UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA – UFOB
CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MODELO DIDÁTICO-PRAXEOLÓGICO ALTERNATIVO PARA ENSINO DE OBJETOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA: ELO ENTRE O ENSINO MÉDIO E O SUPERIOR

PEDRO JOSÉ DEFENSOR MENEZES

BARREIRAS/BA
2021

PEDRO JOSÉ DEFENSOR MENEZES

MODELO DIDÁTICO-PRAXEOLÓGICO ALTERNATIVO PARA ENSINO DE OBJETOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA: ELO ENTRE O ENSINO MÉDIO E O SUPERIOR

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de pós-graduação em Matemática em Rede Nacional. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Campus Reitor Edgard Santos.

Orientador: Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho (CCET/UFOB).

BARREIRAS/BA
2021

FICHA CATALOGRÁFICA

M541 Menezes, Pedro José Defensor

Modelo didático-praxeológico alternativo para ensino de objetos da Geometria Analítica: elo entre o Ensino Médio e o Superior. / Pedro José Defensor Menezes. – 2021.

71f.: il

Orientador: Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho

Dissertação – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias - Barreiras, BA, 2021.

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Geometria Analítica. I. Carvalho, Edmo Fernandes. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. III. Título.

CDD 510.7

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

Pedro José Defensor Menezes

Modelo didático-praxeológico alternativo para ensino de objetos da geometria analítica:
elo entre o Ensino Médio e o Superior

Dissertação de mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/Universidade Federal do Oeste da Bahia

Barreiras – BA, data da aprovação: 07 de junho de 2021.

Composição da Banca Examinadora

Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho – Orientador
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Prof. Dr. Luiz Marcio Santos Farias – Membro Externo
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. Fábio Nunes da Silva – Membro Interno
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Dedico este trabalho aos meus pais, Defensor e Neide, por toda dedicação e compreensão ao longo do curso e pelo incentivo à realização deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que mesmo em tempos difíceis que enfrentamos, me deu saúde e disposição que permitisse a realização deste trabalho e que ele possa confortar a todos familiares que perderam parentes ou amigos durante a pandemia.

Aos meus pais José Defensor e Neide Aparecida, por todo o carinho, dedicação e esforço na concretização de um mais um sonho que hoje podemos desfrutar juntos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Edmo que teve papel fundamental na elaboração deste trabalho, compartilhando do seu conhecimento, da sua disposição e do seu tempo em prol da educação.

Aos meus irmãos, Geisa e Sócrates, o qual sempre pode contar com incentivos e inspirações.

A todos dessa instituição, UFOB, que desde a graduação, vem permitiram que eu continuasse a trilhar e aperfeiçoar meu caminho profissional e não podendo destacar os meus professores, que com toda a dedicação, compartilharam seus conhecimentos.

Aos professores e colegas do IFBA, no qual também fez parte do início dessa jornada.

Aos meus amigos e colegas, pelo companheirismo e disponibilidade para me auxiliar em vários momentos, em especial a minha prima-irmã Georgia.

RESUMO

A prática de ensino do professor e seus efeitos na formação dos alunos são ação e consequência que merecem ser analisadas para melhorar o ensino e aprendizado. É sob esse olhar que a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard, é uma das bases desta pesquisa para explicar como se apresentam as relações dos sujeitos com o saber no ecossistema da sala de aula, acerca da Geometria Analítica. Além disso, acrescenta-se à composição teórica do presente trabalho as noções de fenômenos didáticos, da organização praxeológica e das atividades matemáticas no contexto escolar brasileiro, como bases para análise das práticas do ensino da matemática. A presente investigação visa compreender como se dá a transição do Ensino Médio para o Ensino Superior a partir da análise de praxeologias de dois livros didáticos. Pretende também propor um modelo didático-praxeológico alternativo para o estudo de objetos da Geometria analítica, a partir de tarefas de exploração de significados desses objetos. Como referência metodológica, utiliza-se especialmente uma análise que tem como ingredientes aspectos da Análise Praxeológica e institucional, que dão direcionamento para o estudo das possíveis dificuldades dos estudantes no domínio da Geometria Analítica, bem como à ressignificação da prática docente na proposição e experimentação de modelos didáticos. Tais análises apontam para a necessidade de proposição de tarefas que exploram o significado dos objetos matemáticos e dos procedimentos de resolução que compõem um modelo didático-praxeológico alternativo, sendo analisado a priori, mas que aponta para possibilidade de práticas pautadas numa nova matemática.

Palavras-chave: Análise praxeológica. Geometria Analítica. Ensino e Aprendizagem. Modelo Didático-praxeológico.

ABSTRACT

The teaching practice and its effects on the formation of students are actions and consequences that need to be analyzed to improve teaching and learning. It is under this perspective that the Anthropological Theory of the Didactic, developed by Yves Chevallard, is one of the bases of this research to explain how the relationship between subjects and knowledge, regarding Analytical Geometry, are presented in the classroom ecosystem. Moreover, in addition to the theoretical composition of the present work, the notions of didactic phenomena, the praxeological organization, and mathematical activities in the context of Brazilian schools are also added as bases for analyzing the practices of mathematics teaching. The aim of this investigation is to understand how the transition from High School to Higher Education takes place from the analysis of praxeologies of two textbooks. It also intends to propose an alternative didactic-praxeological model for the study of objects of Analytical Geometry by exploring the meanings of these objects. As a methodological reference, an analysis that has as "ingredients" both aspects of Praxeological and Institutional Analysis is especially used, which give direction to the study of the possible difficulties of students in the field of Analytical Geometry, as well as the resignification of teaching practice in the proposition and experimentation of didactic models. Such analysis point to the need for task propositions that explore the meaning of mathematical objects and resolution procedures that compose an alternative didactic-praxeological model, which is analyzed previously, however, pointing to the possibility of practices based on a new mathematics.

Keywords: Praxeological analysis. Analytical Geometry. Teaching and learning. Didactic-praxeological model.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), a geometria é uma parte fundamental para o currículo de Matemática no Ensino Básico, pois desenvolve ao estudante uma compreensão, de forma organizada, do mundo em que vive, possibilitando-o a capacidade de investigar, argumentar, representar, demonstrar e resolver problemas. E a Base Nacional Curricular Comum – BNCC (BRASIL, 2018) aponta com umas das cincos unidades do conhecimento da matemática no Ensino Médio e deve retomar, ampliar e sistematizar os conhecimentos estudados nos anos anteriormente de modo a possibilitar aos estudantes a compreensão da estrutura lógica da geometria euclidiana.

Entre os mais diversos campos da Geometria, há o campo da Geometria Analítica, que ocupa um lugar de destaque, por estabelecer um elo entre a Geometria e a Álgebra, no qual os elementos e propriedades geométricas são estudados algebricamente, levando o estudante a conhecer outros modelos, diferente da geometria euclidiana.

O que motivou a pesquisa foi a observação de uma grande dificuldade que graduandos em Matemática possuem com a disciplina Geometria Analítica (que a partir daqui será chamada por GA), na qual, em determinados estudantes, é possível enxergar com certa facilidade os modelos apresentados, bem como suas propriedades e outras ferramentas matemáticas, mesmo para quem não a estudou no Ensino Médio. Sendo monitor três vezes da disciplina GA, o autor desta pesquisa pôde ver mais de perto este problema. Diante disso, fez da sua monografia da graduação um laboratório experimental para aplicação de uma metodologia de ensino alternativa àquela que era proposta naquela instituição de Ensino Superior. Aplicando o software GeoGebra, obteve resultados satisfatórios. Desde então, suas pesquisas começaram a se basear nas competências dos alunos na disciplina e os problemas que são encontrados para a compreensão dos conteúdos. Foi em uma dessas caminhadas que obteve a oportunidade de ser professor substituto, da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), podendo lecionar o componente curricular GA.

Algumas inquietações surgiram dessas vivências, que foram ampliadas pela experiência na docência no Ensino Superior como professor de GA. Ensejava saber qual a natureza das dificuldades em GA, por parte dos graduandos da UFOB? Qual o papel da GA no currículo e na formação de um futuro professor de Matemática? E na formação de futuros profissionais de outras áreas?

Foi no curso de mestrado, que pôde conhecer um pouco da Teoria Antropológica do Didático-TAD (CHEVALLARD, 1999), dar continuidade à pesquisa das dificuldades dos estudantes no conteúdo de Geometria Analítica por outro espectro e ressignificar a prática docente, considerando que "é pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem é que se pode melhorar a próxima prática" (FREIRE, 1996, p.18).

Foi nesse sentido, de pensar criticamente na prática de hoje e de ontem, que foi possível vislumbrar a possibilidade de investigar elementos da passagem do Ensino Médio para o Superior, no que tange o ensino da GA, tomando como eixo central as tarefas propostas nesses dois níveis de ensino. Parte das dificuldades encontradas por estudantes seja no ensino básico, seja no superior possivelmente deve-se ao tipo de tarefa que se propõe para estabilizar os conhecimentos de determinados saberes matemáticos.

O objetivo geral deste trabalho é propor e analisar um modelo didático-praxeológico alternativo para ensino de objetos da Geometria Analítica que considera a significação dos objetos como elo na passagem do Ensino Médio para o Superior.

Quanto a estrutura, esta dissertação foi dividida em três capítulos, além da introdução e conclusões. No Capítulo 1 há a discussão do referencial teórico e o percurso metodológico frente à problemática da pesquisa e os fenômenos didáticos subjacentes, acerca da abordagem praxeológica proposta por Chevallard (1992) na Teoria Antropológica do Didático (TAD). Já no Capítulo 2 tem a análise das praxeologias existentes em dois livros didáticos, um do Ensino Médio e outro do Ensino Superior, de modo a caracterizar lacunas na transição dos dois níveis no que se refere a GA. E, por fim, no Capítulo 3 propõe um modelo praxeológico de referência alternativo para os trabalhos com tópicos da GA, discutidos nessa investigação como pontos complexos na difusão dos saberes do referido domínio matemático.

Considerando o exposto até aqui, pode-se delinear uma pergunta que norteou esta investigação, que no contexto apresentado, de uma pesquisa no âmbito da Epistemologia Experimental (Didática da Matemática), será chamado de problema didático de investigação e nesse recorte, se alicerçará em noções fundamentais da TAD[1]. Dito isso, no tópico a seguir, será apresentado o referido problema.

[1] Noções de Objeto, Pessoas, Relação Pessoal, Instituição, Relação Institucional apresentada por Ives Chevallard 2002.

PROBLEMA DA PESQUISA

O ensino da Matemática, principalmente na disciplina de Geometria Analítica, nas instituições de Ensino Superior consiste em um importante desafio para o professor, pois os alunos apresentam certas dificuldades, ou por não ter visto no Ensino Médio, ou por não ter compreendido todos os conceitos que a disciplina emprega. Com isso os professores avaliam em revisar e nivelar os alunos, ocupando o tempo de aula não disponível para disciplina que por si só precisariam de ainda mais tempo.

Estudos apontam que o nível de deficiência de aprendizado dos alunos em Matemática ainda é muito alto (COSTA JÚNIOR & SILVA, 2014; GONZATTO, 2012; MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2004; SILVA & SILVA, 2016; SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2003) e este grau é ainda mais elevado no que concerne ao conhecimento de conteúdos da Geometria Analítica, como destaca Vaz, Nasser e Torraca (2015).

Nesse contexto, deve-se reavaliar o Ensino Médio, analisar as propostas que estão disponíveis e discutir alternativas complementares para que o aluno consiga chegar ao Ensino Superior com um nível de aprendizagem básica satisfatória, o que implicará na compreensão de técnicas e justificativas para as mesmas para tarefas propostas.

Diante disso, as problemáticas norteadoras deste trabalho são: quais as dificuldades encontradas pelos alunos no Ensino Médio? Como é apresentado o conteúdo de Geometria Analítica nos livros do Ensino Médio? Quais as contribuições podem ser feitas para uma melhor compreensão do conteúdo?

JUSTIFICATIVA

De acordo com Azevedo (2018), a Geometria Analítica trata das relações entre as equações algébricas e os objetos geométricos e possui várias aplicações em outras áreas do conhecimento, como na Medicina nos exames por imagem, na Engenharia para a projeção para simulações de cenários virtuais, nos sistemas de localização dos radares dos aeroportos, na Computação Gráfica para criação de jogos, na Física em relação aos movimentos dos corpos em função do tempo e no Sistema de Posicionamento Global (GPS).

Este conteúdo da Geometria utiliza as representações algébrica e gráfica e, sobretudo, na mudança da primeira para a segunda é muito comum observar dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos. Como consequência dessas dificuldades, observa-se um número bastante elevado dos índices de reprovações na disciplina Matemática quando o tema abordado se refere à Geometria Analítica. Essa deficiência ocorre, muitas vezes, devido à falta de entendimento no que concerne ao conceito de vetor. Isso porque, tradicionalmente, os professores lecionam a disciplina através de exposição com uso de pincel e quadro branco, sem a utilização de qualquer recurso tecnológico.

Essas dificuldades também foram constatadas pelo autor desta pesquisa quando, por cinco, vezes lecionou a disciplina de GA, em sua experiência como Professor Substituto da Universidade Federal do Oeste da Bahia, onde pôde observar a grande evasão e os problemas enfrentados pelos alunos na aprendizagem dos objetos prescritos na ementa da referida disciplina, motivo pelo qual o autor optou por pesquisar o ensino de GA do Ensino Médio ao Superior.

Nessa caminhada foi observado a falta de base no conhecimento, por parte do aluno, no que se refere a disciplina de GA ao ingressar no Ensino Superior (ES) e a grande falha encontrada no ensino da disciplina no Ensino Médio (EM).

Muitos dos Livros Didáticos (LD’s) apresentam a disciplina com fórmulas prontas e, em seguida, os exercícios como meras aplicações diretas para sua memorização, como exemplos, “escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(1,3)$ e $B(2,6)$”; “calcule a distância entre os pontos $C(3,2)$ e $D(7,4)$”; “calcule a distância do ponto $E(2,5)$ à reta $12x + 7y + 1 = 0$”, limitando os alunos a memorizar fórmulas e reproduzi-las em exercícios. Sendo esse o maior problema encontrado pelos professores do ES, encontram bloqueio por parte dos alunos ao deixar o método tradicional para desenvolver o dedutivo e o demonstrativo, assim citado também por Robert e Schwarzenberger (1991):

> Mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. (ROBERT e SCHWARZENBERGER, 1991, p. 133)

Assim, diante da necessidade de mais pesquisas acerca das dificuldades que os alunos encontram na disciplina de GA no ES e a grande evasão que essa disciplina sofre, é relevante analisar o caminho percorrido do EM ao superior e verificar os fatores que interfere na aprendizagem básica do aluno. Além disso, pesquisas relacionadas ao tema são, notoriamente, um campo de estudos importante e de grande interesse para a formação profissional do autor, licenciando em matemática.

CAPITULO 1 - REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO E PERCURSO DA INVESTIGAÇÃO

Para o desenvolvimento desta pesquisa, será utilizada como base a Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Yves Chevarllard (1998). Além desta teoria, será também ideal a compreensão de como se dão os fenômenos didáticos, a organização praxeológica e como são tecidas as atividades matemáticas no contexto escolar brasileiro, para análise das práticas do ensino da matemática. Na sequência, serão apresentados os aspectos metodológicos da investigação em consonância com o referencial teórico adotado.

1.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Diante a necessidade de um olhar sobre a prática do professor no seu cotidiano de ensino, é elaborada a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1998), com o objetivo de analisar os desafios do professor na elaboração do seu curso de aulas e suas práticas no ensino da matemática, que é o objeto de estudo dessa teoria (SANTOS, MENEZES, 2015, p. 649). A Teoria Antropológica do Didático (TAD) surge como ampliação da Teoria da Transposição Didática, do mesmo autor, Yves Chevarllard, na tentativa de explicar as relações do saber dentro do ecossistema da sala de aula (SANTOS; MENEZES, 2015, p. 648).

Santos e Menezes (2015, p. 649) aponta os três conceitos essenciais da teoria de Chevarllard (1998): *objetos* (**O**), *pessoas* (**X**) e *instituições* (**I**), além de outros que podem surgir em seguida. A ideia do que é *objeto* (**O**) é análoga à teoria matemática dos conjuntos, em que tudo é conjunto, sendo neste caso todos os outros conceitos considerados objetos. A existência desse objeto (**O**) é dada por pelo menos um dos outros conceitos: pessoas (**X**) e instituições (**I**) (SANTOS; MENEZES, 2015, p. 650).

Quanto à definição dos outros conceitos, a saber, *pessoas* (**X**) e *instituição* (**I**), o deste último é: "um dispositivo social, total ou parcial, que impõe aos outros sujeitos formas de fazer e pensar que são próprias a cada 'tipo 'de 'forma 'de instituição" (SANTOS, MENEZES, 2015, p. 651). A definição proposta por Chevarllard (1998) para o conceito de pessoas (**X**) é definido em três estágios, conforme explicitam Santos e Menezes (2015, p. 652): *indivíduo* – não sujeito e nem flexível às relações cotidianas com objetos e instituições-, *sujeito* – que surge a partir da relação do indivíduo com a instituição (**I**)-, e *pessoa* – o conjunto de sujeitos de um indivíduo.

A relação desses três conceitos se dá primeiramente quando a pessoa (**X**) entra em contato com a instituição (**I**), na qual pode existir um objeto (**O**), chamado de *objeto institucional*, que com **X** forma uma *relação institucional* R (**X**, **O**), relação que poderá ser modificada ou alterada segundo a relação R (**I**, **O**). (SANTOS; MENEZES, 2015, p. 653). Ainda sobre essa relação, Henriques, Attie e Farias (2007, p. 59) dizem que o objeto (**O**) só passa a existir mediante tal relação, e, além disso, determina como a pessoa (**X**) conhece o objeto (**O**) que tem contato. Da mesma forma ocorre na relação R (**I**, **O**). Em conformidade com que Santos e Menezes (2015, p. 653) sintetizam, "havendo alteração em R (**X**, **O**) então haverá aprendizagem da pessoa **X** sobre o objeto (**O**)", porém, não será de maneira didática quando a instituição (**I**) não agir sobre esta relação.

As relações mencionadas no parágrafo anterior caracterizam parte do sistema didático S (X, y, O), em que X representa um grupo de estudantes, y uma pessoa que difunde o saber numa dada instituição, e O, as obras produzidas ou mediadas na mesma instituição. No que tange a problemática exposta na introdução dessa dissertação, inferimos que as relações do tipo R (X, O) e R (I, O) têm alguma discrepância, ou seja, não foram bem construídas. Isso é o que pode justificar o fato de estudantes no ensino básico avançarem para o superior, sem a compreensão de conceitos básicos da GA, o que tem provocado situações de distanciamento ainda maior das pessoas (X) com os objetos do saber (O) estudados nos cursos de graduação. Tal fato nos levou a questionamentos acerca da transição do EM para o Superior, o que é feito via análise da difusão apresentada em LD's dos dois níveis de escolaridade.

Ademais, o que levará a instituição (**I**) ao desejo de fazer uma modificação ou alteração na relação R(**X**, **O**) será a introdução de um *sujeito primitivo*, com o objetivo de transformar as pessoas em modelos condizentes com a instituição. Quando essa introdução ocorre, as relações R(**X**, **O**) e R(**I**, **O**) entram em conformidade, visto que a pessoa (**X**) torna-se desejável à instituição (SANTOS, MENEZES, 2015, p. 651, 652).

Para a manutenção das conformidades da instituição (**I**) com **X** e **O**, surgem os *agentes reguladores*. Esses agentes são conforme a instituição (**I**) em questão, por exemplo: no caso da escola como **I**, os sujeitos (**X**), que seria os alunos, e seus objetos (**O**), os saberes, serão regulados a partir dos agentes professores, contrato didático e contrato institucional, avaliações e outros (SANTOS, MENEZES, 2015, p. 654). Entretanto, um desses mesmos agentes controladores da conformidade, a avaliação, pode não contribuir para a relação R(**X**, **O**) por retalhar os interesses do saber (**O**), levando os alunos (**X**) a não se preocuparem com as ações que devem tomar para entrarem em conformidade com a escola (**I**). Santos e Menezes (2015, p. 654) ainda falam quanto à avaliação que, por ser elabora em conformidade com os contratos pedagógico e didático, esta poderá ter um impacto na formação do saber (**O**) no cenário didático.

Dentro da TAD, há ainda a relação da instituição com um *instrumento*, desenvolvida pelo estudo de Rabardel (1995) sobre *situações de atividades instrumentais* (SAI), na qual o *instrumento* (**i**) vem a ser reconhecido na *instituição* (**I**). Assim, com os três conceitos primitivos definidos por Chevarllard, surgem essa interação com o *instrumento* de Rabardel (1995) que se torna um *instrumento* da *instituição*. Henriques, Attie e Farias (2007, p. 60) traduz essa ideia da seguinte forma:

> Um instrumento **i** existe oficialmente para uma instituição **I** se existem as relações denotadas R(**I**,**i**) e R(**I**,**O**), respectivamente, da instituição **I** ao instrumento **i** e da instituição **I** ao objeto **O**, que se traduzem por práticas existentes nessa instituição, seja ou não por meio de técnicas instrumentais de **i**. Assim, à luz da teoria antropológica e da instrumentação, podemos falar, por exemplo, da relação institucional às Integrais Múltiplas utilizando o ambiente computacional Maple, que denotamos por R(**I**,**i**)•R(**I**,**O**) ou simplesmente R[**I**,(**i**,**O**)], assegurando assim a utilização oficial de **i** nas práticas desenvolvidas em torno de **O**, em **I**.

Henriques, Attie e Farias (2007, p. 60) continuam explicitando que um *instrumento* (**i**) só virá a existir para uma *pessoa* (**X**) se houver uma relação entre eles R (**X**, **i**), assim também como uma relação pessoal determinante de **X** e **O**, R (**X**, **O**), que eles chamam de *relação pessoal às Integrais Múltiplas*, R [**X**, (**i**, **O**)].

Em vistas disso, nos estudos dos três conceitos principais da TAD de Chevarllard (1998) - alunos (**X**), saber (**O**) e escola (**I**) -, mostra-se evidente que existem alterações decorrentes da relação dos fatores por intenções variadas de cada um desses elementos. Devido a essas intenções, principalmente na relação dos alunos com os professores sobre o saber ensinado, sucedem vários fenômenos didáticos como o contrato didático, a transposição didática e a gestão de tempo (SANTOS, MENEZES, 2015, p. 654).

1.1.1 FENÔMENOS DIDÁTICOS

Conforme a síntese de Chevallard (2013) sobre a *teoria didática*, a tarefa dos didatas é analisar a forma como os professores lidam com a reação do aluno frente ao seu ensino. Essa tarefa se distingue da maioria das metodologias de outros cientistas que buscam apenas explicar como se dá determinado fenômeno em relação aos fatos. Chevallard (2013) ainda alerta para um desafio que essa tarefa didática enfrentará diante os *atores do sistema*, no caso os professores: estes podem contestar a forma de analisar o sistema educacional em que eles estão inseridos, devido a sua experiência cotidiana neste, ou seja, eles responderam com *fatos* a descrição do universal didático em *fenômenos*.

Os *fenômenos* aos quais Chevallard (2013, p. 05) se refere são as *construções teóricas*, simplificada por ele como “a contrapartida teórica ao mundo multifacetado dos fatos empíricos”, os quais a teoria irá definir somente com base nos fatos que estiverem ao alcance da sua linguagem e conceitos.

Os fenômenos didáticos são, conforme Menezes e Moser (2020, p. 602), instituídos em sala de aula e compostos por professores, alunos e saberes, quando há uma relação didática entre eles. Um desses fenômenos é investigado por Yves Chevallard chamado de *Transposição Didática* (1991). Neste fenômeno, existem duas etapas: a Transposição Didática Externa e a Transposição Didática Interna, sendo a primeira etapa a mais utilizada nos estudos da transposição didática.

Ainda segundo Menezes e Moser (2020, p. 602), a transposição didática para Chevallard (1991) é um conjunto de modificações que faz do saber mais acessível, através da didatização. Para isso ocorrer, é necessário um processo no qual o saber científico, ou teorizado, passe por modificações para que chegue às escolas, e também através do professor, que abstrairá este conhecimento durante a preparação das aulas do assunto a ser ensinado.

Esse processo de transformação se dá em um espaço que Chevallard (1991) chama de *noosfera*, composto pela comunidade responsável pelo que será ensinado na escola, no caso, os didatas, professores, pedagogos, técnicos da instituição e o órgão do governo responsável pela gestão do ensino no país, que no caso do Brasil é o Ministério da Educação (MEC). (MENEZES; MOSER, 2020, p. 603). E estes responsáveis elaboram instrumentos reguladores que definem qual saber deve ser ensinado nas escolas, através de programas, diretrizes curriculares e LD’s.

A relação que o professor tem com o saber, é a cerne para que o processo de Transposição Didática Interna ocorra. E esta relação, conforme Menezes e Moser (2020, p. 603) explicitam, é o que leva as diferenças dos saberes, que se dá por conta de: “concepções de ensino, formação pedagógica, influências da escola, projetos pedagógicos, entre outros”. E completam:

> A escolha na condução do conteúdo, o tempo de permanência do saber no cenário didático, as criações didáticas realizadas, as relações que estabelecem entre os conteúdos tratados e a forma como tratam os conteúdos reforçam a ideia de que a forma como o saber chega ao aluno, por parte do professor, dá-se, primeiramente, por essa ligação intrínseca professor-saber.

Dessa maneira, é perceptível a importância dessa relação professor-saber para o aprendizado do aluno. Entretanto, essa relação pode acarretar outro viés o qual também influencia no ensinoaprendizagem, que está na ideia que o professor tem dos seus alunos quanto aos seus obstáculos, dificuldades ou facilidades (MENEZES; MOSER, 2020, p. 605). Essas expectativas tanto dos professores como dos alunos fazem parte do *contrato didático*.

Conforme explica Menezes e Moser (2020, p. 605), o *contrato didático* é constituído por regras implícitas existentes na relação entre professor e aluno, na relação didática, em vista do saber. Essas regras determinam as responsabilidades que ambos possuem na geração de significados e apropriação do saber. Menezes e Moser (2020, p. 605) abordam ainda as discussões feitas por Chevallard (1999) sobre duas outras modalidades de contrato existentes no contexto escolar, conhecidas como *contrato pedagógico*, regulador da interação professor-aluno, e o *contrato escolar*, direcionador das instituições escolares. E esses contratos se relacionam.

Entretanto, esta relação atualmente tem passado por reestruturação de seus elementos, visto que a relação didática estimula a participação e a interação dos alunos como 'sujeitos de conhecimento', na qual os professores deixam de ser figuras centrais no processo de aquisição do conhecimento e passam a serem mediadores (MENEZES; MOSER, 2020, p. 606).

1.1.2 ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA

Organização praxeológica, ou só praxeologia, é um método de análise das "ações humanas institucionais" sobre o objeto de saber, particularmente as práticas de ensino da matemática (SILVA, HENRIQUES, SERÔDIO, 2017, p. 414).

A praxeologia, como explicitam Santana et al. (2010, p.4), é constituída por duas partes que são inseparáveis e interdependentes, que é a prática (*práxis*) e o saber (*logos*), concebidas a partir de quatro conceitos, que são: *tarefa*, *técnica*, *tecnologia* e *teoria*.

A *tarefa* (T) é a ação dos seres humanos que exige planejamento para ser realizada, uma manifestação antropológica da teoria, como ainda afirmam Santana, Januario, Costa, Possani e Amaral (2010, p.4). Também como afirmam Henriques, Attie e Farias (2007, p. 61, 62), *tarefas* ou exercícios são objetos relativamente precisos, ou seja, possuem *tipos* e *gêneros*, provenientes da instituição, os quais são de responsabilidade da didática suas reconstruções.

Técnicas (τ) são as diversas maneiras de realizar e cumprir as *tarefas*. Para cada *tarefa*, há uma ou um conjunto de *técnicas* diferentes que permitem a sua execução. Essas *técnicas* podem ser reconhecidas pela instituição ou formas alternativas advindas de outras instituições, que podem ser reconhecidas como eficazes (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 62).

Tecnologia (θ) é, conforme delimita Henriques, Attie e Farias (2007, p. 62), um "discurso racional" que tem a função tanto de *justificar* como de *explicar* a *técnica*, para garantir que as *tarefas* sejam executadas e os meios que levam às suas execuções sejam explanados. Apesar de serem assumidas de formas diferentes por uma dada tecnologia, no contexto matemático, *justificação* e *explicação* estão juntas, tradicionalmente, por conta das exigências demonstrativas.

Quanto à *teoria* (Θ), sua função é "justificar e tornar compreensível uma *tecnologia*" (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 62).

Por meio destas noções que a praxeologia é composta: *tarefa* e *técnica*, que fazem parte da prática (*práxis*), enquanto na parte do saber (*logos*) tem-se a *tecnologia,* que é denominada como "discurso racional" (SANTANA; JANUARIO; COSTA; POSSANI; AMARAL, 2010, p. 4), e também tem a *teoria*, a "tecnologia da tecnologia". Dessa maneira, *tecnologia* e *teoria* estão ligadas na intenção de buscar entender o que é feito na prática. Então, para que o processo praxeológico seja eficaz, deve os dois blocos, de *praxe* (saber-fazer) e *logos* (tecnológico-teórico), estejam empregados simultaneamente.

O modelo praxeológico, dessa forma, pode ser definido através destas ações humanas: *produzir, ensinar* e *aprender matemática*. Dessa forma, pode-se dizer que a *organização praxeológica*, relativa às atividades matemáticas, é uma *organização matemática*. Para identificar a *organização matemática* relativa a um determinado objeto matemático, é preciso analisar sua vida e compreender o significado deste para sua *instituição*, através de um "estudo ecológico dos LD's e de programas de curso" que irão permitir "obter dados oficiais de objetos do ensino visado" (HENRIQUES; ATTIE; FARIAS, 2007, p. 63).

Para isso, é importante conhecer outra abordagem da TAD, chamada de *ecologia dos saberes*, com bases nas noções ecológicas, a qual Chevallard (1994) visa fixar em teoria a ideia de que o estudo do saber não deve ser executado de maneira isolada, que Henriques, Attie e Farias (2007, p. 64) explicita da seguinte forma:

> Nessa abordagem, o habitat é definido como o lugar de vida e o ambiente conceitual de um objeto do saber. Trata-se, essencialmente, de objetos com os quais interage, mas também das situações de ensino nas quais aparecem as manipulações e experiências associadas. O nicho ecológico descreve o lugar funcional ocupado pelo objeto do saber no sistema ou praxeologia dos objetos com os quais interage.

Dessa maneira, para o desenvolvimento da pesquisa, deve-se primeiro identificar, a partir do objeto do saber em análise, o seu lugar de vida, seu habitat, de funcionalidade, seu *nicho*, para compreender como são organizados.

Além disso, há duas categorias de objetos, que podem ser caracterizados como *ostensivos* e *não-ostensivos*. Henriques, Attie e Farias (2007, p. 65) explica cada um deles da seguinte forma:

> Os ostensivos são todos os objetos que têm uma natureza sensível, uma certa materialidade, que, com efeito, adquirem para o sujeito humano uma realidade perceptível. Os objetos não-ostensivos são objetos que, como as idéias, as intenções ou os conceitos, existem institucionalmente sem, no entanto, poderem ser vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por si: eles só podem ser evocados ou invocados a partir da manipulação adequada de objetos ostensivos associados.

Ou seja, os *objetos ostensivos* são concretos, são sensíveis aos nossos sentidos, pois podemos vê-los, tocá-los, ouvi-los, etc. Já os *objetos não-ostensivos* são o contrário, visto que são ideias, crenças, conceitos, etc., existem mediante a instituição, os quais podem ser "evocados" e "invocados" a partir dos *objetos ostensivos*. Assim pode-se dizer que eles coexistem, pois, para que os *não-ostensivos* surjam, é necessária a manipulação dos *ostensivos*. Dessa forma, como afirma Silva, Henriques e Serôndio (2017, p. 419), as organizações praxeológicas são entendidas por intermédio desses *objetos ostensivos* e *não-ostensivos*.

1.2 ATIVIDADE MATEMÁTICA

A matemática no contexto escolar tem como característica a formalidade, devido à forma como seus conteúdos são apresentados, desconectando-os do contexto social. Isso acaba refletindo na forma de ensino dos professores em sala de aula, que acabam adotando essa formalidade também na sua postura frente seus alunos, até por conta da sua formação em um perfil mais técnico (GRYMUZA; RÊGO, 2014, p. 133).

Diante esse cenário, Grymuza e Rêgo (2014, p. 133, 134) apontam para um grande problema no ensino da matemática que indica falhas na prática deste ensino: os alunos questionarem por que e para que serve estudar determinado conteúdo matemático. Mas, quando se há uma autorreflexão dos professores em torno da sua forma de ensinar é o que acarretará uma mudança significativa da postura deste para com o modo de ensinar e também na aprendizagem dos alunos.

Para que essa mudança de postura realmente traga resultados, são necessários usos de atividades que tenham um propósito, nas quais o aluno saiba a razão desta, o que é proposto nela e o precisam aprender a partir dela. Além disso, é importante que essas atividades estimulem o questionamento e a reflexão dos alunos, para haver compreensão adequada dos conteúdos matemáticos (GRYMUZA; RÊGO, 2014, p. 133, 134).

O que Grymuza e Rêgo (2014, p. 135) perceberam é que os alunos estão indo para escola por motivações erradas, visto que lhes falta o conhecimento do sentido de aprender determinado conteúdo, de saber qual a utilidade desse conhecimento formal na sua vida cotidiana. E para reversão desse quadro, são estudadas melhorias no ensino de matemática, com o intuito de formar alunos críticos e ativos em sua aprendizagem, que parte do uso de tendências como materiais concretos e recursos abstratos do conhecimento matemático, com os quais o professor pode utilizar destes para desenvolver atividades com objetivos claros para os alunos. Os autores ainda completam:

> Mas essa heterogeneidade quanto ao ensino de Matemática é importante e até mesmo necessária, uma vez que permite incorporar atividades que proporcionem a compreensão dos alunos, agregando ao ensino, sob uma perspectiva construtivista, o contexto social, pois só dessa forma conseguiremos resultados mais próximos do desejado para nossos estudantes. (GRYMUZA; RÊGO, 2014, p. 135).

Em relação ao papel do professor e do aluno na atividade, é salutar que esta tenha em vista as necessidades do aluno, de modo a “construir um sistema de operações voltado para uma ação que os motive a estudar e, por consequência, a aprender” (GRYMUZA; RÊGO, 2014, p. 130). Além disso, para que os conceitos abordados nas atividades sejam bem absorvidos e compreendidos, é necessário tanto que as condições do ambiente e as condições físicas e psicológicas do aluno estejam favoráveis para que essa assimilação tenha sucesso e que os objetivos da atividade sejam apresentados da maneira mais clara possível para os alunos.

Essas formas de aplicação da atividade contribuem para a formação ativa e crítica dos alunos na sociedade. Isso os leva a serem responsáveis pela construção dos seus conhecimento e desenvolvimento. A manifestação dessa posição ativa e crítica do aluno são evidentes, segundo apontam Grymuza e Rêgo (2014, p. 130):

> Quando ele questiona determinada situação; observa e realiza algo com base na observação; tira suas próprias conclusões em situações de conflito; percebe que não alcança algo e pede para alguém que tem mais conhecimento o ajude e analisa as semelhanças e as diferenças entre duas situações, que poderão permiti-lo rever suas colocações.

O espaço ideal para proporcionar condições adequadas para este desenvolvimento do aluno é a escola. Entretanto, o histórico que se tem das escolas brasileiras é de um ambiente de aprendizagem automática, de atividades que se direcionam somente para um estímulo-resposta e da visão padronizada dos professores de preocupar-se somente em apresentar o assunto para os alunos (GRYMUZA; RÊGO, 2014, p. 131).

Logo, é essencial para a compreensão e aprendizagem de determinado conteúdo matemático que o professor busque elaborar exercícios específicos a cada assunto, para estes poderem potencializar esse processo de internalização do assunto abordado. Para isso, Grymuza e Rêgo (2014, p. 136) concluem ser preciso uma ação conjunto de professores com alunos de modo a estabelecer o modelo de atividades que culminará no ensino-aprendizagem ideal.

1.3 PERCURSO METODOLÓGICO

A pesquisa cientifica pretende realizar um exame minucioso de uma determinada realidade de modo a interpretá-la. Existem diversos tipos de pesquisa que vão de acordo às abordagens, às naturezas, aos objetivos e aos procedimentos existentes e quais são mais adequados para o objeto de pesquisa (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 31). Em vista disso, esta pesquisa quanto a abordagem é de natureza qualitativa (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009). No que se refere aos procedimentos é do tipo documental (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009), pois utiliza de fontes diversas, como tabelas estatísticas e LD’s para a análise. O método principal é um dos elementos centrais discutidos na TAD: a análise praxeológica de Chevallard (1998).

A abordagem qualitativa é baseada no “aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc.” (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 31), ou seja, na busca da razão dos fatos, dos acontecimentos em torno do objeto a ser analisado, sem quantificar nenhum juízo de valor. Em relação ao cientista, seu conhecimento diante tal pesquisa é parcial e limitado, na qual este irá desempenhar o papel tanto de sujeito como de objeto da pesquisa (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 32).

Para a análise praxeológica, foi necessária a identificação das tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, segundo os conceitos de organização praxeológica desenvolvidos por Chevallard (1998).

Para alcançar os objetivos dessa investigação, optou-se pela análise praxeológica de objetos do saber da GA, a partir de tarefas propostas em dois livros: Matemática: Contexto & Aplicações, Dante, 2011, do EM e Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, 2000, utilizado no ES. A escolha desses se deu pelo fato de o livro ser o mais usado entre os professores do EM dos colégios estaduais do município de Macaúbas e o livro do ES mais usado pelos professores na Universidade Federal do Oeste da Bahia – Campus Reitor Edgar Santos.

Entender o que integra a transição do EM para o superior a partir da análise praxeológica em LD’s evoca de forma complementar de análise de documentos orientadores curriculares, e em alguns casos, se faz necessário recorrer a aspectos da epistemologia dos objetos do saber em jogo.

Uma vez escolhidas as obras das quais serão estudados três objetos do saber, passaremos a seleção das tarefas que foram apontadas como de maior complexidade à compreensão pelos estudantes no ES, pela experiência como docente. As tarefas devem ser similares e as técnicas apresentadas nos LD’s serão cuidadosamente analisadas de modo a destacar as transformações ocorridas de um nível para outro. Considerando as possíveis dificuldades, serão elaboradas e apresentadas modelos didático-praxeológicos alternativos ao modelo analisado.

CAPITULO 2 - ANÁLISE INSTITUCIONAL E PRAXEOLÓGICA DE TAREFAS SOBRE GA EM LIVROS DIDÁTICOS

Uma vez selecionados os manuais didáticos, a saber: Matemática: Contexto & Aplicações, de Luiz Roberto Dante, do EM e Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, do ES, bem como selecionadas as tarefas, este capítulo confronta as noções teóricas discutidas no capítulo anterior com as praxeologias deduzidas das tarefas. Destaca ainda o tipo de tarefa, indicando se existe ecologia para estas; descreve e analisa as técnicas propostas nos livros e as condições para estas viverem nas instituições aula de GA no EM e aula de GA no ES. Em cada análise praxeológica, há a caracterização do discurso tecnológico-teórico. Por fim, há uma discussão das consequências didáticas do uso de cada tarefa. Inferiu-se que, com tal análise, há condições de caracterizar a transição em questão, modelando tarefas que poderão mitigar as lacunas já apontadas neste relatório de pesquisa.

2.1 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO ADOTADO NA INSTITUIÇÃO DE REFERÊNCIA

O LD é de suma importância para o desenvolvimento do ensino-aprendizagem, é o principal elo da R(X,O), portanto, o Ministério da Educação (MEC) instituiu no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) que cada Instituição de Educação Básica (IEB) escolhe-se democraticamente, através de uma reunião entre os professores de cada áreas de ensino o LD que gostaria de implementar em sala de aula. Já nas instituições de ES, fica a cargo de o professor escolher modelos de LD’s apresentado na grade curricular da disciplina.

Diante da importância que o LD tem na R(X,O), o livro analisado é adotado por professores na instituição EM, é composta por três volumes sendo analisado o volume 3.º que contém o objetivo de estudo, que, além do título, a referência completa do LD, o lugar (P/n), onde P indica as páginas dedicadas a GA e n as páginas gerais do livro. Por sua vez, o livro analisado na instituição de ES é ministrado pela maioria dos professores, inclusive pelo autor deste trabalho.

Livro Didático do Ensino Médio

Figura 1 - Livro didático de Matemática Ensino Médio

Fonte: (DANTE, 2011)

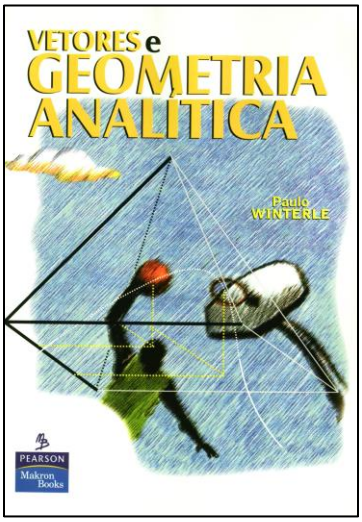
Quadro 1 - Referência Ensino Médio - Quantidade de páginas do objeto de estudo

Referência do Livro Titulo, Autor, edição, volume, cidade, editora, ano de edição	*P/n*
Matemática Contexto & Aplicações. DANTE, Luiz Roberto, 1º ed. Volume 3. São Paulo. Ática, 2011	88/264

Fonte: (DANTE, 2011)

Livro Didático do Ensino Superior

Figura 2 - Livro didático de Matemática Ensino Superior



Fonte: (WINTERLE, 2007)

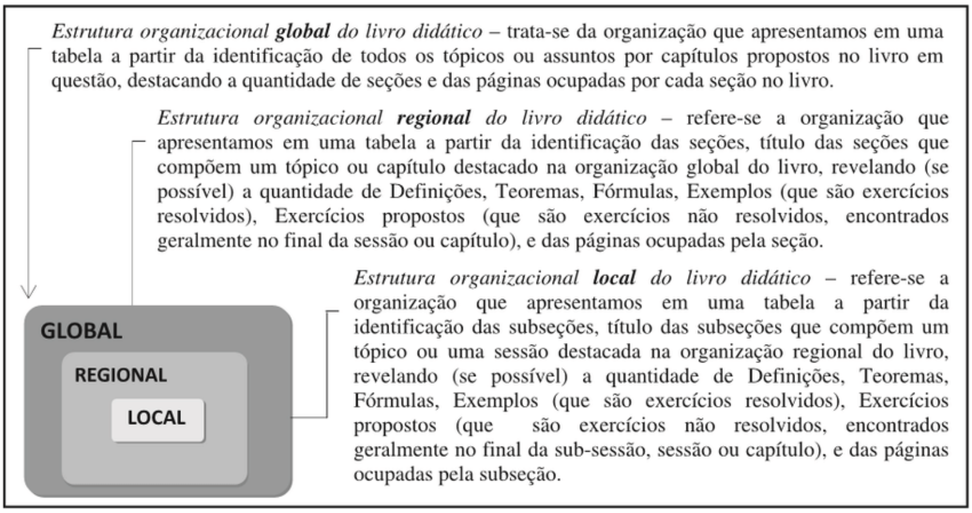
Quadro 2 - Referência Ensino Médio - Quantidade de páginas do objeto de estudo

Referência do Livro Titulo, Autor, edição, volume, cidade, editora, ano de edição	*P/n*
Vetores e Geometria Analítica. WINTERLE, Paulo, 1º ed. Único. São Paulo. Pearson, 2007	22/247

Fonte: (WINTERLE, 2007)

Segundo Henriques, Nagamine, Nagamine (2012, p.1271) “a análise do LD possibilita o acesso dos elementos característicos da relação institucional com o objeto do ensino visado, bem como das exigências institucionais e das organizações propostas em torno desse objeto”. Os mesmos autores propõem uma análise que consiste em três estruturas organizacionais:

Figura 3 - Esquema da análise institucional



Fonte: Henriques, Nagamine, Nagamine (2012).

Diante das três estruturas fundamentais, como a preocupação é com o objeto de estudo, sendo as retas do campo de conhecimento da GA, haverá mais dedicação à estrutura organizacional local, não deixando de apresentar as outras duas estruturas.

1.1. ESTRUTURA ORGANIZACIONAL GLOBAL DO LIVRO DIDÁTICO

Livro Didático do Ensino Médio

A estrutura organizacional global do terceiro volume do livro *Matemática Contexto & Aplicações* é composta por 8 capítulos, 68 seções, 74 subseções em 264 páginas. É encontrado facilmente o objeto de estudo que ocupa os capítulos 3, 4 e 5, mas o foco é no capítulo 3 titulado por: Geometria Analítica: ponto e reta, composto por 15 seções, 9 subseções e ocupando 32 páginas, como ilustrado na tabela:

Tabela 1 – Estrutura Organizacional Global do Livro Didático do Ensino Médio

Capítulos	Assunto	Seções	Páginas
-	Elementos pretextuais: (capa, apresentação, sumário)	-	7
01	O Princípio de Indução Infinita	2	6
02	Estatística	6	34
03	Geometria Analítica: Ponto e Reta	15	32
04	Geometria Analítica: Circunferência	6	22
05	Geometria Analítica: Secções Cônicas	5	34
06	Números Complexos	10	36
07	Polinômios e Equações Algébricas	13	30
08	Noções Intuitivas Sobre Derivada	11	26
	Questões Enem	-	7
	Glossário	-	4
	Sugestões de Leituras Complementares	-	1
	Significado de Siglas de Vestibulares	-	1
	Referência Bibliográficas	-	1
	Respostas	-	23
Total		68	264

Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Livro Didático do Ensino Superior

A estrutura organizacional global do livro *Vetores e Geometria Analítica* é composta por 9 capítulos, 97 seções distribuídas em 264 páginas. É encontrado facilmente o objeto de estudo que ocupa o capítulo 5 titulado por: A Reta, composto por 13 seções e ocupando 22 páginas, como ilustrado na tabela:

Tabela 2 – Estrutura Organizacional Global do Livro Didático do Ensino Superior

Capítulos	Assunto	Seções	Páginas
-	Elementos pretextuais: (capa, apresentação, sumário)	-	15
01	Vetores	15	48
02	Produto Escalar	10	24
03	Produto Vetorial	6	20
04	Produto Misto	5	10
05	A Reta	13	22
06	O Plano	11	26
07	Distância	5	8
08	Cônicas	24	54
09	Superfícies Quadradas	8	18
	Bibliografia	-	2
Total		97	264

Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

1.2. ESTRUTURA ORGANIZACIONAL REGIONAL DO LIVRO DIDÁTICO

Destacado da estrutura global é possível observar que essa estrutura permite abrir o objeto de estudo (Reta) e visualizar os saberes nos quais a analise praxeológica será realizada, como destacado nas tabelas a seguir:

Livro Didático do Ensino Médio

Tabela 3 – Estrutura Organizacional Regional do Livro Didático do Ensino Médio

Seções	Título das seções	Def	Teo	For	Ex	Exp	Pag
1	Introdução	1	-	-	2	-	1
2	Sistema Cartesiano Ortogonal	1	-	-	1	5	1
3	Distância Entre Dois ponto	-	-	1	3	11	2

4	Coordenadas de um ponto médio de um segmento de reta	-	-	2	2	6	2
5	Condições de alinhamento de três pontos	-	-	1	1	6	1
6	Inclinação de uma reta	1	-	-	-	-	1
7	Coeficiente angular de uma reta	1	-	1	1	2	2
8	Equação da reta quando são conhecidos um ponto $\boldsymbol{P}_0(x_0, y_0)$ e a declividade **m** da reta	-	-	1	2	2	2
9	Formas da equação da reta	-	-	3	5	17	4
10	Posições relativas de duas retas no plano	1	2		1	8	2
11	Perpendicularidade de duas retas	-	1	1	2	14	4
12	Distância de um ponto a uma reta	-	-	1	2	10	2
13	Ângulo formado por duas retas	-	-	2	1	4	1
14	Área de uma região triangular	-	-	1	2	10	2
15	Aplicação de geometria plana	-	-	-	1	4	1
	Matemática e as práticas sociais	-	-	-	-	4	1
	Atividades adicionais	-	-	-	-	28	3
Total		5	3	14	26	99	32

Def.: Definição **Teo**.: Teorema **For**.: Formula **Ex**.:Exemplo **Exp**.: Exercício Proposto **Pag**.: Pagina

Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Livro Didático do Ensino Superior

Tabela 4 – Estrutura Organizacional Regional do Livro Didático do Ensino Superior

Seções	Título das seções	Def	Teo	For	Ex	Exp	Pag
1	Equação vetorial da reta	1	-	-	1	-	2
2	Equações paramétricas da reta	1	-	-	2	-	3

3	Reta definida por dois pontos	1	-	-	1	-	1
4	Equações paramétricas de um segmento de reta	1	-	1	-	-	1
5	Equações simétricas da reta	1	-	-	1	-	1
6	Equações reduzidas da reta	1	-	-	-	-	1
7	Retas paralelas aos planos coordenados	-	1	-	-	-	1
8	Retas paralelas aos eixos coordenados	-	1	-	1	-	1
9	Ângulo de duas retas	1	-	1	1	-	1
10	Retas ortogonais	-	1	-	1	-	1
11	Reta ortogonal a duas retas	-	1	-	1	-	1
12	Interseção de duas retas	-	-	-	3	-	2
13	Problemas propostos	-	-	-	-	34	4
-	Respostas de problemas propostos	-	-	-	-	-	2
Total		7	4	2	12	34	22

Def.: Definição **Teo.**: Teorema **For.**: Formula **Ex.**:Exemplo **Exp.**: Exercício Proposto **Pag.**: Pagina

Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

1.3. ESTRUTURA ORGANIZACIONAL LOCAL DO LIVRO DIDÁTICO

A análise é feita com base em três objetos de estudos extraídos da estrutura organizacional regional, sendo elas condições de alinhamento de três pontos, formas da equação da reta e perpendicularidade de duas retas.

Livro Didático do Ensino Médio

Dentre os 3 objetivos de estudo, o que apresenta subseções é a seção 9, a ser analisada na tabela 5:

Tabela 5 – Estrutura Organizacional Local da seção 9 (Formas da equação da reta)

Subseção	Título da subseção	Def	Teo	For	Ex	Exp	Pag
1	Forma reduzida da equação da reta	-	-	1	-	-	1
2	Equação geral da reta	-	-	1	1	-	1
3	Forma segmentaria da equação da reta	-	-	1	4	-	1
	Exercícios proposto	-	-	-	-	17	1
Total		0	0	3	5	17	4

Def.: Definição **Teo**.: Teorema **For**.: Formula **Ex**.:Exemplo **Exp**.: Exercício Proposto **Pag**.: Pagina

Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Livro Didático do Ensino Médio

Na análise organizacional local feita no LD da instituição de ES, depara-se com uma abordagem diferente dos referidos objetos de estudo, o primeiro, condição de alinhamento de três pontos, o autor não deixa um capítulo ou seção específica para esse saber, ele introduz de maneira intuitiva no conteúdo de vetores e no conteúdo de retas, no qual é a definição principal para que três pontos estejam alinhados, tem que pertencer à mesma reta.

Por outro lado, as definições de equações da reta estão divididas em três seções, como é possível ver na tabela 4, dando uma ênfase maior a esse objeto de estudo. Por último, há o objeto de estudo de perpendicularidade entre retas definida por outro termo, retas ortogonais, nas quais há uma grande diferença, pois o tratamento de GA analítica que se vê no EM é em relação ao plano, R^2, já no ES o tratamento dos objetos é feito no espaço R^3.

2.2 ANÁLISE DE OBJETOS DA GA EM LIVROS DIDÁTICOS NAS INSTITUIÇÕES DE REFERÊNCIAS

A forma de apresentação dos tópicos dos livros, adotada nessa investigação, segue a seguinte estrutura:

- Identificamos o tipo de tarefa comum aos dois níveis de escolaridade, médio e superior;

- Exemplificamos com uma tarefa de cada livro didático adotado nas instituições de referência, e para cada uma delas são discutidas a(s) técnica(s) padrão e/ou não-padrão, o discurso tecnológico-teórico;
- Apresentamos por fim, as consequências didáticas da utilização de tarefas desse tipo nesses níveis de ensino.

Cabe salientar, que o modelo de análise utilizado é inspirado na análise praxeológica, tomando-se alguns passos apresentados por Matheron (2000). Entretanto, mesmo sendo uma estrutura básica, permite identificar aspectos atinentes à transição do EM para o superior, no que tange as praxeologias matemáticas construídas, para uma vez sendo elucidadas possíveis lacunas em tal transição, seja possível apresentar um modelo praxeológico que enseja mitigar tais lacunas, a partir de tarefas alternativas elaboradas ou adaptadas pelo autor deste trabalho.

Outro aspecto que merece esclarecimentos, é o fato que a linguagem das tarefas dos livros sejam adaptadas de modo que, sejam utilizados verbos no infinitivo que indicam ação, de acordo com a TAD, assim, quando a tarefa do livro for: "Verifique…" deveriam ser apresentadas como "Verificar…" mas, para a análise das atividades presente no LD é mantida a originalidade dos títulos.

Se faz necessária a referida análise para reconhecimento de lacunas no processo de transição da discussão dos saberes discutidos nos níveis básico e superior. Por sua vez, tal reconhecimento auxiliará, no próximo capítulo, na proposição de um modelo praxeológico alternativo para difusão desses saberes pautados em tarefas com as quais ensejamos mitigar as dificuldades identificadas com a utilização das tarefas presentes nos LD's adotados nas instituições de referência.

2.2.1 TAREFAS DO TIPO: Determinar as condições de alinhamento de três pontos.

Tarefa 01 (T1) – (Exercícios propostos, n. 23, pg. 57, Matemática: Contexto & Aplicações, Dante, 2011)

"Verifique se os pontos:

a) *A(0, 2), B(-3, 1) e C(4, 5) estão alinhados."*

Objetivo da tarefa: Verificar se os pontos A, B e C são colineares, em outras palavras, se pertencem a mesma reta.

A tarefa pretende verificar se os três pontos são colineares. Para conseguir verificar a veracidade dessa afirmação, é preciso uma técnica, utilizada pelo livro como padrão. Na utilização dessa técnica, é preciso uma tecnologia, que é descrita pelo livro, mas não chega a ser demostrada pelo autor, que é sustentada na teoria de que o determinante calculado na "fórmula padrão" é igual a zero. Assim, engloba uma praxeologia completa.

Técnica(s) padrão e/ou não-padrão:

Solução proposta pelo autor:

O livro propõe resolver a tarefa calculando o determinante de uma matriz 3×3 composta pela coordenada dos três pontos, acrescentado o número 1 na coluna 3.

Extraindo as coordenadas dos pontos $A(0,2)$, $B(-3,1)$ e $C(4,5)$ e acrescentando o número 1 na terceira coluna, encontra a seguinte matriz:

$$M_{3x3} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante da matriz, obtém-se:

$$det(M) =$$

$$(0 \cdot 1 \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot 4) + \big(1 \cdot 5 \cdot (-3)\big) - \big((1 \cdot 1 \cdot 4) + (1 \cdot 5 \cdot 0) + (1 \cdot (-3) \cdot 2)\big)$$

$$det(M) = 0 + 8 - 15 - (4 + 0 - 6)$$

$$det(M) = -7 + 2 = -5 \neq 0\ .$$

Logo se conclui que os pontos não são alinhados.

Resolução Sugerida:

Será utilizada uma definição bastante comum em vetores, que é o coeficiente angular da reta, com isso pode afirmar que os pontos são colineares se os vetores são verticais (quando as abscissas dos pontos forem iguais) ou quando os coeficientes angulares forem iguais, linguagem que é suprimida nas técnicas utilizadas no EM, pela ausência do objeto vetores no currículo de Matemática, mesmo a BNCC afirmando a importância da utilização dos vetores.

Segundo, calculando o coeficiente angular de $\overline{AB}$, sabendo que $A(0,2)$ e $B(-3,1)$:

$$\frac{-3-0}{1-2} = 3\ .$$

Calculando o coeficiente angular de $\overline{AC}$, sabendo que $A(0,2)$ e $C(4,5)$:

$$\frac{4-0}{5-2} = \frac{4}{3}\ .$$

Como $3 \neq \frac{4}{3}$, conclui-se que os pontos não são colineares.

Discurso Tecnólogo-teórico [Θ, Θ]:

A propriedade que justifica tal técnica está alicerçada nas seguintes noções:

Ao calcular o determinante da matriz 3×3 é que seu valor absoluto é igual a 6 vezes volume da pirâmide cujo vértice é a origem e a base é o triângulo ABC, onde $A = (x_1, y_1, 1), B = (x_2, y_2, 1)$ e $C = (x_3, y_3, 1)$. Quando A, B e C estão alinhados, a base ABC se degenera num seguimento e o volume da pirâmide se igual a zero.

Observa-se que o livro aborda uma técnica bastante usada, porém não é demostrada pelo autor, trazendo a ideia do aluno aceitar a técnica como verdadeira e única, acarretando em o aluno memorizar a fórmula, os passos sugeridos e só replicar, sem saber o porquê de usa-las, gerando uma incompreensão do conteúdo.

Outro grande prejuízo para o ensino e aprendizagem do conteúdo é tentar impor ao aluno uma técnica repetitiva, distanciando do foco principal da geometria analítica que é a relação da álgebra tem com a geometria.

Tarefa 02 (T2) – (Problemas Propostos, n. 47, pg. 45, Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, 2000)

"Sabendo que o ponto $P(m, 4, n)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(-1, -2{,}3)$ e $B(2{,}1, -5)$, calcular m e n."

Objetivo da tarefa: Encontrar o valor das coordenadas m e n que pertencem ao ponto P , fazendo com que o ponto pertença à reta e passe pelos pontos A e B.

Para resolver a tarefa, será necessário utilizar a condição dois vetores partindo do mesmo ponto e que eles são paralelos, depois resolver o sistema de duas equações com duas incógnitas e então encontrar os valores de m e n, que pertence a P e assim P pertencerá à reta. Logo é preciso duas técnicas distintas. Cada técnica precisará de uma tecnologia a ser utilizada, que está sustentada na teoria. Logo, uma Praxeologia completa.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

A solução proposta pelo autor:

Como os pontos A, B e P pertencem à mesma reta, qualquer dupla de vetores formados por esses pontos, são paralelos. Tomemos a condição $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AP}$, ou seja:

$$\text{Sendo, } \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,3,-8) \text{ e } \overrightarrow{AP} = (m+1,6,n-3)$$

Portanto,

$$\frac{3}{m+1} = \frac{3}{6} = \frac{-8}{n-3} \quad .$$

Ou

$$\begin{cases} 3(m+1) = 18 \\ 3(n-3) = -48 \end{cases},$$

$$\begin{cases} m+1 = 6 \\ n-3 = -16 \end{cases}.$$

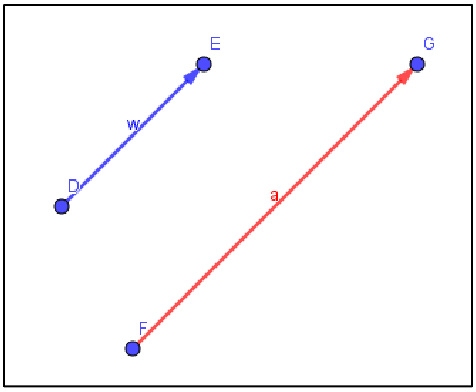
Como os dois sistemas são equivalentes, implicam em $m = 5$ e $n = -13$.

Discurso Tecnólogo-teórico [Θ, Θ]:

A propriedade que justifica tal técnica esta alicerçada nas seguintes noções:

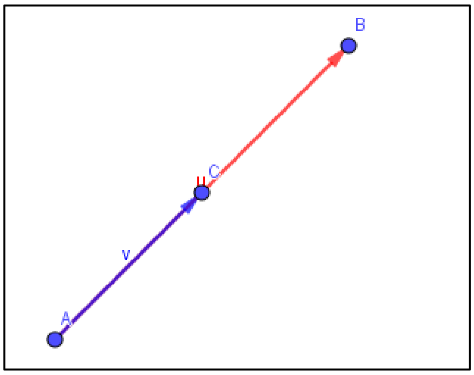
Encontra-se duplas de vetores, dentre os três pontos. Utiliza-se a definição de vetores paralelos, pois, pela teoria, os três pontos analisados estão alinhados se pertencerem a mesma reta. Logo para que três pontos estejam alinhados, a duplas de vetores escolhida tem que estar paralelos.

Figura 4 - Vetores paralelos que partem do mesmo ponto



Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Figura 5 - Vetores paralelos que partem de pontos diferentes.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Usando a definição de paralelismos de vetores, chega a um sistema de equações com duas equações e duas incógnitas, no qual precisa de outra técnica e discurso tecnológico para conseguir resolver o sistema de equações, que é visto em outro saber na instituição referida.

Observa-se que a grande diferença na abordagem da atividade, tanto no aspecto problematização da tarefa como nas técnicas utilizadas pelos autores, tal diferença pode ser pelo fato do autor do livro didático do EM não trabalhar com o conteúdo de vetores, com isso a abordagem acaba tendo limitações quanto às técnicas a serem utilizadas.

Outro fato importante é que a técnica utilizada no ES pode ser utilizada para resolver a tarefa utilizada no EM, já o inverso não teria como acontecer, pois, mesmo tendo diferença demissibilidade do conteúdo, plana para espacial, não há uma inter-relação de uma abordagem para com a outra, o que pode acarretar o aluno a acreditar um conteúdo não tem relação com o outro, mesmo sendo de mesmo saber.

Consequências didáticas

A tarefa permite o aluno analisar pontos em um plano, verificando se eles estão alinhados (colineares) ou se a partir de três pontos quaisquer é possível traçar um triângulo. Outro fato importante é verificar se um ponto pertence à reta ou não, partindo do conhecimento de dois pontos pertencente a reta. Achar coordenadas desconhecidas de um ponto que tem como caraterística pertencerem a mesma reta. Verificar onde a reta corta os eixos das ordenadas e abscissas.

2.2.2 TAREFAS DO TIPO: Descrever a equação da reta

Tarefa 03 (T3) – (Exercícios propostos, n. 33, pg. 63, Matemática: Contexto & Aplicações, Luiz Roberto Dante, 2011)

"Em cada caso, escreva uma equação geral da reta definida pelos pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$:

a) $\boldsymbol{A}(-1{,}6)$ *e* $\boldsymbol{B}(2,-3)$*"*

Objetivo da tarefa: Descrever a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B.

Tal tarefa tem como tecnologia descrever a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B. Ao descrever esse percurso, é necessária uma técnica, que é calcular o coeficiente angular a partir de dois pontos e substituir na fórmula apresentada pelo livro. Outro percurso é a utilização de outra tecnologia que utiliza a técnica de calcular o determinante de uma matriz M_{3x3} para encontrar a equação geral da reta que passa pelos dois pontos. Todas as duas técnicas estão baseadas na teoria, logo uma praxeologia completa.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Primeira solução proposta pelo autor:

Calcular o coeficiente angular partindo dos dois pontos:

$$m = \frac{-3-6}{2+1} = \frac{-9}{3} = -3\,.$$

Substituindo o coeficiente angular e um ponto pertencente a reta na equação da reta, obtém:

$$(y-6) = -3\big(x-(-1)\big)$$

$$y-6 = -3x-3$$

$$y+3x-3 = 0\,.$$

Logo a equação geral é dada por:

$$3x+y-3 = 0\,.$$

Segunda solução proposta pelo autor:

Calcular o determinante da matriz M_{3x3} dada pelos pontos genéricos x e y, e as coordenadas dos pontos $A(-1,8)$ e $B(-5,-1)$:

$$Det(M_{3x3}) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$Det(M_{3x3}) = (6x+2y+3)-(12-3x-y) = 9x+3y-9\,.$$

Igualando a zero, temos

$$9x+3y-9 = 0\,.$$

Que é a equação geral da reta que contém os dois pontos.

Resolução Sugerida:

Encontra o vetor $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -3) - (-1,6) = (3, -9)\ .$$

Pela teoria, percebe-se que $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$ se, e somente se $\vec{v}\ \cdot \overrightarrow{AB}$, logo $v = (9,3)$, pois:

$$(9,3) \cdot (3, -9) = 9 \cdot 3 + 3 \cdot (-9) = 0\ .$$

É encontrado o valor de c da equação $ax + by + c$, na qual a e b são as coordenadas do vetor perpendicular a reta dada pelos pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$:

$$9 \cdot (2) + 3 \cdot (-3) + c = 0\ .$$

Então,

$$c = -18 + 9 = -9\ .$$

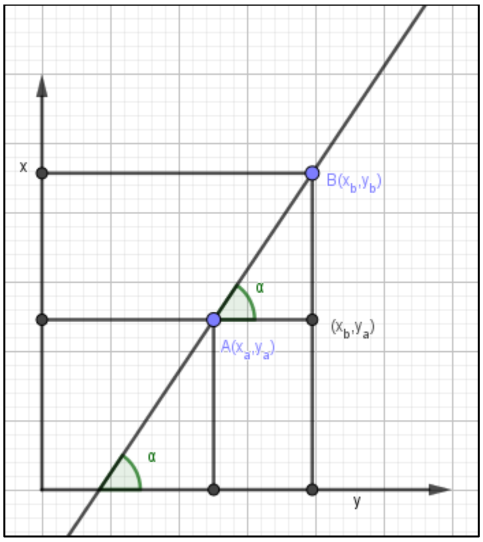
Assim a equação geral é dada por:

$$9x + 3y - 9 = 0 \text{ ou } 3x + y - 3 = 0\ .$$

Discurso Tecnólogo-teórico [Θ, Θ]:

A noção que justifica a técnica pautada inicialmente no cálculo do coeficiente angular, se justifica como uma das formas de determinar a reta pela medição de sua inclinação em relação ao eixo ox

Figura 6 - Coeficiente angular da reta.



Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

$$tan\,\alpha = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = m\,.$$

Ao encontrar o coeficiente angular e um ponto que pertence à reta, ao substituir na fórmula é encontrada a equação geral da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0)\,.$$

Já a segunda solução proposta pelo autor, está baseada no cálculo do determinante de uma matriz 3×3 onde é possível basear na mesma teoria utilizada na Tarefa 01, na qual, para que três pontos estejam alinhados, o determinante da matriz no qual continham os três pontos era igual a zero, ao substituir qualquer um dos 3 pontos por um ponto genérico $P(x, y)$, esse ponto sempre pertence à reta, pois eles estarão alinhados. Com isso, é alcançada a equação geral da reta.

Calculando o determinante da matriz M_{3x3} dada pelas coordenadas de um ponto generico $P(x, y)$, as coordenadas dos pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ e sendo completada pelo número 1 na 3 coluna:

$$det(M_{3x3}) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix}$$

$$det(M_{3x3}) = x \cdot y_a + y \cdot x_b + x_a \cdot y_b - (y_a \cdot x_b + x \cdot y_b + y \cdot x_a)\,.$$

Sendo equivalente à:

$$x(y_a - y_b) + y(x_b - x_a) + (x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b)\,.$$

Assim, é encontrada a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B.

A propriedade que justifica tal técnica aplicada na resolução sugerida está alicerçada nas seguintes noções:

Pela teoria é possível saber que uma equação geral da reta dada por:

$$ax + by + c = 0\,.$$

Os valores de a e b, são as coordenadas de um vetor ortogonal a reta, baseada nessa informação, é possível ir ao encontro de um vetor ortogonal a reta e substituir na fórmula.

Outra técnica que está baseada na teoria é de ortogonalidade entre vetores que diz: dois vetores são ortogonais o ângulo formado entre eles é igual a 90^0, ou seja, se o produto interno entre eles for igual a zero.

$$\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2} \text{ se, somente se } \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$$

Encontrado o vetor ortogonal a reta e tendo um ponto pertencente à reta, busca-se o termo independente da equação geral da reta $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, na qual a e b são as coordenadas do vetor ortogonal da reta ($\vec{v} = (a, b)$), x e y coordenadas genéricas do ponto que pertencente a reta e c o termo independente.

Tarefa 04 (T4) – (Problemas Propostos, n. 03, pg. 118, Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, 2000)

"Escrever equações paramétricas da reta que passa por $A(1, 2, 3)$ e é paralela à reta $r: (x, y, z) = (1, 4, 3) + t(0, 0, 1)$"

Objetivo da tarefa: Descrever a equação geral da reta que passa pelo ponto $A(1,2,3)$ e é paralela à reta r.

A tarefa tem como tecnologia descrever as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto A e é paralela à reta r. Essa tecnologia, por sua vez, está baseada em uma técnica de descobrir o vetor paralelo à reta dada e, a partir do vetor paralelo de r, ou seja, o vetor direto da reta procurada que passa pelo ponto A. Tal técnica esta fundamentada em uma teoria, logo uma praxeologia completa.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

S*olução proposta pelo autor:*

Dada a reta $r: (x, y, z) = (1,4,3) + t(0,0,1)$, com base na teoria, observam-se alguns dados importantes, nos quais se encontra um ponto pertencente a reta, $P(1,4,3)$, e o vetor diretor da reta r, $\overrightarrow{v_r} = (0,0,1)$, logo obtém um vetor paralelo à reta, v_r, ou qualquer múltiplo desse vetor.

Dado o vetor paralelo à reta r e um ponto no qual é desejável que a reta passe, são montadas as equações paramétricas da reta desejada.

$$s: \begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 4 + 0t \\ z = 3 + 1t \end{cases}.$$

Discurso Tecnólogo-teórico [Θ, Θ]:

A propriedade que justifica tal técnica esta alicerçada nas seguintes noções:

Encontrar o vetor paralelo da reta r, que com base na teoria, pode-se verificar visualmente, pelo fato da equação dada por r há dados importantes possíveis de ser extraídos sem cálculos:

Dada equação vetorial da reta conhecida por $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$, é conhecido pela teoria que (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas de um ponto pertencente à reta e que (a, b, c) são as coordenadas do vetor diretor da reta ou um vetor paralelo à reta.

Sabendo o vetor paralelo a r e tendo um ponto pertencente à reta, substitui nas equações paramétricas da reta.

$$s: \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \\ z = z_0 + c \cdot t \end{cases}.$$

No lugar em que $P_s(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto que pertence à reta e $\overrightarrow{v_s} = (a, b, c)$ é o vetor diretor ou paralelo à reta.

Consequências didáticas

As Tarefas visam trazer ao aluno as diferentes fórmulas de escrever uma equação de uma reta e a importância que os vetores têm para descrevê-las, dados importantes como, vetor diretor, vetores paralelos, vetores perpendiculares, pontos pertencentes à reta que não podem ser esquecidos, pois, apresentam dados consideráveis e características do objeto geométrico estudado. Verifica-se também a relevância que vetor tem para descrever uma reta, dados esses que são imprescindíveis nos conteúdos de GA para o ES e ocultados no EM.

A T4 traz a significância do conhecimento sobre os tipos de equações que descreve uma reta, pois através de uma pode-se chegar à outra, por isso é necessário conhecer os dados contido na escrita das equações, sejam elas geral, reduzida, paramétricas, vetorial ou outras formas. Esse tipo de tarefa vem com esse objetivo, mostrando para o aluno a ligação que uma tem com a outra.

2.2.3 TAREFA DO TIPO: Posição relativa entre duas retas

Tarefa 05 (T5) - (Exercícios propostos, n. 58, pg. 70, Matemática: Contexto & Aplicações, Dante, 2011)

"*Determine a equação da reta que passa pelo ponto* $\boldsymbol{P}$ *e é perpendicular à reta* $\boldsymbol{r}$ *em cada um dos seguintes casos:*

a) $\boldsymbol{P}(-3, 2)$ *e equação de* $\boldsymbol{r}: 3x + 4y - 4 = 0$".

Objetivo da tarefa: Determinar uma reta que é perpendicular a reta r e que passa pelo ponto $\boldsymbol{P}$.

Pode-se observar que a tarefa busca determinar a equação da reta perpendicular à reta $\boldsymbol{r}$ e que passa pelo ponto P, logo é preciso uma técnica para calcular o coeficiente angular da reta procurada. No que lhe concerne, a técnica utilizada precisa de uma tecnologia, que é utilizada para descrever a técnica, e essa, por sua vez, tem que estar sustentada na teoria. Assim, a tarefa constitui uma praxeologia completa.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Solução proposta pelo autor:

Para a realização da primeira parte da tarefa, é preciso encontrar o coeficiente angular da reta $\boldsymbol{r}$, seguindo os passos do autor:

Pela formula $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, então, deverá encontrar o coeficiente angular da reta **r** (m_1).

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Logo, precisará encontrar 2 pontos que pertencem a **r**.

$$P_1(0,1) \text{ e } P_2(4,-2).$$

$$m_1 = \frac{-2-1}{4-0} = -\frac{-3}{4}\,.$$

Encontre o coeficiente angular da reta desejada (m_2):

Encontrando agora m_2, temos:

$$m_2 = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\,.$$

Assim, o coeficiente angular da reta perpendicular à reta **r** é $m_2 = \frac{4}{3}$ e que passa pelo ponto $P(-3,2)$:

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)\,.$$

Substituindo as coordenadas do ponto P:

$$y - 2 = \frac{4}{3}\big(x - (-3)\big)\,.$$

Por equivalência, temos:

$$y - \frac{4}{3}x - 6 = 0\,.$$

Com isso é chegado ao resultado esperado.

Uma proposta que o autor cita como “pra refletir” sem ao menos aprofundar na teoria, que poderia ser utilizada como outra técnica para resolver a mesma tarefa, facilitando assim a resolução da tarefa.

Resolução Sugerida:

É possível notar que, para duas retas, $r: ax + by + c = 0$ e $s: a'x + b'y + c' = 0$ sejam ortogonais, os vetores normais têm que satisfazer a equação: $a * a' + b * b' = 0$, assim temos:

Como $a = 3$ e $b = 4$ logo, um dos candidatos para a' e b' são: $a' = -4$ e $b' = 3$, pois $3 * (-4) + 4 * 3 = 0$.

Assim, a equação geração da reta perpendiculares a r é: $-4x + 3y + c' = 0$. Mas como tem que passar pelo ponto $P(-3,2)$, tem:

$$-4(-3) + 3 * 2 + c' = 0\ .$$

Sendo, $c' = -18$.

Logo a equação da reta é dada por:

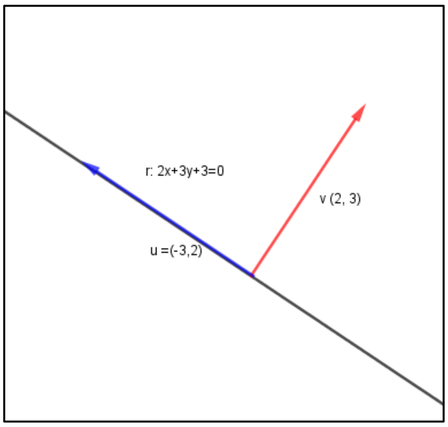
$$3y - 4x - 18 = 0\ .$$

Discurso Tecnólogo-teórico [Θ, Θ]:

A ideia que é observada no item sugerido é demostrada no ES com a utilização de vetores (Proposição no livro), que diz:

Dada a equação da reta $ay + bx + c = 0$ temos que as coordenadas do vetor dada por (a, b) é ortogonal ao vetor direcional da reta, assim podemos observar que para uma reta ser ortogonal a outra, os vetores ortogonais também serão ortogonais, em outras palavras, o vetor ortogonal de uma reta será o vetor diretor da outra reta, sendo as duas retas ortogonais. Como podemos ver:

Figura 7 - Relação equação da reta com o vetor ortogonal



Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Podendo ser facilmente demostrada que uma reta que tem como vetor direcional $\vec{u} = (a, b)$ apresentará o seu vetor ortogonal dado por $\vec{v} = (-b, a)$. Logo é possível provar facilmente, para que dois vetores sejam ortogonais: o produto da primeira coordenada do vetor $\vec{u}$ com a primeira coordenada do vetor $\vec{v}$, somado com o produto da segunda coordenada de $\vec{u}$ com a segunda coordenada de $\vec{v}$ é igual a zero.

$$(-b) \cdot a + a \cdot b = 0\,.$$

A visão que o aluno tem usando o conceito e propriedades dos vetores pode contribuir para uma melhor qualidade do ensino da geometria analítica, alinha ao GeoGebra como uma ferramenta para elucidar a relação que a geometria tem com a álgebra, pois possibilita o professor mostrar, de maneira visual e precisa, características da geometria euclidiana, sem ter compreensão equivocada por parte do aluno, quando essa teoria é passada e cabe ao aluno imaginar e deduzir a figura plana.

Outro ponto que pode ser discutido é partindo da definição que o próprio livro dá do coeficiente angular, $m_1 = -\frac{a}{b}$ e $m_2 = -\frac{a'}{b'}$, assim como é provado pelo livro que $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, e fazendo a substituição, é possível obter:

$$-\frac{a'}{b'} = -\frac{1}{-\frac{a}{b}}$$

Equivalendo à:

$$a * a' + b * b' = 0$$

Tarefa 06 (T6) – (Exercícios propostos, n. 60, pg. 70, Matemática: Contexto & Aplicações, Dante, 2011)

*"Qual deve ser o valor de **k** para que as retas **r** e **s**, de equações* $kx + y + 5 = 0$ *e* $3x + (k+1)y - 9 = 0$, *respectivamente, sejam perpendiculares?"*

Objetivo da tarefa: encontrar um valor para ***k*** que satisfaça a condição para que as duas retas sejam perpendiculares.

Observa-se que o exercício pede para encontrar um valor para k pertencente às equações dadas pelas retas r e s, com a condição delas serem perpendiculares, assim é preciso de uma única técnica, na condição delas serem perpendiculares. Logo, essa técnica precisa de uma tecnologia ao descrever para os passos, que é sustentada na teoria de perpendicularidade entre duas retas. Portanto, é uma praxeologia completa.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Solução proposta pelo autor:

O livro propõe resolver a tarefa encontrando os coeficientes m_1 e m_2 em função de k, assim como na T5.

Encontrando os coeficientes m_1 e m_2:

Sendo $r: kx + y + 5 = 0$ obtém então $y = -kx - 5$, logo $m_1 = -k$.

E $s: 3x + (k+1)y - 9 = 0$ assim $y = \frac{-3x+9}{k+1}$, logo $m_2 = \frac{-3}{k+1}$.

Como é definido pela teoria, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$, obtém-se:

$$\frac{-3}{k+1} = \frac{-1}{-k}$$

$$-3k = k + 1$$

$$-4k = 1\ .$$

$$k = -\frac{1}{4}\ .$$

Assim, é chegado ao resultado esperado.

Resolução Sugerida:

Pode-se usar a mesma técnica sugerida na T1: $a * a' + b * b' = 0$, assim obtém-se:

Sendo $r: kx + y + 5 = 0$ e $s: 3x + (k+1)y - 9 = 0$

Como $a = k$ e $b = 1$, por outro lado, tem-se $a' = 3$ e $b' = k + 1$, logo para serem perpendiculares, é tido:

$$k \cdot 3 + 1 \cdot (k + 1) = 0$$

$$3k + k + 1 = 0$$

$$4k = -1$$

$$k = -\frac{1}{4}.$$

Observa-se que a resolução da tarefa se torna mais simples e compreensível, não deixando a importância de destacar as duas tecnologias aplicadas para melhor compreensão do conteúdo.

Discurso Tecnólogo-teórico [ϴ, Θ]:

A propriedade que justifica tal técnica está alicerçada nas seguintes noções:

Encontrar os coeficientes angulares de cada reta e a técnica proposta pelo autor é isolando a variável y em um dos membros:

Se a equação geral da reta é dada por $ax + by + c = 0$, ao isolar o y é obtido:

$$y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}.$$

Assim, o coeficiente angular da reta é dado pelo número ao qual está multiplicando o x, que nesse caso é $-\frac{a}{b}$.

Por outro lado, podem-se usar os coeficientes a, b, a'e b', que com base na teoria, são as coordenadas dos vetores perpendiculares das retas descritas.

Substitua-se em seguida na formula de vetores perpendiculares:

$$a * a' = -b * b'.$$

Para que os vetores sejam perpendiculares, os valores têm que satisfazer a equação acima.

Tarefa 07 (T7) – (Problemas Propostos, n. 23, pg. 120, Vetores e Geometria Analítica, Paulo Winterle, 2000)

"Sabendo que as retas r_1 e r_2 são ortogonais, determinar o valor de m para os casos:

a) $r_1: \begin{cases} x = 2mt - 3 \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$ *e* $r_2: \begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 4 \end{cases}$,,

Objetivo da tarefa: Encontrar o valor de m tal que as retas r_1 e r_2 sejam perpendiculares.

Resolvendo a tarefa, é utilizado o conceito de ortogonalidade entre retas, partindo da suposição delas estarem ou não no mesmo plano, com isso irá usar a condição de ortogonalidade dos seus vetores diretores, que é a técnica que necessita para resolver o problema. Já a tal técnica, precisará da tecnologia para descrever os passos se baseado na teoria que garante quando dois vetores são ortogonais, assim, uma praxeologia completa.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

S*olução proposta pelo autor:*

Extraem-se os vetores diretores das retas, r_1 e r_2 analisadas

$$\overrightarrow{v_1} = (2m, 3, -4) \text{ e } \overrightarrow{v_2} = (2,1,-1)$$

respectivamente.

Calcula-se o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ e igualam a zero, pois, pela teoria, é o que nos garante que os vetores serão ortogonais e consequentemente as restas serão ortogonais.

$$2m \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-1) = 0$$

$$4m + 7 = 0$$

$$4m = -7$$

$$m = -\frac{7}{4}.$$

Discurso Tecnólogo-teórico [Θ, Θ]:

A propriedade que justifica tal técnica esta alicerçada nas seguintes noções:

Extraem os vetores diretores das retas r_1 e r_2, nos quais é possível encontrar visualmente nas equações paramétricas das retas.

Sendo as equações paramétricas da reta dada pela regra geral por:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases},$$

os coeficientes x_0, y_0 e z_0 é representado por um ponto qualquer pertencente a reta e os coeficientes a, b e c é representado pelas coordenadas do vetor diretor da reta.

Como em r_2 há somente duas equações,

$$r_2 \colon \begin{cases} x = ay + x_0 \\ z = cy + z_0 \end{cases},$$

adiciona uma equação, $y = t$, assim se tem as equações paramétricas de r_2 dada por:

$$r_2 : \begin{cases} x = at + x_0 \\ y = t \\ z = ct + z_0 \end{cases} ,$$

dai, extrai o $\overrightarrow{v_2}$ analogamente ao item anterior.

Encontrando os vetores, $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, respectivamente das retas r_1 e r_2, é realizada a operação com vetores, o produto escalar, e igualando a zero, pois, pela teoria:

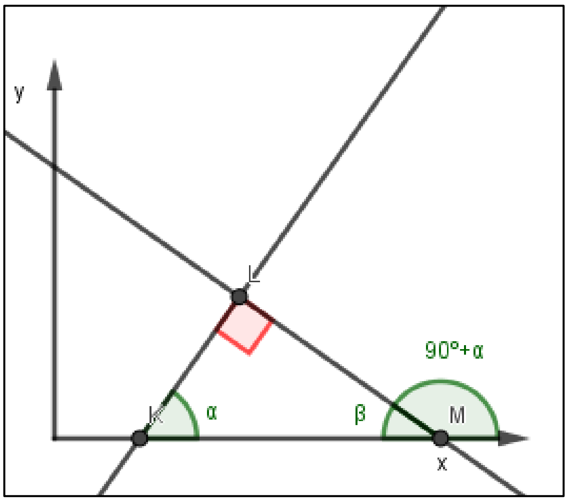
$$Se\ \overrightarrow{v_2} \perp \overrightarrow{v_2}\ então\ \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 .$$

Isola o m e chega ao resultado esperado.

Consequências didáticas

As tarefas visam principalmente levar o aluno a verificar quando duas retas são perpendiculares ou ortogonais, com base no ângulo formado entre elas e o eixo das abcissas, que, pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, o ângulo α, formado por uma das retas com a abcissa, necessariamente, para elas serem perpendiculares, o ângulo forma pela outra reta será $90^0 + \alpha$, isso olhando para R^2, que é a linhas de estudo no currículo institucional do EM.

Figura 8 - Angulo de retas perpendiculares



Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Então, ao analisar o coeficiente angular das retas o aluno é levado a verificar se os ângulos que elas fazem com o eixo das abcissas e consequentemente verificar se elas são perpendiculares ou não.

Outra técnica que se observa é com a teoria sobre vetores, na qual é possível verificar a perpendicularidade entre retas através dos seus vetores diretores ou vetores ortogonais a reta, e com base na teoria observa-se que são dados importantes existentes nas várias fórmulas de descrever uma reta.

CAPÍTULO 3 - MODELO DIDÁTICO-PRAXEOLÓGICO ALTERNATIVO PARA O ENSINO DE TÓPICOS DA GA POR MEIO DE TAREFAS DE EXPLORAÇÃO DE SIGNIFICADOS DAS TÉCNICAS

Neste capítulo apresentamos um modelo didático-praxeológico que se materializa por uma sequência de tarefas de exploração de significados dos objetos com tópicos da GA. O intuito é que essas tarefas possam ser utilizadas no EM como forma de diminuir os hiatos da transição desse nível de ensino para o superior.

A noção de modelos didáticos tem sido utilizada em pesquisas no campo da educação em ciências, como forma de representar o fazer do professor (GARCIA, PEREZ, 2000). Trata-se de uma maneira de evidenciar o pensar e a ação docente, e nesse sentido, podemos dizer que tais modelos são acompanhados de crenças, concepções e traços da relação pessoal do professor com os saberes que compõem a área disciplinar.

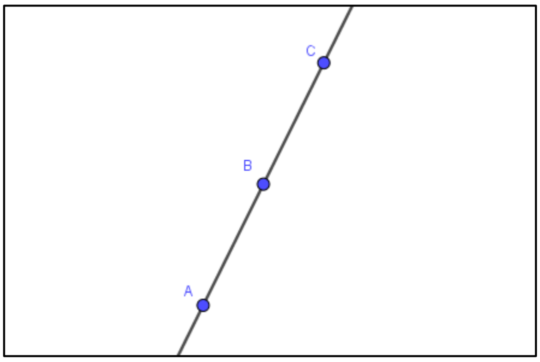
Nessa investigação, compreendemos Modelo Didático-Praxeológico Alternativo para ensino de objetos da Geometria Analítica, a partir daqui MDPA-GA, como um esquema mediador entre realidade e pensamento do professor (CHROBACK, 2006), que tem caráter provisório, mas que traz procedimentos didáticos e ferramentas matemáticas que apontam para praxeologias alternativas àquelas dominantes nas instituições de ensino. Nesse modelo, prevalecem os quatro T da praxeologia matemática como forma de modelar a atividade matemática dos sujeitos da instituição, sendo que as tarefas são caracterizadas por seu alicerce ao status concreto das noções matemáticas em estudo (característico da GA), pelo menos num grau maior do que na Álgebra Linear. O referido modelo, que se materializa na organização de tarefas que necessariamente evocam objetos ostensivos figurais (representação geométrica daquilo que é solicitado na tarefa) e que por sua vez evocam técnicas que apontam a conexão entre diferentes objetos ostensivos (figurais geométricos/gráficos, escriturais algébricos, discursivos, etc., exploram significados dos objetos em estudo, a partir do significado das técnicas utilizadas.

A seguir apresentamos tipos de tarefas e um esboço de análise praxeológica, seguindo o mesmo modelo do que foi realizado no capítulo anterior. O referido modelo é considerado didático-praxeológico por sugerir caminhos para atividade matemática de sujeitos numa determinada instituição, ou seja, nas aulas de GA, como discutido ao longo desse relatório de pesquisa.

3.1 EXPLICAR A CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS.

Três pontos estão alinhados ou são colineares se, e somente se, pertencem à mesma reta.

Figura 9 - Três pontos alinhados



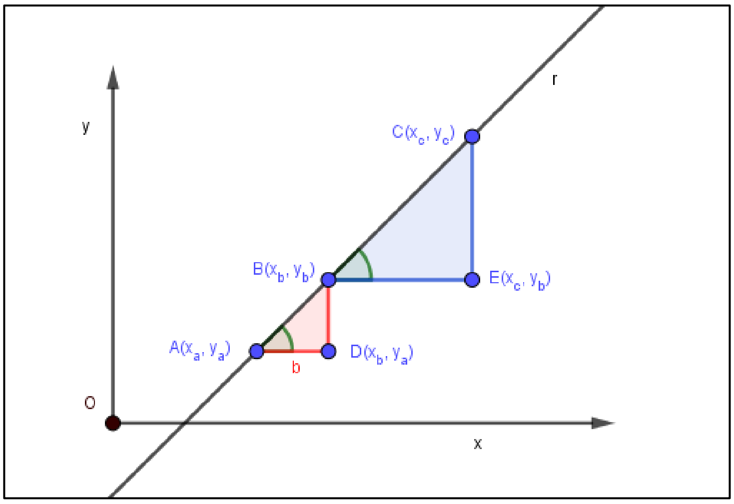
Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Revisando a definição de coeficiente angular da reta, encontrada no ensino de funções afim, dada por: $tan\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, onde $P_1 = (x_1,\ y_1)$ e $P_2 = (x_2,\ y_2)$ coordenadas de pontos pertencentes a reta, logo, qualquer par de pontos pertencente a reta terá o mesmo coeficiente angular.

Dado três pontos quaisquer, $A = (x_a,\ y_a), B = (x_b,\ y_b) e C = (x_c,\ y_c)$, estes pertencem a mesma reta, ou em outras palavras, são colineares, se, e somente se, o coeficiente angular de um seguimento de reta de dois dos três pontos for igual ao coeficiente angular do seguimento outro par de pontos escolhido.

$$\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}.$$

Figura 10 – Coeficiente anduas de dois segmentos de retas de três pontos alinhados



Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Exemplo 01 – Explicar como verificar se os pontos $A = (0, 4)$, $B = (-6, 2)$ e $C = (8, 10)$ são colineares.

Objetivo das tarefas: Explicar o processo de verificação da colinearidade de três pontos.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Calculando o coeficiente angular da reta definida por $\bar{AB}$:

$$\frac{2-0}{-6-4} = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}.$$

E na sequência calcular o coeficiente angular da reta definida por $\bar{AC}$:

$$\frac{8-0}{10-4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

É uma forma de explicar a condição de alinhamento de três pontos. Como os coeficientes angulares são distintos $-\frac{1}{5} \neq \frac{4}{3}$, os pontos não são colineares, isso porque, para que os pontos estejam na mesma linha um indicativo dessa condição é que encontremos uma certa propriedade da reta a partir dos possíveis pontos que a determina. Observe-se que o foco nessa tarefa é a explicação do processo e a compreensão do algoritmo. Há uma possibilidade da construção de um novo contrato didático com o uso desse modelo, composto por tarefas com as características que foram descritas acima. Nesse novo contrato, fica estabelecida a necessidade de compreender porque determinados algoritmos são utilizados, basta num processo de adaptação de tarefas disponíveis em LD's a realização de alterações da ação a ser realizada: verificar transforma-se em explicar o porquê.

Exemplo 02 – Verificar se os pontos $A = (2, 1)$, $B = (14, 10)$ e $C = (18, 13)$ são colineares. Verificar induz a pensar num processo em que seja necessário não somente explicitar o processo, mas compreendê-lo.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Calculando o coeficiente angular da reta definida por $\overline{AB}$:

$$\frac{10-1}{14-2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Calculando agora o coeficiente angular da reta definida por $\overline{BC}$:

$$\frac{13-10}{18-14} = \frac{3}{4}.$$

Como $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$, os pontos são colineares.

Os dois exemplos mostram que, independentemente de qualquer par de pontos que é analisado, os pontos serão colineares se os coeficientes angulares forem iguais. Esta é, portanto, uma técnica mais econômica do ponto de vista cognitivo, que pode ser evocada se a tarefa aponta uma ação de explicar o processo de resolução de tarefas do tipo verificar a condição de alinhamento de três pontos.

Induza os estudantes a desenvolver a igualdade dos coeficientes angulares e peça para analisar o resultado final.

Desenvolvendo a igualdade:

$$\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}$$

$$(y_b - y_a) \cdot (x_c - x_b) = (x_b - x_a) \cdot (y_c - y_b)$$

$$y_b \cdot x_c - y_b \cdot x_b - y_a \cdot x_c + y_a \cdot x_b = x_b \cdot y_c - x_b \cdot y_b - x_a \cdot y_c + x_a \cdot y_b \,.$$

Assim, temos:

$$(y_b \cdot x_c + y_a \cdot x_b + x_a \cdot y_c) - (y_a \cdot x_c + x_b \cdot y_c + x_a \cdot y_b) = 0\,.$$

Se algum estudante encontrar que a igualdade é resultante de uma matriz M_{3x3} , na qual os elementos da matriz são dados pelas coordenadas do ponto acrescentado os números 1 nos elementos da terceira coluna, é possível chegar ao objetivo da introdução do conteúdo a uma fórmula alternativa para a resolução da questão e, com isso, o aluno terá em mente quando precisar novamente dos passos para chegar na fórmula.

Caso não encontre similaridade na equação ao determinante da matriz, solicite para que o aluno calcule o determinante da matriz dada por:

$$det(M) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = (x_a \cdot y_b + y_a \cdot x_c + x_b \cdot y_c) - (y_b \cdot x_c + y_a \cdot x_b + x_a \cdot y_c)\ .$$

São encontradas duas equações iguais partindo de técnicas diferentes, mostrando ser possível encontrar distintas técnicas de resolver uma tarefa.

Conclui-se que, para verificar se três pontos são colineares, além de verificar os coeficientes angulares, pode também calcular o determinante da matriz definida pelas coordenadas dos pontos, e o caminho a ser seguido pelo estudante dependerá da sua compreensão do processo, aquilo que lhe parecerá mais econômico de realizar.

Exemplo 03 – Explicitar condição para que os pontos $A = (8, x)$, $B = (2, 3)$ e $C = (5, 1)$ sejam colineares.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Será utilizada a nova técnica (mais econômica do ponto de vista cognitivo por utilizar o conhecimento de equações).

Calculando o determinante da matriz e igualando a zero, como pode ser visto a seguir, já indica a condição primeira para colinearidade dos três pontos. No entanto, o ponto A tem ordenada x, o que faz com que a condição final seja um valor de x que mantenha o valor do determinante da matriz forma pelos pontos A, B e C, igual a zero.

$$det(M) = \begin{vmatrix} 8 & x & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (8 \cdot 3 \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2) - (1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 8 + 1 \cdot 2 \cdot x).$$

Igualando a zero, temos:

$$(8 \cdot 3 \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2) - (1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 8 + 1 \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$5x - 2x = -26 + 23$$

$$x = -1\,.$$

Consequências didáticas

Ao decorrer da introdução do conceito matemático, o aluno é levado a intercalar as conexões existentes entre a Geometria Analítica e outros saberes da matemática, como que uma técnica utilizada em funções afins pode servir como tecnologia para resolver atividade de outra área do conhecimento da matemática e com isso induzir o aluno a sempre fazer essas ligações existentes.

Outra parte fundamental é levar o aluno a conhecer de onde vem a técnica aplicada e como, em um futuro, ele poderá deduzir a técnica aplicada, deixando um pouco o lado da memorização para o lado mais investigativo.

3.2 DESCREVER A EQUAÇÃO DA RETA.

É possível descrever uma reta em várias fórmulas e caminhos diferentes, dentre elas, serão estudadas três: equações paramétricas, equação cartesiana e equação reduzida da reta.

Equações paramétricas da reta.

Dado um vetor $\vec{v} = (a, b)$ e dois pontos quaisquer A e B da reta r, na qual $\vec{v}$ é múltiplo de $\overrightarrow{AB}$, logo $\vec{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, com $\alpha \neq 0$, pode-se dizer, então, que $\vec{v}$ é paralelo a reta r.

Em outras palavras:

$$Se\ \vec{v}//r\ então\ \vec{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}, \alpha \neq 0\ e\ A, B \in r\,.$$

Seja $P = (x, y)$ um ponto genérico pertencente a reta r, $A(x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (a, b)$ vetor paralelo a reta, podendo ser chamado também ser chamado de vetor direto de r, obtém assim:

$$\overrightarrow{AB} = t \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}\,.$$

Como $\overrightarrow{AP} = P - A$, obtém:

$$P - A = t \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}\,.$$

Assim:

$$P = A + t \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}\,.$$

Substituindo:

$$(x, y) = (a, b) + t \cdot (\alpha, \beta), t \in \mathbb{R}\,.$$

$$(x, y) = (a + \alpha t, b + \beta t), t \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, as equações paramétricas de r são dadas por:

$$r: \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t, t \in \mathbb{R} \,. \end{cases}$$

Onde há informações importantes da reta, as coordenadas de um ponto pertencente à reta $A(a, b)$, as coordenadas de um vetor diretor de $r = (\alpha, \beta)$ e t é chamado de parâmetro de $P \in \mathbb{R}$.

Exemplo 01. Argumentar se é possível determinar as equações paramétricas da reta r que contém o ponto $A(2, 3)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (-1, 2)$.

Técnica(s) padrão e não-padrão

Nesse caso, o foco não é a simples substituição das coordenadas do ponto A e do parâmetro do ponto na equação genérica. Essa técnica é a padrão, mas aqui espera-se que o estudante afirme que sim. Que é possível, pois para determinar as equações paramétricas da reta faz-se necessário coordenadas de um ponto e de um vetor, conforme foi indicado o enunciado da tarefa. Na sequência, mostra-se a aplicação do que foi explicado anteriormente: como se sabe que $A(2, 3)$ pertence à reta e que o vetor $\vec{v} = (-1, 2)$ é paralelo à reta, as equações paramétricas da reta são dadas por:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t, t \in \mathbb{R} \,. \end{cases}$$

Exemplo 02. Explicar como determinar as equações paramétricas da reta r que contém os pontos $A(3,2)$ e $B(1,5)$.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Por definição, a reta é definida por um vetor diretor e um ponto pertencente à reta, logo é preciso encontrar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 5) - (3, 2) = (1 - 3, 5 - 2) = (-2, 3) \,.$$

Há o vetor diretor $\vec{v} = (-2, 3)$ e um ponto pertencente a reta, podendo ser tanto o ponto A como o ponto B, assim pode-se descrever as equações paramétricas de r:

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 3t, t \in \mathbb{R} \,. \end{cases}$$

Equação cartesiana da reta.

Na equação cartesiana da reta, observa-se como característica fundamental o vetor perpendicular à reta r, em outras palavras, para que eles sejam perpendiculares, o produto interno do vetor diretor da r, $\vec{u} \neq 0$, com o vetor, $\vec{v} = (a, b)$, perpendicular a r é igual a zero.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0\ .$$

Pegando, então, um ponto genérico qualquer de r, $P(x, y)$ e um ponto $A(x_0,\ y_0)$ pertencente a r, obtém-se o vetor $\overrightarrow{PA}$ como o vetor direto de r, assim:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{v} = 0\ .$$

Como $\overrightarrow{AP} = P - A$, obtém:

$$(P - A) \cdot \vec{v} = 0$$
$$\big((x, y) - (x_0, y_0)\big) \cdot (a, b) = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0$$
$$ax + by = a \cdot x_0 + b \cdot y_0\ .$$

O qual é chamado de $ax_0 + by_0 = c$.

Logo é obtida a equação cartesiana ou equação geral da reta definida por:

$$ax + by = c\ .$$

Note que, a e b são as coordenadas do vetor $\vec{v}$ perpendicular à reta r.

Exemplo 03. Encontre a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A(2, 1)$ e o vetor $\vec{v} = (2, 4)$ que é perpendicular a r.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Como $\vec{v} \perp r$ e $A \in r$, é obtida a equação cartesiana geral dada por:

$$2x + 4y = c\ .$$

Para encontra o valor de c, substitui as coordenadas do ponto A na equação acima.

$$c = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1$$
$$= 4 + 8$$
$$= 12\ .$$

Logo, a equação cartesiana de r é dada por:

$$2x + 4y = 12\ .$$

Exemplo 04. Encontrar a equação cartesiana da reta r que passa pelo ponto $A(-1,3)$ e é paralela à reta s: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Extraindo da reta s o ponto $B(2,1)$ pertencente a s e o seu vetor diretor $\vec{u} = (-3,2)$, como observado anteriormente.

Sabendo que $s//r$ e com isso, $\vec{u}$ é um vetor paralelo a r ou um candidato a ser o vetor direto de r.

Como na equação paramétrica precisa de um vetor ortogonal a reta, é necessário ir em busca de um vetor ortogonal.

Observamos que, dado um vetor $\vec{v} = (a,b)$ *qualquer, o vetor* $\vec{u} = (-b,a)$, *porquê* $\vec{v} \cdot \vec{u} = -a \cdot b + b \cdot a = 0$.

Logo, o vetor perpendicular a ao vetor $\vec{u} = (-3,2)$ é dado por $\vec{v} = (2,3)$.

Com isso é obtido:

$$2x + 3y = c.$$

Aplicando o valor do ponto A e encontrado o valor de c:

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = -2 + 9 = 7\ .$$

Assim, a equação cartesiana de r é dada por:

$$2x + 3y = 7\ .$$

Equação reduzida da reta.

Na equação cartesiana da reta dada por $ax + by = c$, ao isolar o y, é encontrada a seguinte equação:

$$y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x\ .$$

Será chamada de $m = -\frac{a}{b}$ e $n = \frac{c}{b}$, então, a equação reduzida da reta é dada por:

$$y = mx + n\ .$$

Observação 01: Considerando o ponto que a reta corta no eixo das ordenadas, ou seja, $x = 0$, então:

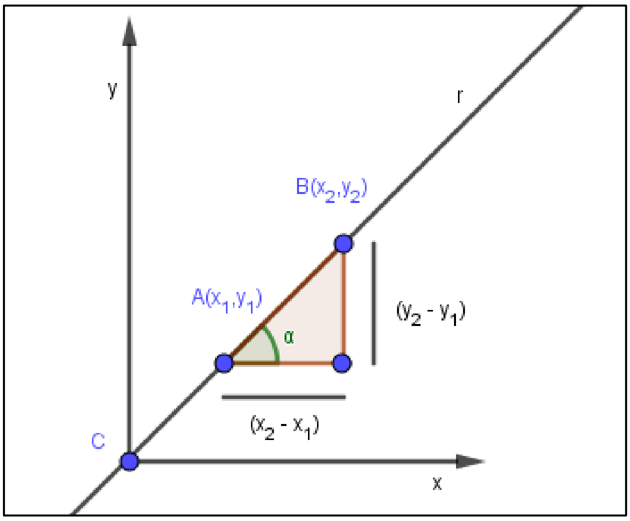
$$y = n\ .$$

Assim, é encontrada uma importante informação da reta, ela intersecta o eixo OY em n, que será chamado de coeficiente linear da reta.

Observação 02: Calculando a inclinação da reta, obtém:

Dado pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ pertencentes à reta, será calculado a inclinação da reta:

Figura 11 – Cálculo da inclinação da reta ($tan\,\alpha$)



Fonte: Elaborada pelo autor (2021)

Assim, a inclinação da reta é dada por:

$$tan\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left((m \cdot x_2 + n) - (m \cdot x_1 + n)\right)}{x_2 - x_1} = \frac{m \cdot x_2 - m \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = m\,.$$

É encontrada a inclinação da reta, ou em outras palavras, coeficiente angular da reta.

Se pegar dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ nos quais $x_2 > x_1$, será obtido:

- Se $m > 0$, tem-se o seguinte:

$$x_2 > x_1$$
$$m \cdot x_2 > m \cdot x_1$$
$$m \cdot x_2 + n > m \cdot x_1 + n$$
$$y_2 > y_1$$

Como $x_2 > x_1$ e $y_2 > y_1$ então a reta é crescente.

- Se $m < 0$, obtém-se o seguinte:

$$x_2 > x_1$$
$$m \cdot x_2 < m \cdot x_1$$
$$m \cdot x_2 + n < m \cdot x_1 + n$$
$$y_2 < y_1$$

Como $x_2 > x_1$ e $y_2 < y_1$, então a reta é decrescente.

- Se $m = 0$ então $y = n$, assim a reta vai ser paralela ao eixo das abscissas.

Exemplo 05. Descrever a equação geral da reta s que tem coeficiente angular igual a 2 e que passa pelo ponto $A(1,3)$.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Há dois dados importantes que descreve a reta s, o coeficiente angular 2, e o ponto que pertence a reta, $A(1,3)$.

A técnica que será utilizada, com base na teoria, é aplicar a equação geral de reta e substituir o coeficiente angular e o ponto pertencente à reta, assim, encontrará o termo independente da reta.

$$y = m \cdot x + n \,.$$

Substituindo:

$$3 = 2 \cdot 1 + n \,,$$

$$n = 1 \,.$$

Assim a equação geral da reta é dada por:

$$y = 2 \cdot x + 1 \,.$$

Consequências didáticas

Ao estudar as diversas equações da reta, encontram-se referências geométricas importantes que caracterizam as retas, vetores diretores, pontos pertencentes às retas, vetores perpendiculares, coeficiente angular, coeficiente linear, ponto de intersecção com os eixos e dentre outros que podem ser usados como referências para a elaboração da melhor técnica a ser utilizada na tarefa, além da importância que é a tarefa de mostra para os alunos a relação que a geometria tem com a álgebra ou vice-versa.

3.3 PERPENDICULARIDADE ENTRE RETAS

Ao estudar vetores, percebe-se que, para dois vetores serem perpendiculares, o produto interno entre eles é igual a zero, $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.

Dado dois vetores, $\vec{v} = (a,b)$ e $\vec{u} = (a',b')$, eles serão perpendiculares se, e somente se $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$.

Exemplo 01. Verificar se as retas são perpendiculares:

$$s: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad \text{e} \quad r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 6t \end{cases}$$

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Sabendo que o $\overrightarrow{v_1} = (-2{,}1)$ é o vetor diretor da reta s e o $\overrightarrow{v_2} = (3{,}6)$ vetor diretor de r.

Entende-se que:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 0\ .$$

Logo, se os vetores diretores são paralelos, as retas são paralelas.

Sejam duas retas definidas por $r: ax + by = c$ e $s: a'x + b'y = c$ serão perpendiculares se, e somente se, $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$, pois como observado anteriormente, aeb são coordenadas do vetor perpendicular da reta r e a' e b' são coordenadas do vetor perpendicular a reta s.

Por outro lado, é observado em equação reduzida da reta que o coeficiente angular da reta r que será chamado de $m_1 = -\frac{a}{b}$ e analogamente o coeficiente angular de $m_2 = -\frac{a'}{b'}$.

Desenvolvendo a equação $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$, obtém-se:

$$\frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'}\ .$$

Substituindo, é obtido:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}\ .$$

Que é outra forma de verificar se as retas são perpendiculares com os coeficientes angular da reta.

Exemplo 02. Verificar se as retas $r: y = 3x - 1$ e $s: y = -\frac{2x}{6} + 2$ são perpendiculares explicando esse processo.

Técnica(s) padrão e não-padrão:

Tal verificação é feita tomando-se os coeficientes angulares das duas retas, para identificar se são iguais. Sabendo que o coeficiente angular de r é $m_1 = 3$ e o coeficiente angular de s é $m_2 = -\frac{2}{6}$, tem-se:

$$3 = -\left(\frac{1}{-\frac{2}{6}}\right).$$

Logo, as retas são perpendiculares, haja vista ter sido identificada igualdade entre m_1 e m_2.

Observa-se que para cada tipo de tarefa é usada uma técnica diferente, sempre procurando analisar o problema para verificar qual técnica é a melhor para resolver o problema, diante disso, é perceptível a importância de estudar as diversas técnicas que podem ser utilizadas.

Consequências didáticas

As tarefas, que apresentam o mesmo objetivo, verificar se as retas são paralelas, ou seja, pela teoria, o ângulo entre elas tem que ser igual a 90^0, o fato importante que o aluno é levado a perceber é que existe duas técnicas importantes para a verificação dessa tese. Um teorema que o aluno é levado a verificar é que se vetores diretores (ou vetores ortogonais) são perpendiculares, as retas também serão perpendiculares. Outro teorema importante é elucidado com essas atividades, para que dois vetores sejam perpendiculares, o produto interno entre ele é igual a zero, que é uma operação entre vetores.

Outra forma de verificar, pois, não podemos deixar de mostrar técnicas diversas para a resolução que um mesmo problema pode ter, é a do coeficiente angular da reta que já poder ser baseando-se na soma dos ângulos internos de um triângulo e ângulos externos do triângulo, com isso levando o aluno a sempre relacionar a álgebra com a geometria.

Com a proposta das atividades o professor poderá introduzir outros conceitos importantes do ensino da matemática, como ao descrever uma equação da reta e fazer um elo com o conteúdo de funções de domínio real, assim, o estudante observa as relações que os conteúdos de matemática tem, que é um dos objetivos proposto pelo BNCC.

Quanto o elo entre os níveis básico e superior a partir do modelo aqui proposto, podemos dizer que o caminho possível está no significado dos saberes matemáticos abordados nas tarefas que por sua vez modelam as atividades matemáticas de pessoas de uma instituição (estudantes e professores). As tarefas materializam a ideia do modelo provisional que se pauta na exploração da razão de ser dos saberes, para isso, vislumbra-se modificações nos enunciados das tarefas, para indicarem ações de reflexão sobre os objetos mediados.

Mostrou-se viável nessa investigação a alteração de um aspecto importante nas tarefas: o verbo que indica ações de mediações com uso objetos da GA abordados. Mas o modelo somente deve se tornar efetivo se integrar um novo contrato didático numa determinada instituição, ou seja, se integrar de fato as práticas docentes e discentes da instituição em questão. Desse modo, foi possível observar a priori, na proposta das tarefas do modelo didático-praxeológico apresentado, que ações indicadoras de reflexão da prática, mobilizam mais o significado do objeto matemático ao contrário das ações remetentes à execução de algo especifico. Em outras palavras, explicar, justificar, etc., dizem mais sobre compreensão do significado do saber ao invés de verificar se pontos são colineares, ou determinar a equação reduzida de uma reta.

Alterar tal aspecto pode ser ainda, um fio condutor para conexões matemáticas, a serem realizadas pelo tipo de tarefa proposto por uma instituição. Isso implica dizer, mesmo tardiamente, que esse tipo de tarefa pode ser uma forma de expressar uma grande ideia matemática possível de conectar noções diferentes da matemática.

Do mesmo modo, o modelo é alternativo, quando comparado com o modelo didático dominante em relação ao ensino de GA, especialmente no Ensino Superior. Se for vislumbrado tal modelo nas aulas de GA, na educação básica, é preciso pensar primeiramente na ressignificação das práticas docentes, a partir, por exemplo, da formação inicial. Em outras palavras, esse modelo proposto só tem chances de ter uma ecologia no EM, se antes tiver tal ecologia na formação de professores de Matemática, e isso caracterizará uma nova matemática no trabalho docente e discente, rompendo com as praxeologias cristalizadas e com nível insuficiente de clareza nas suas razões de ser.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi evidenciado ao longo deste trabalho, como já elucidado na BNCC a importância da Matemática e suas áreas, sobretudo a Geometria, para o desenvolvimento cognitivo e social dos estudantes desde o Nível Fundamental até o Nível Superior. Entretanto, existem muitos entraves encontrados pelos alunos na aprendizagem dessa disciplina, tornando ainda mais grave ao chegar ao ES. Dentre outros fatores, isto ocorre por conta da maneira descontextualizada que os conteúdos são apresentados e trabalhados nos LD, sendo estes a principal ferramenta que o aluno tem para as práticas de ensino, deixando o aluno às vezes mais confuso ou até ocultando saberes importantes para do desenvolvimento geométrico e algébrico.

Após as análises, inferimos que os livros didáticos do EM poderiam trazer em sua abordagem tarefas que fujam do modelo exercícios em que se preza a memorização de técnicas padronizadas, assim como a integração de uma importante noção, utilizada nas soluções no esboço de análise praxeológica apresentada: a saber vetores.

Vale ressaltar que, na maioria dos cursos das ciências exatas, o componente curricular GA faz parte da grade do primeiro semestre. Sendo assim, o docente das universidades é desafiado a ensinar o conteúdo da melhor maneira possível para que o estudante consiga passar para as próximas etapas do curso sem essa deficiência.

Diante disso, após fazer uma análise praxeológica das atividades nos livros do EM e superior, foi possível constatar que os estudantes teriam um melhor aproveitamento em Geometria Analítica, tanto no EM, como no Ensino Superior, se fosse introduzida no livro didático do EM o conteúdo de vetores, como já é proposta pela BNCC.

O principal objetivo deste trabalho é analisar as dificuldades que os alunos encontram ao ingressar no ensino superior, mais especificamente na disciplina de GA, alinhado a um embasamento teórico da TAD de Chevallard que tem como foco principal uma análise praxeológica.

As tarefas propostas pretendem auxiliar professores na introdução dos conteúdos de vetores na disciplina de GA e uma sugestão para a implementação destes nos LD’s. Outra atividade que pode ser aplicada, trazendo uma metodologia mais dinâmica para a sala de aula é apresentada pelo mesmo autor e intitulada como **metodologias ativas no ensino da matemática:** o GeoGebra, como ferramenta de aprendizagem do conceito de vetores.

Portanto, este trabalho destaca a importância do conteúdo de vetores para a disciplina de GA, que não são apresentados nos LD’s das instituições do EM, o que afeta diretamente na aprendizagem do aluno na disciplina, elevando a dificuldade no ES.

Ressalta-se que esse texto se refere à análise de atividades propostas pelos LD's, tanto do EM como ES e alinhado a Teoria Antropológica do Didático, mas ainda permanecendo algumas questões para a continuidade da pesquisa: quais as justificativas para os LD's não apresentarem o conteúdo de vetores? O quanto o aluno é prejudicado ao não ter contato com vetores no EM? Assim, é a importância de continuar os estudos para entender e melhorar o ensino de GA no que tange a passagem do EM para o superior.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, V. F. C. *Análise das práticas docentes de professores de cursos de licenciatura em Matemática referentes ao estudo de retas e ângulos*. 2009. 133f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009. Disponível em: < http://grupoddmat.pro.br/index.php/analise-das-praticas-docentes-de-professores-de-cursos-de-licenciatura-em-matematica-referentes-ao-estudo-de-retas-e-angulos/>. Acesso em: 14 out. 2021.

BAHIA. Secretaria de Educação. *Orientações curriculares para o ensino médio.* Área: Matemática**.** Salvador, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Curricular Comum.* Versão 2, Brasília, 2016.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática/ SEF. _ Brasília,1998.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. In : L'UNIVERSITE D'ETE, 1998, p.91-118. *Actes* de l'Université d'été La Rochelle. Clermont-Ferrand, France: IREM, 1998.

______. Approche Anthropologique du Rapport au Savoir et Didactique des Mathematics. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, V. 12, n°1, p.1-8, 2009. Traduzido para o português por Helder Lima Silva, Afonso Henriques e Rogério Pedro Fernandes Serôdio.

______. *La transposition didactique*. Grenoble, La pensée Sauvage, 1991.

______. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. In: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Tradução em espanhol de Ricardo Barroso Campos.

______. Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias. SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Traduzido por Cleonice Puggian, 2013. Disponível em: <<http://publicacoes.unigranrio.edu.br/index.php/recm/article/view/2338/1111>>. Acesso em: 02.mar. 2021.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia:* Saberes necessários à Prática Educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GRYMUZA, A. M. G.; RÊGO, R. G. A teoria da atividade: uma possibilidade no ensino de matemática. *REVISTA TEMAS EM EDUCAÇÃO*, v. 23, n. 2, p. 117-138, 26 nov. 2014. Disponível em: <<https://periodicos.ufpb.br/index.php/rteo/article/view/20864>>. Acesso em: 29.mar. 2021.

HENRIQUES, A; ATTIE, J. P. ; FARIAS, L. M. S.. Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple. *EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA*: REVISTA DO PROGRAMA DE ESTUDOS PÓS-GRADUADOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – PUC. São Paulo, v. 9, n. 1, pp. 51-81, 2007. Disponível em: << https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/585>>. Acesso em: 19.mar. 2021.

NASSER, L.; VAZ, R. F. N.; TORRACA, M. A. A. Transição do Ensino Médio para o Superior: Investigando Dificuldades em Geometria Analítica. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/322925709_Transicao_do_Ensino_Medio_para_o_Superior_Investigando_Dificuldades_em_Geometria_Analitica>>. Acesso em: 08. Abr.2021.

MATHERON, Y. Analyser les praxéologies quelques exemples d'organizations mathématiques. **Petit X**, n.54, pp.51-78, 2000.

MENEZES, M. B. de; MOSER, A. Invenção ou criação matemática e os fenômenos didáticos. *REAMEC* - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, *[S. l.]*, v. 8, n. 3, p. 592-612, 2020. DOI: 10.26571/reamec.v8i3.10901. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/10901. Acesso em: 25 mar. 2021.

ROBERT, A; SCHWARZENBERGER, R. Research in teaching and learning Mathematics at an advanced level. In: David Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers,1981.

SANTANA, K. C. L.; JANUARIO, G.; COSTA, F. A.; POSSANI, J. F. e AMARAL, N. Introdução ao conceito de função: uma análise pela perspectiva da organização praxeológica. In: Encontro Paulista de Educação Matemática, 10. *Anais* X EPEM: Os (des)caminhos da Educação Continuada de Professores que ensinam Matemática no Estado de São Paulo. São Carlos: SBEM/SBEM-SP, 2010, p. 1-12. (ISBN 978-85-98092-12-6). Disponível em:

<<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_santana_januario_possani_amaral.pdf >>. Acesso em: 05.mar. 2021.

SANTOS, M. C.; MENEZES, M. B. A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. *PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, v. 8, n. 18, 18 dez. 2015. Disponível em: <<https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1456/979 >>. Acesso em: 02.mar. 2021.

SILVA, H. L.; HENRIQUES, A.; SERÔDIO, R. P. F. Análise Praxeológica de Funções Trigonométricas em um Livro Didático do Ensino Médio. *PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, v. 10, n. 22, 12 abr. 2017. Disponível em: <<https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2286/3103>>. Acesso em: 05.mar. 2021.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica**.** In: GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (org.). *Métodos de pesquisa*. 1ª. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. P. 31-37.