INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT

UMA ANÁLISE DO MATERIAL DO GESTAR II À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

ALEXANDER CRUZ DE SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho.

IFSP
São Paulo
2021

ALEXANDER CRUZ DE SOUZA

UMA ANÁLISE DO MATERIAL DO GESTAR II À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada e aprovada em 08 de novembro de 2021 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Amari Goulart
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Me. Ari Ferraza de Souza
Prefeitura Municipal de Extrema-MG
Membro da Banca

Quanto ao mais, irmãos, tudo que é verdadeiro, tudo o que é honesto, tudo o que é justo, tudo o que é puro, tudo o que é amável, tudo o que é de boa fama, se há alguma virtude, e se há algum louvor, nisso pensai. (Filipenses 4:8)

À minha mãe Maria da Conceição Cruz de Souza, que sempre me incentivou a estudar.

À minha esposa Priscila Ananias da Cruz, que se tornou um grande apoio e um porto seguro nos desafios enfrentados durante esta trajetória.

A meu filho Gustavo Inácio da Cruz, que me acompanhou nos longos estudos diários em casa.

AGRADECIMENTOS

Aos Professores cursistas do GESTAR II que fizeram parte da minha turma em 2009 na cidade de Extrema-MG e contribuíram para a minha formação continuada. Foram vários encontros presenciais, muitas ideias debatidas e muitos estudos a respeitos do GESTAR II que enriqueceram nossas manhãs de sábados.

Ao professor tutor do GESTAR II de Matemática na cidade de Extrema, Ari Ferraza de Souza, que não mediu esforços para unir um grupo de professores de Matemática em prol de uma melhoria em nossa prática pedagógica, foi um curso de formação continuada que marcou de forma significativa o professor pesquisador, e as ideias debatidas naqueles encontros são difundidas até o dia de hoje.

Aos amigos que ganhei na turma do PROFMAT, que me ajudaram nos momentos mais difíceis a cumprir os créditos necessários em cada disciplina. Foram muitos momentos de estudos e debates até conseguir a tão sonhada aprovação no Exame de Qualificação do PROFMAT – ENQ e posteriormente os créditos das disciplinas restantes.

Ao meu orientador, Professor Doutor Henrique Marins de Carvalho, por ter aceitado este desafio, e durante toda trajetória desta pesquisa ter estado presente, mostrando que é possível, de forma tranquila, passar pelo processo de pesquisa e escrita de um trabalho acadêmico. Cada página escrita, cada palavra aqui registrada teve um olhar deste orientador que é dotado de uma inteligência admirável e, em mesma proporção, de uma simplicidade que nos leva a tê-lo como exemplo, sendo capaz de conduzir um trabalho de pesquisa de forma consciente e dinâmica. Meu muito obrigado, pois sua companhia nos estudos e debates me proporcionava mais vontade de pesquisar e ir em frente.

Aos professores do PROFMAT do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, por toda dedicação e preocupação em proporcionar aulas que fizeram toda a diferença na formação deste pesquisador. Foram momentos de muitas satisfação e trocas de experiências, em que conseguiram desenvolver o conteúdo programático do PROFMAT com muita objetividade, passando segurança em todas as aulas.

À minha esposa, Priscila Ananias da Cruz, esta conquista também é sua. Muito obrigado, pois sem você eu não conseguiria chegar ao fim desta trajetória.

Admiro sua capacidade de resolver os problemas com muita objetividade e segurança. Muito obrigado por entender meus momentos de ausência, que foram necessários para me dedicar aos estudos e pesquisas.

Aos membros da banca pela contribuição dada ao meu trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro que possibilitou o meu deslocamento até o IFSP e a aquisição de materiais didáticos necessários durante o curso.

Muito Obrigado!

RESUMO

Os Cadernos de Teoria e Práticas (TP) e Caderno de Atividades de Apoio à Aprendizagem (AAA) do Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – GESTAR II são publicações a princípio destinadas aos professores cursistas do programa de formação continuada para professores do Ensino Fundamental - anos finais da Rede Pública de ensino em nível nacional e, posteriormente, disponibilizadas no site do Ministério da Educação. A pesquisa teve o objetivo de analisar o referido material e indicar sua relevância na elaboração de atividades matemáticas para uso em sala de aula. Esta investigação apoiou-se na teoria cognitiva, criada pelo psicólogo francês, Raymond Duval, a qual vem despertando o interesse de muitos pesquisadores na área da Educação Matemática, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). A metodologia adotada teve caráter qualitativo, por meio de pesquisas documental e bibliográfica. Os resultados revelam que os autores do material do GESTAR II, ao criar o material que serviu de base para o curso, tinham conhecimento das ideias da TRRS, mesmo que em muitos momentos não as tenham deixado explícitas. A pesquisa mostrou também que é possível encontrar no material do GESTAR II atividades classificadas, segundo a teoria de Duval, como atividades cognitivas de matemáticas capazes de contemplar os gestos intelectuais presentes na TRRS, que são: a formação, o tratamento e a conversão. Foi possível perceber também que as orientações pedagógicas presentes no material do GESTAR II articulam-se com as ideias da TRRS e que as atividades presentes nos TP e nos AAA são pertinentes para aulas de matemática, na perspectiva da TRRS.

Palavras-chave: Atividades cognitivas. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar (GESTAR II). Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Educação Matemática.

ABSTRACT

The Theory and Practice Notebooks (TP) and the Learning Support Activities Notebook (LSA) of the GESTAR II Program are publications primarily intended for teachers taking part of the continuing education program for elementary school teachers - final years of the Public Education at the national level and, later, available on the Ministry of Education website. The research aimed to analyze the referred material and indicate its relevance in the elaboration of mathematical activities for use in the classroom. This investigation was based on the cognitive theory, created by the French psychologist, Raymond Duval, which has been arousing the interest of many researchers in the field of Mathematics Education, the Theory of Registers of Semiotic Representation (TRSR). The adopted methodology was qualitative, through documentary and bibliographic research. The results reveal that the authors of the GESTAR II material, after creating the material that served as the basis for the course, were aware of the TRSR ideas, even though they often didn't make them explicit. The research also showed that it is possible to find in the GESTAR II material activities classified, according to Duval's theory, as cognitive activities in mathematics capable of contemplating the intellectual gestures present in TRSR, which are: training, treatment, and conversion. It was also possible to notice that the pedagogical guidelines present in the GESTAR II material are articulated with the ideas of TRSR and that the activities present in the TP and LSA are relevant to mathematics classes, from the perspective of TRSR.

Keywords: Cognitive activities. GESTAR II. Theory of Registers of Semiotic Representation. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Vários são os fatores que levam à escolha de um tema de dissertação: a curiosidade por algo que se deseja saber mais, a relevância no meio acadêmico em que o pesquisador está inserido e frequenta e o desejo de mudar uma realidade no âmbito escolar, fornecer embasamento teórico ou resolver certos problemas. Este trabalho foi concebido a partir da memória de um primeiro contato com a pesquisa na área de Educação Matemática, na experiência em um curso de formação continuada para professores de Matemática no Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – GESTAR II, no ano de 2009.

Ao ingressar no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, em 2019, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP, câmpus São Paulo, cursei as disciplinas obrigatórias e eletivas e, após reuniões de orientação foi delimitado o tema desta dissertação: analisar seleções de atividades presentes nos materiais publicados para uso no GESTAR II segundo o embasamento teórico da *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (TRRS) de Raymond Duval, com a finalidade de evidenciar uma coleção utilizada em um programa de formação continuada à luz da teoria de uma teoria cognitiva.

Sobre as publicações do material do GESTAR II, algo nos chamou a atenção em uma primeira leitura exploratória: em diversos momentos os autores incentivam o estudo da teoria de Duval como sendo um tema de especial relevância no processo de formação do professor, mas não citam, em quantidade, artigos ou pesquisas publicadas aqui no Brasil. Isso nos levou a uma investigação preliminar sobre as produções científicas a respeito da teoria de Duval no Brasil, uma vez que esta iniciou-se na França.

Fizemos uma investigação sobre o volume de publicações a respeito da TRRS no Brasil, em dois momentos, um deles - até 2016 - que contempla a produção das coleções do Gestar II e seu uso nos cursos de formação continuada e outro - de 2016 a 2020 - ano em que esta dissertação começou a ser escrita.

Segundo Almeida e Silva (2018), na revista BOLEMA, importante periódico do campo da Educação Matemática no Brasil, desde a sua criação em 1985 até 2016 foram publicados sete artigos a respeito da TRRS. Acompanhando a pesquisa de Almeida e Silva, estendendo o período para de 2017 a 2020, no mesmo periódico foram localizados outros quatro trabalhos, com o mesmo tema.

Pontes, Finck e Nunes (2017) também fizeram um levantamento de 2010 a 2015 no banco de dados da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e do BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações) na busca de observar o interesse nas publicações a respeito da ***Teoria dos Registros de Representação Semiótica*** encontrando 51 trabalhos: 44 dissertações e 7 teses.

Pesquisando nas mesmas fontes e usando a palavra-chave "Teoria dos registros de Representação Semiótica", no período de 2016 a 2020, encontramos 84 trabalhos, sendo 67 dissertações e 17 teses. Assim percebemos que as produções sobre o tema aumentaram nos últimos anos no Brasil, identificando o interesse continuado e crescente entre os pesquisadores da área de Educação Matemática.

Estas pesquisas reforçaram a ideia de ressaltar, nas análises dos textos das coleções do GESTAR II, o embasamento teórico a partir da TRRS de Duval e possíveis impactos no entendimento sobre o ensino e aprendizagem de Matemática. É pertinente, ainda, notar que o programa GESTAR II de Matemática, foi iniciado em 2004 e que os autores do Cadernos de Teoria e Prática, ainda que tenham incentivado o conhecimento da TRRS não tinham à disposição a mesma quantidade de publicações nacionais ou mesmo em língua portuguesa.

Agora, embasado com uma melhor propriedade da TRRS e revisitando as publicações das coleções de Matemática do programa de formação continuada a nível nacional (GESTAR II) em uma pesquisa bibliográfica e documental de caráter qualitativo com levantamento e estudos de bibliografias a respeito da TRRS e das coleções do material de Matemática do GESTAR II.

Ao abordar a TRRS na sua criação por Raymond Duval, a estruturação do curso de formação continuada para professores de Matemática (GESTAR II) e ao investigar as atividades propostas nas coleções de Matemática a fim de compreendermos quais atividades estão diretamente associadas às ideias da TRRS, almejamos promover o incentivo e conhecimento do material de Matemática do GESTAR II, vinculado a uma teoria cognitiva reconhecida. Essa combinação de boas propostas pedagógicas e teóricas pode contribuir para a formação inicial e continuada de novos professores.

Apresentamos no capítulo 2 deste trabalho a origem da *Teoria dos Registros de Representação Semiótica*, com as necessárias definições, e os precedentes que fundamentaram a estrutura da teoria de Raymond Duval, como as ideias de signos e semiose descritas por Charles Sanders Peirce, Ferdinand de Saussure e Gottlob Frege. Neste capítulo de fundamentação teórica trataremos dos gestos intelectuais descritos por Duval e o papel da TRRS no ensino e aprendizagem nas aulas de matemática.

A fim de situar o leitor sobre o que foi o programa de formação continuada GESTAR II, no capítulo 3 apresentamos um histórico do programa, indicando como ele era aplicado em cada cidade, os objetivos da criação, as leis que o regulamentaram como programa de formação continuada para professores de matemática a nível nacional, bem como salientamos a relação do professor pesquisador deste trabalho com o GESTAR II. De forma resumida, uma breve biografia dos autores das coleções analisadas foi produzida, com o intuito de salientar a presença de estudos acadêmicos sobre Duval. Apresentamos também os conteúdos matemáticos existentes em cada publicação e como estão estruturados.

Apresentamos no capítulo 4 as análises dos resultados, a partir de uma seleção de atividades retiradas das publicações do GESTAR II de Matemática, classificadas de acordo com as ideias da TRRS.

Por fim, no capítulo 5, fizemos nossas considerações finais acerca dos resultados encontrados com a análise do material à luz da ***Teoria dos Registros de representação semiótica***, buscando enfatizar que as publicações do GESTAR II ainda podem contribuir nos processos de ensino e aprendizagem e fornecer ao professor um material a mais no processo de elaboração de atividades matemáticas para a sala de aula.

2. A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) teve a sua origem com os trabalhos do psicólogo cognitivista francês Raymond Duval que, buscando entender o funcionamento do aprendizado humano, iniciou suas pesquisas na área de Educação Matemática com foco em alunos do Ensino Básico. Para ele, o ensino da matemática deve estar baseado não apenas na natureza dos objetos estudados, mas nas formas como eles nos são apresentados e nas maneiras de acessá-los.

As pesquisas posteriores que passaram a adotar esta teoria como suporte buscam compreender a organização das atividades matemáticas no ambiente da sala de aula. O próprio Duval (2016) identifica que as atividades matemáticas têm duas faces: a face exposta e a face oculta, que são opostas, mas complementares.

A face exposta da atividade matemática compreende o conhecimento matemático: teoremas, axiomas, definições, algoritmos, funções, grandezas etc. É a face que o professor, o matemático ou o profissional de um determinado ramo utiliza para determinar soluções de problemas ou para obter um novo resultado que ainda é identificado como pertencente a esta face explícita da Matemática.

A face oculta da atividade matemática, que é o foco da TRRS, trata dos gestos intelectuais que são as mobilizações de registros dos alunos nas atividades matemáticas; esta face está ligada à forma como os alunos desenvolvem e manipulam os objetos matemáticos, que será mencionado na seção 2.4, e auxilia o professor a investigar se o aluno consegue realmente compreender o objeto matemático pretendido na atividade.

Para que o professor consiga fazer essa avaliação não basta o resultado de um teste sem os devidos registros, pois, como afirma Duval (2016, p. 27) “sem a aquisição desses gestos é impossível compreender matemática e, dessa forma, adquirir conhecimentos e saber utilizá-los mesmo que se tenha obtido aprovação, localmente, em provas de avaliação.”

No título da teoria de Duval há os termos *registro*, *representação* e *semiótica*. Vamos abordar, nos próximos parágrafos, o que é a semiótica, o que Duval classifica como registro da atividade matemática e qual é a funcionalidade das representações semióticas no ensino da matemática.

2.1. Ideias anteriores à TRRS

A TRRS teve sua base na análise e interpretação das obras de três filósofos: Charles Sanders Peirce, Ferdinand de Saussure e Gottlob Frege. A fim de situarmos a teoria cognitiva de Duval nas linhas de seus predecessores, trataremos de forma sucinta os conceitos de signos e semiótica defendida por estes autores que inspiraram Duval.

Segundo Almeida e Silva (2018), Peirce definiu a semiótica como sendo a ciência dos signos que objetiva o exame dos modos de produção e de constituição do conhecimento. Sendo assim, o signo é constituído por três componentes, uma tríade: o *representamén*, o objeto e o interpretante. O *representamén* é o signo, o objeto é o representado pelo signo, e o interpretante é o sentido ou significado feito pelo signo. Ou seja, na análise daquilo que o objeto representa para o interpretante, cada pessoa constrói seu processo de atribuição do significado.

Nessa triangulação, o principal é o signo (ou *representámem*), que pode ser a existência de qualquer coisa, colocando a mesma em situação de comunicação, de substituição ou atribuição.

Os signos não são feitos basicamente de alguma matéria ou substância, mas de algumas relações lógicas; a partir do momento em que há uma comunicação, temos o signo criado. A função do signo vai depender de onde está conectado, por exemplo o que ele vai representar para alguém, surgindo assim uma nova representação, ou seja, um novo signo. As propriedades que possibilitam dizer que algo é um signo são três: a qualidade, a existência e o caráter de lei.

Almeida e Silva (2018) explicam que Peirce também definiu a terminologia: *Primeiridade*, *Secundidade* e *Terceiridade*. A *Primeiridade* refere-se ao objeto sem a referência de qualquer outro fator e está relacionada ao ícone. A *Secundidade* refere-se à ação e reação, à experiência em relação ao objeto, relacionada ao índice. A *Terceiridade* refere-se à construção do conhecimento, isto é, ao símbolo. Essa tríade ícone-índice-símbolo constitui o signo.

A *Primeiridade* ou ícone está relacionada ao primeiro estágio do pensamento que pode se relacionar ao objeto indicando algumas características que o assemelha com o próprio objeto.

Figura 1 - Ícone, uma casa

Fonte: Decorfácil[1]

O que podemos notar na figura 1 é que a imagem é a representação de uma casa de madeira, com uma varanda coberta e possui um pavimento superior. Ao descrever estas características estamos relacionando o ícone ao objeto por certas semelhanças.

A Secundidade ou índice representa uma relação com algo existente seja por meio de uma frase, um som ou uma imagem; por exemplo, despertando ou provocando sentimentos, sensações ou reações pela experiência de algo externo (CRUZ, 2019).

Figura 2 - Índice, uma xícara de café

Fonte: Twing[2]

1 Disponível em: <https://www.decorfacil.com/casas-de-madeira/>. Acesso em: 12 out.2020.

2 Disponível em: <https://pbs.twimg.com/media/B4Vi4ltIAAA-0rf.jpg>. Acesso em: 12 out.2020.

A figura 2 sugere, através de nossas próprias experiências, a necessidade de uma pessoa por um café. Em termos gerais, o ícone se estabelece através de uma associação de algo em outro por meio de experiência ou acontecimento já vivenciados.

A Terceiridade ou símbolo está associado ao objeto e, nesta etapa, o signo já sofreu influência de um meio ou já foi estabelecido por uma certa convenção ou legitimado por aqueles que o utilizam.

Figura 3 - Símbolo de notas musicais em dois pentagramas sol e fá respectivamente

Fonte: Clubes OBMEP[3]

Na figura 3, podemos perceber que no primeiro pentagrama, o símbolo representado é o da clave de sol, isso faz com que as notas musicais, por convenção, tenham suas respectivas alturas representadas diferentemente do segundo pentagrama, onde o símbolo utilizado é o da clave de fá. Quando algo tem um significado para um grupo, regido através de uma lei ou uma construção de conhecimento, esse algo se torna símbolo. Como outros exemplos podemos citar as grandes marcas de bebidas, alimentos e artigos religiosos.

Passando às ideias de Saussure, de acordo com Almeida e Silva (2018), sua teoria defende uma estrutura bilateral: significante e significado. O significado é a expressão material do signo, a palavra escrita no papel ou o som da palavra. O significante é a imagem projetada na mente do indivíduo quando em contato com o significado.

Segundo Souza (2007), Frege, por sua vez, faz uma distinção entre sentido e referência nos signos; para ele, a referência está associada ao objeto

3 Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2016/10/claves3.png>. Acesso em: 12 out. 2020.

evidenciado na expressão e o sentido é a maneira como o signo oferece seu significado. Por exemplo, nas expressões matemáticas: $5^2=5.5$ e $5.5=20+5$, temos a mesma referência, ou seja, tanto na primeira quanto na segunda o objeto evidenciado na expressão é o mesmo, porém elas possuem sentidos diferentes e os signos geram pensamentos diferentes.

De forma sucinta, essas são as bases de Raymond Duval para sua teoria cognitiva: Peirce, Saussure e Frege, que tratam de forma abrangente sobre a comunicação, a linguagem e o pensamento. A TRRS, sobre a qual vamos discorrer a seguir, tem, no entanto, uma forte relevância na Educação Matemática, já que Duval procura mostrar que os registros de representação semiótica são fundamentais na aprendizagem matemática.

2.2. Conceitos

Raymond Duval procurou investigar inicialmente duas questões fundamentais no ensino e aprendizagem da matemática que são: “O que significa fazer matemática?” e “O que significa compreender matemática?” Para Duval (2016) o ato de fazer Matemática já é algo pré-estabelecido na prática de matemáticos, professores de matemática e de todos outros profissionais de diversas áreas que se valem dos objetos matemáticos para solucionar problemas.

Duval (2016) nos mostra que as respostas às questões mencionadas não são tão claras quando se pensa em estudantes entre 6 e 16 anos que estão percorrendo os estágios de desenvolvimento cognitivo. Há, portanto, a necessidade de ampliar estas duas perguntas iniciais, a saber: “Quais os processos cognitivos para fazer Matemática?” e “Quais os fatores cognitivos no desenvolvimento da compreensão em Matemática?”

É importante saber quais são os processos e fatores cognitivos para o desenvolvimento e a compreensão das atividades matemáticas; Duval (2016) afirma que isto só é possível através do estudo dos registros, pois esta análise cognitiva do pensamento matemático está ligada à face oculta da atividade matemática que não é menos valorizada nos programas de ensino e em sala de aula, quando se privilegia a face exposta da atividade matemática.

Motivado a responder às questões apresentadas através de uma análise cognitiva, Duval, em 1995, introduziu a noção de registros de representação semiótica. Para Duval (2012b), a Matemática é uma ciência diferente das demais pois a única forma de ter acesso aos seus objetos é através de representações semióticas e o conhecimento matemático fundamenta-se na mobilização de sistemas semióticos. Abordaremos os sistemas não semióticos e semióticos nas seções 2.3 e 2.4.

Ressaltamos aqui um ponto importante na teoria de Duval: jamais confundir um objeto matemático com sua representação. Uma função polinomial do segundo grau com domínio no campo dos números reais é um objeto matemático, cujas possíveis representações são uma expressão algébrica da forma $f(x)=ax^2+bx+c$ ou seu gráfico, uma parábola. Essas representações, no entanto, não são o objeto matemático escolhido, pois ele é uma construção humana em um processo intelectual.

Assim, para que o professor consiga fazer a análise cognitiva do desenvolvimento do pensamento matemático de seus alunos e saber se eles conseguiram ter acesso ao objeto matemático escolhido para o estudo são necessárias as noções de ***Registros de Representação Semiótica***.

Ao utilizar tais noções, deve-se considerar que há uma relação intrínseca entre o pensamento, o registro e a atividade matemática desenvolvida. Na análise da representação do objeto matemático estudado, ou seja, dos registros produzidos pelos alunos verifica-se se houve a compreensão do objeto matemático pretendido.

Como afirma Almeida e Silva:

> Neste sentido, o interesse de Duval está, principalmente, no funcionamento cognitivo do aluno. Para ele, o pensamento é ligado às operações semióticas e, consequentemente, não haverá compreensão possível sem o recurso a essas representações. (ALMEIDA; SILVA, 2018, p. 704)

Ainda Almeida e Silva (2018) concluem que, para Duval (2016), os signos são o ponto de partida, pois eles correspondem a algo que é preciso para começar a dar um sentido nas produções; é nos registros de representações destes signos, ou seja, no Registros de Representação Semiótica que será revelado como se deu a ação cognitiva que o intérprete, no caso, o aluno, deu para este signo. Assim os

Registros de Representação Semióticas não produzem novos signos e sim revelam a interpretação do signo trabalhado dentro de um sistema semiótico.

2.3. Sistemas não semióticos

É preciso estabelecer uma separação entre representações não semióticas e representações semióticas. Nos sistemas não semióticos os objetos de estudos estão presentes no mundo real, de forma que não há a necessidade de mobilização de vários registros para obter a compreensão do mesmo.

Como exemplo de um sistema não semiótico vamos citar como objeto a Lua. Segundo o dicionário Dicio, Lua é:

> Satélite em órbita (ao redor) de um planeta: as luas de Saturno. Satélite natural do planeta Terra cuja órbita dura cerca de 27 dias, 7 horas e 43 minutos (com maiúsculas): gosto de olhar a Lua. Face deste satélite que pode ser observada da Terra. Luz que, durante a noite, irradia desse satélite pela reflexão da luz do Sol. Imagem ou objeto que possui a aparência da Lua, normalmente em suas fases cheia e crescente. (LUA, 2021)

Para o fotógrafo Peter de Vink, a definição de Lua foi registrada nas lentes de sua câmera e resultou na imagem abaixo:

Figura 4 - Foto da lua cheia

Fonte: Página de Peter de Vink no Pexels[4]

4 Disponível em: <https://www.pexels.com/pt-br/foto/foto-da-lua-cheia-975012/>. Acesso em: 15 out.2020.

Para o estudante abaixo, o signo Lua aparece nos estudos das crateras da Lua em uma imagem observada em um dispositivo eletrônico.

Figura 5 - Estudante observando crateras

Fonte: Página de RF Sudios no Pexels[5]

Nos sistemas não semióticos, os objetos são de fácil compreensão, a utilização e a escolha de apenas um único registro para representar o objeto é suficiente; ou seja, para entender sobre a Lua, tratando-a como objeto de estudo, poderíamos escolher um único tipo de representação dos três apresentados acima, e não teríamos a necessidade da mobilização de dois ou mais sistemas de representação para a compreensão.

Por outro lado, para Duval (2012) isso não ocorre nas atividades matemáticas, especificamente para alunos do ensino escolar básico, que necessitam da mobilização de mais de um sistema semiótico para a compreensão dos objetos matemáticos.

Na próxima seção tratamos dos sistemas semióticos com destaque para aqueles mais utilizados nas atividades matemáticas.

2.4. A teoria de Duval na sala de aula e sistemas semióticos

5 Disponível em: <https://www.pexels.com/pt-br/foto/colheita-estudante-afro-americana-estudando-crateras-da-lua-em-tablet-no-observatorio-3825569/>. Acesso em: 15 out 2020.

Na teoria de Duval, são chamadas de gestos intelectuais três atividades cognitivas: formação, tratamento e conversão.

A formação pode estar ligada a um problema, na língua natural, a um desenho geométrico, expressão de uma fórmula, e sua função é assegurar que o sujeito da aprendizagem possa ter informações necessárias para reconhecimento da representação e passagem de etapa para a segunda atividade, que é o tratamento.

O tratamento se aplica na transformação da representação do mesmo registro, por exemplo o cálculo algébrico, quando efetuamos uma simplificação de uma expressão algébrica, seu resultado fica no mesmo registro.

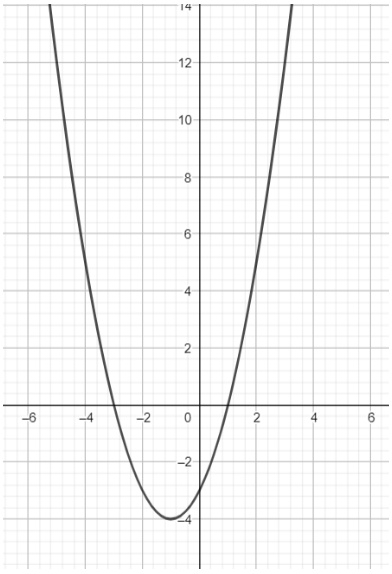
A conversão de uma representação é a transformação de um registro em outro, por exemplo, representar a solução analítica de um sistema de equações do primeiro grau em uma representação gráfica cartesiana.

Uma boa organização das atividades matemáticas pode facilitar o acesso aos objetos matemáticos e Duval (2016) estabelece dois estágios para o desenvolvimento e compreensão das atividades matemáticas classificados como patamares de compreensão. Inicialmente todos os alunos estão no primeiro patamar e é neste momento que os alunos vão desenvolver a sinergia entre dois registros. Se houver a mudança de registros e o novo registro for capaz de representar o mesmo objeto, é sinal que obteve a compreensão do objeto.

Para que haja uma compreensão integral do objeto estudado pelo aluno é preciso que se tenha pelo menos dois registros de representação, que já mencionamos como sendo o primeiro patamar e que possa transitar entre um registro e outro e que este dois possam assumir o papel de representante e representado, etapa que Duval (2016) classifica como sendo o segundo patamar de compreensão.

Veja o exemplo a seguir: Dada a função polinomial definida por $f: R \to R$, $y = x^2 + 2x - 3$, determine sua representação gráfica.

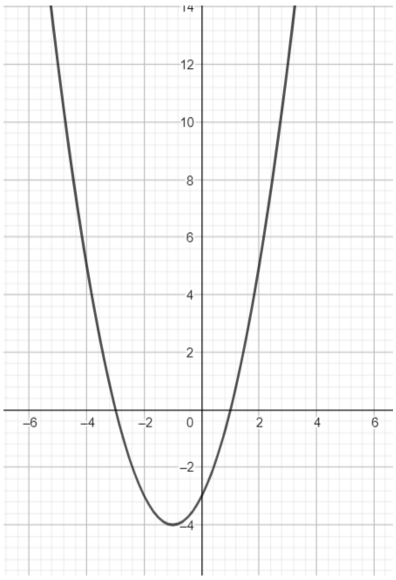
Figura 6 - Resposta do item (a), representação gráfica da função do 2º grau: uma parábola



Fonte: Próprio autor

Dada a representação gráfica da função do 2º grau abaixo com domínio no conjunto dos números reais, determine sua representação na forma de expressão algébrica.

Figura 7 - Representação gráfica da função do 2º grau: uma parábola



Fonte: Próprio autor

Resposta: $y = x^2 + 2x - 3$

No item da figura 6 é dada a expressão algébrica: $y=x^2+2x-3$, uma representação algébrica da função do 2º grau, na atividade é preciso fazer a mudança de registro para uma representação gráfica. Se essa atividade tivesse apenas este item, após o desenvolvimento o aluno estaria no primeiro patamar de desenvolvimento.

Para que o professor possa investigar se o aluno adquiriu a compreensão integral do objeto estudado, Duval (2016) afirma que é preciso que o aluno seja capaz de executar operações de conversão de uma representação em outra. O que ocorre no exemplo da figura 7, temos inicialmente o objeto matemático em uma representação gráfica, e espera-se que o aluno consiga fazer a representação na forma algébrica.

Se o aluno conseguir desenvolver os diferentes registros e transitar de uma representação a outra, ou seja, desenvolver as atividades matemáticas presentes nos exemplos da figura 6 e figura 7, houve uma compreensão integral do objeto estudado. A atividade cognitiva deverá ter como objetivo proporcionar a autonomia intelectual dos alunos; no exemplo que elencamos acima, não detalhamos os gestos intelectuais necessários para garantir essa autonomia, pois deixaremos mais bem explicado no capítulo 4 deste trabalho. Para Duval (2016), estas atividades, quando bem organizadas, fazem com que os alunos superem suas dificuldades de compreensão na disciplina.

Após a realização das atividades cognitivas, o fechamento não deve estar pautado em uma relação binária de certo ou errado, ou seja, nos Registros de Representação Semiótica o que se deseja analisar é se o objeto de estudo foi alcançado e se o aluno avançou os patamares de compreensão, sendo possível transitar entre um registro e outro (DUVAL, 2016).

A ***Teoria de Registros de Representação Semiótica*** sugere que cada aluno tenha um tempo da aula para explicar o que fez, como ele construiu seu registro, sem a interrupção do professor para orientá-lo ou corrigi-lo. Esse modo de fechamento das atividades faz com que o aluno adquira confiança em si mesmo em toda a condução, pois ele sabe que em nenhum momento vai sofrer interrupção por parte do professor.

Vale ressaltar que as noções de registros da TRRS podem ser utilizadas como suporte para estratégias de instrumentos avaliativos e pode ajudar a identificar os problemas de aprendizagem atribuída aos alunos, exercendo o papel de instrumento de observação e análise de fenômenos da aprendizagem em matemática. Por esta capacidade de fornecer análise do desenvolvimento cognitivo do aluno, as noções de registro passam a contribuir nas pesquisas sobre aprendizagem matemática.

Isso se deve ao fato de a Matemática trabalhar exclusivamente com representações semióticas, de modo que o conhecimento matemático se constrói não por meio da abstração, e sim por mobilização de sistemas semióticos os quais exercem a função de tratamento do objeto estudado.

Explicando de outro modo os parágrafos acima, vamos citar como exemplo o desenvolvimento do conceito de área de um retângulo. Do ponto de vista matemático, um registro é suficiente, de modo que, se uma pessoa que trabalha com matemática, registrar que a determinação da área de um retângulo é a multiplicação das dimensões desse retângulo, ou seja, multiplicação do comprimento pela altura, já é o suficiente, pois em algum momento ele já teve acesso a este objeto matemático e com apenas um registro ele o “re-acessa” sem dificuldade.

Segundo Duval (2016), isso não ocorre tão espontaneamente para alunos entre 6 e 16 anos, sendo necessário, para adquirir o conhecimento matemático a mobilização de, ao menos, dois registros de representação semiótica e esses registros assumem a função de tratamento. É preciso garantir a possibilidade de idas e vindas sem muita dificuldade, quase de maneira espontânea entre estes registros e sua mobilização pode cumprir uma função heurística, que é a verificação das tomadas de decisões ou a função de aplicabilidade, ou seja, a escolha do registro em que realmente vai efetuar a atividade matemática para assim chegar à resolução do problema.

Para a escolha dos registros semióticos em uma atividade matemática, a TRRS faz a distinção dos registros em quatro tipos:

1º tipo: As declarações em língua natural; a utilização da língua materna para descrever um enunciado ou um relatório de execução de uma atividade matemática.

2º tipo: As equações, as fórmulas escritas, a utilização de símbolos de operação entre outros.

3º tipo: As visualizações geométricas.

4º tipo: Visualização analítica em sistemas de coordenadas.

Os dois primeiros tipos são registros discursivos que vão produzir expressões como palavras, letras, números, símbolos de relações entre conjuntos. Os outros dois tipos são relacionados a registros de visualizações, presentes por exemplo na geometria plana, espacial e nas noções de funções.

Duval (2016) nos chama a atenção para o cuidado na utilização da língua natural como um tipo de registro. Não é porque os alunos dominam a língua materna que de maneira direta vão conseguir interpretar um problema em uma atividade matemática. Há uma diferença cognitiva quando se trabalha e se faz uso da língua materna em matemática e na utilização da língua materna em um contexto não matemático.

Quando se trata dos registros, utilizando a língua natural (1º tipo), a linguagem deverá ser utilizada em sinergia cognitiva com outros sistemas semióticos como, por exemplo, se a atividade desenvolvida na sala de aula for a respeito de potenciação e se, em uma determinada parte, o enunciado for: *Sabendo que o quadrado de quatro é dezesseis, determine todos os quadrados menores que 101*, não basta apenas os registros em língua natural para ter uma compreensão total da atividade matemática, sendo necessário a mobilização de registros de visualização geométrica (3º tipo) para uma total compreensão da atividade matemática.

São nestas mobilizações de registros, segundo Duval (2016), que a Matemática vai se constituindo em uma atividade intelectual e as noções de registros desenvolvem seu papel diante de toda atividade matemática. Por meio dos registros, o professor é capaz de fazer análises cognitivas das dificuldades sistemática e recorrentes de compreensão de seus alunos, propor uma organização de toda situação de aprendizagem para que seus alunos desenvolvam um pensamento matemático bem como sua maneira matemática de trabalhar.

Quando se trata na Teoria dos Registros de Representação Semiótica da análise cognitiva da atividade matemática, isso diz respeito à análise da compreensão do fazer matemática, isso ocorre por meio da análise de todas as mudanças de registros.

Assim, em uma atividade cognitiva de matemática, o professor não vai verificar se o aluno colocou o resultado certo ou errado no final. A análise do professor deverá ser nas mudanças de registros: por exemplo, se o aluno conseguiu converter os enunciados de uma situação-problema em uma equação ou reconhecer a representação algébrica em uma representação gráfica.

Duval (2016) chama a atenção para uma problemática da não consideração das mudanças de registros na realização das atividades matemáticas e que isso pode levar a uma compreensão parcial do objeto matemático, por exemplo, nas atividades matemáticas de sistemas de equações do 1º grau, quando é utilizado apenas o registro analítico e não considerado o registro em um sistema de coordenadas, não fazendo a conversão entre eles. Dada esta observação, é possível que estes alunos não compreendam de forma integral o sistema de representação semiótica para o objeto matemático em questão.

Ao propor uma organização das atividades em sala de aula, para que elas se transformem em atividades cognitivas de matemática, é preciso que as mudanças de registros sejam espontâneas, para que estudantes obtenham sua autonomia intelectual e consigam ultrapassar os patamares de compreensão.

Os sistemas semióticos escolhidos para as atividades devem garantir a possibilidade de efetuar as operações semióticas relacionadas aos patamares de compreensão. Em Matemática utilizam-se diferentes sistemas semióticos, sendo necessário, em toda atividade matemática, escolher o de maior potencialidade na execução das operações semióticas. São exemplos de sistemas semióticos: A língua materna, sistema de numeração em base *n*, entre outros.

Os sistemas semióticos a princípio assumem a função de comunicação, de transmitir informações e Duval (2016) ressalta que é somente no sentido de comunicar e transmitir informações que podemos associar a língua materna com a Matemática. Alguns sistemas semióticos possuem a função psíquica de objetivação, por exemplo as pinturas rupestres estão dentro de um sistema semiótico de objetivação, que foi a materialização de um pensamento abstrato desenvolvido por pessoas que viveram há milhares de anos. Existem também os sistemas semióticos que desenvolvem a função de tratamento. Na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os registros são sistemas semióticos e, quando há a mudança de um registro para um outro, podemos dizer que acontece operações semióticas, mudando de sistema semiótico.

Vale ressaltar que a função buscada nos sistemas semióticos através dos registros é a função de tratamento que, para Duval (2016), é a análise do desenvolvimento do pensamento e do conhecimento. De modo que os registros são utilizados para cálculos operatórios, conjecturas, demonstrações de teoremas, modelagem de uma situação-problema entre outros.

O ponto crucial na TRRS, como já mencionado, é não confundir o objeto com sua representação. Tomemos um outro exemplo: o número um, que pode ter sua representação escrita em algarismo 1 na escrita em algarismos indo-arábicos, mas podemos pensar no número um nas formas: $2°$; $5 \div 5$; $\frac{7.10^2}{7.10.10}$; $\frac{x}{x}$, com $x \neq 0$. Qualquer um destes sistemas semióticos faz a representação do número um, mas nenhuma destas representações configura o próprio objeto matemático (o número um).

Duval (2016) menciona a existência de três diferentes tipos de objetos: OPER (objetos materiais ou concretos), OSCI (objetos das ciências), OMAT (objetos matemáticos). A palavra objeto também é usada para designar objetos fenomenológicos e diz respeito a tudo o que a nossa atenção consegue focalizar.

Para Klüber e Burak (2008) esta focalização está ligada a uma atitude fenomenológica, em que o sujeito, em sua consciência, é capaz de desprender do todo e voltar-se para uma única parte, na busca de uma verdade capaz de esclarecer o fenômeno provocado. A consciência é intencionalidade, o que implica que os objetos fenomenológicos são intencionais e correlativos à consciência.

Os objetos fenomenológicos são subdivididos em: OPH1 (leva a focalizar objetos com acesso através da percepção), OPH2 (capaz de focalizar pontos da consciência, isolando qualquer coisa de seu contexto), por exemplo, ao olhar um automóvel, focalizar apenas na cor de sua preferência, desprezando todas as outras partes contidas no carro e OPH3 (aplicados nos objetos acessíveis por representações semióticas), subdivididos em dois tipos de objetos fenomenológicos: primeiro objeto fenomenológico é o conteúdo e segundo objeto é o próprio objeto fenomenológico.

Por exemplo, o uso das equações do 2º grau para resolver situações-problemas de área é um OPH3 e os dois objetos fenomenológicos gerados são: primeiro, o cálculo como vai desenvolver e o segundo, as letras que compõem a própria equação.

No âmbito da fenomenologia, Klüber e Burak (2008) explicam sobre a síntese noésis-noema:

> Pelo fato de o objeto ser sempre intencional, o fenomenal transforma-se em fenômeno, e aí aparece a síntese denominada noésis-noema. Noema sendo o fenômeno (objeto intuído) percebido pelo noésis (sujeito intencionado, voltado para, estendendo-se a...). Então, o noésis e o noema se constituem concomitantemente, em movimento, não há objetos em si, verdades em si, mas sempre em perspectivas e com sentido no horizonte de compreensão do sujeito. (KLÜBER; BURAK, 2008, p. 95)

De acordo com os autores, os objetos em estudos irão aparecer para o sujeito em perfis, não em sua totalidade, mediante a intuição, percepção e reflexão de cada um. De forma que a fenomenologia procura entender os objetos fenomenológicos e a maneira que os perfis aparecem em sua totalidade através da síntese noésis-noema. Para Klüber e Burak (2008), utilizando a síntese noésis-noema da fenomenologia é possível compreender os significados que se desenvolveram ao longo da história pois eles são compreendidos à medida que seus perfis aparecem.

Klüber e Burak (2008) ressaltam que uma contribuição importante da Fenomenologia para o ensino da Matemática está no olhar fenomenológico que nos ajuda a compreender e esclarecer aspectos muito importantes nas concepções de ensino e aprendizagem, de realidade e conhecimento, que Duval (2016) classifica como face oculta da Matemática. Os mesmos autores ainda salientam que uma postura fenomenológica muda a maneira como os conteúdos são tradicionalmente transmitidos em sala de aula:

> No que concerne ao conteúdo matemático e às pesquisas que se voltam para o ensino e para a aprendizagem da Matemática, a postura fenomenológica pode favorecer a ruptura das formas predominantes de transmissão de conteúdo. Isso se torna possível a partir da compreensão de que a fenomenologia busca o significado, o sentido de o homem estar no mundo, do seu fazer, dos seus atos que são sempre intencionais. Educador e educandos buscam aquilo que faz sentido para eles na relação mundana. (KLÜBER; BURAK, 2008 p. 99)

No caminho da Fenomenologia com a síntese noésis-noema, Duval (2012b) afirma que a noésis é inseparável da semiose. Em seus estudos sobre os registros de representação semiótica ele evidencia a necessidade de olhar para a semiose nas atividades de matemática, como um elemento facilitador da aprendizagem. Agora temos uma tríplice noésis-noema-semiose:

> ….as dificuldades que resultam para sua aprendizagem se dão pelo fato de que não há noésis sem semiose enquanto houver vontade de ensinar matemática, como se a semiose fosse uma operação desprezível em relação a noésis. No entanto, é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro [...] é esta forte ligação entre semiose e noésis, no funcionamento cognitivo do pensamento, que se tenta evidenciar [...]. (DUVAL, 2012b, p. 270)

Para Duval (2012b) noésis e semiose se mostram como uma ligação inseparável pelo fato de que é inerente do ser humano a utilização de diferentes registros de representações e é qualidade do pensamento humano a utilização de muitos sistemas semióticos, por exemplo, na comunicação de uma informação poderá conter ao mesmo tempo um recurso verbal e não verbal. Diferente do que acontece na inteligência animal, que pode haver um único sistema semiótico para comunicar e na inteligência artificial que possui um funcionamento rígido e reduzido a um único sistema semiótico programado. Assim sempre teremos um sujeito intencionado, voltado para a descoberta (noésis) e interligado a estas descobertas teremos o processo de significação e de produção de significado (semiose).

De modo geral, as noções de registros na TRRS não buscam tratar de forma sistemática os conhecimentos matemáticos, mas sim as abordagens cognitivas específicas presentes na face oculta da Matemática. Quanto às perguntas inicialmente feitas por Duval (2016): Quais os processos cognitivos para fazer Matemática? Quais os fatores cognitivos no desenvolvimento da compreensão em Matemática? Fica evidente que as noções de registros, a relação entre noésis e semiose contribuem nos processos cognitivos e em todo desenvolvimento da compreensão na aprendizagem Matemática.

Segundo Duval (2012b), é necessário compreender para poder aprender, o aprendizado não se resume em aplicar as instruções presentes em um enunciado, mas em uma análise sobre o que está buscando e na autonomia de verificar se chegou ao objetivo esperado.

O processo para fazer matemática, do ponto de vista cognitivo, não se encontra na repetição, sem nenhuma reflexão sobre o assunto, por exemplo, não é porque o aluno conseguiu encontrar dezenas de raízes de diversas equações quadráticas por meio do cálculo do discriminante e usando a fórmula resolutiva que se pode concluir que ele compreendeu o objeto matemático estudado.

Os processos cognitivos do reconhecimento e a compreensão dos objetos matemáticos são baseados na maneira como se tem acesso a eles. Em se tratando da disciplina de Matemática, são acessados pelas representações semióticas e é através da mobilização dos registros de representação semiótica que é possível fazer a análise da compreensão ou dificuldade no objeto estudado.

Sobre os fatores cognitivos no desenvolvimento da compreensão em matemática, Duval (2012a) afirma que são baseados na vivência dos alunos, ou seja, como eles reagem quando são colocados em situações de aprendizagem, o interesse pelos tipos de atividades propostas, relação de competitividade com os outros alunos, sua autonomia intelectual. Todos estes fatores devem ser levados em conta pelo professor na organização das atividades em sala de aula.

Os estudos da TRRS analisam se houve o reconhecimento por parte dos alunos do objeto matemático estudado, mobilizando pelo menos dois registros de representação. Se dado um sistema semiótico inicial, por exemplo, um enunciado em língua materna de um problema de álgebra, o indivíduo for capaz de realizar a conversão para um outro sistema semiótico (expressão algébrica), isso acaba originando um processo cognitivo que resulta na procura da resolução de um problema. Assim, os registros de representação semiótica antecedem a toda solução de atividade cognitiva de matemática.

Duval (2012a) afirma que os professores em sala de aula devem procurar fazer dois tipos de diagnóstico ao analisar os registros produzidos pelos seus alunos: I) identificar os motivos da não compreensão e possíveis bloqueios ao acesso do objeto estudado.

II) Encontrar as funções, exercícios, atividades que possam permitir efetuar a atividade cognitiva para ter acesso ao objeto estudado.

Este segundo tipo de diagnóstico é livre para todas as etapas de ensino, uma vez que a TRRS não aborda propriamente uma sequência didática, o professor não necessita de um pré-requisito para propor uma atividade cognitiva que busca romper um bloqueio recorrente por parte do aluno.

Em Duval (2012a) temos uma preocupação na construção de programas de formação de professores que privilegiam apenas a face exposta da matemática, sendo as noções de registros algo que se impõe a toda atividade matemática, é preciso que os futuros professores sejam preparados para trabalhar com a face oculta da atividade matemática, que sejam capacitados a reagirem de maneira adaptada e consciente às atitudes intelectuais que são o pensamento matemático em uma atividade cognitiva de matemática. Comentaremos, portanto, no próximo capítulo, a respeito de um programa que foi planejado atendendo à recomendação de Duval de valorizar essa face da matemática.

3. O QUE É O GESTAR II DE MATEMÁTICA

Com o título de Gestão da Aprendizagem Escolar, este programa de formação continuada de professores do ensino fundamental atendeu, no período de 2001 a 2003, professores dos anos iniciais do ensino fundamental, em seis estados: Rondônia, Acre, Bahia, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Goiás.

Em 2004, houve uma ampliação do programa e a formação passou a ser oferecida a professores dos anos finais do ensino fundamental[6]. Até o final de 2007, a coordenação do programa era feita pelo Fundo de Fortalecimento da Escola (Fundescola). No ano seguinte, o GESTAR foi estendido às redes de ensino fundamental das escolas públicas de todo o país, sendo coordenado pela Secretaria de Educação Básica (SEB) ligada ao Ministério da Educação (MEC) e incorporado ao Sistema Nacional de Formação de Profissionais da Educação Básica e do Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE), constituindo-se como um programa de formação continuada semipresencial destinado para professores de Matemática do ensino fundamental.

Abrangendo todas as regiões do país e com o propósito de atender as metas compactuadas no Plano de Metas Compromisso Todos Pela Educação, por meio do Decreto nº 6.094, de 24 de abril de 2007, o GESTAR II foi oferecido mediante o interesse de participação de cada Secretaria de educação municipal ou estadual.

Os estados ou as cidades interessados nos cursos oferecidos pelo Programa Gestão da Aprendizagem Escolar (Gestar) da Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação (MEC), deveriam solicitar seu interesse via Plano de Ações Articuladas (PAR)[7].

Os cursos foram oferecidos em polos de universidades federais parceiras do programa Gestar, a tutores selecionados pelos municípios interessados, na modalidade semipresencial, com carga horária de 300 horas distribuídas em 104

---

6 Denomina-se GESTAR I - Programa de formação para professores dos anos iniciais e GESTAR II - Programa de formação para professores dos anos finais do ensino fundamental

7 O Plano de Ações Articuladas (PAR) foi criado pelo Decreto nº 6.094, de 24 de abril de 2007 como uma estratégia de assistência técnica e financeira vinculado ao Plano de Metas Compromisso Todos pela Educação. Foi criado para estruturar e gerenciar metas definidas estrategicamente para planejamento plurianual das políticas educacionais visando melhorias na educação pública.

horas de atividades realizadas presencialmente e o restante, a distância. Depois desta formação, o professor Tutor era habilitado para oferecer a formação continuada do Programa Gestão da Aprendizagem a outros professores do município.

O município de Extrema - MG iniciou suas atividades de formação no programa GESTAR II junto com outros 12 municípios de Minas Gerais (Belo Horizonte, Campestre, Fortuna de Minas, Ipatinga, Itamonte, Lagoa Dourada, Pedra Dourada, Santa Bárbara do Leste, Santa Bárbara do Monte Verde, Santa Rita de Ibitipoca, Três Corações e Tombos) nos dias 20 a 26 de novembro de 2009, no polo sob responsabilidade da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), no Colégio de Aplicação João XXIII.

O Programa GESTAR II foi implantado na cidade de Extrema no início de 2011[8] para os professores que atuavam na rede municipal e com convite estendido para os professores da rede estadual. Neste período, o autor deste trabalho atuava como professor de Matemática para os oitavos e nonos anos da Escola Municipal Evandro Brito da Cunha e para os sétimos anos da Escola Estadual Alfredo Olivotti do Ensino Fundamental II e teve a oportunidade de ser um dos participantes do programa, tendo como tutor o professor Ari Ferraza de Souza que havia recebido o aperfeiçoamento do GESTAR II de Matemática no polo na UFJF.

O Tutor, atuando como multiplicador, conduziu as atividades de formação de um grupo de dezenove professores da cidade, com duração de 300 horas, sendo 120 horas em encontros presenciais e 180 horas a distância.

Os encontros presenciais eram feitos quinzenalmente aos sábados em uma escola do próprio município, momentos nos quais eram estudados os cadernos de Teoria e Práticas (TPs), com discussões feitas em grupos a respeito das questões de caráter prático-teórico. Além disso, sempre era proposta uma situação para ser resolvida, integrando os conhecimentos em estudo.

O material de apoio do programa, disponibilizado em exemplares impressos foi composto por dezoito publicações, a saber:

- um Guia Geral;

8 Após 2011 e até o momento desta publicação não foi encontrado nenhuma notícia relacionada a novas formações continuadas do Programa Gestar no site do Ministério da Educação (MEC) e no Diário Oficial da União.

- um caderno do Formador;
- seis cadernos de Teoria e Prática (TP);
- seis cadernos de Atividades de Apoio à Aprendizagem (AAA) na versão professor;
- seis cadernos de Atividades Apoio à Aprendizagem (AAA) na versão do aluno (para uso do professor).

Descreveremos a seguir, com mais detalhes, os componentes do material de apoio do GESTAR II.

3.1. O Guia Geral

O GESTAR II, como programa de formação continuada, teve como foco a melhoria no processo de ensino-aprendizagem das disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, e foi orientado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e Língua Portuguesa do 6º ao 9° do Ensino Fundamental II, com objetivo de "elevar a competência dos professores e de seus alunos e, consequentemente, melhorar a capacidade de compreensão e intervenção sobre a realidade sócio-cultural" (BARBOSA; PULINO; LINS, 2010, p.14)[9].

O programa foi planejado para professores que estavam em efetivo exercício, por isso a estrutura semipresencial, considerando que, se por um lado, há a necessidade de aperfeiçoamento e atualização, por outro, a carga horária de trabalho costuma ser elevada.

O curso proporcionou a troca de experiências, a reflexão e o estreitamento com "a dimensão da prática no cotidiano da escola e com a dimensão formal da proposta pedagógica" (BARBOSA; PULINO; LINS, 2010, p.14), confirmando os pressupostos que o GESTAR II teve como base:

> [uma] concepção sócio-construtivista do processo de ensino-aprendizagem. Nesta visão, alunos e professor constroem juntos o conhecimento em sala de aula, por meio de uma relação interdependente, apoiada no interesse e na participação ativa dos alunos e da atuação do professor como mediador entre os alunos e o conhecimento social e historicamente construído (BARBOSA; PULINO; LINS, 2010, p. 22).

9 optamos por indicar os nomes dos autores ao invés de (BRASIL, 2010, P.14) e seguirão em todas as citações que faz referência as coleções do GESTAR II como sendo uma homenagem a todos os professores que contribuíram para elaboração do material de publicação do GESTAR II.

O Guia Geral é dividido em 5 unidades, as quais são subdivididas em seções. Na **unidade 1** caracteriza o GESTAR II como Programa de Formação Continuada em Serviço, explana a modalidade e ações integrantes do curso; comenta a respeito da formação continuada, do acompanhamento pedagógico e do sistema de avaliação do programa.

A **unidade 2** aborda a proposta pedagógica do GESTAR II e relação professor-aluno, o papel do professor, a relação entre comunidade e escola no papel educacional, e também a ementa do programa de Matemática e Língua Portuguesa.

A **unidade 3** fala a respeito da implementação do GESTAR II, o sistema instrucional de aprendizagem, dando orientações sobre o material de ensino. A estrutura dos cadernos de matemática (os Cadernos de Teoria e Prática - TPs) é citada neste momento.

Os TPs estão divididos em: conhecimentos matemáticos, conhecimento de educação matemática e transposição didática[10]. No Guia Geral encontramos a respeito do sistema da avaliação do professor cursista, detalhando seus direitos e deveres, projeto e organização do tempo.

A **unidade 4** fala a respeito das expectativas de mudança e a especificidade do programa em cada escola, sua apresentação e a implementação do programa.

A **unidade 5** aborda os procedimentos necessários para a utilização dos cadernos de atividade de apoio à aprendizagem ao aluno (AAA), explanando sobre os objetivos das situações didáticas, a organização do material, os pressupostos das disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, a utilização dos materiais e as etapas de implementação do curso.

3.2. O Caderno do Formador

10 Transformar o saber matemático acadêmico em um objeto de ensino é uma ideia associada a Chevallard (1991) que a denomina *transposição didática.* Chevallard (2013) ainda define a *transposição didática* do conhecimento como sendo a transição do conhecimento considerado como uma ferramenta a ser colocado em prática, para o conhecimento como algo a ser ensinado e aprendido. Esta transposição tem a sua marca na tentativa de trazer a matemática acadêmica para a sala de aula na perspectiva de uma matemática escolar, com o papel de discernir os mecanismos que tornam o ensino e a aprendizagem possível.

O Caderno do Formador era, ao longo da formação, um caderno de uso pessoal do tutor, servindo como orientação para que pudesse conduzir as oficinas nos encontros presenciais. Neste caderno relata-se que as oficinas presenciais são organizadas para duração de 4 horas e têm por objetivo que professores cursistas estudem e executem as tarefas das unidades de números ímpares dos cadernos de Teoria e Práticas (TPs). As unidades pares são desenvolvidas junto aos alunos em sala de aula.

Parte das oficinas foi destinada para que os professores cursistas tivessem a possibilidade de compartilhar os resultados obtidos após a realização das atividades das unidades pares dos TPs, as experiências positivas na prática dentro da escola em que atua e os pontos que tiveram mais dificuldades em aplicar.

Segundo o Caderno do formador (2008), o espaço destinado para a troca de experiência nas oficinas também deve ser um momento para a discussão do currículo escolar, visto que muitas das vezes as atividades que o professor aplicou em sua sala de aula não seguia o conteúdo programado do livro didático ou da apostila adotada na escola, sendo assim, pensar na aplicação das atividades propostas para o GESTAR II de Matemática é pensar em um currículo não linear e que seja flexível.

O professor Tutor no curso do GESTAR II de Matemática dispunha, em seu Caderno do Formador todas as ferramentas e organização para condução de suas oficinas pedagógicas, que deviam permitir aos cursistas:

1. Um ambiente de troca de experiências na realização das atividades propostas na seção “Construção do Conhecimento Matemático em Ação”;
2. A construção de um momento de autoconhecimento, de organização e debates sobre o que foi produzido de conteúdos matemáticos embasados nos Cadernos de Matemática (TPs);
3. Trocas e debates sobre a transposição didática que foi feita após as leituras dos (TPs).

Durante as oficinas, três grandes ideias eram consideradas fundamentais:

1. Debate das práticas realizadas nas seções: 1 (**Resolução da situação-problema**) e 2 (**Construção do Conhecimento Matemático**);

2. Debate das práticas realizadas na seção 3 (**Transposição Didática**), sendo que neste segundo momento da oficina o professor cursista deveria apresentar para colegas e tutor as produções realizadas em sala de aula, tendo a oportunidade de compartilhar suas experiências na aplicação das atividades dos TPs e o uso dos cadernos de Atividades de Apoio à Aprendizagem (AAA);
3. **Introdução à próxima unidade**: breve explanação da temática e do conteúdo matemático a ser trabalhado na próxima unidade do (TP), sob responsabilidade do tutor.

Após cada oficina, os professores cursistas estudavam individualmente a unidade proposta para aquela semana. O estudo individual era um momento de reflexão e elaboração das atividades a serem desenvolvidas em sua sala de aula, para coletar informações sobre os resultados de suas práticas.

Apresentamos, nos parágrafos seguintes, os títulos e, de maneira sumária, os conteúdos dos seis cadernos de Teoria e Prática (TP1 a TP6).

3.3. Cadernos de Teoria e Prática (TP) e Cadernos de Apoio à Aprendizagem (AAA)

Os Cadernos de Teoria de Práticas e os Cadernos de Atividades de Apoio à Aprendizagem foram produzidos, a pedido do Ministério da Educação e Cultura (MEC), pelos autores: Ana Lúcia Braz Dias (TP2, TP3 e TP5), Celso de Oliveira Faria (TP2, TP4, TP5, AAA1, AAA2 e AAA3), Cristiano Alberto Muniz (TP1 e TP4), Nilza Eigenheer Bertoni (TP1, TP3, TP4, TP5 e TP6), Regina da Silva Pina Neves (AAA4, AAA5 e AAA6) e Sinval Braga de Freitas (TP6).

Ana Lúcia Braz Dias é doutora em Educação Matemática pela Indiana University, graduada em Matemática pela Universidade de Brasília, foi consultora do GESTAR II de Matemática nos anos de 2002 e 2003 atuou nas atividades de treinamento e capacitação para implementação dos módulos nos temas: Resolução de problemas, transposição didática e fundamentos de Educação Matemática.

Celso de Oliveira Faria é mestre em Educação pela Universidade Federal de Goiás, trabalhou no período de 2002 a 2004 no desenvolvimento dos materiais do GESTAR II com foco nos recursos didáticos atrelados aos Parâmetros Curriculares Nacionais

Cristiano Alberto Muniz é mestre em Educação pela Universidade de Brasília, doutor em ciência da Educação pela Université Paris Nord e atuou nas atividades de treinamento e capacitação para implantação do programa prestando assessoria e consultoria no período de 2002 a 2008. Produziu módulos nos temas: Currículo de Matemática, Transposição didática, A flexibilização da aprendizagem matemática e suas representações, História da Matemática, e O professor de Matemática quanto pesquisador.

Nilza Eigenheer Bertoni é mestre em Matemática pela Universidade de Brasília, recebeu em 2010 o título de doutor honoris causa da Universidade de Brasília, atua na área de Educação Matemática com os temas: Currículo e Educação Matemática voltada para o ensino fundamental, prestou consultoria para o Ministério da Educação de 1999 a 2006, participou da supervisão e elaboração de materiais do GESTAR I e GESTAR II. Em 2007 participou de treinamento para capacitação de professores implantadores do programa GESTAR II, abordando os seguintes temas: resolução de problemas, transposição didática e fundamentos de Educação Matemática.

Regina da Silva Pina Neves possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, é mestre em Educação e doutora em Psicologia pela Universidade de Brasília. Participou de assessoria e consultoria, e ministrou oficinas de formação de professores do GESTAR II no período de 2003 e 2004

Sinval Braga de Freitas é mestre em Matemática pela Universidade de Brasília e doutor em Economia pela Universidade Católica de Brasília. Atuou principalmente nos seguintes temas: História da Matemática, Ensino de Matemática e Criptografia.

3.4. Caderno de Teoria e Prática 1 (TP1): Matemática na alimentação e nos impostos

Dividido em quatro unidades, com cada unidade dividida em três seções, sendo as unidades interligadas duas a duas, o TP1 tem como tema central das unidades 1 e 2 a alimentação adequada, qualidade de vida e saúde.

Na **unidade 1** exploram-se conceitos matemáticos a partir de uma discussão sobre alimentação dos animais.

Na **seção 1-1**, a matemática é trabalhada no âmbito do mundo dos alimentos e da saúde. Os conhecimentos matemáticos abordados são os números racionais na sua forma decimal, conceitos de áreas e volumes, álgebra para resolver situações-problema. Esta seção busca desenvolver um pensamento crítico no que tange às questões de alimentação e saúde.

Na **seção 1-2**, temos a construção e a sistematização do conhecimento matemático, em um convite ao professor cursista para retomar conceitos matemáticos sobre grandezas e medidas, geometria plana, geometria espacial, álgebra e estatística na perspectiva da proposta do GESTAR II, isto é, rever ou reafirmar o conhecimento matemático na problematização da questão de alimento e saúde.

Na **seção 1-3**, a partir de dados matemáticos, faz-se uma análise sobre os alimentos consumidos e a relação com a saúde corporal. São propostas algumas sugestões de atividades para auxiliar o professor cursista na transposição do conteúdo aprendido no curso para seus alunos.

Na **unidade 2** (Alimentação para a saúde) são trabalhadas questões sobre a alimentação do ser humano. A **seção 2-1** aborda a “Alimentação versus carência alimentar: uma questão meramente biológica?” As situações-problema apresentadas semelhantemente à seção 1 da unidade 1, buscam desenvolver um pensamento crítico no que se refere à alimentação e saúde. Utiliza os conceitos matemáticos de números e proporção para modelar as situações-problema a serem tratadas.

Na **seção 2-2**, temos a construção do conhecimento matemático com foco nos eixos temáticos números e álgebras, aprofundando os temas: números inteiros, fracionários e decimais, e diferentes métodos de resolução da equação do 1º grau.

Na **seção 2-3**, com o tema pesquisando o consumo de ferro na nossa alimentação, o professor cursista era estimulado a transpor uma proposta de atividade sobre alimentação presente na seção 1 e desenvolvê-la por meio de algumas estratégias os registros e a documentação do processo da transposição didática da atividade realizada com seus alunos em sala de aula.

As **unidades 3 e 4** têm como eixo central os impostos pagos pelos brasileiros dando ênfase no Imposto de Renda de Pessoa Física (IPRF), Imposto Sobre Circulação de Serviço (ICMS), Imposto Sobre Produto Industrializado (IPI), Imposto Sobre Serviços (ISS), Instituto Nacional do Seguro Social (INSS), Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS), Programa de Integração Social/Programa de Formação do Patrimônio do Servidor Público (PIS/PASEP), Contribuição Provisória Sobre Movimentação Financeira (CPMF), Imposto Sobre Operações Financeiras (IOF), Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social (CONFINS), Fundo para o Desenvolvimento Tecnológico das Telecomunicações (FUNTTEL), Imposto Sobre Propriedade de Veículos Automotor (IPVA), Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), Danos Causados por Veículos Automotores (DPVAT).

Na **unidade 3**, tratando especificamente do IRPF, a **seção 3-1** aborda o conceito de porcentagem na solução de situações-problema, empregando conceitos de proporcionalidade e porcentagens por meio de cálculo do imposto de renda.

A **seção 3-2** aborda os eixos temáticos números e álgebras, com conceitos relacionados a proporção, regra de três, número racional e irracional.

Na **seção 3-3** a transposição didática trata sobre impostos e porcentagens, permitindo ao professor cursista identificar meios para levar à sua sala de aula atividades sobre cálculo de impostos em notas fiscais e comparação entre os impostos pagos por um mesmo produto em estados diferentes.

A **unidade 4** (Impostos, gráficos, números negativos) trata dos demais impostos, enfatizando, na **seção 4-1**, a resolução de situações-problema sobre impostos e cargas tributárias. Os objetos de aprendizagem são as operações básicas de adição, subtração e divisão e o uso de porcentagens para determinar os valores pagos nos impostos devidos. Destaca-se que esta seção convida a uma reflexão sobre a quantidade - e a finalidade - de impostos e taxas no âmbito federal, estadual e municipal.

A **seção 4-2** trata dos conhecimentos sobre estatística, representação de dados presentes em tabelas e gráficos de barras e circulares, diferentes estratégias para compreender as operações com números inteiros.

Na **seção 4-3**, no momento de reflexão e elaboração de uma transposição didática, o professor cursista tinha o compromisso de analisar a forma pela qual ele levaria a seus alunos os conteúdos sobre gráficos de barras e circulares, traçado de ângulos e números negativos.

Destacamos o especial cuidado dos autores deste material em proporcionar textos de reflexão e ajuda aos professores, pois um dos materiais sugeridos trata da aprendizagem significativa, convidando o professor cursista a avaliar a diferença entre esta aprendizagem e a aprendizagem reduzida à aquisição de um número elevado de regras e definições. Nesta seção, defende-se que, na aprendizagem significativa, depois de algum tempo o aluno ainda poderá fazer o resgate mental do conhecimento desenvolvido, sempre que for necessário:

> Ao lembrar-se de situações do contexto real que conduzem naturalmente à soma de números negativos, ou de positivos com negativos (como foi o caso do gráfico sobre o salário médio dos brasileiros ao longo dos anos) e ao lembrar-se de como foi seu raciocínio, ou suas ações mentais, frente aos problemas levantados, o aluno conseguirá entender, de modo natural, como se opera com esse tipo de números. (MUNIZ; BERTONI, 2008, p.182)

Um grande problema citado no TP 1 é a dificuldade dos alunos em fazer o resgate dos conceitos aprendidos quando a aprendizagem é baseada na aquisição de regras.

> Ao esquecer uma regra, o aluno não tem caminhos lógicos para sua recuperação. Veja que isso é o que ocorre, muitas vezes, no ensino tradicional: enfatizando a memorização de regras, o aluno não vivencia uma aprendizagem significativa, na qual a situação apresentada faz sentido para ele e lhe possibilita elaborar ações ou modos naturais de pensar e operar ante a mesma. Ao invés disso, ele reproduz apenas o que o professor disse para ele fazer. (MUNIZ; BERTONI, 2008, p.182)

Os Cadernos de Teoria e Prática, foram escritos com o objetivo de estimular o professor cursista para um ensino da Matemática em que os conteúdos estejam ligados ao contexto real, com uma aprendizagem mais significativa em que o foco não seja na aquisição de regras, mas em situações de ensino que promovam a compreensão dos conceitos matemáticos.

3.5. O caderno de Teoria e Prática 2 (TP2): Matemática nos esportes e nos seguros

O Caderno de Teoria e Prática 2: Matemática nos esportes e nos seguros é composto por quatro unidades, numeradas de 5 a 8. As unidades 5 e 6 desenvolvem o pensamento probabilístico que vem ao encontro do pensamento determinista que predomina na Matemática escolar. Com a contextualização da Matemática no Esporte, estas duas unidades (5 e 6) pretendem ir além do determinismo, notando que estes dois tipos de pensamentos são aspectos complementares da Matemática em uma proposta de ensino.

Na **unidade 5** (Explorando conceitos matemáticos numa discussão sobre esportes - proporcionalidade e medidas) a **seção 5-1** destina-se à resolução de situação-problema relacionadas ao esporte com ênfase no estudo de proporcionalidade.

A **seção 5-2** aborda os conceitos de proporcionalidade e medidas, reforçando os conceitos de representação gráfica, cálculo de área, razão e proporção voltados para o aprendizado através de resolução de problemas.

A **seção 5-3** discute sobre problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Proporciona um momento de reflexão sobre situações didáticas adequadas a cada etapa de ensino no que tange aos temas: escala e proporção; estimativa; desenho geométrico e tratamento de informação. Reflexões sobre o Currículo de Matemática são recorrentes nas abordagens dos TPs:

> É normal escolhermos, inicialmente, certos conceitos matemáticos e, a partir deles, planejarmos atividades que pretensamente irão favorecer a construção daqueles conceitos pelo aluno. Assim fazendo, os conteúdos vão surgindo ao longo do currículo de Matemática de forma fragmentada e, muitas vezes, sem uma conexão entre eles. Ao trabalhar com os conceitos matemáticos de forma isolada uns dos outros, a escola acaba por deformar as noções matemáticas, uma vez que, no contexto da aplicação prática, o que existe é sempre um conjunto de conceitos articulados que se

> influenciam mutuamente, constituindo o que se denomina um campo conceitual. (DIAS; FARIA, 2008, p. 41)

Entendemos que o objetivo destas reflexões era levar o professor cursista à compreensão de que a aprendizagem matemática acontece a partir de uma rede conceitual ampla e não do tratamento de conceitos de modo isolado, sem nenhuma articulação. É preciso pensar que o aprendizado está imerso em uma rede de conceitos e que um conceito está ligado a outros e o ensino de recortes desta “rede” para nada é aproveitado e em nada favorece o desenvolvimento do aluno.

A **unidade 6** tem como título: *Explorando conceitos matemáticos numa discussão sobre os esportes - Tratamento de informação, números inteiros e medidas*. A **seção 6-1** aborda conteúdos matemáticos relacionados a tratamento de informação, números relativos, média e unidades de medidas.

A **seção 6-2** traz uma introdução e aprofundamento dos conceitos de números relativos, médias e unidades de medida, fazendo o uso de situações significativas, por exemplo, a análise dos resultados obtidos por atletas em certa modalidade de esporte.

A **seção 6-3** discute a transposição didática dos temas de números e formas de elaboração de atividades de aprendizagem. Apresenta um texto sobre o ensino da Matemática com o tema “A flexibilização da aprendizagem matemática - Representação e Teoria de Quadros”, este texto defende a valorização das diferentes formas de representações matemáticas feitas pelos alunos.

Na **unidade 7**, o tema é A previdência social e a mensuração de riscos. A **seção 7-1** trata da comparação de probabilidade por meio de resolução de situações-problema, sendo possível perceber que o tema de probabilidade é muito recorrente nos cadernos de Matemática do GESTAR II. As situações-problemas propostas nesta seção estão voltadas a analisar acidentes de trabalho em diferentes setores de atividades econômicas.

A **seção 7-2** destina-se ao aprofundamento do conteúdo de probabilidade e a **seção 7-3** sugere ao professor cursista formular atividades para sua sala de aula envolvendo probabilidade em situações concretas com diversos materiais possíveis de manuseio.

Na **unidade 8** (Seguro de vida), a **seção 8-1** trata de probabilidade e matemática financeira na determinação do preço de seguros por meio de modelos matemáticos e valor esperado. As situações-problema estão relacionadas a uma companhia de seguros que trabalha com ganhos financeiros e precisa fazer cálculos de valores a pagar, nesta seção aborda a noção intuitiva sobre valor esperado e o valor presente.

A **seção 8-2** traz os conceitos de modelos matemáticos, funções lineares e exponenciais, juros e valor esperado, em particular os conceitos de função linear e função exponencial terão uma ênfase maior nesta seção, pois estes dois modelos são muito utilizados nos estudos de crescimento e decrescimento de grandezas.

A **seção 8-3** aborda a criação de situações didáticas com experiências concretas que levem os alunos a entender sobre os conceitos de crescimento linear, valor esperado e intuições probabilísticas.

3.6. O caderno de Teoria e Prática 3 (TP3): Matemática nas formas geométricas e na ecologia

O Caderno de Teoria e Prática 3: Matemática nas formas geométricas e na ecologia é composto por quatro unidades. As unidades 9 e 10 apresentam o ensino da Geometria na Educação Básica em diferentes aspectos, para despertar o interesse de observar a geometria no mundo que vivemos, observar as formas geométricas presentes na construção civil, na decoração de ambientes, nos utensílios de casa.

A **unidade 9** (O Universo das formas) traz, na **seção 9-1** análise e resolução de situações-problema envolvendo objetos geométricos, tendo como foco a apresentação mais detalhada de habilidades relacionadas a conhecimento de poliedros e prismas, cálculo de volume, estimativa de capacidade de recipientes que se assemelham alguns sólidos geométricos.

Na **seção 9-2**, o aprofundamento matemático envolve questões sobre identificação do formato de um objeto e sua representação de diferentes pontos de vista, criando maquetes ou desenhos.

A **seção 9-3** é voltada para o entendimento sobre figuras não planas, sólidos, primas e volumes, com o objetivo de levar para sua sala de aula situações didáticas que sejam favoráveis ao entendimento do ensino da geometria para alunos do ensino fundamental.

A **unidade 10** (Semelhanças, revestimentos e preenchimentos), **a seção 10-1** dedicada aos conceitos de polígonos regulares e semelhanças para resolver situações-problema envolvendo revestimento de superfície plana.

A **seção 10-2** aprofunda os temas revestimento, preenchimento e semelhanças, com alguns questionamentos: “quais polígonos são adequados para revestimentos de uma superfície?” e “como fazer o preenchimento de um espaço utilizando poliedros regulares e semirregulares?”, introduzindo os estudos de medidas dos ângulos internos dos polígonos e poliedros.

A **seção 10-3** propõe o desenvolvimento de situações didáticas sobre preenchimentos, semelhanças e poliedros. Há um grande incentivo para os professores desenvolverem em sua sala de aula atividades que possibilitem a manipulação de objetos como: madeiras, desenhos em folhas quadriculadas, montagens de representação de sólidos geométricos a partir de moldes em papel.

Na **unidade 11** (*Usando o conceito de variável para discutir ecologia*), a **seção 11-1** aborda uma situação problema sobre uma pesquisa que teve como objetivo verificar o nível de consciência ecológica das pessoas, utilizando o conceito matemático de relação entre variáveis.

A **seção 11-2** usa dados coletados da pesquisa da seção 1 para introduzir o conceito de função, fazendo uso do plano cartesiano, relação entre duas variáveis e generalização de padrões aritméticos para aprofundamento do tema. Parte desta seção destina-se à reflexão sobre o uso da história da Matemática para o fortalecimento do ensino, reforçando a importância da validação da produção escrita dos alunos.

Na **seção 11-3**, o professor cursista deve elaborar atividades para o nível de seus alunos de modo que possa abranger os conceitos de padrões numéricos e interpretação de gráficos de diferentes funções, em diferentes contextos.

Na **unidade 12** (*velocidade de crescimento*), a **seção 12-1** trata da integração da matemática com o mundo real e busca relacioná-la ao senso comum e a **seção 12-2** aprofunda os conceitos sobre funções crescente, decrescente e taxa de variação.

A **seção 12-3** desta unidade trata da transposição didática do conceito de variação interdependente e grandezas relacionadas, uma em função de outra.

3.7. O Caderno de Teoria e Prática 4 (TP4): Construção do conhecimento matemático em ação

O Caderno de Teoria e Prática 4: Construção do conhecimento matemático em ação é composto por 4 unidades, evidenciando problemas enfrentados pela sociedade no seu processo de desenvolvimento.

A **unidade 13** (*A educação matemática contribuindo na formação do cidadão/consumidor crítico, participativo e autônomo*) tem como foco o consumo consciente, abordando os conhecimentos matemáticos a fim de formar um cidadão-consumidor consciente do seu papel em relação ao ambiente que vive e ao planeta.

A **seção 13-1**, por meio de análise de dados quantitativos presentes em tabela de financiamento, trata de situações-problema de escolha da melhor opção de compra, à vista ou esperar, poupar e comprar a prazo. Esta tomada de decisão terá como base o entendimento dos conceitos de matemática financeira, juros compostos, valor futuro e valor presente.

A **seção 13-2** propõe discussões e reflexões sobre a compreensão das estratégias de medidas no mundo do comércio, por exemplo, a cobrança de juros nas modalidades diária, mensal ou anual, considerando que, quando o cidadão tem conhecimento sobre as unidades de medidas em uma transação comercial, isso facilita para uma melhor tomada de decisão em situações de compra de um determinado produto ou aquisição de um imóvel.

A **seção 13-3**, na transposição didática, propõe momentos de reflexão sobre o conhecimento e abordagem de números racionais relacionados ao consumo consciente e como o entendimento deste conceito pode favorecer a formação do cidadão crítico e participativo.

A **unidade 14** (*Espaço, tempo, ordem de grandezas - números grandes e pequenos*) procura relacionar a Matemática com outras ciências: Física, Química, Astronomia e Informática. Esta unidade vai buscar em fatos da história a compreensão sobre como a Matemática auxiliou a sociedade em seu desenvolvimento e evolução, com ênfase nas discussões de multidisciplinaridade, interdisciplinaridade e transdisciplinaridade, reforçando a possibilidade de se pensar em um currículo de matemática que transcende a linearidade de conteúdos.

A **seção 14-1** apresenta alguns fatos relevantes da História da Matemática como as inscrições matemáticas em tabletes encontrados em Nippur, centro religioso da antiga Mesopotâmia (2000-1000 a.C.), o início dos estudos da geometria dedutiva por Tales, filósofo e matemático da cidade de Mileto (600 a.C.), a Escola de Pitágoras (540 a.C.), a coletânea Elementos de Euclides (300 a.C) e o início dos estudos sobre seções cônicas por Apolônio, da cidade de Perga (260 a.C.).

A **seção 14-2** aprofunda os conceitos de notação científica e ordem de grandezas de um número; propriedades e cálculos com potências e parte desta seção é destinada para falar sobre a importância da nanotecnologia para os dias atuais.

A **seção 14-3** debate sobre como os conceitos matemáticos estudados nesta unidade, em especial a notação científica e ordem de grandeza de um número estão presentes em diversas áreas do conhecimento e como se deve adequar este conceito para obter compreensão por parte dos alunos.

A **unidade 15** (*Água - da hipótese de Tales a um problema no mundo atual - Teorema de Tales, semelhança de triângulos, previsão de eclipse e determinação de distâncias inacessíveis*) trabalha com os problemática da utilização não consciente dos recursos hídricos, uma vez que se trata de recursos não renováveis e faz uso das ferramentas matemáticas para analisar dados do consumo de água, utilizando tabelas e gráfico para gerar uma melhor interpretação dos dados e assim mobilizar as pessoas para um consumo consciente e responsável da água.

A **seção 15-1** aborda situações-problema que envolvem as questões da economia no consumo e utilização da água potável, o conteúdo de proporcionalidade é bastante utilizado para descrever e modelar os problemas apresentados.

A **seção 15-2** aprofunda os conceitos de proporção, semelhança de triângulo e Teorema de Tales, apresentando alguns processos de demonstração de teoremas, com boa parte destinada a mostrar, por meio de pequenos textos de reflexão, a importância das demonstrações matemáticas e a utilidade dos teoremas na aprendizagem matemática.

A **seção 15-3** aborda construções de atividades envolvendo semelhanças de triângulos e semelhança de Tales. Esta seção orienta os professores a fazer uma análise com seus alunos sobre consumo de água, com a proposta de reunir as contas de água dos últimos seis meses de cada residência, discutindo sobre consumo mensal em litros e o valor pago em cada conta.

A **unidade 16** (*Explorando conceitos matemáticos em uma discussão sobre o trânsito inclusivo*) está voltada para discussão de uma sociedade mais inclusiva, tem uma mobilização do uso dos conhecimentos matemáticos para discutir problemas enfrentados por pessoas com deficiência (PcD), como por exemplo, ter acesso a determinadas vias públicas não adequadas, entrar em um estabelecimento que não possui rampas de acessos ou quando não possui a inclinação adequada.

A **seção 16-1** apresenta situações-problema que envolvem conceitos geométricos e trigonométricos no triângulo retângulo para discutir a falta de acessibilidade de alunos cadeirantes no espaço escolar. Pretende desenvolver projeto de construção de rampas de acessibilidade que permitam os alunos PcD transitar de um espaço a outro, adequação das mobílias da escola para que não sejam empecilho para a acessibilidade de nenhum cadeirante.

A **seção 16-2** trata do aprofundamento dos conceitos de números pitagóricos e trigonometria no triângulo retângulo, expõem demonstrações de algumas relações métricas no triângulo retângulo e cálculo de raiz quadrada a partir do Teorema de Pitágoras.

A **seção 16-3** na transposição didática envolve o conceito de relações trigonométricas, sendo uma das atividades a construção de um transferidor a laser capaz de medir a altura de um prédio.

3.8. O Caderno de Teoria e Prática 5 (TP5): Diversidade cultural e meio ambiente: de estratégias de contagem às propriedades geométricas

O caderno de teoria e prática 5: Diversidade cultural e meio ambiente: de estratégias de contagem às propriedades geométricas é composto por quatro unidades, numeradas de 17 a 20. O TP 5 aborda questões que envolvem interações sociais no que diz respeito à diversidade racial, regional e cultural, expõe a importância do uso das novas tecnologias nos dias atuais.

A **unidade 17** (*Matemática e impacto social da tecnologia da informação*) é voltada para os estudos de contagem, utilizando o princípio multiplicativo e o diagrama de árvore para resolver algumas situações-problema.

A **seção 17-1** aborda o princípio multiplicativo aliado ao uso da tecnologia para solucionar problemas enfrentados pela sociedade com o avanço da quantidade de informações e a preocupação com a segurança destas informações como a criação de senhas para o acesso de diversos tipos de informações: caixa de e-mail, conta bancária, desbloqueio de smartphone, compras pela internet, entre outros.

A **seção 17-2** aprofunda o estudo do Princípio Multiplicativo e a utilização de diagramas de árvores e outras estratégias para representá-lo. Nesta seção destaca-se a importância do debate em sala de aula sobre as diferentes formas de registro de resolução para um mesmo exercício.

A **seção 17-3** foi elaborada para desenvolver métodos de contagem, utilizando o princípio multiplicativo e fazer uma análise das possíveis dificuldades dos alunos em tratar o princípio multiplicativo como técnica de contagem.

A **unidade 18** (*Matemática e interações sociais*) trata sobre o conteúdo de Contagem envolvendo a utilização de gráficos e tabelas como ferramentas úteis de aprendizagem procurando, com suas atividades, articular o conhecimento matemático com o contexto de vivência dos alunos.

A **seção 18-1** utiliza os conceitos de contagem e probabilidades para buscar desenvolver alguns modelos matemáticos e verificar sua funcionalidade para algumas relações sociais tais como: conflitos de relacionamentos, evasão escolar de crianças de uma determinada classe econômica do país, conflito entre pares em um determinado grupo. Nesta seção há uma utilização recorrente de tabelas e gráficos para criar e interpretar os modelos das situações apresentadas.

Na **seção 18-2** apresenta um estudo aprofundado sobre métodos de contagem com atividades envolvendo princípio multiplicativo e probabilidade.

A **seção 18-3** trabalha com a organização e criação de atividades para utilização em sala de aula. O foco é propor atividades aos alunos para desenvolverem o raciocínio combinatório e habilidades que permitam a eles criarem suas próprias estratégias de resolução, ao invés de aplicar fórmulas prontas, pois devem ser evitadas nesta etapa de aprendizado.

A **unidade 19** (*Explorando conceitos matemáticos em uma discussão sobre a reutilização e o uso de novas tecnologias*) volta-se a questões do Meio Ambiente e materiais reciclados.

A **seção 19-1** envolve os conhecimentos de volume e planificação de paralelepípedos retângulos associados a reutilização de embalagens.

A **seção 19-2** trata da utilização de planilhas eletrônicas na resolução de equações do terceiro grau, aborda estudos das funções polinomiais do primeiro e segundo grau, utilizando software livre de geometria nos estudos de ângulos e circunferências.

A **seção 19-3** traz reflexões sobre o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) em sala de aula, propondo atividades de cunho investigativo como sugestão de atividades de aprendizagem.

A **unidade 20** (*Os triângulos na vida dos homens*) aborda mais profundamente o estudo da Geometria, com conhecimentos sobre provas e demonstrações matemáticas.

A **seção 20-1** é dedicada a conhecer fatos relevantes da história da Matemática com ênfase na importância dos triângulos no decorrer do tempo e sua utilização em diferentes civilizações.

A **seção 20-2** é um convite ao aprofundamento dos conceitos de congruência de polígonos e triângulos: desenvolver as condições que garantam a congruência de triângulos (casos de congruência), será desenvolvido a demonstração de alguns teoremas envolvendo congruência de triângulos.

A **seção 20-3** tem como proposta estimular a elaboração de situações didáticas capazes de desenvolver os conceitos de congruência. Destaca a dificuldade que muitos alunos enfrentam neste conteúdo. As atividades a serem criadas envolvem materiais manipulativos, tais como: varetas, canudos, dobraduras a fim de enfatizar e repetir situações práticas que evidenciam o objeto matemático que está sendo estudado.

3.9. O Caderno de Teoria e Prática 6 (TP 6): Matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos

O caderno teoria e prática 6: Matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos é composto por quatro unidades, numeradas de 21 a 24. O TP6 aborda questões relacionadas à alimentação, à saúde, a movimentos migratórios no Brasil e também alguns fenômenos sociais cotidianos tais como inflação, aumento de emprego e aumento da população.

A **unidade 21** (*A álgebra como ferramenta humana - frações e frações algébricas*) é focada nos estudos de frações numéricas e algébricas, estabelecendo comparações entre elas e destacando seus pontos de semelhança no que diz respeito às operações com frações.

A **seção 21-1** aborda o uso das operações com números racionais na sua forma fracionária e na sua forma decimal destacando que, ao resolver uma situação-problema envolvendo números fracionários, é preciso ter uma boa compreensão destes números e também um tratamento investigativo, pois apenas saber aplicar regras não é suficiente.

A **seção 21-2** aprofunda os conceitos de frações algébricas e suas operações estabelecendo uma analogia com os cálculos envolvendo as frações numéricas.

A **seção 21-3** discute sobre atividades relacionadas a frações numéricas e frações algébricas, sugerindo vários métodos para introduzir o conteúdo em aulas como o uso de tabelas, textos de fatos históricos sobre frações, esquemas e verbalização, enfatizando a importância de permitir aos estudantes o protagonismo neste momento de aprendizagem.

A **unidade 22** (*Migração - a busca do sonho*) explora os conceitos de coordenadas cartesianas, teorema de Pitágoras, e reflexão e translação no plano.

A **seção 22-1** inicia as discussões sobre a questão da migração no Brasil e no Mundo, propondo textos de reflexão sobre quais os fatores que levaram a ter movimento migratório no Brasil, subdivididos em movimentos migratório externos, destacando as migrações oriundas da Europa, da África e do Oriente, e os movimentos migratórios internos, mais intensos com a Revolução Industrial. Assim, com a temática de migração, esta seção aborda os conceitos de sistemas de coordenadas e localização de pontos em mapas e leituras de mapas e plantas baixas.

A **seção 22-2** aprofunda os conceitos de sistemas de coordenadas, localização de pontos no plano cartesiano, movimentação de figuras no plano por meio de reflexão e translação, utilização de régua e compassos para construir croquis e retas paralelas e perpendiculares.

A **seção 22-3**, na transposição didática, são comentadas algumas formas possíveis de trabalho envolvendo o sistema de coordenadas cartesianas como, por exemplo, localizar pontos específicos de alguns lugares no mapa do Brasil e a construção de plantas baixas.

A **unidade 23** (*Alimentação e saúde - sistemas de equações lineares*) apoiada no tema Alimentação e saúde, com base em valores nutricionais dos alimentos, desenvolve estudos sobre sistemas lineares e suas representações.

A **seção 23-1** traz um texto de reflexão sobre o assunto da alimentação adequada às necessidades e atividades diárias, o texto aborda questões sobre ter uma alimentação equilibrada, explica o significado da caloria que é utilizada como unidade padrão nas informações alimentares.

A **seção 23-2** procura abordar a resolução de sistemas de equações com duas incógnitas com diferentes métodos de resolução: tentativas, raciocínio, adição, substituição e comparação. Explora a representação gráfica de um sistema linear e de sua solução.

A **seção 23-3** traz uma articulação entre o sistema de equação com duas incógnitas e duas balanças em equilíbrio. A proposta é encontrar a solução deste sistema através de manipulações nestas balanças, elaborando uma situação didática para levar para sua sala de aula.

A **unidade 24** (*Estudos de fenômenos sociais cotidianos - função linear como modelo matemático presente em vários contextos*) aborda os fenômenos sociais cotidianos modelados por funções lineares.

A **seção 24-1** apresenta situações-problema envolvendo aplicações das relações e funções no cotidiano, trabalhando com fatos presentes na História da Matemática como o relato sobre Tales de Mileto ter calculado a altura de uma pirâmide do Egito, abordando os conteúdos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

A **seção 24-2** trata do conceito de função, fazendo a identificação deste objeto como um modelo matemático para resolver problemas envolvendo fenômenos sociais cotidianos. São aprofundadas as características de função afim e função linear, bem como a representação gráfica destas funções.

A seção **24-3** conduz o professor em formação para o desenvolvimento de situações didáticas envolvendo os conceitos de proporcionalidade, relações entre grandezas, representação gráfica de uma função linear.

3.10. Os cadernos de Atividades de Apoio à Aprendizagem (AAA)

Para ajudar o professor no desenvolvimento de seu trabalho em sala de aula foram disponibilizados, ainda, os cadernos de Atividades de Apoio à Aprendizagem, sendo que cada professor os recebeu em duas versões: a versão para o professor contendo algumas orientações sobre a aplicação e desenvolvimento das atividades com base no que são abordados em cada TP correspondente e a versão do aluno apenas com as atividades propostas para a sala de aula.

Vale ressaltar que o programa GESTAR II não disponibilizou o material impresso para os alunos. O professor em formação continuada recebeu os AAAs e a reprodução do material total ou parcial ficava a cargo do professor ou da escola em que atuava.

Os cadernos de atividades também foram divididos em quatros unidades e relacionados com as unidades correspondentes de cada TP, subdivididas em 8 aulas de apoio à aprendizagem. O professor recebia a orientação de modificar a ordem dos temas apresentados mediante as necessidades e realidades de sua sala de aula.

4. TRRS NO GESTAR II

Neste capítulo faremos a análise a partir da ***Teoria dos Registros de Representação Semiótica*** de uma seleção de atividades propostas e orientações dos Cadernos de Teoria e Prática (TP) e Cadernos de Atividades de Apoio à Aprendizagem (AAA) do programa de formação de professores GESTAR II de Matemática.

Os autores do material do GESTAR II, em muitas das orientações e atividades propostas fazem menções às ideias de Raymond Duval; como notado na atividade 9 do Caderno de Teoria e Prática 2 que incentiva o estudo das pesquisas de Duval, publicadas em 1995 (figura 8) e nas orientações do Caderno de Teoria e Prática 5, propondo ao professor a elaboração de atividades que contemplem as múltiplas representações semióticas (figura 9).

Figura 8 - Atividade 9 do TP 2, incentivo ao professor pesquisar sobre as múltiplas representações

Atividade 9

Professor, após esse estudo, busque outros exemplos em que o uso de figuras constituiu-se em elemento fundamental na resolução da situação-problema. Pesquisas[7] mostram que, na resolução de problemas em Matemática, a criação de uma figura auxilia o aluno a melhor representar o caminho que está sendo pensado, dando um suporte intuitivo e permitindo a melhor visualização do objeto matemático.

7. DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. 1995.

Fonte: Dias e Bertoni (2008, p.37)

Figura 9 - Atividade presente no TP 5, aborda os registros de representações semiótica

Atividade

Faça um levantamento das diferentes formas de representação matemática exploradas no presente texto. Escolha um conteúdo que você trabalhará nas próximas semanas com seus alunos e explore as diferentes formas possíveis de valorizar as múltiplas representações envolvendo os conceitos e procedimentos envolvendo este conteúdo matemático.

Fonte: Dias e Farias (2008, p.103)

A partir do conceito de *atividades cognitivas de matemática*, investigamos, então o que cada autor dos TP propôs ao preparar as atividades, conteúdos e comentários para os cursistas no programa de formação continuada, na busca de elementos que permitam articulação com a teoria de Duval.

Indicamos uma seleção de atividades, extraídas dos seis cadernos de Teoria e Prática e cadernos de Atividades de Apoio à Aprendizagem, com comentários, identificando a mudança de patamares de compreensão, observância dos sistemas semióticos, mudanças de registro e mobilização de pelo menos dois registros de representação semiótica, elementos necessários para que se tenha um aprendizado total à luz da teoria de Duval.

4.1. TP1 e AAA1

Nesta seção destacamos atividades que envolvem leitura de tabelas, construção de gráficos, porcentagem em variadas formas de representação evidenciado a mudança de registros de representação semiótica e a transição entre os registros de representação.

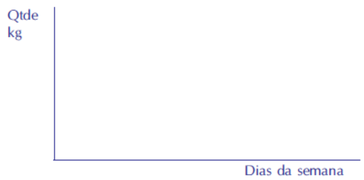
Figura 10 - Atividade 12 do TP1 envolvendo mudanças de registros

Atividade 12

Os animais, na engorda, não podem ficar privados de alimentação. Os criadores devem estar sempre atentos à reposição da mistura. Um criador fez a seguinte anotação sobre a quantidade de alimentos colocada nos cochos durante uma semana:

DIA	QUANTIDADE (kg)
Domingo	980
Segunda-feira	1.050
Terça-feira	1.055
Quarta-feira	1.100
Quinta-feira	974
Sexta-feira	920
Sábado	1.021

Para poder interpretar esses dados, a representação gráfica pode nos auxiliar. Porém, o gráfico circular ou de barras não é conveniente nesse caso. Podemos usar o gráfico de linhas, em que no eixo horizontal dispomos os dias da semana e no eixo vertical, a quantidade de alimento seguindo uma **escala**.



Fonte: Muniz e Bertoni (2008, p.34)

Na figura 10, a atividade número 12 do TP1 lida com a mudança de registro, sendo o ponto de partida um sistema semiótico envolvendo dados em uma tabela e, seguindo as orientações da atividade, faz-se uma representação gráfica.

Na TRRS essa atividade cognitiva é identificada como uma conversão. No exemplo temos, portanto, um sistema semiótico de origem (representação em forma de tabela) e um sistema semiótico destino (representação gráfica).

Apesar de ser uma tarefa aparentemente simples e comum de ser encontrada em outros materiais didáticos, na TRRS tal atividade tem a intenção de aproveitar a conversão como processo para a aprendizagem total.

Em uma atividade matemática, a mudança de registro contribui para o desenvolvimento do aluno no processo da aprendizagem como afirma Almouloud:

> A mudança de registro constitui um dos pontos delicados e decisivos da aprendizagem da Matemática no Ensino Básico, Fundamental e Médio [...] uma mudança de registro apresenta vantagens do ponto de vista do tratamento, porque facilita a compreensão ou a descoberta de novos conteúdos, principalmente para os sujeitos que estão iniciando em tarefas que envolvem coordenação de registros. (ALMOULOUD, 2007, p.79)

Figura 11 - Situação-problema presente no TP1 sobre coletas de dados em atividades diárias

Uma situação-problema adequada aos alunos

Constatar o uso que fazem do próprio tempo é importante para a formação dos alunos.

a) Peça a eles que reflitam, façam seus cálculos e preencham com cuidado a tabela a seguir:

Atividades diárias	Tempo gasto
Sono	
Estudo (na escola, outros cursos, em casa)	
Atividades físicas (malhação, esporte, jogos etc.)	
Lazer (TV, papos, namoro etc.)	
Trabalho fora ou dentro de casa (arrumar a cama, ajudar nas tarefas da casa, outros serviços)	
Tempo restante	

b) Depois desafie-os a representar num círculo que representa o dia todo (24 horas ou 1.440 minutos) a parte correspondente a cada uma das atividades. Os círculos devem ser grandes e não devem ter todos o mesmo raio, pois isso não importa. Se dois alunos querem comparar os tempos que gastaram em certa tarefa, deverão comparar os ângulos correspondentes, e isso não depende do comprimento escolhido para representar os seus lados. Embora cada aluno deva fazer seu próprio gráfico, eles podem formar grupos para discutir os problemas que surgem. Eles precisarão de proporções para saber o valor dos ângulos e saberem desenhá-los.

Fonte: Muniz e Bertoni (2008, p.184)

Observamos nesta atividade a utilização da tabela para preenchimento, nomeando algumas atividades diárias e uma coluna para preenchimento de informações do tempo gasto para realizar cada atividade (um sistema de representação semiótico). Para Duval (2016), ao executar apenas um registro na atividade, na forma tabular, descrita no item (a), o estudante estará no primeiro patamar de compreensão de uma atividade cognitiva de matemática. Mas, ainda segundo Duval (2016), para que um problema seja compreendido pelo aluno é necessária ao menos a mobilização de dois tipos de registros. Pelo item (b), percebemos que Muniz e Bertoni (2008) preocuparam-se em propor este item, para que esta situação-problema que foi classificada no TP1 como "situação-problema adequada aos alunos" possa ser uma atividade que mobilize dois tipos de registros de representação semiótica.

Os autores dos Cadernos de Teoria e Prática e dos cadernos de Atividades de Apoio à Aprendizagem procuraram enfatizar em diversos momentos do material o *fazer matemático* do aluno.

Para Bertoni e Muniz (2008), o fazer matemático do aluno, no contexto de uma aprendizagem significativa, inclui o espaço escolar, ações para que o aluno busque soluções de desafios apresentados, incluindo também momentos que ele possa ter condições de produzir seu conhecimento por meio de tentativas e erros, de modo que eles possam criar estratégias, argumentações, ter capacidade de representação oral, manipulativa e escrita de seus procedimentos.

Duval (2016) salienta as mesmas ideias e dá especial atenção à preocupação de proporcionar nas aulas de matemática oportunidades para o desenvolvimento do fazer matemático do aluno, a *face oculta da matemática*.

Ainda no TP1, Bertoni e Muniz (2008) citam ideias de Piaget, no que diz respeito à produção cognitiva da criança no processo de resolução de problemas. A teoria de Duval extrapola, no entanto, a busca pela compreensão do processo cognitivo do aluno, preocupando-se com o planejamento e organização das aulas de Matemática para que estes processos cognitivos aconteçam.

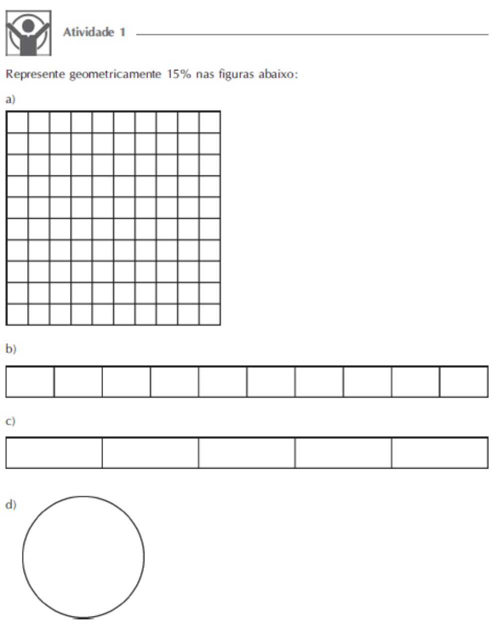
Bertoni e Muniz (2008) chamam a atenção, ao final do TP 1, para o "fazer matemático" produzido por matemáticos no desenvolvimento do conhecimento da matemática que é de extrema importância no desenvolvimento da humanidade, mas pensando no contexto de ensino dentro de uma escola e tendo a aprendizagem como meta, o fazer matemático do estudante não deve ser avaliada tendo como critério o rigor do matemático profissional, mas considerar como estes saberes foram concebidos ao longo da história.

A aprendizagem do ensino da matemática no ambiente escolar deve ser pautada nas estruturas de pensamentos das crianças e jovens que não necessariamente acessam o conhecimento científico da mesma forma que é comunicado na comunidade profissional de matemática.

Na TRRS e, consequentemente no material do GESTAR II, encontramos as mesmas preocupações pois, do ponto de vista matemático, um registro é objetivamente suficiente para ter acesso ao objeto matemático, mas, do ponto de vista cognitivo, não se deve apenas reproduzir nas aulas de Matemática o que foi feito por matemáticos profissionais (DUVAL, 2016). Em uma aula de Matemática, para alunos entre 6 e 16 anos os objetos matemáticos não podem estar representados em apenas um registro de representação semiótica. Duval (2012b) aponta que, quando o professor assim discorre em suas aulas, seus alunos estão caminhando para uma não compreensão ou compreensão parcial dos objetos matemáticos.

As atividades abaixo, expostas nas figuras: 12, 13 e 14 abordam a porcentagem e seus registros em alguns sistemas semióticos

Figura 12 - Atividade 1 do AAA 1 sobre porcentagem



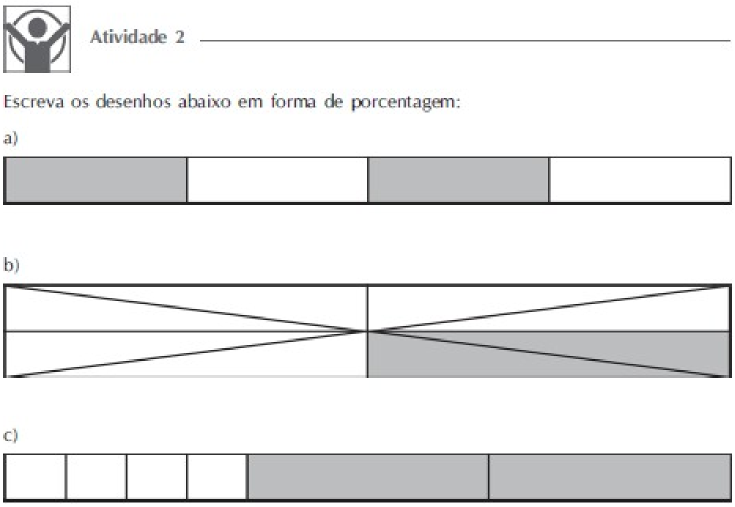
Fonte: Faria (2008, p.94)

Nesta atividade o enunciado aborda a porcentagem pelo sistema semiótico de escrita numérica e simbólica, apresentando a porcentagem com numeral seguido do símbolo de porcentagem (%). A atividade cognitiva de conversão necessária é do sistema de escrita numérica para o sistema semiótico geométrico.

Este exercício vai exigir várias representações diferentes do mesmo objeto. Duval (2012a) chama atenção para jamais confundir um objeto matemático com sua representação, esta determinação criou um paradoxo que Duval (2012b) chama de *paradoxo cognitivo da matemática*, sanado justamente pelas várias representações diferentes.

Assim, na atividade 1 da figura 12, propõe-se para representar 15 % a mobilização de cinco representações semióticas diferentes para o mesmo objeto matemático.

Figura 13 - Atividade 2 do AAA1 sobre mudança de registro



Fonte: Faria (2008, p.95)

Em relação à mobilização de diferentes tipos de registros, a atividade 2 da figura 13 propõe percorrer o caminho contrário proposto na atividade da figura 12. O aluno deverá partir de um registro geométrico e fazer a atividade cognitiva de conversão chegando no registro na forma de escrita numérica. O processo de mobilização de registro acontece em todos os itens.

Figura 14 - Atividade do AAA1 utilizando porcentagem e registros em língua materna

Atividade 2

Explique o que significa cada item:

a) 70% dos principais objetos penhorados são de ouro.

b) 9% dos veículos produzidos por uma fábrica são vendidos nos primeiros 15 dias após o lançamento.

c) O governo baixou o IPI em 3%.

Fonte: Faria (2008, p.152)

Na atividade da figura 14 é utilizado o tratamento como atividade cognitiva, uma mobilização no mesmo tipo de registro, que é a língua materna. Para Duval (2016) o professor deve perceber que, em uma atividade cognitiva de matemática, o registro em língua materna geralmente encontra-se em sinergia com outros tipos de registros de representação. Caso o professor trabalhe esta atividade presente na figura 14, permitirá que o aluno desenvolva sua capacidade de gerenciar informações, encontrar a melhor forma de externar, usando suas próprias palavras, o conhecimento que adquiriu sobre porcentagem.

4.2. TP2 e AAA2

Nesta seção, destacamos os objetos matemáticos envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais, leitura de gráfico e tabelas. As atividades buscam relacionar as mudanças de registros de tabelas para representação gráficas; do sistema semiótico língua materna para o sistema numérico. Faz uso da língua materna como sendo uma forma de registro para a solução de uma atividade matemática.

Destacamos a proposta dos autores deste Caderno de Teoria e Prática para desenvolver o *fazer matemático* dos alunos, utilizando a língua materna, já que, em várias das atividades propostas, é recomendado aos estudantes que expliquem a que conclusão chegaram após a realização das atividades e, em outras, que sistematizam, usando suas palavras as definições de objetos matemáticos, que estão sendo trabalhados.

Figura 15 - Atividade 9 do TP2, o uso tabelas e gráficos para representar a quantidade de peças produzidas por uma máquina

Atividade 9

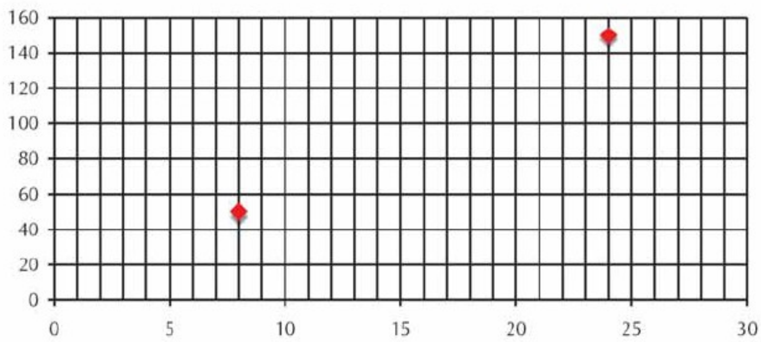
Na tabela abaixo estão representadas as quantidades de peças produzidas por uma máquina num certo período de tempo:

Tempo (min)	8	12	16	24
Quantidade de peças	50	75	100	150

Vamos analisar algumas questões interessantes desse problema. Vamos preencher uma outra tabela com os resultados das razões nos intervalos:

	8 e 12	12 e 24	16 e 24
Razão entre os tempos	$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$		
Razão entre as quantidades de peças			$\frac{100}{150}=\frac{2}{3}$

Faça a representação gráfica no plano dos pontos da tabela:



Fonte: Dias e Faria (2008, p.26)

Na figura 15, a atividade 9 (TP2) apresenta duas tabelas, sendo que a primeira, já preenchida, indica o número de peças produzidas em um determinado intervalo de tempo e a segunda apresenta a razão entre os tempos de produção. As informações da primeira tabela deverão ser representadas em forma gráfica e temos, portanto, uma conversão do registro tabular para um registro gráfico. Nessa atividade já são apresentados os eixos de coordenadas e alguns pontos fixados, como um facilitador para a mudança de registro. Para Duval (2016), as atividades cognitivas de matemática devem oferecer condições para que o aluno consiga transitar de um registro ao outro sem muita dificuldade.

Figura 16 - Interpretação dos sistemas semióticos da figura 15

Vamos pensar sobre algumas questões:

a) À medida que o tempo aumenta a produção de peças aumenta?

b) As razões entre cada intervalo são iguais em relação tanto ao tempo quanto à quantidade de peças?

c) Calcule a razão do tempo e da quantidade de peças no intervalo de 8 minutos e 24 minutos. Também continuou igual?

d) Qual a sua conclusão?

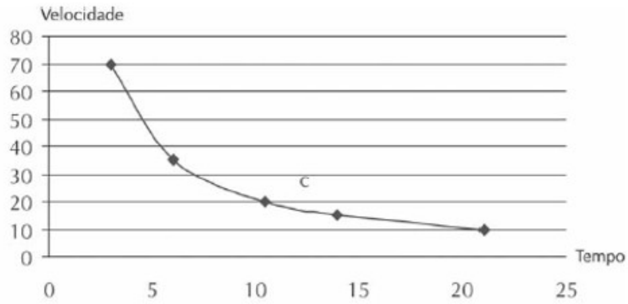
Fonte: Dias e Faria (2008, p.27)

A segunda parte da atividade (figura 16) apresenta algumas questões de reflexão, com registro no sistema semiótico da língua materna. Percebemos que, para que o aluno responda a esta atividade, é preciso transitar pelos sistemas semióticos já construídos no início desta atividade, mostrada na figura 15.

Figura 17 - Atividade 2 do AAA2 mobilização entre registros de representação semiótica

Atividade 2

Para fazer um percurso fixo, o tempo gasto por um veículo varia de acordo com a velocidade.



a) Preencha a tabela abaixo com os dados do gráfico:

Tempo (h)	Velocidade (km/h)
3	
	35
10,5	
	15
21	

Fonte: Dias e Faria (2008, p.28)

A atividade 2 da figura 17 é um gráfico cujas variáveis são velocidade e tempo. O aluno, no item (a) deverá ler as informações presentes no gráfico e completar a tabela. A atividade cognitiva acontece antes da conversão de registro gráfico para o registro tabular.

Para Duval (2012b) existe uma atividade cognitiva fundamental chamada de atividade de formação. A formação pode estar ligada a um problema, na língua natural, a um desenho geométrico, expressão de uma fórmula e sua função é assegurar que o sujeito de aprendizagem possa ter informações necessárias para reconhecimento da representação e da passagem desta etapa para a outra.

Figura 18 - Atividade do AAA2 utilizando grandezas de medidas e registros em língua materna

Atividade 8

Se um caminhão tem a capacidade de 5 toneladas, quantas latas de tinta de 780g o caminhão pode carregar?

Fonte: Faria (2008, p.72)

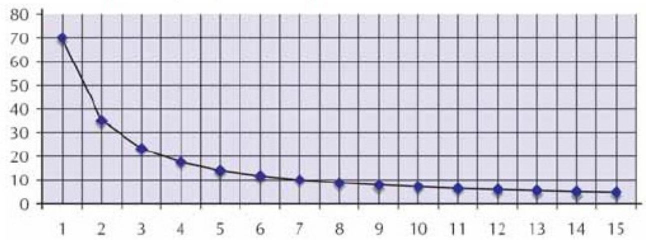
Na figura 18, temos na atividade 8 um problema na língua materna e a solução pode ser obtida fazendo a conversão do registro em língua materna para o registro numérico.

Dias e Farias (2008) orientam sobre a importância de o professor levar para sua sala de aula atividades que forneçam condições dos alunos desenvolverem a habilidade de leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos com o objetivo de contribuir com a formação matemática que é base para o exercício da cidadania.

Figura 19 - Atividade 10 do TP 2, registro de representação gráfica e cálculo de razões

Atividade 10

Observe a representação gráfica no plano cartesiano:



Esta é uma representação gráfica da velocidade em função do tempo gasto por um veículo para percorrer uma distância fixa.

Tempo	1	2	7	10	14
Velocidade	70	35	10	7	5

Como fizemos na atividade 6, calcule as razões do tempo e da velocidade de alguns intervalos.

	1 e 2	1e 10	10 e 14
Razão entre os tempos	$\frac{1}{2}$		
Razão entre as velocidades			$\frac{7}{5}$

Fonte: Dias e Faria (2008, p.27)

Na figura 19, a atividade 10 do TP 2 apresenta dois sistemas semióticos (representação gráfica e representação em tabela) que vão subsidiar o cálculo das razões entre as grandezas. Em Duval (2012b) observamos que é preciso verificar se as atividades cognitivas de matemática oferecem condições para que o aluno consiga sem muitos obstáculos transitar entre sistemas semióticos diferentes e escolher em qual sistema semiótico a resposta do problema se dará.

Para executar a atividade citada na figura 19, o aluno terá a oportunidade de reconhecer o objeto matemático em diversas representações oferecidas como suporte.

Figura 20 - Continuação da atividade 10 do TP2, cálculo de razão e o uso de registro em língua materna

Vamos analisar algumas questões sobre essa situação:

a) À medida que a velocidade do carro aumenta, aumenta ou diminui o tempo necessário para fazer o percurso?

b) Qual a relação que existe entre as razões em cada intervalo? O que isso significaria?

c) Calcule o produto da *razão entre os tempos* e a *razão entre as velocidades* em cada intervalo.

Fonte: Dias e Faria (2008, p.29)

Ainda em relação à atividade 10, na figura 20 temos três itens (a), (b) e (c) que farão uso de registros em língua materna, propondo transitar entre os registros de representação já feitos para, assim, ter o entendimento integral da atividade.

Para Duval (2016) cada mudança de registro expõe uma face oculta da matemática, de modo que se faz necessário, nas aulas de matemática, as múltiplas representações para sabermos as diferentes formas que o objeto se apresenta e conhecê-lo em sua totalidade.

Dias e Farias (2008), orienta que, após a realização das atividades, deve-se solicitar aos alunos a elaboração de relatório sobre as atividades desenvolvidas em sala de aula, para assim desenvolver o pensamento analítico e reflexivo.

Para Duval (2016) após a realização de atividades, um tempo da aula deve ser destinado para cada aluno expressar com as próprias palavras sobre aquilo que fez, levando a uma tomada de consciência das mobilizações de registros que foram precisos para chegar na solução da atividade.

Dias e Farias (2008) fazem, ainda, críticas aos modelos de ensino presentes nas escolas:

> Ao desenvolvermos nossa reflexão em torno da multiplicidade de possibilidades de construção do conhecimento matemático, é fácil observar que a escola, na grande parte dos casos, não considera tal multiplicidade, demonstrando que ela se organiza sob um conceito de matemática estruturada com base em modelos únicos, universais e imutáveis ao longo da história. (DIAS; FARIAS, 2008, p. 96)

Para Dias e Farias (2008), devemos sair de um único modelo de ensino e pensar nas diversas dimensões para a realização das atividades matemáticas:

> É necessário rever junto à escola a concepção do que vem a constituir uma atividade matemática. Essa revisão implica que a escola deve passar a conceber as diversas dimensões de uma atividade matemática: da ação material, do estabelecimento das idéias, de suas variadas representações mentais, do registro através de esquemas e escrita simbólica, da comunicação matemática e do poder de argumentação dentro do seu grupo social. (DIAS; FARIAS, 2008, p. 97)

A TRRS corrobora com a ideia de diversidade de atividades para o ensino da Matemática. Para Duval (2016) as atividades cognitivas baseada em sua teoria estão centradas na superação dos patamares de compreensão e tem por objetivo desenvolver a autonomia intelectual de cada aluno, despertando para a iniciativa, exploração e confiança na condução da realização das atividades. Duval não pretende mostrar uma nova Matemática, mas sim uma nova proposta para o ensino e aprendizagem para alunos entre 6 e 16 anos.

Em nossa análise no Caderno de Teoria e Prática 2 encontramos vários aspectos consonantes com a teoria de Duval, mesmo que não seja explicitamente declarada pelos autores, por exemplo ao fazer menção ao acesso e representações de um objeto matemático.

> O estabelecimento de uma multiplicidade de formas de representação/registro de um dado objeto matemático. Saber representar uma fração, tipo 3/4, não implica um aprendizado efetivo de frações, é necessário mais, é importante que o sujeito possa navegar entre esquemas figurais. A aprendizagem passa pela capacidade do sujeito em reconhecer que 75%; 15/20; 0,75; 1/2 + 1/4 ou 750/1000 são formas possíveis de representar a mesma idéia matemática. (DIAS; FARIAS, 2008, p. 98)

Dias e Farias (2008) concluem o TP2 dizendo que é importante que as representações dos objetos matemáticos sejam seguidas de significado para que assim sirvam de ferramentas para o aluno, ou seja, para posteriormente este aprendizado venha a servir para uma aplicação prática, especificamente uma tomada de decisão para resolver situações-problema.

4.3. TP3 e AAA3

Ao analisar o Caderno de Teoria e Prática 3 e o Caderno de Apoio à Aprendizagem 3, percebemos a TRRS nas orientações para a resolução das situações-problema apresentadas. Os objetos matemáticos abordados nas atividades destacadas são: escala, volume, capacidade, leitura de gráficos e tabelas.

As atividades além de envolver os gestos intelectuais da TRRS, são estruturadas para fornecer condições necessárias para que os alunos consigam fazê-los. Fica evidente que nestas atividades destacadas a ideia de formação da TRRS foi muito explorada a fim de garantir que os alunos consigam manipular diferentes formas registros de representação semiótica.

Na atividade 1 da figura 21, para resolver a situação-problema da construção de uma piscina encontramos as três atividades cognitivas descritas na teoria de Duval (formação, tratamento e conversão). O texto, em língua materna, oferece todas as informações necessária para o desenvolvimento da atividade; temos assim a formação.

Figura 21 - Atividade do TP3, projeto da construção de uma piscina e mobilização de diferentes tipos de registros de representação semiótica

Situação-problema: A construção de uma piscina

A comunidade de uma escola, junto com o Conselho Escolar, decidiu atender a um pedido dos alunos e construir uma piscina. Avaliando o espaço disponível e as necessidades, decidiram que sua superfície deveria caber em um espaço com medidas 6m por 12m. Quanto à profundidade, para que a maioria dos alunos pudesse usá-la, decidiram que seria de 1m na parte mais rasa e de 3m na parte mais funda. Decidiram também que o fundo não teria a forma de uma rampa em toda a extensão, ou seja, não inclinaria de modo uniforme da parte mais rasa para a mais funda. Ao invés disso, haveria alguns degraus no fundo entre pisos horizontais, mas na parte mais funda o piso poderia ser inclinado.

As preocupações que surgiram foram:

a) como fazer um projeto satisfazendo a essas condições;

b) como informar o projeto aos construtores, por meio de desenhos;

c) como saber qual a quantidade de água que seria necessária para encher a piscina, até 20cm da borda.

Atividade 1

Reflita e exponha idéias iniciais para resolver esses problemas:

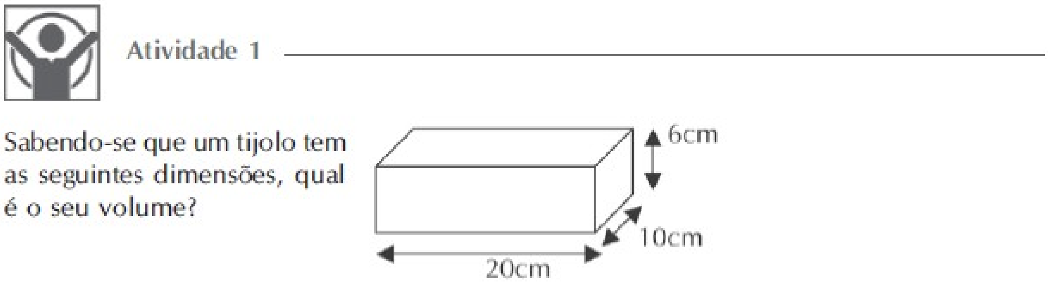
a) Imagine uma piscina satisfazendo as condições desejadas e apresente, desenhado em papel, um esboço do seu projeto (compreensível pelos que vão construí-la). Faça um modelo tridimensional (maquete) para a piscina que você criou. Indique todas as medidas.

b) Faça o cálculo da quantidade de água necessária para encher a piscina, até 20cm da borda (dê a resposta em litros).

Fonte: Dias e Bertoni (2008, p.20)

O tratamento ocorre no mesmo tipo de registro, nesta atividade vai acontecer nos registros em língua materna, o aluno deverá expor suas ideias sobre o projeto. No item (a) o aluno passará dos registros em língua materna para os registros geométricos em duas dimensões e três dimensões, teremos aqui a conversão de registro. No item (b) o aluno determinará a capacidade desta piscina utilizando os registros numéricos para determinar a resposta deste item.

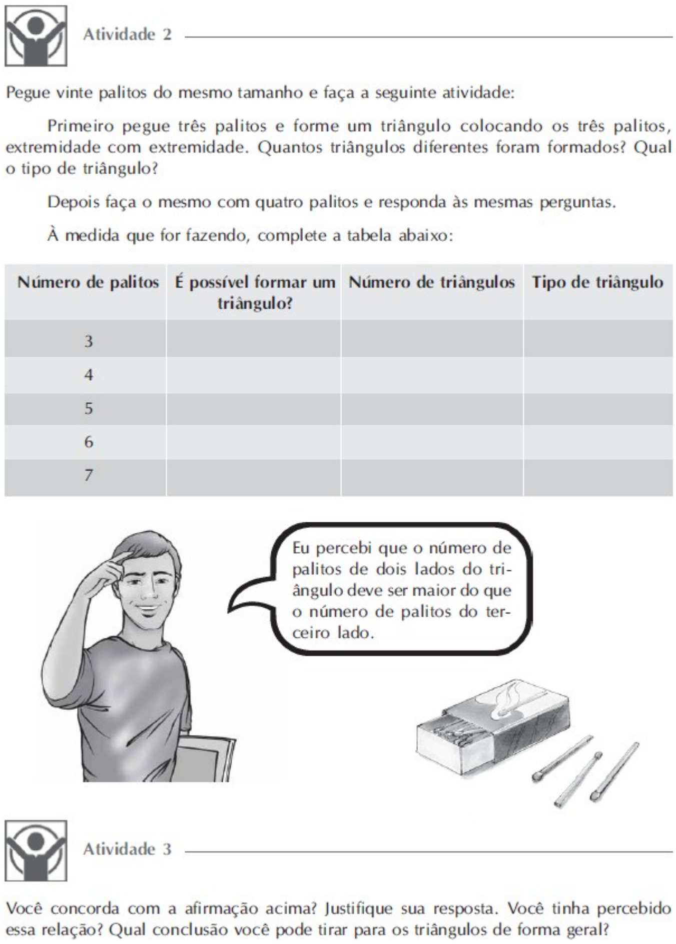
Figura 22 - Atividade 1 do AAA3, mobilização de registros geométrico e numéricos



Fonte: Faria (2008, p.34)

Na atividade 1 da figura 22, para determinar o volume de um tijolo, deve ser feita a mobilização entre dois registros semióticos. É apresentado o registro geométrico e, para determinar o volume, deverá utilizar o registro numérico.

Figura 23 - Atividade 2 do AAA3, condição de existência de triângulos



Atividade 2

Pegue vinte palitos do mesmo tamanho e faça a seguinte atividade:

Primeiro pegue três palitos e forme um triângulo colocando os três palitos, extremidade com extremidade. Quantos triângulos diferentes foram formados? Qual o tipo de triângulo?

Depois faça o mesmo com quatro palitos e responda às mesmas perguntas.

À medida que for fazendo, complete a tabela abaixo:

Número de palitos	É possível formar um triângulo?	Número de triângulos	Tipo de triângulo
3			
4			
5			
6			
7			

Eu percebi que o número de palitos de dois lados do triângulo deve ser maior do que o número de palitos do terceiro lado.

Atividade 3

Você concorda com a afirmação acima? Justifique sua resposta. Você tinha percebido essa relação? Qual conclusão você pode tirar para os triângulos de forma geral?

Fonte: Faria (2008, p.56)

Na atividade 2, da figura 23, temos atividade cognitiva de formação, o enunciado em língua materna oferece as condições para a execução das atividades. À medida que o aluno manipula os palitos conforme solicitado, os registros criados serão do tipo geométrico; em seguida, fazendo a conversão destes registros para o registro em tabela, há um registro numérico e, ao fim, o registro em língua materna, quando se expõem as conclusões obtidas.

Figura 24 - Atividade 11 do TP 3, representação de dados em tabelas e gráfico

Os professores de uma escola resolveram registrar o número de alunos que faziam empréstimo na biblioteca da escola, a cada mês. A escola tinha 143 alunos.

Os professores fizeram os registros durante todo o ano letivo – de fevereiro a novembro. Foi feita uma tabela para mostrar os registros (tabela 3).

Mês	Número de alunos que fizeram empréstimos
fevereiro	24
março	32
abril	53
maio	70
junho	72
julho	20
agosto	47
setembro	55
outubro	61
novembro	50

Tabela 3

Veja no gráfico 2 que cada mês tem sua imagem acima dele.

Gráfico 2

Atividade 11

Descreva, em linguagem usual, a variação observada na tabela 3 ou no gráfico 2. Vamos começar para você:

"Nos primeiros meses do ano, o número de alunos que fazem empréstimos na biblioteca aumenta..." (e depois?).

Fonte: Dias e Bertoni (2008, p.157)

Na atividade 11 da figura 24, temos os registros semióticos do tipo gráfico e tabela. O aluno deverá observar os dados presentes nesses sistemas semióticos e fazer suas observações no registro de língua materna.

Para Duval (2016), o professor deve organizar as atividades de forma adequada para que os alunos possam fazer a mudança de registro sem muitos obstáculos. Em conformidade com a TRRS, em Dias e Bertoni (2008), percebe-se que a proposta de matemática do GESTAR II também se preocupa com a organização das atividades matemáticas, como podemos observar no trecho abaixo:

> [...] conforme a proposta de matemática do GESTAR, a aprendizagem matemática depende fortemente da proposição de situação-problema adequada aos alunos, uma das principais competências do professor de Matemática acaba por se constituir na busca dessas situações a serem propostas aos seus alunos. Essa busca da situação é sem sombra de dúvida um trabalho de investigação matemática que requer do professor um alargamento de seu olhar para o conteúdo matemático e sua função social que amplia em muito o espaço pedagógico e escolar. (DIAS; BERTONI, 2008, p. 212)

No TP3, para Dias e Bertoni (2008) o fenômeno da aprendizagem matemática implica novas formas de conceber o ensino. É preciso uma nova compreensão do fenômeno de aprendizagem matemática que signifique o rompimento de conceitos antigos, ligados à reprodução de exercícios que não traziam nenhum entendimento das implicações práticas, envolvendo a realidade e a capacidade de agir sobre ela.

Para o professor, segundo Dias e Bertoni (2008), o fenômeno da aprendizagem matemática deve usar conceitos e práticas para desenvolver um papel significativo na aprendizagem do aluno. Ainda Dias e Bertoni (2008) salientam que os obstáculos epistemológicos "não podem ser vistos como empecilhos à aprendizagem, e tampouco podemos pensar em removê-los: devemos nos apoiar sobre estes para construir o processo de aprendizagem e consequente mudança da realidade." (DIAS; BERTONI, 2008, p. 210)

Ainda sobre os obstáculos epistemológicos, Dias e Bertoni (2008) explica:

> O obstáculo epistemológico, termo proposto por Bachelard, caracteriza o desenvolvimento do conhecimento, seja por um sujeito ou por um grupo social, em que os conceitos prévios dificultam a construção de novos. Longe de ser um fator negativo ao desenvolvimento humano e cultural, os obstáculos apresentam-se como chaves propulsoras do esforço cognitivo no avanço científico e

> tecnológico. Compreender esses obstáculos requer o entendimento de mudanças de paradigmas, permitindo visualizar o processo evolutivo do conhecimento ao longo da história da civilização e nas diversas culturas humanas. (DIAS; BERTONI, 2008, p. 210)

Duval (2012b) orienta que o fenômeno da aprendizagem matemática só ocorra com a ligação entre a semiose e a noésis, já que há um impasse na compreensão das atividades matemáticas quando o professor faz a apreensão conceitual do objeto, a noésis, sem a apreensão de uma representação semiótica, a semiose.

Desta forma, a TRRS defende que, na organização de situações de aprendizagem condicionada à produção e mobilização de sistemas semióticos, alunos e alunas experimentam um fazer matemático e os obstáculos epistemológicos são ultrapassados, permitindo utilizar seus conhecimentos matemáticos para uma tomada de consciência e ação diante de uma situação-problema.

Segundo Dias e Bertoni (2008) a proposta de ensino da Matemática presente no GESTAR II está ligada a seleção adequada de situações-problemas com características suficientes para serem instrumentos de aprendizagem de matemática para os alunos.

Assim, uma competência importante para o professor de Matemática é a busca e seleção de situações para levarem para a sala de aula, de modo que essa busca constitua um trabalho de investigação e pesquisa com um olhar crítico para identificar o conteúdo favorável à aprendizagem, transformando esses conteúdos em uma atividade de aprendizagem.

Dias e Bertoni (2008) dizem que cabe ao professor em suas observações a respeito da produção matemática do aluno contribuir, a princípio, para os registros dos procedimentos de resolução, criando um espaço psicológico de confiança de modo que eles se sintam encorajados a revelar suas estratégias. Para que isso ocorra, o professor precisa estar sempre pronto a ouvir e reconhecer novas formas de resolução.

Para Duval (2016), se o professor não fornece um ambiente de aprendizagem com atividades em que haja mobilização de registros de representação semiótica de forma espontânea, corre o risco de bloquear tentativas de resolução, criando um obstáculo de compreensão.

Assim, Dias e Bertoni (2008) concluem que a forma como o professor concebe o fazer matemático dentro de sua sala de aula determina o sucesso na aprendizagem, sendo necessário entender a sala de aula como um espaço de troca de saberes.

4.4. TP4 e AAA4

No Caderno de Teoria e Prática 4 e no Caderno de Atividades de Apoio à Aprendizagem, destacamos três atividades, que podem ser aplicadas como atividades cognitivas de matemática segundo a TRRS, os objetos matemáticos envolvidos são: expressões numéricas, área em malhas quadriculadas, números escritos por extenso, na forma decimal e em notação científica.

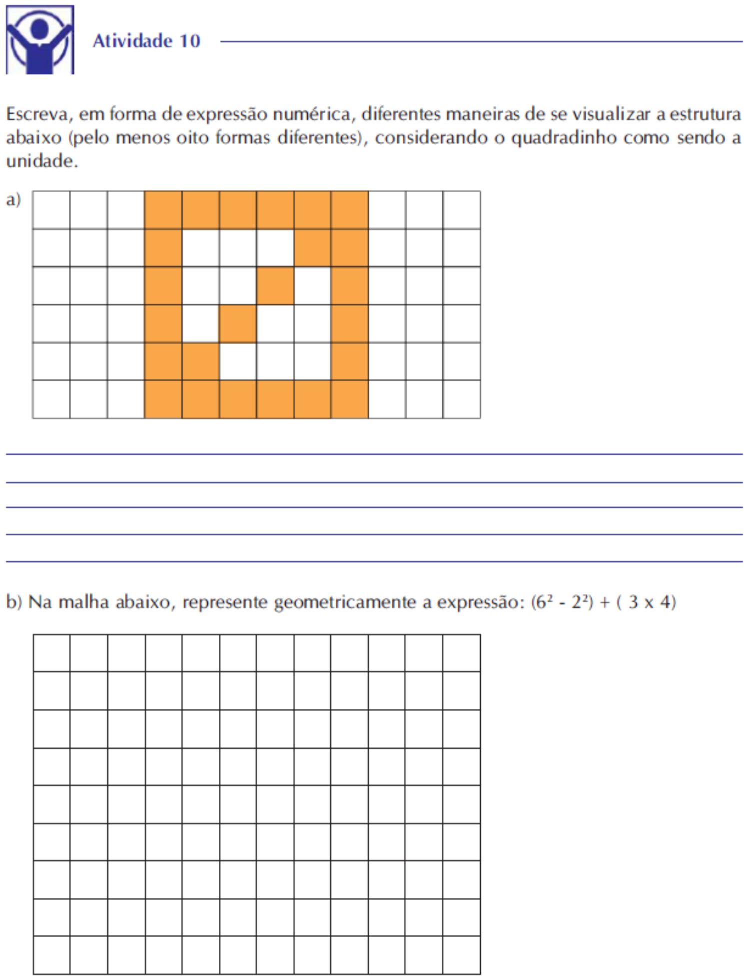
Na Atividade 10 da figura 25 no item (a) temos como atividade cognitiva de formação antecedendo a resposta deste problema, é no enunciado que começa todo o processo de compreensão da atividade. Neste problema espera-se que o aluno passe dos registros geométricos para o registro numérico (conversão) e ainda se espera que isso aconteça de oito formas diferentes.

Para Duval (2016) do ponto de vista cognitivo, se faz necessário o recurso de diferentes registros de representação, evidenciado na aplicação do item (a) e (b), para que o aluno possa ter a compreensão total. Por meio dos registros de representação semiótica que o professor vai compreender e identificar se o aluno ultrapassou os patamares de compreensão definidos na TRRS.

No TP3, Dias e Bertoni (2008), chama a atenção para a importância e compreensão da produção matemática dos alunos, corroborando com a teoria de Duval:

> para que haja o reconhecimento de diferentes procedimentos de resolução da situação-problema, é inicialmente necessário que o professor, enquanto matemático e educador, compreenda as estratégias dos alunos no desenvolvimento do procedimento de resolução. Um espaço importante dessa compreensão é a identificação e o entendimento das causas dos erros cometidos pelos alunos (DIAS; BERTONI, 2008, p. 214).

Figura 25 - Atividade 10 do TP 4, uso de malha quadriculada para representar expressões algébricas


Atividade 10

Escreva, em forma de expressão numérica, diferentes maneiras de se visualizar a estrutura abaixo (pelo menos oito formas diferentes), considerando o quadradinho como sendo a unidade.

a)

b) Na malha abaixo, represente geometricamente a expressão: $(6^2 - 2^2) + (3 \times 4)$

Fonte: Farias, Muniz e Bertoni (2008, p.38)

Encontramos no material do GESTAR II, competências que ajudam o professor na condução de um trabalho buscando a utilização dos registros de representação como estratégia de aprendizagem, verificação da compreensão e incompreensão do conteúdo estudado e análise das causas dos erros cometidos pelos alunos:

> Acolher cognitivamente o aluno [...] Contribuir para o registro do procedimento.[...] Compreender os motivos dos «erros» produzidos pelos alunos no processo [...]. Constituir a sala de aula como um espaço de "comunidade de investigação", cabendo ao professor orquestrar todo um espaço de troca entre os alunos, de confronto de diferentes processos, de validação, de argumentação oral e escrita, e, sobretudo, de prova e de demonstração. Esse é um papel importante do professor no desenvolvimento do processo argumentativo dos alunos, fazendo que cada um se sinta como se

> fosse um «matemático» a validar diante do grupo suas estratégias e conceitos[...]. A forma como o professor concebe o "fazer matemático" determina sua postura diante do grupo, sendo o portador de representação social do saber matemático. (DIAS; BERTONI, 2008, p. 214-215)

Desta forma para que os alunos consigam registrar sua produção matemática, que a princípio não é uma tarefa fácil, o trabalho do professor é parte essencial no processo.

Figura 26 - Atividade 3 e atividade 4 do AAA4 números decimais e notação científica

Atividade 3

Escreva os números abaixo, na forma decimal usual e na forma de notação científica.

	Forma Decimal	Notação Científica
18 milhões		
175 milhões		
30 bilhões		
100 bilhões		

Atividade 4

Na sua análise, quais são as vantagens da utilização da notação científica para se escrever um número?

Fonte: Neves (2008, p.38)

Na atividade 3 da figura 26 temos a utilização dos registros semióticos na forma de tabela, o enunciado faz o uso da língua materna e a primeira atividade cognitiva é a *formação*, pois é através do enunciado que o aluno receberá todos os comandos para a resolução da atividade.

Para preenchimento da tabela a primeira coluna faz uso do sistema semiótico de escrita matemática com a escrita materna, para passar para a segunda coluna o aluno precisará fazer a mudança de registro para registros numéricos na forma decimal, na TRRS é chamado de conversão.

Da segunda coluna para a terceira teremos apenas um tratamento da informação passando do registro na forma decimal para o registro na forma de notação científica.

A atividade 4 faz com que o aluno seja protagonista de seu próprio aprendizado, segundo Duval (2016) é necessário na realização de atividades cognitivas de matemática que o aluno adquira sua autonomia intelectual de modo que, ao fazer suas observações com o uso da língua materna, o aluno mobilize outros registros de representação semiótica e assim, segundo Duval (2016), cada registro expõe uma face do objeto matemático estudado e, conhecendo cada face deste objeto, teremos uma melhor compreensão dele, uma característica fenomenológica presente na TRRS.

4.5. TP5 e AAA 5

Nesta seção os objetos trabalhados nas atividades escolhidas são: análise combinatória, construção diagramas de árvore, cálculo de volume de prisma reto retângulo.

No Caderno de Teoria e Prática 5, Dias e Bertoni (2008) fazem referência à ***Teoria de Quadros*** de Régine Douady, que definiu o aprender matemática como um processo de navegar entre diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Segundo Almouloud (2007), Douady introduziu a noção de Jogos de quadros para designar a capacidade da mudança de um ponto de vista de um objeto matemático e a tradução de um problema de um quadro a outro para fornecer ferramentas para o processo de resolução de uma atividade.

A aprendizagem matemática é vinculada à aprendizagem de diferentes representações de um mesmo conceito, e saber transitar entre essas diferentes representações sinaliza para uma aprendizagem real. Nesse sentido, “a teoria de Douady insiste na importância de que uma dada situação matemática seja tratada em diferentes quadros”. (MUNIZ; BERTONI, 2008, p. 66)

Assim, na *Teoria de Quadros*, entendemos como quadros um conjunto de ferramentas que são evidenciadas e utilizadas para resolver uma situação-problema. Essas ferramentas não são todas utilizadas de uma só vez ou de um só quadro, são escolhidas de acordo com a necessidade para obtenção da solução, e a mudança de quadro, ou seja, a escolha de outras ferramentas em diferentes quadros caracteriza o que Douady designou como *Jogo de Quadros*. São exemplos de quadros:

- Quadro geométrico: sólidos geométricos, figuras planas, arestas, vértices, volume, lados, áreas, linhas poligonais, ângulos, medidas de ângulos, perímetro, ponto reta, plano …
- Quadro algébrico: os diversos tipos de equações, raiz de uma equação, expressões algébricas, polinômios …
- Quadro de funções: os diversos tipos de funções, a variação proporcional, às relações biunívocas…
- Quadro da geometria analítica: representação gráfica de diversas funções, interpretação gráfica da solução de sistemas de equações, estudos dos sinais de uma função a partir da leitura e interpretação gráfica….
- Quadro numérico: naturais, inteiros, racionais, reais, os números complexos, as operações aritméticas....

No jogo de quadro, o aluno tem disponível as ferramentas para trabalhar o problema em busca da resolução. Saber utilizar essas ferramentas está ligada à competência necessária para execução, de modo que, se estas competências não forem previamente desenvolvidas pelos alunos, o jogo de quadro se torna limitável na busca da solução do problema.

Segundo Almouloud (2007), a limitação da Teoria de Quadro acontece na abordagem de alguns tipos de saberes matemáticos, já que, na teoria de Douady um conceito matemático tem estatuto de ferramenta quando é utilizado para resolução de um problema e ganha o estatuto de objeto matemático quando é caracterizado como conteúdo de aprendizagem.

Almouloud (2007) afirma então que, na *Teoria de Quadro* é preciso tomar o devido cuidado na distinção do conceito matemático como estatuto de ferramenta e de objeto, de forma que na seleção de problema para levar para a sala de aula, os conceitos matemáticos assumam a função de ferramenta no processo de intervenção na busca da solução da atividade.

Em outras palavras, na *Teoria de Quadro*, todas as atividades matemáticas devem ser estruturadas para que o aluno, no processo de resolução, escolha a ferramenta necessária para obtenção da resposta do problema. Já a teoria de Duval defende que toda atividade matemática a apreensão dos objetos matemáticos é por meio de semiose, como aponta Almouloud:

> [...] a diferença entre a noção de quadro e de registro de representação semiótica introduzida por Duval. A noção de registro é distinta da noção de quadro, pois a primeira aporta uma dimensão semiótica, imprescindível para a compreensão dos objetos matemáticos. (ALMOULOUD, 2007, p. 69)

A crítica de Duval à Teoria de Douady é que, a princípio, a mudança de quadros não significa uma mudança de registros e não estão relacionados a sistemas semióticos, mas a um conjunto de ferramentas e competências. Ainda que Dias e Farias (2008) e Almouloud (2007) afirmem que a teoria de Duval e a teoria de Douady se articulam e se complementam, Duval (2012b) diz que o jogo de quadros, por se tratar de mudanças de contexto, não fornece condições para análise de fatores cognitivos e não permite a investigação e a análise da compreensão em matemática.

Em Duval, a conversão de registro assume o papel central no processo ensino-aprendizagem, como orienta Almouloud:

> Para compreender um conceito é necessário saber em que quadro ele funciona […]. Para provar teoremas ou resolver problemas, a mudança de quadro e a escolha judiciosa de *registros de representação* são fundamentais no cumprimento da tarefa pedida, além de serem fundamentais na distinção entre o objeto matemático (conceito) e suas diferentes representações num dado registro (ALMOULOUD, 2007, p. 88)

No TP5, Dias e Bertoni (2008) orientam os professores do programa de formação continuada a pesquisarem a respeito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Entendemos que os autores do TP5, sabendo da importância da TRRS para complementar a Teoria de Quadros, incentivam os participantes do GESTAR II a conhecerem a teoria de Duval, base teórica importante de todo o material do programa.

Na atividade 6, da figura 27, de acordo com a *Teoria dos quadros* o aluno poderá encontrar a resposta a princípio no quadro números utilizando a ferramenta “Princípio multiplicativo” para determinar todas as possibilidades para montar um cardápio, e depois fazer a mudança de quadros (jogo de quadros) para o quadro da análise combinatória e construir a árvore das possibilidades e em suas ramificações finais verificar todas as combinações possíveis.

Figura 27 - Atividade 6 do TP5, construção de diagrama de árvore para resolver problemas

Atividade 6

a) Construa um diagrama de árvore para representar a seguinte situação:

"Temos que montar um cardápio para um almoço. Podemos escolher um entre três tipos de carnes: ave, peixe ou boi. Também temos quatro tipos de raízes e queremos usar apenas uma: batata, cenoura, beterraba ou inhame. Além disso, temos três tipos de verduras, dentre as quais vamos escolher uma: agrião, couve ou espinafre".

b) Use cores diferentes para mostrar onde estão representadas as possibilidades:

1. peixe, beterraba, couve;
2. ave, beterraba, agrião;
3. boi, batata, espinafre.

c) Faça dois novos diagramas para representar:

1. Um acréscimo de uma possibilidade de verdura: alface.
2. Uma nova possibilidade quanto à carne: "sem carne".

Use cores diferentes para ressaltar as novas possibilidades criadas.

Fonte: Dias e Bertoni (2008, p.29)

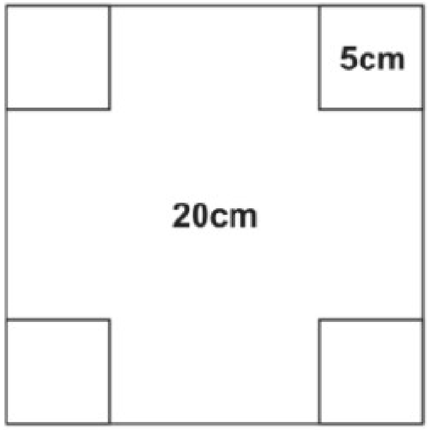
Nesta atividade, além de uma mudança de quadros, analisando sob a TRRS, a *formação* é o primeiro gesto intelectual que aparece, no entendimento do enunciado, momento que se escolhe o registro de representação que vai usar e como proceder para resolver o problema, lembrando que Duval (2016) chama de gestos intelectuais todas as atividades de mobilização de registros que os alunos precisam fazer para determinar a resposta de um problema. Em seguida, passa-se para outro gesto intelectual, a conversão do registro de representação semiótica língua materna para o registro de representação semiótica *diagrama de árvore*.

No item (b) as mudanças que serão feitas estarão no mesmo registro de representação, o que Duval (2012b) define como *tratamento*. No item (c) será preciso voltar ao enunciado para fazer um *tratamento* no registro em língua materna com as condições descritas e para que o aluno consiga responder a este problema, deverá fazer mobilizações entre os registros de representação semiótica trabalhados nos itens anteriores desta atividade.

Figura 28 - Atividade 1 do AAA 5, cálculo de volume máximo

Caixas e volume

Vamos pensar agora em um outro tipo de caixa que pode ser reutilizada:



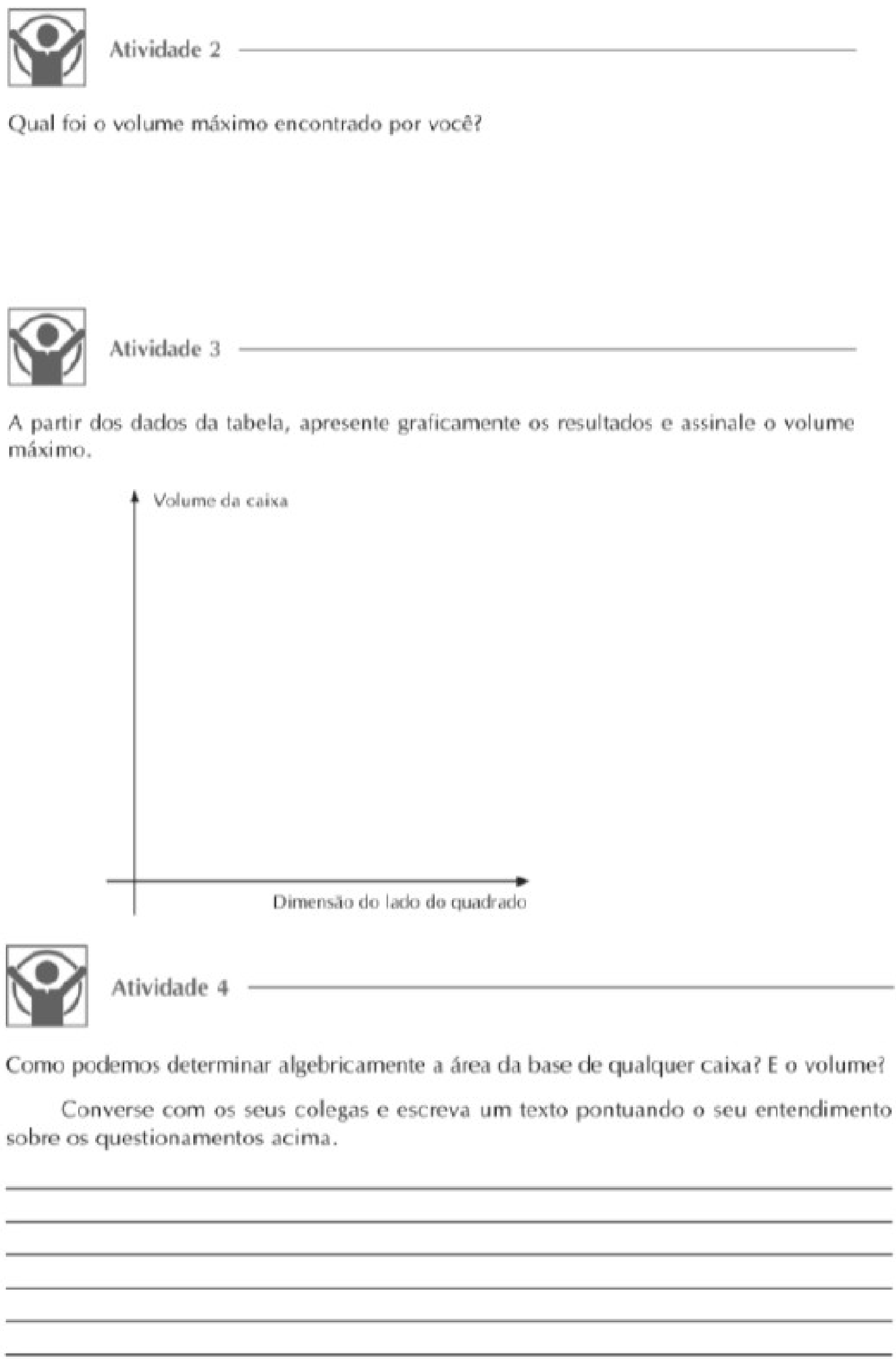
Atividade 1

a) Use a tabela abaixo e varie os tamanhos dos quadrados que estão nas quinas e encontre o volume máximo. Use uma calculadora para fazer os cálculos.

Tamanho do lado do quadrado	Volume da caixa

Fonte: Neves (2008, p.47)

Figura 29 - Atividade 2 do AAA5 volume máximo e mobilização de diferentes registros de representação semiótica



Atividade 2

Qual foi o volume máximo encontrado por você?

Atividade 3

A partir dos dados da tabela, apresente graficamente os resultados e assinale o volume máximo.

Atividade 4

Como podemos determinar algebricamente a área da base de qualquer caixa? E o volume?

Converse com os seus colegas e escreva um texto pontuando o seu entendimento sobre os questionamentos acima.

Fonte: Neves (2008, p.48)

Na atividade 1 da figura 28 e nas atividades 2, 3 e 4 da figura 29, observamos que elas contemplam as ideias da TRRS. O contexto destas atividades se passa na reutilização de embalagens (atividade 1), partindo da utilização de um material quadrado de lado 20 cm, os alunos vão construir uma caixa e determinarão o volume para diferentes dimensões desta caixa e expondo os valores em uma tabela.

Na atividade 2, será preciso fazer uma análise desta tabela para responder qual foi o volume máximo encontrado. Na atividade 3 teremos uma conversão do registro em forma tabular da atividade 1 para um registro de representação gráfica, com a intenção ainda de verificar o maior volume possível. Percebemos aqui as mudanças de registros para uma compreensão integral do objeto estudado.

Na atividade 4, temos um fechamento de todo processo de aprendizagem que foi desenvolvido ao longo das atividades 1, 2 e 3. Os alunos vão trocar informações sobre as atividades desenvolvidas entre eles. O professor tem a função de mediador da conversa, os alunos vão precisar mobilizar os sistemas semióticos anteriores para conseguir determinar algebricamente a área da base e o volume de qualquer caixa. Temos assim a mobilizar de outro registro de representação, que é o algébrico e assim utilizando o registro de representação semiótico da língua materna registrar suas conclusões e entendimento nesta atividade

4.6. TP 6 e AAA 6

As atividades que iremos destacar nesta seção envolvem os objetos matemáticos: soma, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros e fracionários a proposta das atividades que serão apresentadas, será proporcionar aos alunos condições da mobilização dos registros semióticos com o uso da língua materna para os registros numéricos, fazer tratamento dentro do sistema semiótico numérico e depois fazer um novo registro de representação utilizando a língua materna.

Bertoni e Freitas (2008), no TP 6, reforçam a importância de situações-problemas motivadoras para que os alunos percebam que o conteúdo é útil e necessário no seu desenvolvimento, dando condições para que elaborem hipóteses e procedimentos para lidar com o novo conteúdo. Para Duval (2016) na seleção de atividades cognitivas de matemática o professor deverá se pautar em como esta aprendizagem matemática vai contribuir na formação do indivíduo. É preciso propiciar condições para que o aluno conquiste sua autonomia intelectual e global, pois na atividade de resolução de problemas é possível que cada aluno experimente sua própria autonomia intelectual e que possam refletir sobre suas respostas sem a necessidade de uma confirmação do professor.

Assim verificamos, no TP 6, atividades voltadas para a busca da autonomia intelectual do aluno, em que é incentivado a refletir sobre suas respostas, escrever uma conclusão e esquematizar um processo de resolução. Bertoni e Freitas (2008) trazem, neste TP, uma valorização da língua materna como sendo parte integradora para resolver problemas matemáticos.

Para Duval (2016) a língua materna é um tipo de registro, porém este sistema semiótico se diferencia quando é utilizado em processos matemáticos pois, na TRRS considera-se que a linguagem materna precisa ser usada em sinergia com outros tipos de representação, ou seja, não é porque o aluno tem facilidade na habilidade da leitura que ele vai conseguir interpretar um problema matemático, fazendo-se necessária a mobilização deste sistema semiótico com outros sistemas semióticos.

Figura 30 - Atividade 2 do TP 6, mobilização de registros de representação semiótica na linguagem materna e na linguagem matemática

Considere o problema:

Também no livro de Renato Valladares (mas não no de Malba Tahan), encontramos o seguinte problema, de uma história antiga, mas que ainda intriga muita gente.

Três pessoas almoçaram em um restaurante, e cada uma entregou ao garçom R$ 10,00, perfazendo um total de R$ 30,00 para pagar a conta. O garçom entregou o dinheiro ao caixa, que devolveu R$ 5,00, pois a conta era de R$ 25,00. Como os clientes não sabiam que o custo era de R$ 25,00, o garçom resolveu enganá-los. Embolsou R$ 2,00 e entregou R$ 1,00 de troco a cada cliente.

Desta forma, cada cliente pagou R$ 9,00, em um total de (3 x 9 =) R$ 27,00, que somados aos R$ 2,00 que ficaram com o garçom resultam em um total de R$ 29,00.

Já que a quantia entregue foi de R$ 30,00, como explicar o misterioso sumiço de R$ 1,00?

Atividade 2

Explique matematicamente o que ocorreu no problema exposto.

Fonte: Bertoni e Freitas (2008, p.19)

Bertoni e Freitas (2008) mencionam ainda que o aluno, nas aulas de matemática, é exposto a dois sistemas linguísticos: a linguagem materna e a linguagem matemática, e nos chamam a atenção para que não ocorra o uso excessivo da linguagem matemática. Para os autores do TP6, deve-se privilegiar, na sala de aula, uma linguagem híbrida, um cruzamento entre a linguagem matemática e a linguagem natural.

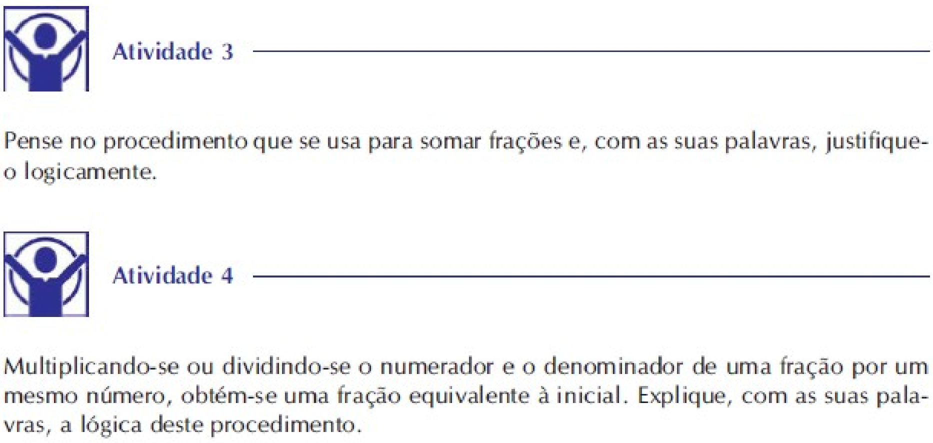
O uso da linguagem natural nas atividades matemáticas é recorrente no TP6 apresentadas nas seguintes atividades.

Na atividade 2 da figura 30, dois sistemas semióticos são abordados: o primeiro é a linguagem materna e o segundo é a linguagem matemática, propondo que os alunos registrem matematicamente o que foi abordado no problema.

Para Duval (2016), o sistema semiótico língua materna e os sistemas semióticos da linguagem matemática são dotados de signos e possuem expressões e linguagens próprias, assemelhando-se apenas quanto à função de comunicação. Segundo Menezes (2000) a linguagem matemática se dá em dois tipos: a matemática como uma linguagem voltada para os matemáticos profissionais e a linguagem da aula de Matemática usada pelo professor e alunos no processo de ensino e aprendizagem nas aulas de matemática.

Menezes (2000) ainda acentua que as atividades propostas em sala são influenciadas pela linguagem da aula, a clareza e o tipo de pergunta feita pelo professor é determinante para a aprendizagem.

Figura 31 - Atividades 3 e 4, uso da língua materna para descrever os procedimentos de soma, multiplicação e divisão de frações



Atividade 3

Pense no procedimento que se usa para somar frações e, com as suas palavras, justifique-o logicamente.

Atividade 4

Multiplicando-se ou dividindo-se o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, obtém-se uma fração equivalente à inicial. Explique, com as suas palavras, a lógica deste procedimento.

Fonte: Bertoni e Freitas (2008, p.20)

A atividade 2 e as outras atividades que seguem nas figuras 30 e 31, exploram a linguagem matemática associada a linguagem materna. Esta diferença entre os dois tipos de linguagens matemáticas proposta por Menezes (2000) também corrobora com as ideias de Duval (2016) sobre as faces *exposta* e *oculta* da matemática.

Figura 32 - Atividade 1 do AAA 6, sequência dos múltiplos de quatro

Atividade 1

Em 2002, houve em nosso país eleições presidenciais. Isto ocorre a cada quatro anos.

a) Nas décadas de 80 e 90, aconteceram eleições presidenciais? (Lembrete: Discuta com os professores de Matemática e de História sobre as eleições diretas para presidente em nosso país; estas informações serão úteis para a resolução desta questão).

b) Usando o raciocínio matemático, haverá eleição presidencial no ano de 2024? Descreva o seu processo de resolução.

Fonte: Neves (2008, p.42)

As atividades das figuras 31 e 32 têm, portanto, a proposta de usar uma mistura entre a linguagem natural e a linguagem matemática o que, para Duval (2016) é necessário para que o aluno possa expor com suas palavras suas conclusões e assim adquirir sua autonomia intelectual.

Assim, quando o aluno usa suas palavras para descrever um procedimento matemático que até então é comum, seus registros revelam uma nova face da Matemática melhorando sua compreensão quanto ao objeto matemático estudado.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos estudos realizados, identificamos a importância de divulgar e estimular o conhecimento da TRRS, e de resgatar e divulgar as coleções dos materiais publicados no programa GESTAR II, como um conjunto de recursos para auxiliar professores dentro da sala de aula, com proposta de atividades embasadas em uma teoria cognitiva cujas pesquisas têm se ampliado em número e detalhamento nos últimos anos.

Disponibilizar a outros professores que não tiveram a oportunidade de fazer o curso de formação continuada do GESTAR II as ideias do programa e contribuir para a formação de futuros professores de matemática, expondo um material relevante e comentários sobre o embasamento teórico de sua produção, que podem auxiliar no desenvolvimento e compreensão das atividades matemáticas, tanto da prática docente como dos aprendizes.

As atividades de matemáticas retiradas dos Cadernos de Teoria e Prática (TPs) e dos Cadernos de Atividades de Apoio à Aprendizagem (AAA) do GESTAR II de matemática evidenciadas no capítulo quatro desta dissertação não foram apresentadas como sendo sugestão de uma sequência de conteúdos programáticos, pois sabemos que cada escola tem seu planejamento e organização. Com estas atividades, no entanto, foi possível mostrar que a TRRS lança luz sobre os processos de ensino e aprendizagem, ao tomar como princípio básico que a apreensão dos objetos matemáticos se constitui por meio de registros de representação semiótica.

Deste modo, acreditamos que o conhecimento da ***Teoria dos Registros de Representação Semiótica*** por parte do professor, contribui no seu planejamento e seleção de atividades para levar para a sala de aula; na análise das possíveis dificuldades de compreensão dos conteúdos matemáticos apresentados por alunos na sua fase escolar e na elaboração de testes de matemática com a proposta de avaliação do rendimento escolar.

Evidenciamos, ainda no capítulo quatro, que as coleções do material de matemática do GESTAR II se constituem como um excelente material de apoio ao professor nas aulas de Matemática e na sua formação continuada.

As atividades propostas para as aulas estimulam o ensino da Matemática voltado para a resolução de problemas. Os conteúdos matemáticos abordados estão diretamente ligados a contextos reais proporcionando uma aprendizagem mais significativa, favorecendo uma maior compreensão dos conceitos matemáticos, e à luz da TRRS classificá-las como atividade cognitiva de matemática.

Desta mesma forma, as orientações descritas no TPs carregam muito da TRRS, mesmo que muitas das vezes de forma implícita. Nas orientações é possível perceber que os autores procuram estimular o professor para o ensino da Matemática voltado para o desenvolvimento do aluno, dando atenção: às suas produções, suas interpretações, aos seus registros e pensamentos voltados para a resolução de cada atividade. Destaca-se que nas orientações voltadas para o professor nas coleções do GESTAR II, os autores propõem que a análise das atividades de matemática aplicadas em sala de aula, seja voltada para o fazer matemático do aluno. Dessa forma, as orientações propostas nas coleções do GESTAR II corroboram com as ideias da TRRS, e faz com que as coleções do GESTAR II se mantenham como um excelente material de pesquisa e aplicação na área da Educação Matemática.

Além disso, este trabalho contribuiu para a formação continuada do professor pesquisador que, em 2009, teve o primeiro contato com o material do GESTAR II e agora, em 2021, com a oportunidade de realizar novas abordagens à luz da TRRS abriu novos horizontes.

A compreensão das atividades propostas no material e o embasamento teórico dos registros de representação semiótica, consolidou ainda mais o desejo deste pesquisador por um ensino voltado para a análise do pensamento matemático.

Como proposta de trabalhos futuros, assinalamos uma continuidade nos estudos do GESTAR II e da TRRS com a elaboração de um projeto que fomente o uso dos materiais existentes em sala de aula, orientado por uma formação continuada que deixe explícitas as bases teóricas, notadamente os trabalhos de Duval.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. Abordagens Semióticas em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 696-726, ago. 2018. Mensal.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007. 218 p.

BARBOSA, Elciene de Oliveira Diniz; PULINO, Lúcia Helena Cavasin Zabotto; LINS, Paola Maluceli. PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR – GESTAR II. **Guia Geral.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.76p.

BERTONI, Nilza Eigenheer; FREITAS, Sinval Braga de. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Caderno de Teoria e Prática 6 – TP6**: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. 224 p.

BRASIL. Decreto nº 6094, de 24 de abril de 2007. Dispõe sobre a implementação do Plano de Metas Compromisso Todos pela Educação, pela União Federal, em regime de colaboração com Municípios, Distrito Federal e Estados, e a participação das famílias e da comunidade, mediante programas e ações de assistência técnica e financeira, visando a mobilização social pela melhoria da qualidade da educação básica. **Decreto Nº 6.094, de 24 de Abril de 2007**. Brasília, 24 abr. 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF: MEC, 2015. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 20 jan. 2021.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica**. Del saber sábio al saber enseñado 1991. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/242760000_La_transposicion_didactica_Del_saber_sabio_al_saber_ensenado. Acesso em: 10 jan. 2021

CHEVALLARD, Yves. SOBRE A TEORIA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES INTRODUTÓRIAS. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, [*s. l*], v. 3, n. 2, p. 1-14, maio 2013. Tradução de Cleonice Puggian.

CRUZ, Willian José da. O RACIOCÍNIO DIAGRAMÁTICO E OS EXPERIMENTOS MENTAIS NUMA PERSPECTIVA SEMIÓTICA. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 62, n. 24, p. 6-28, abr. 2019. Trimestral.

DIAS, Ana Lúcia Braz; FARIA, Celso de Oliveira. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Caderno de teoria e Prática 2 - TP2**: matemática nos impostos e nos seguros. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. 248 p.

DIAS, Ana Lúcia Braz; FARIA, Celso de Oliveira. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Caderno de Teoria e Prática 3 - TP3**: matemática nas formas geométricas e na ecologia. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. 250 p.

DUVAL, Raymond. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre o ensino da matemática? **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 305-330, jul. 2012a. Semestral. Tradução de Luciana da Costa Oliveira.

DUVAL, Raymond. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. In: **Revemat**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 1-79, jan. 2016. Tradução de Méricles Thadeu Moretti.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. in: **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, jan. 2012b. Tradução: Méricles Thadeu Moretti.

EDUCAÇÃO, Fundo Nacional de Desenvolvimento da. **PAR - Plano de Ações Articuladas**. 2017. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/index.php/programas/par/sobre-o-plano-ou-programa/preguntas-frequentes-2. Acesso em: 15 maio 2021.

FARIA, Celso de Oliveira. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Atividades de apoio à aprendizagem – AAA1:** matemática na alimentação e nos impostos – Versão do aluno. Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2008. 152 p.

FARIA, Celso de Oliveira. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Atividades de apoio à aprendizagem – AAA2:** matemática nos esportes e nos seguros – Versão do aluno. Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2008. 186 p.

FARIA, Celso de Oliveira. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Atividades de apoio à aprendizagem – AAA3:** diversidade cultural e meio ambiente: de estratégias de contagem às propriedades geométricas – Versão do aluno. Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2008. 152 p.

FARIA, Celso de Oliveira; MUNIZ, Cristiano Alberto. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Caderno de Teoria e Prática 4 –**

TP4: Construção do conhecimento matemático em ação. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. 236 p.

FARIA, Celso de Oliveira; MUNIZ, Cristiano Alberto. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Caderno de Teoria e Prática 5 – TP5**: diversidade cultural e meio ambiente: de estratégias de contagem às propriedades geométricas. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. 210 p.

KLÜBER, Tiago Emanuel; BURAK, Dionísio. A Fenomenologia e suas contribuições para a Educação Matemática. in: **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 3, n. 1, p. 95-99, 01 jan. 2008. Semestral.

LUA. In: DICIO, **Dicionário Online de Português.** Porto: 7Graus, 2021. Disponível em: https://www.dicio.com.br/trabalho/. Acesso em: 09/10/2021

MACHADO, Antônio Pádua; CORRÊA, Anderson Martins. A Fenomenologia nos Fundamentos da Pesquisa em Educação Matemática. In: **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 3, n. 6, p. 53-65, jul. 2010. Semestral.

MUNIZ, Cristiano Alberto; BERTONI, Nilza Eigenheer. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Caderno de teoria e Prática 1 – TP1:** matemática na alimentação e nos impostos. Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2008. 228 p.

NEVES, Regina da Silva Pina. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Atividades de apoio à aprendizagem – AAA4:** construção do conhecimento matemático em ação – Versão do aluno. Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2008. 100 p.

NEVES, Regina da Silva Pina. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Atividades de apoio à aprendizagem – AAA5:** diversidade cultural e meio ambiente: de estratégias de contagem às propriedades geométricas – Versão do aluno. Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2008. 88 p.

NEVES, Regina da Silva Pina. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR II Matemática Atividades de apoio à aprendizagem – AAA6:** matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos – Versão do aluno. Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2008. 84 p.

PONTES, Helaine Maria de Souza; FINCK, Celia Brandt; NUNES, Ana Luiza Ruschel. O estado da arte da teoria dos registros de representação semiótica na educação matemática. In: **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 297-325, jan. 2017.

PROGRAMA GESTÃO DA APRENDIZAGEM ESCOLAR – GESTAR II**.** Matemática: **Caderno do formador**. Brasília. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica,2008. 90p.

SOUZA, Izabel Cristina Izidoro de. **O Princípio do Contexto de Gottlob Frege: Uma Análise Sistemática**. 2007. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-Graduação em Filosofia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. Jogo de quadros na perspectiva de Régine Douady. In: **Revemat.**, Florianópolis, v. 9, n. 2, p. 145-165, jan. 2014.