Universidade Federal do Oeste da Bahia
Centro de Ciências Exatas e das Tecnologia
mestrado profissional em matemática em rede

Teorema Fundamental da Álgebra e Aplicação: Uma proposta para o Ensino Médio

Jânisson Aragão Mota

Barreiras-Bahia

26 de novembro

Teorema Fundamental da Álgebra e Aplicação: Uma proposta para o Ensino Médio

Jânisson Aragão Mota

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, vinculado à Universidade Federal do Oeste da Bahia-UFOB, Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Pereira da Costa.
Co-orientadora: Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Sara Ruth Bispo de Menezes Oliveira.

Barreiras-Bahia

26 de novembro

FICHA CATALOGRÁFICA

M917 Jânisson Aragão Mota

Teorema Fundamental da Álgebra: uma proposta para o ensino médio. Jânisson Aragão Mota. – 2021.

69f.: il

Orientador: Prof. Dr André Pereira da Costa

Dissertação (Mestrado) – Mestrado profissional em Matemática, Universidade Federal do Oeste da Bahia. 2021.

1. Números complexos. 2. Ensino Médio. 3. Funções complexas. I. Costa, André Pereira da. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia. Título.

CDD 510

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

Teorema Fundamental da Álgebra e Aplicação: Uma proposta para o Ensino Médio

Jânisson Aragão Mota

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, vinculado à Universidade Federal do Oeste da Bahia-UFOB, Centro das Ciências Exatas e das Tecnologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 26 de novembro de 2021.

Banca examinadora:

Prof. Dr. André Pereira da Costa (Orientador)
Universidade Federal do Oeste da Bahia-UFOB

Prof. Dr. Edwin Oswaldo Salinas Reyes
Universidade Federal do Oeste da Bahia-UFOB

Profª. Drª. Elen Deise Assis Barbosa
Universidade Federal da Bahia-UFBA

Dedico esta dissertação a todos os amigos do PROFMAT – UFOB turma de 2019, especialmente àqueles que, infelizmente, não chegaram a esta etapa por influência direta das consequências da Pandemia do Coronavírus. Mas, tenho certeza que em um futuro próximo todos concluirão o curso com sucesso.

Dedicação

Agradecimentos

Primordialmente sou grato à Deus, por ter me dado a oportunidade de fazer um Mestrado depois de tantos anos da conclusão da minha graduação. Ainda, agradeço por ter me dado força, paciência e sabedoria para conseguir me dedicar a esse grau acadêmico, enquanto lecionava em outras duas escolas.

Aos meus pais, Jackson Aragão Mota (In Memoriam) e Maria José Mota (In Memoriam) e irmãos, Jacome Aragão Mota, Jaubério Aragão Mota, Jaudio Aragão Mota, Jairo Aragão Mota, Jaulânia Aragão Mota, Juliane Aragão Mota, Jane Aragão Mota, Gilmar Aragão Mota, José Mota Neto, Janice Aragão Mota e Jadson Aragão Mota, por terem me dado oportunidade de estudar, apesar de todas as dificuldades eles se esforçaram para que eu tivesse estudo e pudesse chegar onde eu cheguei.

À minha esposa, Alcimara Silva Santos Aragão Mota e filhos, Janaína Silva Santos Aragão Mota, Gabriela Silva Santos Aragão Mota e João Gabriel Aragão Mota, principalmente à minha esposa que me apoiou desde a inscrição para o processo seletivo. Durante toda a caminhada me apoiando e agora na reta final a qual estamos chegando.

A todos meus companheiros de turma, mesmo que alguns não tenham conseguido seguir essa jornada ou mesmo terem ficado uma etapa para trás. Todos foram importantes para o crescimento, para o amadurecimento e para manter a coragem de continuar.

Aos meus professores, que em suma fizeram a diferença com seus ensinamentos. Compartilhando seus conteúdos com domínio e da melhor forma para que pudéssemos absorver. Agradeço a toda dedicação e competência docente, principalmente por estarmos em um período inédito, que é a pandemia, onde boa parte de nossos encontros foram remotos.

À minha coorientadora, Drª Sara Ruth Pires Bispo que de toda forma possível compartilhou seu conhecimento, auxiliando e mostrando os erros e acertos, ajudando a crescer. Ao meu orientador, Dr André Pereira da Costa, por todo o suporte e contribuições que somaram e agregaram na composição estrutural e didática deste trabalho. Ainda que estejamos em uma pandemia onde o ensino se tornou remoto, tivemos reuniões para que eu pudesse ser orientado, e essas reuniões fizeram a grande diferença.

Aos professores da banca examinadora, Profª. Drª. Elen Deise Assis Barbosa, Universidade Federal da Bahia-UFBA, Prof. Dr. Junilson Cerqueira da Silva, Instituto Federal da Bahia, Prof. Dr. Edwin Oswaldo Salinas Reyes, Universidade Federal do Oeste da Bahia-UFOB, Prof. Dr. Edvaldo Elias de Almeida Batista, Universidade Federal do Oeste da Bahia-UFOB.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)

Por fim, a todos aqueles que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desta dissertação, o meu sincero agradecimento.

"Se você sente dor, você está vivo. Se você sente a dor das outras pessoas, você é um ser humano." - Leon Tolstói

Resumo

Esta pesquisa é uma dissertação de mestrado com o objetivo geral de propor e aplicar uma abordagem de estudo do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) para estudantes do Ensino Médio, de forma acessível e intuitiva. apresentamos a seguinte problemática: Como abordar o teorema fundamental da álgebra para estudantes do ensino médio de forma acessível e intuitiva? Esta é uma pesquisa qualitativa, exploratória, na forma de um estudo de caso (GIL, 2002; YIN, 2001). Como objetivos específicos elencamos: Investigar formas de trabalhar o TFA com alunos do ensino médio; e Estabelecer uma relação entre as representações algébrica e gráfica usando o TFA. Verificamos que podem surgir dificuldades em se trabalhar as demonstrações deste teorema com alunos do ensino médio em decorrência da carga teórica exigida, principalmente com relação aos objetos de conhecimentos voltados à topologia, excluídos da ementa do ensino básico. Já os resultados deste teorema podem ser explorados com esses alunos, potencializado pelo uso de ferramentas como o GeoGebra, que permite uma clara associação entre as construções algébricas e gráficas.

Palavras-chave: Números complexos. Ensino Médio. Funções complexas. TFA.

Abstract

This research is a master's thesis with the general goal of proposing and applying an approach on the study of the Fundamental Theorem of Algebra (TFA) for high school students in an accessible and intuitive way. Using as problem situation: How to reach the fundamental theorem of algebra for high school students in an accessible and intuitive way? This is a qualitative, exploratory research in the form of a case study (GIL, 2002; YIN, 2001). As specific goals we list: Investigate ways of working with TFA with high school students; establish a relationship between algebraic and graphical representations using TFA. We checked that difficulties may appear when working the proofs of this theorem with high school students due to the theoretical load required, especially regarding to topics on topology, not included in the education syllabus. The results of this theorem, on the other hand, can be explored with these students, enhanced by the use of tools such as GeoGebra that allows a clear association between algebraic and graphical constructions.

Keywords: Complex numbers. High school. Complex functions. TFA.

Sumário

1 Introdução

Os números complexos foram criados pela necessidade de resolver equações de segundo grau, por exemplo $x^2 + 1 = 0$ que possuem raízes negativas. Antes, esse tipo de cálculo não era possível ser feito no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Para que pudesse haver resolução foi criada a unidade imaginária, que é representada pela letra i.

A partir de um debate entre os matemáticos Cardano e Tartaglia e da percepção de que os números reais não eram suficientes para resolução das equações com raízes negativas, iniciou-se uma busca entre os matemáticos para a resolução de equações de 3° grau. Posterior às inúmeras pesquisas, Descartes em seu livro "Discurso do método"definiu o numero $\sqrt{-1}$ como um número imaginário, assim criando os "números complexos".

Nesse seguimento, muitos outros matemáticos ajudaram nas descobertas, mas foi a partir de Euler que iniciou-se as descobertas de extração da raiz n-ésima. Euler descobriu o número irracional e seu valor aproximado. Além disso, ele começou a estudar os números na forma $z = a + ib$ onde "a"e "b"são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

“Números complexos” é um assunto abordado, frequentemente, no final do Ensino Médio, objeto de muitas indagações a respeito da melhor maneira de apresentá-los em sala de aula, bem como de suas aplicações e conexões com outros tópicos da matemática. (PINTO JUNIOR, 2009).

Nesta persepctiva, surgem as discussões sobre as funções complexas, que são aquelas cujo domínio está contido no cunjunto dos números complexos. Apesar de não ser um conteúdo próprio do Ensino Médio, há pesquisas, como as de Silva (2015), que indicam possibilidades de trabalho deste assunto através de um paralalelo com as funções reais.

O Teorema Fundamental da Álgebra (Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, com $n \geq 1$, possui uma raiz no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos) surge ancorado no estudo dos polinômios, complexos ou não, no momento em que estabelece uma relação para determinação de suas raízes.

O TFA não costuma ser explorado de forma devida no ensino médio, possivelmente pelo grau de complexidade imbuído à demonstração e ao estudo de suas consequências. A maioria das demonstrações do TFA seguem o Teorema de Liouville e para se chegar a esse teorema o estudante precisa ter cursado análise complexa ou funções analíticas. Apesar de existirem várias demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra, o primeiro a tentar demonstrar foi Jean de Rond D'Alembert em 1746. Mas quem definitivamente demonstrou foi Karl Friedrich Gauss, em sua tese de doutorado. A partir da primeira demonstração de Gauss, houveram outras demonstrações diversas e que utilizam ferramentas de análise complexa, como o Teorema de Liouville, Teorema de Cauchy, Teorema de Picard, entre outros.

O software GeoGebra[1] foi aplicado na resolução gráfica das raízes de um polinômio.

O estudo frágil deste conteúdo na educação básica é algo constatado por mim, no decorrer dos meus 26 anos de pleno exercício da docência, ao analisar os livros didáticos com os quais trabalhei. Tal constatação foi uma das principais razões que me levou a querer estudar esse conteúdo como principal objeto matemático na presente dissertação.

Dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) (BRASIL, 2019) indicam resultados insatisfatórios com relação aos conteúdos atrelados ao TFA. Na Bahia, apenas 0,57 por cento dos estudantes alcançaram o nível 7, no qual se encontra a habilidade de reconhecer as raízes de um polinômio apresentado em sua forma fatorada. Esse percentual cai ainda mais no nível 9 (0,03 por cento), onde se encontra a habilidade de determinar um polinômio em sua forma fatorada, dadas suas raízes. Desta forma, trata-se de um conteúdo que precisa de atenção didática tanto por parte dos professores de matemática como também de pesquisadores da área.

Portanto, a dissertação apresentada tem o objetivo geral de propor uma abordagem de estudo do TFA para estudantes do Ensino Médio de forma acessível e intuitiva. Como problemática temos: Como abordar o teorema fundamental da álgebra estudantes do ensino médio de forma acessível e intuitiva?

Esta pesquisa está estruturada em seis capítulos, além da introdução, no capítulo dois falamos sobre os números complexos; no capítulo três são discutidas as funções complexas; no quarto é enunciado e demonstrado o TFA baseado na demonstração de FERNANDEZ, C. S. ; SANTOS, R. A; no quinto apresentamos algumas aplicações do TFA; e no sexto evidenciamos nossas considerações finais.

[1]O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA. Foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo.

2 Números Complexos

Os números complexos possuem um papel importante nas diversas áreas da Matemática, porém uma das mais populares indagações sobre os números complexos foram feitas utilizando as equações de 2 grau pelo questionamento do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Como todos sabemos, as soluções das equações de segundo grau,

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

são dadas pela conhecida fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Obtemos duas soluções, quando o discriminante $b^2 - 4ac$ é positivo e apenas uma se ele for nulo. Mas, e quando temos um problema no qual o discriminante é um número negativo?

É possível resolver a equação do 2 grau mesmo no caso em que o discriminante delta Δ seja negativo, ou seja, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, se operarmos com o símbolo $i = \sqrt{-1}$ como se fosse um número. Para que isso seja possível, é necessário que tenha a propriedade em que $i^2 = -1$ e deve operar ao lado dos números reais com as mesmas leis formais de um corpo que regem estes números. Notemos então, que estas raízes são da forma $a + bi$ e $a - bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária.

2.1 Conjunto dos números complexos

Neste capítulo serão apresentados o conjunto dos números complexos e suas principais propriedades algébricas e operatórias.

O conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, é o conjunto

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações de adição e multiplicação: Se $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ pertencem a $\mathbb{C}$, então

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad e \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Os elementos de $\mathbb{C}$ são denominados números complexos. Além disso, diz-se que dois números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

2.2 Álgebra dos Números Complexos

Vamos agora obter uma outra representação para o número complexo $z = (x, y)$, para isso, precisaremos fazer a seguinte análise: considerando o número complexo $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$, podemos representar simplesmente como x, de fato, a função

$$x \longmapsto (x, 0)$$

é injetora, pois dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$, por definição de igualdade de números complexos, $(x_1, 0) \neq (x_2, 0)$, além disso, preserva as operações de soma e multiplicação: De fato,

$$x_1 + x_2 \longmapsto (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0)$$

$$x_1 x_2 \longmapsto (x_1 x_2, 0) = (x_1 x_2 - 0(0), x_1 0 + x_2 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0).$$

Com isso, conseguimos uma imersão do conjunto dos números reais no conjunto dos números complexos, através de uma função injetora que preserva as operações de soma e multiplicação. Assim, podemos dizer que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, já que para cada $x \in \mathbb{R}$, obtemos o número complexo, $(x, 0)$, assim podemos representar o número complexo $(x, 0)$ simplesmente por x.

Notemos que,

$$\begin{aligned}(0,1)^2 &= (0,1) \cdot (0,1) = (0(0) - 1(1), 0(1) + 1(0)) \\ &= (-1, 0).\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}z &= (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y(0) - 0(1), y(1) + 0(0)) \\ &= (x, 0) + ((y, 0) \cdot (0, 1)).\end{aligned}$$

Definindo $i = (0, 1)$, temos que $i^2 = (-1, 0)$. A partir de agora, denotaremos por $z + w$ (soma de números complexos z,w) e zw (o produto de números complexos zw). Da análise que fizemos acima, concluímos que os números complexos $(x, 0), (y, 0)$ e $i = (0, -1)$ podem ser representados, respectivamente, pelos números reais x, y e i. Dessa forma,

$$z = x + iy$$

Tal que $i^2 = -1$.

Definição 2.1. *A expressão $z = x+iy$ é chamada de forma algébrica do número complexo $z = (x, y)$. Os números reais x e y são chamados respectivamente de parte real e parte imaginária de z.*

Denotaremos a parte real e imaginária do número complexo z, respectivamente por $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$. Além disso, o número $i = \sqrt{-1}$ é chamado de unidade imaginária.

O número complexo z é chamado de imaginário puro quando tomamos $x = 0$, ficando da forma:

$$z = 0 + iy = yi, y \neq 0.$$

O número complexo z é chamado de real quando tomamos $y = 0$, ficando da forma:

$$z = x + i0 = x.$$

Dados dois números complexos, $z = a + ib$ e $w = c + id$, dizemos que $z = w$ se, e somente se $a = c$ e $b = d$. Ou seja, dois números complexos são iguais se suas partes reais e suas partes imaginárias são respectivamente iguais. Além disso, a soma e multiplicação de números complexos na forma algébrica se dá da seguinte maneira

$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$
$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Notemos que a soma de z e w coincide com uma soma vetorial em $\mathbb{R}^2$, para isto basta aplicarmos a regra do paralelogramo.

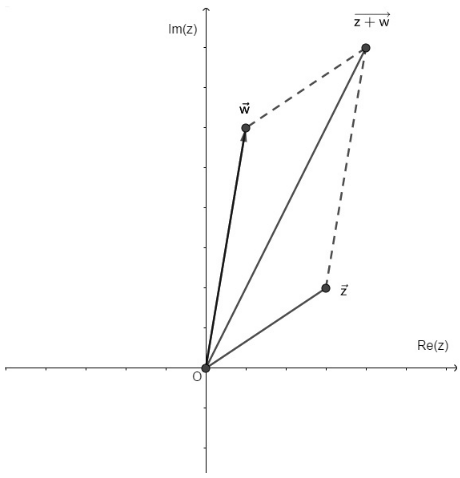


Figura 1: Soma de dois números complexos
Fonte: Autoria própria

Exemplo 1. *Considerando os números complexos $z = 3 + 4i$ e $w = 5 + 2i$, determine a soma entre z e w.*

Resolução: $z + w = (3 + 4i) + (5 + 2i) = (3 + 5) + (4 + 2)\, i = 8 + 6i$.

Portanto, a soma entre z e w é $8 + 6i$.

Exemplo 2. *Determinar m e n, números reias, na igualdade $(4 + mi) + (n + 3i) = 8 + 7i$.*

Resolução: Aplicando a adição de números complexos, temos que, $(4 + n) + (m + 3)\, i = 8 + 7i$. Agora vamos aplicar a igualdade de números complexos, então $4 + n = 8 \Rightarrow n = 4$ e $m + 3 = 7 \Rightarrow m = 4$. Logo, $m = 4$ e $n = 4$.

Exemplo 3. *Dados os números complexos $z = 3i, w = 1 + i$ e $u = 2 + 4i$, determinar o produto zwu.*

Resolução:

$$
\begin{aligned}
z &= (3i\,(1 + i))\,(2 + 4i) \\
&= \left(3i + 3i^2\right)(2 + 4i) \\
&= (-3 + 3i)\,(2 + 4i) \\
&= \left(-6 - 12i + 6i + 12i^2\right) \\
&= -18 - 6i.
\end{aligned}
$$

Conclui-se que, o produto entre z, w e u é $-18 - 6i$.

Exemplo 4. *Dados $z = 4 + 2i$ e $w = 5 + i$, determinar $2z + w$.*

Resolução: Primeiro vamos calcular o produto $2 = 2 \cdot (4 + 2i) = (8 + 4i)$. Agora vamos somar esse valor com w, então, $(8 + 4i) + (5 + i) = 13 + 5i$.

Então, o valor da expressão $2z + w$ igual a $13 + 5i$.

Para definirmos a subtração e divisão no conjunto dos números complexos precisaremos do próximo Teorema, no qual provaremos a validade das propriedades básicas da adição e multiplicação, que já sabemos que são válidas para números reais.

2.2.1 Propriedades de corpo de números complexos

Teorema 2.2. *Suponha que z, w, u são números complexos, com $z = a + ib, w = c + id$ e $u = e + if$. Essas propriedades de corpo são válidas para todos os elemnetos de $\mathbb{C}$:*

1. **Comutativa na soma**: $z + w = w + z$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} z + w &= (a + ib) + (c + id) \\ &= (a + c) + i\,(b + d) \\ &= (c + a) + i\,(d + b) \\ &= (c + id) + (a + ib) \\ &= w + z. \end{aligned}$$

□

2. **Associativa na soma**: $z + (w + u) = (z + w) + u$.

   Demonstração.

$$\begin{aligned} z + (w + u) &= (a + ib) + [(c + id) + (e + if)] \\ &= (a + ib) + [(c + e) + i\,(d + f)] \\ &= (a + c + e) + i\,(b + d + f) \\ &= [(a + c) + (b + d)] + (e + if) \\ &= (z + w) + u. \end{aligned}$$

□

3. **Elemento Neutro na soma**: Existe um número $w \in \mathbb{C}$, tal que, $z + w = z$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

   Demonstração. Vamos mostrar que $z + w = z$. De fato,

   $z + w = z \Rightarrow (a + ib) + (c + id) = a + ib \Rightarrow (a + c) + i\,(c + d) = a + ib \Rightarrow a + c = a$ e $b + d = b \Rightarrow c = 0$ e $d = 0$.

   Portanto, o número complexo $w = 0 + 0i$, é chamado elemento neutro da adição que somado a qualquer número complexo z, resulta no próprio z. Indicaremos o elemento neutro da adição por 0.

□

4. **Simétrico**: Para todo número complexo z existe w em $\mathbb{C}$, tal que $z + w = 0$.

   Demonstração. Vamos provar que $z + w = 0$, então $w = -a - ib$. De fato,

   $z + w = 0 \Rightarrow (a + ib) + (c + id) = 0 + 0i \Rightarrow (a + c) + i\,(b + d) = 0 + 0i \Rightarrow a + c = 0$ e $b + d = 0 \Rightarrow a = -c$ e $b = -d$.

Portanto, existe um número complexo $w = -a - ib$, denotado de $-z = -a - ib$ que somado com o número complexo z resulta 0, ou seja, $z + w = 0$.

$\square$

Agora provaremos as propriedades na multiplicação de números complexos

1. **Comutativa no produto**: $z \cdot w = w \cdot z$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + ib) \cdot (c + id) \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \\ &= (ca - db) + i(da + cb) \\ &= (c + id) \cdot (a + ib) \\ &= w \cdot z. \end{aligned}$$

$\square$

2. **Associativa no produto**: $(z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u)$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (z \cdot w) \cdot u &= [(a + ib) \cdot (c + id)] \cdot (e + if) \\ &= [(ac - bd) + i(ad + bc)] \cdot (e + if) \\ &= (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a + ib) \cdot [(ce - df) + i(cf + de)] \\ &= (a + ib) \cdot [(c + id) \cdot (e + if)] \\ &= z \cdot (w \cdot u). \end{aligned}$$

$\square$

3. **Elemento Neutro no produto**: Existe $w \in \mathbb{C}$, tal que, $z \cdot w = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Vamos mostrar que existe w em $\mathbb{C}$ tal que, $zw = z$, para todo z em $\mathbb{C}$, então $w = 1$. De fato,

$z \cdot w = z \Rightarrow (a + ib)(c + id) = a + ib \Leftrightarrow (ac - bd) + i(ad + bc) = a + ib \Leftrightarrow ac - bd = a$ e $ad + bc = b \Leftrightarrow c = 1$ e $d = 0$.

Portanto, $w = 1 + 0i$, chamado de elemento neutro da multiplicação, que multiplicado por qualquer número complexo z, resulta no próprio z. Indicaremos o elemento neutro da multiplicação por 1. $\square$

4. **Inverso multiplicativo**: Para todo número complexo $z \in \mathbb{C}$ com $z \Leftarrow\neq 0$ existe $w \in \mathbb{C}$, tal que, $z \cdot w = 1$.

   Demonstração. Vamos mostrar que se $z \cdot w = 1$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então $w = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$. De fato,
   $z \cdot w = 1 \Rightarrow (a+ib)\cdot(c+id) = 1+0i \Leftrightarrow (ac-bd)+i(ad+bc) = 1+0i \Leftrightarrow ac-bd = 1$ e $ad+bc = 0 \Leftrightarrow c = \dfrac{a}{a^2+b^2}$ e $d = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$.
   Portanto, $w = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$, chamado de inverso de z, quando multiplicado por um número complexo z resulta em 1, como $a \neq 0$ e $b \neq 0$ temos que $a^2+b^2 \neq 0$, o que garante a existência de w. Denotaremos por z^{-1} o inverso de z.

   □

5. **Distributiva**: $z \cdot (w+u) = z \cdot w + z \cdot u$

   Demonstração.

$$\begin{aligned}
z \cdot (w+u) &= (a+ib)\cdot[(c+id)+(e+if)] \\
&= (a+ib)\cdot[(c+e)+i(d+f)] \\
&= (ac+ae-bd-bf)+i(ad+af+bc+be) \\
&= [(ac-bd)+(ae-bf)]+i[(ad+bc)+(af+be)] \\
&= [(ac-bd)+i(ad+bc)]+[(ae-bf)+i(af+be)] \\
&= [(a+ib)\cdot(c+id)]+[(a+ib)\cdot(e+if)] \\
&= z\cdot w + z\cdot u.
\end{aligned}$$

   □

Agora vamos definir as operações de subtração e divisão no conjunto dos números complexos.

1. **Subtração**. A subtração de números complexos é definida em termos da adição e do simétrico aditivo. Vimos no Teorema anterior que o simétrico aditivo de $z = a+ib$ é o número $-z = (-a)+i(-b)$. Dados $z = a+ib$ e $w = c+id$, definimos:

$$z + (-w) = (a-c) + i(b-d)$$

   Exemplo 5. *Sejam $z = m+3i$ e $w = (2-n)+ni$. Determinar m e n, números reais, de modo que $z - w = 5 - 4i$.*

Resolução: Aplicando a subtração de números complexos, temos que:

$(m+3i)-(2-n+ni)=5-4i \Rightarrow (m-2+n)+(3-n)\,i=5-4i \Rightarrow m+n-2=5$ e $3-n=-4 \Rightarrow m=0$ e $n=7$.

Portanto, os valores são m = 0 e n = 7.

2. **Divisão** A divisão entre dois números complexos $z=a+bi$ e $w=c+di$, com $w \neq 0$ é definida por:
$$\frac{z}{w}=zw^{-1}$$
Dessa forma,
$\frac{z}{w}=zw^{-1}=(a+ib)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2}+\frac{-d}{c^2+d^2}i\right)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$

Exemplo 6. *Encontrar o valor de um número real de m de modo que* $z=\dfrac{1+2i}{1-mi}$ *seja imaginário puro?*

Resolução: Precisamos escrever z na forma algébrica. Para isso, façamos inicialmente a divisão:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+2i}{1-mi}\cdot\frac{1+mi}{1+mi} \\ &= \frac{1+mi+2i+2mi^2}{1^2-m^2i^2} \\ &= \frac{(1-2m)+(m+2)\,i}{1+m^2} \\ &= \frac{1-2m}{1+m^2}+\frac{(m+2)\,i}{1+m^2}. \end{aligned}$$

Para que z seja imaginário puro, devemos ter $Re\,(z)=0$ e $Im\,(z)\neq 0$. Daí da primeira condição vem:
$\dfrac{1-2m}{1+m^2}=0$ então $m=\dfrac{1}{2}$ e satisfaz a segunda condição.
Portanto, $m=\dfrac{1}{2}$ para que z seja imaginário puro.

2.3 Plano Complexo

O plano complexo é o conjunto das representações de todos os números complexos $z=a+bi$ com $a,b\in\mathbb{R}$ pelos pontos $P=(a,b)$ do plano. O plano cartesiano, é denominado plano de Argand-Gauss ou plano complexo. Neste plano, o eixo das abscissas é chamado de eixo real e o eixo das ordenadas, eixo imaginário.

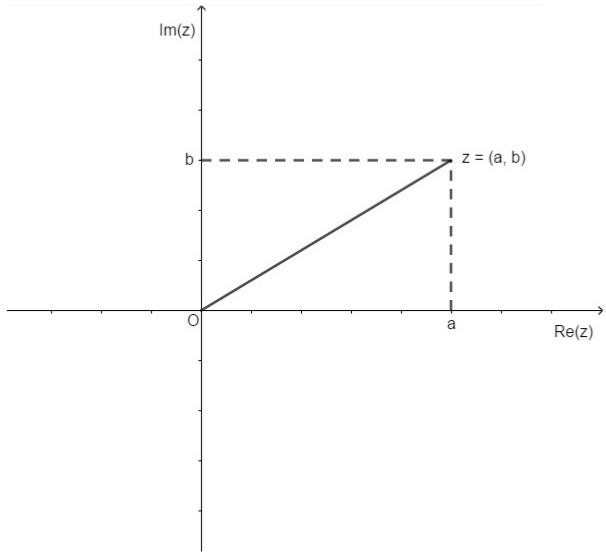


Figura 2: Plano Complexo
Fonte: Autoria própria

2.4 Conjugado e valor absoluto

Definição 2.3. *O conjugado do número complexo $z = a + bi$ é definido como sendo o número $\overline{z} = a - bi$.*

Geometricamente, $\overline{z}$ é a reflexão do vetor que representa z com relação ao eixo real.

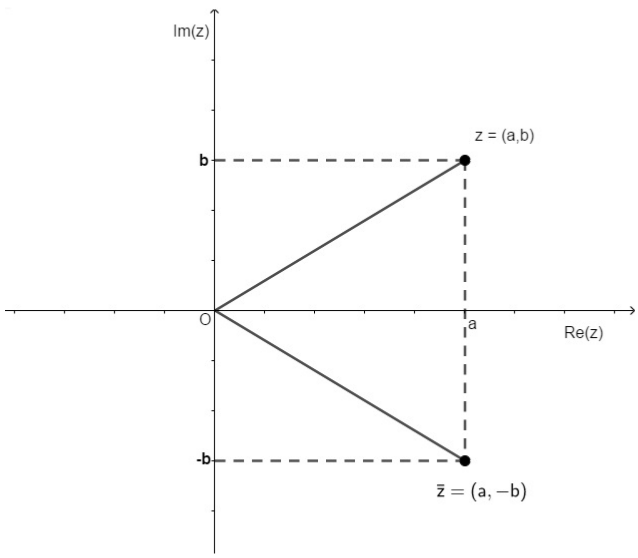


Figura 3: Conjugado de um número complexo
Fonte: Autoria própria

Exemplo 7. *Determinar o conjugado do número complexo* $z = 5 + 3i$.

Resolução:

O conjugado desse número $z = 5 + 3i$ é o número complexo $\overline{z} = 5 - 3i$, pois é o oposto da parte imaginária de z.

Exemplo 8. *Encontrar o número complexo* $z = a + ib$, *sabendo que* $3z + 5\overline{z} = 8 - 4i$.

Resolução:

Vamos substituir z por $a + ib$ e $\overline{z}$ por $a - ib$, então:

$3(a + ib) + 5(a - ib) = 8 - 4i \Rightarrow 3a + 3ib + 5a - 5ib = 8 - 4i \Rightarrow 8a - 2ib = 8 - 4i \Rightarrow$ $8a = 8$ e $-2a = -4 \Rightarrow a = 1$ e $b = 2$.

Portanto, o número complexo procurado é $z = 1 + 2i$.

Definição 2.4. *Definimos o módulo de um número complexo* z, *que vamos denotar por* $|z|$, *como sendo a distância do afixo de* z *até a origem do plano complexo (0,0), onde o afixo é a representação desse número complexo no plano de Gauss, e algebricamente podemos representar por* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

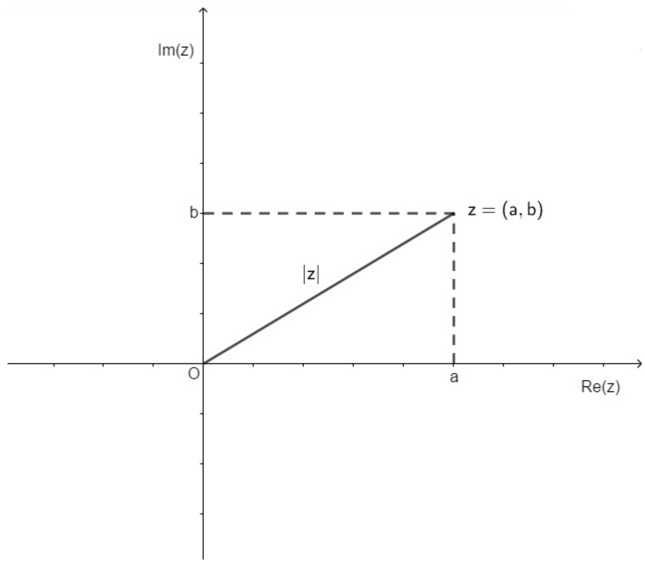


Figura 4: Módulo de um número complexo
Fonte: Autoria própria

Exemplo 9. *Determinar o módulo do número complexo $z = 4 + 3i$.*

Resolução:

$|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{25} \Rightarrow |z| = 5.$

Portanto, o valor absoluto de z é 5.

Provaremos adiante algumas propriedades interessantes envolvendo módulo e conjugado de um número complexo.

Proposição 2.5. *Para todo $z, w, u \in \mathbb{C}$, temos*

1) $|z| = |\overline{z}|$;

2) $z + \overline{z} = 2Re(z)$;

3) $z - \overline{z} = 2iIm(z)$;

4) $\overline{\overline{z}} = z$;

5) $\overline{z} = z \leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

6) $\overline{w + u} = \overline{w} + \overline{u}$;

7) $\overline{wu} = \bar{w}\bar{u}$;

8) $|z|^2 = z\overline{z}$;

9) $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$ *com* $\lambda \in \mathbb{R}$;

10) $|wu| = |w|\,|u|$;

11) $\left|\dfrac{w}{u}\right| = \dfrac{|w|}{|u|}$, *se* $u \neq 0$;

12) $|w + u| \leq |w| + |u|$;

13) $||w| - |u|| \leq |w - u|$.

Demonstração. Sejam $z = x + iy, w = x_1 + iy_1$ e $u = x_2 + iy_2$

1) $|\overline{z}| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

2)$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2Re(z)$

3) $z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2Im(z)$

4) $\overline{\overline{z}} = \overline{(x - iy)} = x + iy = z.$

5) $z = \overline{z}$, então $x + yi = x - yi$, então $x = x$ e $y = -y$, logo

$2y = 0 \rightarrow y = 0$, sendo assim, $z \in \mathbb{R}, \Leftrightarrow, z = x + 0i \Rightarrow \overline{z} = x - 0i = z$

6) Temos que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = x_1 - y_1 i + x_2 - y_2 i = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$,

por outro lado

$\overline{w + u} = \overline{(x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i)} = \overline{[(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)]} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$, então $\overline{w + u} = \overline{w} + \overline{u}$.

7) Por um lado, $\overline{wu} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$ e pelo outro, $\bar{w}\bar{u} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(-x_1y_2 - x_2y_1) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

8) $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

9) Temos que $\lambda\overline{z} = \lambda(x - iy) = \lambda x - \lambda iy$,

por outro lado

$\overline{\lambda z} = \overline{\lambda(x + iy)} = \overline{(\lambda(x) + \lambda(iy))} = \lambda x - \lambda iy$, então $\overline{\lambda(z)} = \lambda\overline{z}$, com λ um número real

10) Como

$$\begin{aligned} |wu|^2 &= wu\overline{wu} = wu\overline{w}\overline{u} \\ &= w\overline{w}u\overline{u} = |w|^2 |u|^2 \\ &= |w| \cdot |u| \end{aligned}$$

Calculando a raiz ambos os lados da igualdade.

11)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{w}{u}\right| &= \left|\frac{w}{u}\frac{\overline{u}}{\overline{u}}\right| = \frac{1}{|u|^2}\left|w\overline{u}\right| \\
&= \frac{1}{|u|^2}\left|w\right|\left|\overline{u}\right| = \frac{1}{|u|^2}\left|w\right|\left|u\right| \\
&= \frac{|w|}{|u|}
\end{aligned}$$

12)

$$\begin{aligned}
|w+u^2 &= (w+u)\overline{(w+u)} = (w+u)(\overline{w}+\overline{u}) \\
&= w\overline{w} + u\overline{w} + w\overline{u} + u\overline{u} = |w|^2 + |u|^2 + \overline{w\overline{u}} + w\overline{u} \\
&= |w|^2 + |u|^2 + 2Re(w\overline{u}) \leq |w|^2 + |u|^2 + 2\left|w\overline{u}\right| \\
&= |w|^2 + |u|^2 + 2\left|w\right|\left|\overline{u}\right| = |w|^2 + |u|^2 + 2\left|w\right|\left|u\right| \\
&= (|w| + |u|)^2 \\
&= |w| + |u|\,.
\end{aligned}$$

Calculando a raiz ambos os lados da igualdade.

13) Temos que

$|z_1| = |w - u + u| \leq |w + u| + |-u| = |w + u| + |u|$, e

$|u| = |u - w + w| \leq |u + w| + |-w| = |w + u| + |w|$

Daí, $\pm(|w| - |u|) \leq |w + u|$, ou seja,

$||w| - |u|| \leq |w + u|$. □

Proposição 2.6. *Se w e u são números complexos tais que $|w+u| < |u|$ e t é um número real tal que $0 < t < 1$, então $|tw + u| < |u|$.*

Demonstração. Com efeito, por hipótese temos que $|w + u| < |u|$, segue que $|w + u|^2 < |u|^2$. Logo,

$$(w+u)\cdot\overline{(w+u)} < |u|^2 \text{ então } |w|^2 + 2Re(wu) < 0$$

já que,

$$\begin{aligned}(w+u)\cdot\overline{(w+u)} &= (w+u)\cdot\overline{w}+\overline{u}\\ &= w\cdot\overline{w}+w\cdot\overline{u}+u\cdot\overline{w}+u\cdot\overline{u}\\ &= |w|^2+2Re(wu)+|u|^2.\end{aligned}$$

Como $0 < t < 1$, então

$$t(|w|^2+2Re(wu)) < 0 \text{ daí } t\,|w|^2+2tRe(wu) < 0.$$

Notemos que, $t^2w^2+2tRe(wu) < t\,|w|^2+2tRe(wu)$, já que $t^2 < t$. Logo,

$$t^2\,|w|^2+2tRe(wu) < 0 \Rightarrow |tw+u|^2 < |u|^2.$$

$\square$

2.5 A forma polar

Seja um número complexo z, com $z \neq 0$. Podemos representar esse número complexo z com coordenadas polares em

$$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

onde $\rho = |z|$ e θ é o ângulo formado pelo eixo real e o vetor $0z$, medido no sentido anti-horário.

O ângulo formado é chamado de argumento principal desse número complexo e é denotado por $\theta = \arg z$.

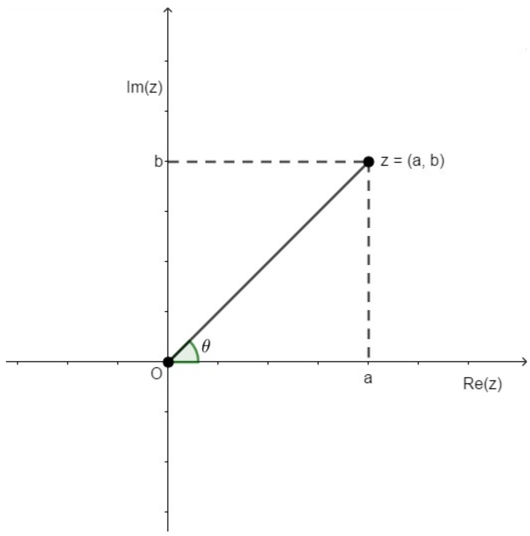


Figura 5: Forma polar de um número complexo
Fonte: Autoria própria

Daí, temos que:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho\cos\theta.$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho\sin\theta.$$

Temos que $z = a + ib \Rightarrow z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta = \rho[(\cos\theta) + i(\sin\theta)]$.

Como seno e cosseno são funções periódicas cujo período é 2π, por conseguinte:

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \text{ e } \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Podemos representar z com vários ângulos diferentes, ou seja, com seus infinitos arcos côngruos, isto é:

$$\theta = \theta + 2\pi = \theta + 4\pi = \theta + 6\pi = ...$$

Então, existem infinitas forma polar para um mesmo número complexo. Mas se limitarmos o argumento θ no intervalo de, $0 \leq \theta < 2\pi$, existe apenas um argumento, logo z será único.

Observação 2.7. *Nota-se que o argumento principal de um número complexo real é zero ou π, enquanto de um número complexo imaginário puro é $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.*

Exemplo 10. *Escrever o número complexo $z = 4 - 4i$ na forma polar.*

Resolução:

Primeiro vamos determinar o módulo de z.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Agora, vamos determinar seu argumento.

$\tan\theta = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \tan = \dfrac{-4}{4} = -1$ como z pertence ao quarto quadrante, o argumento principal de z é $\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$. Assim, $z = 4\sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i(\sin\dfrac{7\pi}{4})$.

Proposição 2.8. *Seja $z \neq 0$. Se θ é um argumento de z, então $-\theta$ é um argumento de $\overline{z}$.*

Demonstração. Escrevendo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, então $\overline{z} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$, como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ "função par"e $(-\theta) = -\theta$ "função ímpar", segue-se que o argumento de $\overline{z}$ é $-\theta$.

□

Proposição 2.9. *Se ρ_j e θ_j representa o módulo e um argumento, respectivamente, de $z_j \in \mathbb{C}$, para $j = 1, 2$, então $\rho_1 \cdot \rho_2$ e $\theta_1 + \theta_2$ representam o módulo e um argumento de $z_1 \cdot z_2$.*

Demonstração. $\mathrm{z}_1 \cdot z_2 = [\rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1)] \cdot [\rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2)]$

$= \rho_1 \cdot \rho_2(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + i \cdot \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + i \cdot \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2)$

$= \rho_1 \cdot \rho_2[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + i \cdot (\sin\theta_1 . \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1)]$.

Aplicando a adição de arcos de $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ e de $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b . \cos a$, temos,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

Portanto, o produto de dois números complexos na forma polar, devemos multiplicar os módulos e somar os argumentos, ou seja,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

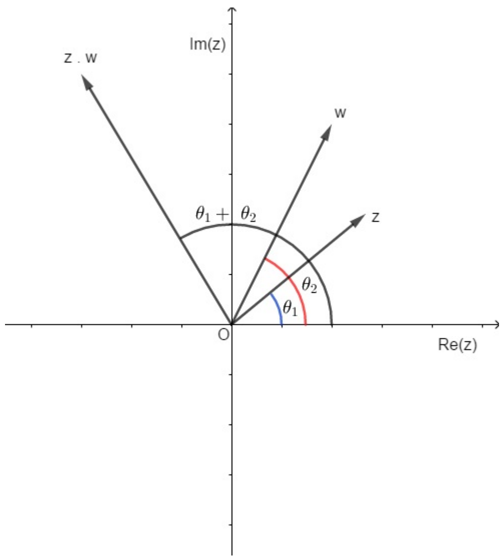


Figura 6: Produto Polar
Fonte: Autoria própria

□

Corolário 2.10. *Se ρ_j e θ_j representam o módulo e um argumento , respectivamente, de $z_j \in \mathbb{C}$, para $j = 1, 2$, $z_2 \neq 0$, então $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ e $\theta_1 - \theta_2$ representam o módulo e um argumento de $\dfrac{z_1}{z_2}$.*

Demonstração. Primeiro vamos deduzir que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} &= \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\
&= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\theta - i\sin\theta)} \\
&= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\
&= \cos\theta - i\sin\theta, \text{ para todo } \theta \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1)}{\rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2} \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1 \cdot \frac{1}{\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2} \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 - i \cdot \sin\theta_2) \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1) \\
&= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\sin\theta_1 - \theta_2)].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

□

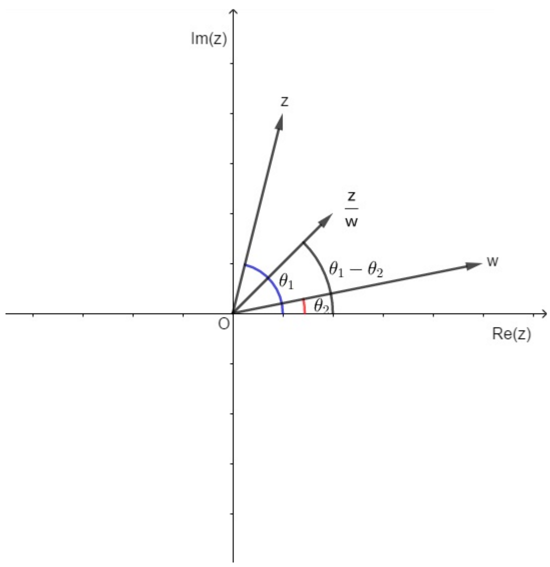


Figura 7: Quociente Polar

Fonte: Autoria própria

Proposição 2.11. *Se ρ_j e θ_j representam o módulo e um argumento, respectivamente, de $z_j \in \mathbb{C}$, para $j = 1, 2, ..., n$ então $\rho_1\rho_2 \cdots \rho_n$ e $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n$ representam, respectivamente, o módulo e um argumento de $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n$.*

Demonstração. Queremos mostrar que,

$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \rho_1\rho_2 \cdots \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$, para todo $n \geq 2$.

Faremos a prova por indução finita.

Para $n = 2$, temos que $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]$, então a afirmação acima é válida.

Suponhamos que vale para $n = k$, então $z_1 \cdot z_2 \cdots z_k = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_k[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_k)$. Queremos mostrar que a afirmação também é válida para $n = k + 1$. De fato,

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_k \cdot z_{k+1} &= \underbrace{z_1 \cdot ... \cdot z_k}_{HI} \cdot z_{k+1} \\
&= \underbrace{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot ... \cdot \rho_k[\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_k) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k)]}_{HI} \cdot \\
&\rho_{k+1}(\cos\theta_{k+1} + i \cdot \sin\theta_{k+1}] \\
&= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_k \cdot \rho_{k+1}[\cos(\theta_1 + \cdots + \theta_k + \theta_{k+1}) \\
&+ i \cdot \sin(\theta_1 + \cdots + \theta_k + \theta_{k+1})].
\end{aligned}
$$

Portanto, a afirmação é verdadeira pois é válido para $n = k$, então é válido para $n = k + 1$, como queríamos demonstrar. □

Corolário 2.12. *Se ρ e θ representam o módulo e um argumento, respectivamente, de $z \in \mathbb{C}$, então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos,*

$$z^n = \rho^n[\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta)].$$

Além do mais, se $z \neq 0$, a fórmula acima é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Basta tomarmos na proposição anterior $z_1 = z_2 = ... = z_n$. □

Corolário 2.13. *(Fórmula de Moivre): Para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$ temos que,*

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta).$$

Demonstração. Basta notar que $|\cos\theta + \text{ i } \text{ sen } \theta| = 1$.

Esta fórmula é também válida para expoente negativo. De fato,

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n} \\
&= \cos(n\cdot\theta) - i\sin(n\cdot\theta) \\
&= \cos(-n\cdot\theta) + i\sin(-n\cdot\theta).
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 11. *Seja $z = 5.(\cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2})$ e $w = \cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}$, determinar o produto entre z e w.*

Resolução:

$$
\begin{aligned}
zw &= 5\cdot 1\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
&= 5.\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).
\end{aligned}
$$

Logo, o produto $z\cdot w = 5\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Exemplo 12. *Determinar a forma algébrica de $\frac{u}{v}$, sabendo que $u = 6\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{9}\right)$ e $v = 3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\cdot\sin\frac{\pi}{18}\right)$.*

Resolução:

Note que os argumentos de u e v não são ângulos notáveis, mas aplicando o corolário, temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{v} &= \frac{6}{3}\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{9}-\frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{9}-\frac{\pi}{18}\right)\right] \\
&= 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2\cdot(0+i) \\
&= 2i.
\end{aligned}
$$

Portanto, a forma algébrica de $\frac{u}{v}$ é $2i$.

2.6 Extração de raízes

Corolário 2.14. *Seja z um número complexo. Dizemos que z_k é uma raiz n-ésima de z se $(z_k)^n = z$.*

Demonstração. Vamos mostrar como encontrar soluções para equações do tipo $z^n = z_0$, em que $n \in \mathbb{N}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ são dados. Vamos fazer as seguintes análises:

1. Se $z_0 = 0, z^n = 0 \Rightarrow z = 0$;

2. Se $z_0 \neq 0$, escrevendo z e z_0 na forma polar, temos que:

   $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $z_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$;

   Então,

   $z^n = z_0 \Rightarrow [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$.

   Aplicando a Fórmula de Moivre, temos que,

   $\rho^n[\cos(n\cdot\theta) + i\sin(n\cdot\theta)] = \rho_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$.

   Isto equivale a,

   $\rho^n = \rho_0$ e $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ e $\theta = \dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

   Notemos que, como $\theta = \dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$, então para cada $k \in \mathbb{Z}$ temos um valor distinto de θ e para designar esta dependência, escrevemos θ_k ao invés de θ, isto é, $\theta_k = \dfrac{\theta_0}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$.

   Assim,

   $z_k = \sqrt[n]{\rho_0}\cdot(\cos\theta_k + i\cdot\sin\theta_k), k \in \mathbb{Z}$ $\square$

Observação 2.15. *Qualquer que seja k, $l \in \mathbb{Z}$ temos,*

$$\begin{aligned}
\theta_{k+ln} &= \frac{\theta_0}{n} + \frac{2(k+l.n)\pi}{n}\\
&= \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} + \frac{2l\cdot n\cdot\pi}{n}\\
&= \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 2l\pi\\
&= \theta_k + 2l\pi.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_{k+l\cdot n}) + i\sin(\theta_{K+ln}) &= \cos(\theta_{k+2l\pi}) + i\sin(\theta_{K+2l\pi})\\
&= \cos(\theta_k) + i\sin(\theta_k).
\end{aligned}$$

Sendo assim,

$z_{k+ln} = z_k$, isto significa que podemos nos restringir às soluções dadas por $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$, ou seja, se $z_0 = \rho_0\cdot(\cos\theta_0 + i\cdot\sin\theta_0)$, a equação $z^n = z_0$ apresenta n soluções (raízes) distintas dadas por,

$z_k = \sqrt[n]{\rho_0}\left[\cos\left(\dfrac{0+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{0+2k\pi}{n}\right)\right]$, com $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ em que todas as soluções possuem o mesmo módulo.

Exemplo 13. *Vamos calcular as raízes cúbicas de $z = -1$.*

Fazendo $z = -1$, temos que o módulo de z é 1 e seu arguemnto é π, ou seja, $|z| = 1$ e $\theta = \pi$, então sua forma polar é, $z = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$.

As raízes procuradas são $z_k = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right]$, para $k \in \{0, 1, 2\}$.

Temos:

1. $k = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{1} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z_0 = \frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $k = 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{1} \cdot [\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)] = 1 \cdot (-1 + i \cdot 0) \Rightarrow z_1 = -1$.
3. $k = 2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{1} \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z_2 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 Funções Complexas

Neste Capítulo vamos estudar as funções complexas de uma variável complexa. Estamos interessados particulamente nas funções polinomiais complexas de uma variável complexa.

3.1 Funções complexas e Propriedades

Definição 3.1. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{C}$, a função $f : A \to \mathbb{C}$ é chamada de função complexa de uma variável complexa.*

As funções

$$z \to Re[f(z)] \text{ e } z \to Im[f(z)]$$

são chamadas de partes real e imaginária de f, respectivamente. Usando a identificação $z = x + yi = (x, y), x, y \in \mathbb{R}$, podemos definir essas funções da seguinte maneira $u, v : A \to \mathbb{R}$ por

$$u(x, y) = Re[f(x + yi)] \text{ e } v(x, y) = Im[f(x + yi)]$$

Notemos que u e v são funções de duas variáveis a valores reais. Muitas vezes é conveniente expressarmos uma função $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, em termos de sua parte real e de sua parte imaginária, isto é, representarmos f na forma

$$f = u + iv$$

Por exemplo, se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = z + 2$, então as partes real e imaginária de f são $u(x, y) = x + 2$ e $v(x, y) = y$, respectivamente. É natural definirmos uma função complexa de variável complexa apenas dando uma expressão explícita dos valores da função, nesse caso, convencionamos que o domínio da função é o conjunto de todos os números complexos para os quais a expressão dada tem sentido. Por exemplo, o domínio da função$f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+9}$ é o conjunto $D(f) = \{z \in \mathbb{C}; z \neq \pm 3i\}$.

Dado $A \subset \mathbb{C}$ e dada uma função $f : A \to \mathbb{C}$, dizemos que um número complexo $z_0 \in A$ é um zero de f(ou uma raiz de f) se $f(z_0) = 0$. Por exemplo $i/2$, é o único zero da função $f(z) = 2z - i$.

Uma função racional da forma

$$f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$$

é chamada de função polinomial. Se $a_n \neq 0$, dizemos que f é uma função polinomial de grau n.

Uma função racional complexa de uma variável complexa é uma função da forma

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m},$$

em que os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ e $b_0, b_1, ..., b_m$ são números complexos. Note-se que, o domínio da função racional complexa f é o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{C}$ nos quais o denominador de f não se anula.

Dadas as funções $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$ e dado um número complexo c, definimos as funções múltiplo cf, soma $f + g$, diferença $f - g$, produto fg e quociente f/g por

1. $(cf)(z) = cf(z)$;
2. $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$;
3. $(f - g)(z) = f(z) - g(z)$;
4. $(fg)(z) = f(z).g(z)$;
5. $(f/g)(z) = f(z)/g(z)$.

Notemos que o domínio de cf é A, os domínios de $f + g$, $f - g$ e fg são iguais a $A \cap B$ e o domínio de f/g é o conjunto $\{z \in A \cap B; g(z) \neq 0\}$.

Veremos a seguir exemplos de funções racionais e polinomiais complexa de uma variável complexa.

Exemplo 14. *Seja a função polinomial complexa $f(z) = z^2 - 2z + 1$, determinar a parte real e a parte imaginária de $f(z)$.*

Resolução: Seja $z = x + yi$. Temos que

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + yi)^2 - 2 \cdot (x + yi) + 1 \\ &= x^2 + 2xyi + y^2 i^2 - 2x - 2yi + 1 \\ &= (x^2 - y^2 - 2x + 1) + i(2xy - 2y) \end{aligned}$$

Assim, $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 1$ e $v(x,y) = 2xy - 2y$.

Exemplo 15. *Expressar as partes real e imaginária da função racional complexa definida por* $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$.

Resolução: Seja $z = x + yi$. Daí

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x+yi}{x+yi-1} \\ &= \frac{x+yi}{x+yi-1} \cdot \frac{x-yi-1}{x-yi-1} \\ &= \frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2-2x+1} + i \cdot \frac{-y}{x^2+y^2-2x+1}. \end{aligned}$$

Assim, $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2-2x+1}$ e $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2-2x+1}$.

Exemplo 16. *Sejam as funções* $f(z) = z^2 + 1$ *e* $g(z) = z^2 + 3z - 2$ *e* $c = 5$, *determine as funções*

1. $(cf)(z)$;
2. $(f+g)(z)$;
3. $(f-g)(z)$;
4. $(fg)(z)$;
5. $(f/g)(z)$.

Resolução:

1. $(cf)(z) = cf(z) = 5 \cdot (z^2+1) = 5z^2 + 5$
2. $(f+g)(z) = f(z) + g(z) = z^2 + 1 + z^2 + 3z - 2 = 2z^2 + 3z - 1$.
3. $(f-g)(z) = f(z) - g(z) = z^2 + 1 - (z^2 + 3z - 2) = -3z + 3$.
4. $(fg)(z) = f(z).g(z) = (z^2+1) \cdot (z^2 + 3z - 2) = z^4 + 3z^3 - z^2 + 3z - 2$.
5. $(f/g)(z) = f(z)/g(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+3z-2}$, com $z^2 + 3z - 2 \neq 0$.

Dada uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e um subconjunto $B \subset A$, dizemos que f é limitada em B se existe uma constante $K > 0$ tal que $|f(z)| \leq K$ para todo $z \in B$. Por exemplo, a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = |z| + 1$ é limitada em $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$, mas não é limitada em $\mathbb{C}$.

A seguir serão apresentados três resultados sobre funções polinomiais complexas que nos serão úteis na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Proposição 3.2. *Se* $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ *é uma função polinomial em* $\mathbb{C}$ *de grau* $n \geq 1$, *então,*

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$$

Demonstração. Com efeito, pela Proposição 2.5 itens 12 e 13, temos que

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= \left|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| \\
&\geq \left||a_n z^n| - \left|a_{n-1}z^{n-1}\right| - \cdots - |a_1 z| - |a_0|\right| \\
&= \left||a_n\,||z^n| - |a_{n-1}|\left|z^{n-1}\right| - \cdots - |a_1|\,|z| - |a_0|\right| \\
&= \left||z|^n\left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right)\right|
\end{aligned}$$

Perceba que, $|z|$ e $|p(z)|$ são números reais. Então vamos calcular o limite no conjunto dos números reais. Dessa forma

$$\lim_{|z|\to+\infty}|p(z)| \geq \lim_{|z|\to+\infty}\left||z|^n\left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}}\right| - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right).$$

Veja que $\lim_{|z|\to+\infty}\dfrac{1}{|z|^k} = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\lim_{|z|\to+\infty}|p(z)| = +\infty$ □

Proposição 3.3. *Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ uma função polinomial. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é uma raiz da função polinomial $p(z)$, então $z - z_0$ é um fator de $p(z)$, isto é, existe uma função polinomial $q(z)$ de grau $n-1$ tal que $p(z) = (z - z_0)q(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. De fato, como z_0 é raiz do polinômio p então $p(z_0) = a_n z_0^n + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0$. Observe que colocando em evidência os coeficientes comuns de $p(z)$ e $p(z_0)$ temos que

$$p(z) = p(z) - p(z_0) = a_n(z^n - z_0^n) + \cdots + a_2(z^2 - z_0^2) + a_1(z - z_0). \tag{1}$$

Note que

$$z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \cdots + z z_0^{k-2} + z_0^{k-1}), \tag{2}$$

para todo inteiro $k \geq 1$. Assim, substituindo (2) em (1) e colocando em evidência $(z - z_0)$, segue que $p(z) = (z - z_0)q(z)$, onde $q(z)$ de grau $n-1$ é a função polinomial dada por $q(z) = a_1 + a_2(z + z_0) + \cdots + a_n(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1})$. □

Proposição 3.4. *Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função polinomial $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Se $q(z) = p(z + z_0)$, $z \in \mathbb{C}$, então existe $1 \leq k \leq n$ tal que $q(z) = p(z_0) + z^k[a + r(z)]$, onde $a \neq 0$ e r(z) é uma função polinomial com $r(0) = 0$.*

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} p(z+z_0) &= a_0 + a_1(z+z_0) + a_2(z+z_0)^2 + \cdots + a_n(z+z_0)^n \\ &= a_0 + a_1 z + a_1 z_0 + a_2 z^2 + 2a_2 z z_0 + a_2 z_0^2 + a_3 z^3 + 3a_3 z^2 z_0 + 3a_3 z z_0^2 \\ &+ a_3 z_0^3 + \cdots + a_n z^n + \binom{n}{1} a_n z^{n-1} z_0 + \cdots + \binom{n}{n-1} a_n z z_0^{n-1} + a_n z_0^n \\ &= (a_0 + a_1 z_0 + \cdots + a_n z_0^n) + (a_1 + 2a_2 z_0 + \cdots + n a_n z_0^{n-1}) z + \\ &+ (a_2 + 3a_3 z_0 + \cdots + \binom{n}{n-2} a_n z_0^{n-2}) z^2 + \cdots + a_n z^n \end{aligned}$$

Logo, $q(z) = p(z_0) + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n$, onde, para cada $1 \leq j \leq n$,

$$A_j = \sum_{p=j}^{n} \binom{p}{p-j} a_p \cdot z_0^{p-j}$$

Se $A_1 \neq 0$, então $q(z) = p(z+z_0) = p(z_0) + z\left[A_1 + \underbrace{A_2 z + \cdots + A_n z^{n-1}}_{r(z)}\right]$. Assim, $q(z) = p(z_0) + z[a + r(z)]$, onde $a = A_1$ e $r(0) = 0$. Se $A_1 = 0$, tome $1 \leq k \leq n$, de modo que A_k seja o primeiro coeficiente não nulo após A_1. Daí,

$$\begin{aligned} q(z) = p(z+z_0) &= p(z_0) + A_k z^k + \cdots + A_n z^n \\ &= p(z_0) + z^k[A_k + \underbrace{A_{k-1} + \cdots + A_n z^{n-k}}_{r(z)}] \end{aligned}$$

Tomando $a = A_k \neq 0$ e $r(z) = A_{k+1} z + \cdots + A_n z^{n-k}$ temos que

$$q(z) = p(z_0) + z^k[a + r(z)].$$

Note que $r(0) = 0$. □

4 Teorema Fundamental da Álgebra

Neste capítulo vamos apresentar uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Tal demostração, não usa as técnicas usuais de Análise Complexa. Aqui, apresentaremos a forma analítica, que usa a noção de continuidade e compacidade no plano complexo. Para isso, vamos explanar alguns conceitos e resultados sobre continuidade e compacidade no plano complexo.

4.1 Fundamentos básicos de topologia no plano complexo

Dados $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ a distância entre z_1 e z_2 é dada por,

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para $z_0 \in \mathbb{C}$ e para cada número real $r > 0$, definamos

1. Disco aberto de centro z_0 e raio $r > 0$: $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\}$
2. Disco fechado de centro z_0 e raio $r > 0$: $D[z_0, r] = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| \leq r\}$
3. Circunferência de centro z_0 e raio $r > 0$: $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$

Notemos que o disco aberto de centro z_0 e raio $r > 0$, $|z - z_0| < r$, equivale a $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, ou seja, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$, que representa o interior de um círculo no plano complexo. De forma análoga, obtemos as desigualdades para os outros conjuntos.

Seja A um subconjunto de $\mathbb{C}$, com base nas definições dadas acima temos as seguintes definições:

Definição 4.1. *Dizemos que um ponto $z \in A$ é um ponto interior de A quando existe $r > 0$ tal que $D(z; r) \subset A$*

O conjunto de todos os pontos interiores de A é denotado por $int(A)$.

Definição 4.2. *O conjunto A é dito um conjunto aberto se todo ponto $z \in A$ é ponto interior de A.*

Ou seja, todos os seus pontos são pontos interiores, isto é, $int(A) = A$.

Definição 4.3. *Dizemos que A é fechado se seu conjunto complementar, $\mathbb{C} - A = A^{\mathbb{C}}$ é um conjunto aberto.*

Assim, temos que A é fechado se $\mathbb{C}/A$ é aberto.

Definição 4.4. *Chama-se fronteira do conjunto A ao conjunto de pontos z tais que qualquer disco aberto centrado em z contém pontos de A e de seu complementar.*

Veja que a fronteira de um conjunto A é também fronteira do seu complementar A^c.

Definição 4.5. *Um ponto $z \in \mathbb{C}$ é dito ponto de acumulação do conjunto A se qualquer disco aberto centrado em z contém infinitos pontos de A.*

Definição 4.6. *Diz-se que $A \subset \mathbb{C}$ é limitado se existe um número k, tal que $|z| \leq k$, para todo $z \in A$.*

Definição 4.7. *Chama-se conjunto compacto a todo conjunto fechado e limitado.*

Exemplo 17. *O Plano complexo $\mathbb{C}$ e o conjunto vazio $\emptyset$ são conjuntos abertos e fechados.*

De fato, observe que $\mathbb{C}$ é um conjunto aberto, pois todos seus pontos são pontos de interior. Já para mostrarmos que $\emptyset$ é um conjunto aberto, vamos supor por absurdo que $\emptyset$ não seja um conjunto aberto. Então, existe $z_0 \in \emptyset$ tal que para todo $r > 0$, $D(z_0, r) \notin \emptyset$. O que seria um absurdo. Logo o vazio é um conjunto aberto.

Agora, note que, $\mathbb{C}$ é fechado, pois seu complementar é o conjunto vazio, que é aberto. Da mesma forma, $\emptyset$ é fechado, pois $\mathbb{C}/\emptyset = \mathbb{C}$ é aberto.

Exemplo 18. *O disco aberto $D(z_0, r)$ é um conjunto aberto.*

Devemos mostrar que todo ponto de $D(z_0, r)$ é ponto de interior. Seja w um ponto qualquer de $D(z_0, r)$, queremos comprovar que existe $\epsilon > 0$ tal que $D(w, \epsilon) \subset D(z_0, r)$.

Seja $\delta = |w - z_0|$ então $\delta < r$. Seja $\epsilon < r - \delta$ e z um ponto qualquer de $D(w, \epsilon)$. Pela desigualdade triângular

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |(z - w) + (w - z_0)| \\ &\leq |z - w| + |w - z_0| \\ &< \epsilon + \delta \\ &< r - \delta + \delta \\ &= r. \end{aligned}$$

Assim, $z \in D(z_0, r)$. Mas z é arbitrário em $D(w, \epsilon)$, o que nos leva a concluir que $D(w, \epsilon) \subset D(z_0, r)$.

Exemplo 19. *O disco fechado $D[z_0, r]$ é um conjunto fechado.*

De fato, vamos mostrar que $\mathbb{C}/D[z_0, r] = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| > r\}$ é aberto. Com efeito, seja $a \in \mathbb{C}/D[z_0, r]$. Agora, tomemos $s = |a - z_0| - r > 0$. Assim, dado $z \in D(a; s)$ temos que

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |(a - z_0) + (z - a)| \\ &\geq |a - z_0| - |z - a| \\ &> |a - z_0| - s \\ &= |a - z_0| - |a - z_0| + r \\ &= r \end{aligned}$$

Ou seja, $|z - z_0| > r$ daí $z \in \mathbb{C}/D[z_0, r]$, ou seja, $D(a; s) \subset (\mathbb{C}/D[z_0, r])$, daí $a \in int(\mathbb{C}/D[z_0, r])$. Portanto, $\mathbb{C}/D[z_0, r]$ é aberto. Logo, $D[z_0, r]$ é um conjunto fechado.

Exemplo 20. *Os discos $D(z_0, r)$ e $D[z_0, r]$ são limitados.*

Primeiro vamos mostrar que $D[z_0, r]$ é limitado. De fato, tomemos $s > |z_0| + r$. Seja $z \in D[z_0, r]$, daí

$$|z| - |z_0| \leq |z - z_0| \leq r < s - |z_0| \Rightarrow |z| < s$$

Assim $z \in D(0; s)$. Logo $D[z_0, r] \subset D(0; s)$, portanto $D[z_0, r]$ é limitado. Como $D(z_0, r) \subset D[z_0, r]$, segue que $D(z_0, r)$ é limitado.

Exemplo 21. *O disco fechado $D[z_0, r]$ é compacto.*

De fato, vimos nos exemplos anteriores que $D[z_0, r]$ é fechado e limitado, portanto compacto.

Exemplo 22. *O conjunto dos pontos z tal que $|z - (-2 + 2i)| \leq 2$:*

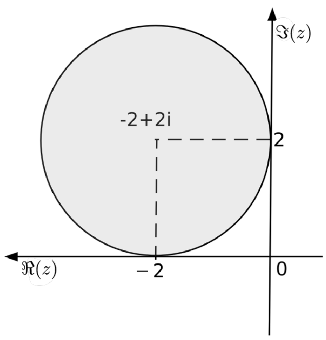


Figura 8: Disco fechado de raio r e centro p

Fonte: Autoria própria

é o disco fechado centrado em $p = -2 + 2i$ e raio $r = 2$.

Exemplo 23. *No conjunto*

$$A = \{z : 3 \leq |z| < 5\}$$

a fronteira é a união do conjunto dos pontos z tais que $|z| = 3$ (que pertencem ao conjunto) com o conjunto dos pontos z tais que $|z| = 5$ (que não pertencem ao conjunto). Esse conjunto não é aberto nem fechado.

4.2 Fundamentos básicos de continuidade e compacidade no plano complexo

Seja $A \subset \mathbb{C}$, dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{C}$ é contínua em $z_0 \in A$ se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ tal que,

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ sempre que } z \in A \text{ e } |z - z_0| < \delta.$$

ou seja,

$$f[A \cap D(z_0; \delta)] \subset D(f(z_0); \epsilon).$$

Salientamos que $\delta(\epsilon, z_0)$ denota que δ depende, em geral, de ϵ e de z_0. Dizemos que f é uma função contínua se f é uma função contínua em todos os pontos de seu domínio A. Além disso, f é descontínua em z_0 se f não é contínua em z_0. Ou seja, $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, existe $z \in A$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \text{ mas } |f(z) - f(z_0)| \geq \epsilon.$$

Vejamos alguns exemplos clássicos de funções contínuas.

Exemplo 24. *A função constante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = k$, com $k \in \mathbb{C}$, é contínua.*

Demonstração. De fato, fixemos $z_0 \in \mathbb{C}$. Perceba que $|f(z) - f(z_0)| = 0 \leq |z - z_0|$ para quaisquer $z \in \mathbb{C}$. Assim, dado $\epsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \epsilon$, assim f é contínua em z_0. Note que z_0 foi tomado de forma arbitrária, com isso, podemos concluir que f é contínua em $\mathbb{C}$. □

Exemplo 25. *A função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z$ é contínua.*

Demonstração. Com efeito, fixemos $z_0 \in \mathbb{C}$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon > 0$. Daí, $|z - z_0| < \delta$ implica que $|f(z) - f(z_0)| < \delta = \epsilon$. Portanto f é contínua em z_0. Como z_0 foi tomado de modo arbitrário, segue que f é contínua em $\mathbb{C}$. □

Proposição 4.8. *Se $f, g : A \to \mathbb{C}$ são funções contínuas, então $f + g : A \to \mathbb{C}$ e $f \cdot g : A \to \mathbb{C}$ são funções contínuas.*

Demonstração. Provaremos somente que $f+g$ é contínua. Com efeito, tomemos $z_0 \in \mathbb{C}$. Dado $\epsilon > 0$, como f e g são contínuas em A, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que se $|z - z_0| < \delta_1$, então $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon/2$ e se $|z - z_0| < \delta_2$, então $|g(z) - g(z_0)| < \epsilon/2$. Tomemos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) + g(z) - (f(z_0) + g(z_0))| \leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Portanto, $f + g : A \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0. Como $z_0 \in A$ foi tomado de modo arbitrário, segue que $f+g$ é contínua. □

Exemplo 26. *A função polinomial* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *é contínua.*

Demonstração. Note que, para obtermos o resultado desejado, basta combinarmos os Exemplos 24, 25 e a Proposição 4.8. □

O próximo Teorema é uma versão complexa do Teorema de Weierstrass, que será utilizado na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 4.9 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se* $A \subset \mathbb{C}$ *é compacto, então toda função contínua* $f : A \to \mathbb{R}$ *é limitada e atinge seus valores máximos e mínimos em* A*, ou seja, existem* $\alpha, \beta \in A$ *tais que* $f(\alpha) \leq f(z) \leq f(\beta)$ *para todo* $z \in A$.

Não exibiremos uma demonstração para o Teorema de Weierstrass, mas o leitor pode encontrar em [5].

Exemplo 27. *Sejam* $A = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq |z| \leq 1\}$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(z) = \dfrac{1}{|z|}$. *Note que* $f(z) \geq 1$, *para todo* $z \in A$. *Além disso, para* $z = \pm i$ *e* $z = \pm 1$ *temos que* $f(z) = 1$. *Dessa forma,* f *assume seu valor mínimo em um destes valores, que estão em* A. *Mas* f *não assume seu valor máximo em* A. *De fato, suponhamos por absurdo que* f *atinja seu valor máximo em* $z_0 \in A$. *Assim,* $f(z) \leq f(z_0)$, *para todo* $z \in A$. *Tome* $w \in A$ *tal que* $|w| \leq |z_0|$ *daí* $\dfrac{1}{|w|} \geq \dfrac{1}{|z_0|}$ *o que é um absurdo, pois* z_0 *é valor máximo. Logo,* $f(A)$ *é um conjunto ilimitado superiormente. Assim, o Teorema de Weierstrass não se aplica, pois* f *não é contínua em* A, *por* A *ser um conjunto compacto.*

Veremos agora dois Lemas necessários para demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

Lema 4.10. *Seja* $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ *uma função polinomial em* $\mathbb{C}$ *de grau* $n \geq 1$. *Existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tal que* $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. De fato, observarmos que pela Proposição 3.2

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$$

isto é, para todo $k > 0$ existe $r > 0$ tal que se $|z| > r$ implica que $|p(z)| > k$. Assim, tomando $k = |a_0|$, existe $r > 0$ tal que se$|z| > r$, implica que $|p(z)| > |a_0| = |p(0)|$. Seja $D = D[0; r] = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ o disco fechado e limitado de centro zero e raio r, vimos que D é um conjunto compacto. Note que a função

$$|p| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \longmapsto |p(z)|$$

é contínua. Assim, pelo Teorema 4.9, a restrição a $D[0; r]$ de $|p|$ tem um mínimo, ou seja, a função

$$z \in D \longmapsto |p(z)| \in \mathbb{R},$$

assume seu valor mínimo em algum ponto $z_0 \in D$. Assim, $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in D$, ou seja, para todo z tal que $|z| \leq r$. Falta mostrarmos a desigualdade para $|z| > r$. Como $0 \in D$ então $|p(z_0)| \leq |p(0)|$. Portanto,

$$|p(z_0)| \leq |p(0)| < |p(z)|$$

para todo z; $|z| > r$. Assim, $|p(z_0)| \leq |p(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Lema 4.11. *Se $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é um polinômio não constante e $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que $p(z_0) \neq 0$ então existe $z_2 \in \mathbb{C}$ com $|p(z_2)| < |p(z_0)|$.*

Demonstração. Seja $p(z_0) = c \neq 0$. Escrevamos $q(z) = p(z + z_0)$. Pela Proposição 3.4 existe $1 \leq k \leq n$ tal que

$$q(z) = c + z^k[a + r(z)] \tag{3}$$

onde $a \neq 0$ e $r(0) = 0$. Vamos mostrar que existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|q(z_1)| < |c|$, ou seja,

$$|q(z_1)| = |p(z_1 + z_0)| < |p(z_0)|.$$

Isto é, existe $z_2 = z_1 + z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|p(z_2)| < |p(z_0)|$. De fato, consideremos

$$B = \{z \in \mathbb{C}; |z + c| < |c|\}$$

o disco aberto de centro $-c$ e raio $|c|$. Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^k = -c/a$, onde k e a são dados em (3). Ou seja, w é uma raiz k-ésima do complexo $-c/a$. Note que, $aw^k \in B$, pois $|aw^k + c| = | - c + c| = 0 < |c|$, já que $c \neq 0$. Consideremos a função

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ dada por } f(z) = zw^k.$$

Note que f é contínua (veja o Exemplo 26). Em particular, f é contínua em a. Assim, para $\epsilon = |c| > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon)$. Note que $B(f(a); \epsilon) = B$, já que, $f(a) = aw^k = -c$ e $\epsilon = |c|$. Assim, podemos concluir que por continuidade de f,

$$\text{Se } u \in B(a; \delta) \Rightarrow f(u) \in B(f(a); \epsilon) \Rightarrow f(u) = uw^k \in B \tag{4}$$

Tomemos agora a função

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \longmapsto r_1(z) = a + r(z)$$

com a e $r(z)$ dados em (3). Note que $r_1(z)$ é um polinômio e portanto uma função contínua. Em particular r_1 é contínua no zero e $r_1(0) = a$. Ou seja,

$$\exists \gamma > 0; |z - 0| = |z| < \gamma \Rightarrow |r_1(z) - \underbrace{r_1(0)}_{a}| < \delta \Rightarrow r_1(z) \in B(a; \delta). \tag{5}$$

Como $r_1(z) \in B(a; \delta)$ por (4) $f(r_1(z)) \in B$, ou seja,

$$f(r_1(z)) = w^k[a + r(z)] \in B \tag{6}$$

Seja $0 < t < 1$ tal que $|tw| < \gamma$ por (5) temos que $r_1(tw) \in B(a; \delta)$. Portanto, por (6) $f(r_1(tw)) = w^k[a + r(tw)] \in B$. Note que $0 < t^k < 1$, daí pela proposição 2.6, $t^k w^k[a + r(tw)] \in B$. Logo, pondo $z_1 = tw$, temos que

$$z_1^k[a + r(z_1)] \in B.$$

Como $q(z_1) = c + z_1^k[a + r(z_1)]$, então $q(z_1) - c = z_1^k[a + r(z_1)] \in B$, o que implica que $|(q(z_1) - c) + c| < |c|$, ou seja, $|q(z_1)| < |c|$. Daí $|p(z_1 + z_0)| < |p(z_0)|$, pondo $z_1 + z_0 = z_2$ temos que $|p(z_2)| < |p(z_0)|$, como queríamos. □

Já temos os elementos necessários para demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra. Para essa demonstração usamos os trabalhos de Fernandez e Santos em [6].

Teorema 4.12 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Toda função polinomial* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, *com* $n \geq 1$, *possui uma raiz no corpo* $\mathbb{C}$ *dos números complexos.*

Demonstração. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ uma função polinomial em $\mathbb{C}$ de grau $n \geq 1$. Veja que se $a_0 = 0$, então $p(0) = 0$. Desta forma suponhamos que $a_0 = p(0) \neq 0$.

Para provarmos o Teorema, basta notarmos que pelo Lema 4.10, existe $z_0 \in C$ tal que $|p(z_0)| < |p(z)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Verifique que, se $p(z_0) \neq 0$ pelo Lema 4.11 existe $z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $|p(z_2)| < |p(z_0)|$ o que é um absurdo. Logo $p(z_0) = 0$. Como queríamos.

□

O TFA normalmente não é demonstrado no Ensino Médio, porém existem uma série de exercícios que exigem a aplicação deste teorema. Uma solução para tornar este teorema acessível aos estudantes do ensino básico é estudá-lo tendo por base suas aplicações e consequências que podem ser exploradas na resolução de uma série de exercícios presentes nos livros didáticos.

Veremos agora uma das principais aplicações do TFA no Ensino Médio que estabelece a relação entre as raízes de um polinômio e a apresentação de sua forma fatorada (ROCHA, 2014).

Teorema 4.13 (Teorema da Decomposição)**.** *Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de grau n, dada por $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, pode ser fatorada como produto de exatamente n fatores, a saber $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$, onde $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de p.*

Demonstração. Provaremos este Teorema por indução sobre o grau n da função polinômial p. Veremos que, quando $n = 1$, temos $p(z) = a_1 z + a_0$, onde $a_1 \neq 0$, note que $z_1 = -a_0/a_1$ é raiz de p e que podemos escrever $p(z)$ da seguinte maneira $p(z) = a_1(z - z_1)$. Agora, suponhamos que toda função polinômial $q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_{n-1}z^{n-1}$ de grau $n - 1$ pode ser fatorada como $q(z) = b_{n-1}(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1})$. Agora vamos observar que pelo Teorema Fundamental da Álgebra existe $z_n \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_n) = 0$. Como z_n é uma raiz da função polinômial p pela Proposição 3.3, existe uma função $q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_{n-1}z^{n-1}$ de grau $n - 1$ tal que $p(z) = (z - z_n)q(z)$. Por conseguinte, note que

$$\begin{aligned} a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 &= (z - z_n)q(z) \\ &= (z - z_n)(c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1}z^{n-1}). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de z^n, temos que $c_{n-1} = a_n \neq 0$. Como o polinômio q tem grau $n - 1$, podemos usar a hipótese de indução em q, daí segue que $p(z) = (z - z_n) \cdot c_{n-1} \cdot (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1})$, ou seja, $p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$. □

Exemplo 28. *Dadas as raízes do polinômio $p(x)$ de grau $n = 4$, em que $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$ e $x_4 = 4$. Determine o polinômio $p(x)$ na forma fatorada e na forma geral, em que, $a_n = 1$.*

Resolução:

Aplicando o Teorema da Decomposição, temos:

$p(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 4)$, como sua forma fatorada.

Agora vamos desenvolver, reduzir os termos semelhantes e obter sua forma geral.

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 4) \\ &= \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 2x - 8\right) \\ &= x^4 - 2x^3 - 8x^2 - x^2 + 2x + 8 \\ &= x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 \end{aligned}$$

Então, sua forma geral é o polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$.

Exemplo 29. *Escreva o polinômio* $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ *na sua forma fatorada.*

Resolução:

Colocaremos o x em evidência, reduzindo o polinômio para um do segundo grau e aplicaremos a Fórmula de Bhaskara.

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - 4x^2 + 3x \\ &= x\left(x^2 - 4x + 3\right) \\ &= x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

Então, sua forma fatorada é o polinômio $p(x) = x(x-1)(x-3)$.

O próximo resultado também é uma consequência do TFA e é bastante utilizado no ensino médio quando estamos estudando raiz de uma equação polinômial $p(x) = 0$. Esse resultado nos diz que se um número complexo for raiz de um polinômio com coeficientes reais de grau maior que 1, então, seu conjungado também será, ou seja, numa equação polinômial , quando houver raízes imaginárias, a quantidade de raízes imaginárias será sempre em número par em razão do conjugado.

Corolário 4.14. *Se um número complexo* $z = a + bi$*, não real, for raiz de um polinômio* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *com coeficientes reais, então o conjungado* $\bar{z} = a - bi$ *também será raiz desse polinômio.*

Demonstração. De fato, suponha que $z = a + bi$, não real, seja raiz de $p(z)$, ou seja, $p(z) = 0$, então $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$. Assim,

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \bar{0}.$$

Agora vamos usar a propriedade 2.5 itens 6 e 9, e o fato dos coeficientes de $p(z)$ serem reais, assim $a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_1(\bar{z}) + a_0 = 0$, ou seja, $p(\bar{z}) = 0$, daí $\bar{z}$ é raiz de p. □

Corolário 4.15. *Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem uma raiz real.*

Demonstração. Seja p um polinômio de grau ímpar com coeficientes reais. Note que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$. Caso $z_0 \in \mathbb{R}$, o resultado está provado. Se z_0 for complexo não real, pelo Corolário 4.14, $\overline{z_0}$ também é uma raiz de p. Como o polinômio tem grau ímpar, existe pelo menos uma raiz real. □

4.3 Estudo geométrico da raiz de um polinômio complexo utilizando o Geogebra

Faremos um estudo geométrico da raiz de um polinômio complexo p, através da análise individual de sua parte real e imaginária.

Como visto a priori, para $z = x + yi$, o polinômio complexo $p(z)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$p(z) = Re\left[p\left(z\right)\right] + i \cdot Im\left[p\left(z\right)\right]$$

Note que $p(z) = 0$ se, e somente se, $Re(z) = 0$ e $Im(z) = 0$.

Para essa análise usaremos um exemplo de um polinômio complexo do segundo grau, $p\left(z\right) = z^2 - 2z + 5$. Nosso objetivo é determinar a raiz desse polinômio utilizando sua parte real e imaginária. Assim, fazendo para $z = x + iy$ temos

$$\begin{aligned} p\left(x + yi\right) &= \left(x + yi\right)^2 - 2\left(x + yi\right) + 5 \\ &= x^2 + 2xyi + y^2i^2 - 2x - 2yi + 5 \\ &= \left(x^2 - y^2 - 2x + 5\right) + i\left(2xy - 2y\right). \end{aligned}$$

Então, $Re\left(x, y\right) = \left(x^2 - y^2 - 2x + 5\right)$ e $Im\left(x, y\right) = \left(2xy - 2y\right)$

Para fazer a análise algébrica usaremos um sistema de equações tal como abaixo:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 5 = 0.\ (I) \\ 2xy - 2y = 0.\ (II) \end{cases}$$

A equação (II): $2y \cdot (x - 1) = 0$ tem duas soluções $y = 0$ ou $x = 1$. Substituindo na equação (I), temos:

Para $y = 0$, não temos raízes reais, como se segue:

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$x_1 = 1 + 2i$ ou $x_2 = 1 - 2i$

Para $x = 1$, temos:

$1 - 2 - y^2 + 5 = 0$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

Então a solução do sistema são os pontos $(1, 2)$ e $(1, -2)$.

Considerando que este polinômio, nos complexos, não possui representação gráfica, podemos, tal como sugere Dias (2017), fazer o estudo da relação entre os gráficos de $Re\left(x, y\right) = x^2 - y^2 - 2x + 5$ e $Im\left(x, y\right) = 2xy - 2y$.

Para fazer a análise gráfica no software GeoGebra, seguiremos os seguintes passos:

1. Inserir as funções $Re\left(x, y\right)$ e $Im\left(x, y\right)$ no GeoGebra, gerando as seguintes superfícies:

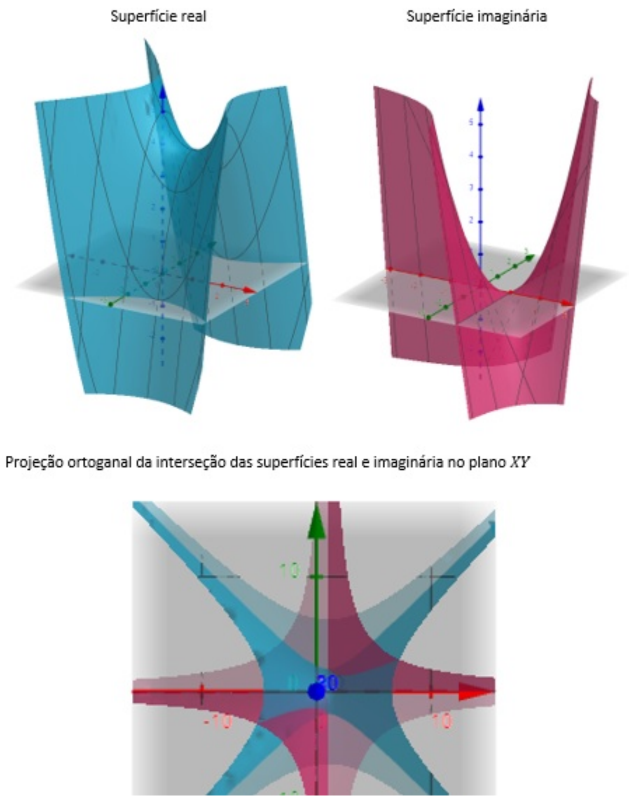


Figura 9: Superficíe da parte real e imaginária
Fonte: Autoria própria

2. Encontrar a interseção de cada uma das superfícies com o plano XY, usando o comando InterseçãoGeométrica(<Plano>,<Polígono>) , sendo o plano $z = 0$ e o polígono às superfícies.

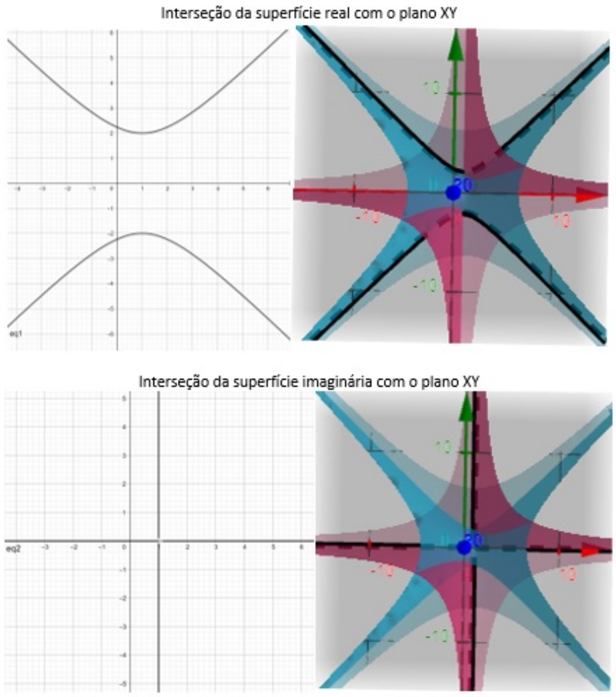


Figura 10: Interseção da parte real e imaginária
Fonte: Autoria própria

O Teorema Fundamental da Álgebra estabelece que a interseção destas projeções das superfícies real e imaginárias com o plano $z = 0$ são as raízes do polinômio complexo $p(z) = z^2 - 2z + 5$.

3. Usando o comando Interseção(<Objeto>, <Objeto>), em que os objetos são as equações das interseções encontradas no passo anterior, temos a seguinte configuração visual:

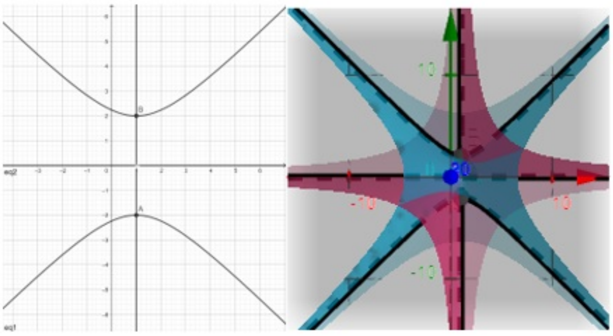


Figura 11: Visualização das raízes
Fonte: Autoria própria

Os pontos $A\,(1,2)$ e $B\,(1,-2)$ no plano cartesiano são, justamente, as soluções do sistema de equações da análise algébrica anterior.

5 Metodologia e análise

Esta pesquisa se desdobra num estudo de caso que, de acordo com Gil (2002), consiste no trabalho minucioso de um ou poucos objetos, de modo que seja possível seu amplo e detalhado conhecimento. Segundo Yin (2001, p.19)

Em geral, os estudos de caso representam a estratégia preferida quando se colocam questões do tipo "como"e "por quê", quando o pesquisador tem pouco controle sobre os eventos e quando o foco se encontra em fenômenos contemporâneos inseridos em algum contexto da vida real.

Ainda, de acordo com Yin (2001), este tipo de pesquisa pode ser complementada por estudos exploratórios, no qual esta pesquisa também se encaixa por ter como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, tornando-o mais explícito ou gerando mais hipóteses (GIL, 2002). Outra característica dos estudos exploratórios é o fato de seu planejamento ser flexível, permitindo a consideração e análise dos mais variados aspectos e pormenores que influenciam no fenômeno estudado.

Segundo Yin (2010 apud PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 198), o estudo de caso pode ser delineado em seis grandes etapas:

a) plano – que consiste no levantamento bibliográfico, leitura e fichamento, de maneira a organizar o pressuposto teórico adotado;

b) projeto de pesquisa – no qual é delineado o problema a ser investigado;

c) preparação – que corresponde ao período de treinamento, triagem e aplicação do estudo piloto;

d) coleta – na qual ocorre a aplicação dos instrumentos de coleta de dados;

e) análise – que compreende a análise dos dados coletados, podendo ser realizada com o auxílio computacional;

f) compartilhamento – no qual ocorre a divulgação/socialização dos resultados obtidos por meio de relatórios, artigos publicados em revistas, etc.

Costa (2019) salienta, por fim, que um estudo de caso precisa considerar os seguintes aspectos: o contexto; o objetivo da pesquisa; o objeto do estudo; se o mesmo necessita de vários instrumentos de pesquisa, isto é, depender dos instrumentos a serem utilizados.

5.1 Contexto e pesquisa

A presente pesquisa foi aplicada com uma turma da 3ª série do Ensino Médio, de uma escola privada da cidade de Barreiras-BA, constituída de 14 alunos, no ano de 2021. Realizada no mês de outubro, período ainda pandêmico, no qual algumas escolas adotaram o esquema híbrido (parte dos alunos em aulas presenciais e remotas), só conseguimos realizar a pesquisa com seis alunos, justamente o grupo presencial da turma. Os alunos serão aqui identificados por A01, A02, A03, A04, A05 e A06.

Tais alunos, possuem em comum o perfil marcado por compromisso, empenho e identificação com a área de matemática. Não houve nenhum critério de seleção.

A atividade ocorreu integralmente em sala de aula, com os alunos fazendo uso de tablets para terem acesso ao software GeoGebra, recurso essencial, principalmente para o segundo instrumento de coleta desta pesquisa (Atividade 02 – AT02).

5.2 Objeto de estudo

O principal objeto matemático de estudo foi a aplicação do Teorema Fundamental da Álgebra com alunos do Ensino Médio. Do ponto de vista didático, tendo em vista a ausência de estudos e demonstrações na área de topologia para este seguimento de ensino, o que impossibilita a compreensão da demonstração formal deste conteúdo (fato este, inclusive, discutido em sessões anteriores), resolvemos trabalhar com as aplicações diretas do teorema, de modo que os estudantes fossem capazes de entender sua relevância e praticidade.

5.3 Objetivo e problema de estudo

O objeto geral desta pesquisa foi propor e aplicar uma abordagem de estudo do TFA para estudantes do Ensino Médio de forma acessível e intuitiva. A problemática foi: Como abordar o TFA para estudantes do Ensino Médio de forma acessível e intuitiva?

Como objetivos específicos, destacamos: Investigar formas de trabalhar o TFA com alunos do ensino médio; Estabelecer uma relação entre as representações algébrica e gráfica usando o TFA.

5.4 Etapas de estudo

O plano de estudo foi feito e detalhado nos capítulos anteriores, em que discorremos sobre os teoremas, propriedades, operações e suas demonstrações, bem como exemplificamos passo a passo como aplicá-los.

Os instrumentos de pesquisa foram duas atividades (AT01 e AT02). A pesquisa foi realiza em quatro dias (8h/aulas), sendo 4 h/aulas para a AT01 (em dois dias) e 4 h/aulas para AT02 (em dois dias). A seguir apresentamos uma descrição detalhada de cada atividade acompanhada dos objetos de cada questão.

AT01

1. Fatore o polinômio $p(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8$, sabendo que suas raízes são 1, - 1, 2 e 4.

2. Escreva o polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 4x$ em fatores do primeiro grau.

3. Qual é o conjunto solução da equação $(x-2)(x+3)(x-1)^2(x+1) = 0$?

4. Qual é o grau da equação polinomial $(x-1)^2(x+3)^2(x-2)^5 = 0$?

5. Determine o conjunto solução da equação polinomial $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, sabendo que duas raízes são – 1 e 2.

6. Escreva uma equação do terceiro grau cujas raízes são – 2, 3 e 5.

7. Quais são as raízes da equação polinomial $x^3 - 12x^2 + 39x - 28 = 0$ sabendo que suas raízes estão em PA?

8. Resolva a equação polinomial $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ sabendo que duas de suas raízes são opostas.

Todas questões são adaptadas da coleção positivo para o ensino médio, majoritariamente do livro de Lindem (2016) – Matemática: ensino médio; reformulação dos originais de Jorge Luiz Farago, Lúcio Nicolau dos Santos Carneiro – Curitiba: Positivo, 2016. Importante ressaltar, que não há no livro nenhuma indicação específica, do uso de algum software para o trabalho com este conteúdo. A razão de inclusão do GeoGebra neste trabalho se concentra nas possiblidades de manipulação, associação e interatividade que este programa permite aos estudantes, abrangendo ainda mais o alcance didático do conteúdo.

Como a questão 01 aborda uma equação do quarto grau, pelo TFA, possui quatro raízes, dadas na questão. Após identificar isso, espera-se que os alunos apliquem o Teorema da Decomposição para escrever o polinômio na forma fatorada.

Na questão 02, aplicando o TFA, e percebendo que é de terceiro grau, logo possui três raízes, o aluno poderá colocar o fator comum em evidência, obtendo dois fatores, depois aplica a expressão matemática resolutiva de equações do segundo grau, para encontrar suas duas raízes. Agora aplica o Teorema da Decomposição para escrever a forma fatorada.

Na questão três, a equação está escrita na sua forma fatorada. Pelo Teorema da Decomposição, poderão encontrar suas raízes.

Aplicando o Teorema da Decomposição nessa questão quatro, essa equação possui nove fatores do primeiro grau. Os alunos poderão aplicar o TFA e verificar que essa equação é do nono grau.

A equação da questão cinco é do quarto grau, pelo TFA, possui quatro raízes, como foi dado duas dessas raízes, poderá aplicar o dispositivo de Ruffini para reduzir à uma de segunda grau e aplicar a expressão matemática resolutiva para encontrar as outras duas.

Na sexta questão, pelo TFA, o aluno poderá compreender que a equação é do terceiro grau, logo possui três raízes, dada na própria questão, aplicando o Teorema da Decomposição para escrever na forma fatorada e depois desenvolver para encontrar a equação pedida.

Nas duas últimas questões, os alunos vão aplicar as relações entre os coeficientes e suas raízes, para determinar as raízes, relações obtidas através do TFA, mas que não foi demonstrada nessa dissertação.

Após os cálculos algébricos, os alunos deverão construir as figuras tridimensionais no Geogebra, seguindo os passos de como foi orientado em sala de aula. Ainda foi preciso intervenção do docente para que alguns discentes pudessem fazer a construção, pois não tem costume de usar o aplicativo.

Primeiramente os discentes poderão fazer o cálculo algébrico da função polinomial para identificar a parte real e a parte imaginária. Em seguida, deverão construir as figuras tridimensionais no aplicativo Geogebra, passo a passo como foi visto em sala de aula.

Abaixo a descrição da AT02:

AT02

1. Determine algebricamente e com o Geogebra as raízes dos seguintes polinômios:

a) $p(z) = z^2 - 4z + 13$.

b) $p(z) = z^2 - 2z + 10$.

A orientação metodológica para a AT02 é posta da seguinte forma:

Passo 1:

Construir a figura tridimensional da parte real do polinômio.

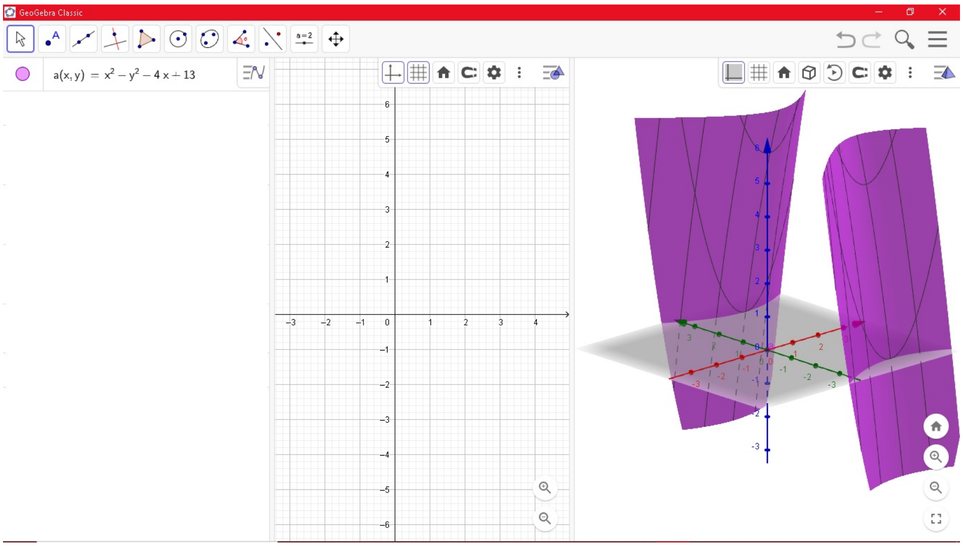


Figura 12: Passo 1:Construção da figura tridimensional da parte real do polinômio

Fonte: Autoria própria

Passo 2:

Construir a figura tridimensional da parte imaginária do polinômio.

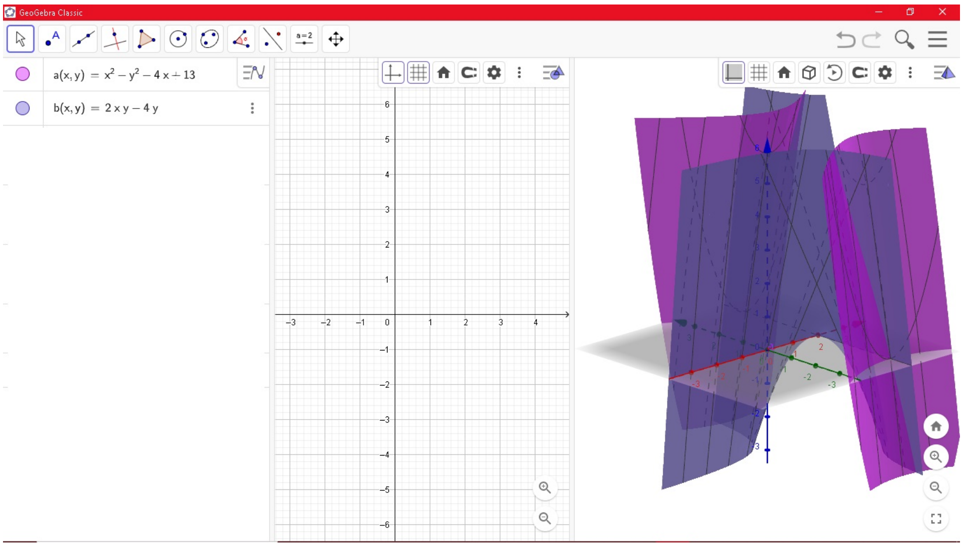


Figura 13: Passo 2:Construção da figura tridimensional da parte imaginária do polinômio

Fonte: Autoria própria

Passo 3:

Fazer a intersecção geométrica do passo 1 com o eixo z=0.

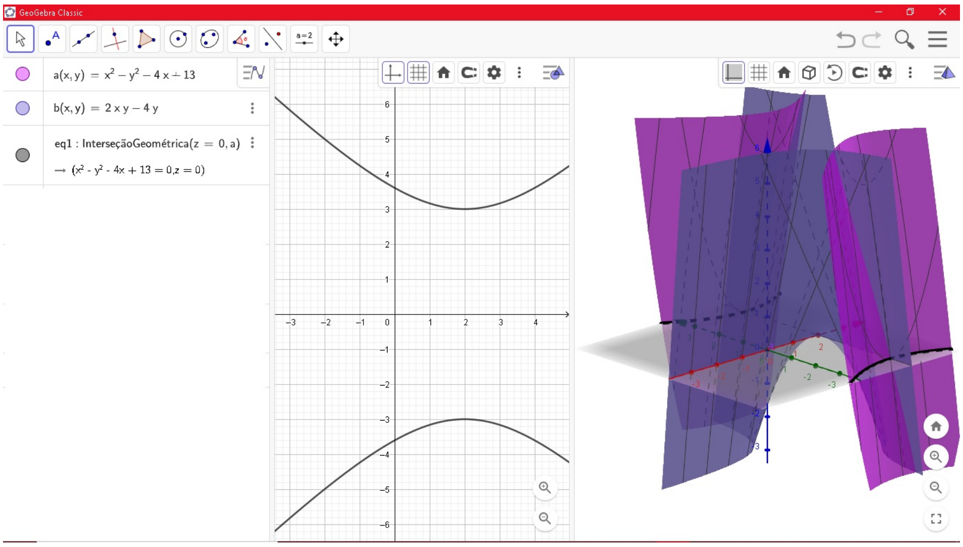


Figura 14: Passo 3: Intersecção geométrica do passo 1 com o eixo z = 0

Fonte: Autoria própria

Passo 4:

Fazer a intersecção geométrica do passo 2 com o eixo z=0.

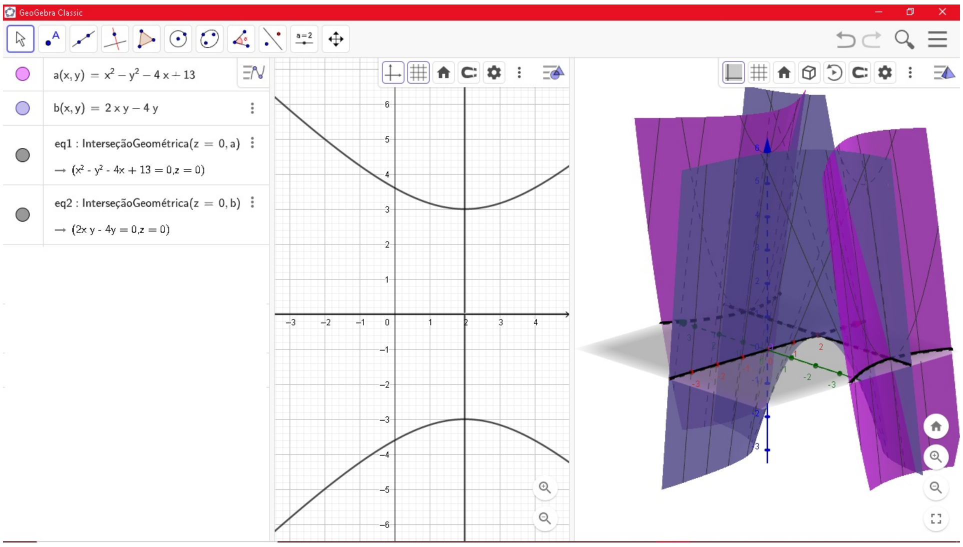


Figura 15: Passo 4: Intersecção geométrica do passo 2 com o eixo z = 0

Fonte: Autoria própria

Passo 5:

Fazer a intersecção geométrica do passo 3 com o 4, daí vai aparecer a solução geométrica das raízes da função polinomial.

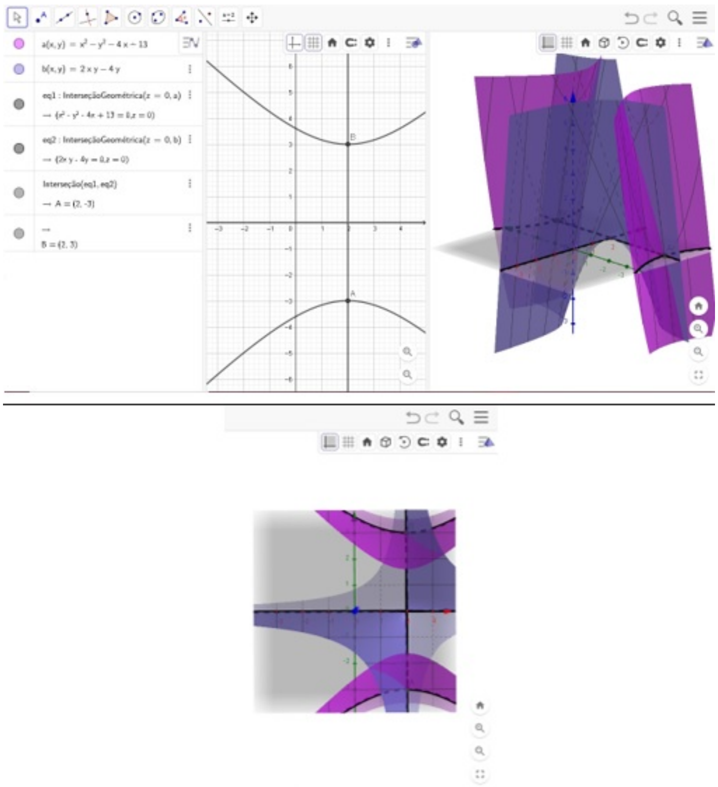


Figura 16: Passo 5: Intersecção geométrica do passo 3 com o 4

Fonte: Autoria própria

5.5 Análise dos resultados

AT01

Nesta atividade foi verificado que os alunos não tiveram grandes dificuldades no trabalho com as questões envolvendo os teoremas. O principal entrave se concentrou nas duas primeiras questões, após a explanação do conteúdo em uma aula anterior. A falta de experiência e contato com o conteúdo justificou as dificuldades iniciais em identificar qual teorema usar para, por exemplo, resolver a primeira questão, que envolve um polinômio do 4º grau, cujas raízes já foram identificadas na questão. A partir do momento em que eles compreenderam a aplicação do TFA, as demais questões se tornaram intuitivas.

Ao decorrer desse estudo, apresento as experiências da aplicação de uma atividade em que o primeiro teste consistiu apenas na aplicação da atividade teórica e o segundo correspondeu à aplicação da atividade e demonstração no software GeoGebra.

Durante a primeira atividade os alunos fizeram de forma concentrada, apresentaram dúvidas pontuais sobre as questões, mas desenvolveram sem contratempos. Nas duas foram abordadas o TFA. Já na segunda parte, os estudantes usaram o software GeoGebra, vendo as ilustrações 3D tomando forma, eles ficaram empolgados e realizaram as atividades fazendo a análise da parte algébrica com a geométrica.

Segue resolução do A01 da questão 01

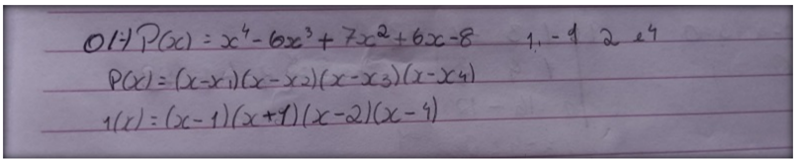


Figura 17: Resolução de A01 da questão 01 da primeira atividade
Fonte: Autoria de A01

Aqui, percebemos como o aluno teve facilidade em reconhecer e transcrever o polinômo em sua forma fatorada, dadas as raízes já apresentadas. O mesmo foi verificado nos demais. Este mesmo aluno, na questão 06, teve facilidade em executar o processo contrário e encontrar o polinômio em sua forma geral, dadas as raízes, aplicando o Teorema da Decomposição para encontrar sua forma fatorada, conforme imagem:

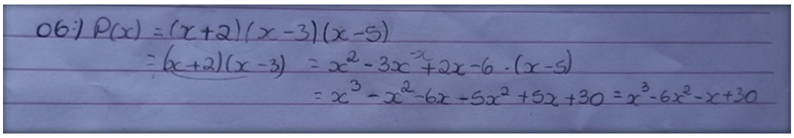
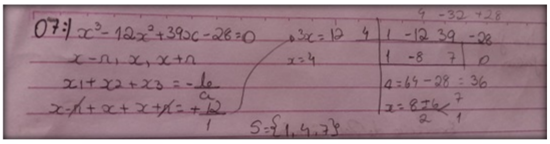


Figura 18: Resolução de A01 da questão 06 da primeira atividade

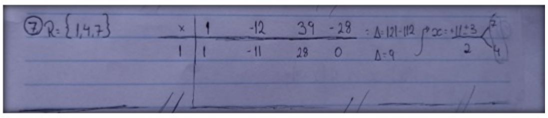
Fonte: Autoria de A01

Na questão 7, é exigido do aluno a relação entre os coeficientes e as raízes do polinômio. Tal relação pode ser obtida por meio do TFA. Além disso, pode ser trabalhada por meio do dispositivo Briot-Ruffini, conteúdo pertencente à ementa da 2ª série do Ensino Médio. Segue a comparação da resolução de três estudantes feita de formas distintas, todas chegando ao mesmo resultado:

A01



A02



A03

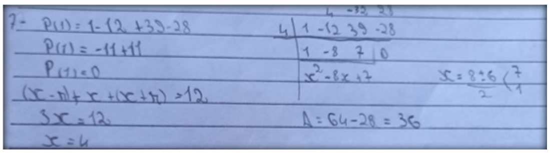


Figura 19: Comparação da resolução da questão 07 da primeira atividade dos alunos A01, A02 e A03

Fonte: Autoria de A01, A02 e A03

Na imagem anterior constam as três resoluções distintas (A01, A02 e A03) da questão 07. Salientamos a forma como os três estudantes chegaram às raízes por meios paralelos. A01, por exemplo, aplicou, detalhadamente, as relações entre os coeficientes e as raízes para conseguir encontrar uma destas. Em seguida, aplicou o dispositivo Briot-Ruffini para encontrar as demais. O estudante soube usufruir da informação sobre a progressão aritmética para chegar à raiz $x = 4$.

Já A02 encontrou uma das raízes usando a soma dos coeficientes (na qual, se 0, indica que 1 é raiz deste polinômio). Verificado isso, ele também usou o dispositivo Briot-Ruffini para encontrar as outras duas.

Por fim, A03, apesar de inicialmente, também ter feito a verificação usando a soma dos coeficientes e ter percebido que 1 era raiz, opta por usar a propriedade envolvendo as relações entre coeficientes e raízes para encontrar a raiz $x = 4$ e, em seguida, aplicou Briot-Ruffini.

AT02

Nesta segunda atividade, levando em conta que os estudantes não tinham tanta experiência com o uso do GeoGebra, foi necessário os alunos fazerem, previamente junto ao professor, um roteiro de como usar os recursos do programa para atingirem os objetivos solicitados na atividade.

Com relação à parte algébrica, que antecede o uso do software, os estudantes não apresentaram grandes dificuldades, levando em conta que eles trabalharam com um polinômio do segundo grau. Foi enfatizado, contudo, que com os demais do 3º grau ou superior, o cálculo/resolução seria bem mais complexo.

Analisemos a seguir, a resolução algébrica do item a da primeira questão da AT02.

A01

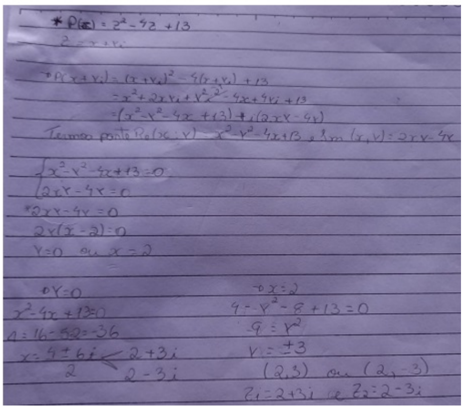


Figura 20: Resolução do item a da segunda atividade do aluno A01

Fonte: Autoria de A01

A02

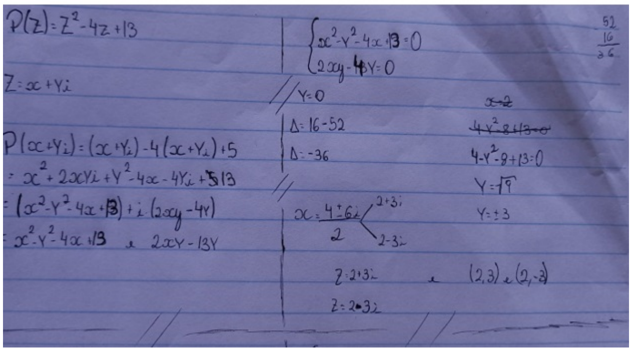


Figura 21: Resolução do item a da segunda atividade do aluno A02

Fonte: Autoria de A02

Não foram verificadas grandes dificuldades por parte dos estudantes ao lidarem com algumas operações envolvendo os números complexos. Isso ocorreu, muito provavelmente, pelo fato de, na 2 série do ensino médio terem estudado este conteúdo, não sendo necessário fazer grandes retomadas.

Com relação às construções geométricas, também destacamos os trabalhos de A01 e A02 a seguir:

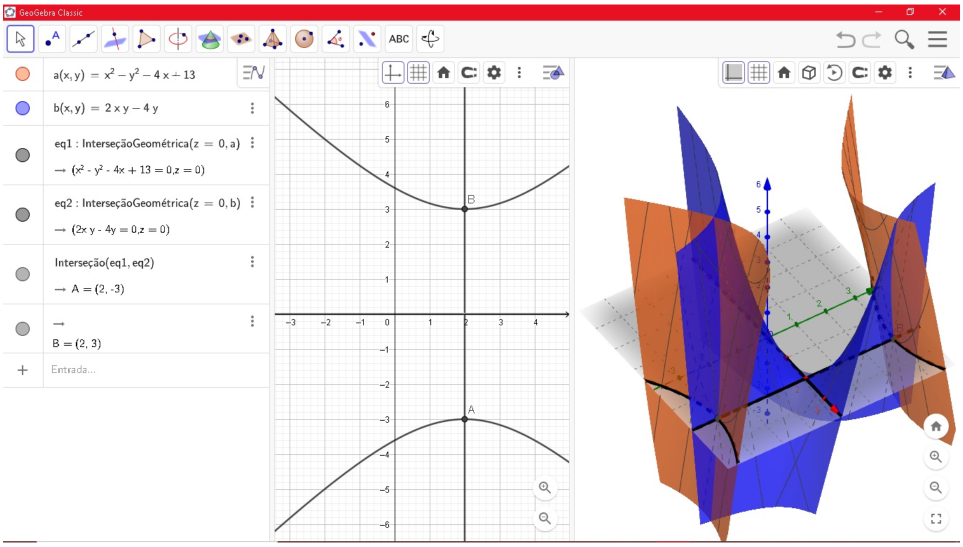


Figura 22: Construção no GeoGebra do aluno A01

Fonte: Autoria de A01

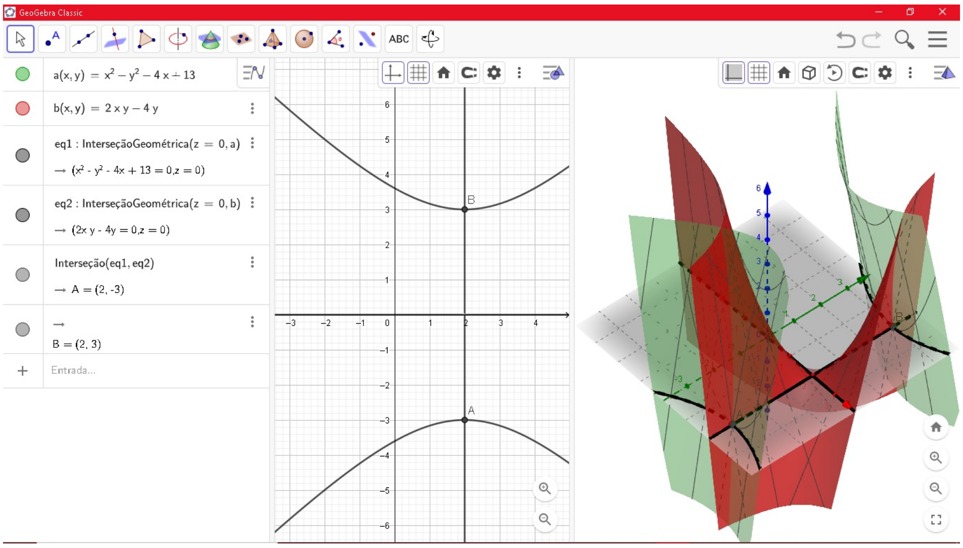


Figura 23: Construção do GeoGebra do aluno A02

Fonte: Autoria de A02

Destacamos, nesta atividade, a forma como os estudantes se envolveram e interessaram-se pela proposta, muito por conta da interatividade e autonomia proporcionada pelo programa. Todos conseguiram seguir os passos que foram propostos, desde a inserção dos polinômios real e imaginário (encontrando no trabalho algébrico anterior) até a interseção das projeções destes com o plano em que $z = 0$, constituindo-se, assim, as raízes dos polinômios complexos iniciais.

6 Considerações Finais

O objeto geral desta pesquisa foi propor e aplicar uma abordagem de estudo do TFA para estudantes do Ensino Médio de forma acessível e intuitiva. A problemática foi: Como abordar o TFA para estudantes do Ensino Médio de forma acessível e intuitiva?

Através dos estudos teóricos e empíricos verificamos que, de fato, é delicado trabalhar com a demonstração deste teorema, visto que exige conhecimentos, como os de topologia, que só são devidamente explorados em determinados cursos de nível superior. No entanto, os resultados deste teorema podem ser explorados com esses estudantes, principalmente com o uso de recursos como o GeoGebra, ferramenta que permite uma visualização mais ampla da relação entre as representações algébrica e gráfica dos polinômios.

Ainda com relação a esta ferramenta, destacamos seu potencial com recurso facilitador e estimulante da autonomia dos estudantes, uma vez que estes podem, muito além do roteiro da aula, fazer testes, verificações, rotações e simulações que ajudam a vislumbrar muitas vertentes do conteúdo.

O trabalho essencialmente algébrico foi relevante por evidenciar aos estudantes a importância dos teoremas, propriedades e algoritmos com os quais tanto lidam ao longo do ensino básico.

Um dos propósitos da atividade era que houvesse uma complementação entre os trabalhos algébrico e os gráficos, de modo que todos fossem capazes de reconhecer e relacionar os elementos, agora algébricos e simbólicos, com os elementos, a posteriori, gráficos e visuais.

Todos tiveram a oportunidade de relacionar, manipular e conjecturar, dentre outras coisas, sobre a relação das curvas tridimensionais com as equações reais e imaginárias, bem como a relação dos pontos de intersecção destas curvas no plano $z = 0$ com o resultado possível e determinado dos sistemas algébricos.

Com relação aos trabalhos algébricos, percebemos que os alunos não apresentaram grandes dificuldades, porém realçamos que o perfil da turma e o contexto pandêmico tiveram influência sobre o resultado desta pesquisa. O público alvo constituiu-se de estudantes com bom rendimento na matéria e que, até por isso, aceitaram deliberadamente participar do estudo.

Os resultados da pesquisa pode influenciar outros estudos no momento em que existem outras propriedades e corolários decorrentes do TFA que podem ser explorados com estudantes do Ensino Médio. Dentre estes, destacamos as Relações de Girard e o próprio Teorema da Decomposição que pode ser explorado de diferentes formas e com polinômios de outros graus que, do ponto de vista geométrico, geram formas espaciais interessantes de se trabalhar em sala de aula.

Referências

[1] ANTÔNIO, C, G , *Como Elaborar Projetos de Pesquisa,*. 4 ed., São Paulo, 2002.

[2] ÁVILA, Geraldo. *Variáveis complexas e aplicações*, Rio de Janeiro: LTC, 2008

[3] BOYER, C. B.*História da matemática*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

[4] CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. McGraw-Hill. São Paulo. 1975.

[5] DIAS, F. C. *O teorema fundamental da álgebra*. Dissertação (mestrado) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT). Macapá, 2016.

[6] FERNANDEZ, C. S. ; SANTOS, R. A. . *O Teorema Fundamental da Álgebra*. In: V Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

[7] PEREIRA DA COSTA,A , *A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis* , Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2019.

[8] ZANI, S. L. *Funções de uma variável complexa*. São Carlos: ICMC, USP. 2014.

[9] LINDEM, Solano G. , *Matemática: ensino médio*, Reformulação dos originais de Jorge Luiz Farago, Lúcio Nicolau dos Santos Carneiro . Positivo, Curitiba, 2016.

[10] YIN, R. K. *Estudo de Caso* , Planejamento e Métodos. 2 Ed., Porto Alegre, 2001.