INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

RESOLVENDO PROBLEMAS ALGÉBRICOS UTILIZANDO AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

PATRICIA PINHEIRO DA SILVA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues.

IFSP
São Paulo 2021

PATRICIA PINHEIRO DA SILVA

RESOLVENDO PROBLEMAS ALGÉBRICOS UTILIZANDO AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação de mestrado apresentada em 01 de dezembro de 2021 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Orientador e Presidente da Banca:
Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues
IFSP – Câmpus São Paulo

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva
UFABC – Santo André / SP

Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas
IFSP – Câmpus São Paulo

São Paulo, 01 de dezembro de 2021.

"Plante um pensamento, colha uma ação;

plante uma ação, colha um hábito;

plante um hábito, colha um caráter;

plante um caráter, colha um destino."

Stephen Covey

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por permitir a realização desse sonho.

A minha filha, Daphynie, por entender e aceitar a ausência da mãe, em especial aos domingos, e por estar junto comigo em toda essa trajetória.

Aos meus pais, Luiz e Teresinha, que sempre me apoiam e estão ao meu lado, incentivando e participando de todo o processo.

À minha família, irmã, cunhada, tios e tias, primos e primas que estiveram ao meu lado nesse momento e que fizeram a diferença para seguir em frente.

Ao meu orientador Mestre Leandro Albino Mosca Rodrigues, que além de ministrar três disciplinas à nossa turma, com maestria e dedicação, abriu um tempo de seu doutorado para dedicar-se a me orientar, e o fez de forma honrosa e paciente.

A todos os professores e professoras do PROFMAT que nos conduziram de maneira brilhante, compreendendo nossas aflições e nos guiando e apoiando sempre. Em especial, aos professores Emiliano, Amari, Luciano, Valéria, Lucas e Henrique que nos preparam maravilhosamente para o ENQ.

Aos meus colegas de curso que foram essenciais em todos os momentos. Nossas conversas, nossas trocas de experiências, nossos estudos em grupo foram, realmente, algo que me fez crescer e seguir essa caminhada. Em especial, minha amiga Viviane Olivares, que se não fosse seu apoio, seu conhecimento, sua paciência e sua determinação tenho certeza de que não teria aprendido tanto com esse mestrado. E ao Alexander, que nessa época de pandemia foi de um apoio muito grande.

Aos professores da banca, meu muito obrigada por fazerem parte desse momento tão importante na finalização desse trabalho.

Aos meus alunos queridos do colégio Anglo Aldeia da Serra que acenderam na professora a oportunidade de voltar aos estudos e fazer o mestrado. E aos meus amigos, em especial desse colégio, que me apoiaram incansavelmente em todos os momentos dessa decisão e estiveram ao meu lado sempre. Aproveito para agradecer de coração minhas amigas, Diélen e Aishá, que reservaram um tempo de seus dias corridos para revisarem esse texto.

Agradeço também à Karina Rios, minha psicóloga e grande amiga que me ajudou a enxergar a importância da conclusão desse curso em momentos que não conseguia ter essa visão.

Em especial, agradeço ao meu namorado Ezequiel Dias, por chegar no meio do processo e estar ao meu lado em todos os momentos, segurar minhas mãos nos mais difíceis e comemorar cada linha escrita nessa dissertação.

A todos minha eterna gratidão por fazerem parte desse sonho.

RESUMO

Neste trabalho relacionamos a álgebra e a geometria, resolvendo algumas expressões algébricas, por meio das construções geométricas. Através da história da disciplina de Desenho Geométrico, fizemos um levantamento de como foi o seu desenvolvimento no ensino brasileiro. Apresentamos, ainda, algumas construções elementares, que são a base das construções geométricas e necessárias para a resolução dos problemas que serão desenvolvidos. Em todos os problemas apresentados, é feita a construção com um roteiro e uma justificativa. E, por fim, apresentamos uma sugestão de sequência didática para que o professor possa utilizar em suas aulas e aproveitar melhor nosso trabalho.

Palavras-chave: Desenho Geométrico, Expressões Algébricas, Construções Geométricas, História da Matemática, Geometria.

ABSTRACT

In this work we relate Algebra and Geometry, resolving some algebraic expressions, by geometric constructions. Across the history of Geometric Drawing History, we did survey of how it was developed in the Brazilian education. We also present some constructions, that are the base of geometric constructions and necessary to resolve the problems that will be developed. In all the problems showed, the construction is done with one script and one justification. And, at last, we present a suggestion of a didactic sequence in order to provide the teacher a use possibility in the class routine and take the best of our work.

Keywords: Drawing Geometric, Albebraic Expressions, Geometric Construction, Mathematics History, Geometry

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> "O Desenho Geométrico é um jogo de raciocínio matemático, que não só lhe permitirá resolver uma série de problemas abstratos de Matemática, com uma teoria muito pequena, como também desvendar uma infinidade de mistérios da Natureza, que é muito geométrica! " (Carlinhos Marmo)

Aprender a manusear materiais como régua e compasso nos capacita, não só a aprender Geometria, como na coordenação motora e na criatividade. Abordar o assunto Desenho Geométrico foi uma maneira de mostrar a importância dessa disciplina bem como um pouco do que foi o trabalho da autora ao longo de 7 anos.

Ao iniciar os trabalhos, como docente nessa disciplina, foi fácil notar que pouco somos preparados para ensiná-la. O conhecimento e o querer aprender foram necessários para que fosse possível trabalhar com excelência e passar para os alunos a importância de se conhecer construções geométricas. Algo que contribuiu muito ao se pensar na proposta desse trabalho foi a disciplina de Geometria do PROFMAT. Ela apresentou muitas construções e suas justificativas, nos preparando melhor para esse mundo das construções.

> “A geometria é a conexão didático-pedagógica mais eficiente que a matemática possui, ela é interligada com a aritmética e com a álgebra, pois os objetos e relações correspondem aos das outras, assim conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser facilitados pela geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aluno.” (Piaseski, 2010)

Ao longo desses anos, ensinar Desenho Geométrico permitiu que a autora descobrisse um novo mundo e percebesse a importância da disciplina quando o mesmo assunto era ensinado em Geometria. Associar o visual com a teoria tornava-se mais simples e real para os alunos.

As construções elementares são de fundamental importância, mas aplicá-las em problemas torna-se algo mais interessante. E foi pensando nessas aplicações que surgiu a proposta desse trabalho: desenvolver expressões algébricas utilizando régua e compasso, e tornando mais visual e perceptível ao aluno a importância das construções geométricas.

A resolução de problemas também foi algo que sempre encantou a autora. As diversas maneiras de se resolver um mesmo exercício apresentado em aula chamou a atenção da autora durante seu ensino da disciplina de Desenho Geométrico. Os alunos acabavam apresentando outras maneiras de construir os problemas dados em aula e isso era algo que além de nos ensinar, nos permitia enxergar o exercício com outros olhos.

> “Você terá contato com problemas intrigantes, desafiadores, mesmo que a maioria não seja difícil. Mas é certamente gostoso resolver algo novo enquanto ler problemas que já conhecemos é definitivamente aborrecido.” (Wagner, 2015)

Para iniciar esse trabalho, a autora começa com uma busca histórica para entender quando o Desenho Geométrico surge na História da Matemática, bem como quando ele entra no currículo nacional. A importância da disciplina fica marcada na História, então nada mais justo que ir em busca desse conhecimento.

> “Foi das necessidades da sociedade, quando o homem teve que delimitar terras, que teve origem uma geometria caracterizada pelo traçado de desenho de formas, fórmulas, cálculo de medidas de comprimento de área, volume, etc. Foi nessa época que se desenvolveu a noção de figuras geométricas como, retângulo, quadrado e triângulos. Outros conceitos geométricos, como noções de paralelismo e perpendicularidade teriam sido sugeridas pela construção de muros e moradias.” (Piaseski, 2010)

Pensando também em auxiliar o leitor, a autora decidiu apresentar uma sequência de atividades para que o professor de Matemática possa aproveitar, em suas aulas de Geometria, uma proposta diferenciada de visualizar os problemas algébricos.

Visando a apresentação da proposta acima, o trabalho foi organizado em 4 capítulos, complementados pelas Introdução, Considerações Finais e Referências Bibliográficas.

A Introdução apresenta o porquê da escolha do tema do trabalho, assim como a metodologia utilizada no trabalho. Essa metodologia foi baseada em uma pesquisa exploratória, realizando levantamento de informações sobre os problemas algébricos que poderiam ser construídos geometricamente. Esses levantamentos foram feitos utilizando referencias como dissertações, artigos, livros e afins.

O Capítulo 1 descreve o que essa disciplina nos deixou de legado ao longo dos anos em nosso currículo nacional. Apresenta a história da disciplina desde os tempos mais remotos e sua utilização em tempos mais atuais, mostrando como a desvalorização dessa disciplina vem acontecendo, comparando a sua participação em documentos atuais, como a BNCC.

O Capítulo 2 vem preparar uma base de conhecimento de construção geométrica, abordando as construções necessárias para a realização da proposta do trabalho, chamadas de Construções Elementares. Essas construções apresentam Roteiro, Construção e Justificativa para que o leitor entenda como é realizada cada construção. Toda a teoria por trás de cada justificativa poderá ser encontrada em livros didáticos, como Fundamentos de Matemática Elementar, volume 9, Dolce (1995), além de dissertações que serão recomendados ao longo do capítulo, visto que esse não é foco do trabalho. A justificativa aqui encontrada será da construção geométrica.

O Capítulo 3 apresenta alguns problemas algébricos que serão resolvidos de maneira completa, para que o leitor entenda bem o conceito trabalhado em cada um deles. Esses problemas estão baseados no livro *Uma introdução às construções geométricas* de Eduardo Wagner, dedicado a alunos da OBMEP, e do artigo *Resolução Geométrica da Equação do 2º grau* de Nelson Tunala, apresentado na Revista do Professor de Matemática. A escolha dos problemas abordados foram aqueles que mais são trabalhados ao longo do Ensino Fundamental II, e são de suma importância no conhecimento dos alunos.

O Capítulo 4, o último do trabalho, aborda uma sequência de atividades propostas aos professores que tenham interesse de trabalhar esses problemas em sala de aula. Essa sequência didática vem apresentada em aulas, onde cada aula será dividida em: conteúdo, habilidades específicas da BNCC, objetos do conhecimento, objetivos, materiais utilizados e o desenvolvimento da aula. Além disso, um roteiro que o professor poderá utilizar em sua aula.

1 HISTÓRIA DAS CONTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesse capítulo, apresentaremos um histórico de onde surgiram as construções geométricas, bem como a história do ensino dessa disciplina no Brasil até os dias de hoje.

1.1 Surgimento das Construções Geométricas

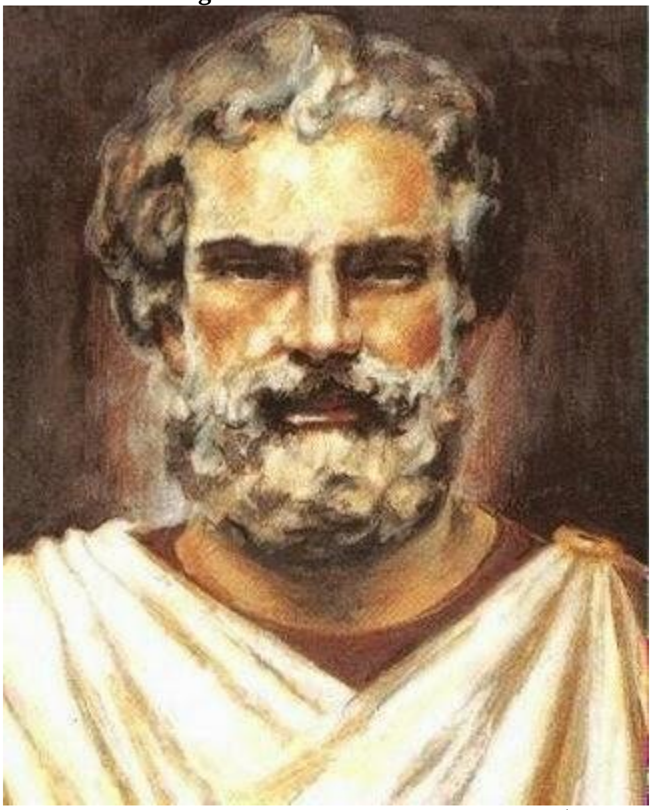
A história das construções geométricas surge junto com a geometria. Piaseski (2010) nos relata que no Antigo Egito, o rio Nilo transbordava e apagava toda a demarcação das terras realizadas no ano anterior. Para que o agricultor soubesse onde suas terras estavam e para que o governo conseguisse fazer as cobranças de impostos, surgem os "puxadores de corda", que utilizando de cordas entrelaçadas e conceitos geométricos, faziam as novas demarcações, e assim, os agricultores tinham de novo suas terras e o governo podia, mais uma vez, realizar suas cobranças. Os conhecimentos e conceitos geométricos utilizados eram os de retângulo e triângulo retângulo.

Os egípcios fizeram uso da Geometria Empírica. Salgado (2013) nos diz que essa Geometria trata da experiência sensorial, não se preocupando com a demonstração formal, sendo uma "Geometria desenvolvida apenas para atender as necessidades econômico-sociais".

De acordo com Lamphier (2004), é na Grécia que surgem as construções geométricas. Utilizando de conceitos aprendidos no Egito, Tales (cerca de 625a.C. – 558 a.C.) traz para a Grécia alguns conceitos importantes para a Geometria. Em suas viagens, uma de suas curiosidades foi sobre como os egípcios construíram as pirâmides sem saberem a altura. Dessa forma, ele buscou deduzir técnicas para determinar a altura das pirâmides, e assim o fez, utilizando uma vara e o conceito de semelhança de triângulos. Tales, então, acaba trazendo do Egito alguns conceitos importantes no estudo da Geometria. São eles:

1. O círculo é dividido pelo triângulo;
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
3. Os ângulos verticais formados por duas retas concorrentes são iguais, ou seja, opostos pelo vértice;
4. Dois triângulos são congruentes se eles tiverem dois ângulos congruentes e serem congruentes os respectivos lados entre os ângulos congruentes.
5. Um ângulo em um semicírculo é um ângulo reto.

Figura 1.1 - Tales de Mileto



Fonte: Retirada do site Práticas Pedagógicas[1]

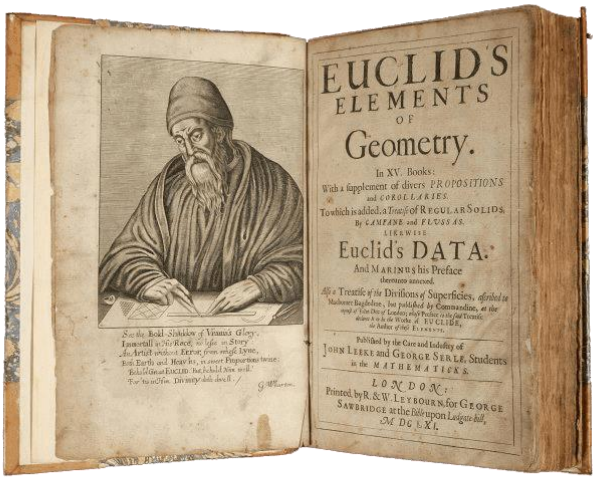
A Grécia foi um berço de pensadores, sendo Tales um dos matemáticos mais conhecidos. Um outro pensador grego muito importante para a Geometria foi Pitágoras (570 a.C.). Wagner (2015) diz que Pitágoras afirmava: "Tudo é número", desse modo, tudo na natureza seria relacionado à Matemática. Para esse matemático grego, os números representavam harmonia e ordem, ou seja, os números eram a essência de todas as coisas. De acordo com Piaseski (2010), devido à genialidade do pensador, um importante cálculo matemático levou o seu nome: Teorema de Pitágoras. Além disso, segundo Fantini (2010), ele introduziu a necessidade de demonstrar os conhecimentos matemáticos.

Aproximadamente dois séculos depois, Euclides organiza todos os conhecimentos matemáticos da época em um tratado composto por 13 livros, nomeado como *Os Elementos.* Esse tratado, de acordo com Costa (2013), só perde para a Bíblia em número de edições, além de ser um dos livros mais influentes de Matemática de todos os tempos. A organização desses livros foi algo tão grandiosa, fazendo com que Euclides fosse considerado o inventor do método axiomático conforme aponta Salgado (2013). Esse método significa que, por meio de algumas afirmações simples admitidas verdadeiras, são demonstradas outras afirmações mais complexas.

---

[1] Disponível em: < http://praticaspedagogicas.com.br/blog/wp-content/uploads/2014/04/tales.jpg > Acessado em 17/02/2021 às 15h53

Figura 1.2: Livro: Os elementos



Fonte: Retirada do site Chief of Design[2]

Abaixo temos 5 postulados apresentados por Euclides no seu primeiro livro, que de acordo com Gomes (2017) e Fantini (2009) são a base de toda a geometria que hoje conhecemos como Geometria Euclidiana.

P.1 É possível traçar uma reta passando por dois pontos dados;

P.2 É possível prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;

P.3 É possível traçar um círculo com centro em qualquer ponto e com qualquer raio;

P.4 Todos os ângulos retos são iguais;

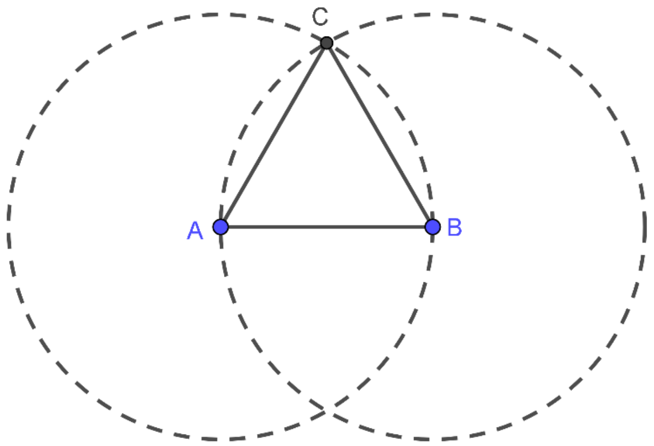
P.5 Se uma linha reta intercepta duas outras linhas retas e determina de um mesmo lado ângulos internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão no lado que estão os ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.

Ainda de acordo com Gomes (2017), nessa obra, Euclides não menciona o uso da régua e compasso, porém, seus três primeiros postulados, como vistos acima, mostram-nos que o uso dessas ferramentas será importante. Vale ressaltar que as construções geométricas já existiam muito antes dessa obra, todavia, é nela que as construções ganham um terreno mais firme e consistente, pois além de nos mostrar em seus postulados, Euclides estabelece outros conceitos importantes da Geometria, como lugar geométrico. Além disso, a primeira proposição do livro nos apresenta um problema de construção geométrica: "Sobre um segmento, construa um triângulo equilátero". Isso mostra que a construção geométrica era uma importante ferramenta na época, podendo ser considerada uma “academia” para provar um teorema geométrico.

---

[2] Disponível em < https://www.chiefofdesign.com.br/proporcao-aurea > Acessado em 17/02/2021 às 17h03

Figura 3: Repesentação Geométrica da primeira proposição.



Fonte: Autora

Essa Geometria apresentada por Euclides permite-nos comparar dois objetos, porém, não conseguimos comparar “o quanto” se diferem. Isso porque seus conceitos numéricos eram bem limitados na época, e ademais, a régua não possuía escala e o compasso era colapsante. Mas, mesmo com esses conceitos “limitados”, os gregos conseguiam determinar a soma, a subtração, o produto, o quociente e, até a raiz quadrada de segmentos dados, sendo considerado dado tudo aquilo que é apresentado previamente.

Depois de Euclides, surgiram três problemas geométricos, considerados os três problemas clássicos da antiguidade, que cativaram e intrigaram muitos matemáticos da época. São eles: a quadratura do círculo, a duplicação do cubo e a trisecção do ângulo. Porém somente no século XIX, matemáticos da época comprovaram que esses problemas não eram solúveis apenas com a utilização de régua e compasso.

A Geometria vem sendo construída ao longo dos anos, e a construção geométrica acompanha essa evolução, pois ambas estão intimamente ligadas, já que é a Geometria que nos dá os conceitos para que possamos aplicá-la. Sabemos que por muito tempo as construções serviram de demonstrações geométricas, e, hoje, elas nos dão o embasamento para muitas dessas demonstrações.

A seguir, falaremos um pouco mais sobre a importância da construção geométrica no ensino, em especial, no Brasil.

1.2 História das construções geométricas no ensino brasileiro

Nessa parte, trataremos de contar a história da disciplina Desenho Geométrico no ensino brasileiro, desde seu início até os dias atuais. Falaremos também sobre a importância do ensino da construção geométrica para a melhor compreensão da Geometria e da Matemática, e como ela foi sendo realizada nas escolas.

Por cerca de 200 anos, no Brasil, o ensino da matemática e ciências era desconsiderado, pois a educação era mais filosófica e humanística, visto que era responsabilidade dos jesuítas. Porém, no final do século XVII, Portugal, visando proteger e defender a terra conquistada, resolve colocar o ensino de ciências, especialmente de matemática e desenho nas academias militares, para que formasse pessoal capacitado em fortificações militares.

Dessa forma, a partir de 1738, o ensino de ciências, torna-se obrigatório em todo território brasileiro. Com isso, dizemos que o Desenho Geométrico começa a surgir no nosso ensino. Ele era dividido em Desenho Geométrico, Desenho Projetivo e Desenho Arquitetônico, com o intuito de desenvolver técnicas de fortificação e arquitetura, de acordo com Machado (2012), com o objetivo de formar engenheiros, cartógrafos e matemáticos capazes de construir fortificações para a defesa dos domínios ultramarinos.

Em 1808, com a chegada da corte portuguesa ao Brasil, começam as mudanças no ensino brasileiro. E, em 1811, foi criada a *Academia Real Militar* que consolidou "o ensino sistemático das matemáticas, ciências e da técnica no Brasil" (Zuin, 2001, p.64). Porém, como nos diz Zuin (2001), poucos eram os alunos que possuíam acesso à esse ensino, somente filhos da pequena burguesia urbana. De acordo com Machado (2012), a disciplina Desenho, em 7 anos de curso, só não era estudada em 2 anos, o que nos mostra sua importância na formação do engenheiro militar brasileiro, porém, isso era visto somente no interior das escolas militares.

Em 1816, com a chegada da Missão Francesa ao Brasil, o ensino no Brasil passa a usar o ensino da França como um espelho e assim, o Desenho recebe a orientação para ser tratado como linguagem artística, sendo considerado como ciência somente nas escolas militares.

Com a Revolução Industrial (1820 – 1840) ocorrem mudanças tecnológicas consideráveis no mundo todo e essa mudança acaba exigindo mão de obra qualificada, que saiba trabalhar com essas novas tecnologias. No Brasil, ocorre o surgimento de indústrias e surge também a necessidade do trabalho com máquinas, assim, o estudo das ciências se torna indispensável no ensino, e com isso, o Desenho Geométrico foi considerado primordial para o momento.

Figura 4: Prédio situado no Largo Real da Sé Nova, atual de São Francisco, Rio de Janeiro, onde funcionou a antiga Academia Real Militar, em 1810.

Fonte: Retirada do site do Portal do Governo Brasileiro[3]

Uma figura importante para o nosso sistema educacional foi o Marquês de Pombal. Ele promoveu alterações na educação e passa essa responsabilidade para o Estado. No Brasil, sua influência aparece com a criação das *Aulas Régias*, com duplo objetivo de adequar o ensino brasileiro às novas ideias circulantes pela Europa e combater o monopólio da Igreja, de acordo com Machado (2012). Durante essa reforma, o Desenho esteve ligado à disciplina de Geometria.

Figura 5 : Marquês de Pombal

Fonte: Retirada do site Toda Matéria[4]

De acordo com Trinchão (2008, p.137), "o Desenho se fez presente no Seminário de Olinda, fundado por Azevedo Coutinho, em 1800, no Recife, que pode ser considerada a primeira aula para o ensino regular do Desenho no país". E ainda, o Desenho foi considerado, nessa época, como Aula Maior. Aula essa que habilitava os alunos a prestarem os exames preparatórios para o ingresso em cursos superiores existentes no Império, mostrando, assim, o reflexo da influência da Reforma Pombalina sob a educação brasileira.

[3] Disponível em: < http://mapa.an.gov.br/index.php/menu-de-categorias-2/245-academia-militar-e-de-marinha > Acessado em 17/02/2021 às 17h11

[4] Disponível em: < https://www.todamateria.com.br/marques-de-pombal > Acessado e, 17/02/2021 às 17h17

Em 1827, é outorgada no Brasil a Lei de 15 de novembro, por meio da qual surge a criação das primeiras escolas primárias do Brasil. Apesar do conhecimento geométrico ser muito importante, foi previsto nessa lei que os professores primários ensinariam a ler, escrever e contar, descartando a Geometria nos anos primários. Com a definição da escolarização primária, dá-se início ao processo de transformação do ensino secundário, fragmentado, nessa época, pelas Aulas Maiores, da Reforma Pombalina.

Com o intuito de organizar esse ramo de ensino, em 1837, surgem as *Escolas Normais,* essas com a responsabilidade de formar o professorado que atuaria no ensino primário; os *Liceus Provinciais*, esses com o objetivo de garantir a formação do candidato ao ensino superior e o *Colégio Pedro II*, colégio destinado à elite burguesa e criado com o intuito de servir de modelo ao ensino secundário. Nesse momento, o Desenho passa a ser ensinado também na esfera pública, já que foram convocados professores militares para lecionar, difundindo a escolarização técnico-militar.

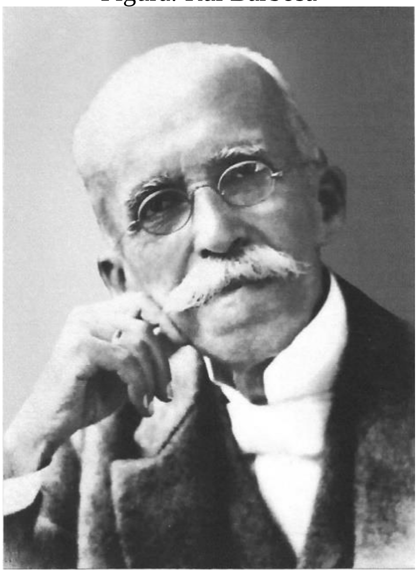
Surge, então, na França, a disciplina Desenho Linear, que foi considerado um método de ensino de Desenho. Um de seus principais pressupostos é que além do uso do material de Desenho, também fossem enfatizadas as construções à mão livre, buscando-se a precisão do desenho, ajustando o olho e a mão. Seu propósito estava voltado para o ensino científico do Desenho e à sua aplicação na construção e reprodução de objetos, segundo Machado (2012). Assim como na França, essa disciplina também foi incluída no ensino brasileiro.

A partir da criação dessas instituições citadas acima, é importante ressaltar que, além de ensinarem a ler, escrever e contar, no ensino primário, passa-se a ensinar também a desenhar, o que nos mostra a importância que o Desenho tem na formação cultural do povo brasileiro.

Vale ressaltar que nas primeiras décadas do século XIX, devido à modernização brasileira, surge a necessidade de construção de estradas e fábricas, bem como a urbanização de cidades. Portanto, visando formar pessoas com habilidades para que a modernização fosse realizada, surge o curso de Engenharia Civil, destacando o ensino de Desenho Geométrico na matriz curricular e sendo considerado essencial para a formação de engenheiros civis.

No ano 1882, Rui Barbosa apresentou um projeto para que o ensino primário e secundário tivesse uma reformulação. Nessa proposta, Desenho passaria a compor o quadro de saberes do ensino primário. Para ele, Desenho era fundamental para a formação do cidadão e seria a base da industrialização. Rui Barbosa se preocupava com o atraso do ensino brasileiro em relação a outros países, e por isso aconselhou a formação de um sistema nacional de educação. Porém esse projeto não chegou a ser discutido na Câmara dos Deputados, pois nessa época a economia brasileira ainda era muito agrícola, não tendo a intenção de focar a educação nos fins utilitários propostos. Mesmo assim, pelos dizeres e propostas apresentadas por Rui Barbosa, podemos dizer que o Desenho passou a ser mais valorizado nesse final do século XIX.

Figura: Rui Barbosa



Fonte: Retirada do site da Academia Brasileira de Direito do Trabalho[5]

Nas primeiras décadas do século XX, a educação voltou a ser palco de discussões e reformas. Nessa época, o ensino de Desenho era baseado em construções básicas de figuras geométricas e do Desenho de Observação, ressaltando que nem todos tinham acesso a essa educação, já que nesse período a educação era restrita a poucos.

A partir da década de 30, surge a Reforma Francisco Campos. Essa dividiu o ensino em dois ciclos: fundamental e complementar. Na portaria de 30 de junho de 1931, o Desenho passa a ser oficializado no currículo brasileiro, presente em todas as séries do ciclo fundamental e com cargas diferenciadas no ciclo complementar. Nessa reforma, o Desenho foi dividido em quatro modalidades: Desenho do Natural, Desenho Decorativo, Desenho Geométrico e Desenho Convencional.

Volta-se a falar em reformas educacionais somente em 1940, com o governo Getúlio Vargas. Entre 1942 e 1946, foram decretadas as *Leis Orgânicas de Ensino*, conhecidas como Reforma Capanema. Mudou-se novamente o ensino brasileiro, sendo dividido em ensino primário, que passa a ter quatro anos de duração, ensino secundário, agora com duração de três anos e surge também o ensino industrial, comercial, normal e agrícola. O Desenho continua sendo parte do currículo nacional; porém, agora dividido em três modalidades: Natural, Decorativo e Geométrico. E para as séries finais foram incluídas a noção de Desenho Projetivo e de perspectiva. Ressalta-se, também, que o Desenho, no ensino primário, passa a ser uma

[5] Disponível em: < http://www.andt.org.br/academicos/ruy-barbosa > Acessado em 17/02/2021 às 22h21

disciplina “válida e obrigatória” do currículo nacional. De acordo com Machado (2012) “as décadas de 1930 a 1950 constituíram os “anos de ouro” dessa disciplina em nosso país”.

Em 1951, após a Reforma Capanema, os programas curriculares foram redefinidos. No entanto, houve poucas mudanças no currículo, talvez a maior diferença tenha sido em Desenho Geométrico, pois surge uma nova proposta, a de ser mais instrutivo que educativo, sendo base para o ensino de outras disciplinas, como, por exemplo, a Matemática. Observando em nível nacional, tudo indica que esse foi o último programa oficial de Desenho publicado pelo Ministério da Educação.

Nessa mesma época, surge o Movimento da Matemática Moderna (MMM), tendo como objetivo a renovação do ensino da Matemática trabalhada na escola básica com o conhecimento matemático produzido por pesquisadores científicos. Esse movimento internacional tinha como orientação trabalhar uma nova Geometria, baseada em transformação, o que afastava ainda mais o Desenho Geométrico do currículo, visto que ele se baseia na Geometria Euclidiana.

As alterações com a disciplina de Desenho continuam a aparecer. Surge, em 1961, a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional). Machado (2012) afirma que essa LDB “imprimiu os primeiros indícios de desvalorização da disciplina de Desenho no país”. Lembrando que, até então, Desenho Geométrico vinha se tornando uma disciplina complementar, nessa lei ela aparece como obrigatória complementar, assim, permitindo que as escolas descartassem essa disciplina de seu currículo e, aos poucos, que os vestibulares retirassem de sua programação principal. Apesar dessa incerteza no currículo, o Desenho ainda permaneceu em vários colégios públicos até meados da década de 70.

Não bastando essa desvalorização da disciplina, na promulgação da lei 5692 da LDB da Educação Nacional de 1971, Desenho Geométrico é excluído do currículo obrigatório, figurando somente como disciplina optativa. Porém o Desenho propriamente dito começa a ocupar espaço na disciplina de Educação Artística (EA), o que fazia com que alguns professores de Desenho Geométrico assumissem as aulas de EA. De acordo com Machado (2012), o que se percebeu é que o direcionamento dado à disciplina Desenho ficou bem confuso nessa Lei, ora estava voltado para a área artística, ora voltado para as Ciências (Matemática, no caso). O que se percebe, nessa época, é que Desenho Geométrico deixa de ser cobrado em vestibulares de Arquitetura e Engenharia, desvalorizando ainda mais a disciplina.

Esse cenário permanece por alguns anos, até que em 1980, alguns autores tentam trazer de volta essa disciplina. Como? Lançando livros didáticos por editoras importantes, porém, essa volta acabou não se concretizando. Apesar de algumas escolas retomarem o estudo de Desenho Geométrico, não foi suficiente para alavancar e trazer a disciplina à tona. Mas, de acordo com

Montenegro apud Costa (2013), os professores do ramo começaram o movimento pelo seu retorno; todavia, sem estratégias concretas, o retorno não aconteceu.

Na final da década de 90, surgem os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), diretrizes elaboradas pelo Governo Federal e separadas por disciplinas. No PCN de Matemática, ressurgem as construções geométricas.

De acordo com Costa (2013), os PCNs reforçam a importância das construções geométricas no currículo matemático para o desenvolvimento do conteúdo dessa disciplina, mostrando a importância da Geometria e seus conceitos para seu aprendizado. Eles não falam diretamente sobre o Desenho Geométrico, no entanto, apresentam, em vários momentos, a utilização de materiais como régua e compasso, destacando a importância do Desenho Geométrico para o ensino-aprendizagem de Matemática. Todavia o que se percebeu, é que mesmo com as novas propostas dos PCNs, o ensino de Desenho Geométrico acabava sempre sendo uma "receita" de passos, sem contextualização, e, assim, fazendo com que professor e aluno perdessem o interesse. Foi isso que Machado (2012) percebeu na diretriz de Matemática. Ela observa que não há um ressurgimento do Desenho Geométrico, citando que "existem apenas alguns poucos indicativos". Dessa forma, podemos dizer que se pensa na construção como base para o ensino de Geometria Plana e não como resolução gráfica de problemas geométricos, que deveria ser sua principal característica.

O que se observa é que não há o retorno da disciplina de Desenho Geométrico, e sim a retomada de construções geométricas dentro do currículo de Matemática, ou seja, ele deixa de fazer parte do currículo de Educação Artística e volta a fazer parte do currículo de Matemática.

Desse modo, é fácil perceber que o Desenho Geométrico e a Geometria estão lado a lado, e que com as disciplinas juntas é mais simples o aluno perceber e compreender a contextualização Matemática. De acordo com Costa (2013), o assunto Desenho Geométrico vem sendo discutido há um bom tempo e, atualmente, ele é considerado uma disciplina independente, ou seja, a escola que desejar tê-la em seu currículo pode assim fazer.

O que sabemos é que no ano de 2017 surge a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) com uma proposta de inovação no ensino brasileiro. Para começarmos essa parte, explicaremos um pouco sobre a BNCC.

O que é BNCC?

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2018, p.7).

A ideia principal da BNCC é que esse documento se torne base para todas as redes de ensino educacionais garantindo, numa esfera nacional, um patamar comum de aprendizagem. Para que isso aconteça, é necessário que um aluno da escola básica adquira como aprendizagem básica as dez competências gerais. De acordo com Brasil (2018), competência é a mobilização de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana.

Cabe a nós, nesse momento, verificar se o Desenho Geométrico aparece nesse novo documento que, no Brasil, torna-se Base Comum a toda área educacional. Vale ressaltar que estamos pensando no Desenho Geométrico como construções geométricas. Outra informação importante é que levaremos em consideração o Ensino Fundamental – Anos Finais, isto é, alunos que cursam do 6º ao 9º ano da Educação Básica.

Durante a leitura da BNCC, verificamos que Desenho Geométrico aparece na parte de Matemática. Ao realizar a leitura, nessa área, e procurando como as construções geométricas aparecem nesse documento, deparamo-nos, pela primeira vez, com a palavra construção, no sentido de desenhar. Ela vem na parte onde se aborda a unidade temática Geometria da seguinte maneira: "as ideias fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência", Brasil (2018). Ou seja, a construção geométrica é parte integrante da Geometria, em especial.

Encontramos, na própria BNCC, um quadro onde é dividido o objeto de conhecimento e a habilidade que se espera atingir quando o assunto é trabalhado em sala de aula. Ao ler esse quadro, já no 6º ano, o Desenho Geométrico se faz presente. Ele aparece na parte de Geometria, onde a ideia de construção inicia com a construção de retas paralelas e perpendiculares, utilizando réguas e esquadros, e, como estamos no século XXI e temos a tecnologia a nosso favor, também surge a oportunidade de trabalhar com softwares geométricos. Porém também se faz presente em Grandezas e medidas, e a ideia da construção surge na medida de ângulos com o uso do transferidor.

No quadro do 7º ano, encontramos a construção geométrica em Geometria nas simetrias, na circunferência, com a utilização do compasso, e construção de triângulos, em conjunto com as propriedades dos tais, como, por exemplo, utilizar a construção para verificar a soma dos ângulos internos de um triângulo. E, também em Grandezas e medidas, novamente como ângulos e medidas, além de desenho de plantas baixas.

No 8º ano, começam as chamadas construções fundamentais para o Desenho Geométrico, assunto que será tratado no nosso próximo capítulo. São elas: construção de ângulos de 90º, 60º, 45º e 30º, mediatriz e bissetriz. Aparecem, ainda, as simetrias como transformações geométricas, assunto que já havia sido apresentado no 7º ano. Além disso, dessa vez as construções aparecem somente em Geometria. Na área de Grandezas e medidas aparece somente o uso de fórmulas aplicadas à Geometria.

Seguimos, e no último ano do ensino Fundamental – Anos Finais, não vemos a presença de construção geométrica propriamente dita. Na área de Geometria, sobre polígonos regulares, vimos que aparece algo, mas nada com muita ênfase, podendo inclusive usar o recurso tecnológico. Outro assunto, que é novidade, são as vistas ortogonais, assunto que podemos associar a Desenho Geométrico no que diz respeito a desenhar objetos em perspectiva. Mesmo não sendo tão explícita, podemos verificar que a construção geométrica dá um suporte muito grande para que novos conteúdos de Geometria sejam compreendidos.

Quadro 1.1 – Habilidades relacionadas ao Desenho Geométrico na BNCC do Ensino Fundamental – Anos Finais

Ano	Unidade Temática	Objetos de Conhecimento	Habilidade
6º	Geometria	Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
7º	Geometria	Simetrias de translação, rotação e reflexão	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
8º	Geometria	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

9º	Geometria	Polígonos regulares	(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Fonte: próprio autor

Observamos também, durante a leitura da BNCC do Ensino Médio, que a construção geométrica não é mencionada em nenhuma habilidade. Ela é feita como sugestão de atividade na comprovação de algum assunto, podendo ser feito com o uso de softwares, como, por exemplo na habilidade EM13MAT402, abaixo citada:

> Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (BRASIL, 2018)

Concluímos que, a disciplina Desenho Geométrico não tem feito mais parte do currículo nacional, apesar de algumas escolas ainda adotarem essa disciplina como conteúdo complementar. Com a BNCC, ela se reduz a uma disciplina complementar à Geometria, com algumas poucas construções geométricas, deixando assim, como Alves (2017, p.15) nos diz: “um déficit significativo na aprendizagem da Geometria durante a vida escolar dos alunos e comprometendo toda uma trajetória de conhecimento geométrico”. Afinal, não é só a construção geométrica que o aluno está deixando de aprender e sim, todos os benefícios que ela traz junto com seu aprendizado.

2 CONSTRUÇÕES ELEMENTARES

Neste capítulo, apresentaremos as construções que chamaremos, e numeraremos, como Construções Elementares (CE). Elas serão de fundamental importância para a resolução dos problemas algébricos que serão propostos no próximo capítulo.

Os conceitos de Geometria Plana Euclidiana, aqui apresentados, não serão demonstrados e podem facilmente ser encontrados nos livros Fundamentos de Matemática Elementar, volume 9, Dolce (1995).

Apresentaremos as construções de acordo com a referência nos materiais de Wagner (2015), Lugli (2014), Pimentel (2013) e Varhidy (2010). As demonstrações que julgarmos necessárias para nosso estudo serão feitas passo a passo. As que não forem apresentadas podem ser encontradas nas obras referenciadas acima.

Consideraremos algumas construções já conhecidas, como: construção de uma reta dados dois pontos (sendo essa feita exclusivamente com régua), construção de uma circunferência (sendo essa feita com a utilização do compasso), transporte de segmento e adição e subtração de segmentos.

Apesar de Wagner (2015) fazer a utilização de transferidor e esquadros, vale ressaltar que a proposta desse trabalho será a utilização somente de régua (não graduada) e compasso (não colapsante). Essa proposta é apresentada por Varhidy (2010 apud Marmo, 1964, p. 13 a 17), como primeiro postulado da proposta do curso de Marmo.

A sequência e a numeração escolhida para esse trabalho será:

CE1a – Reta perpendicular a uma reta por um ponto exterior a ela

CE1b – Reta perpendicular que passa por um ponto pertencente à reta

CE2 – Reta paralela que passa por um ponto fora da reta

CE3 – Reta mediatriz

CE4 – Transporte de ângulos

CE5 – Bissetriz

CE6 – Construções de ângulos notáveis

CE7 – Multiplicação de dois segmentos

CE8 – Divisão de dois segmentos

Abaixo, apresentaremos o passo a passo de cada construção, que chamaremos de roteiro, bem como um esboço da construção e a sua justificativa.

CE1a) – Perpendicular a uma reta por um ponto exterior a ela

Sendo dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, construir uma reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P.

Roteiro:

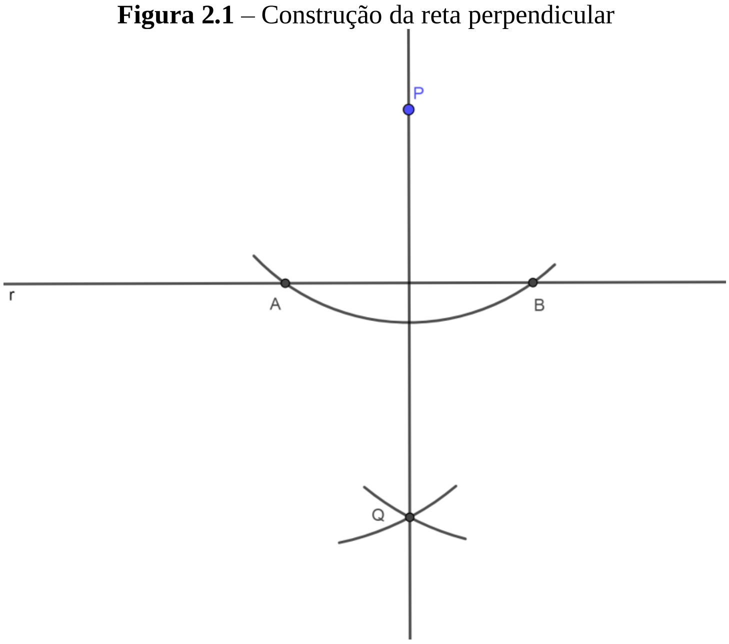
1) Com a ponta seca do compasso em P e uma abertura maior que a distância do ponto à reta dada, traçar um arco que determina na reta r dois pontos distintos, que nomearemos de A e B.

2) Pelos pontos A e B, utilize uma mesma abertura (maior que a metade da medida do segmento $\overline{AB}$) e traçar dois arcos que se cruzem em dois pontos, e, nomear de Q o ponto, dentre esses, localizado do lado oposto ao ponto P em relação à reta r.

3) Traçar a reta que passa pelos pontos P e Q, que é a reta perpendicular à reta r, pelo ponto P.

Construção:

Figura 2.1 – Construção da reta perpendicular



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção, temos que $PA = PB$ e $QA = QB$ e $\overline{PQ}$ é um segmento comum, logo pelo caso LLL temos que $\Delta PAQ \equiv \Delta PBQ$. Assim $A\hat{P}Q = B\hat{P}Q$ e, portanto $\overleftrightarrow{PQ}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{P}$ do triângulo isósceles APB de base $\overline{AB}$ e consequentemente $\overline{PQ}$ é a altura desse triângulo. Assim, $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r.

CE1b) – Perpendicular a uma reta por um ponto pertencente a ela

Sendo dados uma reta r e um ponto $P \in r$, construir uma reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P.

Roteiro:

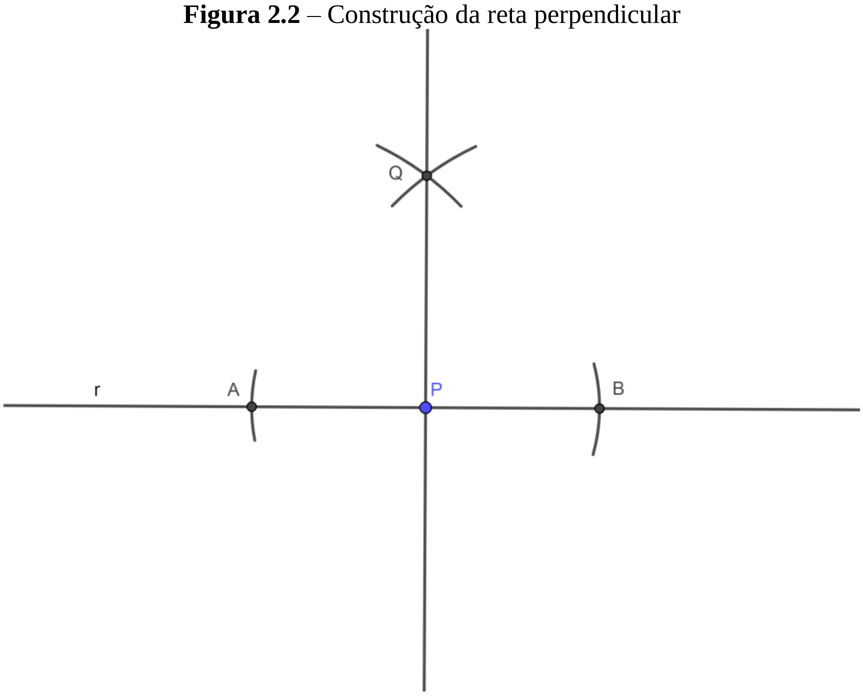
1) Com a ponta seca do compasso em P e uma abertura qualquer, traçar um arco que determina na reta r dois pontos distintos, que nomearemos de A e B.

2) Pelos pontos A e B, utilize uma mesma abertura (maior que a metade da medida do segmento $\overline{AB}$) e traçar dois arcos que se cruzam em dois pontos, em lados distintos da reta r. Nomear de Q um desses pontos encontrados.

3) Traçar a reta que passa pelos pontos P e Q, que é a reta perpendicular à reta r, pelo ponto P.

Construção:

Figura 2.2 – Construção da reta perpendicular



Fonte: Autora

Justificativa:

Ao traçar a primeira circunferência, teremos, por construção, que $PA = PB$. Logo, P é o ponto médio de $\overline{AB}$. Temos ainda por construção que $QA = QB$ e assim, $\overline{PQ}$ representa a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo isósceles AQB e, portanto, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r.

CE2) – Paralela a uma reta por um ponto exterior a ela

Sendo dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, construir uma reta paralela à reta r que passa pelo ponto P.

Roteiro:

1) Com a ponta seca do compasso em P e uma abertura maior que a distância do ponto à reta dada, traçar um arco que determina na reta r um ponto, à direita de P, que nomearemos de A.

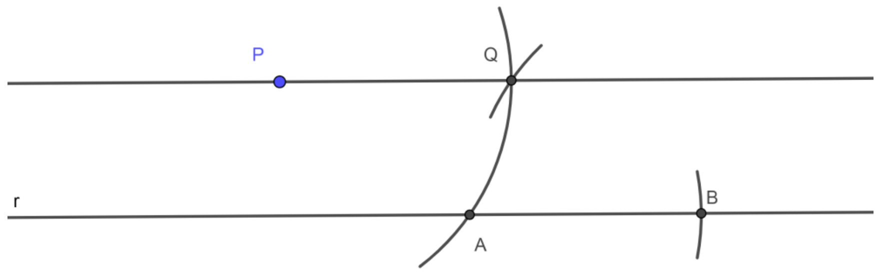
2) Pelo ponto A e mesma abertura usada em P, traçar um arco que cruze à reta r, à direita de A, formando um ponto que será nomeado de B.

3) Pelo ponto B e mesma abertura usada em P, traçar um arco que cruze o arco traçado no passo 1, formando um ponto que será nomeado de Q.

4) Traçar a reta que passa pelos pontos P e Q, que é a reta paralela à reta r, pelo ponto P.

Construção:

Figura 2.3 – Construção da reta paralela



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção, temos que $PA = AB = BQ = QP$. Portanto, o quadrilátero $PABQ$ é um losango[6] e, consequentemente $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AB}$, ou seja, $\overleftrightarrow{PQ} // r$.

[6] Losango: quadrilátero notável que possui os 4 lados congruentes e os lados opostos 2 a 2 paralelos.

CE3) – Mediatriz de um segmento

Sendo dado um segmento $\overline{AB}$, construir a reta mediatriz desse segmento.

Roteiro:

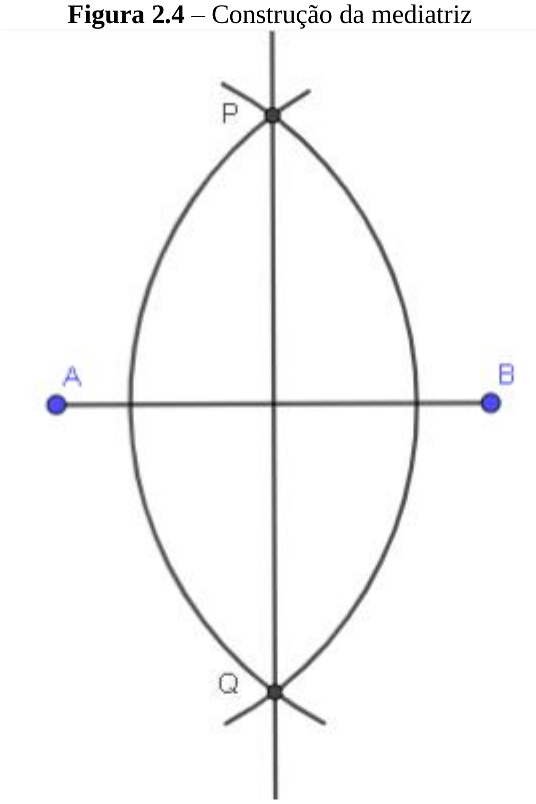
1) Com a ponta seca do compasso em A e uma abertura maior que a metade, traçar um arco.

2) Pelo ponto B e utilizando a mesma abertura do passo anterior, traçar um arco que cruze o arco anterior em dois pontos distintos, que nomearemos de P e Q.

3) Traçar a reta que passa pelos pontos P e Q, que é a mediatriz do segmento$\overline{AB}$.

Construção:

Figura 2.4 – Construção da mediatriz



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção $PA = PB = BQ = QA$. Logo os pontos P e Q são equistantes de A e B, e assim, temos que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz[7] do segmento $\overline{AB}$.

[7] Mediatriz é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio (Iezzi, 1997) e tem como propriedade todos seus pontos equidistarem dos extremos desse segmento.

CE4) – Transporte de ângulos

Dado um ângulo $B\hat{A}C$, transportar esse ângulo para uma semirreta de origem O, sendo O o vértice do ângulo transportado.

Roteiro:

1) Com a ponta seca do compasso em A, traçar um arco que intercepte os dois lados do ângulo $B\hat{A}C$, nos pontos P e Q.

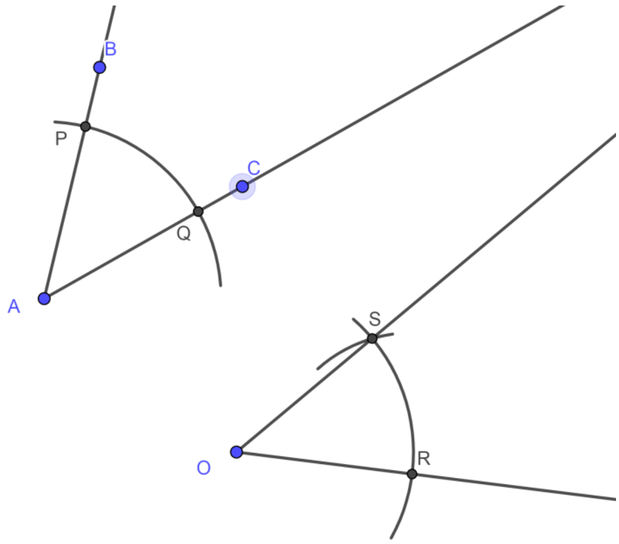
2) Pelo ponto O e utilizando a mesma abertura do passo anterior, traçar um arco que intercepte a semirreta dada, em um ponto R.

3) Pelo ponto R e com abertura igual a PQ, traçar um arco que intercepte o arco anterior. Nomearemos esse ponto de S.

4) Traçar a semirreta $\overrightarrow{OS}$

Construção:

Figura 2.5 – Construção do transporte de ângulos



Fonte: Autora

Justificativa:

Observando os triângulos APQ e OSR, temos, por construção $PA = QA = OR = OS$ e, também, que $PQ = RS$. Logo, pelo caso LLL[8] de congruência de triângulos, temos que os triângulos $APQ\ e\ OSR$ são congruentes, e portanto, $B\hat{A}C \cong R\hat{O}S$.

---

[8] De acordo com Dolce (1995), o caso de congruência de triângulos denominada LLL (lado-lado-lado) é "Se dois triângulos têm ordenadamente congruente os três lados, então esses triângulos são congruentes".

CE5) – Bissetriz de um ângulo

Sendo dado um ângulo $B\hat{A}C$, construir a bissetriz[9] desse ângulo.

Roteiro:

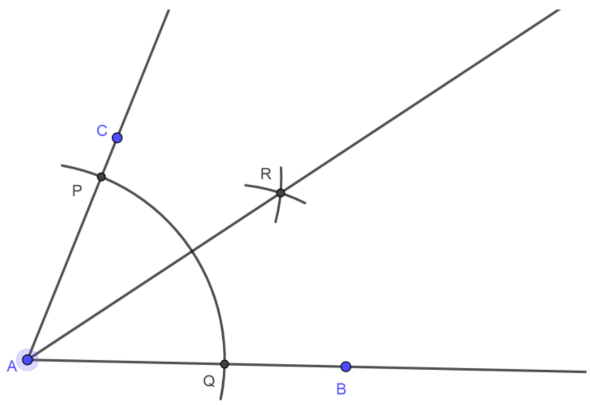
1) Com a ponta seca do compasso em A, traçar um arco que intercepte os dois lados do ângulo $B\hat{A}C$ nos pontos P e Q.

2) Pelos pontos P e Q traçar arcos (de mesma abertura) que se interceptam em dois pontos. Nomear de R o ponto dentre esses dois que está oposto a A em relação à reta $\overleftrightarrow{PQ}$, determinando R no interior do ângulo $B\hat{A}C$.

3) Traçar a semirreta $\overrightarrow{AR}$, que é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

Construção:

Figura 2.6 – Construção da bissetriz de um ângulo



Fonte: Autora

Justificativa:

Observando os triângulos APR e AQR, temos, por construção $PA = QA$, $PR = QR$, $\overline{AR}$ é comum aos dois triângulos. Logo, por congruência de triângulos e pelo caso LLL, temos que os triângulos APR e AQR são congruentes e, portanto $P\hat{A}R \cong Q\hat{A}R$. Logo, a semirreta $\overrightarrow{AR}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

[9] Segundo Dolce (1995) , "a bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes".

CE6) – Construção de ângulos notáveis

6.1) Ângulo de 60º

Sendo dada uma semirreta de origem O, construir um ângulo de 60º

Roteiro:

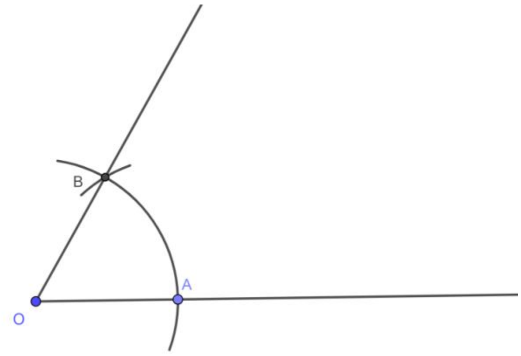
1) Com a ponta seca do compasso em O, traçar um arco que intercepte a semirreta num ponto A.

2) Pelo ponto A traçar um arco (de mesma abertura do passo anterior) e que intercepte o arco anterior em um ponto B.

3) Traçar a semirreta $\overrightarrow{OB}$.

Construção:

Figura 2.7 – Construção do ângulo de 60º



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção $AO = OB = AB$. Logo, o triângulo OAB é um triângulo equilátero, e, consequentemente, o ângulo $A\hat{O}B$ mede 60º.

6.2) Ângulo de 30º

Sendo dada uma semirreta de origem O, construir um ângulo de 30º

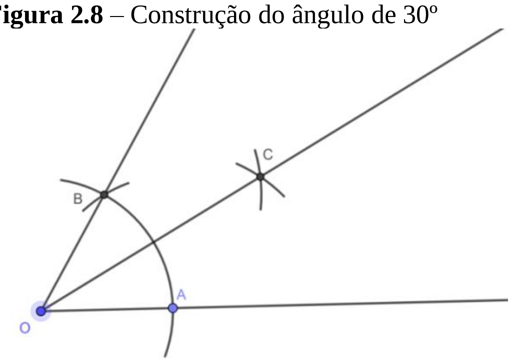
Roteiro:

1) Traçar um ângulo 60º.

2) Usando a CE5, traçar a sua bissetriz.

Construção:

Figura 2.8 – Construção do ângulo de 30º



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção temos que $m(A\hat{O}B) = 60°$ e que $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Logo o ângulo $A\hat{O}C$ mede 30º.

6.3) Ângulo de 45º

Sendo dada uma semirreta de origem O, construir um ângulo de 45º.

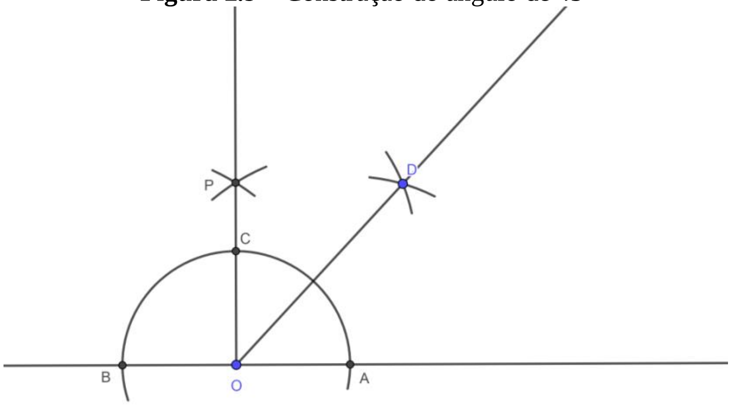
Roteiro:

1) Prolongar a semirreta para seu lado oposto e com a ponta seca do compasso em O, e pelo ponto O construir uma perpendicular usando a CE1b.

2) Traçar a bissetriz do ângulo formado usando a CE5.

Construção:

Figura 2.9 – Construção do ângulo de 45º



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção temos que $m(A\hat{O}C) = 90°$ e que $\overrightarrow{OD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$. Logo o ângulo $A\hat{O}D$ mede 45º.

Para as duas próximas construções elementares, utilizaremos um dos assuntos mais importantes da Geometria Euclidiana Plana: o Teorema de Tales. Sua importância também é fundamental no Desenho Geométrico. Ele nos permite obter segmentos proporcionais, por meio das construções de retas paralelas e transversais.

De acordo com Dolce (1995), o enunciado do Teorema de Tales é: “Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos *quaisquer* de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra”.

CE7) – Multiplicação de dois segmentos

Dados os segmentos a e b, construa o segmento $a \cdot b$, ou seja, a multiplicação de dois segmentos.

Roteiro:

Essa construção será feita por meio de uma manipulação algébrica do Teorema de Tales, na qual um dos segmentos da proporção será o segmento unitário. Utilizaremos a letra c para esse segmento unitário, ou seja, $c = 1$.

1) Trace duas semirretas de mesma origem O, formando um ângulo agudo.

2) Em uma das semirretas transportar, a partir de O, os segmentos $c\ e\ b$, nessa ordem. Obter pontos $C\ e\ B$ na semirreta tais que, $OC = c$ e $CB\ =\ b$.

3) A partir de O, na outra semirreta, transportar o segmento a, obtendo o ponto A.

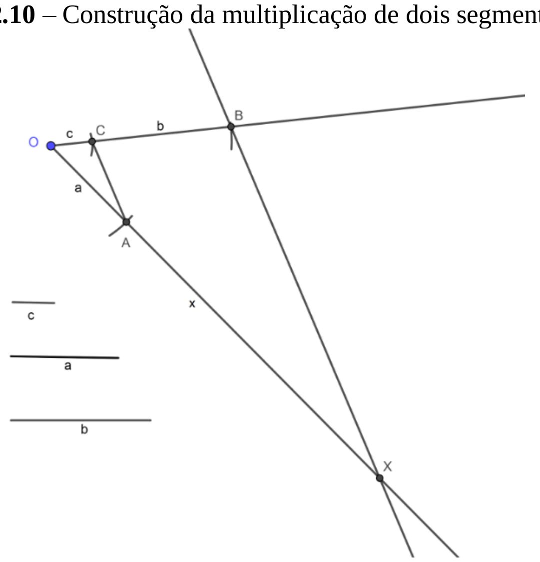
4) Traçar o segmento $\overline{AC}$.

5) Pelo ponto B, traçar uma reta paralela ao segmento $\overline{AC}$, obtendo o ponto X na semirreta $\overrightarrow{OA}$. Para realizar essa parte da construção, podemos utilizar a CE2 ou a CE4, transportando o ângulo $O\hat{C}A$, para o novo vértice, o ponto B.

6) O segmento $\overline{AX}$ tem a medida pedida.

Construção:

Figura 2.10 – Construção da multiplicação de dois segmentos



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção $\overleftrightarrow{OC}\ e\ \overleftrightarrow{OX}$ são transversais a $\overline{AC} \parallel \overline{BX}$, portanto, pelo teorema de Tales, temos que $\frac{OC}{CB} = \frac{OA}{AX} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{b}{x} \Leftrightarrow x = a \cdot b$.

CE8) – Divisão de dois segmentos

Dados os segmentos a e b, construa o segmento $\frac{a}{b}$, ou seja, a divisão de dois segmentos.

Roteiro:

Essa construção, assim como a anterior, será feita por meio de uma manipulação algébrica do Teorema de Tales, onde um dos segmentos da proporção será o segmento unitário. Utilizaremos a letra c para esse segmento unitário, ou seja, $c = 1$.

1) Trace duas semirretas de mesma origem O, formando um ângulo agudo.

2) Em uma das semirretas transportar os segmentos b e a, nessa ordem. Obter pontos B e A na semirreta, tais que $OB = b$ e $BA = a$.

3) Sobre a outra semirreta, transporte o segmento c, obtendo o ponto C.

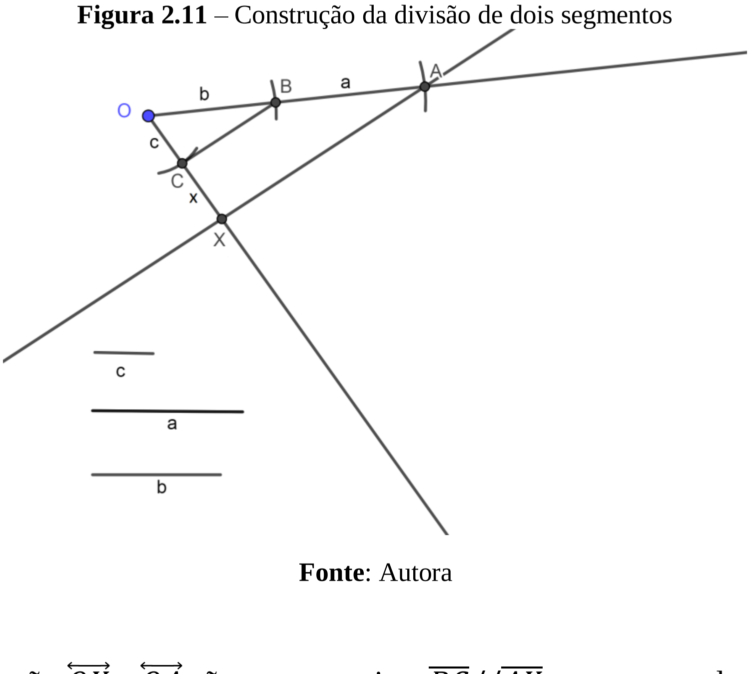
4) Traçar o segmento $\overline{BC}$.

5) Pelo ponto A, traçar uma reta paralela ao segmento $\overline{BC}$, obtendo o ponto X na semirreta $\overrightarrow{OC}$. Para realizar essa parte da construção, podemos utilizar a CE2 ou a CE4, transportando o ângulo $O\hat{B}C$, para o novo vértice, o ponto A.

6) O segmento $\overline{CX}$ tem a medida pedida.

Construção:

Figura 2.11 – Construção da divisão de dois segmentos



Fonte: Autora

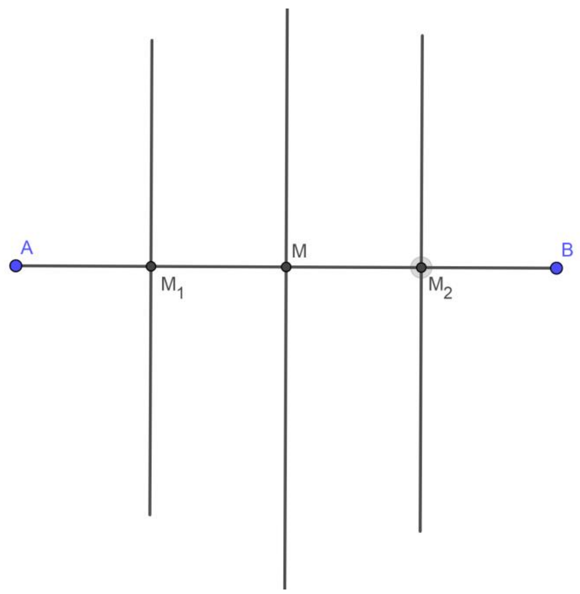
Justificativa:

Por construção $\overleftrightarrow{OX}$ e $\overleftrightarrow{OA}$ são transversais a $\overline{BC}//\overline{AX}$, portanto, pelo teorema de Tales, temos $\frac{OC}{CX} = \frac{OB}{BA} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$.

CE8) Caso particular: divisão em potências de base 2.

Como já vimos anteriormente na CE3, a reta mediatriz divide um segmento em duas partes congruentes, ou seja, de mesma medida. Sendo assim, se precisarmos dividir um segmento em quatro partes iguais, basta aplicar a mediatriz três vezes, como ilustra a figura abaixo.

Figura 2.12 – Construção da divisão de dois segmentos



Fonte: Autora

Sendo assim, pode-se facilmente provar por indução que, para dividir qualquer segmento em 2^n partes, basta traçarmos $2^n - 1$ mediatrizes.

3 RESOLVENDO PROBLEMAS ALGÉBRICOS POR MEIO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

Neste capítulo, apresentaremos alguns problemas algébricos, porém, suas resoluções serão apresentadas de uma maneira diferente: geometricamente. Unindo a Álgebra e a Geometria, encontramos vários problemas que podem ser resolvidos utilizando apenas a régua e o compasso, possibilitando a visualização do resultado de uma maneira diferente e prática. As construções apresentadas nesse capítulo estão baseadas nos materiais de Wagner (2015) e de Tunala (1988).

Associaremos um número a um segmento e utilizaremos as construções elementares do capítulo anterior para obtermos esse resultado geometricamente.

Os problemas que resolveremos ao longo do capítulo serão:

P1 – Quarta proporcional

P2a – Raiz quadrada da soma de dois quadrados

P2b – Raiz quadrada da diferença de dois quadrados

P3 – Média geométrica

P4 – Equação do 1º grau

P5 – Equação do 2º grau

As construções seguirão a mesma proposta do capítulo anterior, dessa forma, apresentaremos o problema, o roteiro, a construção e a justificativa.

P1 – Quarta proporcional

Dados três segmentos a, b e c, determine x, sendo x a quarta proporcional desses três segmentos, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Roteiro:

1) Trace duas semirretas de mesma origem O, formando um ângulo agudo.

2) Em uma das semirretas, transportar os segmentos a e c, a partir do ponto O. Obter os pontos A e C, de modo que $OA = a$ e $AC = c$ na semirreta.

3) Na outra semirreta, a partir do ponto O, transportar o segmento b, obtendo o ponto B, tal que $OB = b$.

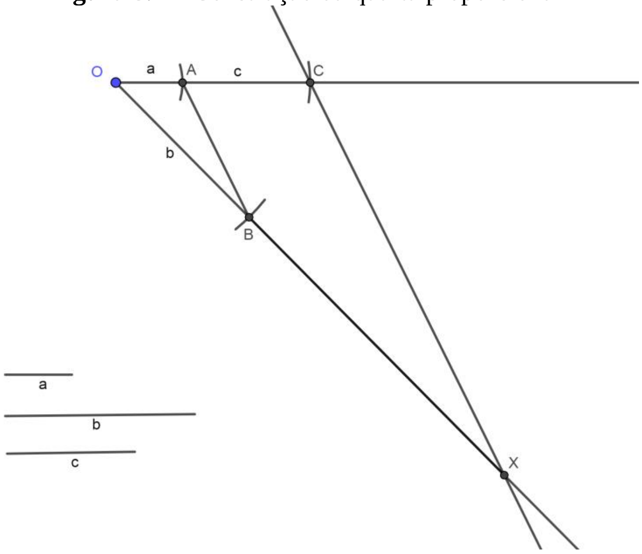
4) Traçar o segmento $\overline{AB}$.

5) Pelo ponto C, traçar uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$, obtendo o ponto X na semirreta $\overrightarrow{OB}$.

6) O segmento $\overline{BX}$ possui a medida pedida.

Construção:

Figura 3.1 – Construção da quarta proporcional



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção temos que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CX}$ são retas paralelas e $\overleftrightarrow{OC}$ e $\overleftrightarrow{OX}$ são retas transversais, então, pelo teorema de Tales, temos que $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BX} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

P2a – Raiz quadrada da soma de dois quadrados

Dados dois segmentos a e b, determine x, sendo x a raiz quadrada da soma dos quadrados desses segmentos, ou seja, $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Roteiro

1) Construa um ângulo de 90º, sendo C o seu vértice.

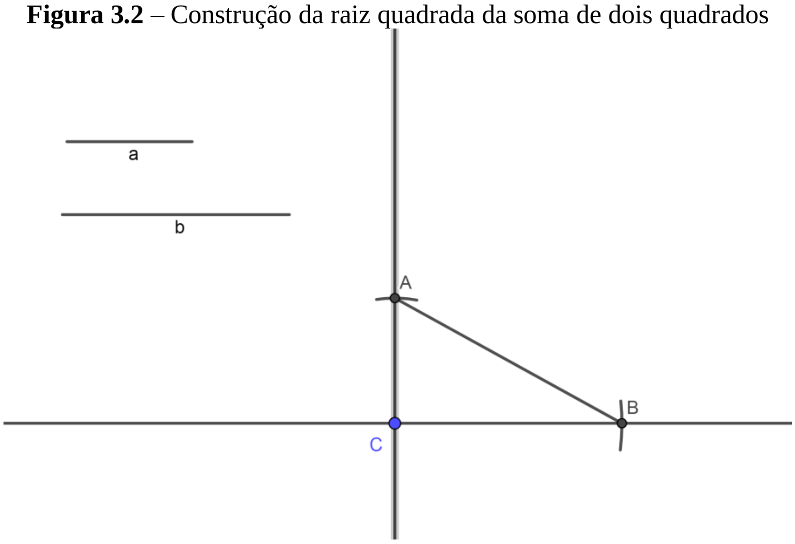
2) Em um dos lados desse ângulo, transportar, a partir do ponto C, o segmento a, obtendo o ponto A.

3) No outro lado do ângulo, transportar, a partir do ponto C, o segmento b, obtendo o ponto B.

4) O segmento $\overline{AB}$ possui a medida pedida.

Construção:

Figura 3.2 – Construção da raiz quadrada da soma de dois quadrados



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção, temos que ABC é um triângulo retângulo, sendo $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ os catetos e $\overline{AB}$ a hipotenusa. Sendo assim, temos que, pelo teorema de Pitágoras[10], $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

[10] De acordo com Dolce (1995), o enunciado do Teorema de Pitágoras diz: "A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa".

P2b – Raiz quadrada da diferença de dois quadrados

Dados dois segmentos a e b, para $a > b$, determine x, sendo x a raiz quadrada da diferença dos quadrados desses segmentos, ou seja, $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Roteiro

1) Construa um ângulo de 90º, sendo C o seu vértice.

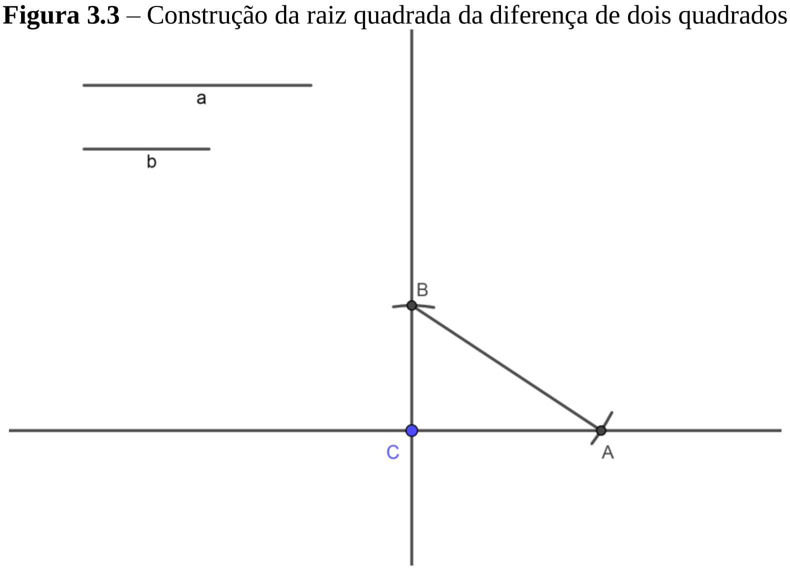
2) Em um dos lados desse ângulo, transportar, a partir do ponto C, o segmento b, obtendo o ponto B.

3) A partir do ponto B, transportar o segmento a, obtendo o ponto A no outro lado do ângulo.

4) O segmento $\overline{AC}$ possui a medida pedida.

Construção:

Figura 3.3 – Construção da raiz quadrada da diferença de dois quadrados



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção, temos que ABC é um triângulo retângulo, sendo $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chamados de catetos e $\overline{AB}$, de hipotenusa. Sendo assim, pelo teorema de Pitágoras, $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \Leftrightarrow a^2 = x^2 + b^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

P3 – Média Geométrica

Dados dois segmentos a e b, determine x, sendo x a média geométrica desses segmentos, ou seja, $x = \sqrt{a.b}$.

Roteiro

1) Construa uma reta auxiliar e marque um ponto B.

2) A partir do ponto B, transportar o segmento a, obtendo o ponto H. Em seguida, transportar o segmento b, a partir do ponto H, obtendo o ponto C.

3) Construir a mediatriz de $\overline{BC}$, obtendo o ponto médio O de $\overline{BC}$.

4) Construir uma semicircunferência com extremidades em B e C.

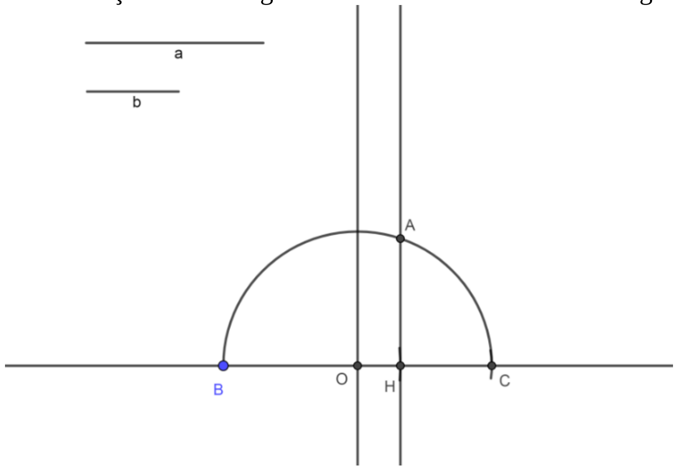
5) Por H, construir uma reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BC}$.

6) Nomear de A o ponto de encontro do semicírculo com a reta perpendicular do item anterior.

7) O segmento $\overline{AH}$ possui a medida pedida.

Construção:

Figura 3.4 – Construção da média geométrica como altura de um triângulo retângulo



Fonte: Autora

Justificativa:

Por construção, temos que ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{BC}$, e que $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa. Pelas relações métricas[11], temos que: $AH^2 = BH.HC \Leftrightarrow x^2 = a.b \Rightarrow x = \sqrt{a.b}$

[11] As relações métricas de um triângulo retângulo são relações obtidas através da semelhança de triângulos. Dentre elas, temos uma que diz: "a altura relativa à hipotenusa é a média proporcional (ou geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa", Dolce (1995)

P4 – Equação do 1º grau

Dados os segmentos a e b, determine x, sendo x a raiz da equação $bx - a = 0$.

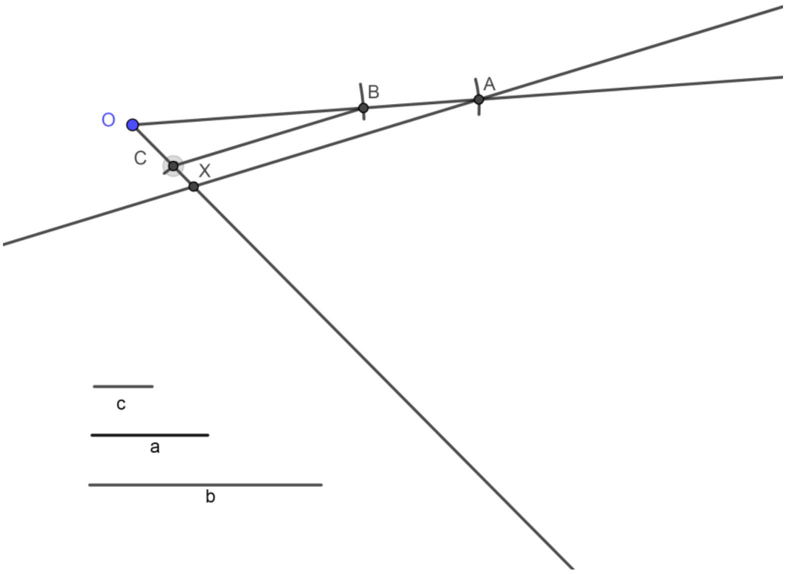
Roteiro:

1) Fazer a CE8 do segmento de medida a pelo segmento de medida b.

2) O segmento $\overline{CX}$ tem a medida pedida.

Construção:

Figura 3.5 – Construção da raiz de uma equação do 1º grau



Fonte: Autora

Justificativa:

Para fazer essa construção, observe que podemos reescrever o x da seguinte maneira: $x = \frac{a}{b}$, obtendo assim uma divisão de segmentos. Sendo assim, temos como referência a CE8, do capítulo anterior.

Observação:

O segmento a pode ser apresentado também, como uma multiplicação de dois segmentos. Nesse caso, como foi utilizado Tales, podemos construir a raiz da equação aplicando a CE7 e depois a CE8.

P5 – Equação do 2º grau

Dados os segmentos a, b e c, sendo $a \neq 0$ determine x, sendo x as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

A construção desse problema será dividida em três casos, dependendo da medida do segmento c.

1º caso: $c = 0$

Roteiro:

1) Faça a construção P4.

Justificativa:

Nesse caso temos que $ax^2 + bx = 0$ e, portanto, teremos que as soluções da equação serão 0 e $-\frac{b}{a}$. Logo, a construção das raízes será a construção de $\left|-\frac{b}{a}\right|$, sendo essa a divisão do segmento $|b|$ pelo segmento $|a|$.

2º caso: $a = 1$ e $c > 0$.

Roteiro:

1) Construa uma reta auxiliar marcando um ponto M.

2) Sendo u a medida unitária, transportar os segmentos c, u e b, nessa ordem, a partir de M, nomeando os pontos encontrados de N, O e P, respectivamente.

3) Construa 2 semicírculos, sendo $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$ diâmetros desses semicírculos.

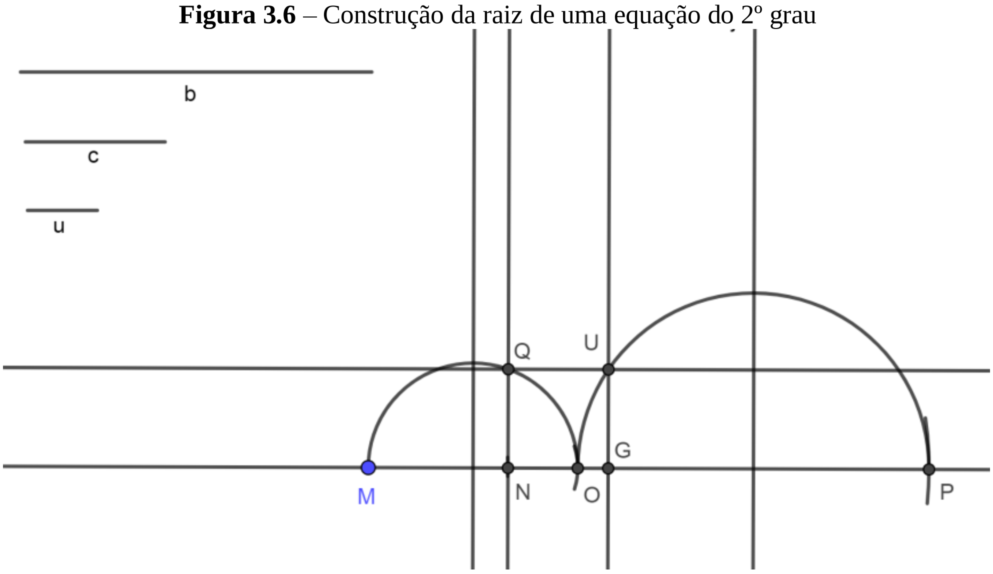
4) Por N, faça a CE1b, obtendo o ponto Q no semicírculo.

5) Pelo ponto Q, faça a CE1b, obtendo o ponto U no outro semicírculo. E por esse ponto, faça a CE1b novamente obtendo o ponto G na reta $\overleftrightarrow{MP}$.

6) Os segmentos $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ possuem as medidas procuradas.

Construção:

Figura 3.6 – Construção da raiz de uma equação do 2º grau



Fonte: Autora

Justificativa:

Para $a = 1$, a equação ficará $x^2 + bx + c = 0$ e $c > 0$, temos que as raízes x_1 e x_2 da equação terão o mesmo sinal, e, portanto, $|x_1| + |x_2| = |b|$ e $x_1 \cdot x_2 = c$, soma e produto da equação do 2º grau dada. Por construção temos que NQ é a média geométrica de $\overline{MN}$ e $\overline{NO}$. Portanto, como $NO = 1$, $NQ = \sqrt{c}$, vem que $UG = \sqrt{c}$, por construção. Sendo UG a média geométrica de $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$, temos que $UG^2 = c = OG.GP$. Sabemos ainda que $OP = |b| = OG + GP$. Assim, os segmentos $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ são os módulos das raízes procuradas. Para determinar o sinal das raízes devemos observar o sinal de b. Se $b > 0$, temos que a soma das raízes será $-b$, e pontanto as raízes serão negativas. De modo análogo, quando $b < 0$, teremos que as raízes serão positivas.

Observação:

Note que quando $b^2 < 4c$, a reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{QN}$ pelo ponto Q não intercepta o semicírculo de diâmetro $\overline{OP}$, pois as raízes são imaginárias e, portanto, não conseguimos obtê-las através da construção.

3º caso: $a = 1$ e $c < 0$.

Roteiro:

1) Construa uma reta auxiliar marcando um ponto M.

2) Sendo u a medida unitária, transportar os segmentos c, u e b, nessa ordem, a partir de M, nomeando os pontos encontrados de N, O e P, respectivamente.

3) Construa um semicírculo, sendo $\overline{MO}$ diâmetro desse semicírculo. Construa um círculo sendo $\overline{OP}$ o diâmetro dele, e nomeando o centro do círculo por I.

4) Por N, faça a CE1b, obtendo o ponto Q no semicírculo.

5) Por O, faça também a CE1b.

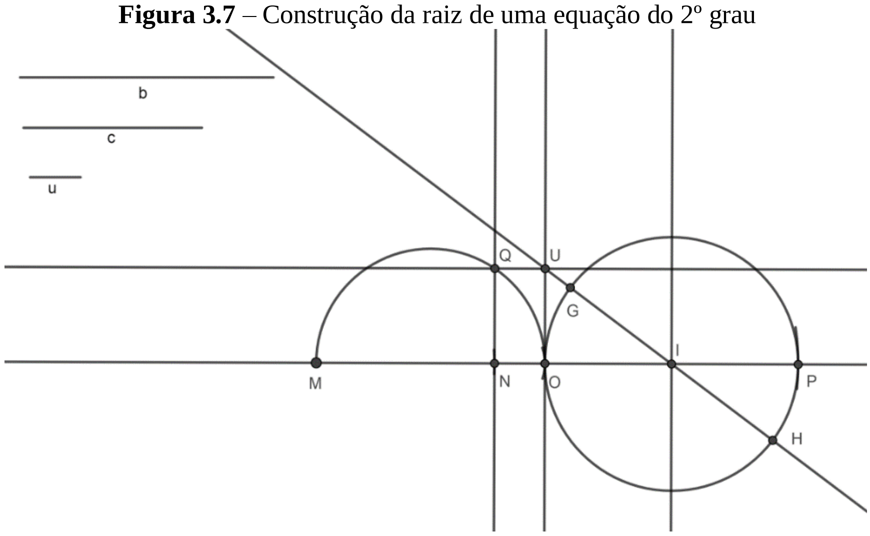
6) Pelo ponto Q, faça a CE1b, obtendo o ponto U na reta construída anteriormente.

7) Traçar a reta $\overleftrightarrow{UI}$, obtendo G e H na intersecção com o círculo construído no passo 3.

8) Os segmentos $\overline{UG}$ e $\overline{UH}$ possuem as medidas procuradas.

Construção:

Figura 3.7 – Construção da raiz de uma equação do 2º grau



Fonte: Autora

Justificativa:

Da equação $x^2 + bx + c = 0$, temos que, como $c < 0$, as raízes da equação, $x_1\ e\ x_2$, terão sinais opostos, e supondo, sem perda de generalidade, que $x_1 > x_2$, temos $|x_1| - |x_2| = |b|$ e $|x_1| \cdot |x_2| = |c|$, sendo a diferença entre os módulos das raízes igual a $|b|$ e o produto delas igual a $|c|$. Por construção temos que $\overline{NQ}$ é a média geométrica de $\overline{MN}$ e $\overline{NO}$. Portanto, por construção, temos que, se $NO = 1$ então $NQ = \sqrt{|c|}$. Logo, $UO = \sqrt{|c|}$, e é tangente ao círculo que tem centro I e diâmetro OP. Ainda observando a construção, temos que $OP = GH$

= $|b|$. Logo, $GH = UH - UG$ e, portanto, $|b| = UH - UG$. Pela Potência de ponto[12], temos que $UO^2 = UH \cdot UG$, portanto, $UH \cdot UG = |c|$. Logo, os segmentos $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ são os módulos das raízes da equação. Agora, para determinar o sinal das raízes temos observar o sinal de b. Se $b > 0$, então a soma das raízes será $-b$, portanto, como consideramos $x_1 > x_2$, temos $x_1 = -UH$ e $x_2 = UG$, enquanto se $b < 0$, $x_1 = UH$ e $x_2 = -UG$. Estamos indicando apenas que a raiz é um número real negativo, visto que UH é um segmento e, portanto, sua medida sempre é positiva.

Observação:

Para o 2º e 3º casos, podemos construir as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ dividindo todos os segmentos pela medida a, de modo a obter $a = 1$. Para isso, utilize a CE8 para os segmentos $b\ e\ c$. Assim, serão obtidos os novos segmentos que nomearemos de $b' = \frac{b}{a}\ e\ c' = \frac{c}{a}$, onde podemos utilizar a P5 para construir suas raízes.

P5 – Equação do 2º grau – caso particular para equação na forma $x^2 - ax + b^2 = 0$

Dados os segmentos a e b, sendo $a \geq 2b$, determine x, sendo x as raízes da equação $x^2 - ax + b^2 = 0$.

Roteiro:

1) Fazer a P2b, sendo $r = \sqrt{a^2 - (2b)^2}$.

2) Fazer a CE3 do segmento r, obtido no segmento anterior. Essa construção determina em $\overline{AC}$ o ponto Q e em $\overline{AB}$ o ponto P.

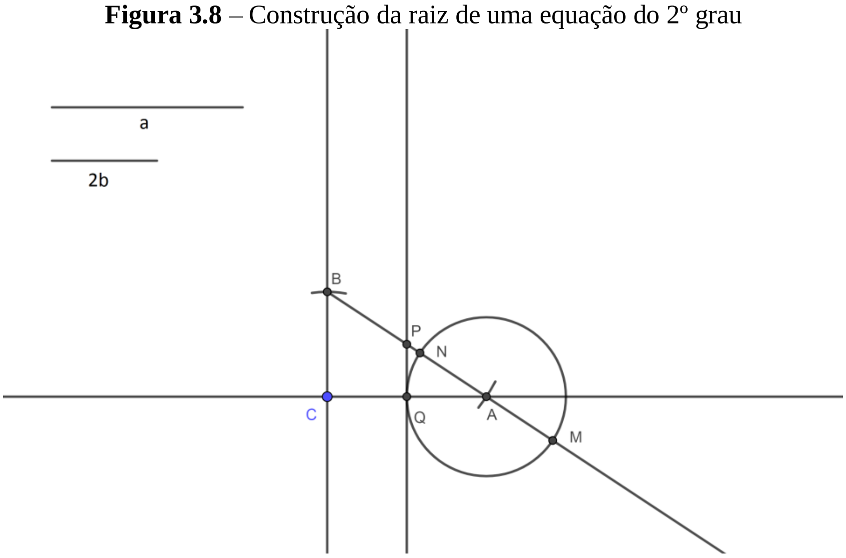
3) Traçar a circunferência com centro no ponto A e raio $\overline{AQ}$. Nomear M e N os pontos determinados pela circunferência na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

4) Os segmentos $\overline{NP}$ e $\overline{MP}$ tem a medida pedida.

[12] Dados um círculo λ, três pontos, $A, B\ e\ C$ que pertencem à λ e um ponto P exterior à λ e $P \in \overleftrightarrow{AB}$, um dos casos de generalização de potência de ponto, Dolce (1995) nos afirma que se o segmento secante $\overline{PA}$, sua parte exterior $\overline{PB}$ e um segmento $\overline{PT}$ tangente a λ. Temos: $(PA)x(PB) = (PT)^2$

Construção:

Figura 3.8 – Construção da raiz de uma equação do 2º grau



Fonte: Autora

Justificativa:

Da equação $x^2 - ax + b^2 = 0$, temos que suas raízes podem ser reescritas da seguinte maneira: $x = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-(2b)^2}}{2}$. Logo, por construção, temos que, ao traçar a mediatriz de $\overline{AC}$, que é também paralela ao segmento $\overline{BC}$, e pela propriedade das bases médias[13], são determinados os segmentos: $AQ = \frac{\sqrt{a^2-(2b)^2}}{2}$ e $AP = \frac{a}{2}$. Então, temos que, $PM = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2-(2b)^2}}{2}$ e $PN = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2-(2b)^2}}{2}$.

Observação:

Para determinar as raízes da equação do 2º grau, para a forma escrita no caso particular, temos duas maneiras diferentes. A primeira é utilizando a fórmula de resolução da equação quadrática como ideia principal, conforme apresentado anteriormente. Já a outra construção, é usando a ideia da soma e produto das raízes da equação do 2º grau. Essa construção é possível encontrar em Wagner (2015).

[13] No livro de Dolce (1995), encontramos a propriedade das bases médias dividida em duas partes. A parte b nos diz: "Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, então esta extremidade é ponto médio do terceiro lado."

4 APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta de sequência de atividades para o professor utilizar em sala de aula. Sugerimos aplicar ao final do 9º ano do Ensino Fundamental 2, visto que será uma retomada e aprofundamento de conceitos de Desenho Geométrico, além de aplicações de conceitos algébricos utilizando a Geometria. Esses conceitos algébricos, de acordo com a BNCC, serão trabalhados no início do 9ºano, como, por exemplo, proporcionalidade, relações métricas no triângulo retângulo e equação do 2º grau. Por isso a importância de colocarmos nossa proposta ao final do ano letivo. Cabe, no entanto, ao professor selecionar o melhor momento para aplicá-las.

Já com relação aos conteúdos de Desenho Geométrico, essa proposta será como uma conclusão da disciplina e, portanto, os alunos deverão possuir conhecimentos em construções geométricas adquiridos ao longo do Ensino Fundamental 2. Esses conhecimentos exigidos são, pelo menos, as construções elementares apresentadas nesse trabalho. De acordo com a BNCC, essas construções são realizadas no 6º, 7º e 8º anos juntamente com o conteúdo de Geometria. Caso a turma não o possua, sugerimos que seja aplicado anteriormente, durante um mês, como revisão do conteúdo de Geometria e aplicações das construções nesse contexto.

Uma proposta de sequência de atividades para essa revisão pode ser feita, utilizando a nomenclatura desse trabalho, como foi proposto no Capítulo 2, da seguinte maneira:

Aula 1 – CE1a, CE1b, CE2 e CE3

Aula 2 – CE4, CE5 e CE6

Aula 3 – Conceito de Tales e CE7

Aula 4 – CE8

Sequência de atividades envolvendo Resolução de problemas algébricos utilizando a construção geométrica

A sequência didática proposta aqui será baseada no trabalho de Silva (2020) e Nunes (2021). A primeira apresenta, de forma dinâmica e bem detalhada, uma sequência de atividades envolvendo Geometria e mandalas. E a segunda, apresenta-nos uma sequência didática de estatística, de maneira bem-organizada. No nosso caso, trabalharemos a Construção Geométrica e a Álgebra. Também nos serviram de base para que a sequência de atividades ficasse bem elaborada, as obras de Barbosa (2018) e Oliveira (2015).

Apresentaremos uma sequência de oito aulas. Elas podem ser aplicadas uma vez por semana, durante um bimestre. Cada aula deverá tratar um assunto diferente e deverá ter em torno de 50 minutos. O tempo de aula e de cada atividade, o professor pode adaptar de acordo com a sua turma, porém, segue abaixo uma sugestão de divisão do tempo dessa aula:

1ª etapa: Explicação do conceito algébrico (10 minutos);

2ª etapa: Realização da primeira atividade de classe pelo professor, com os alunos realizando a construção ao mesmo tempo (15 minutos);

3ª etapa: Realização da segunda atividade de classe. Nesse momento, somente os alunos fazem, enquanto o professor observa e orienta (15 minutos);

4ª etapa: Correção e discussão da atividade de classe e solicitação da atividade de casa (10 minutos).

A ideia de trabalhar com o 9º ano, se deve ao fato de que esses conceitos algébricos já são de conhecimento do aluno, tendo o professor somente que relembrar o conceito.

Os conteúdos das aulas podem ser distribuídos da seguinte maneira:

Aula 1 – Quarta proporcional

Aula 2 – Raiz quadrada da soma de dois quadrados

Aula 3 – Raiz quadrada da diferença de dois quadrados

Aula 4 – Média geométrica

Aula 5 – Equação do 1º grau

Aula 6 – Equação do 2º grau (para $c = 0$ e $c > 0$)

Aula 7 – Equação do 2º grau (para $c < 0$)

Aula 8 – Atividade de encerramento do conteúdo

Em cada aula, o aluno receberá uma folha contendo as atividades de classe e de lição de casa. Essa folha poderá ser frente e verso, e o professor poderá fazer uso dela como instrumento de avaliação das atividades. Para realização dessas atividades utilizaremos como unidade base, o centímetro.

Segue abaixo uma sequência de atividades propostas como sugestão para as aulas acima.

SEQUÊNCIA DAS ATIVIDADES

Aula 1

Conteúdo: Teorema de Tales e a quarta proporcional.

Habilidade: Nessa aula trabalharemos as seguintes habilidades da BNCC:

(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Objetos do conhecimento: Proporção, Teorema de Tales.

Objetivo: Construir a quarta proporcional utilizando, como base, o conceito do Teorema de Tales.

Materiais utilizados: Régua, compasso, lápis, borracha e uma folha de atividades.

Desenvolvimento da aula:

- O professor deve iniciar a aula revisando o conteúdo proporção. Mostrar aos alunos as diversas maneiras de escrever uma mesma proporção é fundamental para que ele compreenda e reescreva de modo correto a notação na hora de construir. Também é importante relembrar o Teorema de Tales, pois será com a ideia de retas paralelas e segmentos proporcionais que a quarta proporcional será construída.
- Em seguida, o professor pode iniciar a explicação de como será feita a construção da quarta proporcional por meio da primeira atividade de classe, atividade essa que os alunos devem fazer junto com o professor. Nessa atividade é importante que o professor realize o roteiro que servirá como um passo a passo para o aluno resolver os outros exercícios.
- A segunda atividade o aluno deverá resolver sozinho, enquanto o professor orienta. Nesse momento, vale observar que o aluno deverá reescrever a proporção para que ele consiga construir a atividade pedida.
- Feita a atividade é interessante que o professor discuta com os alunos esse exercício, e o corrija na lousa, se julgar necessário.
- Por fim, dar as orientações e dicas para as atividades de casa é bem importante para que o aluno consiga fazer os exercícios de maneira correta e objetiva.

Abaixo, segue a folha de atividades da primeira aula.

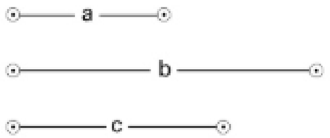
Nome do aluno:

Professor:

Aula 1 – Quarta Proporcional

Atividades de classe:

1. Dados os segmentos $a, b\ e\ c$, obtenha x, utilizando régua e compasso, onde $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

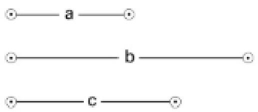


Roteiro:

2. Sendo $a = 3cm$, b= $2cm$ e $c = 7cm$, obtenha x, utilizando régua e compasso, sendo $x = \frac{a \cdot b}{c}$.

Atividade de casa:

1. Dados os segmentos a, b e c, obtenha x, utilizando régua e compasso, onde $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.



2. Sendo $a = 3cm$ e $b = 4{,}5cm$, obtenha x, utilizando régua e compasso, sendo $x = \frac{a^2}{b}$.

Aula 2

Conteúdo: Teorema de Pitágoras e a raiz quadrada da soma de dois quadrados.

Habilidade: Nessa aula, trabalharemos as seguintes habilidades da BNCC:

(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Objetos do conhecimento: Números irracionais e sua representação geométrica, elementos de um triângulo retângulo (catetos e hipotenusa) e Teorema de Pitágoras.

Objetivo: Construir, através do Teorema de Pitágoras, segmentos irracionais.

Materiais utilizados: Régua, compasso, lápis, borracha e uma folha de atividades.

Desenvolvimento da aula:

- O professor deve iniciar a aula revisando o Teorema de Pitágoras. Deverá explicar que, ao resolver esse Teorema, existe a possibilidade de obter um número irracional. Relembrar os nomes dos lados de um triângulo retângulo é fundamental, não só para essa aula como para a seguinte.
- Em seguida, o professor pode iniciar a explicação de como será feita a construção da raiz quadrada da soma de dois quadrados por meio da primeira atividade de classe, junto com os alunos. Nessa atividade é importante ressaltar que, ao determinar a hipotenusa está determinando a soma dos quadrados.
- A segunda atividade o aluno deverá resolver sozinho, enquanto o professor orienta. Nesse momento é importante visualizar a compreensão de fazer a determinação da hipotenusa, e que eles não devem fazer cálculos, mesmo que apareçam números e não segmentos.
- Feita a atividade, é interessante que o professor discuta com os alunos esse exercício, e o corrija na lousa, se julgar necessário.
- Por fim, dar as orientações e dicas para as atividades de casa também é bem importante para que o aluno consiga entregar os exercícios de maneira correta e objetiva. Faça a explicação do exercício, desenhando um esboço para que os alunos entendam a construção.

Abaixo, segue a folha de atividades da aula 2.

Nome do aluno:

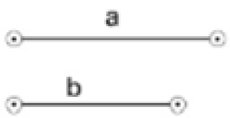
Professor:

Aula 2 – Raiz quadrada da soma de dois quadrados

Atividades de classe:

1. Dados os segmentos a e b, obtenha x, utilizando régua e compasso, onde

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Roteiro:

2. Sendo $a = 2{,}3cm$, b$= 5{,}6cm$, obtenha x, utilizando régua e compasso, sendo $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Atividade de casa:

Considere as medidas: $AB = 8cm$, $AD = 6cm$ e $CD = 5cm$.

Vamos construir um quadrilátero $ABCD$, formado por 2 triângulos retângulos. Para isso, siga os passos abaixo. Montar um esboço inicial pode ajudar a enxergar melhor o que é para ser construído.

a) Construa um triângulo retângulo ABD, retângulo em A, tal que os segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ e $\overline{\boldsymbol{AD}}$ são catetos.

b) Construa, na mesma figura construída no item anterior, outro triângulo retângulo, ABD, retângulo em D, onde $\overline{\boldsymbol{BD}}$, obtido no triângulo anterior, é um dos catetos e $\overline{\boldsymbol{CD}}$ é o outro cateto.

Espaço para fazer o esboço

Aula 3

Conteúdo: Teorema de Pitágoras e a raiz quadrada da diferença de dois quadrados.

Habilidade: Nessa aula trabalharemos a seguinte habilidade da BNCC:

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Objetos do conhecimento: Elementos de um triângulo retângulo (catetos e hipotenusa) e Teorema de Pitágoras.

Objetivo: Construir, por meio do Teorema de Pitágoras, segmentos irracionais.

Materiais utilizados: Régua, compasso, lápis, borracha e uma folha de atividades.

Desenvolvimento da aula:

- O professor deve iniciar a aula verificando a lição de casa da aula anterior e tirando eventuais dúvidas.
- A parte teórica é a mesma da aula anterior, porém, é importante ressaltar que nem sempre será possível determinar um segmento nesse caso, afinal, no universo dos números reais não existe raiz quadrada de números negativos, e, portanto, não é possível construir o mesmo. Sendo assim, é necessário explicar que o maior lado de um triângulo sempre será a hipotenusa e, que nesse caso da diferença, para determinar o cateto, é necessário verificar, primeiro, se é possível construir o triângulo. Para isso, o professor pode realizar a primeira parte da atividade proposta.
- Em seguida, o professor pode iniciar a construção da raiz quadrada da diferença de dois quadrados, fazendo jus a explicação anterior, junto com os alunos. Nessa atividade é importante ressaltar que, ao determinar o x, na diferença, estamos construindo o cateto.
- A segunda atividade o aluno deverá resolver sozinho, enquanto o professor orienta. Nesse momento, é importante visualizar a compreensão de estarem determinando corretamente o cateto.
- Feita a atividade é interessante que o professor discuta com os alunos esse exercício, e o corrija na lousa, se julgar necessário.
- Por fim, dar as orientações e dicas para as atividades de casa também é importante. Faça a explicação do exercício, desenhando um esboço para que os alunos entendam a construção.

Abaixo, segue a folha de atividades da aula 3.

Nome do aluno:

Professor:

Aula 3 – Raiz quadrada da diferença de dois quadrados

Atividades de classe:

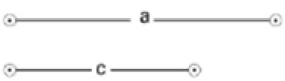
1. Sendo $a = 3cm$ e $b = 5cm$, assinale qual das duas construções não seria possível e justifique sua resposta:

I. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ ou II. $x = \sqrt{b^2 - a^2}$

Faça a construção possível do exercício acima, no espaço abaixo:

Roteiro:

2. Dados os segmentos a e c, obtenha graficamente o segmento x, sendo $x = \sqrt{a^2 - c^2}$.



Atividade de casa:

Considere as medidas: $BD = 4cm, DC = 3cm$ e $AC = 7cm$

Vamos construir um triângulo ABC, formado por 2 triângulos retângulos. Para isso, siga os passos abaixo, montar um esboço inicial pode ajudar a enxergar melhor o que é para ser construído.

a) Construa um triângulo retângulo ADC, retângulo em D, tal que o segmento $\overline{\boldsymbol{DC}}$ é um dos catetos e o segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ é a hipotenusa.

b) Construa, na mesma figura construída no item anterior, outro triângulo retângulo, ABD, retângulo em D, onde $\overline{\boldsymbol{BD}}$ é um dos catetos e $\overline{\boldsymbol{AD}}$, determinado na figura anterior, é o outro cateto.

Espaço para fazer o esboço

Aula 4

Conteúdo: Relações Métricas em um Triângulo Retângulo e a Média Geométrica.

Habilidade: Nessa aula trabalharemos as seguintes habilidades da BNCC:

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Objetos do conhecimento: Relações métricas do triângulo retângulo; Proporção; Média Geométrica.

Objetivo: Construir a média geométrica utilizando, como base as relações métricas do triângulo retângulo.

Materiais utilizados: Régua, compasso, lápis, borracha e uma folha de atividades.

Desenvolvimento da aula:

- O professor deve iniciar a aula revisando o conteúdo das relações métricas, dando ênfase na relação: “a altura relativa à hipotenusa é a média proporcional (ou geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa”, Dolce (1995).
- O professor pode aproveitar esse momento e explicar que há uma outra relação que permite obter a média geométrica, a relação “cada cateto é a média proporcional (ou geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa”, Dolce (1995).
- Em seguida, o professor deve apresentar a proposta de como traçar uma média geométrica através da atividade de classe 1 do anexo. Se tiver tempo, pode apresentar a mesma construção, porém, utilizando a segunda relação dada na parte teórica.
- A segunda atividade o aluno deverá resolver sozinho, enquanto o professor orienta. Caso o professor tenha apresentado as duas opções de construção, nesse momento, o aluno pode escolher a que mais se identificou.
- Feita a atividade é interessante que o professor discuta com os alunos esse exercício, e o corrija na lousa, se julgar necessário.
- Por fim, dar as orientações e dicas para as atividades de casa também é bem importante para que o aluno consiga entregar os exercícios de maneira correta e objetiva.

Abaixo, segue a folha de atividades da aula 4.

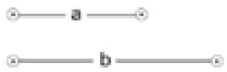
Nome do aluno:

Professor:

Aula 4 – Média geométrica

Atividades de classe:

1. Dados os segmentos a e b, obtenha o segmento que representa a média geométrica de ambos, ou seja, obtenha o segmento x tal que $x = \sqrt{a \cdot b}$. Nesse caso, utilize a média geométrica sendo a altura relativa à hipotenusa.

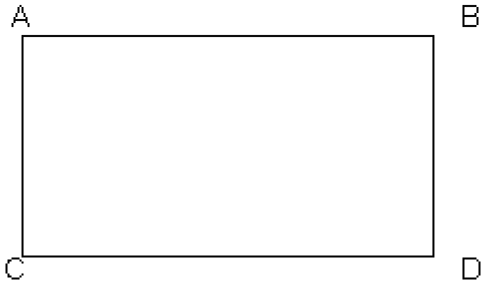


Roteiro:

2. Sabendo que $a = 2cm$ e $b = 4cm$, construa graficamente: o segmento x, sendo $x = \sqrt{a \cdot b}$.

Atividade de casa:

1. Determine a média geométrica entre as dimensões do retângulo abaixo:



2. a) Construa um triângulo retângulo cujos catetos são $AB = 2cm$ e $AC = 3,5cm$.

b) Determine a média geométrica entre o cateto $\overline{AB}$ e a hipotenusa encontrada no item anterior.

a)	b)

Aula 5

Conteúdo: Equação do 1º grau.

Habilidade: Nessa aula, trabalharemos as seguintes habilidades da BNCC:

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Objetos do conhecimento: Equações do 1º grau.

Objetivo: Construir a raiz de uma equação do 1º grau.

Materiais utilizados: Régua, compasso, lápis, borracha e uma folha de atividades.

Desenvolvimento da aula:

- O professor deve iniciar a aula revisando o conteúdo equação do 1º grau. Nesse caso, é importante ressaltar que a raiz de uma equação do 1º grau pode ser representada sempre por uma divisão.
- É importante também que o professor explique que, geometricamente, não é possível construir uma raiz negativa e que, portanto, trabalharemos com a resolução de equações do tipo: $ax - b = 0$, para $a\ e\ b$ não negativos. E que a construção da raiz dessa equação é a divisão de b por a.
- Em seguida, o professor pode iniciar a explicação de como será feita a construção da raiz da equação do 1º grau com auxílio da primeira atividade de classe. Lembrando, que essa atividade, os alunos devem fazer junto com o professor e, além disso, fazer o roteiro para que o aluno tenha o modo de fazer também por escrito.
- A segunda atividade o aluno deverá resolver sozinho, enquanto o professor orienta. Nesse momento, explicar ao aluno que não há necessidade de resolver a equação. Utilizar a ideia da divisão é prático e pode ser resolvido somente algebricamente.
- Feita a atividade é interessante que o professor discuta com os alunos esse exercício, e o corrija na lousa, se julgar necessário.
- Por fim, dar as orientações e dicas para as atividades de casa também é bem importante para que o aluno consiga entregar os exercícios de maneira correta e objetiva.

Abaixo, segue a folha de atividades da aula 5.

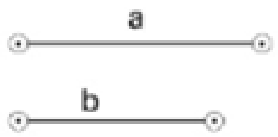
Nome do aluno:

Professor:

Aula 5 – Equação do 1º grau

Atividades de classe:

1. Dados os segmentos a e b, obtenha a raiz da equação $ax - b = 0$.



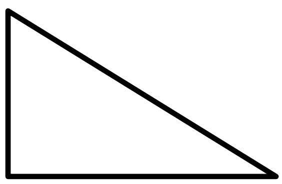
Roteiro:

2. Obtenha, utilizando régua e compasso, a raiz da equação: $3x - 9 = 0$.

Atividade de casa:

1. Obtenha, utilizando régua e compasso, a raiz da equação: $5 - 2x = 0$.

2. Sendo $AB = a$ e $AC = b$, determine a raiz da equação $ax - b = 0$, sendo AB e AC catetos do triângulo abaixo:



Aula 6

Conteúdo: Equação do 2º grau, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e $c \geq 0$.

Habilidade: Nessa aula, trabalharemos as seguintes habilidades da BNCC:

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Objetos do conhecimento: Equações do 2º grau.

Objetivo: Construir a(s) raiz(es) de uma equação do 2º grau.

Materiais utilizados: Régua, compasso, lápis, borracha e uma folha de atividades.

Desenvolvimento da aula:

- O professor deve iniciar a aula revisando o conteúdo equação do 2º grau. É importante explicar que teremos uma divisão do conteúdo em 3 partes, dependendo do valor de c.
- Trabalhar com os alunos, algebricamente, o que acontece com a equação do 2º grau quando $c = 0$, para que fique mais fácil de visualizar, do que somente dividir dois segmentos, como na equação do 1º grau é suficiente. Nesse momento já será possível realizar a atividade 1 da classe.
- Para a construção da atividade 2, o professor deve começar explicando ao aluno que a equação a ser construída deverá estar na forma onde o segundo membro seja igual a zero e o valor de a seja igual a 1, e que, caso isso não aconteça, é necessário dividir todos os termos por a antes de começar a construção. Em seguida, explicar que quando $c > 0$, teremos duas raízes de sinais iguais, e que por se tratar de construções, utilizaremos dos módulos delas e do módulo de b, para a construção. Assim, o professor pode realizar a atividade 2 da classe.
- A terceira atividade o aluno deverá resolver sozinho, enquanto o professor orienta. Nesse momento, é importante explicar ao aluno que não há necessidade de resolver a equação por métodos algébricos.
- Feita a atividade é interessante que o professor discuta com os alunos esse exercício, e o corrija na lousa, se julgar necessário.
- Por fim, dar as orientações e dicas para as atividades de casa também é bem importante para que o aluno consiga entregar os exercícios de maneira correta e objetiva.

Abaixo, segue a folha de atividades da aula 6.

Nome do aluno:

Professor:

Aula 6 – Equação do 2º grau

Atividades de classe:

1. Obtenha, utilizando régua e compasso, a raiz da equação: $4x^2 - 8x = 0$..

Roteiro:

2. Obtenha, utilizando régua e compasso, as raízes da equação: $2x^2 + 12 = -10x$.

Roteiro:

3. Obtenha, utilizando régua e compasso, as raízes da equação: $x^2 + 5x + 2 = 0$.

Atividade de casa:

1. Obtenha, utilizando régua e compasso, as raízes da equação: $2x^2 + 4 = -6x$.

2. Obtenha, utilizando régua e compasso, a(s) raiz(es) da equação: $x^2 + 4 = -4x$.

Aula 7

Conteúdo: Equação do 2º grau, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e $c < 0$.

Habilidade: Nessa aula, trabalharemos a seguinte habilidade da BNCC:

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Objetos do conhecimento: Equações do 2º grau.

Objetivo: Construir a(s) raiz(es) de uma equação do 2º grau.

Materiais utilizados: Régua, compasso, lápis, borracha e uma folha de atividades.

Desenvolvimento da aula:

- Nessa aula, o professor deve começar relembrando que a equação a ser construída deverá estar na forma onde o segundo membro seja igual a zero e o valor de a seja igual a 1, e que, caso isso não aconteça, é necessário dividir todos os termos por a antes de começar a construção.
- Em seguida, explicar que quando $c < 0$, teremos duas raízes de sinais contrários, e por isso, a importância de explicar que na construção determinaremos os módulos das raízes. Nesse momento, o professor já pode realizar a primeira atividade de classe.
- A segunda atividade o aluno deverá resolver sozinho, enquanto o professor orienta. Nesse momento é importante explicar ao aluno que não há necessidade de resolver a equação.
- Feita a atividade é interessante que o professor discuta com os alunos esse exercício, e o corrija na lousa, se julgar necessário.
- Por fim, dar as orientações e dicas para as atividades de casa também é bem importante para que o aluno consiga entregar os exercícios de maneira correta e objetiva.

Abaixo, segue a folha de atividades da aula 7.

Nome do aluno:

Professor:

Aula 7 – Equação do 2º grau

Atividades de classe:

1. Obtenha, utilizando régua e compasso, a(s) raiz(es) da equação: $x^2 - 2x - 5 = 0$.

Roteiro:

2. Obtenha, utilizando régua e compasso, as raízes da equação: $3x^2 - 6 = 6x$.

Atividade de casa:

1. Obtenha, utilizando régua e compasso, as raízes da equação: $2x^2 - 8 = -6x$.

2. Obtenha, utilizando régua e compasso, a(s) raiz(es) da equação: $x^2 - 5 = -4x$.

Aula 8

Objetivo: Realizar uma atividade de conclusão da sequência de atividade de Desenho Geométrico.

Essa aula é destinada a conclusão das atividades propostas. Essa conclusão pode ser realizada de várias maneiras e cada professor deve verificar qual será a melhor maneira de concluir a proposta, de acordo com a sua turma.

Abaixo, seguem algumas sugestões para que o professor possa aplicar em sua aula, baseadas em atividades propostas por Silva (2020) e Nunes (2021).

Sugestão 1

A primeira sugestão é que seja utilizada a ideia de mapas conceituais ou nuvem de palavras, para que o aluno diga quais conceitos foram aprendidos durante as atividades. Pode ser feita em grupos ou em um único grupo da sala inteira. Outra sugestão bem parecida, seria uma lista de pontos positivos e negativos das atividades propostas.

Sugestão 2

O professor pode pedir para que cada aluno prepare uma apresentação de uma das construções realizadas em casa. Podendo ser em forma de vídeo, apresentação de slides, entre outros, explicando o que aprendeu naquela construção. Nesse caso, seria interessante que o professor já fizesse essa sugestão quando começassem as aulas propostas, assim, o aluno prepararia seu material de apresentação. E nessa última aula, realizasse a apresentação dessas atividades.

Sugestão 3

Nessa sugestão, deixamos a opção de uma avaliação dissertativa individual, ou como costumamos chamar no dia a dia, uma prova. Nesse caso seria interessante pedir aos alunos que façam alguns exercícios que foram aplicados durante a atividade aqui sugerida.

Lembrando que fica a critério do professor quais exercícios ele acharia conveniente cobrar, ademais, para efeito de notas, além dessa prova ele pode estar considerar, também, os exercícios realizados durante a proposta.

Seguem, abaixo, algumas sugestões de exercícios para serem realizados no dia da prova. Sugerimos não cobrar mais do que três exercícios, para que o aluno consiga realizar a avaliação com calma e com capricho.

Nome do aluno:

Professor:

Aula 8 – Prova Final

1. Sendo $a = 3cm$, b= $2cm$, obtenha graficamente o segmento x, sendo $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Sendo $a = 4cm$, b= $2{,}5cm$ e $c = 6cm$, obtenha graficamente o segmento x, sendo $x = \frac{b \cdot c}{a}$.

3. Obtenha, utilizando régua e compasso, as raízes da equação: $x^2 + 6x - 3 = 0$.

Sugestão 4

Em sala de aula, propor alguns exercícios de revisão. Esses exercícios podem ser inéditos ou a correção dos exercícios realizados em casa. Nesse caso, fica a critério do professor decidir quais temas seriam cobrados nesses exercícios. Afinal, cada turma tem a sua particularidade e cabe ao professor encaixá-la na sua realidade. Caso queira realizar exercícios inéditos, juntar os alunos em grupo e apresentar um exercício desafio, pode ser uma proposta interessante.

Segue, abaixo, um exercício desafio e sua resposta, e em seguida, a folha que o professor poderá utilizar em sua aula. Esse exercício é inédito e poderá ser utilizado em sua última aula. Esse exercício pode ser encontrado em Wagner (2015).

Aula 8 – Exercício desafio

1. Dados os segmentos a e b encontre os segmentos x e y tais que:

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2 \end{cases}$$

Roteiro:

1) Traçar uma reta e nomear um ponto M. Em seguida, obter N na reta tal que $MN = a$.

2) Construir o semicírculo de diâmetro $\overline{MN}$.

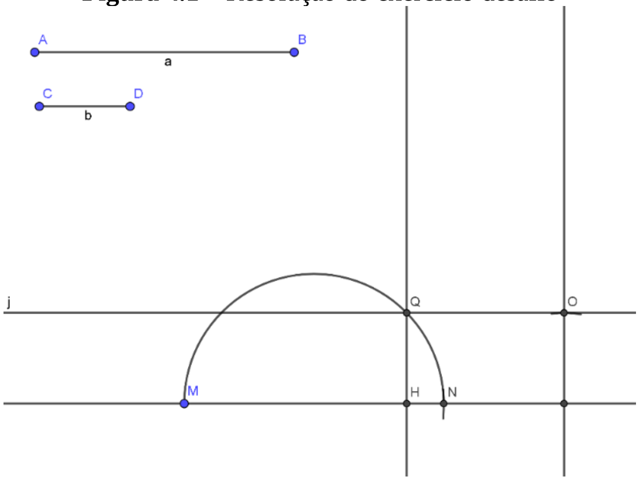
3) Construir uma reta paralela à reta $\overleftrightarrow{MN}$, cuja distância é igual a b. Obter o ponto Q no semicírculo onde a reta o intercepta. Observação: escolher somente um dos pontos.

4) Pelo ponto Q, faça a CE1b, em relação à reta $\overleftrightarrow{MN}$, obtendo o ponto H nessa reta.

5) Os segmentos $\overline{MH}$ e $\overline{HN}$ possuem as medidas procuradas.

Construção:

Figura 4.1 – Resolução do exercício desafio



Fonte: Autora

Justificativa:

No exercício é dado que $xy = b^2$, logo temos que b será a média geométrica de x e y. Para construir a média geométrica, o diâmetro do semicírculo é a soma de dois segmentos, que aqui serão representados por $a = MN = x + y$. Por construção, obtemos o ponto H, que divide $\overline{MN}$ nos segmentos $\overline{MH}$ e $\overline{HN}$, os quais serão os valores de x e y pedidos no exercício.

Aqui, vale ressaltar, que os alunos podem utilizar a ideia de soma e produto e construir a equação do 2º grau. Realizar essa atividade em aula ou talvez em grupo, pode ser um diferencial importante para que os alunos possam interagir entre eles e com o professor, trocar ideias e fazer a construção do modo que eles conseguiram pensar e resolver de maneira correta.

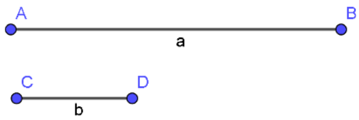
Nome do aluno:

Professor:

Aula 8 – Exercício desafio

1. Dados os segmentos a e b encontre os segmentos x e y tais que:

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2 \end{cases}$$



CONCLUSÃO

Ao concluir esse trabalho, muitos aprendizados e percepções foram assimiladas ao longo de sua execução. Pude conhecer sobre a trajetória da disciplina de Desenho Geométrico e foi algo interessante, pois a parte histórica nos conta muito sobre o que temos hoje. Inclusive, ela conseguiu me mostrar o porquê dessa disciplina vir desaparecendo ao longo dos anos e como ela vem sendo abordada na BNCC. Infelizmente, com a nova BNCC, essa disciplina terá pouca aplicação em sala de aula, já que ela aparece timidamente ao longo dos 6º, 7º e 8º anos apenas, sem nenhuma habilidade muito específica.

Com esse trabalho, espero que ele possa servir como uma fonte de sugestões para professores que queiram trabalhar esse conteúdo em sala de aula, podendo dar continuidade à disciplina como maneira de aperfeiçoamento, além disso, quis, também, aproximar as resoluções de expressões algébricas envolvendo o Desenho Geométrico, pensando em uma nova maneira de enxergá-las.

Conheci muito das construções geométricas, aqui presentes, durante meus anos de profissão, mas aprendi, com esse trabalho, construções novas, como, por exemplo a construção das raízes de uma equação do 2º grau. Construções possíveis de serem feitas com alunos do Ensino Fundamental, sendo dadas uma boa base de construções elementares. Também foi novidade pensar em construir a raiz de uma equação do 1º grau como uma simples divisão de segmentos. Às vezes, prendemo-nos demais na parte algébrica, e quando nos damos a oportunidade de olhar diferente, o aprendizado é ainda maior. Algo que também me chamou muito a atenção e que, às vezes, em sala de aula não é tão comentado, é o caso das notações geométricas. Saber diferenciar um segmento e sua medida são assuntos que devem ser abordados para que a linguagem geométrica seja bem trabalhada.

Ao elaborar a parte desse trabalho de propor uma sequência de atividades para que um professor possa aplicar em sala de aula, foi necessário ter um olhar diferenciado sobre como apresentar uma proposta para outro professor, já que é bem diferente de apresentar a um aluno. Procurei colocar roteiros que o professor possa utilizar diretamente em sala de aula, com espaços corretos para a construção e exercícios para fazer em sala de aula e em casa. Deixando assim, uma proposta de avaliação para o professor e de aprendizado ao aluno.

Espero que esse trabalho possa contribuir de forma significativa para que o professor se sinta seguro em aplicá-lo em sala de aula, e que os alunos possam aproveitar uma maneira diferente de observar uma relação entre a Álgebra e a Geometria. Espero, ainda, que ele sirva como uma fonte de referência para os que desejam aprofundar seus conhecimentos nas construções geométricas envolvendo expressões algébricas e para aqueles que se interessem sobre a história da disciplina de Desenho Geométrico no Brasil.

Em tempos mais atuais, que esse trabalho possa servir de base para que o professor possa fazer uma aplicação do mesmo material, porém utilizando recursos tecnológicos (aplicativos ou softwares), como por exemplo, o Geogebra, software utilizado pela autora para realizar as figuras contidas nesse trabalho.

BIBLIOGRAFIA

ALVES, Andréia Rodrigues. **O Desenho Geométrico no 9º ano como estratégia didática no Ensino da Geometria**.2017.78f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Universidade Federal de Alagoas – Maceió, 2017.

BARBOSA, Ana Carolina Igawa. **Aprendizagem Significativa Do Conceito De Polígono: Uma Sequência Didática Para O Sexto Ano Do Ensino Fundamental.** 2018. 178f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. Disponível em <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.1409 > . Acesso em: 29 de julho de 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em:< http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 08 de junho de 2020.

COSTA, Evandro Alexandre da Silva. **Analisando Algumas Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática no Ensino e Aprendizagem da Disciplina Desenho Geométrico por meio da Teoria Fundamentada.** 2013. 242f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013. Disponível em <http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/3320/1/DISSERTAÇÃO_AnalisandoPotencialidadesPedagógicas.pdf> . Acesso em: 23 de dezembro de 2020.

COSTA, E. A. da S.; ROSA, M. **Fragmentos Históricos Do Desenho Geométrico No Currículo Matemático Brasileiro.** In: VII Encontro Mineiro de Educação Matemática – VII EMEM, São João Del-Rei, Minas Gerais, 2015.

DOLCE, Osvaldo; HAZZAN, Samuel; IEZZI, Gelson; MACHADO, Nilson; MURAKAMI, Carlos; POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar** -Volume 9 - Geometria Plana. São Paulo: Atual, 1985.

FANTINI, Roberto . **Geometria com Riga e Compasso**.2009.36f. Liceo “Rihi” Cesena, 2010. Disponível em < https://www.yumpu.com/it/document/read/15718524/costruzioni-con-riga-e-compasso-roberto-fantini>. Acesso em 27 de junho de 2020.

GOMES, Fabricio de Jesus Leite. **Construções Geométricas Teoria e Aplicação.** 2017. 65f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) – Departamento de Matemática - Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em <https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/31093/1/2017_FabríciodeJesusLeiteGomes.pdf> . Acesso em: 23 de dezembro de 2020.

LAMPHIER, Lesley . **Geometric Construction**.2004.36f. MSM Creative Component – Iowa State University – Fall, 2004. Disponível em <https://orion.math.iastate.edu/dept/thesisarchive/MSM/LamphierMSMF04pdf.pdf>. Acesso em 27 de junho de 2020.

LUGLI, Ronaldo. **Não Precisamos de Régua, sim de Álgebra e Compasso.** 2014. 49f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2014. Disponível em <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/108816> . Acesso em: 18 de junho de 2020.

MACHADO, Rosilene Beatriz. **Entre Vida e Morte: Cenas de um Ensino de Desenho.** 2012. 254f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/96462> . Acesso em: 12 de setembro de 2020.

NUNES, Tamires Rigoti. **Sequência Didática de Estatística Contextualizada com a Pandemia de COVID-19 para o 8º ano do Ensino Fundamental**.2021.104f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT – Universidade Estadual de Santa Cruz – Bahia, 2021.

OLIVEIRA, Lucas Maken da Silva. **Ensinando Geometria com Régua e Compasso, uma Proposta para o 8º ano.** 2015. 100f. Dissertação (Mestrado) - Centro de Ciências e Tecnologia - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015. Disponível em <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/27112015Lucas-Maken-da-Silva-Oliveira.pdf > . Acesso em: 20 de julho de 2021.

PIASESKI, Claudete Maria. **A Geometria no Ensino Fundamental.** 2010. 36f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Departamento de Ciências Exatas e da Terra - Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI, Erechim., 2010. Disponível em <https://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1271.pdf> . Acesso em: 27 de junho de 2020.

PIMENTEL, Jailson . **O ensino de Geometria por meio de Construções Geométricas.** 2013. 129f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013. Disponível em <http://repositorio.ufes.br/bitstream/10/4815/1/tese_6778_Dissertação_final_corrigida_JailsonPDF.pdf > . Acesso em: 20 de julho de 2021.

SALGADO, Jacymar de Almeida. **Reflexões quanto à importância das Construções Geométricas no ensino da Geometria Plana**.2013.99f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – Seropédica, 2013.

SILVA, Helaine Pereira da. **O Uso de Mandalas como Estratégia para o Ensino de Simetrias**. 2020.77f. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional - Instituto Federal de São Paulo, São Paulo, 2020.

TRINCHÃO, Gláucia Maria Costa. **O Desenho Como Objeto de Ensino: História de uma Disciplina a partir dos Livros Didáticos Luso-Brasileiros Oitocentistas**. 2008. 494f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade do Vale do Rio dos Sinos/ UNISINOS – São Leopoldo, 2008.

TUNALA, Nelson. **Resolução geométrica da equação do 2º grau**. *RPM –Revista do Professor de Matemática.* Rio de Janeiro, v. 12, 1988.

VARHIDY, Charles Georges Joseph Louis. **Desenho Geométrico: Uma ponte entre a álgebra e a Geometria.** Resoluções de Equações pelo Processo Euclidiano **.** 2010. 90f. Dissertação em Educação Matemática (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em <http://www.repositorio.ufop.br/jspui/bitstream/123456789/3315/1/DISSERTAÇÃO_DesenhoGeométricoPonte.pdf> . Acesso em: 22 de agosto de 2020.

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas**. 2015. p.95 IMPA/OBMEP. Rio de Janeiro, 2015. Disponível em <http://www.obmep.org.br/docs/apostila8.pdf>. Acesso em 15 de outubro de 2021.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da Régua e do Compasso: As Construções Geométricas Como um Saber Escolar no Brasil.** 2001. 211f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001. Disponível em <https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/FAEC-85DGQB/1/zuin_elenice_disserta_nopw.pdf> . Acesso em: 16 de dezembro de 2020.