Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Mariana Carneiro Moreira Melo

Jogos no Ensino da Álgebra

Rio de Janeiro

2021

Mariana Carneiro Moreira Melo

Jogos no Ensino da Álgebra

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Alfonso Olivares Jara

Coorientadora: Prof.ª Dra. Cristiane de Mello

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ/ REDE SIRIUS/ BIBLIOTECA CTC-A

M528 Melo, Mariana Carneiro Moreira.
Jogos no ensino da álgebra/ Mariana Carneiro Moreira Melo. – 2021.
101 f. : il.

Orientador: Roberto Alfonso Olivares Jara.
Coorientadora: Cristiane de Melo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Jogos em educação matemática - Teses. 2. Matemática recreativa - Teses. 3. Álgebra – Estudo e ensino - Teses. I. Jara, Roberto Alfonso Olivares. II. Melo, Cristiane de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 51-8

Patricia Bello Meijinhos CRB7-5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Mariana Carneiro Moreira Melo

Jogos no Ensino da Álgebra

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 12 de novembro de 2021

Banca examinadora:

Prof. Dr. Roberto Alfonso Olivares Jara (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof.ª Dra. Cristiane de Mello (Coorientadora)
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Prof.ª Dra. Susan Wouters
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Luis Humberto Guillermo Felipe
Universidade Estadual do Norte Fluminense - UENF

Rio de Janeiro

2021

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Ana Lúcia, por sempre me fazer acreditar e não desistir dos meus sonhos.

À minha madrasta Silvana, por acreditar em mim desde a escolha pela Matemática até os dias de hoje.

Ao professor Roberto e à professora Cristiane, pela orientação, dedicação e paciência.

Aos meus alunos e alunas, que aceitaram participar deste projeto e que fazem parte da minha vida docente.

Ao meu amigo Eduardo, pelo incentivo e por acreditar em mim.

É no conhecimento que existe uma chance de libertação

Leandro Karnal

RESUMO

MELO, Mariana Carneiro Moreira. *Jogos no Ensino da Álgebra*. 2021. 101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Considerando a importância dos jogos como ferramenta metodológica no ensino da Matemática, em especial no ensino de Álgebra, este trabalho contém uma proposta pedagógica, direcionada principalmente aos professores, para ser utilizada como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina. Essa proposta visa atrair a atenção dos alunos e facilitar a prática docente. Nesse intuito, além de apresentar a teoria envolvida no aprendizado de cada assunto, essa proposta utiliza a aplicação de jogos em sala de aula, com o foco de tornar a aprendizagem mais significativa. Para tal, os jogos aplicados envolvem conteúdos já estudados pelos alunos, o que permite que eles tenham a oportunidade de aprimorar seus conhecimentos nesses conteúdos. Foi realizado uma pesquisa de campo envolvendo os alunos do ensino fundamental II de uma escola municipal, localizada no município de Casimiro de Abreu/RJ, com o objetivo de verificar como os jogos poderiam promover e despertar um interesse maior desses alunos com relação ao aprendizado dos conteúdos de Álgebra.

Palavras-chaves: Jogos. Álgebra. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

MELO, Mariana Carneiro Moreira. Games in the teaching of algebra. 2021. 101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Considering the importance of games as a methodological tool in the teaching of Mathematics, especially in the teaching of Algebra, this study contains a pedagogical proposal, aimed mainly at teachers, to be used as a tool in the teaching-learning process of this discipline. This proposal aims to attract students' attention and facilitate teaching practice. For this purpose, in addition to presenting the theory involved in learning each subject, this proposal uses the application of games in the classroom, with the focus on making learning more meaningful. To do so, the games used involve contents already studied by students, which allows them to have the opportunity to improve their knowledge of these contents. Field research has been carried out involving Junior High School students from a municipal school, located in the city of Casimiro de Abreu/RJ, with the objective of verifying how games could promote and awaken a greater interest of these students concerning to the learning of Algebra contents.

Key words: Games. Algebra. Junior High School.

LISTAS DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IME	Instituto de Matemática e Estatística
MEC	Ministério da Educação
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SEF	Secretaria de Educação Fundamental
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> Os jogos são tão antigos como a humanidade. O ato de jogar desde sempre acompanhou a civilização. Em todas as civilizações encontramos uma prática lúdica. Os jogos constituem uma das facetas incontornáveis da cultura humana. (...) As razões profundas que levam a que todas as civilizações desenvolvam jogos são ainda desconhecidas, mas é consensual o seu interesse cultural e educacional. (Neto; Silva, 2004).

O jogo sempre fez parte da cultura humana e desde a antiguidade era utilizado como ferramenta para o ensino. Recentemente o jogo vem ganhando espaço dentre as principais práticas pedagógicas: sua aplicação em sala de aula desperta no aluno o desejo de aprender, pois é simples, divertido e motivador. Além de ser um facilitador na aproximação da relação professor-aluno e aluno-aluno, pois ajuda a fortalecer a confiança, a cooperação e o respeito entre as partes, o uso de jogos na sala de aula também desenvolve o raciocínio lógico, a concentração e a capacidade de resolução de problemas, atuando diretamente no despertar motivacional dos alunos.

Na prática docente, esse é um dos grandes desafios: despertar a vontade de aprender e o interesse dos alunos. Neste sentido, o uso de jogos na sala de aula surge como um aliado do professor: é natural que os alunos sintam maior satisfação quando estão comprometidos com atividades lúdicas e é exatamente isso que permite a descoberta do novo.

O jogo é, portanto, um recurso pedagógico que contribui significativamente no processo de ensino e aprendizagem e sua aplicação constitui uma ferramenta didática poderosa, principalmente quando se trata da relação ensino-aprendizagem de Matemática.

Nossa pesquisa visa mostrar aos professores da disciplina Matemática que o jogo é uma importante ferramenta metodológica no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, buscamos atrair a atenção dos alunos aproximando-os da disciplina.

A seguir, serão apresentadas todas as etapas deste trabalho.

No capítulo 1, iniciamos com a definição e origem da palavra jogo. Em seguida, observamos que os jogos podem ser classificados de acordo com diversos fatores, dentre eles a regionalidade, as características e os objetivos. Além disso, apontamos um breve relato histórico a respeito do surgimento e do uso de jogos no ensino de Matemática e apresentamos alguns jogos voltados para o ensino de Álgebra.

No capítulo 2, apresentamos os dois jogos, criados pela autora, que são os objetos de estudo deste trabalho - Perfil Matemático e Baralho das Equações – enunciando e descrevendo as regras, o modo de jogar, o tabuleiro e as cartas. Além disso, fazemos um estudo, do ponto de vista matemático, dos conteúdos abordados nos jogos: equação do primeiro grau, equação do segundo grau, conjunto dos números reais e figuras geométricas.

No capítulo 3, apresentamos a metodologia, o tipo de pesquisa, o público-alvo, as ferramentas adotadas, o momento do jogo na sala de aula e a coleta de dados obtidos a partir da aplicação dos jogos - Perfil Matemático e Baralho das Equações - nas turmas.

No capítulo 4, apresentamos os resultados e a análise dos dados obtidos durante o momento do jogo realizado junto aos alunos das turmas 902 e 703 de uma escola municipal localizada no munícipio de Casimiro de Abreu/RJ.

Posteriormente apresentamos as considerações finais deste trabalho, nas quais enfatizamos as razões para o uso dos jogos matemáticos na sala de aula.

1 CLASSIFICAÇÃO E HISTÓRIA DOS JOGOS NO ENSINO DA ÁLGEBRA

Neste capítulo, apresentaremos um breve histórico de jogos utilizados como entretenimento bem como no ensino da Matemática, em especial no ensino da Álgebra. Mostraremos objetivos, regras e conteúdos abordados por alguns jogos que são utilizados desde a antiguidade até os dias atuais.

1.1 Jogo: definição e classificação

Jogo, segundo o Minidicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa (AULETE, 2011, p.521), é “recreação individual ou em grupo; atividade mental ou física, regida por regras e que envolve alguma forma de competição ou de aposta, e da qual resulta ganho ou perda. ”

Jogo é um termo do latim “*jocus*” que significa gracejo, brincadeira, divertimento.

Os jogos podem ser classificados de diversas maneiras levando em consideração suas características, suas propriedades, seus objetivos e sua regionalidade.

1.1.1 Jogos de Mesa

Jogo de mesa é um termo genérico utilizado para referir-se a jogos disputados em uma pequena área como uma mesa ou uma superfície plana, exigindo pouco ou quase nenhum esforço físico dos participantes.

1.1.2 Jogos de Cartas

Os jogos de cartas são caracterizados pelo uso de um ou mais conjuntos de cartas denominados baralhos. As cartas podem ser de um baralho padrão com 52 cartas, um baralho específico ou um baralho personalizado. Por exemplo, no jogo Buraco são utilizados dois baralhos completos com 52 cartas, no jogo de Truco apenas um baralho sem as cartas de numeração 8, 9 e 10 e no jogo de UNO temos um baralho personalizado para o jogo.

1.1.3 Jogos de Tabuleiro

São todos os jogos que utilizam um tabuleiro como peça fundamental e usam algum tipo de complemento, como cartas, fichas ou dados, além de um conjunto de regras, alguns exemplos: Banco Imobiliário, *War*, Cara a Cara, etc.

1.1.4 Jogos de Azar

Os jogos de azar são aqueles que envolvem o acaso onde a chance de ganhar ou perder não depende exclusivamente das habilidades do jogador. Envolvem cartas, dados, fichas, roletas, entre outras coisas.

Segundo Silveira (2001), os primeiros registros de jogos de azar datam do início da humanidade, tal que apontamentos arqueológicos mostram a prática do jogo do osso há 40.000 anos.

> Historicamente, os jogos mais praticados foram o do osso (conhecido pelo mundo inteiro) e o de dados (surgiu na Índia e Mesopotâmia 3 000 a.C., como evolução do jogo do osso, e daí se difundiu para o mundo grego, romano e cristão). (SILVEIRA, 2001)

Inicialmente a Matemática por trás dos jogos de azar se preocupava apenas com a contagem das possibilidades dos eventos, apenas no final do século XV e início do século XVI surgem os primeiros cálculos de probabilidades realizados por matemáticos italianos, dentre eles Luca Pacioli (1445 – 1517) e Girolamo Cardano (1501 – 1576). De acordo com O'Connor (1998), em 1494, Pacioli publicou em sua mais famosa obra intitulada de *Summa de Arithmetica*, o problema dos pontos: "dois jogadores disputavam um prêmio, que seria dado ao jogador que primeiro fizesse 6 pontos. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo jogador 3 pontos, o jogo precisou ser interrompido. Como dividir o prêmio? ". A solução proposta por Pacioli foi fazer uma divisão proporcional à probabilidade de vitória de cada jogador. O problema dos pontos é considerado por muitos como o problema fundador do cálculo de probabilidades. Ainda segundo O'Connor (1998), inspirado em Pacioli e motivado pelo seu vício em jogos de azar, Cardano passou a estudar a aleatoriedade dos jogos que envolviam o acaso e escreveu um tratado de 32 capítulos chamado *Liber de ludo aleae* (O livro dos jogos de azar), sendo o primeiro a abordar a probabilidade em termos matemáticos, com uma escrita simples, mas de grande valia para a teoria das probabilidades. Cardano foi o primeiro a considerar a probabilidade como uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

1.1.5 Jogos de Rua/Populares

Os jogos e brincadeiras de rua são aqueles que ajudam no desenvolvimento, na socialização, no coletivo, no desenvolvimento da criança além de estimular sua criatividade bem como suas habilidades motoras. Suas regras são flexíveis sendo adaptadas de acordo com o espaço, com o número de jogadores e com os materiais disponíveis.

1.1.6 Jogos Eletrônicos

Os jogos eletrônicos são aqueles que utilizam as tecnologias para seu desenvolvimento. Os computadores processam a informação de forma rápida, armazenando e exibindo esses dados. O *videogame*, o *tablet*, o *smartphone* e até mesmo as antigas máquinas de fliperamas são exemplos de como os jogos eletrônicos podem ser jogados.

1.1.7 Jogos de treinamento

Os jogos de treinamento são mecanismos para produzir universos definidos por regras que criam um ambiente propício para o treino de habilidades ou à aquisição e ao reforço de conteúdos teóricos.

O diferencial dos jogos de treinamento é que eles conseguem abordar temas importantes, e às vezes cansativos, de um jeito dinâmico e intenso, o conteúdo abordado é mesclado com a dinâmica do jogo, de maneira que o treino aconteça durante o andamento do jogo.

1.1.8 Jogos didático-pedagógicos

Os jogos foram criados para gerar diversão aos envolvidos e quando levados à sala de aula pelo professor facilitam a aprendizagem e o desenvolvimento do aluno valorizando o lúdico como forma de auxiliar neste processo, estes são chamados de jogos pedagógicos.

Segundo Grando (1995, p.52), os jogos didático-pedagógicos podem ser classificados em seis categorias:

a) Jogos de azar – melhor seria se fossem chamados de “jogos de sorte”. São aqueles que dependem apenas da “sorte” para vencer o jogo. O jogador não tem como interferir ou alterar na solução. Ele depende das probabilidades para vencer.

b) Jogos Quebra-Cabeça – são aqueles em que o jogador, na maioria das vezes, joga sozinho e a solução ainda é desconhecida para ele.

c) Jogos de Estratégia – Dependem única e exclusivamente do jogador para vencer. O fator “sorte” ou “aleatoriedade” não está presente. O jogador deve estabelecer uma estratégia, que não dependa de sorte, para tentar vencer o jogo.

d) Jogos de fixação de conceitos – O objetivo já está expresso em seu próprio nome: “fixar conceitos”. São os mais comuns, muito utilizados nas escolas que propõem o uso de jogos no processo de ensino.

e) Jogos Pedagógicos – são os jogos que possuem seu valor pedagógico, ou seja, que podem ser utilizados durante o processo ensino-aprendizagem.

f) Jogos Computacionais – são os mais modernos e de maior interesse das crianças e jovens da atualidade. São aqueles projetados e executados no ambiente dos computadores.

1.2 A contribuição dos jogos para aprendizagem Matemática

Existem vários estudos sobre a contribuição dos jogos para a aprendizagem Matemática e muitos pesquisadores recomendam o seu uso na sala de aula.

Segundo Moura (1991, p. 24), o uso de jogos se justifica pois desenvolve a capacidade de lidar com informações e criar significados culturais para os conceitos matemáticos.

Para Piaget (1976 apud FARIA, 1995), os jogos se tornam mais significativos à medida que a criança se desenvolve pois ela passa a reconstruir objetos e reinventar as coisas a partir da livre manipulação de situações variadas, por isso deve-se fornecer à criança um material conveniente para que, ao jogar, ela chegue a assimilar as realidades intelectuais que permaneceriam exteriores a inteligência infantil sem esse material.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

> (...) um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. (BRASIL, 1998, p. 47)

Destacam ainda que a participação em jogos contribui para o desenvolvimento cognitivo, emocional, moral e social, além de estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Flemming e Collaço de Mello (2003) acreditam que o jogo contribui para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais agradável e produtivo para todos os envolvidos.

Assim, observamos que o uso dos jogos pode ajudar os alunos a desenvolverem habilidades importantes, principalmente por tornar o aprendizado mais interessante, desafiador e prazeroso.

1.3 Jogos Matemáticos ao longo da história

Neste tópico apresentaremos um breve relato histórico onde relacionamos os jogos e a matemática. Explicaremos os jogos que auxiliaram e ainda facilitam o ensino da matemática de forma lúdica e divertida desde a antiguidade.

A afinidade do Homem com o jogo dá-se desde o início de sua história, ajudando-o a formar sua cultura, seja em forma de divertimento ou de aprendizado. Os primeiros jogos de que se tem registro envolvendo a Matemática surgiram ainda na Antiguidade, papiros egípcios já a registravam de forma recreativa através de problemas criativos e lúdicos. Antigas civilizações utilizavam os jogos de tabuleiro para os momentos de distração e diversão de seus povos, alguns jogos nem chegaram a ser difundidos em outras civilizações e perderam-se no tempo.

1.3.1 Jogo Real de Ur

No início do século XX, o arqueólogo inglês Leonard Woolley (1880 – 1960), em suas escavações na antiga cidade de Ur, atualmente região do Iraque, descobriu, junto aos túmulos reais, diversos tabuleiros de um jogo que passou a ser chamado de Jogo Real de Ur ou simplesmente Jogo de Ur, sua origem é datada em cerca de 2.500 a.C. e é considerado o jogo mais antigo da humanidade. O mais conservado dos tabuleiros desse jogo encontra-se atualmente no Museu Britânico, em Londres, conforme podemos observar na figura 1.

Figura 1 – Tabuleiro do Jogo Real de Ur

Fonte: MUSEU BRITÂNICO, Londres.

Até hoje não se sabe exatamente como eram as regras originais, porém em meados de 1980, o curador do Museu Britânico, Irving Finkel (1951-), ao examinar tábuas de argila com escritas cuneiformes datadas de 177-176 a.C., descobriu que uma delas descrevia as regras de um antigo jogo de tabuleiro, porém este não era conhecido (figura 2), De acordo com Finkel (THE BRITISH MUSEUM, 2015), “O problema era que se você tem as regras mas não sabe a qual tabuleiro se refere o que faz com as regras?”, por isso ele realizou diversos testes em antigos jogos do Egito e da Mesopotâmia até chegar ao Jogo de Ur onde as regras se encaixaram.

Figura 2 - Tábua cuneiforme contendo instruções em como jogar o "Jogo de Ur"

Fonte: MUSEU BRITÂNICO, Londres

O jogo é composto por um tabuleiro com 20 casas quadradas identificadas com 6 tipos diferentes de ilustrações, 14 peças, sendo 7 de cada cor e 3 dados tetraédricos que possuem dois vértices marcados. O Jogo de Ur é um jogo para dois jogadores cujo objetivo é percorrer todo o percurso do tabuleiro retirando suas peças antes do seu adversário utilizando a melhor estratégia para vencer. Os três dados são lançados simultaneamente, podendo assim obter quatro possíveis resultados de acordo com o número de vértices marcados virados para cima, de acordo com o quadro 1:

Quadro 1 – Pontuação do Jogo de Ur

Três vértices destacados para cima	3 pontos
Dois vértices destacados para cima	2 pontos
Um vértice destacado para cima	1 ponto
Nenhum vértice destacado para cima	4 pontos

Fonte: NETO; SANTOS; SILVA, 2017.

1.3.2 Jogos de Mancala

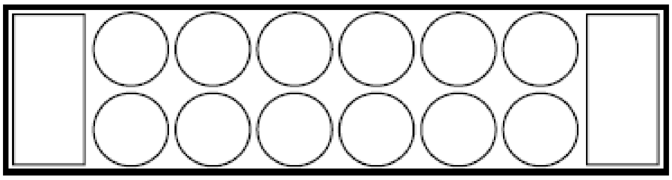
No antigo Egito, cerca de 2000 a.C., surgiram os jogos de *Mancala*, nome dado a um conjunto de aproximadamente 200 jogos de estratégia conhecidos como *jogos* de semeadura e colheita. Neto; Santos; Silva (2004), afirmam que de acordo com a região onde era jogado, *Mancala* recebia um nome, por exemplo, era conhecido como

Ouri no Senegal e como *Bao* na Zâmbia. Existem tabuleiros escavados em antigas rochas, contudo, até hoje, não foi possível descobrir a que período pertencem, podendo assim ter sua origem bem anterior ao que se sabe.

Os jogos de *Mancala* são tradicionalmente praticados em quase toda a África, mas com a facilidade de acesso a informações que temos através da internet, eles foram difundidos em todo o mundo. Apesar de cada jogo ter suas características particulares, o objetivo em todos é o mesmo: conseguir capturar o maior número de sementes e impedir que o adversário continue a jogar.

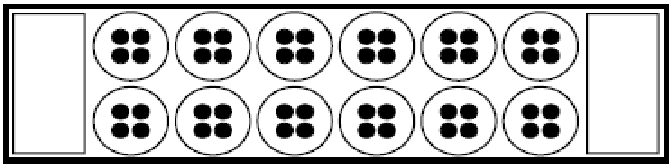
Na versão mais simples de *Mancala*, seu tabuleiro possui duas fileiras (figura 3), com seis casas cada, e dois depósitos, um para cada jogador, para colocar as sementes capturadas durante a partida, cada jogador recebe 24 sementes para serem distribuídas igualmente nas casas de seu campo (4 em cada casa), conforme podemos observar na figura 4. É considerado vencedor o jogador que capturar a metade das sementes mais um, ou seja, 25 sementes.

Figura 3 – Tabuleiro de Ouri antes de iniciar o jogo



Fonte NETO; SANTOS; SILVA, 2017.

Figura 4 – Tabuleiro de Ouri pronto para iniciar o jogo



Fonte: NETO; SANTOS; SILVA, 2017.

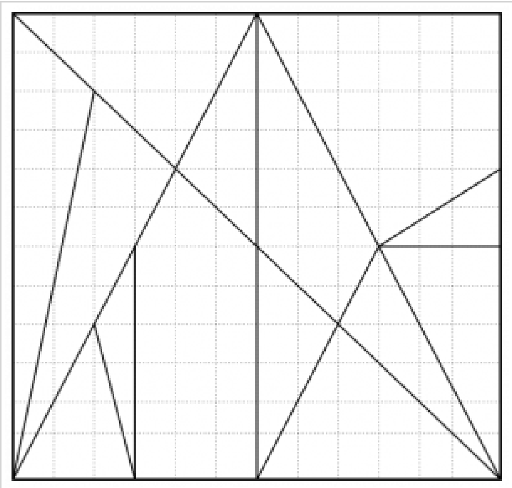
Em uma criança, a *Mancala* estimula o desenvolvimento de operações matemáticas de forma lúdica, como a adição e a subtração; em um adulto, o jogo proporciona o divertimento.

1.3.3 Stomachion

Considerado por muitos como o maior matemático da Grécia Antiga, senão de todos os tempos, Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) inventou o mais antigo quebra-cabeças geométrico, conhecido como *Stomachion*. Com a morte de Arquimedes, seus manuscritos caíram no esquecimento e a matemática grega passou por um período de decadência.

Em 1998, foi descoberto o manuscrito mais antigo de Arquimedes, o *Códex C*, leiloado a um desconhecido por dois milhões de dólares, contendo diversos textos matemáticos, entre eles aquele que se refere ao quebra-cabeças *Stomachion.* O jogo é composto por catorze peças planas de diversas formas poligonais que formam um quadrado (figura 5) e seu objetivo é formar diversas figuras geométricas, figuras humanas, animais etc.

Figura 5 – Stomachion



Fonte: Disponível em: < https://www.mathscareers.org.uk/>
Acesso em: 29 de junho de 2019

A área de cada figura pode ser determinada utilizando-se o Teorema de Pick: "*A área A de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela função*

$$A = \frac{b}{2} + I - 1$$

Onde b é o número de pontos da rede sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.”

Ao calcularmos a área de cada peça do *Stomachion*, encontramos duas peças de área 3, quatro peças de área 6, uma peça de área 9, cinco peças de área 12, uma peça de área 21 e uma peça de área 24. Como a área do quadrado formado por todas as peças é 144, a razão entre a área de cada peça e a área do total do quadrado é, respectivamente, $\frac{1}{48}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}, \frac{1}{12}, \frac{7}{48}\ e\ \frac{1}{6}$, ou seja, um número racional.

Na literatura antiga alguns autores fazem referência ao *Stomachion* como a caixa de Arquimedes, o poeta romano Ausônio (310 – 395) o comparava a uma poesia em que várias métricas são misturadas. Diz a lenda que o objetivo de Arquimedes era descobrir de quantas maneiras distintas era possível formar um quadrado utilizando as catorze peças do jogo, ou seja, tratava-se de um problema de combinação. Não se sabe ao certo se Arquimedes conseguiu descobrir todas as maneiras possíveis de formar um quadrado, hoje em dia comprova-se que existem 17.152 combinações possíveis.

1.3.4 <u>Jogo de NIM</u>

Ao longo dos anos, diversos jogos foram desenvolvidos com objetivo de auxiliar o ensino da Matemática, entre eles, o Jogo de *NIM*. Sua origem não se sabe ao certo, mas reza a lenda que soldados chineses já o jogavam na Idade Média. Além disso, seu nome tem origem desconhecida, alguns acreditam que vem do inglês arcaico, que significa apanhar, outros que a palavra *NIM*, com um giro de 180°, vira *WIN,* que significa vencer e, em alemão, significa tirar. Existem diversas versões, mas em todas o jogo é disputado por dois jogadores ou duas equipes cujo objetivo é não retirar a última peça do jogo. Cada versão possui sua própria estratégia para vencer. *NIM* é um jogo cuja característica consiste em criar uma estratégia para vencê-lo utilizando o raciocínio lógico-dedutivo, não um jogo de azar.

> Dispõe-se sobre uma mesa um certo número N de palitos. Estipula-se que cada jogador, na sua vez, possa retirar, no mínimo 1 palito e, no máximo, n palitos, com n > 1. Supõe-se, ainda, que nem N nem N – 1 sejam múltiplos de n + 1. Perde o jogador que retirar o último palito. (HEFEZ, 2012, p. 77)

1.3.5 Torre de Hanói

O matemático francês Edouard Anatole (1842 – 1891), no ano de 1883, inspirado em uma lenda hindu, criou o jogo chamado Torre de Hanói ou Torre de Bramanismo. Seu tabuleiro consiste em uma base com três hastes, em uma delas inicialmente são dispostos discos uns sobre os outros, por ordem crescente de diâmetro, formando assim uma torre (figura 6). O objetivo é mover toda a torre de uma haste para outra, movendo um disco por vez de modo que um disco de diâmetro maior nunca fique em cima de outro de diâmetro menor, com o menor número possível de movimentos.

Figura 6 – Torre de Hanói

Fonte: Disponível em: < https://bit.ly/3lflMAe >. Acesso em 24 de jun. de 2019

Observando o número mínimo de movimentos para transferir a torre de uma haste para outra, respeitando as regras do jogo, nota-se que os resultados são potências de dois menos uma unidade, como podemos observar no quadro 2.

Quadro 2 – Número mínimo de movimentos

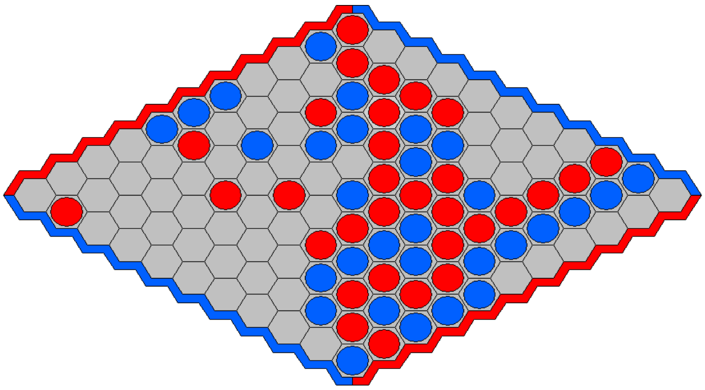
Quantidade de peças	**Número mínimo de movimentos**
n = 1	1
n = 2	3
n = 3	7
n = 4	15
n = 5	31
⋮	⋮
N	$2^{n} - 1$

Fonte: A AUTORA, 2019

1.3.6 Hex

No século XX, na década de 40, surgiram os jogos de conexão. Piet Hein (1905 – 1996), matemático e físico dinamarquês, publicou em 1942 um artigo no qual ele descreve um jogo chamado de POLÍGONO. Mas, em 1948, de forma independente, sem ter conhecimento da invenção de Hein, o norte-americano John Nash (1928 – 2015) apresentou este mesmo jogo como invenção própria. Em ambos, o tabuleiro era constituído de hexágonos regulares adjacentes em linhas e colunas. Normalmente, o número de linhas é igual ao número de colunas para que assim o tabuleiro tenha o formato de um losango, podendo ser 11x11, 13x13, 19x19 e etc. Nos anos 50, a partir da comercialização do jogo como brinquedo por parte de uma empresa americana, passou a ser chamado de HEX, como é conhecido atualmente. HEX é um jogo de estratégia para dois jogadores: cada jogador escolhe a cor de suas peças (diferente da cor escolhida pelo seu adversário) e o objetivo é unir dois lados opostos e paralelos do tabuleiro com as suas peças, de acordo com a figura 7.

Figura 7 – Tabuleiro 11x11 de HEX



Fonte: Disponível em: < https://www.maths.ed.ac.uk/>
Acesso em: 29 de junho de 2019.

Os jogos como instrumento lúdico vem ao longo dos anos contribuindo de maneira significativa no ensino da Matemática, sua utilização contribui para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem, permitindo que o aluno experimente, acerte, erre e essencialmente aprenda.

1.4 Jogos recentes para o ensino da Álgebra

Neste tópico serão apresentados alguns jogos para o ensino de Álgebra. Além de serem instrumentos lúdicos para o ensino da matemática foram selecionados pois são de fácil confecção, o que viabiliza seu uso em ambientes com poucos recursos.

1.4.1 Dominó da álgebra

Categorias:

- Jogos de mesa.
- Jogos de estratégia.
- Jogos de treinamento.

Objetivo:

Levar o aluno a calcular o valor numérico de uma variável qualquer com o uso das quatro operações aritméticas, reconhecer e resolver uma equação do 1° grau com uma incógnita dando significado à definição e às técnicas de resolução.

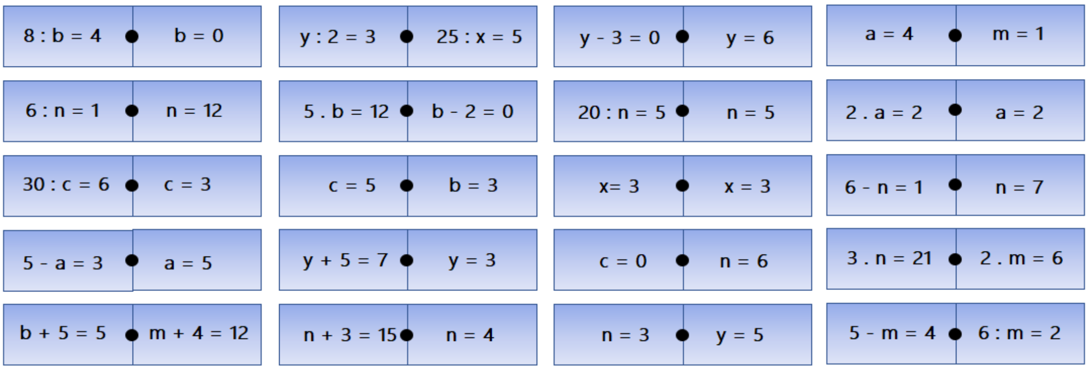
Conteúdos:

Valor numérico de uma expressão algébrica.
Quatro operações aritméticas.
Equação do 1° grau.

Materiais utilizados:

Cópia do jogo de dominó (figura 8), cola, cartolina, tesoura, papel *contact* transparente e lápis de cor.

Figura 8: Peças do jogo



Fonte: MARTINS, 2012, p. 16.

Regras do jogo (MARTINS, 2012)**:**

- Os participantes do jogo deverão formar grupos de quatro pessoas.
- Cada participante receberá sete peças.
- A peça de saída será (m = 8, m = 8).
- O próximo participante a jogar será o que estiver imediatamente à direita daquele que inicia a partida; caso este não tenha a pedra, "passará a vez" ao próximo e assim sucessivamente.
- Será vencedor aquele que conseguir encaixar primeiro, no dominó exposto à mesa, todas as suas peças.
- Caso não existam opções de jogada para nenhum dos participantes (fechamento do jogo), o vencedor será aquele que tiver a menor quantidade de peças nas mãos; persistindo o empate, o vencedor será o que tiver a peça de menor valor.

1.4.2 Dominó da fatoração algébrica

Categorias:

- Jogos de mesa.
- Jogos de estratégia.
- Jogos de treinamento.

Objetivo:

Exercitar fatoração algébrica.

Conteúdos:

Expressões algébricas; Operações com expressões algébricas; Fatoração algébrica.

Materiais utilizados:

28 peças previamente confeccionadas, conforme podemos observar o modelo na figura 9.

Figura 9: Peças do dominó

$M^2 - 2M + 1$	$(M - B)(M + B)$
$M^2 - B^2$	$(M + 1)^2$
$M^2 + 2MB + B^2$	$(M - 1)(M + 1)$
$M^2 + 2M + 1$	$(M - 1)(M + 1)$
$M^2 + 2M + 1$	$(M - 1)^2$
$M^2 - 2MB + B^2$	$(M + 1)^2$
$M^2 - 1$	$(M - B)^2$
$4M^2 + 4M + 1$	$(M - B)^2$
$M^2 - 2M + 1$	$(2M + 1)^2$
$M^2 + 2MB + B^2$	$(M - 1)^2$
$4M^2 + 4M + 1$	$(M - 1)(M + 1)$
$M^2 + 2MB + B^2$	$(2M + 1)^2$
$M^2 - 2MB + B^2$	$(M - B)(M + B)$
$M^2 - 2M + 1$	$(M - B)^2$

$M^2 - 2MB + B^2$	$(M + B)^2$
$M^2 - 1$	$(M - B)(M + B)$
$M^2 + 2MB + B^2$	$(M + B)^2$
$M^2 - B^2$	$(M + B)^2$
$M^2 - 2MB + B^2$	$(M - B)^2$
$4M^2 + 4M + 1$	$(M + 1)^2$
$M^2 - B^2$	$(M - B)(M + B)$
$M^2 + 2M + 1$	$(M + B)^2$
$M^2 + 2M + 1$	$(M + 1)^2$
$M^2 - 2M + 1$	$(M - 1)^2$
$M^2 - 1$	$(M - 1)^2$
$M^2 - B^2$	$(2M + 1)^2$
$4M^2 + 4M + 1$	$(2M + 1)^2$
$M^2 - 1$	$(M + 1)(M - 1)$

Fonte: SILVA, 2012, p. 23.

Regras do jogo (SILVA, 2012)**:**

- Embaralham-se as peças com os registros virados para baixo e distribuem-se sete peças para cada jogador. Sorteia-se o primeiro a jogar e, se esse jogador possuir uma peça carretão (peça que apresenta um par de expressões equivalentes), ele inicia o jogo colocando-a no centro da mesa; caso contrário, seguindo o sentido horário, o primeiro a jogar será aquele que possuir um carretão.
- O jogo prossegue de modo que o próximo jogador tenha uma peça que possa ser justaposta a um dos extremos da cadeia de peças da mesa, respeitando-se a equivalência entre as expressões.
- O jogo continua desta maneira até que um dos jogadores não tenha mais peças ou até que o jogo fique "trancado", ou seja, nenhum jogador consegue colocar mais peças.
- O vencedor será aquele que colocar todas as suas peças no jogo.
- Caso o jogo fique "trancado", vence aquele que possuir o menor número de peças.

1.4.3 <u>Baralho da fatoração</u>

Categorias:

- Jogos de mesa.
- Jogos de cartas.
- Jogos de estratégia.
- Jogos de treinamento.

Objetivo:

Levar o aluno a associar um produto notável à sua forma fatorada.

Conteúdos:

Produtos notáveis.
Fatoração.

Materiais utilizados:

Pares de cartas com produtos notáveis e suas respectivas formas fatoradas (figura 10).

Figura 10: Cartas do Baralho

$(2x + x^2).(x - 3)$	$y^4 + 8y^2 + 16$	$(x - 2)^2$	$x^2 - 4x + 4$	$(a + 1).(a + c)$
$(y^2 + 4)^2$	$a^2 + a + ac + c$	$x.(x - 1)^2$	$x^3 - 2x^2 + x$	$x^2.(x - 5)$
$x^3 - 5x^2$	$(x^2 - y).(x^2 + y)$	$x^4 - y^2$	$(x - 3).(x + 3)$	$x^2 - 9$
$2x.(x^2 - 2x + 3)$	$2x^3 - 4x^2 + 6x$	$2x(x - 3) + x^2(x - 3)$	$(x + 3)^2$	$x^2 + 6x + 9$

Fonte: SILVA, 2012, p. 26.

Regras do jogo (SILVA, 2012)**:**

- Reunidos em um grupo de quatro alunos, escolhe-se um aluno para embaralhar e distribuir as cartas entre os jogadores e cada um verifica se, com as cartas recebidas, consegue formar um par de cartas no qual uma apresenta o registro de um produto notável e a outra a sua forma fatorada.
- Os pares formados são colocados sobre a mesa com os registros à vista para que todos confiram se a correspondência está correta. Caso todos os jogadores

tenham mais de uma carta em suas mãos, decide-se, por algum critério, quem dará início ao jogo.

- Caso um ou mais jogadores fique com apenas uma carta em suas mãos, um deles deverá iniciar o jogo retirando uma carta do jogador à sua esquerda e verificar se formou um par com ela.
- O jogo prossegue de modo que o jogador que estiver à sua direita retire uma carta do jogador à sua esquerda, até que apenas um jogador fique com uma única carta em suas mãos.
- Quando o jogador ficar sem cartas em suas mãos, ele sai do jogo. São considerados vencedores, todos aqueles que ficam sem cartas em suas mãos.

1.4.4 Corrida algébrica

Categorias:

- Jogos de mesa.
- Jogos de tabuleiro.
- Jogos de estratégia.
- Jogos de treinamento.

Objetivo:

Trabalhar expressões algébricas e operações com números inteiros familiarizando os alunos com este conteúdo.

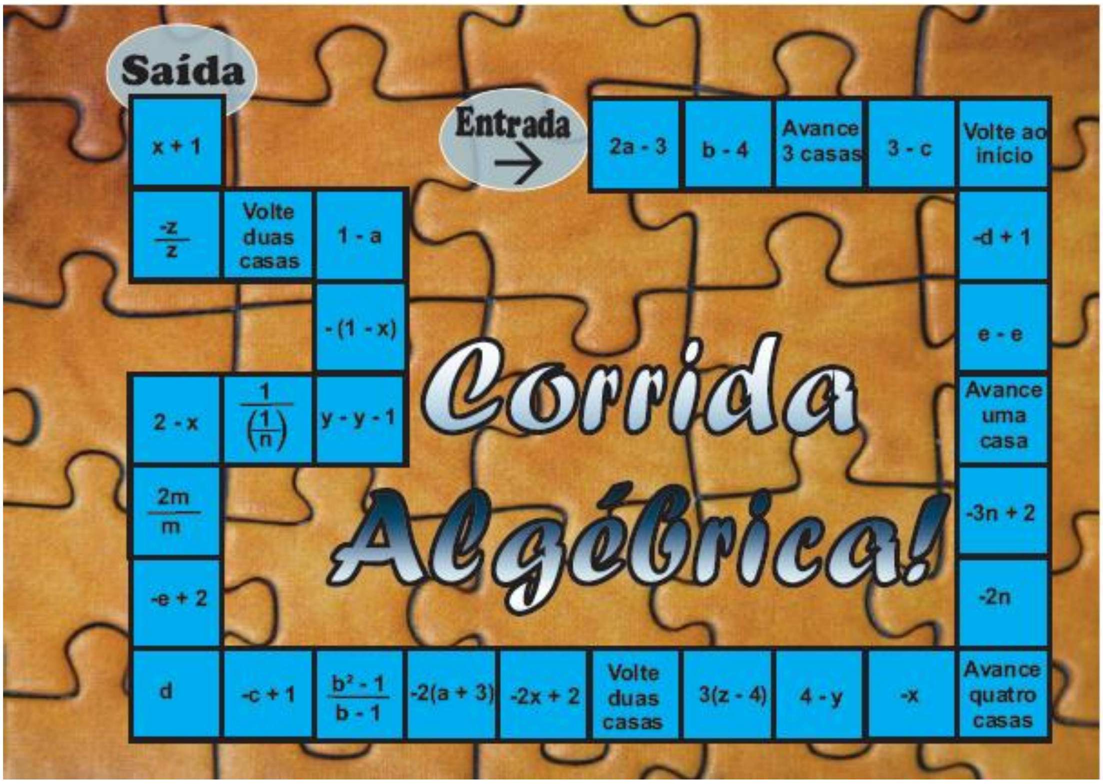
Conteúdos:

Expressões algébricas.
Operações com números inteiros.

Materiais utilizados:

Peões, tabuleiro (figura 11), cartões com expressões algébricas, cartões do tipo “tente a sorte” e dois dados.

Figura 11: Tabuleiro do jogo Corrida Algébrica



Fonte: A AUTORA, 2021.

Regras do jogo (SILVA, 2012)**:**

- O jogo terá de 2 a 4 jogadores. Ao iniciar a partida, cada jogador deve posicionar o seu peão sobre a casa ***2a – 3*** do tabuleiro e atuar de forma alternada em relação aos seus companheiros.
- O sorteio do jogador que dará início à partida será feito a partir do lançamento do dado: o aluno que conseguir o maior valor depois que o dado é lançado inicia a partida; o jogo terá sua sequência de forma decrescente, baseado nos valores encontrados nos dados, ou seja, aquele que tirar o valor mais baixo no lançamento do dado será o último a participar (caso dois jogadores encontrem

o mesmo número no lançamento do dado, pode-se pedir que eles escolham de forma cordial quem será o primeiro a jogar).

- O jogador da vez faz o lançamento do dado. Ele terá que escolher se vai usar o número obtido ou oposto dele e, assim que se decidir deverá substituí-lo na expressão algébrica para obter o valor numérico. Esse valor numérico será o número de casas que devem ser avançadas no tabuleiro por esse participante. Se ele obtiver, por exemplo, o valor numérico 2, avança duas casas; se achar - 3, volta três casas sobre o tabuleiro.
- Quando o valor numérico for negativo e seu valor absoluto for maior que o número de casas que o peão andou, devera retroceder apenas até a casa da largada. Por exemplo, se o peão do jogador estiver na segunda casa (b - 4) e o jogador obtiver 1 no lançamento do dado, o valor numérico obtido será - 3, então o peão deveria retroceder $|-3|$= 3 casas, mas ele voltará somente até a largada.
- Vence o jogo aquele que chegar primeiro ao ponto final do trajeto.

1.4.5 Bingo algébrico

Categorias:

- Jogos de mesa.
- Jogos de azar.
- Jogos de treinamento.

Objetivo:

Relacionar linguagem materna e linguagem algébrica, através de tirinhas utilizadas para sorteio.

Conteúdo:

Expressões algébricas.

Materiais utilizados:

Bolas de bingo (podem ser números escritos em pedaços de papel).
Tirinhas (quadro 3) associando os números sorteados às expressões.
Cartelas do bingo com expressões algébricas associadas às tirinhas.

Quadro 3 – Tirinhas para o sorteio

1	O triplo do número b somado com o dobro do número a.
2	O quadrado do número real y.
3	O valor aproximado do número irracional π.
4	A raiz quadrada do número 121.
5	A raiz quadrada do número 81.
6	A soma do dobro de um número x com 10.
7	O quadrado de um número real x adicionado ao dobro de outro número real y.
8	Símbolo do conjunto dos números naturais.
9	Expressão algébrica que representa o custo de 2 lápis e 3 canetas.
10	A raiz quadrada de 9.
11	O perímetro de um retângulo que mede 5 cm de largura e 8 cm de comprimento.
12	O dobro do número a.
13	A raiz quadrada do número 16 mais uma unidade.
14	O dobro do número real y.
15	A raiz quadrada do número 81 menos duas unidades.
16	A raiz quadrada exata do número 100.
17	Símbolo do conjunto dos números inteiros.
18	O dobro do número y adicionado a duas unidades.

Fonte: SILVA, 2012, p. 19

A seguir podemos observar os modelos de cartelas (figura 12) utilizadas para a realização do jogo.

Figura 12: Cartelas do Bingo algébrico

b^3	9	5	3,14	8
10	26	y^2	$3b+2a$	x^2+2y

10	26	$2x+3y$	b^3	y^2
3,14	5	9	$2x+10$	8

$2y$	16	26	9	5
10	N	$2x+3y$	b^3	$2x+10$

5	Z	3,14	16	$2x+10$
$2x+3y$	8	9	y^2	N

x^2+2y	8	3,14	$2y$	b^3
$2x+3y$	N	26	10	Z

y^2	x^2+2y	$2y$	10	26
5	8	3,14	$2x+3y$	N

Fonte: SILVA, 2012, p. 19.

Regras do jogo (SILVA, 2012)**:**

- Pegue sua cartela e, conforme o professor for sorteando as tirinhas (bolas do bingo), observe os números ou expressões que nelas aparecem, marcando quando representar a escrita da tirinha sorteada.
- Vence o bingo quem preencher primeiro sua cartela.

1.4.6 Quadrática

Categorias:

- Jogos de mesa.
- Jogos de tabuleiro.
- Jogos de estratégia.
- Jogos de treinamento.

Objetivos:

Resolver equações do 2º grau.

Associar equações do 2º grau com suas respectivas raízes.

Conteúdo:

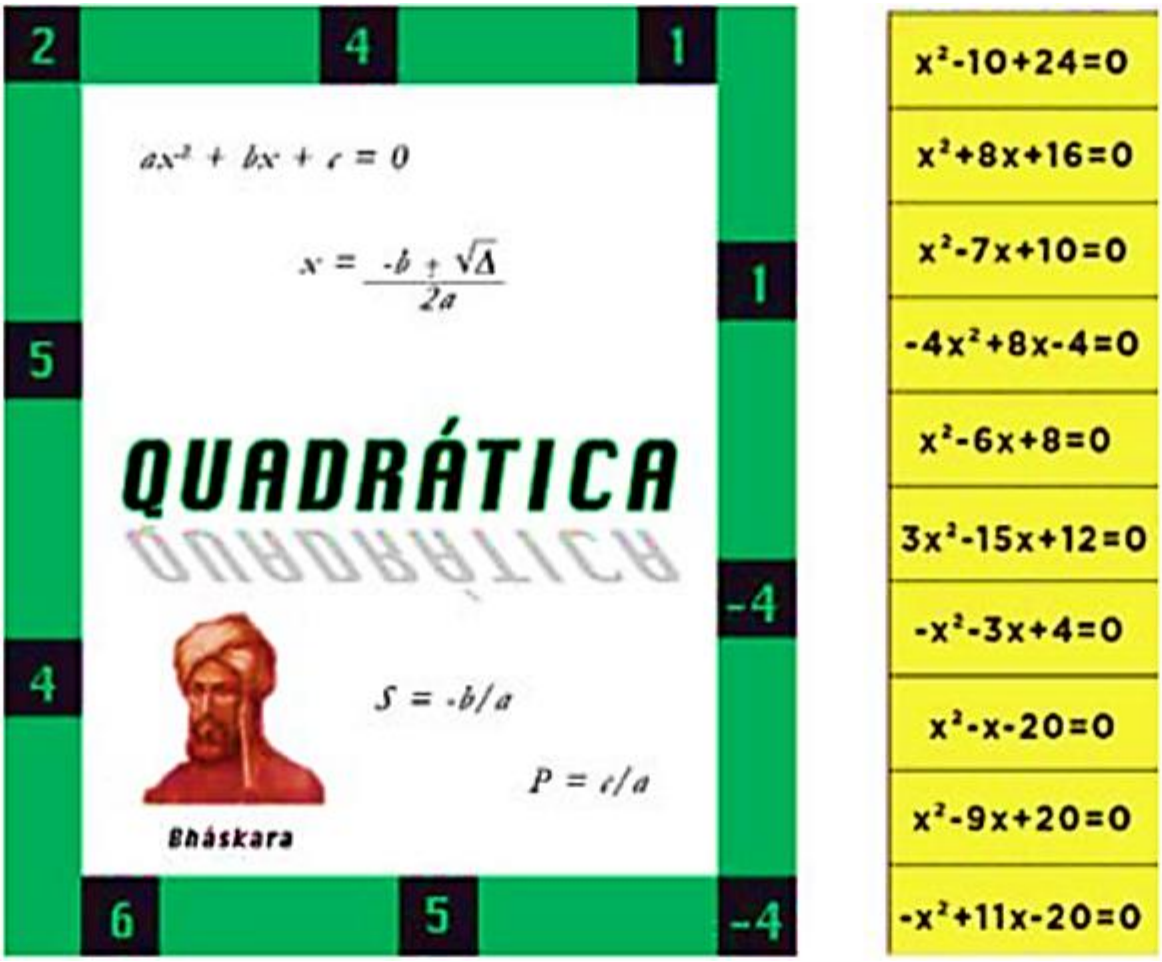
Equação do 2° grau completa.

Materiais utilizados:

Tabuleiro (figura 13) com 10 espaços vazios (destacados pela cor verde) e 10 raízes pré-definidas.

10 equações do 2º grau.

Figura 13: Tabuleiro do jogo Quadrática



Fonte: ENGELMANN, 2014, p. 130

Regras do jogo (ENGELMANN, 2014)**:**

- O jogador recebe 10 equações do 2º grau.

- Para que o jogador possa distribuir as equações pelo tabuleiro, nos lugares corretos, ele deve encontrar as raízes de cada uma.
- Os valores contidos no tabuleiro são as raízes das equações que o jogador recebe.
- Se uma equação possui duas raízes reais diferentes, como 2 e 4, por exemplo, esta deve ser colocada entre os valores 2 e 4 no tabuleiro.
- Se uma equação possui duas raízes reais iguais, como 1, por exemplo, esta deve ser colocada entre os valores 1 e 1 no tabuleiro.
- O jogador pode utilizar o método de resolução que ele achar melhor, seja com a fórmula de Bháskara, com a soma e o produto das raízes, ou até mesmo de forma geométrica.
- O objetivo é colocar todas as equações nos devidos lugares do tabuleiro.

1.4.7 Vai e vem das equações do 2º grau

Categorias:

- Jogos de mesa.
- Jogos de tabuleiro.
- Jogos de estratégia.
- Jogos de treinamento.

Objetivos:

Resolver equações do 2º grau.
Testar métodos de resolução de equações.

Conteúdos:

Regra de sinais.
Operações com números reais.

Equação do 2° grau.

MATERIAIS UTILIZADOS:

Cartas com as equações (figura 14).

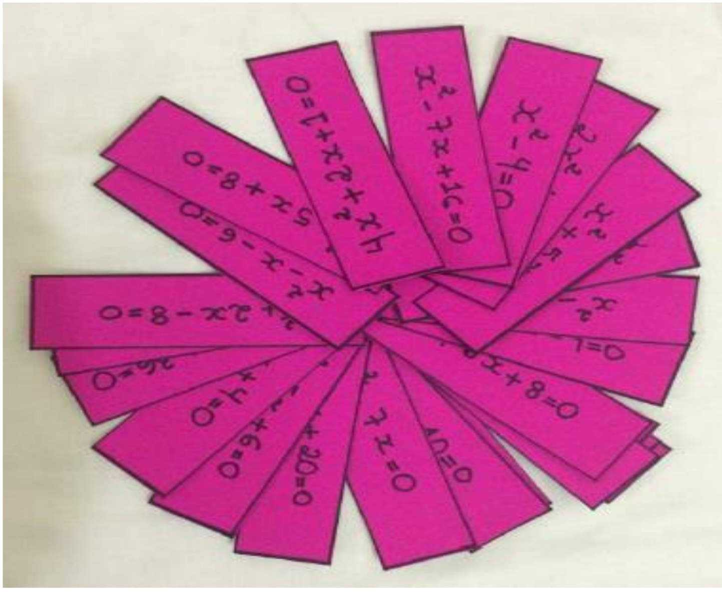
Fichas de inversão de sinal (figura 15).

Tabuleiro do jogo (figura 16).

Pinos.

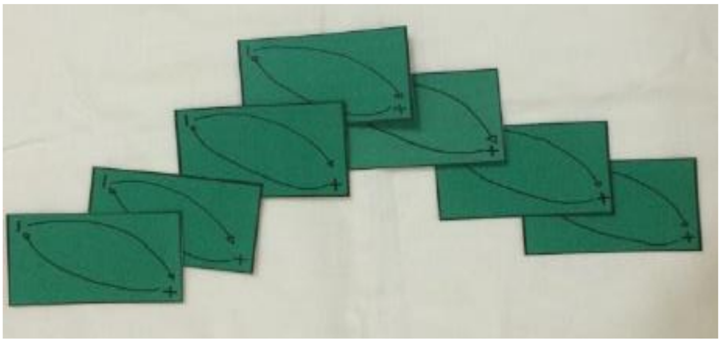
Rascunho para cálculos.

Figura 14: Cartas de equação



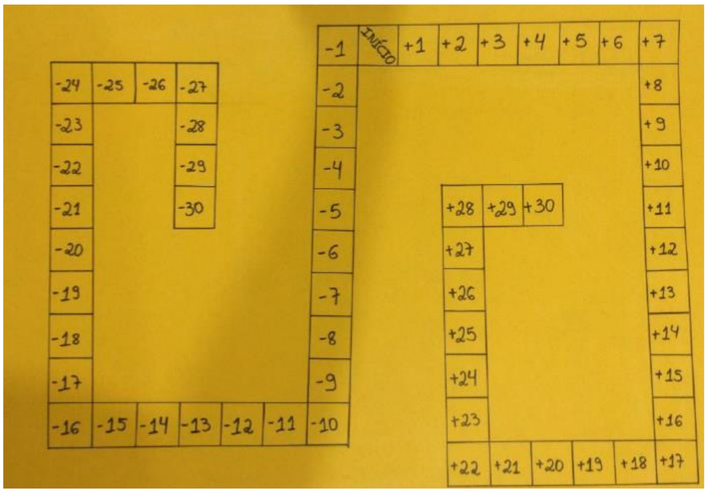
Fonte: PERES, 2014, p. 17

Figura 15: Fichas de inversão de sinais



Fonte: PERES, 2014, p. 17

Figura 16: Tabuleiro do jogo Vai e Vem



Fonte: PERES, 2014, p. 17

Regras do jogo (PERES, 2014)**:**

- Os participantes deverão ser divididos em grupos de quatro pessoas que formarão duas duplas para competir.
- Cada grupo receberá um tabuleiro, pinos, cartas com equações e seis fichas de inversão de sinal.
- Cada dupla sorteia uma equação e a resolve. Em seguida, trocam as soluções com a dupla adversária para correção. Após a correção, as soluções são devolvidas para a dupla de origem.
- A dupla que errar a solução da equação permanece na mesma posição no tabuleiro; a dupla que acertar opera as duas raízes encontradas escolhendo uma das quatro operações básicas.
- O resultado, incluindo o sinal, será o número de casas que a dupla irá caminhar no tabuleiro. Se o resultado é positivo caminha no sentido positivo e se o resultado for negativo caminha no sentido negativo. Se a equação não tiver raízes reais, a dupla caminha cinco casas na direção que quiser.
- Antes de movimentar os pinos, os jogadores podem inverter o sinal do resultado da operação, utilizando as fichas de inversão de sinal, é só falar e devolver a ficha à mesa. Isso pode ser feito três vezes durante o jogo.
- Vence quem alcançar primeiro a chegada positiva ou negativa.

1.4.8 Danômio

Categorias:

- Jogos de mesa.
- Jogos de estratégia.
- Jogos de treinamento.

Objetivo:

Aprimorar o conhecimento da multiplicação de monômios.

Conteúdo:

Multiplicação de monômios.

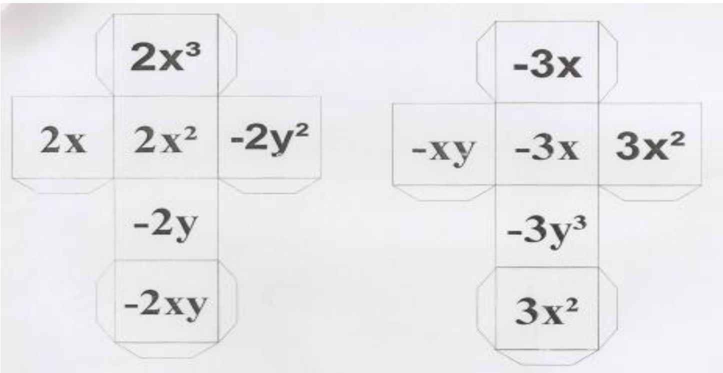
Materiais utilizados:

Dados feitos de papel com um monômio em cada face (figura 17).

6 tabelas que apresentam todas as combinações de produtos dos monômios de cada dado (figura 18).

Lápis de cor.

Figura 17: Modelo do dado utilizado no Danômio



Fonte: FIETZ; MARTINS, 2010, p. 520

Figura 18: Tabela do jogo Danômio

$6x^4$	$-6x^3y^3$	$-6xy^3$
-$2x^4y$	-$2x^2y$	$-6x^2$
$6x^5$	$6x^3$	$-6x^3$

-$2x^3y$	$2xy^3$	$2x^2y^2$
$6x^4$	$2xy^3$	$6xy^2$
$-6x^2y^3$	$6y^5$	$6xy$

$6y^4$	$-6x^2y^3$	$2xy^3$
$-6x^2y^3$	$-6x^3y$	$-6x^2$
$6x^2y$	$6xy^4$	$6x^3$

$-6x^3y^3$	$2x^2y^2$	$2xy^3$
-$2x^2y$	-$2x^3y$	$-6x^2$
$-6x^3$	$6xy^4$	$6x^3$

$-6x^3y$	$-6x^4$	-$6x^2y^2$
-$2x^3y$	$-6x^2$	$6x^3$
$-6x^2y^3$	$2xy^3$	$-6x^2y$

$6xy^2$	$-6x^2y^2$	$-6xy^2$
$-6xy^3$	$-6x^3y$	$-6x^2$
$6y^5$	$6xy^4$	$-6x^3$

Fonte: FIETZ; MARTINS, 2010, p. 520

Regras do jogo (FIETZ; MARTINS, 2010)**:**

- Dividir os alunos em grupos de participantes que irão competir individualmente.
- Distribuir o material para os grupos (em sala de aula, a sugestão é que os professores trabalhem com grupos formados por duplas ou trios).
- Cada dado deve ser pintado de uma cor diferente.
- Decide-se quem inicia a disputa.
- Cada aluno do grupo deverá escolher a tabela que iniciará jogando.
- O aluno deve jogar os dois dados e fazer o produto entre as duas faces superiores, procurando o valor correspondente ao produto na tabela.
- Caso encontre, e esteja correto, deverá pintar o quadradinho referente.
- O próximo jogador irá jogar os dois dados e pintar, com seu lápis, um quadradinho que tenha o valor correspondente ao produto das duas faces. Assim sucessivamente até que alguém feche uma trinca com sua cor (na horizontal, vertical ou diagonal).
- Se, ao jogar o dado, o produto que aparecer já estiver pintado o jogador perde sua vez.
- Quando o jogador fechar uma trinca em uma das tabelas ele a conquistou.

- Ao conquistar a primeira tabela, o aluno deverá escolher a segunda tabela para continuar jogando e assim sucessivamente.
- O jogo termina quando um jogador fechar uma trinca e não tiver mais tabelas disponíveis para escolher.
- Vencerá o jogo quem ganhar mais tabelas.

1.4.9 Memória polinomial

Categorias:

- Jogos de mesa.
- Jogos de cartas
- Jogos de treinamento.

Objetivos:

Buscar, através desta atividade, a associação entre termos algébricos e uma representação geométrica (envolvendo área e volume de algumas figuras fundamentais com certos produtos notáveis).

Formar pares entre a figura e a representação correta de sua área (no caso de figuras bidimensionais) ou volume (no caso das figuras tridimensionais).

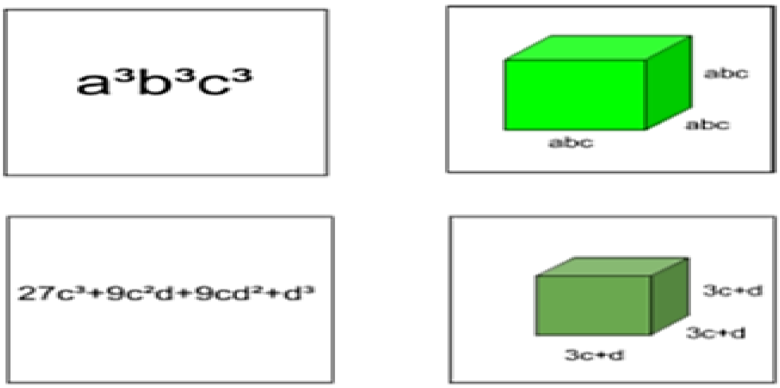
Conteúdos:

Operações com polinômios.
Produtos notáveis.
Cálculo de áreas e volumes.

Materiais utilizados:

Cartas previamente confeccionadas (figura 19).

Figura 19: Modelo das Cartas



Fonte: Disponível em: < http://pibid.icmc.usp.br/arquivos/jogo_Pa.pdf? >.
Acesso em: 27 de jun. de 2019.

Regras do jogo (LEITE, 2019):

- As cartas são inicialmente separadas em dois montes, um com as cartas que constituem as figuras, chamado monte geométrico, e outro com as cartas que representam as expressões, chamado monte algébrico. Após esta divisão, as cartas são embaralhadas nos seus respectivos montes e colocadas com a face voltada para baixo, de modo que todas as cartas sejam visíveis e seja nítida a separação dos montes.
- Escolhe-se um jogador para começar e, a partir dele, alternam-se as jogadas em sentido horário dos jogadores.
- O jogador da vez tem direito a virar duas peças com a face para cima, uma do monte geométrico e outra do monte algébrico.
- Para tomar para si o par, o jogador da vez deve relacionar corretamente as peças. Cabe ao jogador da vez julgar se o par está correto ou não. Caso ele julgue incorretamente temos os seguintes caso:

a) Se ele julgar correto estando errado, ele fica uma rodada sem jogar;

b) Se ele julgar errado estando certo, ele não tem direito ao par, que deve ser movido para uma pilha de descartes.

- O processo se repete até que todas as peças tenham sido recolhidas ou colocadas na pilha de descarte.
- Ganha o jogador que tiver mais pares em seu poder.

2 CONHECENDO OS JOGOS PERFIL MATEMÁTICO E BARALHO DAS EQUAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos os jogos, objetos de estudo desta pesquisa, Perfil Matemático e Baralho de Equações, criados pela autora, bem como os conceitos matemáticos envolvidos no desenvolvimento de cada um deles.

2.2 Perfil Matemático

Os jogos despertam nos alunos a capacidade de desenvolver diversas habilidades, tais como observação, tomada de decisão, suposição, dedução, que estão ligadas diretamente ao raciocínio lógico. E, pensando no desenvolvimento dessas habilidades, no ensino da Matemática de forma lúdica e inspirado no jogo de adivinhação Perfil[1], foi criado o jogo Perfil Matemático: um jogo que desenvolve nos alunos as habilidades necessárias para uma melhor compreensão de diversos temas matemáticos.

Perfil Matemático é um jogo de tabuleiro criado pela autora, onde os jogadores precisam reconhecer equações do 2º grau, figuras geométricas e números reais através de uma sequência de dicas, reveladas uma a uma. Por se tratar de um jogo que utiliza conhecimentos matemáticos específicos, o Perfil Matemático é indicado para alunos a partir do 9º ano do Ensino Fundamental II.

O jogo é composto por:

- 01 Tabuleiro (veja figura 20);
- 90 cartas contendo dicas, cada uma contendo 10 dicas (veja as figuras 21, 22 e 23);
- 10 cartas interrogação, cada uma contendo ações a serem realizadas pelo jogador (veja a figura 24);

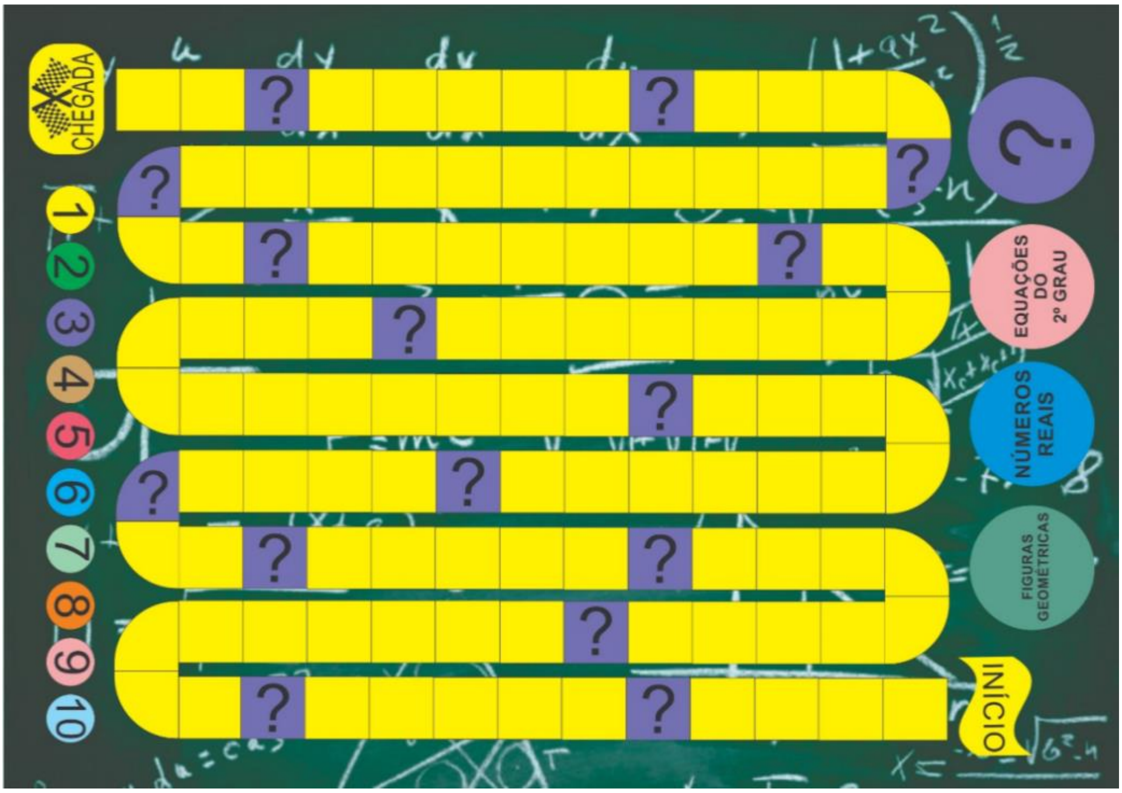
[1] Jogo clássico de tabuleiro da empresa Grow que estimula o desenvolvimento de conhecimentos gerais e a capacidade de dedução dos participantes. Embora tenha várias versões, em todas as regras são as mesmas.

- 13 fichas coloridas, sendo 10 fichas de uma única cor e 03 fichas de outra cor;
- 06 peões.

As cartas que fornecem as dicas são distribuídas em três categorias distintas:

- Equações do 2º Grau: qualquer equação polinomial do segundo grau, seja completa ou incompleta, cujas raízes sejam números reais.
- Figuras Geométricas: qualquer figura geométrica plana ou espacial; quando plana polígono ou não polígono, quando espacial, poliedro ou corpo redondo.
- Números reais: qualquer número pertencente ao conjunto dos números reais.

Figura 20 – Tabuleiro do jogo Perfil Matemático

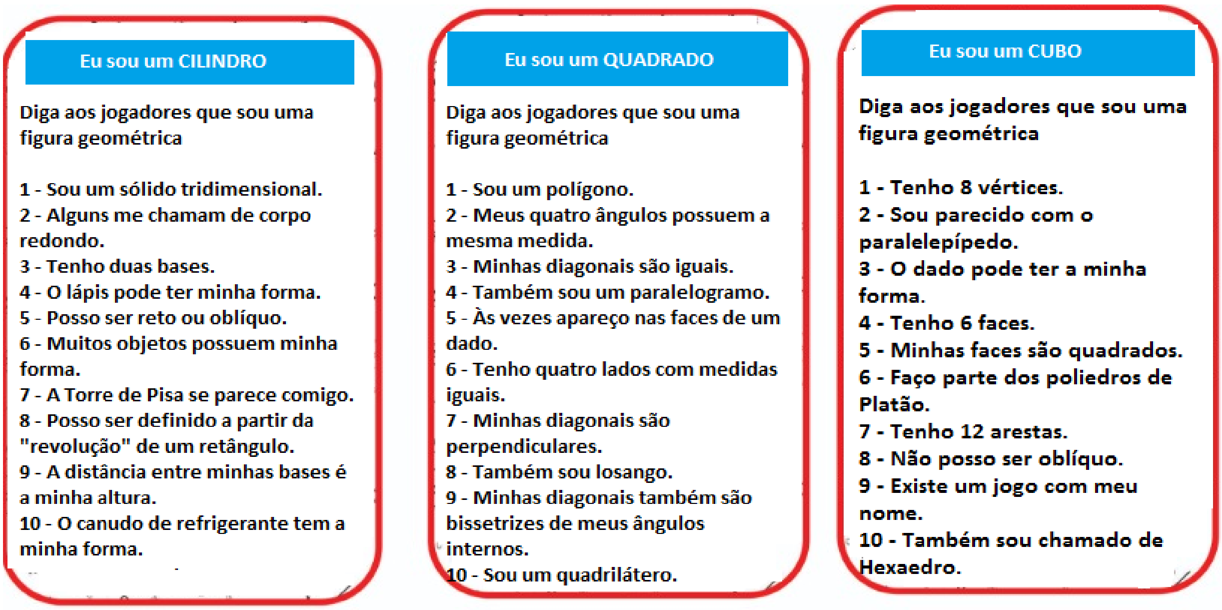


Fonte: A AUTORA, 2019.

Figura 21 – Modelo de cartas da categoria equações do 2º grau

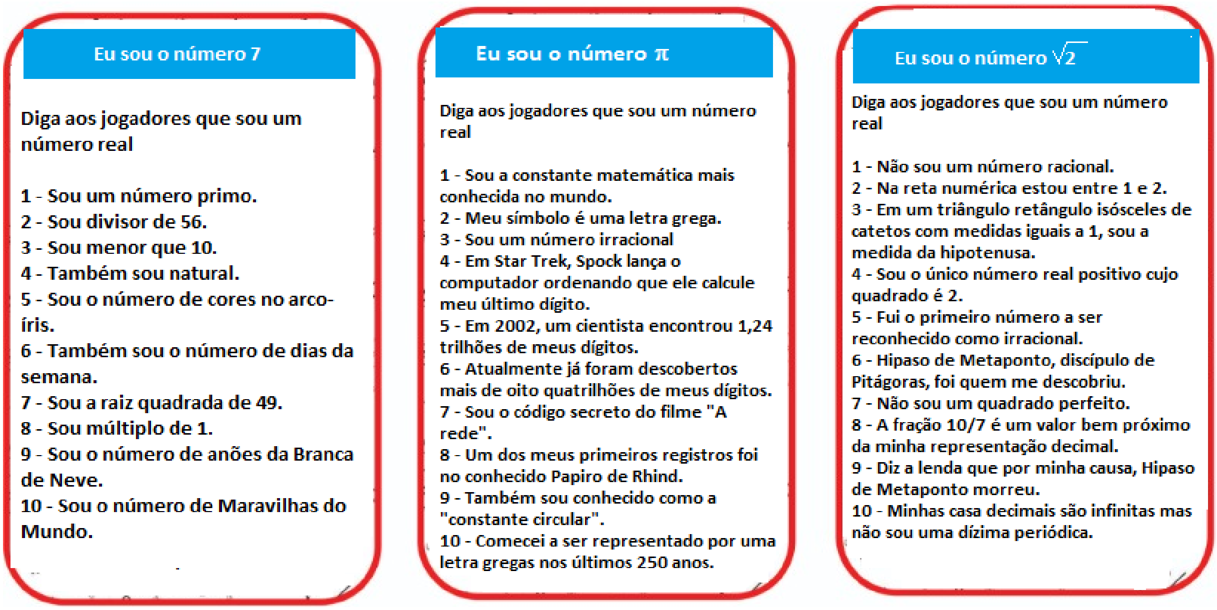
Fonte: A AUTORA, 2019.

Figura 22 – Modelo de cartas da categoria figuras geométricas



Fonte: A AUTORA, 2019.

Figura 23 – Modelo de cartas da categoria números reais



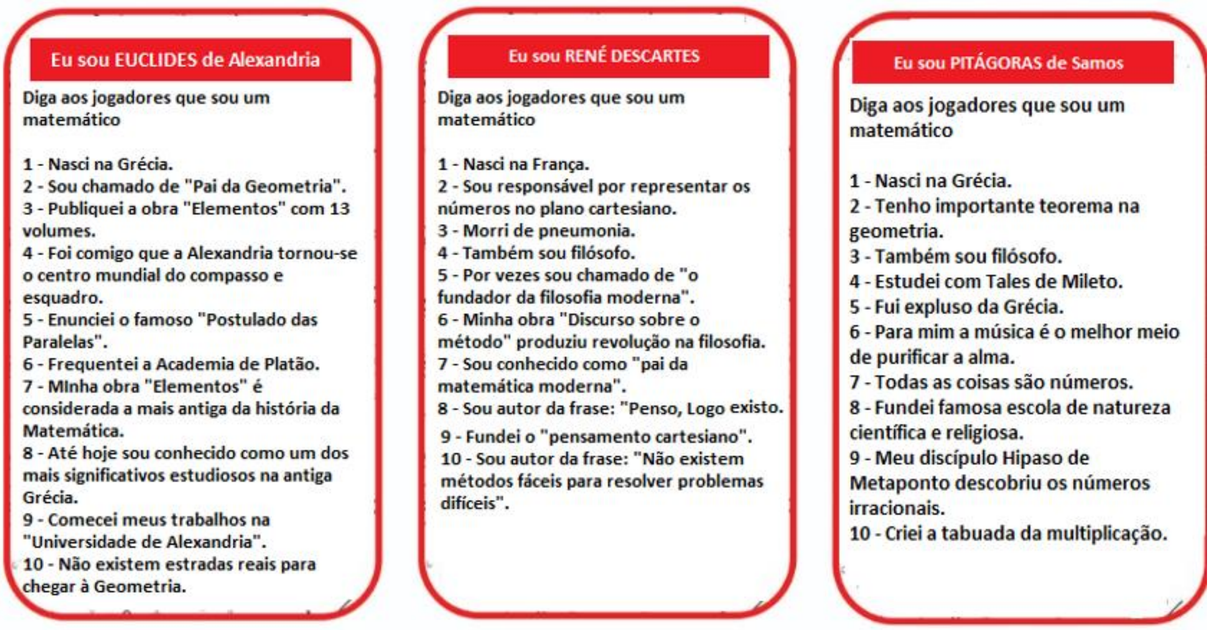
Fonte: A AUTORA, 2019.

Figura 24 – Modelo de cartas interrogação

Fonte: A AUTORA, 2019

Inicialmente, assim como no jogo original, o Perfil Matemático foi criado com quatro categorias: equações do 2º grau, figuras geométricas, números reais e grandes matemáticos. Aplicamos esta primeira versão do jogo para alunos do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) e eles tiveram grande dificuldade em reconhecer os nomes da categoria Grandes Matemáticos (figura 25). A partir desta observação dos alunos, com o intuito de melhorar o andamento do jogo, foi retirada então a categoria Grandes Matemáticos.

Figura 25 – Modelo de cartas da categoria Grandes Matemáticos



Fonte: A AUTORA, 2019

Regras do jogo:

O jogo pode ser disputado de 2 a 6 jogadores ou por 2 a 6 times. As cartas são colocadas no tabuleiro, no lugar indicado e, cada jogador ou time coloca seu peão na casa do tabuleiro onde está marcado “início”.

- Os jogadores decidem entre si quem começa o jogo. O jogador escolhido será o mediador. Ele deverá pegar a primeira carta de dicas entre as cartas do jogo e dizer aos demais jogadores em qual categoria a carta se enquadra (equação do 2º grau, figuras geométricas ou números reais).
- O jogador sentado à esquerda do mediador escolhe um número de 1 a 10. O mediador lê em voz alta a dica correspondente ao número escolhido pelo jogador.
- Após a leitura da dica, o jogador que escolheu o número tem o direito de dar um palpite sobre a identidade da carta. Caso o jogador não o faça, passará a vez para o jogador à sua esquerda.

- Caso o jogador acerte o palpite, o mediador devolve a carta ao final do monte, avança os peões e retira as fichas coloridas que estiverem sobre os números do tabuleiro.
- Caso o jogador erre o palpite, a vez passa para o jogador à sua esquerda, que também escolherá um número de 1 a 10 (exceto os que já foram escolhidos) e terá o direito de dar um palpite. E assim o jogo segue, até que algum jogador acerte a carta ou até que todas as dicas tenham sido lidas.
- Cada carta de dicas vale 10 pontos, que são divididos entre o mediador e o jogador. O mediador recebe um ponto para cada dica revelada e o jogador que acertar o palpite, um ponto para cada dica não revelada. Ambos avançam com seus peões tantos espaços quanto forem os pontos recebidos.
- Caso o peão do jogador caia na casa interrogação, este terá o direito de retirar uma carta e seguir as instruções contidas nelas como, por exemplo, “avance 3 casas” ou “volte 2 casas”.
- O vencedor será aquele que primeiro chegar com seu peão à casa marcada com o nome: “chegada”.

2.1.1 Equação do 2º grau com uma incógnita

No século IX, o matemático árabe Al-Khwarizmi (780 – 850) desenvolveu em sua obra *Hisab al-jabr w’al-muqabala*[2] alguns métodos para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita, porém sua resolução determinava apenas raízes positivas ou zero, visto que os números negativos não eram conhecidos nesta época.

Baseado nos estudos de Al-Khwarizmi, o matemático hindu Bháskara Akaria (1114–1185) apresentou um processo estritamente algébrico para a resolução de qualquer equação do 2º grau. Segundo Castrucci (2018), a partir desse processo, e do uso da Álgebra (simbólica, propriamente dita), matemáticos desenvolveram uma fórmula resolutiva[3] para equações do 2º grau, que é utilizada até hoje.

[2] Obra mais importante de Al-Khwarizmi, de onde surgiu o termo *Álgebra*. Nesta obra, até mesmo os números são expressos por palavras ao invés de algarismos.
[3] No Brasil, por volta de 1960, estabeleceu-se o hábito de dar o nome de Bháskara para fórmula resolutiva de equações do 2º grau.

Denomina-se equação do 2º grau com uma incógnita x toda equação do tipo:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$. Os números reais a, b e c são chamados coeficientes da equação, de modo que a sempre será o coeficiente de x^2, b sempre será o coeficiente de x e c sempre será o termo independente de x. Por definição, teremos sempre $a \neq 0$, porém podemos ter $b = 0$ ou $c = 0$.

Deste modo:

- Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, chamamos a equação do 2º grau de equação completa;
- Quando $\mathrm{b} = 0$ ou $\mathrm{c} = 0$, chamamos a equação do 2º grau de equação incompleta.

Equação do 2º grau incompleta

As equações do 2º grau incompletas podem ser resolvidas utilizando fatoração e propriedades importantes do conjunto dos números reais, tais como:

I. Sendo x e y dois números reais quaisquer e $x.y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

II. Sendo x um número real qualquer e y um número real não negativo, tais que $x^2 = y$, então $x = +\sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

Resolvendo equações do tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

$ax^2 + bx = 0$

$x.(ax + b) = 0$

$x = 0 \; ou \; ax + b = 0$ (pela propriedade I)

$$x = 0 \ ou \ ax = -b$$

$$x = 0 \ ou \ x = \frac{-b}{a}$$

Dessa forma, o conjunto solução S para equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ é dado por:

$$S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$$

Resolvendo equações do tipo $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esta última igualdade é devido à propriedade (II), desde que $-\frac{c}{a}$ seja não negativo.

Portanto, para equações do segundo grau incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$, com $-\frac{c}{a} \geq 0$, seu conjunto solução é

$$S = \left\{\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$$

Contudo, $S \neq \emptyset$ se, e somente se, a e c tiverem sinais opostos.

Equação do 2º grau completa

As equações do 2º grau completas podem ser resolvidas de diversas maneiras. Mostraremos aqui algumas dessas formas, incluindo o processo algébrico (método de completar quadrados) desenvolvido por Al-Khwarizmi, o processo algébrico desenvolvido por Bháskara e a utilização das relações de Girard[4].

Processo algébrico de Al-Khwarizmi (método de completar quadrados)

A partir da interpretação geométrica dada pelos gregos para expressões do tipo $(a + b)^2$, Al-Khwarizmi desenvolveu seus estudos na resolução de equações do 2º grau com uma incógnita, no qual utilizava-se apenas palavras.

Em sua obra mais famosa, Al-Khwarizmi apresentou problemas envolvendo equações do 2º grau, assim como suas soluções apoiadas em seu método de completar quadrados. As equações e suas soluções eram escritas utilizando-se a língua materna através de problemas. De acordo com Pitombeira (2004, p.26), um dos problemas descritos por Al-Khwarizmi é

> Um quadrado e dez raízes do mesmo equivalem a 39 denares; ou seja, qual deve ser o quadrado que, quando aumentado de dez de suas raízes, é equivalente a trinta e nove?
> Solução: Tome primeiro a metade do número de raízes, que aqui é cinco, e que elevada ao quadrado dá vinte e cinco. Adicione isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito e subtraia dela a metade do número de raízes, que é cinco. O resultado é três. Isso é a raiz do quadrado que você procurava; o quadrado é nove.

Nesse problema, Al-Khwarizmi determinou apenas a raiz positiva pois não tinha conhecimento dos números negativos.

[4] Albert Girard, matemático belga nascido no ano de 1595, em seus estudos estabeleceu fórmulas matemáticas que relacionam os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica.

Após o conhecimento e o uso da linguagem algébrica, o método de completar quadrados tornou-se simples, sendo necessário apenas seguir alguns passos para determinar as raízes reais de uma equação do 2º grau.

Passo a passo do método de completar quadrados:

1º Passo: Analisar o coeficiente *a* que está multiplicando x^2

Se o coeficiente for diferente de 1, dividiremos ambos os lados da equação por ele mesmo;

Se o coeficiente for igual a 1, não é preciso fazer nenhuma modificação e basta seguir para o 2º passo;

2º Passo: Subtrair "c" de ambos os membros;

3º Passo: Adicionar a ambos os lados da equação, o quadrado da metade do coeficiente *b* que está multiplicando x;

4º Passo: Quando adicionamos o quadrado da metade do coeficiente que estava multiplicando o termo x em ambos os lados da equação, transformamos o primeiro membro em um trinômio do quadrado perfeito.

Exemplo:

$$x^2 + 10x - 39 = 0$$
$$x^2 + 10x = 39$$
$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$
$$(x + 5)^2 = 64$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 3$$
$$ou$$
$$x + 5 = -8$$
$$x = -13$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{-13,3\}$

Processo algébrico de Bháskara

A partir dos estudos de Al-Khwarizmi, Bháskara percebeu que em uma equação na qual o coeficiente a é igual a 1, o número acrescentado aos dois membros correspondia à metade do coeficiente *b*, elevada ao quadrado, e, a partir daí, desenvolveu um processo exclusivamente algébrico para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita.

Vejamos os passos utilizados por Bháskara para chegar à fórmula resolutiva:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A igualdade

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

É a chamada fórmula resolutiva da equação completa do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$.

A expressão $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$ é usualmente chamada de discriminante da equação e é representada pela letra grega maiúscula Δ (delta). A existência ou não de raízes reais depende apenas do discriminante, assim como o fato de serem iguais ou distintas.

i. Quando $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas $(x_1 \neq x_2)$;
ii. Quando $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais e iguais $(x_1 = x_2)$;
iii. Quando $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais ($\nexists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$).

Exemplo 1: Encontre o conjunto solução da seguinte equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Observe que temos uma equação do 2º grau completa, cujos valores de seus coeficientes a, b e c, são, respectivamente, 1, -5 e 6.

Calculando o discriminante, temos:

$$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

Como $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

e

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Dessa forma, encontramos as duas raízes que formam o conjunto solução da equação dada neste exemplo:

$$S = \{2, 3\}$$

Exemplo 2: Encontre a solução da equação $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Observe que temos uma equação do 2º grau completa, cujos valores de seus coeficientes a, b e c, são, respectivamente, 1, 6 e 9.

Calculando o discriminante, temos:

$$\Delta = 6^2 - 4.1.9$$

$$\Delta = 36 - 36$$

$$\Delta = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais e iguais.

$$x = \frac{-(+6) \pm \sqrt{0}}{2.1}$$

$$x = \frac{-6 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = x_2 = -\frac{6}{2} = -3$$

Sendo assim, $S = \{-3\}$.

Exemplo 3: Encontre a solução da equação $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

Observe que temos uma equação do 2º grau completa, cujos valores de seus coeficientes a, b e c, são, respectivamente, 2, -3 e 4.

Calculando o discriminante, temos:

$$\Delta = (-3)^2 - 4.2.4$$

$$\Delta = 9 - 32$$

$$\Delta = -23$$

Como $\Delta < 0$, não existem raízes reais para a equação. Portanto, o conjunto solução dessa equação é vazio: $S = \{\quad\}$.

Relações de Girard

Além do processo de completar quadrados e da fórmula resolutiva para determinar as raízes de uma equação do 2º completa, temos também as relações de Girard, onde relacionam-se os coeficientes da equação com a soma e o produto das raízes.

Considere uma equação do 2º grau na incógnita x:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

Cujas raízes reais são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad e \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para obtermos a soma das raízes basta somar membro a membro as igualdades em x_1 e x_2:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) + \left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a}$$

$$= \frac{-b}{a}$$

Portanto, em toda equação do 2º grau, a soma das raízes reais é dada por $-{}^{b}/_{a}$.

Para obtermos o produto das raízes basta multiplicarmos membro a membro as igualdades em x_1 e x_2:

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\
&= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\cdot\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2} \\
&= \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} \\
&= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\
&= \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}
$$

Portanto, o produto das raízes reais de toda equação do 2º grau é dado por ${}^{c}/_{a}$.

Considerando a equação genérica $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0),$ temos a seguinte correspondência:

$$ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Denotando por S e P, respectivamente, o valor da a soma e do produto das raízes, temos $S=-{}^{b}/_{a}$ e $P={}^{c}/_{a}$, sendo assim a equação genérica passa a ser escrita como:

$$x^2-Sx+P=0$$

Vejamos o exemplo:

Utilizando o método das relações de Girard, encontre a solução da equação $x^2-12x+35=0$.

Pelas relações de Girard, temos que a equação em questão pode ser escrita como $x^2-Sx+P=0$, sendo assim:

$$S=-\frac{(-12)}{1}=12\ e\ P=\frac{35}{1}=35$$

Como o produto das raízes é igual a 35, os possíveis fatores são: ± 1 e ± 35 ou ± 5 e ± 7. Dentre estes, apenas $+5$ e $+7$ possuem soma igual a 12. Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \{5, 7\}$.

Contudo, a utilização desse método não é indicada para o caso em que as raízes da equação do 2º grau são números reais não inteiros, neste caso outros métodos são mais indicados.

2.1.2 Figuras Geométricas

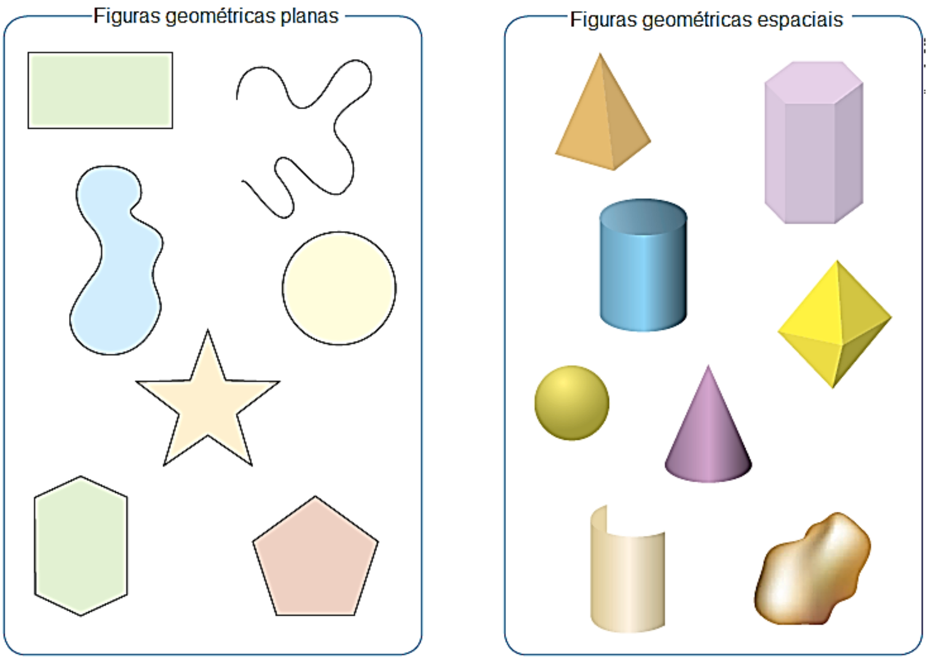
As figuras geométricas, podem ser classificadas como planas ou espaciais, dependendo apenas do número de dimensões que possuem. As figuras com duas ou menos dimensões são consideradas figuras geométricas planas, enquanto as figuras que com três dimensões são consideradas figuras geométricas espaciais.

Os conceitos primitivos[5] da Geometria (ponto, reta e plano) são figuras geométricas planas: o ponto é uma figura que não possui dimensão, a reta é uma figura que possui apenas uma dimensão (unidimensional) e o plano é uma figura que possui duas dimensões (bidimensional). Os planos são considerados espaços de duas dimensões, sendo possível construir dentro deles qualquer figura geométrica com dimensão menor ou igual a dois. O espaço, por possuir comprimento, largura e profundidade, é considerado uma figura geométrica tridimensional ou espacial, sendo possível construir nele qualquer figura geométrica com dimensão menor ou igual a três.

Nosso objeto de estudo são as figuras geométricas bidimensionais e as figuras geométricas tridimensionais. A seguir algumas figuras utilizadas nas cartas do jogo Perfil Matemático.

[5] Conceitos aceitos sem definição que serviram como base para o desenvolvimento da *Geometria Euclidiana*.

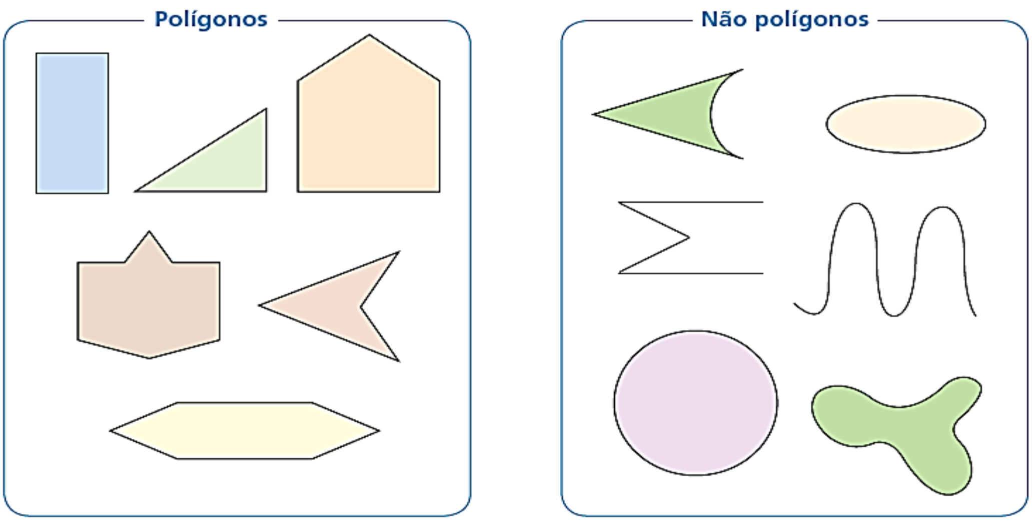
Figura 26 – Figuras geométricas



Fonte: ANDRINI, 2012, p.119.

As figuras geométricas planas são classificadas como polígonos e não polígonos. Os polígonos são figuras geométricas planas fechadas formadas apenas por segmentos de reta que não se cruzam, exceto nos vértices, e são classificados de acordo com o seu número de lados. Figuras geométricas planas que são abertas e têm lados que se cruzam ou possuem curvatura são chamadas de não polígonos.

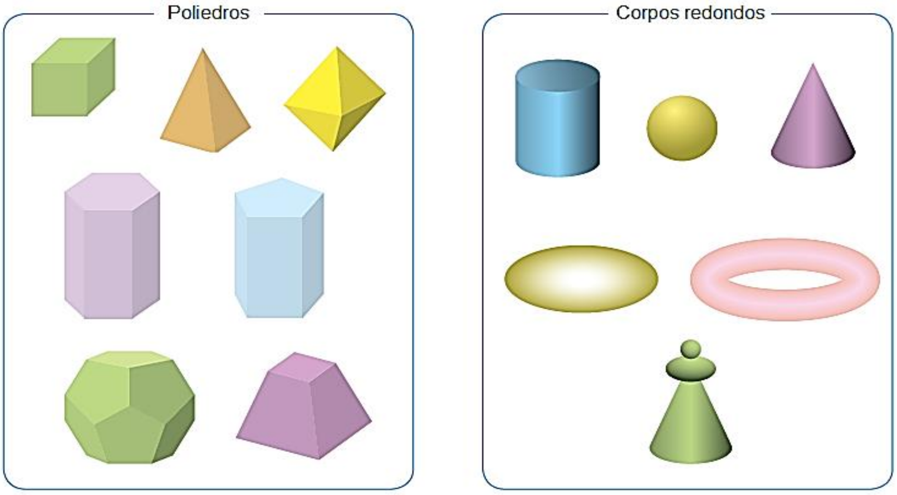
Figura 27 – Polígonos e não polígonos



Fonte: ANDRINI, 2012, p.120

As figuras geométricas espaciais são classificadas de acordo com suas características e denominadas como poliedros ou corpos redondos. Os corpos redondos possuem como principal característica a superfície arredondada, enquanto os poliedros apresentam em sua superfície apenas polígonos. Alguns poliedros têm características especiais e por isso recebem nomes especiais, como, por exemplo, os prismas e as pirâmides.

Figura 28 – Poliedros e Corpos redondos

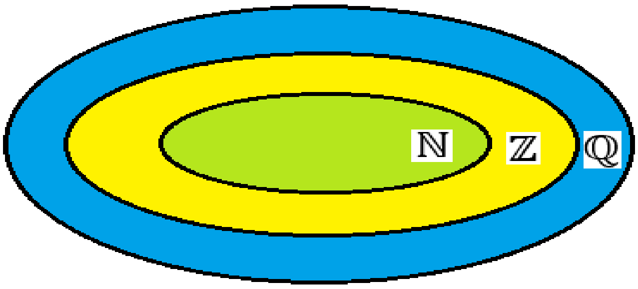


Fonte: ANDRINI, 2012, p.121.

2.1.3 Conjunto dos números reais

Os números que podem ser escritos na forma de fração $\left({}^{a}/_{b}\right)$, sendo a e b números inteiros e $b \neq 0$ formam o conjunto dos números racionais $(\mathbb{Q})$. Fazem parte deste conjunto os números naturais $(\mathbb{N})$, os números inteiros $(\mathbb{Z})$, as frações, os decimais exatos e os decimais infinitos e periódicos, conforme podemos observar na figura 29.

Figura 29 – Conjunto dos números racionais

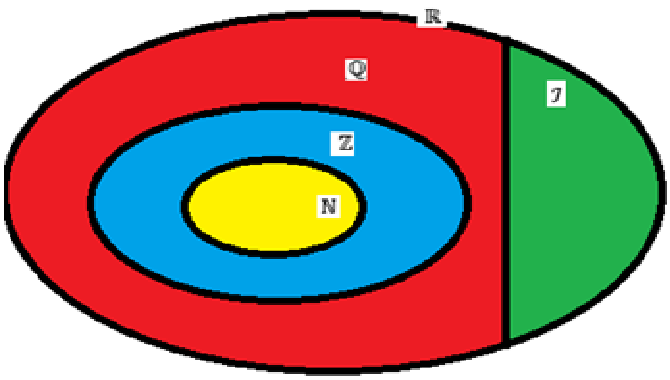


Fonte: A AUTORA, 2019

Em meados do século VI a.C., diz a lenda que um homem foi jogado em mar aberto na Grécia, abandonado à própria sorte por contrariar os ensinamentos da escola pitagórica. Este homem era Hipaso de Metaponto, que divulgou em seus estudos que a diagonal de um quadrado de lado 1 u.c. não poderia ser expressa como a razão entre dois números inteiros, descobrindo assim os números irracionais. Os decimais infinitos não periódicos compõem o conjunto dos números irracionais $(\mathcal{I})$.

A união (disjunta) entre o conjunto dos números racionais $(\mathbb{Q})$ e o conjunto dos números irracionais $(\mathcal{I})$ forma o conjunto dos números reais, que é denotado por $\mathbb{R}$. Isto é, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathcal{I}$, com $\mathbb{Q} \cap \mathcal{I} = \emptyset$ (figura 30).

Figura 30 – Conjunto dos números reais



Fonte: A AUTORA, 2019.

O jogo Perfil Matemático pode ser trabalhado no ensino de variados conteúdos matemáticos e em diversos níveis da Educação Básica, podendo este ser aplicado no Ensino Fundamental II ou no Ensino Médio, para isso basta a elaboração de novas categorias e novas cartas dicas.

2.2 Baralho das Equações

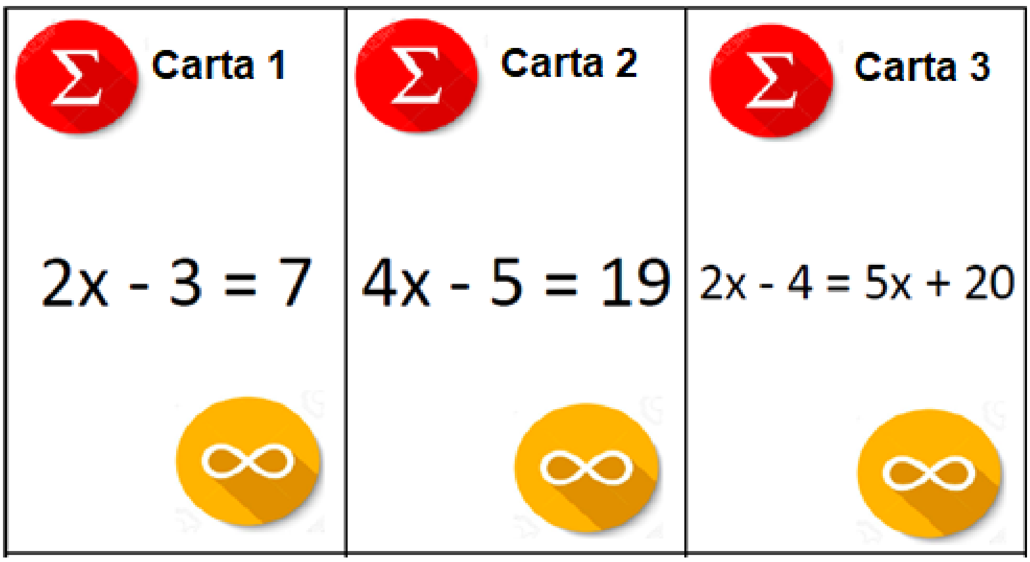
Com a finalidade de estimular o pensamento algébrico dos alunos e suas habilidades na resolução de equações do primeiro grau, a autora criou o Baralho das Equações: um jogo cujo objetivo principal é formar o maior número de pares certos (equação-resposta).

O jogo é composto por:

- 30 cartas “Equação” (figura 31);
- 30 cartas “Solução” (figura 32).
- 30 cartas “Gabarito” (figura 33).

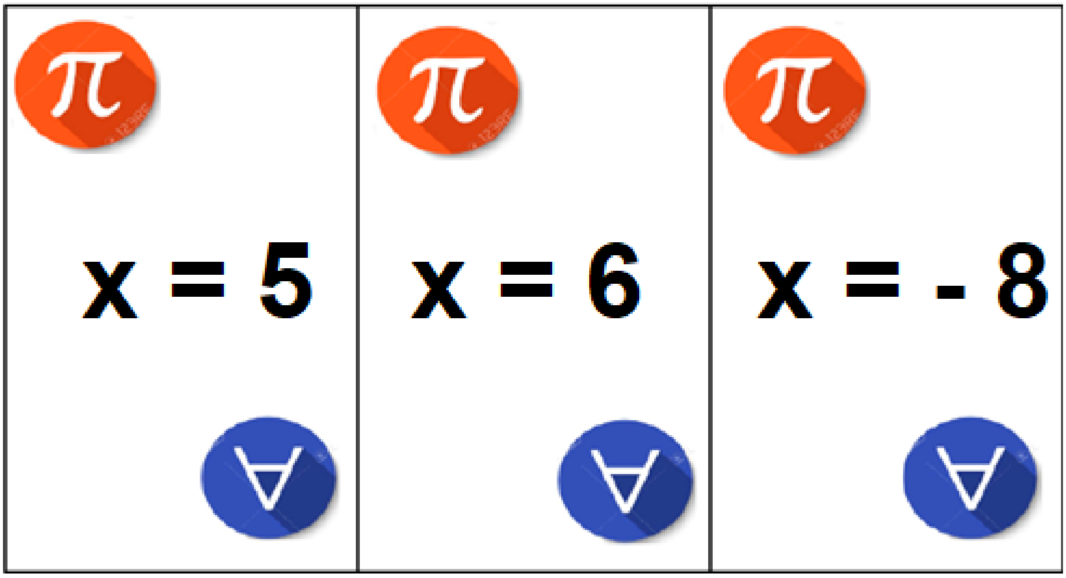
Para cada carta “Solução” há uma única carta “Equação”. Deste modo, garantimos que dois ou mais jogadores não terão cartas com equações equivalentes.

Figura 31 – Modelo de cartas equação



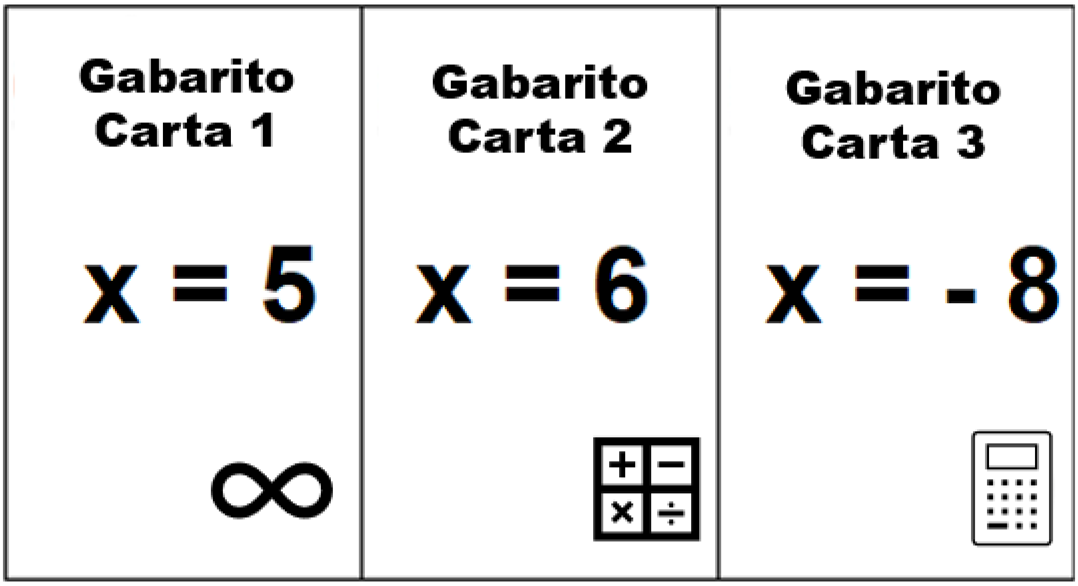
Fonte: A AUTORA, 2019.

Figura 32 – Modelo de cartas conjunto solução



Fonte: A AUTORA, 2019.

Figura 33 – Modelo de cartas gabarito



Fonte: A AUTORA, 2019

Regras do jogo:

- Os alunos serão divididos em grupos de 3, 4, 6 ou 7 jogadores.
- Um participante será responsável por verificar através das cartas “Gabarito” se os pares formados estão corretos, por exemplo, se o jogo tiver 6

participantes, cinco deles formarão os pares de cartas e um deles será o responsável por verificar a cada rodada se os pares estão corretos.

- Os jogadores decidem entre si quem começará o jogo.
- As cartas “Equação” são distribuídas em quantidades iguais entre os jogadores que formarão os pares.
- As cartas “Solução” devem ser colocadas viradas para baixo, formando uma pilha.
- O primeiro jogador compra uma carta “Solução” da pilha. Encontrando a solução correta em uma das cartas que lhe foram distribuídas, forma-se o par. Se a solução não corresponder a nenhuma de suas cartas, ele descarta a carta comprada, colocando-a virada para cima sobre a mesa.
- As cartas descartadas deverão ser colocadas lado a lado e viradas para cima ficando visíveis para todos os jogadores.
- O próximo jogador tem a opção em comprar uma carta da pilha ou outra que tenha sido descartada sobre a mesa por outro jogador, e o jogo segue assim sucessivamente.
- A cada jogada é permitido formar apenas um par.
- O jogo termina quando algum jogador bater, ou seja, quando ele formar seu último par de cartas possível.

2.2.1 Equações do 1º grau com uma incógnita

A Álgebra simbólica é uma linguagem utilizada muitas vezes para traduzir nossa língua materna para a linguagem matemática e, assim como na língua materna, a linguagem matemática possui sentenças que podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas (quadro 4).

Quadro 4 – Sentenças matemáticas

Sentenças verdadeiras	Sentenças falsas
4 + 9 = 13	6 + 8 > 10 + 9
2019 – 36 = 1983	9 – 3 = 8 + 2

Fonte: A AUTORA, 2019.

Sentenças deste tipo são chamadas sentenças fechadas, pois não deixam dúvida quanto à sua veracidade. Por outro lado, sentenças do tipo x + 7 > 10 não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, pois dependem do valor atribuído à variável x. Por esse motivo, tais sentenças são chamadas de sentenças abertas. Sentenças abertas que utilizam o sinal da igualdade (=), o que implica em uma equivalência entre elas, são chamadas de equações.

As equações polinomiais são classificadas por grau de acordo com o expoente da incógnita e são chamadas de equações do primeiro grau quando o expoente máximo da incógnita é um número natural e igual a 1.

Portanto, denomina-se equação do primeiro grau na variável x toda equação do tipo

$$ax + b = 0, \qquad (a \neq 0)$$

onde a e b são números reais.

Equações do primeiro grau podem ser resolvidas de diversas maneiras: investigando e testando valores para sua raiz, utilizando equações equivalentes[6] ou utilizando as operações inversas (método prático)

[6] Equações equivalentes são equações que possuem o mesmo conjunto solução, sob o mesmo conjunto universo. Assim, realizando uma operação matemática em ambos os membros da equação, a igualdade se mantém e obtém-se uma equação equivalente à anterior.

Método equações equivalentes

Exemplo:

$3x + 9 = 15$	Adiciona-se (- 9) em ambos os membros
$3x + 9 + (-9) = 15 + (-9)$	
$3x = 6$	Dividindo ambos os membros por 3
$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$	
$x = 2$	

As equações $3x + 9 = 15$ e $x = 2$ são equivalentes[6].

Método prático

Exemplo:

$3x + 9 = 15$	
$3x = 15 - 9$	Observe que ao subtrair 9 dos dois membros, a operação não foi escrita e apenas eliminou-se o 9 do 1º membro.
$3x = 6$	
$x = \frac{6}{3}$	Observe que ao dividir por 3 os dois membros, a operação não foi escrita e apenas eliminou-se o 3 do 1º membro.
$x = 2$	

Portanto, o conjunto solução é $S = \{2\}$

3 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo apresentaremos a metodologia utilizada em torno da aplicação dos jogos Perfil Matemático e Baralho das Equações, criados pela autora, descrevendo o tipo de pesquisa, a caracterização, o público-alvo, as ferramentas adotadas, a coleta de dados e os resultados obtidos.

3.1 O jogo em sala de aula

De acordo com as diretrizes do PCN (BRASIL, 1998), há entendimento que, para o ensino de qualquer disciplina, em especial para a Matemática, não há uma forma que seja única e melhor para ensinar e, dentre as diversas práticas de ensino na sala de aula, o uso de jogos como recurso didático tem se destacado, sendo uma das propostas mais bem aceitas pelos alunos. O uso de jogos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática possibilita ao aluno, além do entendimento do conteúdo, o desenvolvimento e o amadurecimento de suas habilidades cognitivas e emocionais.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Matemática não é somente uma fonte de números, operações e formas geométricas; é também uma forma de estruturar o pensamento e desenvolver diferentes habilidades, podendo ser realizada através de jogos e desafios lógicos. A propensão pelos jogos e desafios, quando, e se despertada, pode ser de grande valia com serventia incalculável para a sociedade (BRASIL, 2018).

Com base nas diretrizes dos PCN e nas habilidades da BNCC, buscamos novas estratégias para a relação de ensino-aprendizagem da Matemática que possibilitem um melhor desenvolvimento dos alunos. E, pensando na construção dessa relação, de forma lúdica e envolvente, observamos que

> Os jogos são um recurso para propor conteúdos matemáticos, tanto numéricos como geométricos, pois permitem que esses sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas ou de ganhar a partida (ITACARAMBI, 2013, p. 21).

A partir dessa observação, confeccionamos os jogos Perfil Matemático e Baralho das Equações, para, em seguida, desenvolvê-los em duas turmas do ensino fundamental de uma escola municipal da cidade de Casimiro de Abreu/RJ.

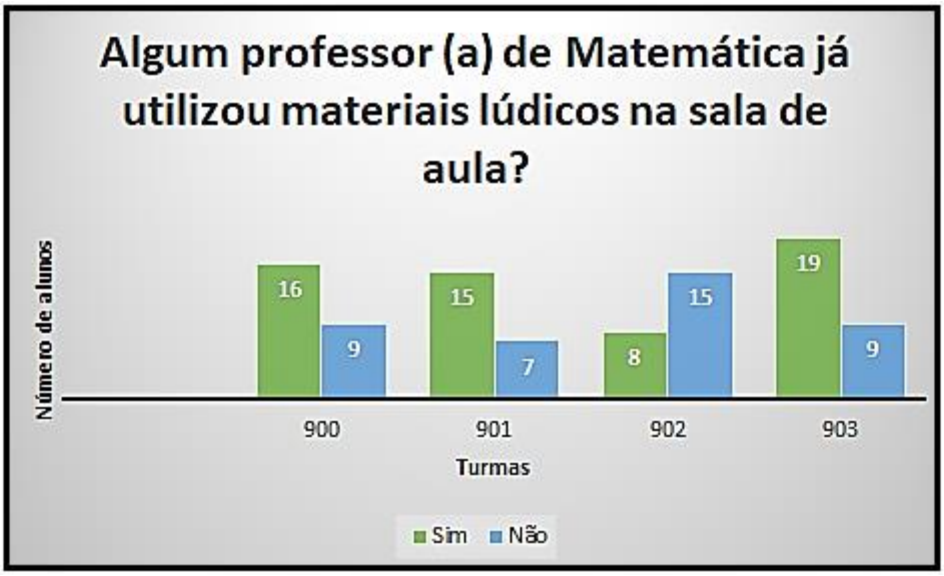
3.2 Metodologia

Durante a realização deste trabalho, foram aplicados os jogos desenvolvidos em dois momentos distintos, anteriores à pesquisa final, com a finalidade de aprimorar os mesmos. No primeiro momento, como citado no capítulo 2, os jogos foram aplicados em uma turma de alunos do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática da UERJ e, no segundo momento, foram aplicados na XIV Semana do Instituto de Matemática e Estatística (IME) - UERJ, onde participaram alunos e professores do ensino fundamental e médio do ensino regular público e privado. Após a análise desses momentos, ambos os jogos foram ajustados para, a partir daí, darmos início ao desenvolvimento da pesquisa na escola escolhida pela autora.

Inicialmente realizamos uma pesquisa exploratória com os alunos do ensino fundamental 2, com o objetivo de coletar a opinião e as experiências dos alunos com o uso de materiais lúdicos nas aulas de Matemática, em especial no conteúdo de Álgebra. Nesse tipo de pesquisa, a finalidade é "explorar" o objeto de pesquisa, proporcionando uma maior familiaridade com o mesmo e tornando-o mais evidente.

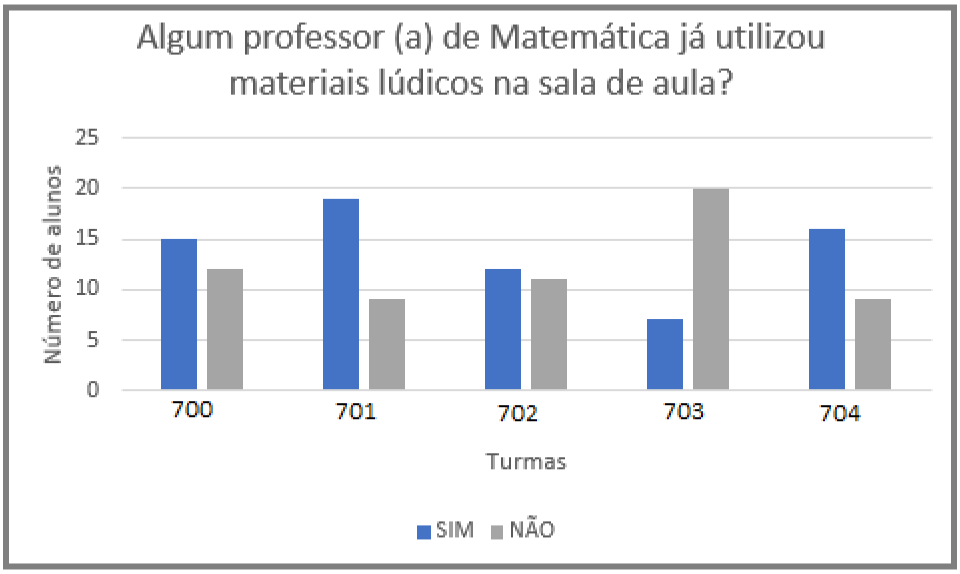
A pesquisa exploratória foi realizada durante uma semana, no mês de agosto de 2019, e permitiu-nos observar que os alunos possuíam grande interesse em aprender os conteúdos matemáticos de forma divertida e menos tradicional. A partir dos resultados obtidos nessa pesquisa exploratória (gráfico 1 e 2), escolhemos uma turma do 9º ano para trabalharmos o jogo Perfil Matemático e uma turma do 7º ano para trabalharmos o jogo Baralho das Equações.

Gráfico 1 – Algum professor (a) de Matemática já utilizou materiais lúdicos na sala de aula?



Fonte: A AUTORA, 2020

Gráfico 2 – Algum professor (a) de Matemática já utilizou materiais lúdicos na sala de aula?



Fonte: A AUTORA, 2020

Durante a realização da pesquisa, foi desenvolvido a pesquisa de campo nas turmas escolhidas, totalizando 50 alunos envolvidos diretamente e ativamente em todo o processo. A pesquisa de campos permite ao pesquisador compreender o comportamento dos sujeitos envolvidos, observar uma melhora ou não no seu desempenho, na sua aprendizagem e até mesmo no seu relacionamento com outros sujeitos envolvidos.

Realizamos a pesquisa durante três semanas, no mês de setembro de 2019, totalizando 18 tempos de 45 minutos cada um, sendo 12 tempos voltados à explicação expositiva dos conteúdos e 6 para a aplicação dos jogos e coleta dos dados.

Na análise dos resultados obtidos na pesquisa, utilizamos o tratamento qualitativo das informações, intitulado pesquisa participativa, onde todos os participantes se envolvem de maneira dinâmica. Esse tipo de pesquisa permitiu-nos entender os motivos, opiniões, motivações e descobrir o pensamento dos alunos quanto às aulas lúdicas, dinâmicas e divertidas.

Durante todo o processo e realização dessa pesquisa foram levados em consideração a opinião, o sentimento e o entendimento de cada aluno envolvido.

3.3 Sujeitos envolvidos na pesquisa

O público-alvo desta pesquisa foram 27 alunos da turma 703 (7ºano) do ensino fundamental, cuja faixa etária variava de 12 a 14 anos, e 23 alunos da turma 902 (9º ano), cuja faixa etária variava de 13 a 16 anos, ambas as turmas eram de uma escola municipal da cidade de Casimiro de Abreu/RJ, escola na qual a professora pesquisadora leciona desde fevereiro de 2014 até a presente data, onde realizou-se a coleta de dados. Um dos motivos que essa escola foi selecionada para a realização da pesquisa, deve-se ao fato de que ela é realizada no mês de maio, desde o ano de 2016, a Semana da Matemática, em homenagem ao Dia Nacional da Matemática, comemorado no dia 06 de maio em virtude do nascimento do escritor brasileiro Júlio César de Mello e Souza, conhecido mundialmente por seu pseudônimo Malba Tahan. Durante essa semana, os professores e alunos trabalham a Matemática de forma menos tradicional, fazendo o uso de outros recursos, como teatro e atividades lúdicas.

Para o melhor desenvolvimento das atividades, os alunos de cada turma foram divididos, pela professora, em grupos heterogêneos, a fim de mesclar alunos com diferentes níveis de aprendizado. Os alunos da turma 703 foram divididos em quatro equipes, contendo cinco participantes em cada uma e um grupo com sete participantes, já os alunos da turma 902 foram divididos em três equipes, contendo seis participantes e uma equipe contendo cinco participantes. A partir desse momento, todos os alunos de cada uma das turmas passaram a ser objeto de estudo quanto às estratégias adotadas durante os jogos.

3.4 Coleta de dados

Os primeiros dados obtidos na pesquisa foram coletados durante a pesquisa exploratória, o que possibilitou verificar o interesse dos alunos em estudar e aprender Matemática de forma mais dinâmica e até mesmo divertida.

Na etapa seguinte, mais precisamente no momento das aulas expositivas, a coleta foi realizada através de um questionário respondido pelos alunos (apêndice B e C). O questionário era composto por oito itens, nos quais os alunos teriam que expor sua opinião sobre os temas abordados. A finalidade da aplicação do questionário nesse momento foi reunir informações a respeito do nível de aprendizado dos alunos apenas com as aulas expositivas.

No momento seguinte, iniciou-se a aplicação dos jogos em cada turma. Nessa etapa, a pesquisa se deu por meio da observação direta da professora, procurando não interferir nas estratégias e nos métodos adotados pelos alunos, deixando-os livres para jogar. Foi necessária apenas a realização de algumas intervenções, a fim de esclarecer e garantir o cumprimento das regras, além de esclarecer algumas dúvidas relacionadas aos conteúdos matemáticos abordados no jogo. A professora deixou para fazer as observações acerca das estratégias adotadas pelos alunos no momento pós-jogo.

Após a aplicação do jogo Perfil Matemático na turma do 9º ano, a professora fez alguns questionamentos relacionados às estratégias adotadas pelos alunos para descobrir as cartas corretas em cada uma das categorias. Dois desses questionamentos são elencados a seguir:

- Você usou a mesma estratégia para encontrar a resposta correta em todas as categorias?
- O jogo Perfil Matemático favoreceu o seu aprendizado?

Para responder aos questionamentos, a professora e os alunos realizaram uma roda de conversa, onde foi possível coletar dados, conhecer as estratégias de cada aluno e extrair informações que foram além do jogo.

No momento pós-jogo do Baralho das Equações, realizado com os alunos do 7º ano, percebeu-se uma certa euforia por parte de todos os envolvidos. Aproveitando esse momento, a professora aplicou um segundo questionário (apêndice D), composto por oito perguntas relativas ao aprendizado das equações do 1º grau adquirido através do jogo.

Nessa turma, o intuito da aplicação de dois questionários em momentos distintos foi aproveitar a oportunidade de comparar os resultados apresentados pelos alunos antes e depois do jogo.

3.5 Análise dos dados

Os dados foram analisados e explorados através da observação direta no momento do jogo, da roda de conversa pós-jogo e dos questionários aplicados durante a pesquisa. Na observação direta, buscamos identificar as estratégias utilizadas pelos alunos para realizar e concluir as jogadas. Também foram analisadas as interações, as emoções e os sentimentos dos alunos envolvidos em todo processo.

3.6 Momento do jogo

Nesta seção apresentaremos o momento da aplicação de cada um dos jogos em sala de aula: Perfil Matemático e Baralho das Equações.

3.6.1 Momento Perfil Matemático

Segundo Grando (2000, p. 43), o primeiro momento relevante à intervenção pedagógica através de jogos na sala de aula é a familiarização com o material de jogo, ou seja, é quando ocorre o primeiro contato dos alunos com as peças, identificando objetos conhecidos como, por exemplo, dados, cartas, tabuleiro e outros.

A partir dessa ideia, iniciamos nosso trabalho com o jogo Perfil Matemático, na turma 902, apresentando o tabuleiro, as cartas perguntas, as cartas interrogação e as fichas coloridas.

Durante a familiarização com o material do jogo, um grupo de alunos questionou sobre não ter dados para utilizar, já que a maioria dos jogos de tabuleiro faz o uso de dados. Explicamos à turma que a movimentação dos peões seria realizada através do número de dicas reveladas nas cartas perguntas e por isso não haveria a necessidade da utilização de dados.

A turma foi dividida em três grupos, com seis participantes cada, e um grupo contendo cinco participantes. O número diferente de participantes nos grupos não tem relevância na aplicação deste jogo, pois o mesmo pode ser disputado individualmente ou em equipes.

No momento seguinte, realizamos a leitura das regras acompanhada de uma rodada teste feita pela professora e pelos alunos. Após essa rodada, a professora deu liberdade para que os grupos iniciassem as suas jogadas.

Algumas falas dos alunos foram observadas logo após a leitura das regras e da rodada teste:

- “Esse jogo vai ser fácil.”
- “Meu pai eterno, estou perdida.”
- “Boa sorte, mas a vitória já é minha.”

Após algumas rodadas, verificamos que os alunos não tiveram sucesso no jogo porque estavam tímidos e receosos para fazer as suas jogadas. Neste momento, realizamos a primeira intervenção para incentivá-los a jogar sem medo de errar, afirmando que eles não estavam sendo julgados pelos erros ou acertos. A partir desta conversa, as rodadas foram se desenvolvendo de maneira mais dinâmica e divertida, despertando nos alunos um maior interesse para jogar.

Num determinado momento, um dos alunos levantou uma das mãos para fazer a seguinte pergunta:

- Aluno 1: Professora, quando eu tenho uma equação incompleta, eu preciso usar a fórmula de Bháskara?

Aproveitamos essa pergunta para fazer uma segunda intervenção, a fim de esclarecer a dúvida do Aluno 1 e de outros colegas, e explicamos para a turma que existem maneiras mais rápidas e mais simples do que a fórmula de Bháskara para resolver equações incompletas e que isso depende apenas do tipo de equação incompleta que precisa ser resolvida.

Um segundo aluno interveio dizendo:

- Aluno 2: A senhora falou isso nas aulas teóricas.
- Professora: Isso mesmo, nós estudamos todos os tipos de equações incompletas e as formas para resolvê-las.

Esclarecida a dúvida, percebemos que os alunos ficaram mais soltos para jogar porque a dúvida não era apenas de um aluno, mas de uma parte da turma.

Num outro instante, observamos o diálogo entre dois alunos do mesmo grupo que envolvia as cartas da categoria “Figuras geométricas”:

- Aluno 3: As figuras geométricas são muito fáceis de descobrir.
- Aluno 4: É fácil para você que gosta de Geometria, eu fico totalmente perdido.

Este diálogo chamou nossa atenção pois as figuras geométricas presentes no jogo fazem parte do currículo da Matemática desde o 6º ano. Sendo assim, aproveitamos para fazer uma nova intervenção e conversamos sobre as figuras geométricas de modo geral, sem nos aprofundarmos muito no assunto. Após este momento, não foi necessária mais nenhuma paralisação do jogo para esclarecer dúvidas, ficando a professora livre para observar as interações entre os alunos e fazer as devidas anotações.

Observamos que os alunos que gostavam de Matemática tinham maior facilidade para encontrar as raízes da equação utilizando as relações de Girard (soma e produto das raízes); já a categoria “Números reais” deixou alguns alunos curiosos com os números irracionais - por exemplo, com o número Pi[7] e com o número de Ouro[8].

Dois tempos de aula com 45 minutos cada não foram suficientes para terminar a partida do jogo Perfil Matemático e o seu término foi adiado para a próxima aula, o que deixou os alunos ansiosos para saber quem seria o vencedor de cada grupo.

Na aula seguinte, os grupos retomaram suas partidas a partir do ponto em que cada jogador havia parado na aula anterior.

Percebemos uma certa euforia nos alunos ao retornarem para jogar, confirmando assim o que Grando (2000, p. 35) afirma sobre as vantagens que podemos obter ao utilizarmos jogos na relação ensino-aprendizagem.

As jogadas transcorreram de modo tranquilo até o final do jogo. Apenas um dos grupos, dentre os quatro que estavam jogando, não conseguiu finalizar o jogo. Neste grupo, foi declarado vencedor o jogador que estava mais próximo à chegada.

Após o instante da competição, os alunos puderam relatar suas experiências e opiniões sobre a atividade em uma roda de conversa que fizemos com toda turma.

3.6.2 Momento Baralho das Equações

Conforme ocorreu na turma 902, os alunos da turma 703 tiveram o primeiro contato com o jogo Baralho da Equações para se familiarizarem com os objetos envolvidos. Prontamente eles perceberam que se tratava de um jogo de cartas e que, portanto, não haveria a necessidade do uso de outros materiais.

Em seguida, dividimos a turma em três grupos, com sete participantes cada e um grupo com seis participantes. O número diferente de participantes nos grupos não tem relevância para realização do jogo, pois ele é jogado individualmente. Os grupos foram escolhidos de forma heterogênea para que nenhum grupo fosse composto apenas por alunos considerados “bons” ou “ruins” em Matemática.

---

[7] Uma das definições para o π é que ele é um número irracional (não pode ser obtido pelo quociente de dois inteiros), dado pela relação entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência.

[8] O número de ouro é o representante matemático da perfeição na natureza. Ele é estudado desde a Antiguidade e muitas construções gregas e obras artísticas apresentam esse número como base.

Na sequência, realizamos a leitura das regras do jogo, uma rodada teste com os alunos e, finalmente, pedimos para que começassem a jogar.

Dado início ao jogo, a professora ficou observando as jogadas dos alunos e aguardando o momento certo para realizar alguma intervenção, quando solicitada ou para garantir o bom andamento do jogo.

Durante a observação foi possível escutar o seguinte diálogo entre os três participantes de um determinado grupo:

- Aluno A: Eu estou resolvendo todas as minhas equações antes de jogar na minha vez.
- Aluno B: Até que você não é burro (risos).
- Aluno C: Eu não estou resolvendo a equação porque acho mais fácil substituir o valor e ver se dá certo.
- Aluno A: Boa ideia, mas ainda prefiro resolver as equações.

Após escutarmos o diálogo, fizemos a primeira intervenção com o objetivo de relembrar os métodos usados na aula teórica para resolver as equações do 1º grau, tomando cuidado para não interferir nas estratégias dos alunos. Logo após essa primeira conversa, os alunos voltaram a jogar sob o olhar atento da professora.

Observamos que os alunos que adotaram a estratégia de resolver primeiro as equações de suas cartas estavam obtendo melhor desempenho no jogo.

Assim como ocorreu com o jogo Perfil Matemático na turma 902, dois tempos de aula com 45 minutos cada não foram suficientes para que os alunos da turma 703 finalizassem as partidas do jogo Baralho das Equações e adiamos para a aula seguinte o término dele.

Na aula seguinte os alunos estavam ansiosos para voltarem a jogar. Perguntamos o porquê dessa ansiedade e um dos alunos nos respondeu:

- Aluno D: Porque jogar é legal e conseguiu deixar as equações divertidas.

Os grupos retomaram então as partidas do Baralho das Equações e essas foram transcorrendo tranquilamente até que todos os grupos finalizassem o jogo.

Após o momento de competição, foram feitas algumas perguntas aos grupos, que relataram suas opiniões a respeito da experiência obtida com a realização do jogo. Alguns desses relatos estão elencados na sequência:

- “Equação era chato, mas agora é legal.”
- “Matemática é divertido.”

- “Não nasci para aprender equação.”

O aluno que disse “Não nasci para aprender equação” estava desanimado por não ter conseguido resolver todas as equações de suas cartas. Percebendo isso, a professora conversou com o aluno e o fez entender que o jogo e a Matemática não diminuiriam sua capacidade e seu potencial em aprender. O aluno ficou um pouco mais aliviado e disse que a partir daquele momento veria a Matemática com outros olhos.

Em seguida realizamos a aplicação de um segundo questionário na turma com o intuito de coletar informações sobre a realização da atividade.

4 RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS

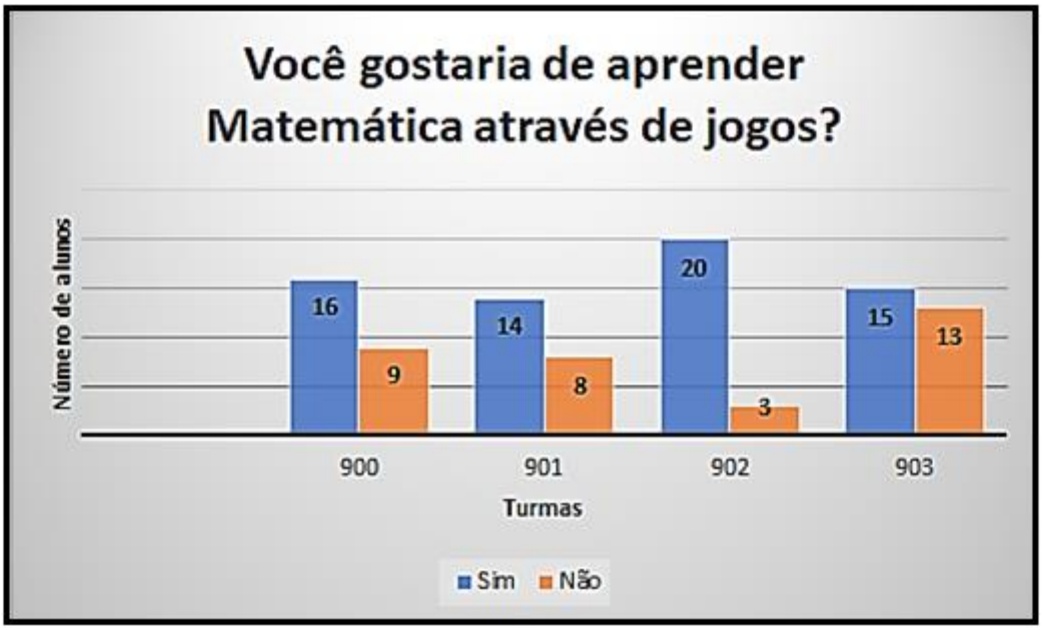
Neste capítulo serão apresentados e analisados os dados e os resultados obtidos durante todo o processo de pesquisa, iniciado na pesquisa exploratória e finalizado na realização das atividades com as turmas 902 e 703.

O desenvolvimento da nossa pesquisa iniciou-se com a pesquisa exploratória, na qual passamos uma semana entrevistando todas as turmas do 9º e 7º ano da escola municipal. Ao todo, foram entrevistados 98 alunos do 9º ano, divididos em quatro turmas, e 136 alunos do 7º ano, divididos em cinco turmas. As entrevistas foram realizadas através de um questionário (Apêndice A) sobre as experiências dos alunos com materiais lúdicos nas aulas de Matemática.

Com base na análise das respostas do questionário aplicado na pesquisa exploratória, concluímos que as turmas 902 e 703 eram aquelas que tinham menor contato com materiais lúdicos nas aulas e demonstraram maior interesse em utilizar jogos nas aulas de Matemática.

No gráfico 3, é possível visualizar as respostas dos alunos do 9º ano quanto ao interesse em aprender Matemática através de jogos.

Gráfico 3 – Você gostaria de aprender Matemática através de jogos?

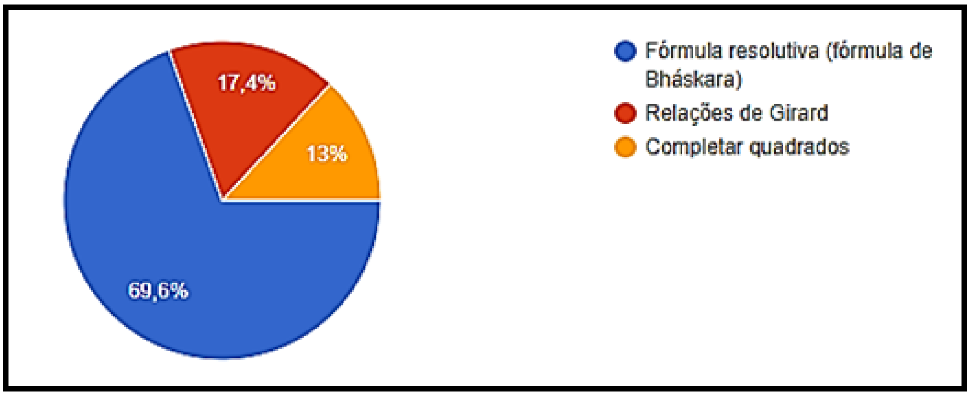


Fonte: A AUTORA, 2020

Após finalizarmos a análise dos resultados obtidos através da pesquisa exploratória, seguimos rumo às aulas expositivas dos conteúdos abordados em cada um dos jogos. Durante o momento das aulas expositivas, aplicamos o primeiro questionário (Apêndice B e C), a fim de coletar informações sobre o nível de aprendizado dos alunos.

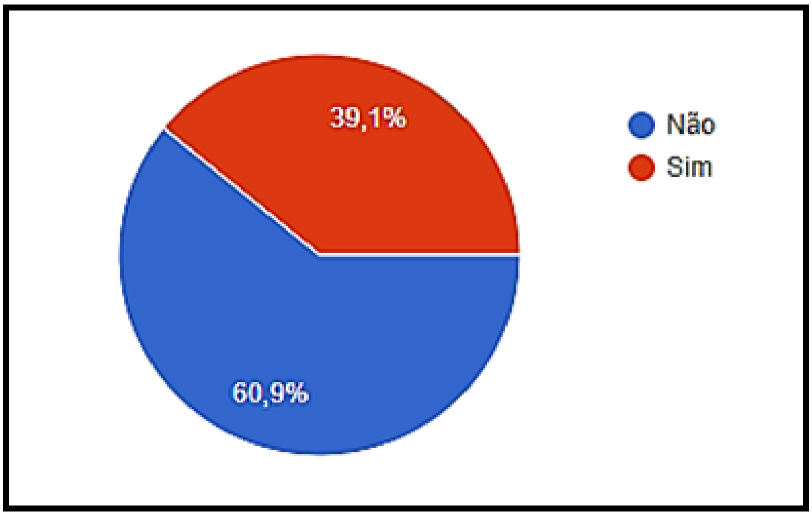
No gráfico 4, é possível observar que os alunos da turma 902 acharam mais prático resolver as equações do 2º grau através da fórmula de resolutiva e, no gráfico 5, podemos observar que esses alunos apresentaram alguma dificuldade na utilização dessa fórmula.

Gráfico 4 – Qual método para resolver as equações do 2º grau você achou mais prático?



Fonte: A AUTORA, 2020

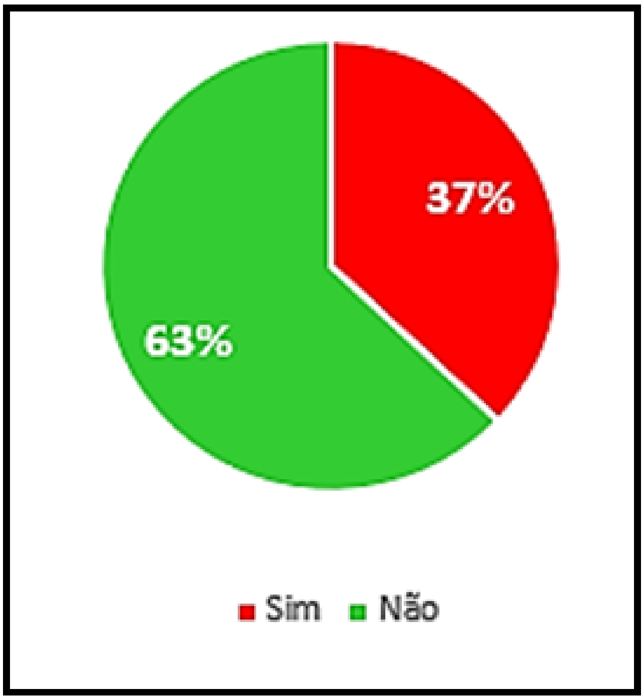
Gráfico 5 – Você encontrou alguma dificuldade em utilizar a fórmula resolutiva (Bháskara)?



Fonte: A AUTORA, 2020

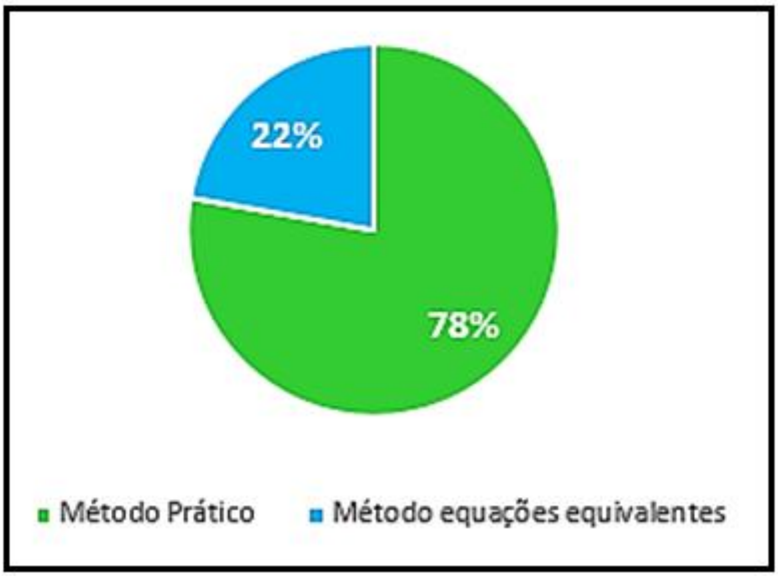
No gráfico 6, podemos visualizar as respostas dos alunos da turma 703 em relação à dificuldade de resolver equações do 1º grau e, no gráfico 7, em relação aos métodos utilizados para resolver as equações.

Gráfico 6 – Você encontrou dificuldade em resolver as equações do 1º grau?



Fonte: A AUTORA, 2020

Gráfico 7 – Qual método você utilizou para resolver as equações do 1º grau?



Fonte: A AUTORA, 2020

Na semana seguinte às aulas expositivas e aplicação do primeiro questionário, ocorreu a execução dos jogos Perfil Matemático e Baralho das Equações. Com a mudança de metodologia, procuramos fazer uma comparação no aprendizado dos alunos frente aos conteúdos expostos e uma análise da aplicação de jogos nas aulas de Matemática.

O momento pós-jogo da turma 902 se deu através de uma roda de conversa entre a professora e os alunos. Foi nesta roda que os alunos puderam expor suas opiniões, suas ideias e seus questionamentos em relação aos conteúdos abordados. Ao conversarmos com os alunos percebemos que o jogo tinha despertado um certo interesse pelo conteúdo, além de uma melhora significativa em seu desempenho. Durante essa conversa um dos alunos disse:

- Aluno 2: Quando a senhora explicou equação eu achei chato, mas com o jogo eu achei legal e mais fácil.

Quando questionados se o jogo os tinha motivado, 16 dos 23 alunos afirmaram que se sentiram motivados, 5 que se sentiram motivados em partes e apenas 2 afirmaram ser indiferente.

Em relação às estratégias adotas para vencer o jogo, apenas 6 alunos disseram que não adotaram nenhuma estratégia. Enquanto o restante afirmou que adotaram pelo menos uma estratégia.

A fala do Aluno 2 indica que um dos objetivos da atividade foi alcançado: aproximar a Matemática dos alunos e torná-la mais divertida.

O momento pós-jogo da turma 703 foi realizado através da aplicação de um segundo questionário (Apêndice D) e de uma conversa rápida sobre as estratégias adotadas pelos mesmos para vencer o jogo. Através desse questionário, conseguimos coletar informações relevantes a respeito da relação entre a aplicação da atividade o aprendizado dos alunos. Quando questionados se o jogo contribuiu para um melhor entendimento de como resolver as equações do 1º grau, 22 dos 27 alunos responderam que sim.

Em relação à motivação, 19 dos 27 alunos afirmaram que se sentiram motivados, 5 que se sentiram motivados em partes e apenas 3 disseram ser indiferentes. Quando questionados se o jogo havia despertado algum interesse, 23 alunos afirmaram que sim e apenas 4 afirmaram que não. A seguir, elencamos alguns relatos desses alunos:

- “Resolve equação mais rápido.”
- “Achei divertido e vou procurar outros jogos.”
- “Vou procurar ver se tem Matemática nos jogos de vídeo game.”

Sobre a avaliação do jogo Baralho das Equações e de toda a atividade, 13 dos 27 alunos avaliaram como ótimo ou muito bom, 10 avaliaram como bom e 4 avaliaram como ruim ou muito ruim. Isso nos mostra, de maneira geral, que a atividade foi bem aceita pelos alunos.

O último item do questionário era disponível para que os alunos escrevessem sugestões, críticas ou elogios à atividade, mas poucos quiseram escrever alguma coisa. A seguir, listamos algumas dessas descrições dos alunos:

- “Eu tive um pouco de dificuldade.”
- “Aumentar a quantidade de cartas do jogo.”
- “Eu gostei muito do jogo.”

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao escolher o assunto para esta dissertação, nosso principal objetivo foi de abraçar um tema que pudesse ser inserido de forma direta em turmas do ensino fundamental II e do ensino médio. Procuramos um tema que, além de ser inserido na educação básica, pudesse ser compreendido pelos alunos e despertasse nos mesmos um interesse maior pela disciplina matemática de forma natural.

A opção pelo uso de jogos no ensino da matemática deu-se pelo fato de a ludicidade atiçar a criatividade e o interesse dos alunos, o que favorece a construção e a aquisição de conceitos matemáticos.

Através desta pesquisa, procuramos mostrar que apesar de os jogos servirem para o entretenimento e a diversão do homem desde a Antiguidade, sua utilização é apropriada e importante na relação de ensino-aprendizagem.

Nossa pesquisa teve um caráter qualitativo cujo principal objetivo foi mostrar a outros professores dessa disciplina que o uso de jogos na sala de aula é, além de facilitador da prática docente, uma grande ferramenta metodológica.

Considerando a proposta deste trabalho, criamos os jogos “Perfil Matemático” e “Baralho das Equações”, com o intuito de atender os objetos de conhecimento sugeridos no 7º e 9º anos através de uma aprendizagem matemática mais apreciável para os alunos.

No Perfil Matemático, planejamos situações nas quais os alunos deveriam elaborar estratégias para vencer o jogo utilizando o raciocínio lógico e os conhecimentos matemáticos previamente estudados. Alguns deles disseram não terem adotado nenhuma estratégia além da utilização dos conhecimentos matemáticos, porém outros perceberam que, adotando as relações de Girard como estratégia para resolver as equações do 2º grau, conseguiam encontrar as raízes da equação mais rápido do que aqueles que utilizavam a fórmula resolutiva.

Na opinião dos alunos, a aula, além de ter sido divertida, proporcionou maior segurança na hora de encontrar as raízes das equações do 2º grau, no caso em que elas existiam.

Quando perguntado se o jogo tinha despertado alguma motivação, cerca de 9% responderam que era indiferente, 22% responderam que em determinados momentos sentiram-se mais motivados, e 69% responderam que sentiram-se muito motivados. Determinado grupo de alunos chegou a dizer que procuraria outros jogos envolvendo matemática além de perguntarem quando eles teriam outras aulas com jogos.

No Baralho das Equações, criamos situações que poderiam ser resolvidas de diferentes maneiras, por exemplo: a carta equação $3x = 75$, poderia ser resolvida adotando-se o cálculo mental, enquanto a carta equação $\frac{2x}{3} + 5 = \frac{x}{4}$ poderia ser resolvida com o método prático para resolver equações do 1º grau.

Durante a realização deste jogo, foi possível perceber que os alunos que gostavam do conteúdo abordado estavam resolvendo as equações com maior facilidade se comparados aos outros alunos. Observamos que alguns alunos adotaram a estratégia de resolver todas as cartas “perguntas” primeiro e depois ir apenas formando pares corretos, enquanto muitos alunos preferiram resolver a “carta pergunta” à medida que “compravam” a “carta resposta” para, em seguida verificar se algum par foi formado.

Quanto à avaliação do jogo, cerca de 48% dos alunos avaliaram como Ótimo ou Muito Bom, 37% avaliaram como Bom e apenas 15% avaliaram como Ruim ou Muito Ruim. O jogo viabilizou aos alunos elevarem seus conhecimentos sobre os objetos de conhecimento trabalhados. Tal avanço foi perceptível à professora através dos resultados obtidos na primeira avaliação bimestral após sua aplicação. Também foi possível verificar o crescimento dos alunos diante dos conteúdos ministrados, além da motivação, do interesse e do esforço de cada um deles.

Nossa pesquisa nos proporcionou descobrir as vantagens da utilização de jogos como ferramenta metodológica, porém também mostrou que o fato de aplicar o jogo, sem o devido planejamento, não tem nenhuma função pedagógica. O professor deve planejar a aplicação dos jogos de acordo com seus objetivos. É inegável que a utilização bem planejada dos jogos traz benefícios, tanto para os alunos como para o professor.

Destacamos, finalmente, que essa pesquisa pode ser desenvolvida em qualquer instituição de ensino fundamental II ou médio, adaptando-se a sua realidade escolar.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática: 6º ano**. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

______. **Praticando Matemática: 7º ano**. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

AULETE, Caldas. **Minidicionário contemporâneo da língua portuguesa**. Organização de Paulo Geiger. 3. ed. Rio de Janeiro: Lexikon, 2011.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Terceiro e quarto ciclos**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CASTRUCCI, Benedicto; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da Matemática: 9º ano**. 4 ed. São Paulo: FTD, 2018.

ENGELMANN, Jaqueline. **Jogos Matemáticos: Experiências no PIBID**. Natal: Editora IFRN, 2014. E-book.

FARIA, Anália Rodrigues de. **O desenvolvimento da criança e do adolescente segundo Piaget**. 3 ed. São Paulo: Ática, 1995.

FIETZ, Henrique Moura; MARTINS, Sílvia Letícia Shardozim. **Jogos e Materiais Manipulativos no Ensino da Matemática para o Ensino Fundamental.** *In*: EREMAT: Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul, 16., 2010, Porto Alegre. *Anais*... Porto Alegre, 2010. Disponível em: < https://editora.pucrs.br/anais/erematsul/minicursos/jogosemateriaismanipulativos.pdf >. Acesso em: 13 de set. de 2019.

FLEMMING, D. M; COLLAÇO DE MELLO, A. C. **Criatividade e Jogos Didáticos**. São José: Saint-Germain, 2003.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da Matemática.** 1995. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

______. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 224p. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, São Paulo, 2000. Disponível em: < http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/251334 >. Acesso em 23 de set. de 2020.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção Profmat).

ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Jogo como recurso pedagógico para trabalhar matemática na escola básica.** São Paulo: Livraria da Física, 2013.

LEITE, Pã Montenegro Pereira. **Jogo: Memória Polinomial (Ensino Fundamental)**. PIBID ICMC-USP, [s.d.]. Disponível em: <http://pibid.icmc.usp.br/arquivos/jogo_Pa.pdf?>. Acesso em: 27 de jun. de 2019.

LUDOSOFIA. **Hex: jogo de tabuleiro criado por dois matemáticos**, 2020. Disponível em < https://ludosofia.com.br/arqueologia/jogo-de-tabuleiro-reinventado-pelo-matematico-john-nash-hex/ >. Acesso em 08 de jun. de 2020.

MARTINS, Ivanete Ritter; SANTOS, Solange Maria Gomes dos. **Números e letras: o lúdico da álgebra no ensino de equações do 1º grau**. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE: Produção Didático-pedagógica, 2012. Curitiba: SEED/PR., 2012. v.1. (Cadernos PDE). Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_fafipar_mat_artigo_ivanete_ritter_martins.pdf> Acesso em 13 de nov. 2019.

MOURA, Manoel Oriosvaldo. **O jogo e a construção do conhecimento matemático.** In: CONHOLATO, Maria Conceição, FARES, Jacyra (Org.). O jogo e a construção do conhecimento na Pré-escola. Série Idéias, n. 10. São Paulo:

FDE/Diretoria Técnica, 1991. 130p. Disponível em: < www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf >. Acesso em: 10 de set. 2021.

NETO, João Pedro; SANTOS, Carlos.; SILVA, Jorge Nuno. **Jogos de Tabuleiro Tradicionais**. 2. ed. CreatSpace Independent Publishing Platform, 2017.

NETO, João Pedro; SILVA, Jorge Nuno. **Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos – Coleção O Prazer da Matemática volume 34**. 1. ed. Lisboa: Editora Gradiva, 2004.

O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **Girolamo Cardano**. MacTutor History of Mathematics Archive, 1998. Disponível em: <Girolamo Cardano (1501 - 1576) - Biografia - História mactutor da matemática (st-andrews.ac.uk) >. Acesso em 26 de nov. de 2020.

______. **Luca Pacioli**. MacTutor History of Mathematics Archive ,1999. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pacioli/>. Acesso em 26 de nov. de 2020.

PERES, Eliana Cristina. **Jogos Matemáticos e Equação do Segundo Grau.** PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE: Produção Didático-pedagógica, 2013. Curitiba: SEED/PR., 2014. V. 2 (Cadernos PDE). Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uem_mat_pdp_eliana_cristina_peres.pdf>. Acesso em 08 de out. de 2019. ISBN: 978-85-8015-079-7

PITOMBEIRA, João Bosco. **Revisitando uma velha conhecida.** BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMATICA, 2, 2004, Salvador. Anais ... Salvador: UFBA, 2004. p. 1-49. Disponível em: < http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf >. Acesso em 15 de out. de 2019.

SILVA, Beatriz Rechia da. **Letras X Números: O Jogo na Álgebra**. PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDF: Produção Didático-pedagógica, 2012. Curitiba: SEED/PR., 2012. v.1. (Cadernos PDE). Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_fafipa_mat_artigo_beatriz_rechia_da_silva.pdf >. Acesso em 16 de nov. de 2019.

SILVEIRA, Porto da. **Início da Matematização das Probabilidades**. 2001. Disponível em: < http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html>. Acesso em 09 de dez. de 2020.

THE BRITISH MUSEU (23 de novembro de 2015). **Deciphering the world's oldest rule book | Irving Finkel | Curator's Corner pilot.** [vídeo]. YouTube. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=wHjznvH54Cw&t=357s> . Acesso em 18 de jun. de 2019.

APÊNDICE A – Modelo de questionário aplicado durante a pesquisa exploratória

Pesquisa exploratória

1 – Qual a sua turma?

- ☐ 700
- ☐ 701
- ☐ 702
- ☐ 703
- ☐ 704
- ☐ 900
- ☐ 901
- ☐ 902
- ☐ 903

2 – Você gosta da disciplina Matemática?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Se sua resposta for sim responda à questão número 3, se for não responda à questão de número 4.

3 - Por que você gosta da Matemática?

- ☐ Facilidade na aprendizagem do conteúdo,
- ☐ Acha a matemática útil no dia a dia.

4 - Por que você não gosta da Matemática?

- ☐ Dificuldade na aprendizagem do conteúdo.
- ☐ Acha a matemática inútil no dia a dia.

5 - Algum professor (a) de Matemática já utilizou materiais lúdicos na sala de aula, por exemplo, jogos?

- ☐ Sim
- ☐ Não

6 – Você gostaria de aprender Matemática utilizando jogos?

- ☐ Sim
- ☐ Não

7 – Você acha que o uso de jogos na sala de aula pode ajudar em seu aprendizado?

- ☐ Sim
- ☐ Não

Por quê?____

APÊNDICE B – Modelo de questionário aplicado após as aulas teóricas sobre equações do 2º grau

Equações do 2º grau

1 – Você gostou de estudar equações do 2º grau?

- ☐ Detestei
- ☐ Foi indiferente
- ☐ Gostei
- ☐ Gostei muito

2 – Qual o método para resolver as equações completas você achou mais prático?

- ☐ Fórmula resolutiva (fórmula de Bháskara)
- ☐ Relações de Girard
- ☐ Completar quadrados

Por quê?____

3 – Você encontrou dificuldade em utilizar a fórmula resolutiva (Bháskara) para resolver as equações do 2º grau?

- ☐ Não
- ☐ Sim.

Qual?____
____

Se a sua resposta for **NÃO** responda à questão número 4, se for **SIM** responda à questão número 5.

4 – Onde está sua maior facilidade?

- ☐ Substituir os coeficientes a, b e c pelos respectivos valores e calcular o discriminante (delta)
- ☐ Calcular a raiz quadrada do discriminante e encontrar as raízes da equação.

5 – Onde está sua maior dificuldade?

- ☐ Identificar os coeficientes da equação.
- ☐ Calcular o discriminante (delta).
- ☐ Calcular raiz quadrada do discriminante
- ☐ Calcular as raízes da equação

6 – Como você resolveu as equações incompletas?

____

____

7 – Após as aulas explicativas você se sente seguro em resolver qualquer tipo de equação do 2º grau?

- ☐ Sim
- ☐ Não
- ☐ Talvez

Por quê? ____

8 - Você acha que o seu desempenho em Matemática em anos anteriores influenciou seu desempenho no ano atual?

- ☐ Sim
- ☐ Não
- ☐ Talvez

APÊNDICE C – Modelo de questionário aplicado após as aulas teóricas sobre equações do 1º grau

Equações do 1º grau

1 – Você gostou de estudar equações do 1º grau?

- ☐ Detestei
- ☐ Foi indiferente
- ☐ Gostei
- ☐ Gostei muito

2 – Você acha que o conteúdo, equação do 1º grau, tem relevância no seu dia a dia?

- ☐ Sim
- ☐ Não
- ☐ Talvez

3 – Você encontrou dificuldade em resolver as equações do 1º grau?

- ☐ Não
- ☐ Sim.
  Qual?____
  ____

Se a sua resposta for NÃO responda à questão número 4, se for SIM responda à questão número 5.

4 – Qual foi a sua maior facilidade?

____

____

5 – Qual foi a sua maior dificuldade?

____

____

6 - Na sua opinião, como o professor deve proceder para que a Matemática seja mais aceita pelos alunos?

____

7 – Após as aulas explicativas você se sente seguro em resolver qualquer tipo de equação do 1º grau?

- ☐ Sim
- ☐ Não
- ☐ Talvez

Por quê? ____

8 - Você acha que o seu desempenho em Matemática em anos anteriores influenciou seu desempenho no ano atual?

- ☐ Sim
- ☐ Não
- ☐ Talvez

APÊNDICE D – Modelo de questionário aplicado após o jogo Baralho das equações

Baralho das Equações

1 – Você gostou de participar dos jogos?

- ☐ Sim
- ☐ Não

2 – A utilização de jogos nas aulas de Matemática ajuda ou facilita a relação entre a teoria e a prática?

- ☐ Sim
- ☐ Não
- ☐ Talvez

3 - O jogo te ajudou a compreender melhor o conteúdo matemático abordado nele?

- ☐ Pouco
- ☐ Médio
- ☐ Muito

4 – O jogo foi motivador?

- ☐ Sim, me motivou
- ☐ Sim, me motivou em partes
- ☐ Não, foi indiferente

5 – Você conseguiu adotar uma estratégia para vencer o jogo? Qual?

- ☐ Não
- ☐ Sim.

Qual?____

6 – O jogo despertou algum interesse em você?

- ☐ Não
- ☐ Sim. Qual? ____

7 – Como você avalia a atividade?

- ☐ Muito ruim
- ☐ Ruim
- ☐ Boa
- ☐ Muito boa
- ☐ Ótima

8 – O campo abaixo é para você deixar alguma sugestão para melhorar a atividade, alguma crítica sobre a atividade ou elogio.

____
____
____