tal participação. Procure mantê-los sempre alertas, de forma que poderão ser solicitados a participar a qualquer momento. Evite, assim, estabelecer ordens de apresentação. Isso, principalmente no ensino remoto, pode levar a acomodação e desleixo nos momentos em que a vez seja do outro.

2. A FUNÇÃO EXPONENCIAL

A definição algébrica da função exponencial, propriamente dita, costumeiramente encontrada nos livros didáticos, é a aplicação $f(x) = a^x$, com $a > 0$. Há, ainda, um conjunto de funções fruto de composições desta função com outras, como a afim, que geram as chamadas funções do tipo exponencial. Um exemplo é a função dada por $g(x) = b \cdot a^{cx} + d$. Do ponto de vista puramente matemático, a diferença entre ambas estas funções é que g não obedece a todas as mesmas propriedades aplicadas à f, como a que estabelece que $f(nx) = f(x)^n$. O mesmo não vale para $g(nx)$.

Mesmo que o livro didático não faça esta diferenciação, certamente as funções do tipo exponencial estão presentes em suas tarefas, dado que aquelas centradas em contexto de realidade (aplicações em biologia e física, por exemplo) terão como modelos justamente este tipo. Cientes do pouco tempo destinado à discussão das funções exponenciais no Ensino Médio, conforme alerta Toledo (2018), recomendamos que, ao menos, seja dada atenção ao estudo de funções como g, de modo que fique bem clara a relação entre a variação de seus coeficientes algébricos com seu gráfico e sua representação em língua natural (relativa ao enunciado de uma tarefa).

Neste sentido que surge a relevância tanto do GeoGebra quanto das representações semióticas (DUVAL, 2017), por darem suporte técnico e teórico para aplicar e mediar determinadas abordagens e analisar o processo de aprendizagem dos estudantes. Além disso, saber elaborar, selecionar e quando aplicar uma determinada tarefa aos estudantes, baseado no que se deseja estimular e avaliar, é outra necessidade vinculada ao trabalho do professor, e fizemos esta reflexão nos embasando nos estudos de Ponte (2005).

Elucidada o que talvez possa considerada a principal virtude das funções exponenciais como um todo, suas aplicações em contexto de realidade, faremos agora alguns apontamentos do que o professor deverá levar em conta no momento de aplicar duas propostas envolvendo este conteúdo em sala de aula (seja ela presencial e/ou online).

3. A PROPOSTA 01

Figura 22 – Tarefa com estrutura fechada

Tarefa: Vitória-régia

Em abril de 2020, período inicial da pandemia do coronavírus, um pesquisador brasileiro propôs um enigma para popularizar a explicação sobre como ocorre a disseminação do vírus e sua multiplicação em crescimento exponencial. Maurício Féo (engenheiro, mestre em Instrumentação pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e estudante de doutorado em Física de Partículas em Genebra, na Suíça) gravou um vídeo fazendo analogia com vitórias-régias, um lago, e a quantidade dessa planta aquática que é possível tirar do lago, durante um período de tempo. Para isso, considerou que, a cada dia, cada uma das plantas se reproduz gerando outra vitória régia.

(Fonte: Informação retirada e adaptada dehttps://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/10/enigma-da-vitoria-regia-vira-exemplo-em-video-que-explica-o-que-e-o-crescimento-exponencial-da-pandemia.ghtml)

Com base neste contexto, responda as questões abaixo:

5. Considere que, tal como no contexto anunciado, cada vitória régia se reproduz gerando uma outra ao longo de um dia e que no primeiro dia em que se deseje estudar tal reprodução haja cinco vitórias régias no lago. Qual o número de vitórias régias nos primeiros dias?
6. No GeoGebra, insira as coordenadas dadas pelos pontos (dia, número de vitórias régias) e analise seu comportamento. O que há de característico na forma como se comportam estes pontos?
7. É possível pensar em uma expressão algébrica (“fórmula”) que nos permita encontrar a quantidade de vitórias régias neste lago em um momento qualquer, sem muito trabalho? Insira a expressão algébrica encontrada no GeoGebra e verifique se, de fato, ela descreve o comportamento dos pontos (dia, número de vitórias-régias).
8. Em um determinado momento havia 10240 vitórias régias no lago. Você consegue dizer em qual dia, provavelmente, isso ocorreu?

FONTE: Elaborado pelos autores (2021)

Figura 23 - Tarefa de Estrutura Aberta

Tarefa: Vitória-régia

Em abril de 2020, período inicial da pandemia do coronavírus, um pesquisador brasileiro propôs um enigma para popularizar a explicação sobre como ocorre a disseminação do vírus e sua multiplicação em crescimento exponencial. Maurício Féo (engenheiro, mestre em Instrumentação pelo Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e estudante de doutorado em Física de Partículas em Genebra, na Suíça) gravou um vídeo fazendo analogia com vitórias-régias, um lago, e a quantidade dessa planta aquática que é possível tirar do lago, durante um período de tempo. Para isso, considerou que, a cada dia, cada uma das plantas se reproduz gerando outra vitória régia.

(Fonte: Informação retirada e adaptada dehttps://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/04/10/enigma-da-vitoria-regia-vira-exemplo-em-video-que-explica-o-que-e-o-crescimento-exponencial-da-pandemia.ghtml)

Com base neste contexto, responda as questões abaixo:

2. Considere a situação envolvendo a reprodução das vitórias régias do enunciado e que, portanto, a expressão algébrica que determine esta reprodução em função dos seja dada por $f(x) = 5 \cdot 2^{x-1}$, sendo x os dias e $f(x)$ o número de vitórias-régias correspondente. O que acontece com a expressão algébrica e com seu gráfico se variarmos o número de vitórias régias do primeiro dia ou o número de vitórias régias que uma gera ao longo de cada dia?

FONTE: Elaborado pelos autores (2021)

3.1. ORIENTAÇÕES

Inicialmente, é necessário que o professor apresente as tarefas deixando claro os objetivos da proposta. Os alunos devem se sentir imersos dentro de todo o processo. Mesmo que seja possível atribuir um computador para cada estudante (ou que todos possuam um celular com o GeoGebra), é interessante que sejam feitas parcerias, de preferência duplas, dado que trios, talvez, possam tumultuar a aula e prejudicar a participação de algum aluno. No caso de ensino remoto, é possível que a dinâmica grupal não seja a mais recomendada, sendo, então, necessário o trabalho "individual". Mesmo nesta circunstância, ainda é possível discussões coletivas e grupais.

O propósito do professor é, fazendo uso do ensino exploratório, introduzir o conteúdo de função exponencial por meio de uma atividade exploratória, antes da apresentação de sua definição formal. Ponte (2005) alerta que o emprego desta abordagem não invalida ou excluí a necessidade da aula expositiva, dado que haverá momentos que exigirão uma boa explanação do professor sobre a definição formal, propriedades e algumas demonstrações sobre as funções exponenciais. Ratifica que no *ensino e na aprendizagem exploratórios* nem tudo é oriundo da exploração dos alunos, implicando apenas que esta é uma abordagem marcante e majoritária em sala de aula. Importante salientar também que esta proposta se encontra no contexto da semirrealidade (Skovsmose, 2000 *apud* PONTE, 2005) por, apesar de se embasar em um fator natural, precisar de certas condições e pressuposições teóricas para sua análise.

Antes do início é importante verificar que todas as máquinas ou celulares estão operantes e com o GeoGebra em funcionamento[14]. Leia o enunciado com toda a turma e, após breves comentários sobre o tema proposto, a pandemia, o que são as vitórias-régias e demais indagações que possam surgir e que contribuam para imersão na proposta, libere os estudantes para pensar a debater a primeira questão de estrutura fechada, um exercício envolvendo uma conversão não congruente da representação em língua natural para a decimal.

[14] Recomendamos que todos os ajustes, instalações e verificações nas máquinas (funcionamento do GeoGebra, por exemplo) sejam feitos antes da aula, para evitar contratempos desnecessários dado o tempo curto dedicado ao conteúdo. Além disso, alertamos que, para esta proposta, não há necessidade de internet, podendo o serviço ser suspenso das máquinas, até como forma de evitar dispersões. No caso de ensino remoto, recomendamos que seja feito um tutorial em pdf ou vídeo do que os estudantes precisam ter e fazer em seus computadores e/ou smartfones antes de realizar a aula. Neste caso, não é possível manter o controle estrito do que os estudantes estão fazendo de suas casas. Por isso, salientamos a importância do professor conseguir "vender" a proposta aos alunos, de modo que se sintam envolvidos e interessados.

3.1.1. ORIENTAÇÕES PARA A TAREFA DE ESTRUTURA FECHADA

Como posto no artigo, uma resposta esperada é a seguinte:

$$2º\ dia: 5 + 5(geradas\ das\ demais) = 5 \times 2 = 10$$
$$3º\ dia: 10 + 10 = 5 \times 2 \times 2 = 20$$
$$4º\ dia: 20 + 20 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40$$
$$5°dia: 40 + 40 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$$
$$7ºdia: 160 + 160 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 320$$

É possível, contudo, que os estudantes apliquem procedimentos diferentes ou outros tipos de tratamentos. A importância do esboço da resposta como está acima é a regularidade vislumbrada, que permitirá aos estudantes a generalização objetivada nas tarefas subsequentes. Há, ainda, a possibilidade de os estudantes organizarem os dados acima por meio de uma tabela, realizando, assim, uma segunda conversão, tal como está abaixo:

Tabela 9 - Organização dos dados em uma tabela

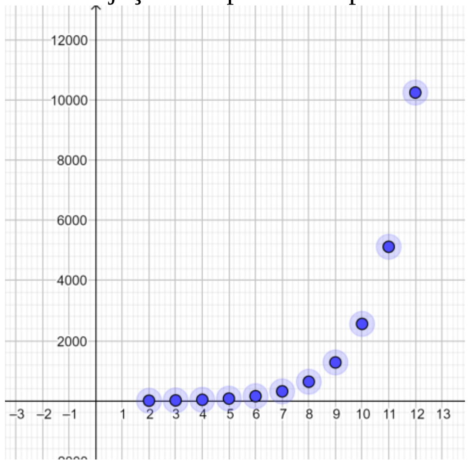
Dia	Bactérias
2	10
3	20
4	40
5	80
7	320

Fonte: Autor, 2021

Ao fim, peça que todos socializem suas respostas. Por se tratar de um exercício simples, todos se sentirão à vontade para divulgar seus resultados. Permita nesta, e nas demais etapas, que os estudantes analisem as respostas uns dos outros, podendo fazer correções e dar orientações, sempre tomando o cuidado para que o respeito seja mantido e que ninguém se sinta constrangido. No caso do ensino remoto, tanto para esta quanto para as demais tarefas, é possível que esta socialização ocorra por meio do *chat* da videochamada ou por compartilhamentos de telas.

Na segunda questão de estrutura fechada, oriente-os quanto aos comandos básicos do programa, e permita que insiram mais coordenadas, além das solicitadas do enunciado, para facilitar a visualização, tal como o exemplo abaixo:

Figura 24 - Projeção dos pontos no plano cartesiano



Autor, 2021

Com base na distribuição dos pontos no plano cartesiano, os estudantes terão que conjecturar um possível gráfico para este comportamento. Subentendendo que tenham estudado anteriormente as funções afim e quadrática, é esperado que tentem associar o gráfico destas funções (por fazerem parte de sua bagagem epistemológica prévia) aos pontos que estão analisando.

Espera-se que, de imediato, os estudantes notem o aspecto curvo do comportamento dos pontos e, com base nisso, descartem a possiblidade de se tratar de uma função afim. Para tal, instigue-os e questione-os: “O que é uma função afim?”, “Qual a principal característica visual desta função?”. Outra propriedade interessante que pode ser evocada é que a diferença $f(x+h)-f(x)$ na função afim não depende de x, mas sim apenas de h. Na prática, dada a função $f(x)=ax+b$, temos que $f(x+h)-f(x)=ax+ah-ax=ah$ é uma constante. Para deixar clara esta propriedade, apresente um exemplo, como $f(x)=2x+3$.

Você pode solicitar que os alunos analisem as diferenças entre o número de vitórias-régias de dias consecutivos, como abaixo:

$2^{\underline{o}}\ dia-1^{\underline{o}}\ dia=10-5=5$,

$3^{\underline{o}}\ dia-2^{\underline{o}}\ dia=20-10=10$,

$4^{\underline{o}}\ dia-3^{\underline{o}}\ dia=40-20=20$, e assim por diante.

É interessante que eles notem que, apesar da diferença não ser constante, existe um padrão que a rege e que está totalmente atrelado à condição de reprodução das plantas. Explore isso como forma de trazer para a discussão, mesmo que não formalmente de início, o fato de que na função exponencial o que se preserva é a proporção de variação em relação ao valor inicial, logo, sendo $g(x) = b \cdot a^x$ uma função exponencial

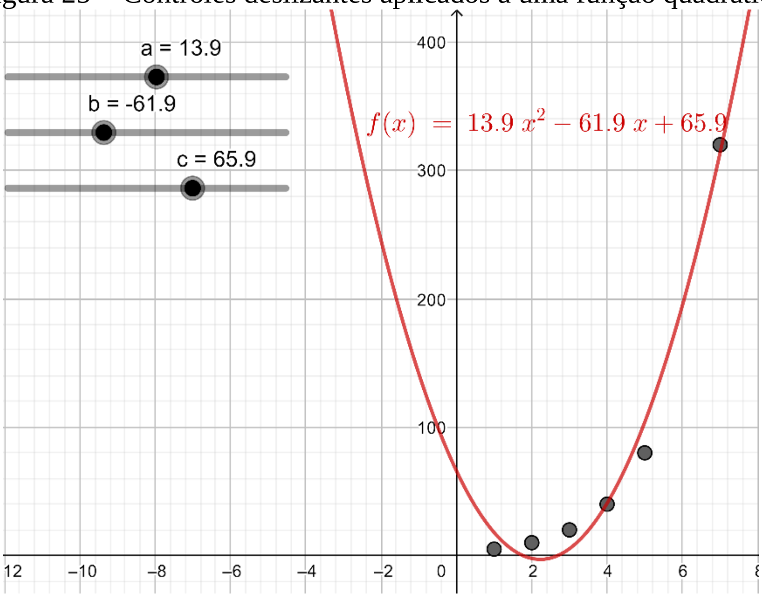
$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = k$$

sendo k uma constante que depende apenas de h.

O GeoGebra possui o recurso chamado de "controles deslizantes" por meio do qual é possível inserir uma função com coeficientes indefinidos. Assim, podem ser criados controles que permitem variar os coeficientes e analisar o efeito disso simultaneamente no gráfico. Proponha que os estudantes insiram a função $f(x) = ax + b$ no programa como forma de avaliarem a impossibilidade desta satisfazer o problema apresentado.

O mesmo recurso dos controles pode ser empregado para a comparação com a função quadrática, caso algum aluno sugira esta função como um modelo adequado para o comportamento dos pontos inseridos por eles no GeoGebra. O aspecto curvo do comportamento destes pontos é uma das possíveis justificativas para tal comparação. Oriente-os, neste caso, a inserir no *software* a função $f(x) = cx^2 + dx + h$ e variar seus coeficientes. É importante prever que os estudantes podem fazer algumas manipulações até chegar a um gráfico que de fato se aproxime dos pontos inseridos, como na Figura 25.

Figura 25 - Controles deslizantes aplicados a uma função quadrática



Fonte: Autor, 2021

Aqui, questione os estudantes sobre o comportamento do número de vitórias-régias ao longo do tempo: "Se compararmos a quantidade de vitórias-régias do 7º com o 19° dia, o que podemos concluir?", "Se o lago continuar fornecendo as condições de reprodução para a planta e se não houver interferência alguma para conter tal expansão, o que se pode projetar para o futuro?".

Com estes questionamentos espera-se que os estudantes percebam que o modelo quadrático não satisfaz os pontos para além dos inseridos no plano a longo prazo. Do ponto de vista algébrico, caso os estudantes não tenham visto anteriormente que $g(x+h)-g(x)$ é uma função afim quando $g(x)$ é uma função quadrática, seria interessante pedir que fizessem esta análise de comportamento com algum exemplo do próprio livro didático, para que também pudessem compará-lo com as diferenças de vitórias-régias entre os dias.

Na terceira questão de estrutura fechada, espera-se que exerçam uma generalização, na qual poderão fazer uso dos resultados da primeira tarefa. É importante induzi-los a encontrar padrões e uma relação entre a quantidade de vitórias-régias e o dia em questão: $Dia\ \mathbf{2} = 5 \times 2\ (ou\ seja, 5 \cdot 2^{\mathbf{1}})$, $Dia\ \mathbf{3} = 5 \times 2 \times 2\ (ou\ seja\ 5 \cdot 2^{\mathbf{2}})$**,** e assim entender que para cada dia, temos o cinco multiplicado por uma quantidade de números dois, referente ao dia anterior (ou tantos dois quanto o dia em questão menos um).

A quarta questão de estrutura fechada exige um tratamento por meio do qual deverão concluir que existirão 10240 vitórias-régias no décimo segundo dia. Este tipo de problema costuma ser comum nos livros didáticos. Caso necessário, antes de prosseguir nesta proposta, selecione alguns problemas do livro e proponha aos estudantes, como forma de reforçar este tipo de tratamento algébrico.

3.1.2. ORIENTAÇÕES PARA A TAREFA DE ESTRUTURA ABERTA

Para a tarefa de estrutura aberta, explore outras situações envolvendo as mudanças do número de vitórias-régias no primeiro dia e a forma como se reproduzem. Por exemplo, se no primeiro dia há sete vitórias-régias e cada uma gera outras quatro, teríamos:

Tabela 10 - Exemplo de generalização da reprodução de vitórias-régias

Dia	Vitórias-régias
1	7
2	$7 + 7 \times 4 = 7 \times 5 = 35$
3	$35 + 35 \times 4 = 35 \times 5 = 7 \times 5 \times 5 = 7 \times 5^2 = 175$
4	$175 + 175 \times 4 = 175 \times 5 = 7 \times 5^3$

$\vdots$	$\vdots$
n	$7 \times 5^{n-1}$

Fonte: Autor, 2021

Assim como nas tarefas e exemplos propostos no artigo, também explore, nos exemplos extras, a relação entre as unidades significantes das representações algébricas e em língua natural.

3.2.A PROPOSTA 02

Figura 26 - Tarefa de Estrutura Aberta

Tarefa: Experiência com a Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton determina que a perda de calor de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a ambiente. Utilizando este princípio, cada grupo fará o estudo de um copo de água previamente refrigerado posto em temperatura ambiente. Serão necessários 150 ml de água (à uma temperatura de cerca de 2°C) em um copo de vidro, um termômetro culinário e acesso ao GeoGebra. O ambiente precisa ter temperatura ambiente estável, devendo ser, então, fechado.

3. Insira a função $\boldsymbol{f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d}$ e no GeoGebra, reflita e faça anotações no caderno sobre os seguintes aspectos:

   e) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente $\boldsymbol{a}$?

   f) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente $\boldsymbol{d}$?

   g) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente $\boldsymbol{b}$?

   h) O que acontece com o gráfico quando manipulamos apenas o coeficiente $\boldsymbol{c}$?

4. O que mais você observou ao realizar essa tarefa?

FONTE: Elaborado pelos autores (2021)

Figura 27 - Tarefa de Estrutura Fechada

Tarefa: Experiência com a Lei de Resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton determina que a perda de calor de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a ambiente. Utilizando este princípio, cada grupo fará o estudo de um copo de água previamente refrigerado posto em temperatura ambiente. Serão necessários 150 ml de água (à uma temperatura de cerca de 2°C) em um copo de vidro, um termômetro culinário e acesso ao GeoGebra. O ambiente precisa ter temperatura ambiente estável, devendo ser, então, fechado.

4. Com o termômetro, meça e anote a temperatura ambiente. Em seguida, meça e anote a temperatura do líquido em intervalos fixos (de 5 em 5 min, 2 em 2 min, por exemplo) por um período de 30 à 50 min[15].

5. Insira os pontos (momento, temperatura) e a função $\boldsymbol{f(x) = b \cdot a^{c \cdot x} + d}$ no GeoGebra e, utilizando os ajustes dos coeficientes no GeoGebra, encontre uma função que melhor modele o comportamento dos dados coletados.

6. Utilizando o modelo algébrico proposto por Newton, encontre a função que modela o comportamento dos dados coletados.

FONTE: Elaborado pelos autores (2021)

3.2.1. ORIENTAÇÕES

As mesmas orientações indicadas no início da tarefa anterior valem para esta: os princípios inerentes ao *ensino e à aprendizagem exploratórios* defendidos por Ponte (2005) e a necessidade de um planejamento prévio da forma como vai se organizar a aula. Se realizada no laboratório, que todos os computadores estejam operantes, que seja um ambiente fechado, que haja espaço para os estudantes transitarem e lidarem com líquidos e que as máquinas estejam operantes com o GeoGebra instalado. Se feito em qualquer outro ambiente físico, que os estudantes tenham acesso ao GeoGebra pelo Celular, por exemplo, e que todas as demais condições básicas anteriores sejam atendidas.

Como dito no artigo, a função dada por $T(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + T_m$ é fruto de uma operação envolvendo uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Evidentemente, no geral, não é comum

[15] Tanto os intervalos quanto a duração total da experiência (considerando um tempo mínimo de 30 min) ficam a critérios do professor e da sua disponibilidade de tempo. Importante, contudo, que todos realizem as medições por um mesmo período.

trabalhar com equações diferenciais no ensino médio, mas é possível aplicar este resultado como forma de chamar a atenção dos estudantes para a importância do assunto.

A proposta é que os estudantes analisem e monitorem a temperatura de algum líquido em desigualdade com a temperatura ambiente, de modo que possam acompanhar e fazer anotações do processo, levando ao equilíbrio térmico. Para tal, será necessário um termômetro culinário de precisão, que possui um custo baixo (na data de realização desta pesquisa foi adquirido por R$ 10,00), algum equipamento para fazer cronometragem (o próprio celular), um local fechado no qual se possa ter uma constância na temperatura ambiente, além de computadores com o GeoGebra instalado.

O líquido pode ser até mesmo água. Importante ressaltar que, apesar de a lei acima ser comumente aplicada ao resfriamento (corpos aquecidos que vão se adequando à temperatura ambiente), propor esta atividade à muitos jovens, manipulando líquidos quentes, pode ser perigoso, como já alertaram Cardozo e Possamai (2019). Tais autores, ao trabalharem com este tipo de experimento em ambas as situações (líquidos acima e abaixo da temperatura ambiente), relataram possíveis incidentes envolvendo derramamentos que, quando se trabalha com líquidos gelados, não causam acidentes. Porém, por estar sendo desenvolvida, provavelmente, próxima a eletrônicos, é importante muito cuidado em qualquer situação. Realçamos, aqui, a importância do ensino interdisciplinar, em que o professor de física, por exemplo, pode dar suporte ao de Matemática durante este experimento.

A ideia é que não seja apresentando previamente o modelo de resfriamento proposto por Newton. Os alunos terão a oportunidade de chegar (mesmo que aproximadamente) a este resultado para, em seguida, conhecerem a definição formal do estudo, acompanhado de propriedades mais técnicas. É justamente isto que confere a esta tarefa o caráter investigativo (PONTE, 2005, 2010, 2014) por possuir uma estrutura aberta e um certo nível de complexidade, no qual os dados não serão entregues prontos e sim coletados e cada grupo terá a oportunidade de criar um modelo próprio. Poderão, também, verificar, com suporte do professor, se de fato sua função descreve o comportamento analisado. Trata-se, também, de uma proposta em contexto de realidade.

Para a realização de parte da primeira tarefa de estrutura fechada serão necessárias adequações e métodos específicos para o caso do ensino remoto. Desta forma, apresentaremos uma sugestão metodológica para esta etapa de medições, nesta circunstância. As demais tarefas de estrutura fechada (da segunda em diante) poderão ser realizadas presencial e remotamente, reservados os devidos ajustes básicos, conforme discorrido na apresentação à priori.

Apresentamos a seguir as orientações da tarefa de estrutura aberta que é independente das demais, mas mantem com elas uma articulação.

3.2.1.1.ORIENTAÇÕES PARA A TAREFA DE ESTRUTURA ABERTA

No momento de inserir os coeficientes no programa, vale o reforço de que o modelo $f(x) = b \cdot a^{cx} + d$ pode ser inserido com outras letras e símbolos. Porém, é importante todos inserirem os mesmos para que o processo de análise, comparação e debate posterior seja possível. Oriente os estudantes a anotarem todas as configurações visuais que conseguirem distinguir e tentem registrar uma explicação para tal.

Ao manipular o coeficiente a, espera-se que os estudantes encontrem cinco configurações visuais distintas (para $a < 0$, $0 < a < 1$, $a = 0$, $a = 1$ e $a > 1$).

A compreensão destes casos remete à recordação de algumas propriedades de potências. Cabe, aqui, se necessário, uma revisão rápida sobre este assunto, pois essa compreensão é de grande valia para o trabalho com as funções exponenciais, cujos capítulos nos livros didáticos sempre são introduzidos por estas recapitulações.

Para $a < 0$, considere com a turma, por exemplo, $f(x) = (-3)^x$ e os questione sobre o que impossibilitaria a existência desta função. Solicite, se necessário, que calculem imagens, como as de $\frac{1}{2}$ e que analisem o que ocorre com o tratamento algébrico. Para o caso $a = 0$, é importante retornar ao conceito de função, sobre a delimitação de seu domínio. Solicite o cálculo da imagem de valores negativos e observe as reflexões dos estudantes. Ressalte, também, que este comportamento está vinculado ao valor de c. Procure instigar reflexões sobre o que ocorre quando $c < 0$, neste caso. O caso em que $a = 1$ remete à propriedade de potências de base 1.

Os Casos em que $0 < a < 1$ e $a > 1$ são os que mais interessarão a aula, dado que são os que concedem ao gráfico o comportamento exponencial. Induza os estudantes a analisarem a monotonicidade da curva, associando-a com as condições de crescimento e decrescimento da temperatura do líquido gelado. Para prosseguir, solicite que cada grupo escolha, no GeoGebra, qualquer um destes dois últimos casos.

De todos os coeficientes, a compreensão da correlação entre a manipulação do coeficiente d com o gráfico e o contexto do enunciado (língua natural) talvez seja a mais fácil de visualizar pelos estudantes. Daí a importância de se estudar este coeficiente logo após a função assumir o comportamento exponencial, com a manipulação de a.

A manipulação dos coeficientes c e b exige atenção por parte do professor. A forma com incidem, principalmente, no gráfico tende a ser parecida. Oriente-os a manipulá-los um de cada vez. Na variação de b, espera-se que notem três situações gráfica distintas para quando $b < 0$, $b = 0$ e $b > 0$. Além das propriedades envolvendo potências, leve para a discussão com os alunos, caso algum não o faça por conta própria, a comparação entre simétricos aditivos, como, por exemplo, $f(x) = -2 \cdot 3^x + 1$ e $g(x) = 2 \cdot 3^x + 1$, de forma que percebam a relação de b com a reflexão do gráfico em torno da assíntota.

O mesmo pode ser feito com c para que percebam os comportamos associados à quando $c < 0$, $c = 0$ e $c > 0$, além de sua relação com a reflexão do gráfico em torno do eixo das ordenadas.

O Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IF-USP) desenvolveu um material virtual[16] composto de links, textos e *applets* que, dentre outros assuntos, exploram e concedem boas explorações sobre a relação do gráfico da função do tipo exponencial com a variação de seus coeficientes.

3.2.1.2. ORIENTAÇÕES PARA A TAREFA DE ESTRUTURA FECHADA, NO ENSINO REMOTO

Para o caso do ensino remoto, é complicada a realização de experimentos, principalmente quando exigem instrumentos específicos e atípicos, como o caso do termômetro de precisão. Desta forma, sugerimos que apenas o professor adquira esta ferramenta, realize e filme as medições, sem, no entanto, fazer os registros (deixando esta parte sob responsabilidade dos estudantes).

Assim, o professor pode, por exemplo, gravar, durante cerca de 60 min, o processo de resfriamento de um líquido previamente aquecido (Figura 28), assim como o processo de aquecimento de um líquido previamente resfriado (Figura 29).

[16] Acesso aos materiais: http://ecalculo.if.usp.br/

Figura 28 – Vídeo do processo de resfriamento da água

Fonte: Autor, 2021

Figura 29 – Vídeo do processo de aquecimento da água

Fonte: Autor, 2021

Em seguida, poderá disponibilizar os vídeos para os alunos por meio de uma pasta no *google drive*. Recomendamos que o professor grave ao menos uns cinco ou seis processos envolvendo a variação de temperaturas de elementos e estados distintos. Interessante notar que, diferente do ensino presencial em que trabalhar com líquidos quentes poderia ser perigoso, neste caso, o professor tem mais liberdade para explorar várias situações. Realçamos, mesmo assim, a importância de cuidado.

Desta forma, o professor pode explorar diferentes líquidos, como café ou leite, além de outros corpos sólidos. Neste caso, podem emergir oportunidades de discussões centradas em aspectos mais técnicos e físicos, como as diferenças de variação de temperatura entre elementos distintos. Tal situação, inclusive, também poderia ser enriquecida pela parceria com o professor de física, por exemplo.

Ao disponibilizar os vídeos, o professor pode sortear ou delimitar randomicamente o vídeo que cada aluno irá ter que analisar e fazer os registros, conforme solicitam as etapas seguintes. Com cada vídeo, também deve ser informado a temperatura ambiente do momento em que foi realizada a medição.

Mesmo neste caso, logo no início da aula, o professor deve explicar para os estudantes como funciona o termômetro, além de outras discussões ou dúvidas que eventualmente surjam sobre o experimento propriamente dito, já que os alunos não poderão manipular nada.

Importante ressaltar que o fato de, neste caso, os alunos não realizarem propriamente as medições não invalida ou exclui o caráter exploratório desta proposta. Todos ainda deverão fazer os registros, as conjecturas, as manipulações no GeoGebra e modelar experimentalmente uma função que será específica do caso que cada um analisou. Mesmo os alunos que analisarem os mesmos vídeos, não chegarão, necessariamente, aos mesmos modelos. Além do que, todos farão, da mesma forma, o estudo dos coeficientes da função exponencial, comparando, simultaneamente, as representações algébrica, gráfica e em língua natural deste objeto matemático.

3.2.1.3. ORIENTAÇÕES PARA A TAREFA DE ESTRUTRA FECHADA, NO ENSINO PRESENCIAL

Com os grupos divididos (de preferência, trios), cada qual receberá um copo com um líquido gelado. Explique a proposta e ressalte a importância do compromisso e atenção de todos, pois se trata de uma análise de comportamento e qualquer erro ou devaneio coletivo podem comprometer os resultados. Todos precisam ter um domínio básico do GeoGebra com relação a como inserir pontos e os controles deslizantes.

Na primeira questão é necessário medir a temperatura ambiente usando a ferramenta. Caso todos se encontrem em um mesmo local, o próprio professor pode fazer isso (a temperatura ambiente do nosso experimento foi de $31,9°C)$. Em seguida, todos deverão inserir o termômetro no recipiente contendo o líquido (Figura 17) e acompanhar o processo de aquecimento, fazendo anotações em intervalos fixos que podem ser definidos pelo próprio grupo (a cada 2, 3, 5 min, por exemplo). As medições podem durar cerca de 30, 40 ou 50 min (depende da disponibilidade de tempo para a aula), O líquido deve ser resfriado junto ao recipiente (copo, vasilha) no qual será medido, pois, ser resfriado em um único receptáculo para, em seguida, ser despejado nos copos de cada grupo (que estejam em temperatura ambiente), por exemplo, pode gerar desequilíbrios térmicos nos minutos iniciais.

Figura 30 - Início do experimento

Fonte: Autor, 2021.

3.2.1.4. ORIENTAÇÕES PARA A TAREFA DE ESTRUTURA FECHADA, EM AMBAS AS MODALIDADES DE ENSINO

Os estudantes poderão ficar livres quanto a forma de organizar os dados, podendo ser na forma de tabela. Ela poder ser construída manualmente em seus cadernos, ser criada no Excel ou os pontos podem ser inseridos diretamente no GeoGebra, por meio da aba “Planilha”, tal como abaixo:

Figura 31 - Pontos distribuidos na planilha do GeoGebra

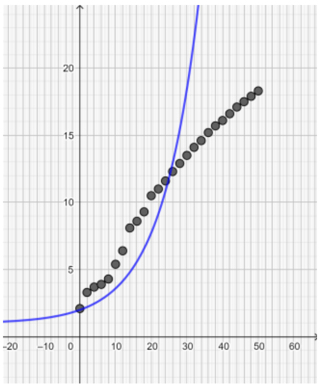
	A	B
18		
19	Momento	Frio
20	0	2.1
21	2	3.3
22	4	3.7
23	6	3.9
24	8	4.3
25	10	5.4
26	12	6.4
27	14	8.1
28	16	8.6
29	18	9.3
30	20	10.5
31	22	11
32	24	11.6

Fonte: Autor

Ao procurar, enfim, um modelo a partir da manipulação de todos os coeficientes, seguimos, no artigo, o caminho que partiu da situação em que um grupo tenha escolhido começar por $0 < a < 1$. Apresentaremos aqui o caso em que se parte de $a > 1$ e todos os demais coeficientes iguais a 1, conforme a sequência abaixo:

Quadro 20 - Passo 01 para encontrar o modelo apropriado para o comportamento dos pontos no plano cartesiano

Estabelecendo $a > 1$, temos:

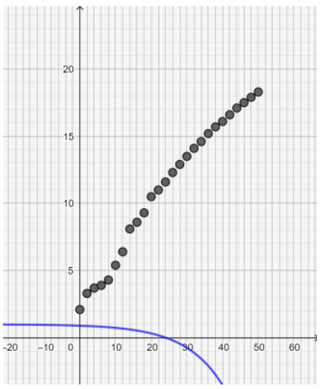


Fonte: Autor, 2021

Percebemos que a função exponencial se tornou crescente a partir da assíntota. Como o objetivo é encontrar um comportamento que indique o crescimento da temperatura até sua estabilização (temperatura ambiente), procuramos uma função que cresça até a assíntota. Uma alternativa é refletir a função em torno da assíntota. Um aluno que tenha aproveitado bem as explorações anteriores saberá que terá que tornar $b < 0$, conforme abaixo:

Quadro 21 - Passo 02 para encontrar o modelo apropriado para o comportamento dos pontos no plano cartesiano

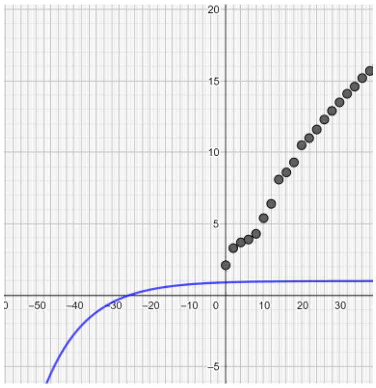
Estabelecendo $b < 0$, temos:



Temos, então, uma função que decresce a partir da assíntota. Analisando o gráfico, podemos perceber que, para chegar no modelo pretendido, precisamos refletir esta função em torno do eixo das ordenadas. Para isso, é necessário tornar $c < 0$, conforme abaixo:

Quadro 22 - Passo 03 para encontrar o modelo apropriado para o comportamento dos pontos no plano cartesiano

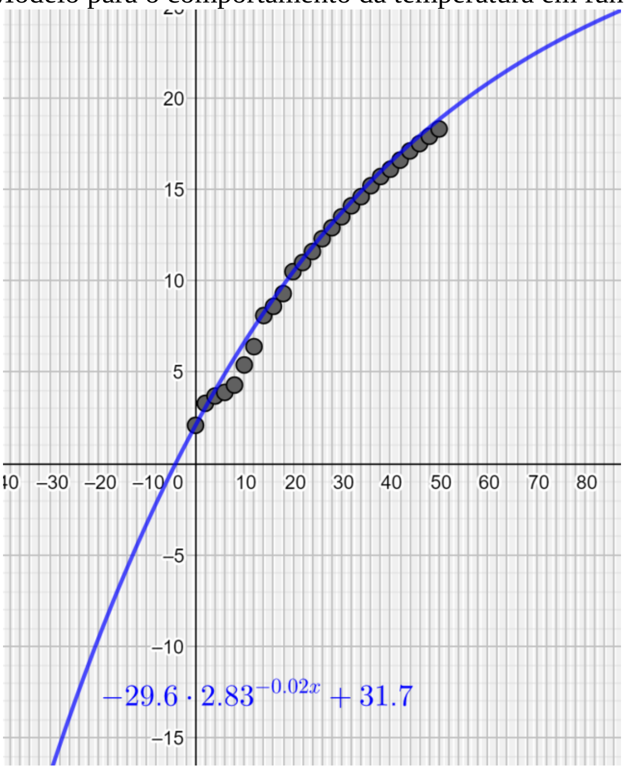
Estabelecendo $c < 0$, temos:



Fonte: Autor, 2021

Neste caso, já temos o comportamento pretendido, uma função que cresce até a assíntota. Para isso, usamos a configuração visual na qual $b < 0$, $a > 1$ e $c < 0$ (correspondente ao modelo de Newton) que é equivalente à configuração $b < 0$, $0 < a < 1$ e $c > 0$. Conhecendo as condições que estabelecem o comportamento esperado, basta fazer alguns ajustes, mantendo tais condições, para encontrar o modelo mais aproximado. Tal como na imagem abaixo, ajustamos os coeficientes, encontrando a função $f(x) = -29{,}6 \cdot 2{,}83^{-0{,}02x} + 31{,}7$.

Figura 32 - Modelo para o comportamento da temperatura em função do tempo



Fonte: Autor, 2021

Nos tratamentos algébricos surgirão momentos que necessitarão de revisão ou introdução a algumas leis e propriedades, como a que estabelece que $e^{\ln a} = a$. Neste caso, é importante levar em conta o perfil da turma, o tempo destinada a esta abordagem, o nível de compreensão dos estudantes até este momento, sua bagagem matemática e uma série de fatores que ditarão o ritmo da aula e as provocações e aprofundamentos possíveis.

Como dito, todas estas questões (a partir da segunda) podem ser realizadas em ambas as modalidades de ensino (presencial e remota). É importante, contudo, que o professor se preocupe em manter as discussões vivas e os estudantes imersos em todo o processo de experimentação. Para o caso de turmas grandes, talvez seja válido dividir a turma em grupos para realizar a proposta em dois ou três momentos distintos.

Apresentamos a seguir sugestões de leituras para suporte com estas abordagens.

3.3. SUGESTÃO DE LEITURAS E MATERIAIS

BASSANEZI, R. C. **Ensino - aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

COELHO, J. R. P. **O geogebra no ensino das funções exponenciais**. 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Centro de Ciênciasetecnologia, Universidadeestadualdo Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2016. Disponível em: http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016José-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 01 jan. 2021.

Download do GeoGebra: https://www.geogebra.org/?lang=pt.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e o funcionamento cognitivo da compreenção em matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Ancântara. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2017. p. 11-34.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 1, p. 97-117, 16 jul. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 6, n. 2, p. 96-112, 10 maio 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96.

DUVAL, R.; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamentoRegistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 2, p. 266-297, 13 dez. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

DUVAL, R.; MORETTTI, Méricles Thadeu. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, [S.L.], v. 13, n. 2, p. 1-27, 12 dez. 2018. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2018v13n2p1.

Experimento com a Lei de Resfriamento de Newton: https://www.youtube.com/watch?v=cFvNFVEzMnE.

FARIA, T. A.; SOUZA JÚNIOR, J. C. de; CARDOSO, A. Matemática Dinâmica para compreender a função exponencial. **Sigmae**, Alfenas, v. 5, n. 1, p. 1-11, dez. 2016. Disponível em: https://publicacoes.unifal-mg.edu.br/revistas/index.php/sigmae/article/view/509. Acesso em: 02 out. 2020.

KENSKI, V. M**. Educação e Tecnologias**: O novo ritmo da informação. Campinas - SP: Papirus, 2011.

KENSKI, V. M. Tecnologias E Ensino Presencial E a Distância. São Paulo: Papirus, 2013.

Material sobre a manipulação dos coeficientes da função exponencial da IF-USP. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/exponencial/fexponencial.htm

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem em matemática. **Contrapontos**, Itajaí, v. 2, n. 3, p. 343-362, dez. 2002. Disponível em: https://www6.univali.br/seer/index.php/rc/article/view/180/152. Acesso em: 02 dez. 2020.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental**: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 243 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/17129/1/Disserta%c3%a7%c3%a3o_Andr%c3%a9Pereira.pdf. Acesso em: 01 ago. 2020.

PIANO, C. **Diferentes abordagens para o estudo das funções exponenciais e logarítmicas**. 2016. 112 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2016. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1982. Acesso em: 15 out. 2020.

PONTE, J. P. da. **Gestão curricular em Matemática**. O Professor e O Desenvolvimento Curricular, Lisboa, v. , n. , p. 11-34, jan. 2005. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/3008. Acesso em: 02 nov. 2020.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, João Pedro da (org.). Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. **Lisboa**: Fct, 2014. Cap. 1. p. 13-30.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; BRANCO, N. Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática. **Educação Matemática em Foco**, Lisboa, v. 01, n. 01, p. 1-21, mar. 2011. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/260987156_Tarefas_de_exploracao_e_investigacao_na_aula_de_matematica. Acesso em: 15 jan. 2021.

PONTE, J. P. da; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, Joana; BAPTISTA, Mónica. Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**, Lisboa, v. 24, n. 2, p. 111-135, out. 2015.. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/22628. Acesso em: 02 nov. 2020.

SANTOS, A. T.dos; BIANCHINI, B. L. ANÁLISE DAS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PELOS ESTUDANTES NO ESTUDO DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS. **Vidya**, Santa Maria, v. 32, n. 1, p. 35-50, jun. 2012. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/viewFile/265/240. Acesso em: 01 jan. 2021.