



UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA - UFOB
CAMPUS REITOR EDGAR SANTOS
CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Iran Campos Soares

Como calcular o volume dos sólidos de Arquimedes

Barreiras/BA

2021



PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática



COMO CALCULAR O VOLUME DOS SÓLIDOS DE ARQUIMEDES

Iran Campos Soares

Dissertação de Mestrado submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOP, para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Dr. Edvaldo Elias de Almeida Batista

Barreiras/BA

2021

FICHA CATALOGRÁFICA

S676

Soares, Iran Campos

Como calcular o volume dos sólidos de Arquimedes. / Iran Campos Soares. – 2021.

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Elias de Almeida Batista

Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

1. Sólidos de Arquimedes. 2. Sólidos de Platão. 3. Volume. I. Batista, Edvaldo Elias de Almeida. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia. III. Título.

CDD 510

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

Iran Campos Soares

Como calcular o volume dos sólidos de Arquimedes

Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática, pela Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB.

Banca examinadora

Prof.(a) Dr. Edvaldo Elias de Almeida Batista.
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB
(Orientador)

Prof.(a) Dr. Fábio Nunes da Silva.
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB

Prof.(a) Dra. Rosane Gomes Pereira.
Universidade Federal de Goiás - UFG

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática.

Barreiras, 29 de novembro de 2021.

Dedico este trabalho à Deus. Aos meus Pais, Vitorina da Silva C. e Espedito Soares S. e minha noiva, Mõara C. Amorim

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por me conceder todas as condições necessárias para a elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, Vitorina da Silva Campos dos Santos e Espedito Soares dos Santos, pelo incomensurável apoio.

À minha maravilhosa noiva, Môara Cunha Amorim, por todo amor, apoio, carinho e compreensão.

Ao meu orientador, Dr. Edvaldo Elias de Almeida Batista, por todas as sugestões, orientações, disponibilidade e motivação.

Aos meus irmãos, Raimundo Soares, Esvaldino Soares, Mikaelem Campos e Kailson Campos.

À todos meus familiares e amigos, em especial às minhas tias, Claudene Campos e Salvadora Campos.

À Universidade Federal do Oeste da Bahia, com todo seu corpo docente e demais funcionários, por me possibilitar condições de alcançar meus objetivos.

Ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, pelo curso concedido.

À Sociedade Brasileira de Matemática, pelos esforços em prol do aperfeiçoamento do ensino de matemática.

Dai-me um ponto de apoio e levantarei o mundo.

Arquimedes de Siracusa

Resumo

Neste trabalho apresentamos deduções de fórmulas para o cálculo do volume dos sólidos de Arquimedes, que consiste no objetivo principal da dissertação. Iniciamos com a apresentação de um resumo sobre elementos da geometria e trigonometria, em que relembramos alguns importantes axiomas, definições e demonstramos teoremas, tais como o teorema de Ptolomeu e Pitágoras. Após esta revisão conceitual, apresentamos melhor o tema do trabalho, definindo o que é um sólido de Arquimedes ou semirregular, provando a existência de treze sólidos com base na definição e apontamos como esses sólidos são obtidos a partir dos sólidos platônicos, por meio de operações de cortes definidas como truncamento e snubificação. Dito isto, focamos o trabalho na dedução de fórmulas para o cálculo do volume dos sólidos arquimedianos, através de conceitos da geometria plana, espacial e analítica. Para tanto, descrevemos toda a linha de pensamento no desenvolvimento das linhas de cálculo, com o intuito de criar uma leitura confortável das deduções, sem que exija do leitor uma forte aplicação no entendimento do raciocínio utilizado. Por fim, nas considerações finais, enaltecemos não só o êxito em atingir o objetivo esperado, correlacionando-o com a hipótese inicial definida no trabalho, como expressamos nossa visão sobre como é relevante mais publicações relacionadas aos sólidos de Arquimedes, em prol da difusão da geometria.

Palavras-chave: Sólidos de Arquimedes. Sólidos de Platão. Volume.

Abstract

In this work we present deductions from formulas for calculating the volume of solids by Archimedes, which is the main objective of the dissertation. We begin with the presentation of a summary about elements of geometry and trigonometry, in which we recall some important axioms, definitions and demonstrate theorems, such as Ptolemy's and Pythagoras' theorem. After that conceptual review, we better present the theme of the work, defining what is an Archimedean solid or semi-regular, proving the existence of thirteen solids based on the definition and showing how those solids are obtained from platonic solids, through defined cutting operations such as truncation and snubfication. That said, we focus our work on deducing formulas for calculating the volume of Archimedean solids, through concepts of plane, spatial and analytical geometry. For that, we describe the whole line of thought in the development of the calculation lines, with the intention of creating a comfortable reading of the deductions, without demanding from the reader a strong application in the understanding of the reasoning used. Finally, in the final considerations, we praise not only the success in reaching the expected goal, correlating it with the initial hypothesis defined in the work, as we express our view on how more publications related to Archimedes' solids are relevant, in favor of the diffusion of geometry.

Keywords: Archimedes' Solids. Plato's Solids. Volume.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ângulos (OPV).	22
Figura 2 – Ângulos internos: alternos e colaterais.	25
Figura 3 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.	25
Figura 4 – Triângulo medial $A'B'C'$.	26
Figura 5 – Propriedade do baricentro.	27
Figura 6 – Área do paralelogramo.	29
Figura 7 – Área do triângulo.	29
Figura 8 – Composição de um paralelepípedo a partir de um cubo unitário.	32
Figura 9 – Prisma.	33
Figura 10 – Pirâmide.	34
Figura 11 – Decomposição do prisma em pirâmides.	36
Figura 12 – Teorema de Pitágoras.	38
Figura 13 – Teorema de Ptolomeu.	39
Figura 14 – Triângulo retângulo.	41
Figura 15 – Razões trigonométricas em adição de ângulos.	43
Figura 16 – Lei dos cossenos: triângulo agudo.	45
Figura 17 – Lei dos cossenos: triângulo obtuso.	46
Figura 18 – Área do polígono regular: triângulo agudo.	47
Figura 19 – Área do polígono regular: triângulo obtuso.	48
Figura 20 – Divisão de um polígono regular em triângulos.	48
Figura 21 – Os cinco sólidos regulares.	51
Figura 22 – Os treze sólidos semirregulares.	59
Figura 23 – Exemplos de truncamento.	60
Figura 24 – Cuboctaedro: truncamento do tipo 1 no cubo.	61
Figura 25 – Cuboctaedro: face do cubo Ω .	62
Figura 26 – Cuboctaedro: pirâmide μ .	62
Figura 27 – Cuboctaedro truncado: truncamento do tipo 2 no cuboctaedro.	63
Figura 28 – Cuboctaedro truncado: face do cubo Ω .	64
Figura 29 – Cuboctaedro truncado: prisma μ .	64
Figura 30 – Cuboctaedro truncado: sólido σ .	65
Figura 31 – Cubo truncado: truncamento tipo 2 do cubo.	65
Figura 32 – Cubo truncado: face do cubo truncado.	66
Figura 33 – Cubo truncado: pirâmide μ .	67
Figura 34 – Dodecaedro truncado: truncamento do tipo 2 do dodecaedro.	67
Figura 35 – Dodecaedro truncado: decomposição do dodecaedro (parte 1).	68
Figura 36 – Dodecaedro truncado: decomposição do dodecaedro.	69

Figura 37 – Dodecaedro truncado: decomposição do dodecaedro (parte 2).	69
Figura 38 – Dodecaedro truncado: decomposição de σ	70
Figura 39 – Dodecaedro truncado: seção transversal da pirâmide θ .	70
Figura 40 – Dodecaedro truncado: face de Ω .	71
Figura 41 – Dodecaedro truncado: pirâmide μ .	72
Figura 42 – Icosaedro truncado: truncamento do tipo 2 do icosaedro.	73
Figura 43 – Icosaedro truncado: face do icosaedro Ω .	73
Figura 44 – Icosaedro truncado: seção transversal de Ω .	74
Figura 45 – Icosaedro truncado: pirâmide θ .	75
Figura 46 – Icosaedro truncado: pirâmide σ .	75
Figura 47 – Icosaedro truncado: pirâmide μ .	76
Figura 48 – Icosidodecaedro: truncamento do tipo 1 do dodecaedro e icosaedro.	77
Figura 49 – Icosidodecaedro truncado: truncamento do tipo 2 do icosidodecaedro.	78
Figura 50 – Icosidodecaedro truncado: dilatação das faces do icosidodecaedro truncado.	79
Figura 51 – Icosidodecaedro truncado: prisma μ .	80
Figura 52 – Icosidodecaedro truncado: face do prisma λ .	80
Figura 53 – Icosidodecaedro truncado: face decagonal de Ω .	81
Figura 54 – Icosidodecaedro truncado: sólido σ .	83
Figura 55 – Icosidodecaedro truncado: desmembramento do sólido σ .	83
Figura 56 – Icosidodecaedro truncado: sólidos obtidos a partir de σ .	84
Figura 57 – Icosidodecaedro truncado: base do sólido σ .	84
Figura 58 – Icosidodecaedro truncado: base do sólido σ_3 .	87
Figura 59 – Icosidodecaedro truncado: sólidos obtidos a partir de σ_3 .	87
Figura 60 – Octaedro truncado: truncamento do tipo 2 no octaedro.	88
Figura 61 – Octaedro truncado: face de Ω .	89
Figura 62 – Octaedro truncado: pirâmide μ .	89
Figura 63 – Tetraedro truncado: truncamento do tipo 2 do tetraedro.	90
Figura 64 – Tetraedro truncado: pirâmide μ .	90
Figura 65 – Rombicosidodecaedro: expansão das faces do dodecaedro.	91
Figura 66 – Rombicosidodecaedro: dilatação das faces do dodecaedro.	92
Figura 67 – Rombicosidodecaedro: sólido μ .	93
Figura 68 – Rombicosidodecaedro: expansão das faces pentagonais.	94
Figura 69 – Rombicosidodecaedro: sólido σ .	96
Figura 70 – Rombicosidodecaedro: obtenção da pirâmide σ_1 .	96
Figura 71 – Rombicosidodecaedro: sólido σ_2 .	97
Figura 72 – Rombicosidodecaedro: comprimento y do deslocamento das faces do dodecaedro.	99
Figura 73 – Rombicosidodecaedro: sólidos sob as faces do rombicoidodecaedro.	100
Figura 74 – Rombicosidodecaedro: seção transversal do prisma θ .	100

Figura 75 – Rombicosidodecaedro: altura da pirâmide φ .	102
Figura 76 – Rombicuboctaedro.	103
Figura 77 – Rombicuboctaedro: seção transversal.	104
Figura 78 – Rombicuboctaedro: delimitação de μ e σ .	105
Figura 79 – Rombicuboctaedro: prisma μ .	105
Figura 80 – Rombicuboctaedro: sólido σ .	106
Figura 81 – Rombicuboctaedro: expansão do cubo λ .	107
Figura 82 – Cubo <i>snub</i> : operação de snubficação sobre um cubo.	108
Figura 83 – Cubo <i>snub</i> : pirâmides μ e σ .	109
Figura 84 – Cubo <i>snub</i> : pirâmide μ .	110
Figura 85 – Cubo <i>snub</i> : pirâmide σ .	111
Figura 86 – Dodecaedro <i>snub</i> : operação de snubficação sobre um dodecaedro.	113
Figura 87 – Dodecaedro <i>snub</i> : pirâmides μ e σ .	115
Figura 88 – Dodecaedro <i>snub</i> : pirâmide μ .	115
Figura 89 – Dodecaedro <i>snub</i> : pirâmide σ .	116

Lista de quadros

Quadro 1 – Cubo <i>snub</i> : coordenadas cartesianas.	109
Quadro 2 – Dodecaedro <i>snub</i> : expressões auxiliares para compreensão das coordenadas.	113
Quadro 3 – Dodecaedro <i>snub</i> : coordenadas cartesianas.	114

Lista de tabelas

Tabela 1 – Designações de alguns polígonos de acordo o número de lados.	23
Tabela 2 – Área de alguns polígonos regulares de acordo o comprimento do lado. . . .	30
Tabela 3 – Razões trigonométricas para ângulos especiais.	42

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC: Base Nacional Comum Curricular

PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais

PROFMAT: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SBM: Sociedade Brasileira de Matemática

UFOB: Universidade Federal do Oeste da Bahia

Lista de símbolos

$d(A, B)$	Distância entre os pontos A e B .
$\Omega(A, r)$	Círculo omega de centro em A e raio r .
\overline{AB}	Comprimento do segmento AB .
\overleftrightarrow{AB}	Reta definida pelos pontos A e B .
S_{AB}	Semirreta de origem A .
\parallel	Paralelismo.
\perp	Perpendicularismo.
\sphericalangle	Medida de um ângulo.
\triangle	Triângulo.
$^\circ$	Grau.
α	Alfa.
β	Beta.
γ	Gama.
θ	Téta.
Λ ou λ	Lambda.
μ	Miu.
π	Pi.
ρ	Ró.
Σ ou σ	Sigma.
φ	Fi.
Ω	Omega.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{Q}	Conjunto dos números racionais.

\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros.
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mapsto	Relação entre elementos de conjuntos.
$f : A \rightarrow B$	Função de A em B.
\in	Pertence.
\equiv	Congruência.
\sim	Semelhança.
\geq	Maior ou igual que.
\leq	Menor ou igual que.
$>$	Maior que.
$<$	Menor que.
\Rightarrow	Implica que.
\Leftrightarrow	Se e somente se.
\forall	Para todo.
$=$	Igual.
\neq	Diferente.
\cong	Aproximadamente igual.
$+$	Símbolo de adição.
$-$	Símbolo de subtração.
\times ou \cdot	Símbolo de multiplicação.
\div	Símbolo de divisão.
$\frac{a}{b}$	Fração de numerador a e denominador b diferente de 0.
\sqrt{a}	Raiz quadrada de a.
$ a $	Valor absoluto de a.
$\ v\ $	Norma do vetor v.
$\sum_{i=m}^n i$	Somatório de i desde m até n.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Perguntas da Pesquisa	17
1.2	Justificativa	17
1.3	Hipóteses	18
1.4	Objetivo	19
1.4.1	Objetivo Geral	19
1.4.2	Objetivos Específicos	19
1.5	Organização	19
2	ELEMENTOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA	21
2.1	Conceitos elementares	21
2.2	Área	28
2.2.1	Área de Polígonos regulares	30
2.3	Volume	30
2.3.1	Princípio de Cavalieri	33
2.3.2	Prismas	33
2.3.3	Pirâmides	34
3	TEOREMAS	38
3.1	Teorema de Pitágoras	38
3.2	Teorema de Ptolomeu	38
3.3	Relação de Euler	39
4	ELEMENTOS BÁSICOS DA TRIGONOMETRIA	41
4.1	Conceitos elementares	41
4.2	Ângulos notáveis	42
4.3	Relações trigonométricas	42
4.4	Lei dos cossenos	45
4.5	Área de um polígono regular	47
5	POLIEDROS	50
5.1	Poliedros de Platão	50
5.2	Poliedros de Arquimedes	52
5.2.1	Formas de obtenção dos sólidos arquimedianos	59
6	VOLUME DOS SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS	61
6.1	Cuboctaedro	61

6.2	Cuboctaedro truncado	63
6.3	Cubo truncado	65
6.4	Dodecaedro truncado	67
6.5	Icosaedro truncado	73
6.6	Icosidodecaedro	77
6.7	Icosidodecaedro truncado	78
6.8	Octaedro truncado	88
6.9	Tetraedro truncado	90
6.10	Rombicosidodecaedro	91
6.11	Rombicuboctaedro	103
6.12	Cubo <i>snub</i>	107
6.13	Dodecaedro <i>snub</i>	112
7	CONCLUSÃO	119
	REFERÊNCIAS	121
	APÊNDICE A – DODECAEDRO <i>SNUB</i>	123
A.1	Apêndice - Dodecaedro <i>snub</i> : volume da pirâmide μ	123
A.2	Apêndice - Dodecaedro <i>snub</i> : volume da pirâmide σ_1	124
A.3	Apêndice - Dodecaedro <i>snub</i> : volume da pirâmide σ_2	125
	ANEXO A – VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO	126

1 Introdução

Dentro do campo da ciência matemática, a geometria consiste em uma das partes de estudo mais palpáveis em situações do nosso cotidiano. São inúmeras as ocasiões em que podemos relacionar um objeto real com um conceito abstrato, isso faz com que a produção de matemática no âmbito da geometria apareça frequentemente em feiras de ciências e exposições de modo geral, que tangencia de certo modo a matemática. Porém, é comum percebermos que há pouca variabilidade quando são apresentados sólidos geométricos, visto que os poliedros regulares e os corpos redondos recebem mais destaques nessas exposições. Dessa forma, esse contexto limita a pensarmos sobre sólidos geométricos na ótica de um pequeno grupo de formas geométricas, ao tempo que poderíamos explorar mais matemática por meio da apresentação de sólidos, como poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e Johnson. Pois cada um desses sólidos têm uma rica e interessante matemática a ser desenvolvida, bem como há curiosidades que estimulam aspiração pelo conhecimento matemático. Nesse sentido, neste trabalho iremos dar ênfase ao estudo dos “sólidos de Arquimedes”.

1.1 Perguntas da Pesquisa

Quando estudamos sobre sólidos geométricos, nossa principal dedicação consiste no estudo de áreas e volumes. Logicamente outras questões podem ser estudadas, porém esses dois eixos de concentração recebem mais notoriedade.

Para este trabalho, nosso questionamento consiste em, como abordar conceitos da geometria euclidiana plana e espacial, por meio de conceitos axiomáticos, teoremas e até mesmo na perspectiva analítica, para o cálculo de volumes dos sólidos arquimedianos.

1.2 Justificativa

Corriqueiramente ouvimos sobre a dificuldade que os alunos têm em absorver o conteúdo relacionado à matemática, provocando assim intimidação do aluno com a disciplina e o professor. Logicamente, essa barreira não surge somente a partir da exigência que a disciplina traz, mas devemos sempre ressaltar pontos como, a motivação dos professores, ambiente escolar, contexto social do aluno, empenho dos pais, como os alunos são cativados, entre outros.

Essa imagem de disciplina difícil se confirma se observarmos que, de modo geral, a matemática está sempre como uma das disciplinas que mais reprovam. Percebe-se também que há uma contribuição histórica que fortalece essa imagem, pois muitos alunos chegam à escola já com um pré-conceito formulado de que a matemática é difícil, pois os mesmos já

ouviram algo assim em suas casas ou no seu contexto social como um todo. E mesmo que existam aqueles que se sobressaíam, estes são vistos como alunos acima da média, restringindo o potencial de desenvolvimento dos outros por se sentirem inferiores e corroborando para que a caricatura de uma disciplina difícil prevaleça.

No que diz respeito ao modo como cativar os alunos, no âmbito da matemática, a geometria consiste em uma ferramenta riquíssima que pode ser utilizada para abordar a disciplina de uma forma mais lúdica, atrativa e com aplicabilidade clara no cotidiano. Além do mais, uma boa compreensão geométrica pode trazer benefícios como um bom raciocínio lógico e compreensão de formas tridimensionais de modo geral. Desse modo, acreditamos que por meio deste trabalho, podemos auxiliar alunos e professores a explorarem mais da geometria, por meio dos sólidos de Arquimedes, porque a utilização destes sólidos em sala de aula é pequena, prova disso está no currículo que é planejado para o ensino de geometria no Brasil, tanto em décadas passadas quanto atualmente pela BNCC ¹ e PCNs ². Além disso, se realizarmos uma busca por trabalhos de geometria, a maior produção estará sobre sólidos mais conhecidos nas escolas, como os de Platão. Assim, apresentar a geometria sobre a ótica de uma outra classe de sólidos é enriquecedora e foge um pouco da obviedade.

Desse modo, acreditamos que iremos complementar estudos já publicados sobre os sólidos de Arquimedes, trazendo uma abordagem de um aspecto ainda pouco explorado nestes sólidos. Tendo em vista que, entre os principais trabalhos publicados em língua nativa, encontramos os trabalhos de [2], [11], [12], [13], e [14], em que todos eles tratam dos sólidos geométricos de uma forma singular, mas nenhum com foco principal no estudo de volume de sólidos arquimedianos. Usufruímos deste parágrafo, para ressaltar também que essas obras foram fontes de informações que subsidiaram a construção de raciocínio e elaboração do trabalho como um todo.

1.3 Hipóteses

A hipótese deste trabalho é:

- É possível generalizar formas para o cálculo de volume dos sólidos arquimedianos com base somente no comprimento de suas respectivas arestas.

¹ A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica [9]

² Os PCNs - Parâmetros Curriculares Nacionais - são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal com o intuito de orientar os educadores mediante a normatização de aspectos de cada componente curricular.

1.4 Objetivo

1.4.1 Objetivo Geral

Demonstrar relações para o cálculo de volumes dos sólidos arquimedianos, com exceção das classes dos prismas e antiprismas.

1.4.2 Objetivos Específicos

Considerando o desenvolvimento do trabalho e o objetivo geral apresentado, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Objetivo 1 - Utilizar a geometria, plana, espacial e analítica para as demonstrações;
- Objetivo 2 - Aplicar teoremas simples, como teorema de Pitágoras e Ptolomeu, em situações de raciocínio não tão óbvio evidenciando assim esses teoremas como ferramentas poderosas da matemática;
- Objetivo 3 - Oferecer para alunos e professores uma boa base de informações sobre o volume e construção dos sólidos arquimedianos;
- Objetivo 4 - Apresentar os sólidos geométricos além de uma visão corriqueira.

1.5 Organização

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

Capítulo 2: Revisão de literatura abordando sobre referencial teórico de cunho matemático, onde iremos apresentar elementos da geometria euclidiana plana e espacial, através de um resumo geral de conceitos elementares, desde aspectos axiomáticos até teoremas.

Procuramos trazer neste capítulo, a recordação de conceitos básicos para que o leitor possa se sentir totalmente confortável em ler as linhas de cálculo apresentadas no trabalho, pois apesar de ter uma linguagem simples, é interessante que o leitor tenha uma base de apoio para acompanhar os algoritmos de cada demonstração do volume de cada sólido arquimediano.

Capítulo 3: Neste capítulo fortalecemos a base de conceitos que é revisada no capítulo 2, complementando-a com teoremas importantes da geometria euclidiana, como teorema de Pitágoras, teorema de Ptolomeu e relação de Euler.

Capítulo 4: Pelo que é apresentado no desenvolvimento do trabalho, defendemos ser importante expor também um pouco sobre as relações trigonométricas no âmbito do triângulo retângulo. Desse modo, neste capítulo revisamos um pouco sobre definições das relações trigonométricas, e como essas relações são importantes no estudo de áreas, através da lei dos cossenos, por exemplo.

Capítulo 5: Neste capítulo trazemos uma abordagem sobre os poliedros, mais especificamente sobre poliedros regulares e semirregulares. Para os poliedros regulares, definimos o que são, bem como verificamos a existência de apenas cinco sólidos ditos de Platão. Analogamente fazemos isto para os sólidos de Arquimedes, demonstrando que exceto a classe de prismas e antiprismas, há somente treze sólidos arquimedianos. Por fim, definimos as operações que podem ser feitas nos sólidos platônicos de modo a obtermos sólidos arquimedianos.

Capítulo 6: Para este capítulo, o dividimos em treze seções, em que cada uma delas expomos detalhadamente como podemos generalizar uma forma de encontrar o volume dos sólidos arquimedianos dado o comprimento da aresta. Para tanto, esclarecemos como cada sólido pode ser obtido a partir de um sólido platônico, descrevemos todo o processo de desenvolvimento dos cálculos e explicitamos tudo através de imagens.

É importante ressaltar que todas as imagens apresentadas nesta dissertação, foram criadas pelo autor do trabalho, e por isso não são apresentadas a fonte de cada figura.

Capítulo 7: Finalmente neste capítulo, chegamos à conclusão deste trabalho, onde destacamos nossas principais considerações finais, explicitamos os êxitos nos objetivos e a validação da hipótese do trabalho.

2 Elementos básicos da Geometria Euclidiana

As informações expostas neste capítulo advêm de [3], [4], [8] e [10]. Apresentaremos concisamente conceitos elementares da Geometria Euclidiana, assim adjetivada como referência a grandiosa obra *Os Elementos*, do matemático grego, Euclides de Alexandria (IV - III a.C.). Esta obra é um clássico da matemática, constituída de uma sistematização genuína, precisa e extensa dos conceitos da geometria. Sua relevância atravessa séculos, sendo base de fundamentação teórica para diversos matemáticos desde o século IV a.C..

Euclides de Alexandria, matemático grego dos séculos IV e III a.C. e um dos mais importantes da antiguidade. A maior de todas as contribuições de Euclides à Matemática, bem como à ciência em geral, foi o tratado *Elementos*, obra na qual expôs, sistematicamente, os conhecimentos de Geometria Plana de seu tempo – doravante rotulada como Euclidiana –, alguns dos quais frutos de seu próprio trabalho. A importância dos *Elementos* se deve ao fato deste ser a primeira obra em que se considera um corpo de conhecimento matemático como parte de um sistema lógico dedutivo bem definido [10, pg-2].

2.1 Conceitos elementares

A apresentação dos conceitos será feita de forma precisa, porém sem aprofundamento do objeto apresentado e assumindo alguns conceitos básicos como, ponto, reta e plano, conhecidos pelo leitor. Além disso, algumas afirmações que necessitem de prova e que sejam de fácil percepção ou de longa descrição na demonstração, serão omitidas.

Definição 2.1. *O conjunto de pontos que se encontrem entre dois pontos A e B é denominado como segmento AB, com A e B ditos extremidades deste segmento.*

Por consenso, usa-se letra maiúscula para denotar um ponto. Vale ressaltar também que, dados dois pontos A e B no plano, é definido a distância $d(A, B)$ de tais pontos como o comprimento \overline{AB} do segmento AB.

Definição 2.2. *Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C, tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de semirreta de origem A contendo o ponto B, e é representado por S_{AB} . [3]*

O ponto A é denominado origem da semirreta S_{AB} .

Axioma 1. *Uma reta r no plano o divide em exatamente duas regiões (semiplanos).*

Definição 2.3. *Dados um número real $r \geq 0$ e um ponto A pertencente ao plano α , o círculo Ω de centro A e raio r é o conjunto de todos os pontos B de α , tal que $\overline{AB} = r$.*

Em geral, denotamos círculos por letras gregas maiúsculas. Assim, $\Omega (A, r)$ simboliza um círculo ômega de centro A e raio r . Além disso, a corda de Ω é qualquer segmento definido por dois pontos quaisquer do círculo, em especial o diâmetro é uma corda que passa por A . Logo, todo diâmetro divide um círculo em duas partes iguais, chamadas de semicírculos.

Definição 2.4. *A região formada por duas semirretas com origem comum é denominada ângulo.*

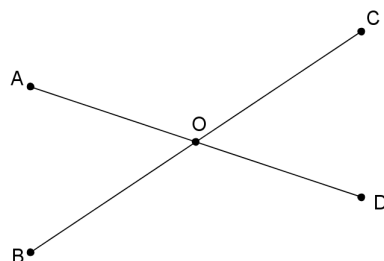
As semirretas são chamadas de lados dos ângulos e a origem em comum, de vértice. Quando duas semirretas distintas sobre uma mesma reta definem um ângulo, este é chamado de ângulo raso e as semirretas são opostas. A nomenclatura do ângulo pode variar também de acordo com sua medida, para a qual usamos mais frequentemente como unidade o grau e radiano. Escrevemos por exemplo, $\widehat{AOB} = \hat{O} = \theta$ para expressar que a medida do ângulo $\angle AOB$ é θ .

Neste trabalho, optamos em trabalhar apenas com medidas de ângulos expressos em grau. Desse modo, no que diz respeito a um ângulo raso $\angle AOB$, sem aprofundamento na justificativa, temos $\widehat{AOB} = 180^\circ$. Por outro lado, se $0^\circ < \widehat{AOB} < 90^\circ$, $\widehat{AOB} = 90^\circ$ ou $90^\circ < \widehat{AOB} < 180^\circ$ tem-se respectivamente ângulo agudo, reto ou obtuso. Esses nomes são importantes tendo em vista a frequência que os ângulos são utilizados, por isso é relevante destacarmos também que, dois ângulos são ditos complementares quando a soma de suas medidas resulta em noventa graus, e são ditos suplementares quando esta operação resulta em cento e oitenta graus.

Definição 2.5. *Se dois ângulos \hat{A} e \hat{B} com mesma origem, têm seus lados formados por semirretas opostas, \hat{A} e \hat{B} são ditos opostos pelo vértice (OPV).*

Proposição 2.1. *Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.*

Figura 1 – Ângulos (OPV).



Demonstração. Como ilustramos na figura 1, $\angle AOB$ e $\angle COD$ são OPV. Pela reta \overleftrightarrow{AD} , temos os ângulos suplementares $\angle AOB$ e $\angle BOD$. Analogamente, por \overleftrightarrow{BC} temos $\angle BOD$ e $\angle COD$. Assim, $\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{BOD} = \widehat{COD}$. ■

Essas definições já nos fornecem uma boa fonte de propriedades que nos possibilitam apresentar o conceito de polígono. Inicialmente, destacamos que dados três pontos distintos A , B e C no plano, há duas posições relativas entre eles, ou C pertence a reta \overleftrightarrow{AB} , portanto diremos que esses pontos são colineares, ou ao contrário diremos que os pontos são não colineares. Refletindo sobre a situação em que os pontos são não colineares, chamamos de triângulo a região do plano limitada pelos segmentos definidos por tais pontos. Nesse caso, os segmentos são chamados de lados do triângulo e os pontos que o definem, de vértices. Este é o polígono de formação mais simples, porém há variadas classificações para tal, mediante as características de seus lados e ângulos. Neste último item, são definidos como ângulos internos os ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$.

Definição 2.6. *Um triângulo é denominado:*

1. *Equilátero, se os três lados têm mesmo comprimento.*
2. *Isósceles, se ao menos dois dentre os lados do triângulo forem iguais.*
3. *Escaleno, se os lados do triângulo são dois a dois distintos em comprimento.*

Definição 2.7. *Sejam $n \geq 3$ um natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano. Dizemos que A_1, A_2, \dots, A_n é um polígono (convexo) se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j para $1 \leq j \leq n$, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano. [10]*

Tabela 1 – Designações de alguns polígonos de acordo o número de lados.

N ^o de lados	Nome do polígono convexo
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Nonágono
10	Decágono

Os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são denominados vértices do polígono e os segmentos definidos por pontos consecutivos, $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, são os lados do polígono, bem como a soma dos comprimentos dos lados do polígono é o seu perímetro. Outros elementos importantes em um polígono são suas diagonais, ângulos internos e externos. Quanto a diagonal, entende-se como todo segmento A_iA_j que não são lados do polígono, já os ângulos internos são formados por vértices consecutivos como $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ com $1 \leq i \leq n$, assim, para um polígono de n lados há precisamente n ângulos internos. Para cada ângulo interno, há dois ângulos externos (ângulos suplementares) identificados pelo prolongamento dos lados do polígono, por exemplo os lados $A_{i-1}A_i$ e A_iA_{i+1} .

Definição 2.8. *Se a medida entre dois segmentos ou entre dois ângulos for a mesma, diremos que esses elementos são congruentes.*

A partir dessa definição, o conceito de igualdade entre números é útil para que possamos entender também sobre igualdade de segmentos e ângulos, denotando essa equivalência como congruência. Este conceito é ainda mais amplo. Em triângulos, diremos que dois deles são congruentes quando for possível mover um deles no espaço sem deformá-lo até que coincidam todos seus pontos. Assim, dois triângulos são congruentes sempre que for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que seus lados e ângulos internos sejam congruentes. Nesse sentido, destacamos três casos mais usuais de congruência entre triângulos.

Casos de congruência entre triângulos de acordo com Neto [10]:

Axioma 2 (LAL). *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

Axioma 3 (ALA). *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

Axioma 4 (LLL). *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

A congruência entre triângulos é um caso de semelhança. A semelhança entre triângulos existirá sempre que houver uma correspondência biunívoca entre vértices dos triângulos, de forma que em vértices correspondentes os ângulos sejam iguais e a razão entre o comprimento dos lados correspondentes resultem em uma mesma constante. Assim, se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes, de modo que a correspondência entre vértices seja $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$, teremos $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$. Bem como,

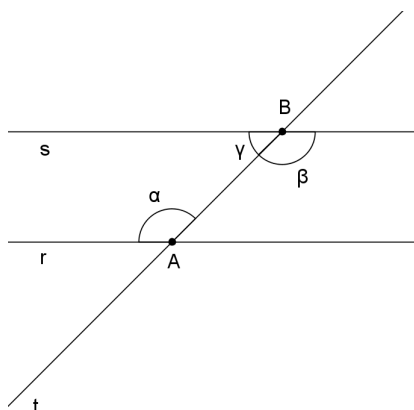
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = k. \quad (2.1)$$

O número real k é denominado razão de semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$. Em particular se os triângulos são congruentes, a razão de semelhança é 1.

Posições relativas entre retas no plano:

Dadas duas retas r e s em um mesmo plano, elas podem não ter pontos em comum, neste caso são ditas paralelas. Caso contrário, podem ter um ou infinitos pontos em comum, para este último, dizemos que r e s são coincidentes, mas se elas têm apenas um ponto em comum serão concorrentes e, em especial se neste ponto formam um ângulo de 90° , são ditas perpendiculares.

Figura 2 – Ângulos internos: alternos e colaterais.



Um resultado importante da Geometria Euclidiana no que diz respeito a posições relativas entre retas é o que enunciaremos a seguir.

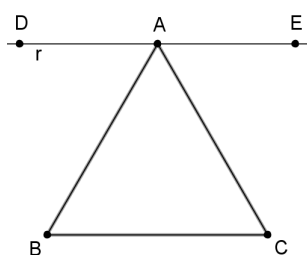
Como apresentamos na figura 2, considere as retas r , s e t em um mesmo plano, com t intersectando r e s , temos

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ. \quad (2.2)$$

α e β são ditos alternos internos, ao passo que α e γ colaterais internos. Esse resultado nos ajuda a provar a seguinte proposição.

Proposição 2.2. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .*

Figura 3 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Demonstração. Considere a ilustração do triângulo $\triangle ABC$, em que a reta r passado por A é paralela a reta \overleftrightarrow{BC} . Note que $\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$ e $\widehat{CAE} = \widehat{ACB}$, pois são alternos internos. Logo,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{BAD} + \widehat{CAE} = 180^\circ$$

■

Um resultado decorrente dessa proposição, consiste em que qualquer triângulo, no máximo um ângulo poderá ser maior que 90° . Desse modo, um triângulo é dito acutângulo

se todos seus ângulos internos forem agudos (menor que 90°), retângulo se tiver um ângulo reto (igual a 90°) e obtusângulo se tiver um ângulo obtuso (maior que 90°). Para o triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é o maior do triângulo e denominado hipotenusa, ao passo que os outros dois são os catetos.

Observação. A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $180^\circ \cdot (n - 2)$. Pois podemos dividir este polígono em $n - 2$ triângulos.

Definição 2.9. Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

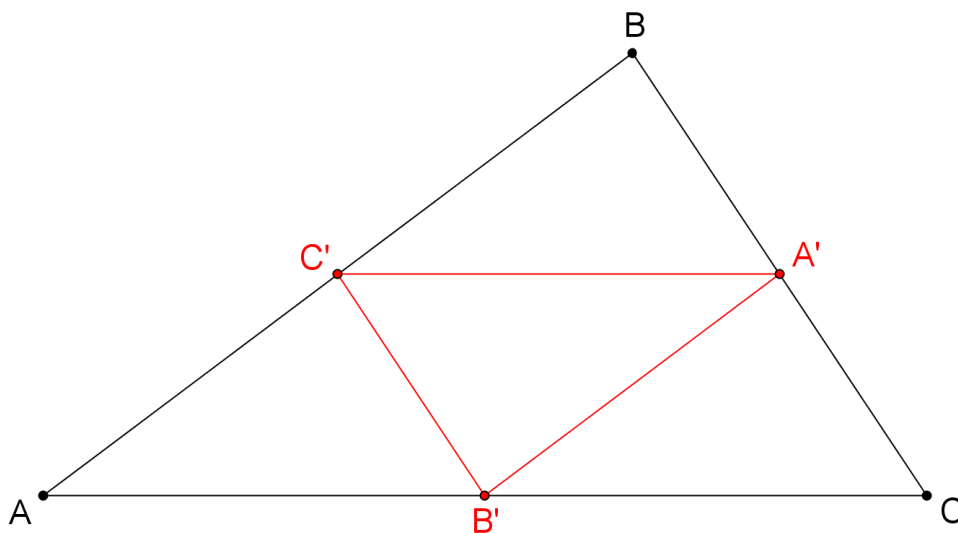
Em virtude de o paralelogramo ter lados opostos paralelos, possui conseqüentemente algumas propriedades. Seus lados opostos são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida. Os seus ângulos internos e adjacentes são suplementares, ou seja, somam 180° . Possui duas diagonais de mesmo comprimento que se cruzam em seus pontos médios. Por fim, seus ângulos internos e opostos são congruentes.

Agora, como define Barbosa [3], vem:

Definição 2.10. Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contém B e C . O segmento AD chama-se mediana do triângulo relativamente ao lado BC , se D for o ponto médio de BC . O segmento AD chama-se bissetriz do ângulo \hat{A} se a semirreta S_{AD} divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos congruentes, isto é, se $C\hat{A}D = D\hat{A}B$. O segmento AD chama-se altura do triângulo relativamente ao lado BC , se AD for perpendicular à reta que contém B e C .

Outra definição relevante relacionada ao triângulo, diz respeito a base média. Definida como um segmento que une dois pontos médios de lados de um triângulo. Logo, qualquer triângulo tem três bases médias e estas são os lados do triângulo medial do triângulo inicial.

Figura 4 – Triângulo medial $A'B'C'$.



Pontos notáveis de um triângulo:

Da definição 2.10 apresentamos as definições de altura, mediana e bissetriz. Pelo modo que foram definidas, por cada vértice do triângulo são construídos esses três elementos. Assim, o triângulo possui três segmentos para cada tipo de elemento. Desse modo, é natural que exista interseções entre os elementos do mesmo tipo. Essas interseções são únicas (deixaremos ao cargo do leitor a verificação dessa unicidade), isto é, todas as alturas do triângulo encontram-se em um único ponto, denominado ortocentro. Ao passo que os encontros das medianas e bissetrizes são, respectivamente, baricentro e incentro. Outro ponto notável do triângulo é o circuncentro, definido pelo encontro das mediatrizes, que por sua vez são retas perpendiculares aos lados e que passam pelos pontos médios dos mesmos. A partir do circuncentro, podemos definir um único círculo passando pelos três vértices do triângulo, assim diremos que o triângulo é inscrito. Podemos também criar um único círculo com centro no incentro de um triângulo e tangenciando os lados do mesmo, neste caso diremos que o triângulo é circunscrito. Em particular, se em um círculo inscreve um triângulo e um lado deste polígono é também diâmetro, o triângulo é retângulo. Este resultado é muito útil em elaboração de repostas para problemas com triângulos inscritíveis.

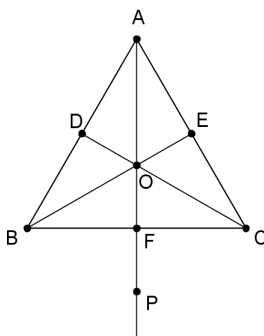
Os círculos citados anteriormente são sempre admitidos para qualquer triângulo, entretanto não ocorre o mesmo para qualquer polígono convexo. Quando for possível definir os círculos em um determinado polígono, também podemos dizer que o tal é inscrito ou circunscrito de acordo com o círculo criado.

Entre esses pontos especiais, o baricentro apresenta uma propriedade muito útil em diversos problemas relacionados aos triângulos.

Proposição 2.3. *Em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto, o baricentro do triângulo. Ademais, o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2 : 1. [10]*

Demonstração. Considere um triângulo $\triangle ABC$ e os pontos médios D e E dos segmentos AB e AC , respectivamente. O ponto O é a interseção dos segmentos CD e BE . Sobre a semirreta S_{AO} tomaremos o ponto P , de modo que $\overline{AO} = \overline{OP}$.

Figura 5 – Propriedade do baricentro.



Como os pontos D e O são pontos médios respectivamente de AB e AP, DO é base média de $\triangle ABP$. Logo, $\overline{DO} = \frac{\overline{BP}}{2}$ e $DC \parallel BP$. Analogamente, $\overline{EO} = \frac{\overline{CP}}{2}$ e $EB \parallel CP$. Desse modo, o quadrilátero BOCP é um paralelogramo. Portanto, $\overline{BP} = \overline{OC}$ e $\overline{BO} = \overline{CP}$, o que implica que $\overline{DO} = \frac{\overline{OC}}{2}$ e $\overline{EO} = \frac{\overline{BO}}{2}$. Por fim, considere o ponto F interseção das diagonais do paralelogramo BOCP. Assim, temos $\overline{PF} = \overline{FO}$, o que implica que $\overline{FO} = \frac{\overline{AO}}{2}$. ■

2.2 Área

Uma região triangular é a união de todos os pontos que definem os lados do triângulo e seus pontos interiores. Como pontos interiores, entende-se como o conjunto de pontos, tal que, para todo ponto dito interior este estará entre as extremidades de um segmento definido pelos lados – também chamados de arestas - do triângulo. Já uma região poligonal será a união de um número finito de regiões triangulares, de modo que a interseção entre os triângulos seja apenas um segmento ou um ponto.

A área de uma região no plano, é uma associação de um número real à esta, de modo que seja quantificado o espaço por ela ocupado. O cálculo de áreas de regiões no plano em indescritíveis situações exige conceitos diz respeito ao cálculo diferencial e integral. Por este motivo, delimitaremos esta breve abordagem do conceito de área para regiões poligonais. Para tanto, construiremos nossa abordagem deste conceito por meio da relação de conjuntos de número reais \mathbb{R} e o conjunto P de todas as regiões poligonais. Nesse sentido, os seguintes axiomas formalizam a proporcionam condições para o desenvolvimento do conceito.

Axioma 5. *f é uma função $P \rightarrow \mathbb{R}_+$, onde P é o conjunto de todas as regiões poligonais e \mathbb{R}_+ são todos os reais não negativos, que indicam o valor numérico associado à região poligonal.*

Axioma 6. $\forall \rho \in P, f(\rho) > 0$.

Axioma 7. *Se duas regiões triangulares são congruentes, então elas têm a mesma área.*

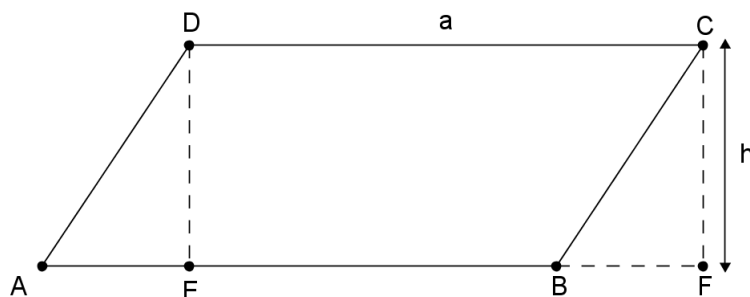
Axioma 8. *Se a interseção de ρ_1 e ρ_2 não possuem pontos interiores comuns, então $f(\rho_1 \cup \rho_2) = f(\rho_1) + f(\rho_2)$.*

Axioma 9. *A área de uma região retangular é o produto do comprimento de sua base pela altura relativa à esta.*

Esses axiomas são suficientes para determinar a área de regiões poligonais simples. E para essas regiões é importante ressaltar que, ao expressarmos por exemplo que “a área de um triângulo é 1”, estamos interessados em dizer que a área de uma região poligonal limitada por um triângulo é 1. Desse modo, declaramos as seguintes proposições.

Proposição 2.4. *A área de um paralelogramo é o produto de sua base pela altura correspondente.*

Figura 6 – Área do paralelogramo.

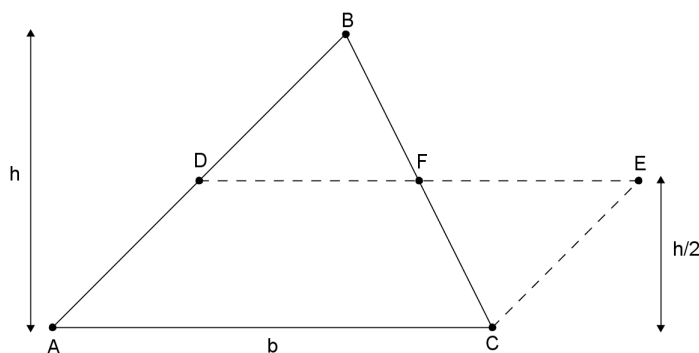


Demonstração. Considere o paralelogramo $ABCD$, com $AD \parallel BC$. Sejam E e F os pés das perpendiculares à reta \overleftrightarrow{AB} , baixadas respectivamente de D e C . É fácil ver que $\triangle ADE \cong \triangle BCF$, pelo caso LAL, porque $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\angle DAE = \angle CBF$ e $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{DC} = \overline{EB} + \overline{BF} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{BF}$. Portanto, $A(ABCD) = A(ADE) + A(BCDE) = A(BCF) + A(BCDE) = A(CDEF)$.

Como $CDEF$ é um retângulo de base a e altura h , temos $A(ABCD) = a \cdot h$. ■

Proposição 2.5. *A área de um triângulo é metade do produto de sua base pela altura correspondente a ela.*

Figura 7 – Área do triângulo.



Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$. Seja D e F pontos médios de AB e BC respectivamente. Prolongaremos segmento DF de modo a formar o paralelogramo $ADEC$. Assim, temos $\overline{EC} = \overline{AD} = \overline{BD}$ e $\overline{BF} = \overline{CF}$. Além disso, $\angle FBD$ e $\angle FCE$ são alternos internos pois $CE \parallel AB$. Portanto, pelo caso LAL os triângulos $\triangle BDF \cong \triangle CEF$. Logo,

$$A(ABC) = A(ADEC) = \frac{b \cdot h}{2}. \quad (2.3)$$

■

2.2.1 Área de Polígonos regulares

A definição de polígono nos permite a criação de uma infinidade de regiões poligonais, portanto não haverá uma regra geral que associe os lados de um polígono com sua área. Porém, se delimitarmos esses polígonos apenas aqueles que são regulares, podemos formalizar uma estratégia para o cálculo de sua área. Esta estratégia fica mais clara com o entendimento das razões trigonométricas, por isso, a apresentaremos no capítulo 4.

Para a área de alguns outros polígonos regulares, apresentamos a tabela 2.

No estudo do conceito de área, é de extrema importância ressaltarmos sobre parâmetros de quantificação. Pois, dado que a análise de área é uma maneira de quantificar o espaço do plano ocupado por uma região, devemos também estabelecer referências para expressar com clareza uma determinada análise, caso o contrário seria recorrente erros graves, gerando conclusões não condizentes com a realidade. Por exemplo, se não tivéssemos uma padronização de grandeza, poderíamos dizer em um mesmo texto algo como “a área do território brasileiro é 100000”, assim como poderíamos ter “a área de um pedaço de papel sendo 100000”. Obviamente nenhuma folha de papel tem área equivalente à área do território brasileiro, mas sem uma escala, há liberdade para absurdos como este. Desse modo, sempre que tratarmos sobre área ou outra grandeza, é essencial deixarmos explícito minimamente a unidade de parâmetro (cm^2 , m^2 ou km^2 por exemplo). Ou na ausência da unidade, devemos esclarecer com o que estamos trabalhando, no caso da área temos unidades de área (u.a).

Tabela 2 – Área de alguns polígonos regulares de acordo o comprimento do lado.

Nome do polígono convexo	Área do polígono de lado a
Triângulo	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Quadrilátero	a^2
Hexágono	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

2.3 Volume

Até aqui, na exposição dos conteúdos realizada neste capítulo, trouxemos conceitos da geometria até sua forma bidimensional. A partir de agora, finalizaremos esta seção tratando da geometria em sua forma tridimensional. O nosso foco consiste em revisar o conceito de volume de alguns sólidos geométricos mais conhecidos, como prismas e pirâmides, tendo em vista que esses dois sólidos serão fundamentais no desenvolvimento deste trabalho. Vale ressaltar que, assim como destacamos no início do capítulo, a exposição do conteúdo não segue uma

abordagem rigorosa das informações, mas procuramos deixar claro na mente do leitor conceitos básicos e que serão de fundamental importância na leitura das partes seguintes do trabalho.

Diz respeito ao volume, é uma associação de um número real à uma região ocupada por um sólido no espaço. E por sólido, tomaremos como base a seguinte definição.

Definição 2.11. *Sólido.*

1. Um sólido é um conjunto S de pontos do espaço, tal que S é limitado, fechado e com interior não vazio;
2. Para quais quer dois pontos A e $B \in S$, existe uma poligonal contida em S que liga A a B .

Mais precisamente, este trabalho é direcionado para o estudo de sólidos que são poliedros convexos. Desse modo, é necessário que saibamos o que é um poliedro convexo.

Definição 2.12. *Um poliedro convexo é uma reunião finita de 4 ou mais polígonos que satisfazem as seguintes condições:*

1. Dois polígonos não estão no mesmo plano;
2. Cada lado de um polígono é comum a somente um outro polígono;
3. O plano que contém um polígono deixa os demais em um mesmo semiespaço.

Assim, cada polígono determina um semiespaço e a interseção de todos os semiespaços gerados é chamada de poliedro convexo. Exemplos mais comuns desse tipo de sólido são os prismas e pirâmides.

Na composição dos poliedros, destacamos três elementos mais evidentes. Os vértices, pontos de interseção entre três ou mais polígonos, as arestas, lados comuns a dois polígonos e por fim as faces, que são os próprios polígonos.

A exemplo da área, o volume também necessita de uma padronização para que possamos mensurar o volume de algum sólido de modo que não exista confusão na forma que expressamos a informação. Assim, ao tratarmos de volume usamos como unidade padrão um cubo de aresta 1, que terá uma unidade de volume. Mas vale ressaltar que para cada unidade de comprimento adotada em uma determinada situação, temos uma unidade de volume associada. Assim, se estamos trabalhando com unidades de cm ou m, por exemplo, devemos estar atentos à associação com as unidades de volume cm^3 e m^3 .

O volume pode ser abordado também com embasamento em funções, $S \mapsto V(S)$, porque podemos associar todo sólido mensurável S a um real $V(S)$, dito volume de S , tal que:

1. Se S é um cubo de aresta 1, então $V(S) = 1$.

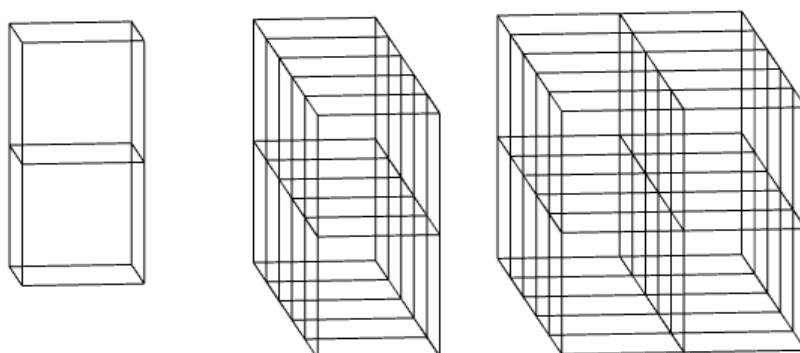
2. Se S_1 e S_2 são sólidos disjuntos e mensuráveis, tais que $S_1 \cup S_2$ é mensurável, então $V(S_1 + S_2) = V(S_1) + V(S_2)$.
3. Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis, tais que $S_1 \subset S_2$, então $V(S_1) \leq V(S_2)$.

Esses postulados nos oferecem uma base para o desenvolvimento de fórmulas para uma série de sólidos geométricos. Portanto, vamos obter generalizações para sólidos simples, partindo do paralelepípedo retângulo.

O paralelepípedo é um sólido formado por seis retângulos. Ele fica bem definido com três medidas, largura (a), comprimento (b) e altura (c). Em especial quando a composição das faces são duas a duas ortogonais, temos um paralelepípedo retângulo. Neste caso, seu volume é o produto de sua base pela a altura correspondente¹, ou seja, $V(S) = (a, b, c) = (a \cdot b) \cdot c$. Isso mostra que o volume de um paralelepípedo retângulo é proporcional a cada uma de suas dimensões.

Portanto, um cubo unitário é um paralelepípedo retângulo com dimensões unitárias e de volume $V(1, 1, 1) = 1$. A partir deste sólido, podemos verificar que $V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$, pelo seguinte argumento. Se pusermos um número m de cubos unitários justapostos, teremos um paralelepípedo P_1 de volume $m \cdot V(1, 1, 1) = m \cdot 1 = V(m, 1, 1)$. Se pusermos justapostos n paralelepípedos como P_1 , independente da configuração que escolhermos (vamos adotar o paralelepípedo de base $m \times n$), teremos um sólido p_2 de volume $n \cdot V(m, 1, 1) = n \cdot m \cdot 1 = V(m, n, 1)$. Por fim, se pusermos justapostos h sólidos como p_2 , poderemos obter um novo paralelepípedo p_3 de volume $h \cdot V(m, n, 1) = h \cdot n \cdot m \cdot 1 = V(m, n, h)$.

Figura 8 – Composição de um paralelepípedo a partir de um cubo unitário.



Esta apresentação intuitiva do volume do paralelepípedo retângulo é nossa base para o desenvolvimento das fórmulas de volume de duas classes importantes de sólidos, os prismas e as pirâmides. Para tanto, é importante recordarmos sobre o Princípio de Cavalieri.

¹ Demonstração no anexo A.

2.3.1 Princípio de Cavalieri

Axioma 10. *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então, esses sólidos têm o mesmo volume [8].*

É possível demonstrar a validade do Princípio de Cavalieri com uma abordagem além da geometria euclidiana, desse modo aceitaremos a afirmação acima como postulado, para que possamos manter o tipo de conteúdo do trabalho.

O declarado postulado consiste em uma ferramenta poderosíssima para o desenvolvimento de fórmulas e cálculo de volumes de diversos sólidos geométricos. Desse modo, algo que poderia ser trabalhoso torna-se de certo modo trivial.

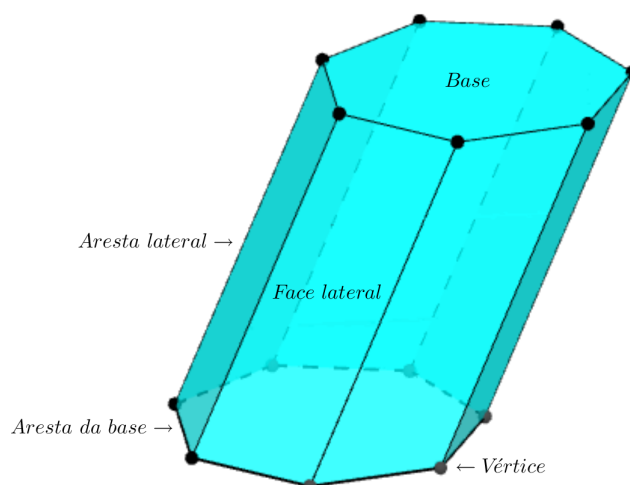
2.3.2 Prismas

Definição 2.13. *Considere uma região poligonal convexa P contida em um plano α e uma reta r não contida e nem paralela a α . É definido prisma ilimitado convexo a reunião das retas paralelas a r que passam por P .*

Definição 2.14. *Um prisma limitado convexo é uma região compreendida entre duas seções paralelas e distintas de um prisma ilimitado convexo .*

Observação. *O paralelepípedo é um tipo de prisma.*

Figura 9 – Prisma.



O prisma acima é composto pelos seguintes elementos:

- Bases (sempre polígonos congruentes);
- Vértices;

- Arestas laterais e arestas da base;
- Faces laterais (paralelogramos);
- Altura, é a distância entre as duas bases.

Os prismas são classificados em prismas retos (quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases), prismas oblíquos (quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases) e prismas regulares (quando as bases são polígonos regulares). Além disso, a natureza de um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal e etc., conforme os polígonos que definem as bases.

Ao tratarmos do volume do prisma, estaremos sempre referindo ao prisma limitado convexo, pois não há sentido em tratar de volume para o prisma ilimitado na perspectiva da geometria euclidiana.

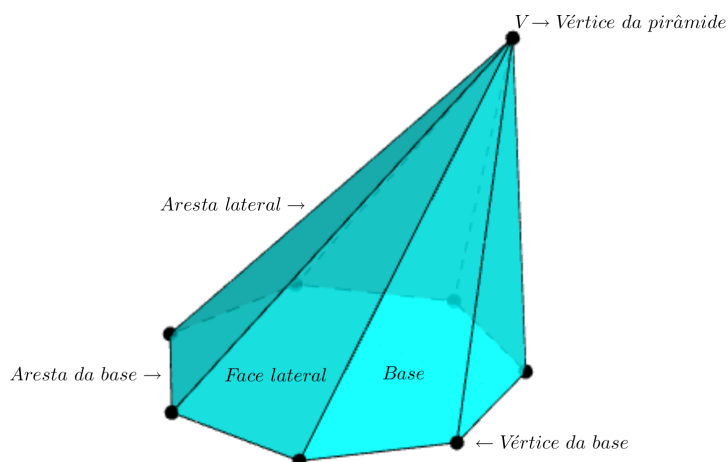
Pelo Princípio de Cavalieri, o volume de um prisma é facilmente determinado. Para tanto, considere sobre um plano α um prisma P de altura h e base de área A . Sobre o mesmo plano, tomaremos um paralelepípedo de altura h com base de área A também.

Agora, se seccionarmos estes dois sólidos por um plano β , teremos em P uma seção A_1 de área A pois A_1 é congruente a base. De modo análogo, no paralelepípedo teremos uma seção A_2 de área A , visto que o paralelepípedo é também um prisma. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri o volume de um prisma também será $V(P) = A \cdot h$.

2.3.3 Pirâmides

Definição 2.15. *Considere um polígono convexo P contido em um plano α e um ponto V fora de α . Denomina-se pirâmide limitada e convexa ou simplesmente pirâmide, os segmentos com extremidades em V e nos pontos de P .*

Figura 10 – Pirâmide.



Esta pirâmide apresenta os seguintes elementos:

- Base, o polígono P ;
- O vértice V , chamado vértice da pirâmide, e os vértices da base;
- Arestas laterais e arestas da base;
- Faces laterais (triângulos);
- Altura, distância h entre V e P .

Assim como os prismas, as pirâmides têm sua natureza relacionada com o formato da sua base (o tetraedro, por exemplo, é uma pirâmide de base triangular). Se esta base for um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice da pirâmide coincide com o centro da base, a pirâmide é dita regular. Além disso, é comum falarmos sobre pirâmide reta quando a projeção ortogonal do vértice da pirâmide coincide com o centro da base, no caso oposto, a pirâmide é dita oblíqua.

Para que possamos determinar uma regra geral para o volume das pirâmides, precisamos apresentar sutilmente algumas constatações.

Quando seccionamos uma pirâmide triangular por um plano, de modo que este seja paralelo ao plano da base, definimos uma nova pirâmide, tal que entre essas duas pirâmides:

- A razão entre as arestas laterais e as alturas são iguais;
- As bases são triângulos semelhantes;
- A razão entre as áreas das bases é o quadrado da razão das alturas das pirâmides.

Estas constatações podem ser facilmente verificadas observando semelhanças entre triângulos consequências do paralelismo entre os planos citados.

Essas constatações nos auxiliam a demonstrar as seguintes proposições.

Proposição 2.6. *Se duas pirâmides triangulares com alturas de mesmo comprimento tem bases de áreas iguais, então seus volumes também serão iguais.*

Demonstração. Considere os tetraedros T_1 e T_2 , por hipótese com respectivamente alturas $h_1 = h_2 = h$, bases b_1 e b_2 , tal que $A(b_1) = A(b_2)$.

Suponha b_1 e b_2 sobre um plano α , de modo que os vértices das pirâmides estejam em um mesmo semiespaço entre os que α define.

Agora, se seccionarmos T_1 e T_2 por um plano $\beta \parallel \alpha$, teremos as seções b'_1 e b'_2 distando h' do vértice das pirâmides correspondentes, de forma que

$$\frac{b'_1}{b_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{b'_2}{b_2}. \quad (2.4)$$

Por hipótese $b_1 = b_2$, logo $b'_1 = b'_2$ para todo β . Portanto, pelo princípio de Cavalieri $V(T_1) = V(T_2)$. ■

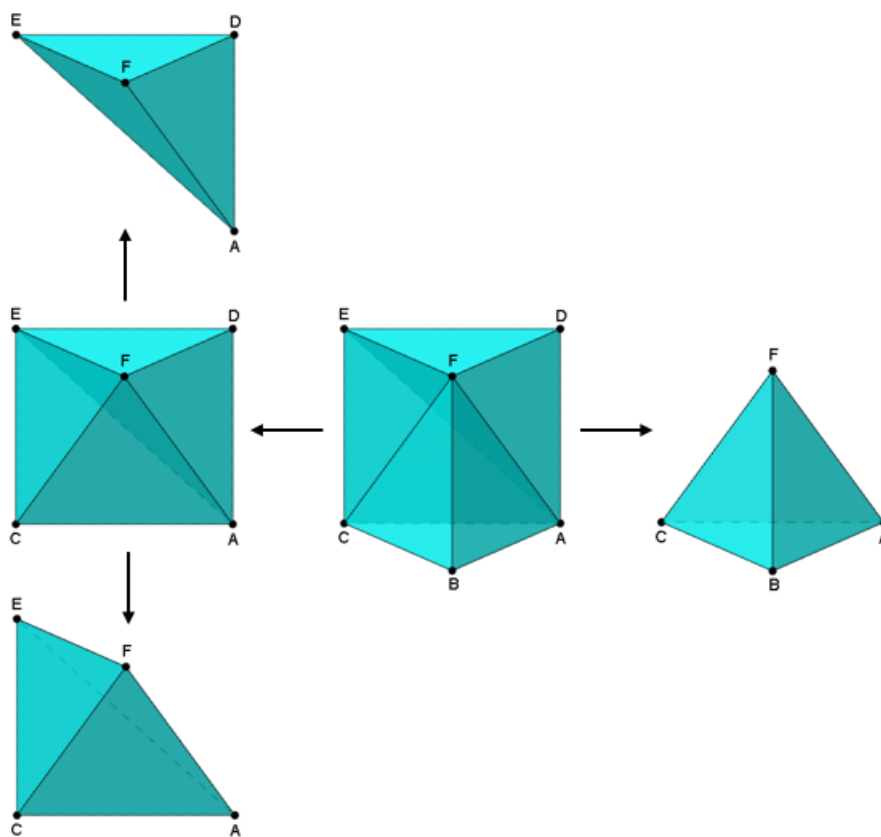
Proposição 2.7. *Todo prisma triangular é a união de três tetraedros de volumes iguais.*

Demonstração. Considere os cortes efetuados no prisma ABCDEF, como sugere a figura 11.

Note que as pirâmides ABCF e ADEF têm volumes iguais, pois ciente das características dos prismas percebemos que as pirâmides têm mesma altura relativa as bases congruentes, isto é, $\triangle ABC \equiv \triangle EDF$. Portanto, pela proposição anterior, $V(ABCF) = V(ADEF)$.

De modo análogo, chegamos a mesma conclusão para ABCF e ACEF. Porque CF é diagonal do paralelogramo BCEF, assim $\triangle CEF \equiv \triangle BCF$ e a distância do segmento CF ao ponto A é única. Ou seja, $V(ABCF) = V(ACEF)$. Portanto, por transitividade $V(ADEF) = V(ACEF)$. Logo, $V(ABCDEF) = V(ABCF) + V(ADEF) + V(ACEF) = 3 \cdot V(ABCF)$.

Figura 11 – Decomposição do prisma em pirâmides.



Proposição 2.8. *O volume de um tetraedro é a terça parte do produto entre a área de sua base pela altura.*

Demonstração. Na proposição anterior, comprovamos que todo prisma é a união de três tetraedros de volumes equivalentes. Assim, sejam comuns entre o prisma e a pirâmide a base b e altura h , temos para qualquer tetraedro $ABCD$.

$$V(ABCDEF) = 3 \cdot V(ABCD) \Rightarrow V(ABCD) = \frac{A(b) \cdot h}{3}. \quad (2.5)$$

■

Essa conclusão é também válida para uma pirâmide P qualquer. Basta notar que para uma pirâmide de n lados, podemos definir $n - 2$ tetraedros de base b_i , $1 \leq i \leq n - 2$, com um vértice comuns a todos. Assim,

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{A(b_1) \cdot h}{3} + \frac{A(b_2) \cdot h}{3} + \dots + \frac{A(b_{n-2}) \cdot h}{3} \\ &= \frac{[A(b_1) + A(b_2) + \dots + A(b_{n-2})] \cdot h}{3} = \frac{A(b) \cdot h}{3}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A partir dessas duas classes de sólidos, podemos encontrar o volume de uma grande variedade de outros sólidos.

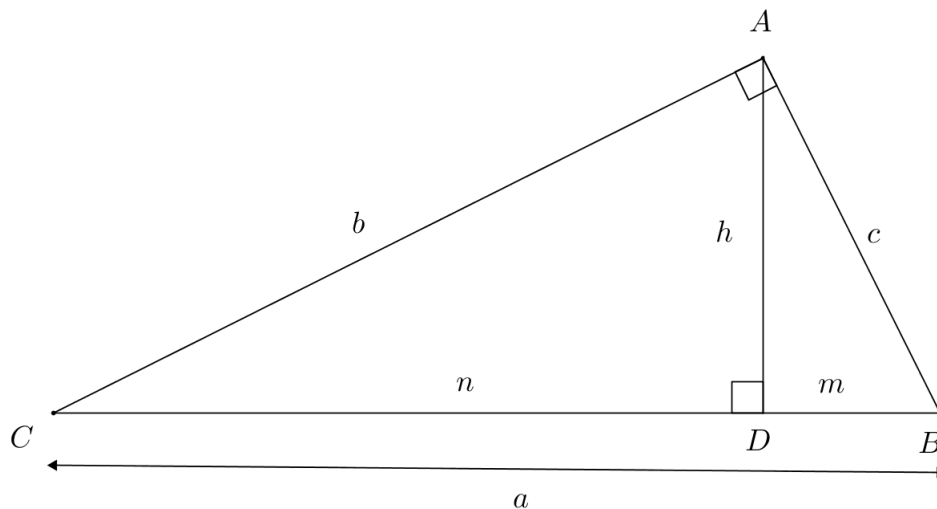
3 Teoremas

3.1 Teorema de Pitágoras

Teorema 3.1.1. *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos [3].*

Se a é a medida da hipotenusa e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado do teorema de Pitágoras equivale a afirmar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 12 – Teorema de Pitágoras.



Demonstração. Observe a semelhança entre os triângulos $\triangle ADB$, $\triangle CDA$ e $\triangle ABC$. Da semelhança entre $\triangle ADB$ e $\triangle ABC$, conclui-se que $\frac{m}{c} = \frac{c}{a}$.

Da semelhança de $\triangle CDA$ e $\triangle ABC$, conclui-se que $\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$. Logo, $am = c^2$ e $an = b^2$. Portanto, $a(m + n) = c^2 + b^2$. Como $m + n = a$, então

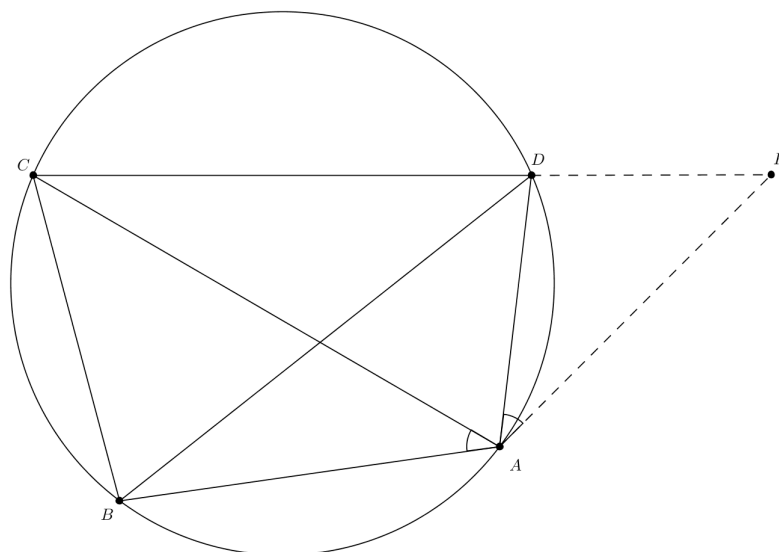
$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (3.1)$$

■

3.2 Teorema de Ptolomeu

Dado um quadrilátero inscrito a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais.

Figura 13 – Teorema de Ptolomeu.



Demonstração. Pela semirreta \overrightarrow{CD} , tomaremos o ponto P de modo que $\angle BAC = \angle DAP$. Se o quadrilátero ABCD é inscritível, então $\angle ABC = \angle ADP$, pois os ângulos serão suplementares, assim $\triangle ABC \sim \triangle ADP$. Logo,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{DP} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}}. \quad (3.2)$$

Como $\angle BAD = \angle CAP$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$, temos $\triangle ABD \sim \triangle ACP$. Assim,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CP} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AB}}. \quad (3.3)$$

Mas

$$\overline{CP} = \overline{CD} + \overline{DP}. \quad (3.4)$$

Desse modo,

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AB}} = \overline{CD} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}. \quad (3.5)$$

■

3.3 Relação de Euler

Teorema 4.3 *Em todo poliedro limitado convexo fechado, com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação $F + V - A = 2$.*

Demonstração. Iremos demonstrar por indução matemática finita, esta importante relação entre elementos de um poliedro. Para tanto, iremos inicialmente verificar que dada uma

superfície poliédrica convexa aberta (indicada pelo índice α), com F_α faces, V_α vértices e A_α arestas, vale que $F_\alpha + V_\alpha - A_\alpha = 1$.

Passo base: aplicaremos a indução sobre o número de faces. Assim, se $F_\alpha = 1$, teremos apenas um polígono limitado convexo de n lados, com $V_\alpha = A_\alpha = n$. Logo, $F_\alpha + V_\alpha - A_\alpha = 1 + n - n = 1$. Portanto, a relação é válida para $F_\alpha = 1$.

Hipótese de indução: supondo que a relação seja válida para um polígono convexo limitado aberto, com F_1 faces, mostraremos que a mesma vale para um polígono de $F_\alpha = F_1 + 1$ faces.

Pela hipótese, $F_1 + V_1 - A_1 = 1$. Adicionando a este polígono uma face de l lados, dentre estes, m coincidem com os lados existentes do polígono. Assim,

- $F_\alpha = F_1 + 1$;
- $V_\alpha = V_1 + l - (m + 1)$;
- $A_\alpha = A_1 + l - m$.

Pela hipótese,

$$\begin{aligned} F_\alpha + V_\alpha - A_\alpha &= F_1 + 1 + V_1 + l - (m + 1) - (A_1 + l - m) \\ &= F_1 + 1 + V_1 + l - m - 1 - A_1 - l + m = F_1 + V_1 - A_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Isso implica que, a relação segue inalterada mesmo adicionando uma face, ou seja, $F_1 + V_1 - A_1 = 1$.

Agora, para um poliedro limitado convexo fechado, de F faces, V vértices e A arestas, podemos retirar uma das faces e assim, teremos um polígono aberto em que

- $F_\alpha = F - 1$;
- $V_\alpha = V$;
- $A_\alpha = A$.

Portanto,

$$F_\alpha + V_\alpha - A_\alpha = 1 \Rightarrow F - 1 + V - A = 1 \Rightarrow F + V - A = 2. \quad (3.7)$$



4 Elementos básicos da Trigonometria

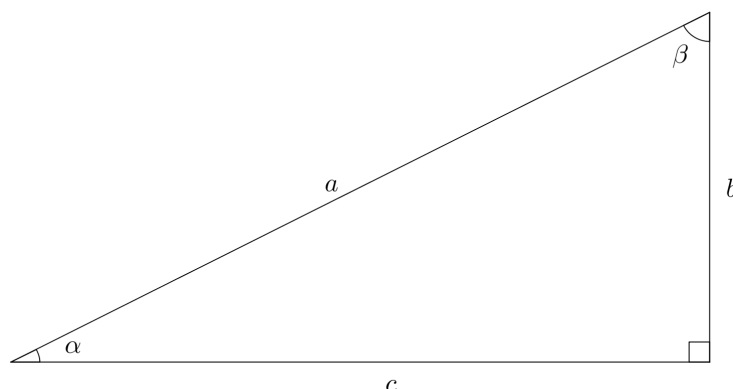
Creemos ser muito importante relembrarmos um pouco sobre conceitos trigonométricos, pela proposta deste trabalho. Nesse sentido, neste capítulo, trouxemos de forma sucinta alguns elementos básicos da trigonometria. Iremos recordar um pouco deste conceito, por meio das razões entre os lados de um triângulo retângulo.

Aqui abdicaremos de uma revisão extensa da trigonometria, não abordando o conceito de trigonometria na circunferência e função. Objetivando detalhar partes mais essenciais ao trabalho.

4.1 Conceitos elementares

Considere o triângulo retângulo a seguir:

Figura 14 – Triângulo retângulo.



Definição 4.1. Dado um triângulo retângulo como da figura 14, definimos as seguintes relações.

- **Seno:** o seno de α , é a razão entre o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa do triângulo. Notação: $\text{sen}(\alpha) = \frac{b}{a}$.
- **Cosseno:** o cosseno de α , é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa do triângulo. Notação: $\text{cos}(\alpha) = \frac{c}{a}$.
- **Tangente:** a tangente de α , é a razão entre o cateto oposto ao ângulo α e o cateto adjacente ao mesmo. Notação: $\text{tg}(\alpha) = \frac{b}{c}$.

Observação. Note que, $\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)}$.

Pela definição dessas relações, é fácil perceber que se α e β são ângulos complementares então $\text{sen}(\alpha) = \text{cos}(\beta)$ assim como, $\text{cos}(\alpha) = \text{sen}(\beta)$. Além disso, como o triângulo trabalhado é retângulo, vale o teorema de Pitágoras. Ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$. Dividindo toda esta igualdade por a^2 , teremos

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1. \quad (4.1)$$

Sendo esta igualdade a famosa *relação fundamental da trigonometria*. Aqui a apresentamos válida para um grau $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, mas é possível mostra que a mesma é válida também para α , tal que, $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$.

Teorema 4.1.1. Para todo número α , tal que, $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$, vale a relação

$$\text{sen}^2(\alpha) + \text{cos}^2(\alpha) = 1. \quad (4.2)$$

4.2 Ângulos notáveis

Ao trabalharmos com razões trigonométricas na perspectiva da geometria espacial ou plana, percebemos que as razões para alguns ângulos são recorrentemente utilizadas, e são valores facilmente memorizáveis. Sendo assim, é importante sabermos correlacionar esses ângulos com suas razões trigonométricas. Dessa forma, elaboramos a tabela 3, que estabelece a razões trigonométricas para alguns ângulos.

Tabela 3 – Razões trigonométricas para ângulos especiais.

Razão	Ângulos								
	0°	15°	18°	30°	45°	60°	72°	75°	90°
Senos	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
Cossenos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
Tangentes	0	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$2 + \sqrt{3}$	\neq

4.3 Relações trigonométricas

Em certas situações podemos encontrar problemas em quem é necessário o valor de uma determinada razão trigonométrica, porém este valor pode não ser tão evidente. Entretanto, a partir de ângulos com razões de fácil acesso podemos encontrar a razão desejada por meio de operações como adição ou subtração.

Sejam α e β ângulos pertencentes a $[0^\circ, 90^\circ]$, então as seguintes relações são válidas.

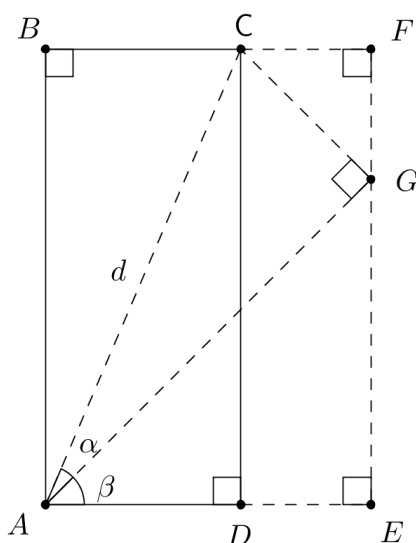
$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cos}(\beta) \pm \text{sen}(\beta) \cdot \text{cos}(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}. \quad (4.3)$$

Demonstração. A partir de um retângulo ABFE, tomaremos respectivamente C e D em BF e AE, de modo que CD seja perpendicular a AE. Além disso, tomaremos o ponto G em FE de modo que $\triangle ACG$ seja retângulo.

Figura 15 – Razões trigonométricas em adição de ângulos.



Considerando essa construção, no triângulo $\triangle ACG$, vem

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CG} = d \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AG} = d \cdot \cos(\alpha) \quad (4.4)$$

Do triângulo $\triangle AEG$, temos

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\overline{EG}}{\overline{AG}} \Rightarrow \overline{EG} = \overline{AG} \cdot \text{sen}(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{AE}}{\overline{AG}} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AG} \cdot \cos(\beta) \quad (4.5)$$

Agora, note que $\angle AGE$ e β são complementares, bem como $\angle AGE + \angle CGF = 90^\circ$. Portanto, $\triangle AEG \sim \triangle CFG$. Assim,

$$\text{sen}(\beta) = \frac{\overline{CF}}{\overline{CG}} \Rightarrow \overline{CF} = \overline{CG} \cdot \text{sen}(\beta) = \overline{DE}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{FG}}{\overline{CG}} \Rightarrow \overline{FG} = \overline{CG} \cdot \cos(\beta) \quad (4.6)$$

Do triângulo $\triangle ACD$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FG} + \overline{EG}}{d} = \frac{\overline{CG} \cdot \cos(\beta) + \overline{AG} \cdot \operatorname{sen}(\beta)}{d} \\ &= \frac{d \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + d \cdot \cos(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)}{d} = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE} - \overline{DE}}{d} = \frac{\overline{AG} \cdot \cos(\beta) - \overline{CG} \cdot \operatorname{sen}(\beta)}{d} \\ &= \frac{d \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - d \cdot \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)}{d} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta). \quad (4.7) \end{aligned}$$

Por meio de uma abordagem mais ampla sobre as razões trigonométricas, são esclarecidos um grande número de propriedades que amplia o tema e suas aplicações. Entre várias dessas propriedades, é possível justificar as seguintes igualdades para um ângulo γ qualquer:

$$\operatorname{sen}(-\gamma) = -\operatorname{sen}(\gamma); \quad \cos(-\gamma) = \cos(\gamma). \quad (4.8)$$

Nesse sentido,

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta). \quad (4.9)$$

Desse modo, temos condições de determinar $\tan(\alpha + \beta)$ e $\tan(\alpha - \beta)$. Sendo,

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} + \frac{\operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}} = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \quad (4.10) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \quad (4.11)$$

■

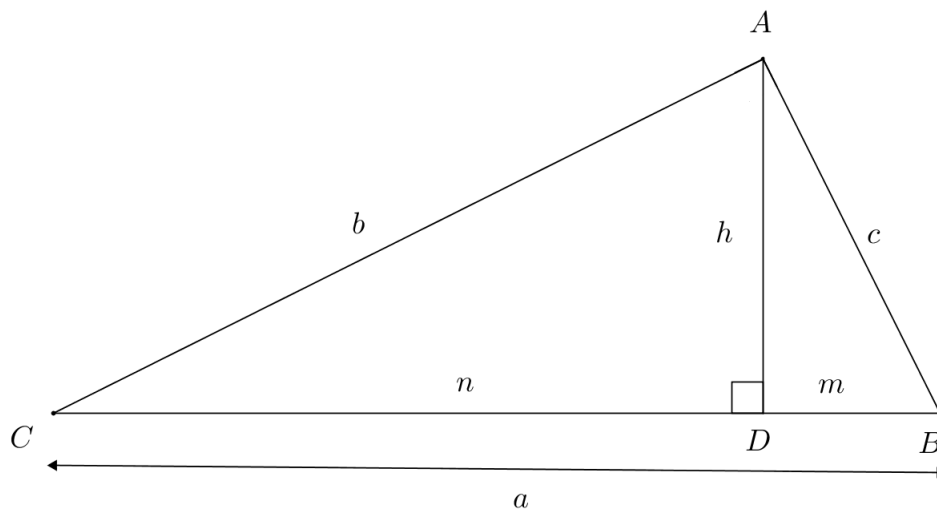
4.4 Lei dos cossenos

A definição inicial para as razões trigonométricas procedeu-se sobre um triângulo retângulo, porém a aplicação desse conceito não se restringe apenas a esse tipo de triângulo. Portanto, com a lei dos cossenos podemos ampliar um pouco mais essa apresentação, levando o conceito básico da trigonometria para também um triângulo qualquer.

Teorema 4.4.1. *Em um triângulo qualquer de lados a , b e c , com os respectivos ângulos opostos \widehat{A} , \widehat{B} , e \widehat{C} , vale:*

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\widehat{A})$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\widehat{B})$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\widehat{C})$

Figura 16 – Lei dos cossenos: triângulo agudo.



Demonstração. Vamos demonstrar inicialmente para um ângulo agudo e em seguida para um ângulo obtuso (note que no caso do ângulo reto, a lei dos cossenos se reduz ao Teorema de Pitágoras). Observando o triângulo retângulo $\triangle ABD$, temos

$$c^2 = h^2 + m^2. \quad (4.12)$$

Do triângulo retângulo $\triangle ACD$, temos

$$b^2 = n^2 + h^2. \quad (4.13)$$

Note que, $a = m + n \Rightarrow m = a - n$. Assim,

$$c^2 = h^2 + m^2 = (b^2 - n^2) + (a - n)^2$$

$$= b^2 - n^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot n + n^2$$

Como $n = b \cdot \cos(\widehat{C})$, temos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cos(\widehat{C}). \quad (4.14)$$

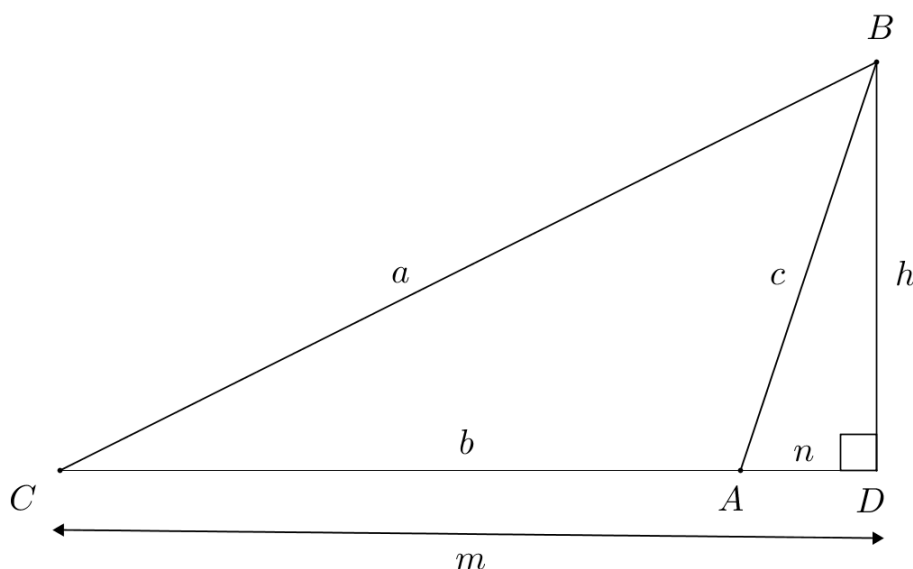
Analogamente,

$$\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\widehat{A})$$

$$\bullet b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\widehat{B})$$

Para o ângulo obtuso, consideraremos o triângulo $\triangle ABC$ da figura 17. Para a demonstração, faremos uso da seguinte identidade: $\cos(\gamma) = -\cos(180^\circ - \gamma)$, \forall ângulo γ .

Figura 17 – Lei dos cossenos: triângulo obtuso.



Como $\triangle BCD$ é retângulo, pelo teorema de Pitágoras temos, $a^2 = m^2 + h^2$. Analogamente, para $\triangle ABD$, temos $c^2 = h^2 + n^2$. Além disso, temos $m = b + n$. Logo,

$$a^2 = (b + n)^2 + h^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot n + n^2 + (c^2 - n^2)$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot n. \quad (4.15)$$

Observando-se que, $\angle CAB + \angle BAD = 180^\circ$, com $\angle CAB > 90^\circ$. Note que, do ângulo \widehat{A} em $\triangle ABC$, temos em $\triangle ABD$ $n = c \cdot \cos(180^\circ - \widehat{A})$. Assim,

$$n = -c \cdot \cos(\widehat{A})$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\widehat{A}). \quad (4.16)$$

Analogamente,

- $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\widehat{B})$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\widehat{C})$

■

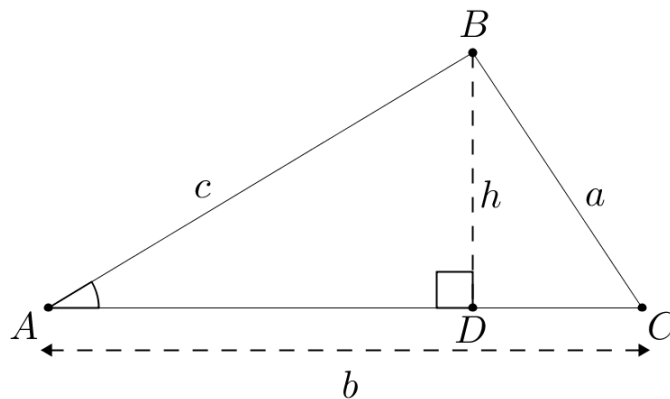
4.5 Área de um polígono regular

Teorema 4.5.1. *Em um triângulo qualquer, sua área é o semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo definido entre eles.*

Demonstração. Para a demonstração deste teorema, iremos comprovar a sua validade para triângulos agudo e obtuso, uma vez que para o triângulo retângulo é trivial.

Para o triângulo agudo ($\widehat{A} < 90^\circ$), considere o triângulo da figura 18.

Figura 18 – Área do polígono regular: triângulo agudo.



A área do triângulo $\triangle ABC$, será dada por

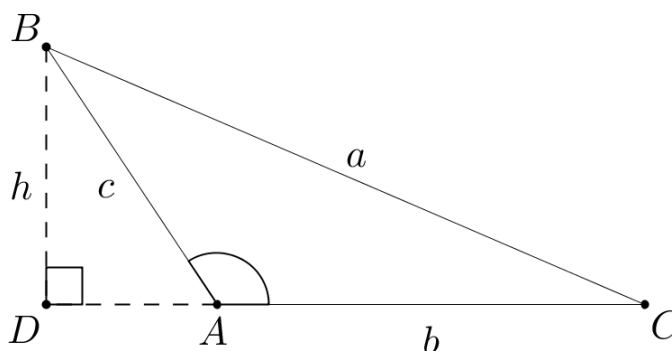
$$\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{b \cdot h}{2}. \quad (4.17)$$

Como $\triangle ABD$ é retângulo, temos

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen}(\widehat{A}). \quad (4.18)$$

Para o triângulo obtuso ($90^\circ < \widehat{A} < 180^\circ$), considere o triângulo da figura 19. Para a demonstração, faremos uso da seguinte identidade: $\text{sen}(180^\circ - \gamma) = \text{sen}(\gamma)$, \forall ângulo γ .

Figura 19 – Área do polígono regular: triângulo obtuso.



A área do triângulo $\triangle ABC$, será dado por

$$\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{b \cdot h}{2} \quad (4.19)$$

Como $\triangle ABD$ é retângulo, temos

$$\frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen}(\hat{A}). \quad (4.20)$$

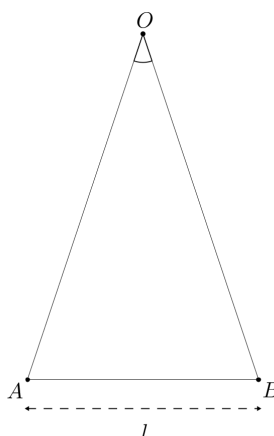
Analogamente, teremos para um triângulo qualquer

- $\frac{a \cdot b}{2} \cdot \text{sen}(\hat{C})$
- $\frac{a \cdot c}{2} \cdot \text{sen}(\hat{B})$

■

A partir do teorema anterior, podemos generalizar uma forma de calcular a área um polígono regular. Para tanto, considere um polígono regular P de n lados de comprimento l . Podemos dividir esse polígono em n triângulos congruentes como o apresentado na figura 20.

Figura 20 – Divisão de um polígono regular em triângulos.



A área do triângulo $\triangle ABO$ pode ser determinada com auxílio do teorema anterior.

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} \cdot \text{sen}(\hat{O}). \quad (4.21)$$

Como todo polígono regular é inscritível, podemos tomar $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ como o raio do círculo que circunscreve P . Assim, a área de um polígono regular de n lados é dado por

$$\left(\frac{n \cdot r^2}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right). \quad (4.22)$$

5 Poliedros

5.1 Poliedros de Platão

Definição 5.1. *Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas [8].*

Pelas especificidades da definição acima, os poliedros convexos regulares se limitam a um pequeno grupo de cinco sólidos geométricos. Esse grupo de sólidos são ditos poliedros de Platão, em consequência dos estudos que realizara sobre os mesmos, com as descrições de como os sólidos poderiam ser construídos e a prova da existência de somente cinco sólidos que respeitassem a definição. Porém, ao associarmos os sólidos regulares como sólidos de Platão, expressamos uma imagem errônea sobre esses poliedros, no sentido da exclusividade do estudo. Pois, como afirma Eves, os estudos sobre os sólidos tiveram colaborações de terceiros, em “três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto”. [6, pg-114]. Portanto, os estudos sobre os sólidos regulares, tiveram também contribuições de colaboradores da escola pitagórica.

Teorema 5.1.1. *Existem apenas cinco poliedros regulares.*

Demonstração. Considere $n \geq 3$ o número de lados de cada face do poliedro regular. Em cada vértice do sólido concorrem C arestas. Seja A, F, V respectivamente o número de arestas, faces e vértices, teremos então: $2A = nF = CV$.

$$A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{C}. \quad (5.1)$$

Pela relação de Euler, temos $F + V - A = 2$, logo

$$F + \frac{nF}{C} - \frac{nF}{2} = 2 \Rightarrow \frac{2CF + 2nF - nCF}{2C} = 2 \Rightarrow F \cdot (2C + 2n - nC) = 4C$$

$$F = \frac{4C}{(2C + 2n - nC)} \geq 0 \Rightarrow (2C + 2n - nC) > 0 \Rightarrow \frac{2n}{n-2} > C. \quad (5.2)$$

Como C indica o número de aresta que concorrem um vértice do poliedro, teremos $C \geq 3$. Logo,

$$\frac{2n}{n-2} > C \geq 3 \Rightarrow 2n > 3 \cdot (n-2) \Rightarrow n < 6. \quad (5.3)$$

Assim, para $n = 3$ (faces triangulares), teremos

$$F = \frac{4C}{6-C}. \quad (5.4)$$

- Se $C = 3$, teremos $F = 4$. Formando um tetraedro.
- Se $C = 4$, teremos $F = 8$. Formando um octaedro.
- Se $C = 5$, teremos $F = 20$. Formando um icosaedro.

Ou seja, com faces triangulares, existem somente três poliedros regulares.

Agora, para $n = 4$ (faces quadradas), teremos

$$F = \frac{4C}{8 - 2C} = \frac{2C}{4 - C}. \quad (5.5)$$

- Se $C = 3$, teremos $F = 6$. Formando um cubo.

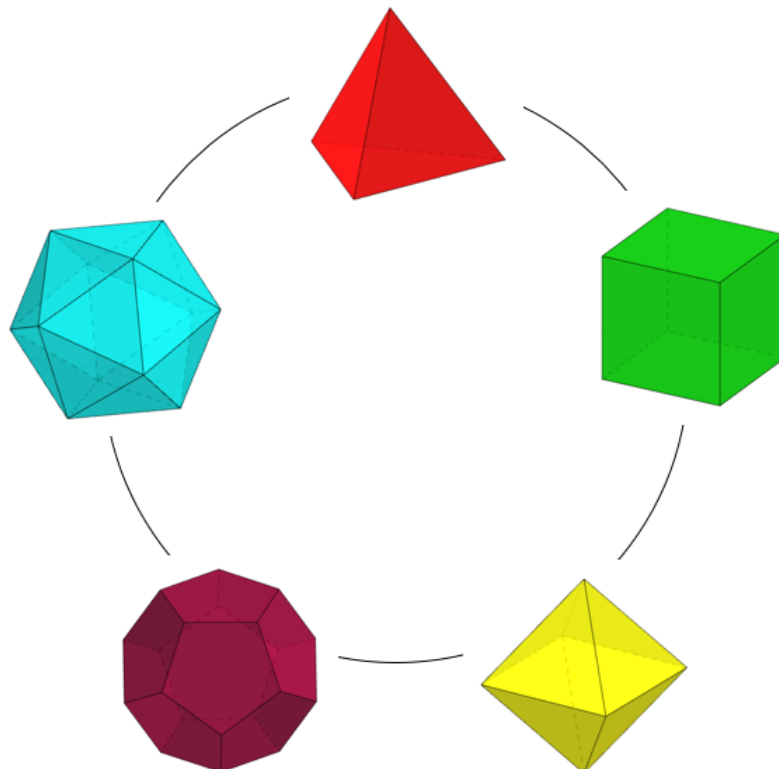
Por fim, para $n = 5$ (faces pentagonais), teremos

$$F = \frac{4C}{10 - 3C}. \quad (5.6)$$

- Se $C = 3$, teremos $F = 12$. Formando um dodecaedro.

■

Figura 21 – Os cinco sólidos regulares.



Platão fez uma curiosa e interessante associação entres esses cinco sólidos geométricos a elementos da natureza. Em *Timeu*, um monologo escrito pelo matemático sobre suas percepções acerca do mundo físico e os seres humanos, Platão associa respectivamente o tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro ao fogo, terra, ar, universo e água. Essa associação é explicada de forma bem interessante, como Eves [6] descreve:

Johann Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações de *Timeu*. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume-superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro “elementos” e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tem a maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a instabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem 12 seções [6, pg-114].

5.2 Poliedros de Arquimedes

Percebemos que para sólidos regulares, exige-se que todas suas faces sejam iguais. Nesse sentido, podemos imaginar a possibilidade de construção de sólidos geométricos com faces de polígonos regulares de mais de um tipo. Esse pensamento é correspondido a partir da construção da classe de sólidos semirregulares ou arquimedianos.

Definição 5.2. *Um sólido arquimediano é um poliedro convexo cujas as faces são polígonos regulares de mais de um tipo, e por seus vértices ocorrem o mesmo arranjo de polígonos (em número e ordem).*

A partir desta definição para sólidos semirregulares, duas classes de sólidos podem satisfazer a definição, os prismas e antiprismas. Como já conhecemos a definição do prisma por 2.14, vamos apresentar somente a definição para o antiprisma.

Definição 5.3. *Um antiprisma limitado convexo é uma região compreendida entre duas seções paralelas e distintas, lateralmente ligadas por triângulos.*

Perceba que tanto para o prisma quanto para o antiprisma podemos escolher uma infinidade de seções paralelas, pois podemos escolher um polígono regular de lado $n \geq 3$. Assim, podemos afirmar que há uma infinidade de sólidos semirregulares, porém, iremos dar ênfase somente aos sólidos semirregulares que não pertencem à estas classes de sólidos. Dessa forma, temos um número finito de poliedros semirregulares.

Teorema 5.2.1. *Além das classes dos prismas e antiprismas, existem somente treze poliedros semirregulares [7, pg-461].*

Demonstração. Para realizar esta demonstração, vamos utilizar algumas ferramentas que nos possibilitem a restringir o comportamento das faces do poliedro em torno de um vértice, respeitando a definição para sólidos arquimedianos.

i) A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $180^\circ \cdot (n - 2)$.

ii) Em poliedros convexos, a soma dos ângulos em torno de um vértice é menor que 360° .

Pela condição i, em um polígono regular de n lados, temos que a medida de um ângulo interno é

$$\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}. \quad (5.7)$$

Além disso, em um poliedro convexo, temos k faces em torno de um vértice v . Portanto, temos α_k ângulos internos em torno de v , de modo que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k < 360^\circ. \quad (5.8)$$

Se o ângulo α_i é ângulo interno de um polígono de a_i lados, então

$$\alpha_i = \left(\frac{a_i - 2}{a_i} \right) \cdot 180^\circ. \quad (5.9)$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{a_i - 2}{a_i} \right) \cdot 180^\circ < 360^\circ \Rightarrow \sum_{i=1}^k 1 - \frac{2}{a_i} < 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{2}{a_i} > k - 2. \quad (5.10)$$

Como estamos trabalhando com polígonos regulares, deveremos ter $3 \leq k \leq 5$, pois para compor um vértice poliédrico é necessário minimamente três faces. Além disso, se $k \geq 6$, teremos ângulos internos das supostas faces minimamente iguais a 60° (imaginando faces como triângulos equiláteros), e portanto, a soma desses ângulos em torno de um vértice não seria menor que 360° . Com isso, iremos analisar o comportamento do arranjo das faces para as três possibilidades de k .

a) Para $k = 3$, teremos faces do tipo F_a , F_b e F_c com respectivamente a , b e c lados.

Neste caso, teremos três faces em torno de cada vértice. Pelo resultado 5.10, temos

$$\sum_{i=1}^3 \frac{2}{a_i} > 3 - 2 = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{2}. \quad (5.11)$$

Assim, devemos analisar as possibilidades impondo algumas condições.

Para o caso $a = b = c$:

$$\frac{3}{a} > \frac{1}{2} \Rightarrow a < 6. \quad (5.12)$$

Logo, $a = b = c = 3, 4$ ou 5 . Dessa forma, teremos sólidos platônicos. Seja (a, b, c) o arranjo de faces em cada vértice, temos

- (3, 3, 3), definindo um tetraedro regular;
- (4, 4, 4), definindo um cubo;
- (5, 5, 5), definindo um dodecaedro.

Para o caso de ao menos duas faces diferentes, por exemplo $a \neq b$:

Neste caso, devemos ter c par, pois para que tenhamos o mesmo arranjo de faces F_a e F_b em torno de F_c , tendo em vista $a \neq b$. Desse modo, iremos verificar as possibilidades.

1. Para $c = 4$, temos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{4}. \quad (5.13)$$

- Se a é ímpar:

Neste caso, se $a = 3$, para que tenhamos um mesmo arranjo em torno de F_a , (F_b, F_b, F_c) ou (F_b, F_c, F_c) , devemos ter $b = c = 4$, porque $a \neq b$ e a é ímpar. (Note que se $b \neq c$, teríamos em torno de uma face triangular F_a duas faces F_b e uma F_c , e no mesmo sólido teremos em torno de uma face triangular F_a duas faces F_c e uma F_b , o que contraria a definição). Portanto, o arranjo formado é (3, 4, 4) que corresponde a um prisma de base triangular. Analogamente, se a é um ímpar qualquer, devemos ter $b = c = 4$. Configurando um prisma cuja a base é um polígono de l lados, sendo o arranjo em cada vértice (4, 4, l).

- Se $a = 4$:

Neste caso, teremos $\frac{1}{b} > 0$, com $b \geq 3$ e $b \neq 4$. Logo, b assume uma infinita diversidade de valores. Assim, o arranjo em cada vértice será (4, 4, n), com $n \neq 4$, definindo também um prisma.

- Se $a = 6$:

Neste caso, teremos $\frac{1}{b} > \frac{1}{12} \Rightarrow b < 12$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 6$ par, para que tenhamos um mesmo arranjo F_a, F_c em torno de F_b . Assim $b = 4, 8$ ou 10 . O arranjo (4, 4, 6) já foi analisado. Desse modo, temos:

Pelo o arranjo, (4, 6, 8) definimos um **cuboctaedro truncado**.

Pelo o arranjo, (4, 6, 10) definimos um **icosidodecaedro truncado**.

- Se $a = 8$:

Neste caso, teremos $\frac{1}{b} > \frac{1}{8} \Rightarrow b < 8$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 8$ par. Assim, $b = 4$ ou 6 . O arranjo (4, 4, 8) já foi analisado, bem como o arranjo (4, 6, 8).

- Se $a = 10$:

Neste caso, teremos $\frac{1}{b} > \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20} \Rightarrow b < \frac{20}{3} \Rightarrow b \leq 6$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 10$ par. Logo, $b = 4$ ou 6 . E novamente os arranjos (4, 4, 10) e (4, 6, 10) já foram analisados.

- Se $a = 12$:

Neste caso, teremos $\frac{1}{b} > \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow b < 6$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 12$ par. Logo, $b = 4$. E para estas condições, o arranjo $(4, 4, 12)$ já foram analisados. Analogamente, para $a \geq 14$ par, teremos sempre um prisma.

2. Para $c = 6$, temos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \quad (5.14)$$

- Se a é ímpar:

Neste caso, para que tenhamos um mesmo arranjo em torno de $F_a, (F_b, F_b, F_c)$ ou (F_b, F_c, F_c) , devemos ter $b = c = 6$, porque $a \neq b$ e a é ímpar. Assim, $\frac{1}{a} > \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \Rightarrow 3 \leq a < 6$.

Para $a = 3$, temos o arranjo $(3, 6, 6)$ definindo um **tetraedro truncado**.

Para $a = 5$, temos o arranjo $(5, 6, 6)$ definindo um **icosaedro truncado**.

- Se $a = 4$:

Neste caso, teremos $\frac{1}{b} > \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow b < 12$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 4$ par. Logo, $b = 6, 8$ ou 10 . Os arranjos $(4, 6, 8)$ e $(4, 6, 10)$ já foram analisados, porém por $(4, 6, 6)$ definimos um **octaedro truncado**.

- Se $a = 6$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow b < 6$. Como a e c são pares e iguais devemos ter $b \neq a = 6$ par ou ímpar. Logo, $b = 3, 4$ ou 5 . Para estes valores, os arranjos $(3, 6, 6)$, $(4, 6, 6)$ e $(5, 6, 6)$, já foram analisados.
- Se $a = 8$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24} \Rightarrow b < \frac{25}{4} \Rightarrow b \leq 6$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 8$ par. Logo, $b = 4$ ou 6 . Por outro lado, se $b = 6$, teremos $\frac{1}{a} > \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow a < 6$, o que contraria a hipótese. Logo, teremos apenas o arranjo $(4, 6, 8)$, já analisado.
- Se $a = 10$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30} \Rightarrow b < \frac{30}{7} \Rightarrow b \leq 4$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 10$ par. Logo, $b = 4$. Formando o arranjo $(4, 6, 10)$, já analisado. Para $a \geq 12$, a igualdade não é satisfeita.

3. para $c = 8$, temos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \quad (5.15)$$

- Se a é ímpar:

Neste caso, para que tenhamos um mesmo arranjo em torno de $F_a, (F_b, F_b, F_c)$ ou (F_b, F_c, F_c) , devemos ter $b = c = 8$, porque $a \neq b$ e a é ímpar. Assim, $\frac{1}{a} > \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 3$. Assim, o único arranjo possível é $(3, 8, 8)$, formando um **cubo truncado**.

- Se $a = 4$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow b < 8$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 4$ par. Logo, $b = 6$. Formando o arranjo $(4, 6, 8)$, já analisado.
- Se $a = 6$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{3}{8} - \frac{1}{6} = \frac{5}{24} \Rightarrow b < \frac{24}{5} \Rightarrow b \leq 4$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 6$ par. Logo, $b = 4$. Formando o arranjo $(4, 6, 8)$, já analisado.
- Se $a = 8$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow b < 4$. Como a e c são pares e iguais devemos ter $b \neq a = 4$ par ou ímpar. Logo, $b = 3$. Formando o arranjo $(3, 8, 8)$, já analisado.
- Se $a = 10$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{3}{8} - \frac{1}{10} = \frac{11}{40} \Rightarrow b < \frac{40}{11} \Rightarrow b \leq 3$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 4$ par. Logo, a igualdade não é satisfeita, assim segue analogamente para $a \geq 12$.

4. Para $c = 10$, temos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{2}{5}. \quad (5.16)$$

- Se a é ímpar:

Neste caso, para que tenhamos um mesmo arranjo em torno de F_a , (F_b, F_b, F_c) ou (F_b, F_c, F_c) , devemos ter $b = c = 10$, porque $a \neq b$ e a é ímpar. Assim, $\frac{1}{a} > \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \Rightarrow a < \frac{10}{3} \Rightarrow a \leq 3$. Assim, o único arranjo possível é $(3, 10, 10)$, formando um **dodecaedro truncado**.

- se $a = 4$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20} \Rightarrow b < \frac{20}{3} \Rightarrow b \leq 6$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 4$ par. Logo, $b = 6$. Formando o arranjo $(4, 6, 10)$, já analisado.
- Se $a = 6$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{30} \Rightarrow b < \frac{30}{7} \Rightarrow b \leq 4$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 6$ par. Logo, $b = 4$. Formando o arranjo $(4, 6, 10)$, já analisado.
- Se $a = 8$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{2}{5} - \frac{1}{8} = \frac{11}{40} \Rightarrow b < \frac{40}{11} \Rightarrow b \leq 3$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 8$ par. Logo, a igualdade não é satisfeita, assim segue analogamente para $a \geq 10$.

5. Para $c = 12$, temos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}. \quad (5.17)$$

- Se a é ímpar

Neste caso, para que tenhamos um mesmo arranjo em torno de F_a , (F_b, F_b, F_c) ou (F_b, F_c, F_c) , devemos ter $b = c = 12$, porque $a \neq b$ e a é ímpar. Assim, $\frac{1}{a} > \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow a < 3$. Logo, a igualdade não é satisfeita.

- Se $a = 4$, teremos $\frac{1}{b} > \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow b < 6$. Como a e c são pares e diferentes devemos ter $b \neq a = 4$ par. Logo, a desigualdade não é satisfeita, assim segue analogamente para $a \geq 6$.

Portanto, Para $c \geq 12$, não haverá possibilidade de outros arranjos.

b) Para $k = 4$, teremos faces do tipo F_a, F_b, F_c e F_d com respectivamente a, b, c e d lados.

Neste caso, teremos quatro faces em torno de cada vértice. Pelo resultado 5.10, temos

$$\sum_{i=1}^4 \frac{2}{a_i} > 4 - 2 = 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 \frac{1}{a_i} > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} > 1. \quad (5.18)$$

Assim, devemos analisar as possibilidades impondo algumas condições.

Para o caso $a = b = c = d$:

$$\frac{4}{a} > 1 \Rightarrow a < 4 \Rightarrow a = 3. \quad (5.19)$$

Neste caso, definimos o sólido platônico octaedro regular, pelo arranjo $(3, 3, 3, 3)$.

Para o caso de uma face não ser triangular, por exemplo $d \neq 3$:

Neste caso, teremos $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{d} > 1 \Rightarrow d > 0 \Rightarrow F_d$ é um polígono regular qualquer de n lados. Para esta situação definiremos uma classe de antiprimas pelo arranjo $(3, 3, 3, n)$.

Para o caso de pelo menos uma face ser triangular, por exemplo $a = 3$:

Neste caso, considere os vértices A, B e C de f_a . Note que, Podemos ter em A, F_b e F_c adjacentes ao passo que F_d é oposto. Neste caso, devemos ter minimamente duas faces iguais, pelo exemplo $b = c$. Assim, segue as combinações possíveis:

- Pelo arranjo $(3, 3, 4, 4)$, definiremos um **cu**boctaedro;
- Pelo arranjo $(3, 3, 5, 5)$, definiremos um **icosidodecaedro**;
- Pelo arranjo $(3, 4, 4, 4)$, definiremos um **rombicuboctaedro**;
- Pelo arranjo $(3, 4, 4, 5)$, definiremos um **rombicosidodecaedro**;
- Pelo arranjo $(3, 4, 5, 5)$, podemos verificar que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{59}{60} \not> 1. \quad (5.20)$$

Portanto, a desigualdade 5.18 não é satisfeita para este arranjo, analogamente concluímos o mesmo para $(3, 5, 5, 5)$.

Para o suposto caso de não existir face triangular:

Neste caso, a soma máxima para $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$, ocorre para arranjo (4, 4, 4, 4). Porém, nesta situação, a desigualdade não é satisfeita. Logo, finalizamos aqui as possibilidades para $k = 4$.

c) Para $k = 5$, teremos faces do tipo F_a, F_b, F_c, F_d e F_e com respectivamente a, b, c, d e e lados.

Neste caso, teremos cinco faces em torno de cada vértice. Pelo resultado 5.10, temos

$$\sum_{i=1}^5 \frac{2}{a_i} > 5 - 2 = 3 \Rightarrow \sum_{i=1}^5 \frac{1}{a_i} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} > \frac{3}{2}. \quad (5.21)$$

Assim, devemos analisar as possibilidades impondo algumas condições.

Para o caso $a = b = c = d = e$:

$$\frac{5}{a} > \frac{3}{2} \Rightarrow a < \frac{10}{3} \Rightarrow a \leq 3. \quad (5.22)$$

Neste caso, teremos $a = b = c = d = e = 3$. Definido o sólido platônico icosaedro, pelo arranjo (3, 3, 3, 3, 3).

Para o caso de uma face não ser triangular, por exemplo $e = 4$ ou $e = 5$:

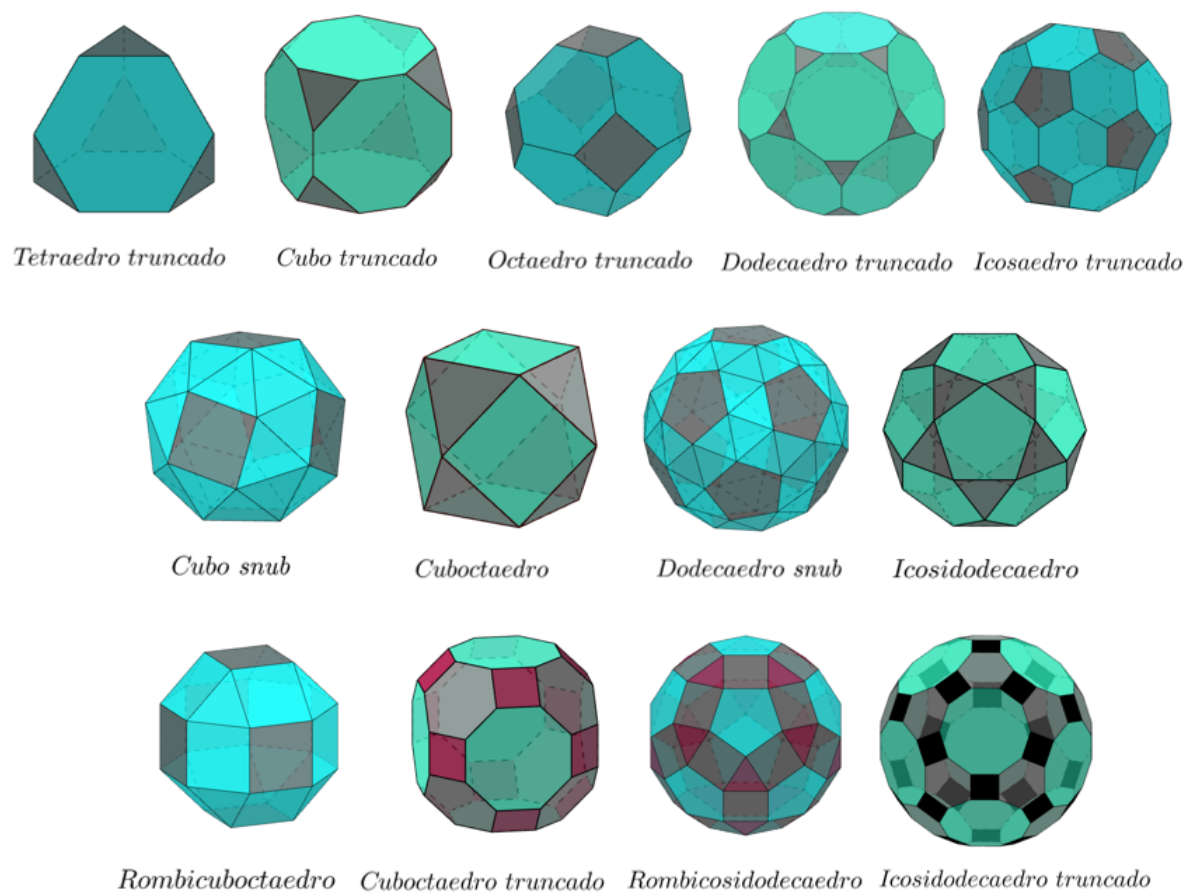
- Se $e = 4$, teremos $\frac{4}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12} > \frac{3}{2}$. Neste caso, definimos um **cuco snub**, pelo arranjo (3, 3, 3, 3, 4).
- Se $e = 5$, teremos $\frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15} > \frac{3}{2}$. Neste caso, definimos um **dodecaedro snub**, pelo arranjo (3, 3, 3, 3, 5).
- Se $e = 6$, teremos $\frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} \not> \frac{3}{2}$. Portanto, a desigualdade não é satisfeita, assim segue analogamente para $e \geq 7$.

Para o caso de duas faces não serem triangulares:

O caso inicial e mais simples é para a situação de duas faces quadradas, por exemplo $d = 4$ e $e = 4$. Assim, teremos $\frac{3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{18}{12} \not> \frac{3}{2}$. Portanto, a desigualdade não é satisfeita, assim segue analogamente para outros arranjos. Desse modo, para $k = 5$, teremos minimamente três faces triangulares.

Diante de tudo exposto, concluímos que com a exceção das classes de prismas e antiprismas, há somente treze poliedros semirregulares. ■

Figura 22 – Os treze sólidos semirregulares.



5.2.1 Formas de obtenção dos sólidos arquimedianos

Os poliedros semirregulares podem ser obtidos a partir dos poliedros regulares, através de operações nas faces dos sólidos platônicos. Essas operações são chamadas de truncamento (cortes nas faces do sólido) e snubificação (afastamento das faces do sólido).

Definiremos essas operações do seguinte modo:

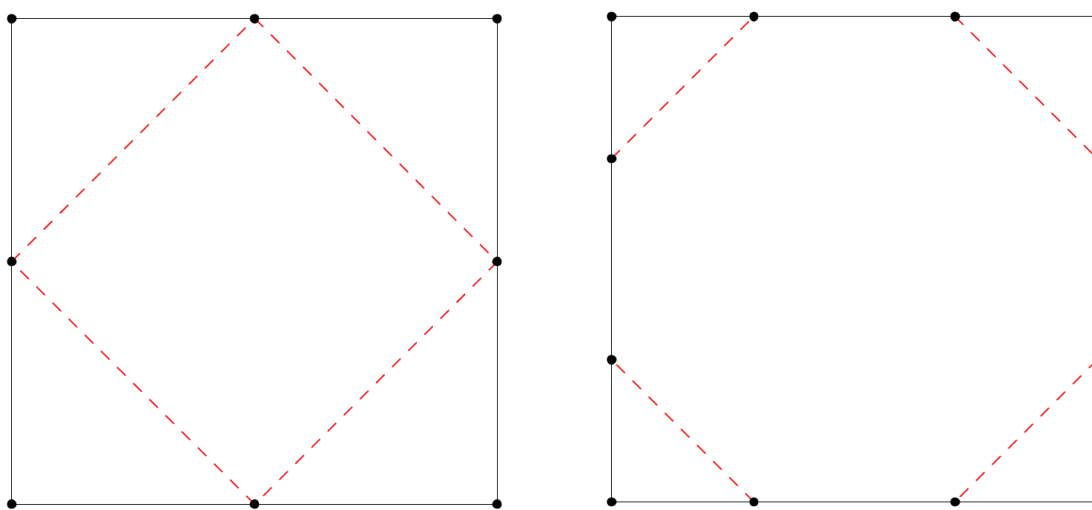
Definição 5.4. *Truncamento – operação que consiste em recortar igualmente as faces de um poliedro, de modo que cada vértice se transforme em uma pirâmide.*

A partir desta definição, ampliaremos o conceito afirmando que, iremos utilizar dois tipos de cortes. O primeiro chamaremos de truncamento tipo 1, em que os cortes são feitos passando pelo ponto médio de cada aresta. O segundo, chamaremos de truncamento tipo 2, em que os cortes serão feitos de modo que cada face do sólido primitivo, após a operação, tenha o dobro de arestas.

É importante ressaltar que, por cada vértice truncado, irá se formar uma pirâmide em que o número de lados da base é igual ao número de arestas que concorrem um mesmo vértice do sólido primitivo. Além disso, pela regularidade dos sólidos, o corte é sempre perpendicular ao eixo da pirâmide, e conseqüentemente a altura correspondente a esta base.

- Sólidos obtidos pelo truncamento tipo 1: cuboctaedro e icosidodecaedro.
- Sólidos obtidos pelo truncamento tipo 2: tetraedro truncado, cubo truncado, octaedro truncado, dodecaedro truncado e icosaedro truncado.
- Sólidos obtidos pelo truncamento tipo 1, seguido de um truncamento tipo 2: cuboctaedro truncado e icosidodecaedro truncado.

Figura 23 – Exemplos de truncamento.



(a) Truncamento tipo 1.

(b) Truncamento tipo 2.

Definição 5.5. *Snubficação – operação que consiste em afastar igualmente as faces de um poliedro regular, girando-as ou não, e preenchendo os espaços vazios com polígonos regulares.*

Se na snubficação não houver rotação, dizemos que a operação foi uma expansão e os sólidos formados são ditos rombos, caso contrário teremos uma snubficação em que os sólidos formados são ditos *snub*.

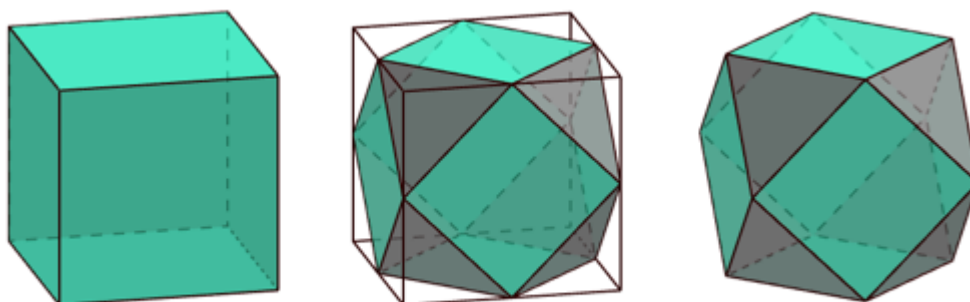
- Sólidos obtidos pela snubficação: cubo *snub* e dodecaedro *snub*.
- Sólidos obtidos pela expansão: rombicuboctaedro e rombicoidodecaedro.

6 Volume dos sólidos arquimedianos

6.1 Cuboctaedro

O primeiro sólido de Arquimedes que estudaremos é o cuboctaedro. Este sólido pode ser obtido a partir do truncamento tipo 1 no cubo. Ao realizarmos o truncamento tipo 1 no cubo, obtemos oito faces adicionais, assim o cuboctaedro possui quatorze faces de mesma aresta, entre as quais são oito triângulos equiláteros e seis quadrados. Como ilustramos na figura 24.

Figura 24 – Cuboctaedro: truncamento do tipo 1 no cubo.



Uma outra alternativa para que se obtenha o cuboctaedro é pela realização do truncamento tipo 1 no octaedro regular.

Para calcularmos o volume do cuboctaedro de aresta a , iremos determinar o volume de um cubo Ω e em seguida subtrair o volume perdido a partir do truncamento tipo 1. Tal volume perdido a partir do truncamento, corresponde ao volume de oito pirâmides μ .

Volume do cubo Ω :

Dado que a aresta do cuboctaedro é a , precisamos determinar o volume de Ω em função de a . Para tanto, é necessário o comprimento da aresta de Ω dado a . Nesse sentido, considere $ABCD$ uma face de Ω , como ilustra a figura 25.

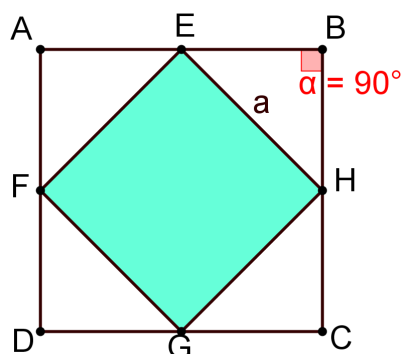
Em função do truncamento tipo 1 submetido à Ω , temos $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{BH}$. Além disso, $\angle EBH$ é um ângulo reto. Portanto, pelo teorema de Pitágoras

$$(\overline{EB})^2 + (\overline{BH})^2 = a^2 \Rightarrow \overline{EB} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overline{AB} = a \cdot \sqrt{2}. \quad (6.1)$$

Portanto, o volume de Ω é

$$(\overline{AB})^3 = a^3 \cdot 2\sqrt{2}. \quad (6.2)$$

Figura 25 – Cuboctaedro: face do cubo Ω .



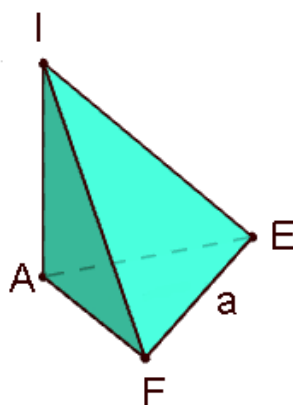
Volume das pirâmides μ :

Para determinarmos o volume de μ , precisamos conhecer minimamente algumas de suas características, em especial o comprimento de suas arestas.

Cada pirâmide μ possui uma face triangular regular de aresta a , face comum ao cuboctaedro, e outras três faces triangulares como $\triangle EBH$ (figura 25). Além disso, cada uma dessas pirâmides possuem um vértice onde concorrem três arestas duas a duas ortogonais, visto que tal vértice é comum à Ω .

Com esta breve descrição, temos elementos suficientes a fim de determinarmos o volume de μ . Observe a pirâmide da figura 26, em que A é vértice de Ω .

Figura 26 – Cuboctaedro: pirâmide μ .



Agora note que o volume de μ é a sexta parte do volume de um cubo de aresta $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$v(\mu) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\overline{AE} \cdot \overline{AF}}{2} \right) \cdot \overline{AI} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{(\overline{AE})^2}{2} \right) \cdot \overline{AE} = \frac{(\overline{AE})^3}{6} = a^3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{48} = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{24}. \quad (6.3)$$

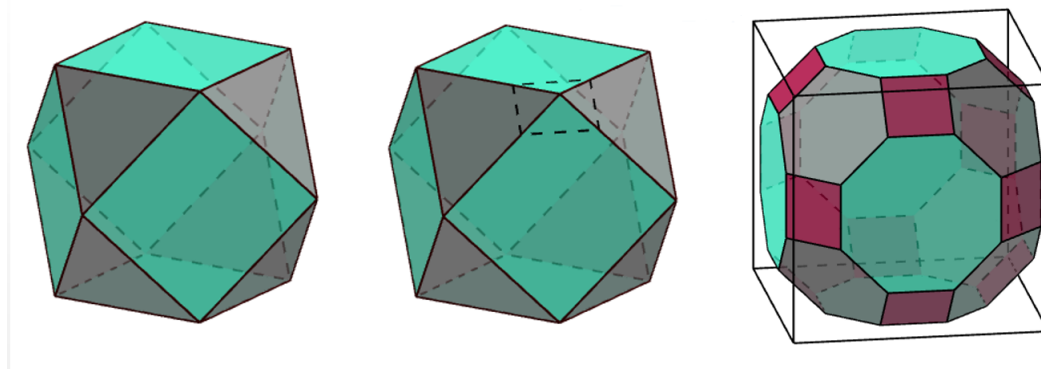
Conhecidos os volumes de Ω e μ , temos condições de determinar agora o volume cuboctaedro dado por

$$v(\Omega) - 8 \cdot v(\mu) = a^3 \cdot 2\sqrt{2} - 8 \cdot a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{24} = a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot (6-1)}{3} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} \right). \quad \blacksquare \quad (6.4)$$

6.2 Cuboctaedro truncado

O próprio nome deste sólido sugere que sua obtenção é feita a partir do truncamento do cuboctaedro, e esta indicação realmente procede. Porém, se aplicarmos o truncamento tipo 2 no cuboctaedro a fim de obtermos o cuboctaedro truncado, não será suficiente, pois não teremos um sólido arquimediano. Isto porque somente este processo não fará com que todas as arestas tenham mesmo comprimento, o que é consequência do fato do cuboctaedro possuir faces de formas triangulares e quadradas, que induz o truncamento gerar retângulos não regulares, ao passo que o objetivo é a obtenção polígonos regulares. Portanto, após o truncamento do cuboctaedro deve-se ser feito ajustes para que então as faces originalmente triangulares convertam-se para hexágonos, as quadradas para octógonos e as retangulares geradas no truncamento, em quadrados.

Figura 27 – Cuboctaedro truncado: truncamento do tipo 2 no cuboctaedro.



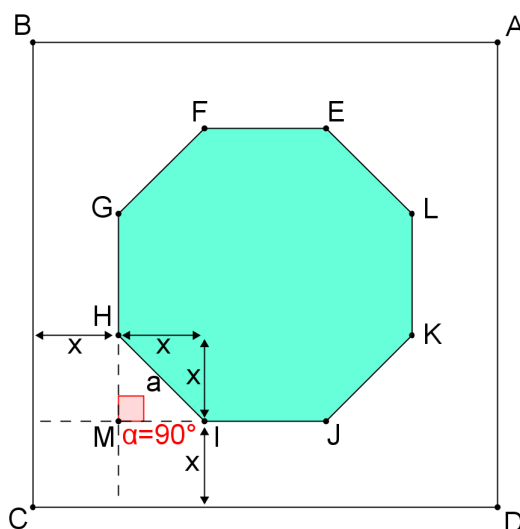
Para determinarmos o volume do cuboctaedro truncado, não usaremos o cuboctaedro como referência para o cálculo de volume perdido pelo truncamento, uma vez que os ajustes destacados anteriormente, indicam um estudo um pouco mais minucioso dessas perdas. Como alternativa de solução ao problema, iremos trabalhar o volume deste sólido a partir de um cubo Ω . O que é conveniente, tendo em vista que o cuboctaedro é obtido a partir de um cubo.

A ideia será calcular o volume complementar do cuboctaedro truncado em relação ao cubo Ω . E por este motivo, convenientemente tomaremos Ω com suas faces justapostas com as faces octogonais do sólido em questão. Desse modo, o volume complementar que calcularemos será estudado em duas partes, a primeira corresponde ao volume sobre as faces quadradas (sólido μ) e a segunda, o volume sobre as faces hexagonais (sólido σ).

Para determinarmos os volumes de Ω , σ e μ , analisaremos uma das faces do cubo objetivando obter informações pertinentes sobre os sólidos em questão. Para tanto, tomaremos a figura 28 como auxiliar.

A figura nos ajuda ilustrar nosso pensamento para afirmar que o comprimento da aresta de Ω é $4x + a$, em que x é a distância entre a face octogonal e aresta do cubo. E a é aresta do cuboctaedro truncado.

Figura 28 – Cuboctaedro truncado: face do cubo Ω .



Do triângulo reto $\triangle LMH$, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para afirmar que

$$x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{6.5}$$

portanto, a aresta de Ω tem comprimento

$$\overline{AB} = 4x + a = a \cdot (1 + 2\sqrt{2}). \tag{6.6}$$

O que implica que seu volume $v(\Omega)$ é

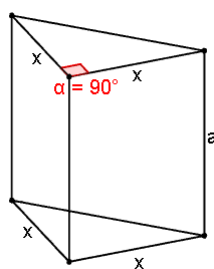
$$v(\Omega) = \left(a \cdot (1 + 2\sqrt{2}) \right)^3 = a^3 \cdot (25 + 22\sqrt{2}). \tag{6.7}$$

Agora, basta determinarmos os volumes de σ e μ .

Volume de μ :

Lembrando que μ é um sólido sobre uma face quadrada do cuboctaedro truncado, tomaremos μ como um prisma reto. Cujas dimensões são indicadas na figura 29.

Figura 29 – Cuboctaedro truncado: prisma μ .



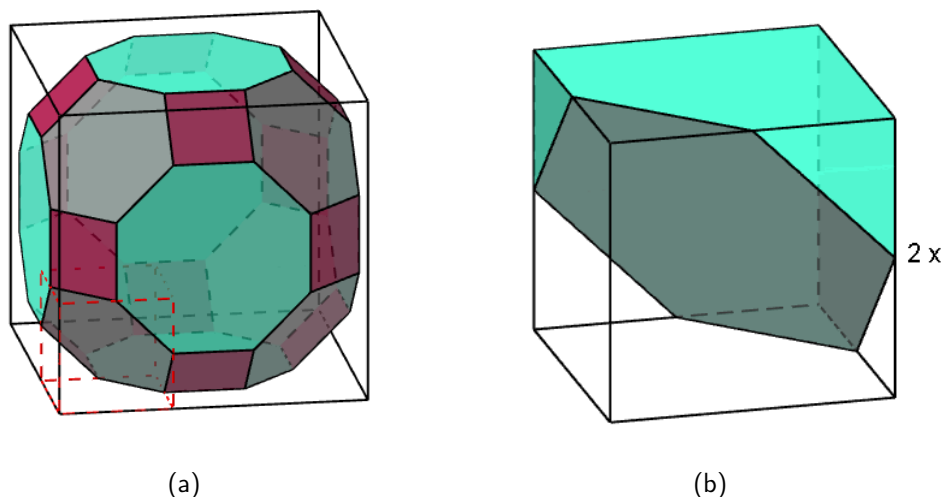
Como já sabemos a relação entre x e a , temos plenas condições de determinar $v(\mu)$, dado por

$$v(\mu) = \frac{a \cdot x^2}{2} = \frac{a^3}{4}. \tag{6.8}$$

Volume de σ :

Aqui, iniciamos ressaltando que é importante o leitor manter-se atento à construção do raciocínio bem como às figuras auxiliares, pois iremos estudar $v(\sigma)$ de forma mais direta, a partir de um cubo (de aresta $2x$). A face hexagonal de σ tem seus vértices em pontos médios das arestas deste cubo.

Figura 30 – Cuboctaedro truncado: sólido σ .



Note que o hexágono define, no cubo, duas regiões congruentes e sendo uma delas o sólido σ . Portanto, é fácil ver que

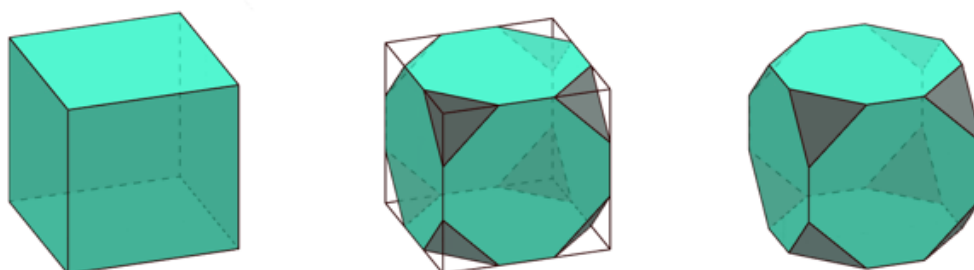
$$v(\sigma) = \frac{(2x)^3}{2} = 4 \cdot x^3 = a^3 \cdot \sqrt{2}. \quad (6.9)$$

Portanto, o volume do cuboctaedro truncado será dado por

$$v(\Omega) - 12 \cdot v(\mu) - 8 \cdot v(\sigma) = a^3 \cdot (25 + 22\sqrt{2}) - a^3 \cdot 3 - a^3 \cdot 8\sqrt{2} = a^3 \cdot (22 + 14\sqrt{2}). \blacksquare \quad (6.10)$$

6.3 Cubo truncado

Figura 31 – Cubo truncado: truncamento tipo 2 do cubo.



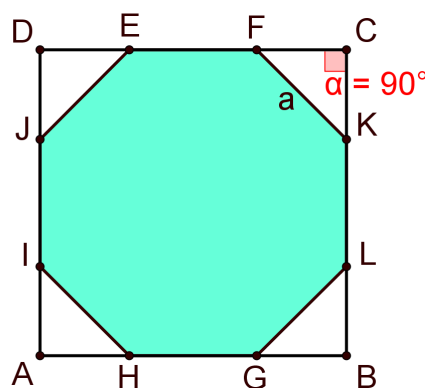
O cubo truncado também pode ser obtido a partir do truncamento do cubo, porém para este sólido é feito o truncamento tipo 2. Desse modo, após o truncamento do cubo surgem oito faces adicionais, indicando que o cubo truncado possui quatorze faces de mesma aresta, entre as quais são oito triângulos equiláteros e seis octógonos.

Portanto, podemos determinar o volume do cubo truncado de aresta a a partir da diferença entre o volume de um cubo Ω e volume de oito pirâmides μ .

Volume do cubo Ω :

Para determinar o volume de Ω , precisamos determinar primeiramente o comprimento de sua aresta em função de a . Para tanto, destacamos que cada face octogonal de aresta a está contida e justaposta em um quadrado, como ilustramos na figura 32.

Figura 32 – Cubo truncado: face do cubo truncado.



Considerando o truncamento tipo 2 aplicado em Ω e pela regularidade das faces octogonais, temos $\overline{FC} = \overline{CK}$. Sendo assim, aplicamos novamente o teorema de Pitágoras para determinar que

$$\overline{FC} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (6.11)$$

Portanto,

$$\overline{AB} = 2 \cdot \left(a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + a = a \cdot (1 + \sqrt{2}). \quad (6.12)$$

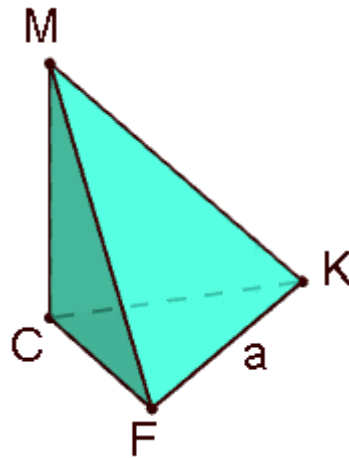
Logo, o volume de Ω será

$$(\overline{AB})^3 = a^3 \cdot (7 + 5\sqrt{2}). \quad (6.13)$$

Volume da pirâmide μ :

Assim como conduzimos para determinarmos o volume das pirâmides no cuboctaedro, é necessária uma breve descrição acerca de μ . Nesse sentido, afirmamos que essa pirâmide possui uma face triangular regular de aresta a , que é face comum ao cubo truncado. As demais três arestas também possuem comprimento conhecido, determinado na equação 6.11, e além disso tais arestas são duas a duas ortogonais, visto que concorrem em um vértice que é comum a um vértice do cubo Ω .

Figura 33 – Cubo truncado: pirâmide μ .



Por meio do descrito, o volume de μ é dado por

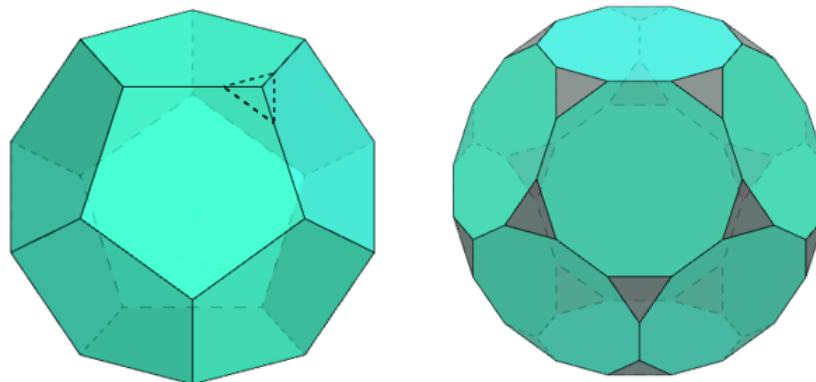
$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\overline{FC} \cdot \overline{CK}}{2} \right) \cdot \overline{CM} = \frac{(\overline{FC})^3}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{a^3 \cdot 2\sqrt{2}}{8} \right) = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{24}. \quad (6.14)$$

Portanto, temos o volume do cubo truncado dado por

$$v(\Omega) - 8 \cdot v(\mu) = a^3 \cdot (7 + 5\sqrt{2}) - 8 \cdot \left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{24} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{21 + 14\sqrt{2}}{3} \right). \quad \blacksquare \quad (6.15)$$

6.4 Dodecaedro truncado

Figura 34 – Dodecaedro truncado: truncamento do tipo 2 do dodecaedro.



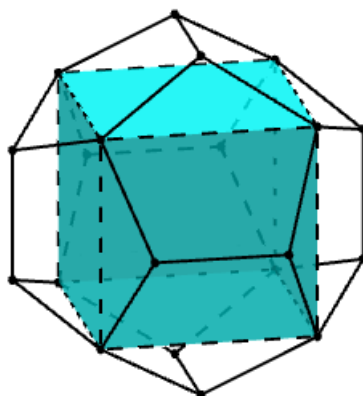
O dodecaedro truncado pode ser obtido através do truncamento tipo 2 do dodecaedro regular. O qual transforma as doze faces pentagonais do dodecaedro em faces decagonais, além do acréscimo de vinte faces triangulares, todas com arestas de comprimento a . Assim, podemos calcular o volume do dodecaedro truncado a partir do volume do dodecaedro regular.

Para tanto, precisamos calcular o volume de um dodecaedro regular Ω em função de a , e em seguida determinar o volume perdido após o truncamento. Tal volume retirado, corresponde ao volume de vinte pirâmides μ .

Demonstração do volume de um dodecaedro regular de aresta c :

Para determinarmos o volume do dodecaedro, iremos decompô-lo em sete sólidos. Para tal decomposição, em cada face pentagonal iremos traçar uma diagonal, de forma que as diagonais de quatro faces determinem um quadrilátero. E replicando o procedimento em todas as faces, tenhamos seis quadriláteros, assim como ilustramos na figura 35.

Figura 35 – Dodecaedro truncado: decomposição do dodecaedro (parte 1).



Pela regularidade do dodecaedro, as diagonais do quadrilátero têm mesmo comprimento. Portanto, os quadriláteros formados serão quadrados. E pelo fato de duas diagonais opostas das faces pentagonais serem paralelas, concluímos que os seis quadrados determinarão um cubo.

Antes de trabalharmos com sólidos sobre cada uma das faces quadradas, iremos determinar antes o volume do cubo em questão. Para tanto, é suficiente determinar o comprimento da diagonal da face do dodecaedro.

Da figura 36, seja o segmento \overline{EC} diagonal da face pentagonal do dodecaedro. Pelo teorema de Ptolomeu aplicado no quadrilátero ABCE, temos

$$\overline{EB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{EC} + \overline{AE} \cdot \overline{BC} \Rightarrow d^2 = c \cdot d + c^2. \quad (6.16)$$

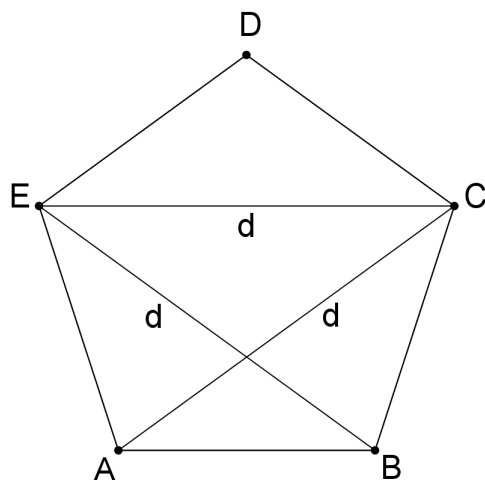
Resolvendo a equação para a variável d , vem

$$d = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + c^2 \cdot 4}}{2}. \quad (6.17)$$

Como $d > 0$,

$$d = c \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right). \quad (6.18)$$

Figura 36 – Dodecaedro truncado: decomposição do dodecaedro.



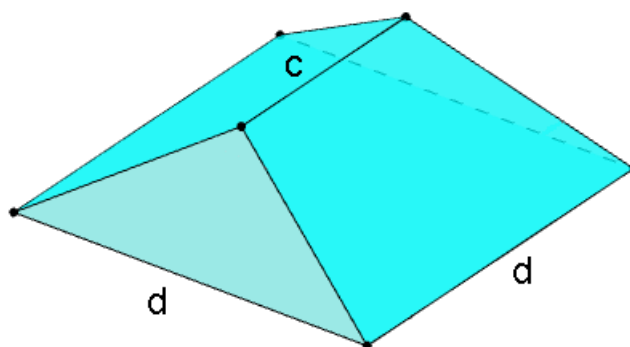
Portanto, a volume do cubo será

$$d^3 = c^3 \cdot \left(\frac{16 + 8\sqrt{5}}{8} \right) = c^3 \cdot (2 + \sqrt{5}). \quad (6.19)$$

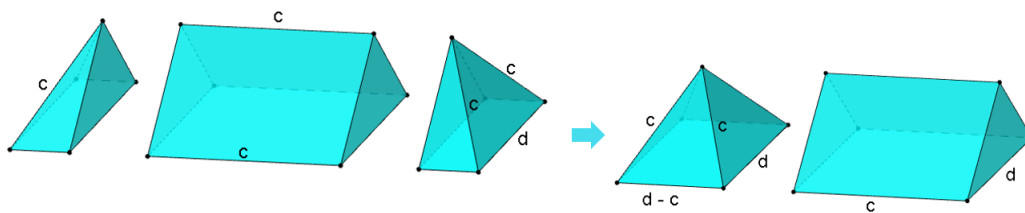
Na decomposição proposta, um dos sólidos é um cubo, descreveremos agora os outros sólidos.

Sobre cada quadrado determinado na decomposição, teremos sólidos congruentes em consequência da regularidade do dodecaedro, desse modo basta que façamos um estudo em apenas um desses sólidos o qual denotaremos por σ .

Figura 37 – Dodecaedro truncado: decomposição do dodecaedro (parte 2).

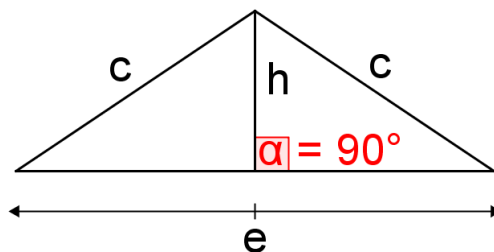


Para determinarmos o volume de σ , iremos decompô-lo em três partes. Para tanto, tomaremos a face quadrada como base do sólido. Não contidos em tal base há dois vértices, pelos quais iremos realizar em cada um, cortes ortogonais à base de modo que tenhamos um prisma reto λ com altura h . Com os outros dois sólidos restantes, iremos uni-los pelas novas faces geradas através do corte, de modo que tenhamos uma pirâmide θ . Como sugere a figura 38.

Figura 38 – Dodecaedro truncado: decomposição de σ 

Note que, tanto para a pirâmide quanto para o prisma, o volume poderá ser determinado se soubermos a medida da altura de σ . Iremos determinar essa altura por meio da pirâmide θ .

Pelo vértice de θ , traçamos a seção transversal contendo dois vértices da base. Assim, obtendo um triângulo isósceles, como ilustramos na figura 39.

Figura 39 – Dodecaedro truncado: seção transversal da pirâmide θ .

A altura procurada pode ser determinada em função de c , sendo necessário determinar e em função de c . Observe que e é a diagonal de um retângulo de dimensões $d - c$ e d (vide figura 38). Portanto, pelo teorema de Pitágoras temos

$$e^2 = (d - c)^2 + d^2 \Rightarrow e^2 = \left(c \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - c \right)^2 + \left(c \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right)^2$$

$$\Rightarrow e^2 = \left(c \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \right)^2 + \left(c \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right)^2 = c^2 \cdot 3 \Rightarrow e = c \cdot \sqrt{3}. \quad (6.20)$$

Assim, aplicando novamente o teorema de Pitágoras a fim de determinar a altura de θ , temos

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{e}{2} \right)^2 = c^2 - c^2 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{c}{2}. \quad (6.21)$$

Com isso, podemos determinar o volume de σ ($v(\sigma)$), que corresponde a soma dos volumes de θ e λ .

$$v(\sigma) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (d \cdot (d - c)) + \frac{1}{2} \cdot cdh.$$

$$= \frac{c}{6} \cdot c \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cdot c \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) + \frac{c^2}{4} \cdot c \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{c^3}{6} + c^3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{8} \right).$$

$$= c^3 \cdot \frac{(7 + 3\sqrt{5})}{24}. \quad (6.22)$$

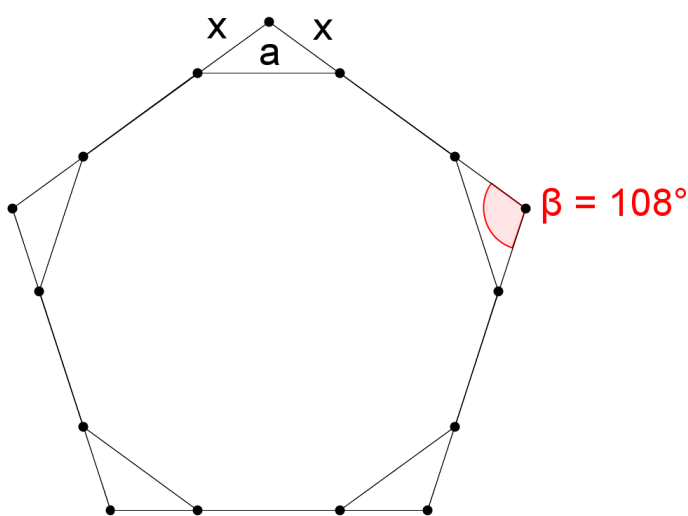
Em posse dos volumes do cubo e de σ , podemos determinar o volume do dodecaedro de aresta c , dado por

$$d^3 + 6 \cdot v(\sigma) = c^3 \cdot (2 + \sqrt{5}) + c^3 \cdot \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{4}\right) = c^3 \cdot \left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\right). \quad (6.23)$$

Volume do dodecaedro regular Ω :

Para determinarmos o volume de Ω , é suficiente determinar o tamanho de sua aresta em função de a .

Figura 40 – Dodecaedro truncado: face de Ω .



Note que a aresta do pentágono tem comprimento $2x + a$. Então, basta determinarmos x .

É fácil ver que beta mede 108 graus como indicado na figura 40, pois se trata de um ângulo interno de um pentágono regular, com isso, podemos aplicar a lei do cosseno em um dos triângulos delimitados pelas arestas do dodecaedro e pentágono. Logo,

$$\begin{aligned} a^2 &= 2x^2 \cdot (1 - \cos 108^\circ) = 2x^2 \cdot (1 + \cos 72^\circ) = 2x^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\right) = x^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right) \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{2a^2}{\sqrt{5}+3} = a^2 \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) \Rightarrow x = a \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

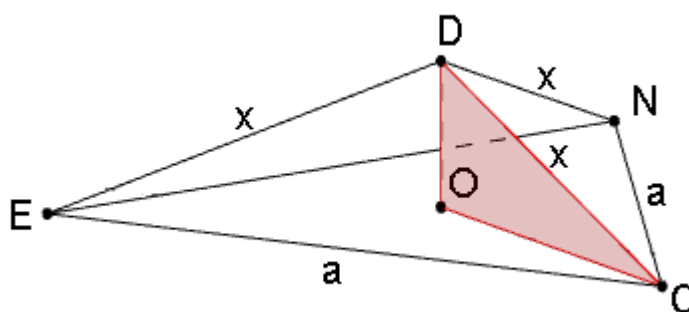
Portanto, a aresta de Ω tem comprimento $a\sqrt{5}$ e assim seu volume será

$$(a\sqrt{5})^3 \cdot \left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\right) = (a^3 \cdot 5\sqrt{5}) \cdot \left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\right) = a^3 \cdot \left(\frac{175 + 75\sqrt{5}}{4}\right). \quad (6.25)$$

Volume da pirâmide μ :

A pirâmide μ , obtida pelo truncamento tipo 2 no dodecaedro Ω , tem três arestas de comprimento a e outras três de comprimento x . Diferentemente das situações anteriores onde tínhamos pirâmides com algumas arestas convenientemente ortogonais, para esta situação não seremos favorecidos pela ortogonalidade das arestas a fim de determinarmos o volume de μ . Entretanto, como sabemos o comprimento de todas as arestas de μ , é necessário somente encontrarmos uma de suas alturas para obtermos seu volume.

Figura 41 – Dodecaedro truncado: pirâmide μ .



Vamos encontrar a altura \overline{DO} relativa a face triangular regular de aresta a . Note que a distância d_{CO} mede dois terços da altura de um triângulo equilátero de aresta a , pois O é baricentro de $\triangle ECN$, tendo em vista que $\triangle ECN$ é equilátero. Desse modo, temos pelo teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} (\overline{DO})^2 &= x^2 - (\overline{CO})^2 = a^2 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} \right) - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{14 - 6\sqrt{5}}{12} \right) \\ &\Rightarrow \overline{DO} = a \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Logo, o volume de μ é dado por

$$v(\mu) = \frac{1}{3} \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot \overline{DO} = \frac{1}{3} \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot \left(a \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \right) \right) = a^3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{24} \right). \quad (6.27)$$

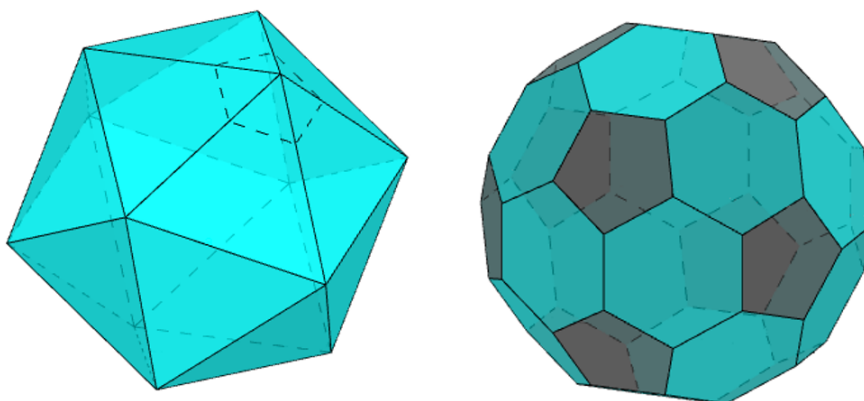
Portanto, o volume do dodecaedro truncado é dado por

$$\begin{aligned} v(\Omega) - 20 \cdot v(\mu) &= a^3 \cdot \left(\frac{175 + 75\sqrt{5}}{4} \right) - 20 \cdot a^3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{24} \right) \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{175 + 75\sqrt{5}}{4} \right) - 5 \cdot a^3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{6} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{495 + 235\sqrt{5}}{12} \right). \quad \blacksquare \quad (6.28) \end{aligned}$$

6.5 Icosaedro truncado

O icosaedro truncado, pode ser obtido a partir do truncamento tipo 2 em um icosaedro regular. Feito o truncamento, as faces do icosaedro passam de triângulos equiláteros para hexágonos regulares, além disso, surgem doze faces pentagonais, e todas as faces com arestas de mesmo comprimento.

Figura 42 – Icosaedro truncado: truncamento do tipo 2 do icosaedro.

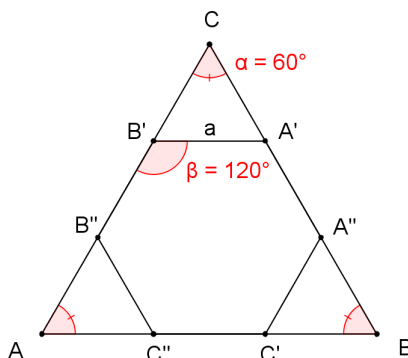


Para determinarmos o volume do icosaedro truncado de aresta α , podemos calcular o volume de um icosaedro regular Ω e em seguida subtrair pelo o volume de 12 pirâmide, pois ao efetuamos o truncamento tipo 2 em Ω , cada vértice deste sólido formará uma pirâmide de base pentagonal a qual denotaremos como μ .

Volume do icosaedro regular Ω :

Agora, é necessário que determinemos o volume de Ω em função de α . Então, inicialmente vamos determinar o comprimento da aresta de Ω . Para tanto, considere uma de suas faces como $\triangle ABC$ ilustrada na figura 43.

Figura 43 – Icosaedro truncado: face do icosaedro Ω .



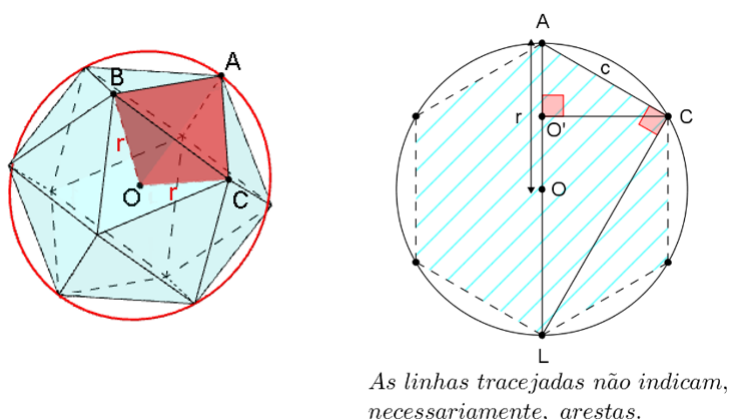
$A'A''C''C''B''B'$ é uma face do icosaedro truncado. Logo, pela regularidade desta face,

seus ângulos internos medem 120 graus, os triângulos $\triangle AC''B''$, $\triangle BC'A''$ e $\triangle CA'B'$ são equiângulos, portanto equiláteros e com isso concluímos que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 3a$.

Com o comprimento da aresta de Ω conhecido, iremos determinar seu volume. Para isso, consideraremos inicialmente este sólido inscrito em uma esfera Λ de raio r , o que é possível pois todo sólido regular é inscritível, em especial o icosaedro regular.

Para determinarmos o volume de Ω , calcularemos o volume de uma pirâmide σ . Convenientemente, iremos definir σ de modo que o centro de Ω será o vértice de σ , assim como uma de suas faces será a base de σ . Neste sentido, o volume de Ω será vinte vezes o volume de σ , tendo em vista que um icosaedro qualquer possui vinte faces, e por cada uma dessas faces podemos definir uma pirâmide σ . Além disso, definida desta forma, as arestas das faces laterais de σ têm comprimento r . Com isso, é necessário determinar r a fim de encontrarmos o volume de σ , e para isso analisaremos uma seção transversal de Ω inscrito em Λ . Considere a figura 44.

Figura 44 – Icosaedro truncado: seção transversal de Ω .



A seção transversal sugerida, aproxima-se de um hexágono regular de aresta $c = 3a$ inscrito em um círculo de raio r , o que facilitaria nosso cálculo. Porém, a seção transversal não é um hexágono, pois em um icosaedro no máximo cinco vértices são coplanares. Assim, para determinarmos r , note a semelhança entre $\triangle ACL$ e $\triangle AO'C$, pelo critério AA. Logo,

$$\frac{\overline{AO'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AL}} \Rightarrow c^2 = 2r \cdot (\overline{AO'}) \quad (i). \quad (6.29)$$

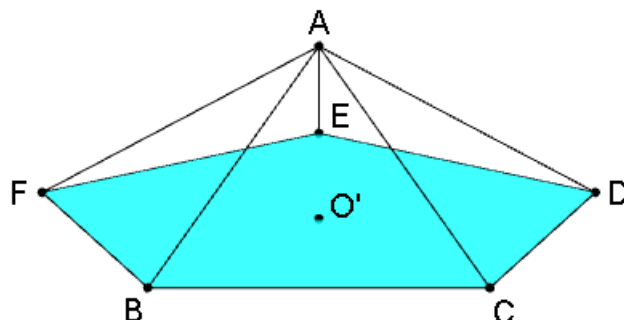
Para determinarmos $\overline{AO'}$, vamos estudar a seguinte pirâmide θ , recorte de Ω .

θ é uma pirâmide de base pentagonal com vértice em A . É importante ressaltar que tal base é convexa, pois estamos tomando vértices de Ω equidistantes de A . Considere o ponto O' centro da base $BCDEF$, por toda simetria e regularidade do icosaedro, temos $\triangle AO'C$ reto em O' .

Note que $\angle BO'C$ mede 72 graus, assim pela lei dos cossenos, temos

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{BO'})^2 + (\overline{CO'})^2 - 2 \cdot (\overline{BO'}) \cdot (\overline{CO'}) \cdot \cos 72^\circ$$

Figura 45 – Icosaedro truncado: pirâmide θ .



$$c^2 = 2 \cdot (\overline{BO'})^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\right) = (\overline{BO'})^2 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$\Rightarrow (\overline{BO'})^2 = \frac{2c^2}{5-\sqrt{5}}. \tag{6.30}$$

Agora, pelo teorema de Pitágoras em $\triangle AO'B$, vem

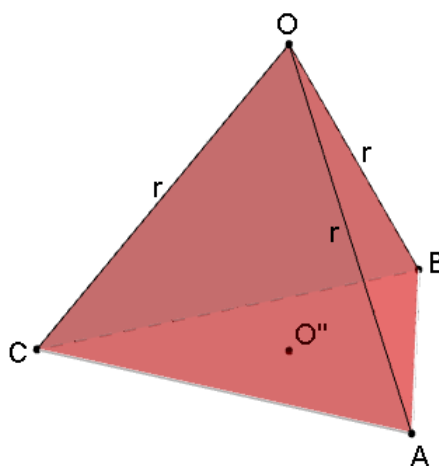
$$(\overline{AO'})^2 = c^2 - \frac{2c^2}{5-\sqrt{5}} = c^2 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right) \tag{ii}. \tag{6.31}$$

Substituindo o resultado de (ii) em (i), temos

$$c^2 = 2rc \cdot \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} \Rightarrow r = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}. \tag{6.32}$$

Agora temos elementos suficientes para encontramos a altura de σ e com isso encontrarmos também seu volume.

Figura 46 – Icosaedro truncado: pirâmide σ .



Da figura 46, definimos o baricentro de $\triangle ABC$ em O'' , desse modo OO'' é altura de σ , logo

$$\begin{aligned} (\overline{OO''})^2 &= (\overline{CO})^2 - (\overline{CO''})^2 = r^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow (\overline{OO''})^2 = \frac{c^2}{4} \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right) - \frac{c^2}{3} \\ &= \frac{c^2}{12} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}\right) \Rightarrow \overline{OO''} = c \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Portanto, o volume de σ será dado por

$$v(\sigma) = \frac{1}{3} \cdot \left(c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \overline{OO''} = \frac{1}{3} \cdot \left(c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot c \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}}\right) = c^3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{48}\right). \quad (6.34)$$

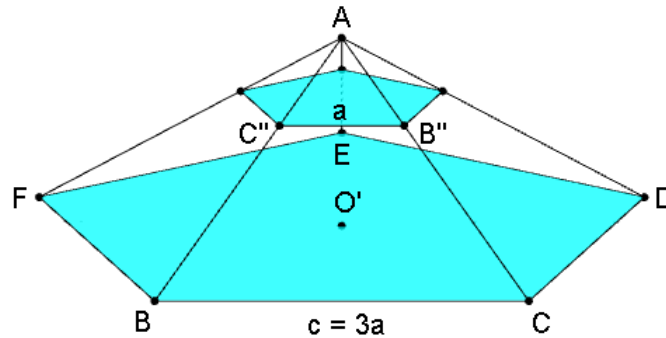
Já o volume de Ω será

$$20 \cdot v(\sigma) = 5c^3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{12}\right) = (3a)^3 \cdot \left(\frac{15 + 5\sqrt{5}}{12}\right) = a^3 \cdot \left(\frac{135 + 45\sqrt{5}}{4}\right). \quad (6.35)$$

Volume da pirâmide μ :

Para determinarmos o volume de μ , é suficiente percebermos sua semelhança com a pirâmide θ . Como ilustramos a figura 47.

Figura 47 – Icosaedro truncado: pirâmide μ .



Desse modo, asseguramos que

$$\frac{v(\theta)}{v(\mu)} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}}\right)^3 = \left(\frac{3a}{a}\right)^3 \Rightarrow v(\mu) = \frac{v(\theta)}{27}. \quad (6.36)$$

O volume de θ por sua vez é dado por

$$\begin{aligned} v(\theta) &= \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot ((\overline{BO'}) \cdot (\overline{CO'}) \cdot \sin 72^\circ) \cdot (\overline{AO'}) \\ &= \frac{5}{3} \cdot (\overline{BO'})^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 5}{8}}\right) \cdot c \cdot \left(\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}}\right) = \frac{5c^3}{3} \cdot \left(\frac{2}{5 - \sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 5}{4\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5c^3}{3} \left(\frac{\sqrt{5}+5}{10\sqrt{5}-10} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right) = c^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+5}{24} \right) = 27a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+5}{24} \right) \\
&\Rightarrow v(\mu) = a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+5}{24} \right). \tag{6.37}
\end{aligned}$$

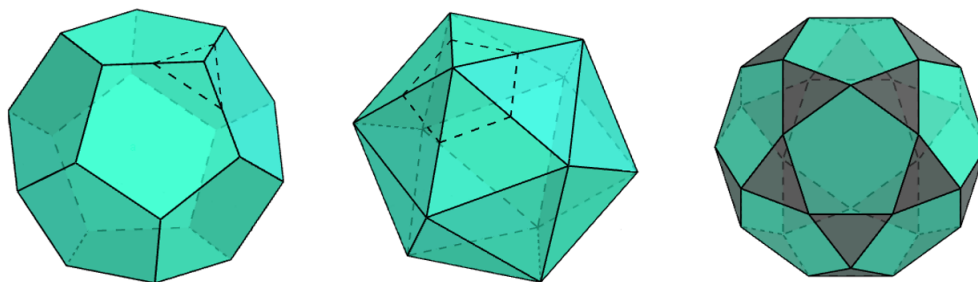
Portanto, o volume do icosaedro truncado será

$$\begin{aligned}
v(\Omega) - 12 \cdot v(\mu) &= a^3 \cdot \left(\frac{135 + 45\sqrt{5}}{4} \right) - 12 \cdot \left(a^3 \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{24} \right) \right) \\
&= a^3 \cdot \left(\frac{125 - 43\sqrt{5}}{4} \right). \blacksquare \tag{6.38}
\end{aligned}$$

6.6 Icosidodecaedro

O icosidodecaedro pode ser obtido pelo truncamento tipo 1 tanto do dodecaedro, quanto do icosaedro. Em ambos os casos serão geradas doze faces pentagonais e vinte faces triangulares. Assim, podemos calcular o volume do icosidodecaedro a partir de qualquer um destes dois sólidos. Mas vamos abordar somente com o icosaedro e ratificamos que a abordagem com o dodecaedro segue raciocínio análogo.

Figura 48 – Icosidodecaedro: truncamento do tipo 1 do dodecaedro e icosaedro.



Já mostramos como determinar o volume de um icosaedro, então precisamos mensurar o volume perdido na lapidação do icosidodecaedro. Tal volume perdido corresponde a soma dos volumes de doze pirâmides μ de base pentagonal. Desse modo, calcularemos o volume de um icosaedro Ω de aresta c em função de a , em que a é o comprimento da aresta do icosidodecaedro. Posteriormente, iremos fazer o desconto dos excessos a fim de chegarmos ao volume do sólido.

Volume do icosaedro Ω :

Como foi dito, o processo de truncamento tipo 1 é o adotado na construção do icosidodecaedro. O que implica que a aresta do icosaedro tem comprimento $2a$, uma vez que

estamos adotando a aresta do icosidodecaedro medido a . Por tanto, de 6.35 temos

$$v(\Omega) = 5c^3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{12} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{30 + 10\sqrt{5}}{3} \right). \quad (6.39)$$

Volume da pirâmide μ :

Por sua vez, μ é uma pirâmide de base pentagonal com todas as arestas medindo a . Portanto, o estudo do seu volume corresponde ao que foi feito em 6.37. Assim,

$$v(\mu) = a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 5}{24} \right). \quad (6.40)$$

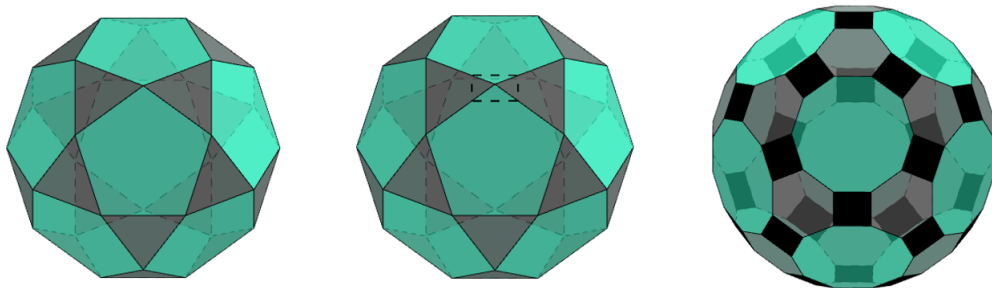
Com posse destas informações, teremos o volume do icosidodecaedro dado por

$$v(\Omega) - 12 \cdot v(\mu) = a^3 \cdot \left(\frac{30 + 10\sqrt{5}}{3} \right) - a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 5}{2} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{45 + 17\sqrt{5}}{6} \right). \blacksquare \quad (6.41)$$

6.7 Icosidodecaedro truncado

Novamente o nome do sólido sugere a sua forma de obtenção. Neste caso, o icosidodecaedro truncado é obtido pelo truncamento tipo 2 do icosidodecaedro, este por sua vez é um sólido arquimediano, logo suas faces são de mais de um tipo de polígono, implicando que o truncamento não gere diretamente um outro sólido arquimediano, visto que os cortes não serão sempre homogêneos. Assim, somente o truncamento irá gerar faces com polígonos não regulares. Entretanto, podemos fazer ajustes de modo que tenhamos todas as faces com mesma aresta.

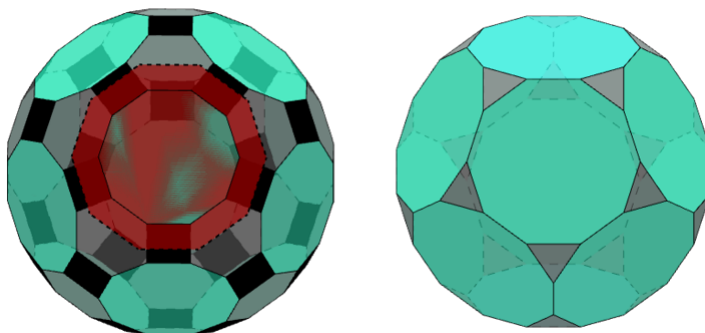
Figura 49 – Icosidodecaedro truncado: truncamento do tipo 2 do icosidodecaedro.



O pensamento para procedermos com o cálculo do volume deste sólido é análogo ao que fizemos para sólidos anteriores. Porém, precisamos definir antes um sólido Ω em que calcularemos seu volume em função da aresta de tamanho a do icosidodecaedro truncado e em seguida retiraremos o valor excedente. No contexto deste problema, Ω poderia ser um icosidodecaedro, porém propomos e acreditamos ser mais conveniente trabalhar com o sólido que determinaremos a seguir.

A ideia inicial para encontrar Ω é, homogeneamente dilatar a superfície de todas as faces decagonais do icosidodecaedro truncado até que essas faces se encontrem duas a duas. Ao fazermos esta dilatação, as faces quadradas desaparecem, as faces hexagonais dão lugar a faces triangulares e as faces decagonais permanecem, porém com dimensões maiores logicamente. Com isso, o sólido Ω que encontraremos é um dodecaedro truncado.

Figura 50 – Icosidodecaedro truncado: dilatação das faces do icosidodecaedro truncado.



Como já sabemos como calcular o volume do dodecaedro truncado, precisaremos determinar o comprimento da aresta deste sólido em função de a e então calcular seu volume em função deste parâmetro. Concluída esta etapa, iremos calcular o volume do icosidodecaedro truncado, retirando o volume excedente, que por sua vez será determinado por dois sólidos, μ e σ definidos a seguir (vide figuras 51 e 54).

μ : prisma reto de base triangular, delimitado sobre uma face quadrada do icosidodecaedro truncado e sob duas faces decagonais de Ω .

σ : região delimitada inferiormente por uma face hexagonal do icosidodecaedro truncado, superiormente pela face triangular de Ω e lateralmente pelas faces triangulares dos prismas μ .

Feito isso, para encontrarmos relações entre os volumes do icosidodecaedro truncado de aresta a e Ω , partiremos do fato de o ângulo diédrico entre as faces decagonais de Ω ser igual ao ângulo diédrico das faces de um dodecaedro, pois o mesmo é obtido através do truncamento do dodecaedro. Com esta observação, tomaremos o prisma reto μ de base triangular (figura 51).

Note que a base de μ é semelhante a base do prisma λ , o qual trabalhamos na quarta seção deste capítulo (figura 38), em que abordamos sobre o volume do dodecaedro truncado. Assim, por meio desta semelhança ampliaremos o que sabemos até aqui sobre o ângulo diédrico do dodecaedro.

Figura 51 – Icosidodecaedro truncado: prisma μ .

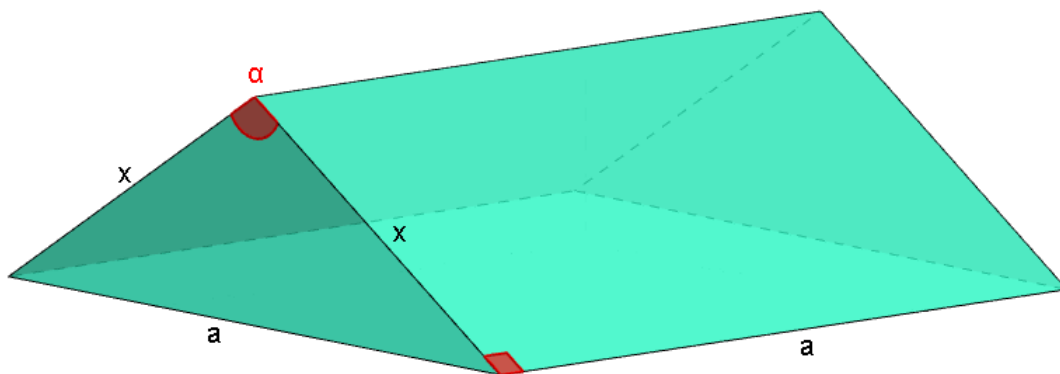
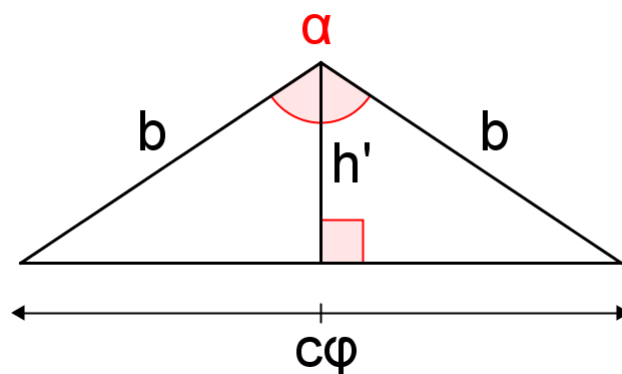


Figura 52 – Icosidodecaedro truncado: face do prisma λ .



Pelo teorema de Pitágoras, vem

$$b^2 = \left(\frac{c\varphi}{2}\right)^2 + (h')^2 = \frac{c^2}{4} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{c^2}{4} = c^2 \cdot \left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right). \quad (6.42)$$

Já pela lei dos cossenos, temos

$$\begin{aligned} (c\varphi)^2 &= 2b^2 \cdot (1 - \cos \alpha) \Rightarrow c^2 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 2c^2 \cdot \left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right) \cdot (1 - \cos \alpha) \\ \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right) &= (1 - \cos \alpha) = 2 \cdot \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{20}\right) \\ \Rightarrow \cos \alpha &= 1 - \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Agora, pelo teorema fundamental da trigonometria temos

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 = 1 - (\cos \alpha)^2 = 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \quad (6.44)$$

A partir desses resultados, podemos obter demais dimensões de μ e com isso encontrar também relações entre as arestas do icosidodecaedro truncado e de Ω .

Da base do prisma μ , podemos aplicar a lei dos cossenos a fim de determinarmos x , como segue

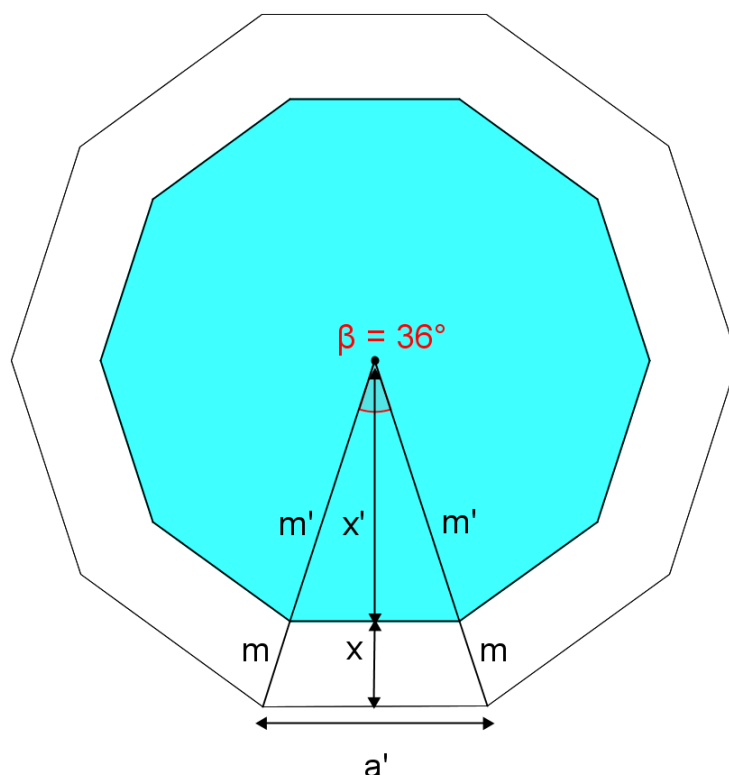
$$a^2 = 2x^2 \cdot (1 - \cos \alpha) = 2x^2 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5a^2}{5 + \sqrt{5}}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right). \quad (6.45)$$

Desse modo, o volume do prisma μ será dado por

$$\begin{aligned} v(\mu) &= a \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \text{sen } \alpha}{2}\right) = \frac{a}{2} \cdot \left(a^2 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right)\right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = a^3 \cdot \left(\frac{10\sqrt{5} - 10}{80}\right) \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{8}\right). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Agora, iremos determinar o comprimento da aresta do dodecaedro truncado Ω , em função de a , bem como encontraremos medidas que serão fundamentais para determinarmos o volume do sólido σ . Para tanto, tomaremos a' como a aresta de Ω . Observe a figura 53:

Figura 53 – Icosidodecaedro truncado: face decagonal de Ω .



Seja x' a apótema da face decagonal de aresta a e m' metade da diagonal desta face, então

$$\cos 72^\circ = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{m'} \Rightarrow \frac{a}{2} = m' \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) \Rightarrow m' = \frac{2a}{\sqrt{5} - 1} = a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right). \quad (6.47)$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 72^\circ = \frac{x'}{m'} &\Rightarrow \left(\frac{x'}{m'}\right)^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \Rightarrow (x')^2 = a^2 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8}\right) \\ &\Rightarrow x' = a \cdot \left(\sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{16}}\right) = a \cdot \left(\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Pela expansão que fizemos nas faces decagonais, teremos um novo decágono regular, o que garante as seguintes proporções

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a} = \frac{x' + x}{x'} = \frac{m' + m}{m'} &\Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{x}{x'} + 1 = \frac{m}{m'} + 1 \\ \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{a \cdot \left(\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}\right)}{a \cdot \left(\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}\right)} + 1 &= \left(\frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}\right) + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}}}\right) + 1 \\ \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5}) \cdot (5 - 2\sqrt{5})}{5}}\right) + 1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{35 - 15\sqrt{5}}{5}} + 1 = \sqrt{\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}} + 1 \\ \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}}{2} + 1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + 1 &\Rightarrow a' = a \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.49)$$

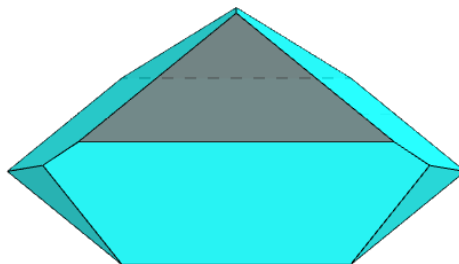
Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{m}{m'} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} &\Rightarrow m = a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = a \cdot \left(\frac{2\sqrt{5} - 2}{4}\right) \\ &\Rightarrow m = a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Volume do dodecaedro truncado Ω de aresta a' :

Com essas relações, já temos condições de determinar o volume de Ω , pois de 6.49 aplicado em 6.28, teremos

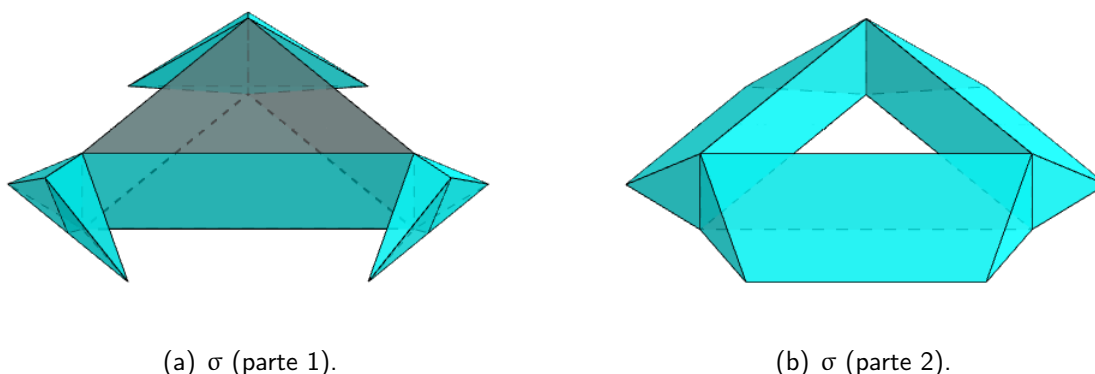
$$\begin{aligned} v(\Omega) &= (a')^3 \cdot \left(\frac{495 + 235\sqrt{5}}{12}\right) = \left(a \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)\right)^3 \cdot \left(\frac{495 + 235\sqrt{5}}{12}\right) \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{200 - 80\sqrt{5}}{8}\right) \cdot \left(\frac{495 + 235\sqrt{5}}{12}\right) = a^3 \cdot \left(\frac{12375 - 11750 + 5875\sqrt{5} - 4950\sqrt{5}}{12}\right) \\ &v(\Omega) = a^3 \cdot \left(\frac{625 + 925\sqrt{5}}{12}\right). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Figura 54 – Icosidodecaedro truncado: sólido σ .

Volume do sólido σ $v(\sigma)$:

Do modo como definimos σ , teremos a figura 54. Notavelmente σ é um sólido com propriedades desconhecidas, por tanto, direciona-nos à construção de estratégias alicerçadas na forma como o sólido foi definido, a fim de determinarmos seu volume.

Nossa proposta consiste em desmembrar σ em outros sólidos, dos quais alguns possuem propriedades conhecidas. Veja a figura 55.

Figura 55 – Icosidodecaedro truncado: desmembramento do sólido σ .

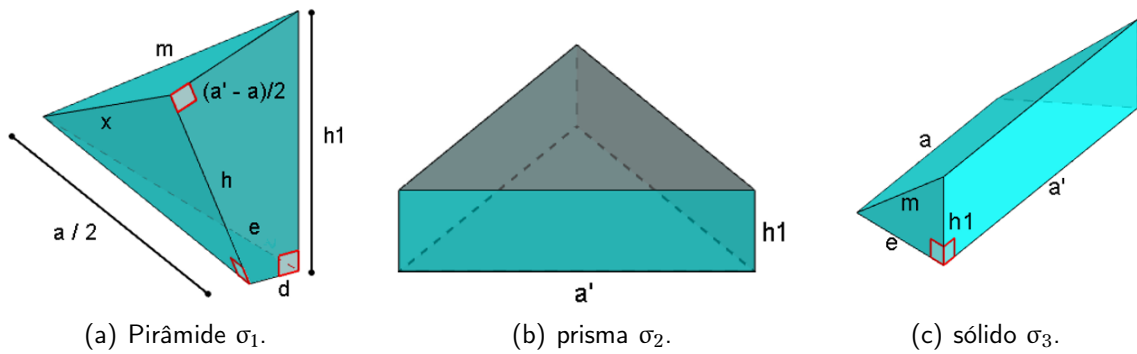
Na figura 55a temos uma região composta por seis pirâmides (σ_1) congruentes e um prisma reto (σ_2). Em seguida, na figura 55b temos a região complementar da região exposta na figura 55a em relação ao sólido σ . Tal região é composta por três sólidos (σ_3) de características não habituais. Esses sólidos possuem algumas de suas dimensões conhecidas, as quais estão expostas na figura 56.

Para que possamos determinar o volume desses três tipos de sólidos, é suficiente determinarmos, em função de α , as medidas desconhecidas, e , d , h e h_1 . Que por sua vez, determinaremos a partir da base de σ , como ilustra a figura 57.

Inicialmente, destacamos que $\overline{GJ} = \overline{IK} = \overline{HL} = d$ e os pontos G , I e H são pontos médios de \overline{FA} , \overline{BC} e \overline{DE} , respectivamente. Logo, do triângulo equilátero $\triangle AMF$, temos

$$d + \overline{JM} = \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (6.52)$$

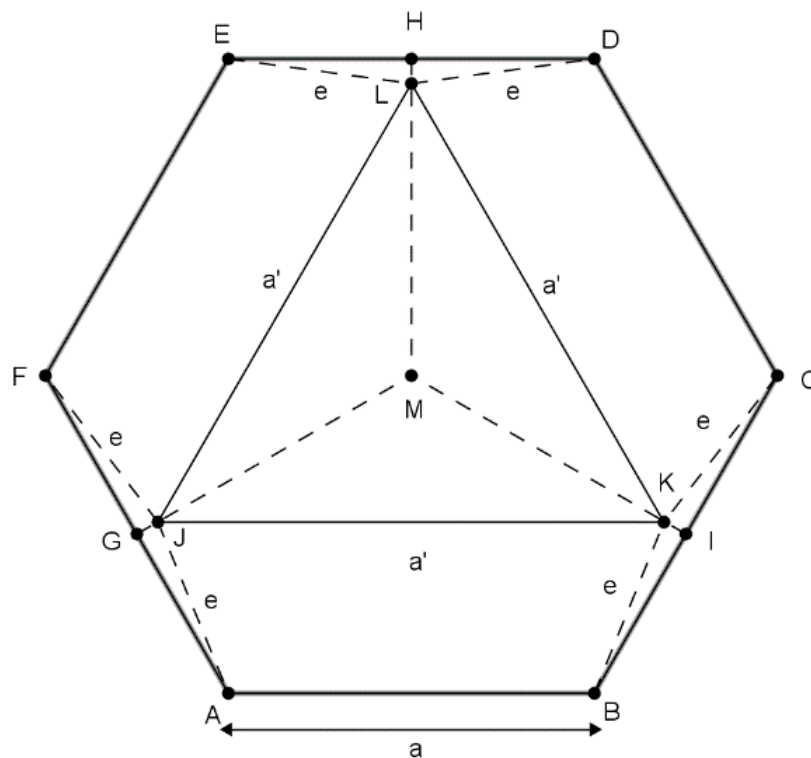
Figura 56 – Icosidodecaedro truncado: sólidos obtidos a partir de σ .



Através do triângulo equilátero $\triangle JKL$ (figura 57), pelo fato de M ser baricentro, é fácil ver que

$$\begin{aligned} \overline{JM} &= \frac{2}{3} \cdot \left(a' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = a' \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow d = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a' \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Rightarrow d &= a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - a \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a \cdot 3\sqrt{3} + a \cdot (\sqrt{5} - 5) \cdot \sqrt{3}}{6} \\ \Rightarrow d &= a \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - 2)}{6}. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Figura 57 – Icosidodecaedro truncado: base do sólido σ .



Agora, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $\triangle FGJ$ para obtermos e

$$\begin{aligned} e^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot (9 - 4\sqrt{5})}{36}\right) = \frac{3a^2 + a^2 \cdot (9 - 4\sqrt{5})}{12} \\ &\Rightarrow e^2 = a^2 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{3}\right). \end{aligned} \quad (6.54)$$

É fácil ver também que (vide figura 56c)

$$\begin{aligned} m^2 &= e^2 + (h_1)^2 \\ (h_1)^2 &= \left(a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)\right)^2 - a^2 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{3}\right) = \frac{3a^2 \cdot (6 - 2\sqrt{5}) - 4a^2 \cdot (3 - \sqrt{5})}{12} \\ &= a^2 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{12}\right) \Rightarrow h_1 = a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \quad (6.55)$$

Ainda pelo teorema de Pitágoras, temos (vide figura 56a)

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \\ \Rightarrow h^2 &= a^2 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right) - \frac{a^2}{4} = a^2 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}\right) \Rightarrow h = a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Com isso o volume da pirâmide σ_1 é dado por

$$\begin{aligned} v(\sigma_1) &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(h \cdot \left(\frac{a' - a}{2}\right) + d \cdot h_1\right)\right) \cdot \frac{a}{2} \\ &= \frac{a}{12} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) \cdot \left(\frac{a' - a}{2}\right) + a \cdot \left(\frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - 2)}{6}\right) \cdot a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{a}{12} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{8}\right) \cdot \left(a \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) - a\right) + a^2 \cdot \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{12}\right)\right) \\ &= \frac{a}{12} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{8}\right) \cdot a \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) + a^2 \cdot \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{12}\right)\right) \\ &= \frac{a}{12} \cdot \left(a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 2}{4}\right) + a^2 \cdot \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{12}\right)\right) \\ &= \frac{a^3}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{a^3}{144}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Por outro lado, o volume do prisma σ_2 é mais simples, dado por

$$\begin{aligned} v(\sigma_2) &= (a')^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot h_1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) \right)^2 \cdot a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}} \right) = a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{8} \right) \cdot a^2 \cdot \left(\frac{15 - 5\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{20\sqrt{5} - 40}{16} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{5\sqrt{5} - 10}{4} \right). \end{aligned} \quad (6.58)$$

O sólido σ_3 possui características pouco habituais. Portanto, para determinar seu volume formulamos nossa estratégia com base no volume de uma pirâmide e um prisma. Esses dois sólidos serão definidos a seguir. Considere a figura 58.

Seja o quadrilátero ABKJ a base de σ_3 . Pelos vértices A e B traçamos os segmentos perpendiculares ao lado JK. Em seguida, por esses segmentos unimos os dois triângulos $\triangle AA'J$ e $\triangle BB'K$. Desse modo, na perspectiva espacial formaremos uma pirâmide e como consequência um prisma, expostos na figura 59.

Aplicando o teorema de Pitágoras em $\triangle AA'J$, temos

$$\begin{aligned} (\overline{AA'})^2 &= e^2 - \left(\frac{a' - a}{2} \right)^2 \\ &= a^2 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{3} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right) - a \right)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{3} \right) - \frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{14 - 6\sqrt{5}}{4} \right) \\ &= a^2 \cdot \left(\frac{24 - 8\sqrt{5} - 21 + 9\sqrt{5}}{24} \right) = a^2 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{24} \right) = a^2 \cdot \left(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{48} \right) \\ &\Rightarrow \overline{AA'} = a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Com isso, o volume do sólido σ_3 é dado por

$$\begin{aligned} v(\sigma_3) &= \frac{1}{3} \cdot ((a' - a) \cdot h_1) \cdot (\overline{AA'}) + a \cdot \left(\frac{(\overline{AA'}) \cdot h_1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \cdot a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}} \right) \right) \cdot a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4\sqrt{3}} \right) + \frac{a}{2} \cdot \left(a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4\sqrt{3}} \right) \cdot a \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{4 \cdot (3 - \sqrt{5})}{144} \right) + a^3 \cdot \left(\frac{4}{48} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{24 - 4\sqrt{5}}{144} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{5}}{36} \right). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Figura 58 – Icosidodecaedro truncado: base do sólido σ_3 .

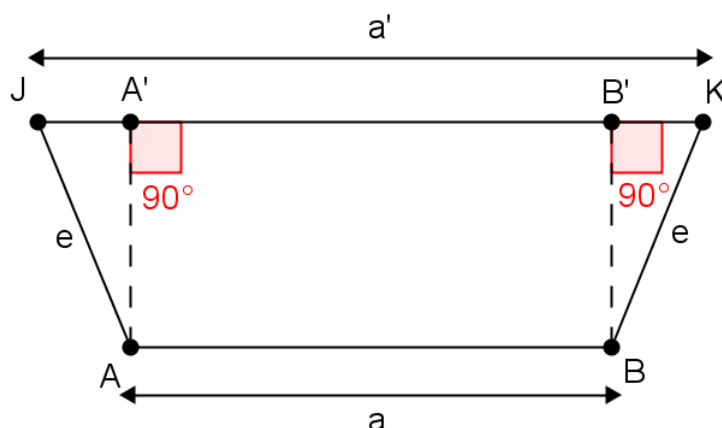
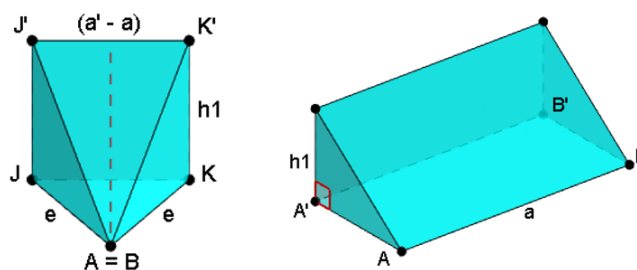


Figura 59 – Icosidodecaedro truncado: sólidos obtidos a partir de σ_3 .



(a) Pirâmide a partir de σ_3 .

(b) prisma a partir de σ_3 .

Note que, o volume de σ é dado por

$$v(\sigma) = 6 \cdot v(\sigma_1) + v(\sigma_2) + 3 \cdot v(\sigma_3) \quad (6.61)$$

Logo,

$$\begin{aligned} v(\sigma) &= 6 \cdot \left(\frac{a^3}{144}\right) + a^3 \cdot \left(\frac{5\sqrt{5}-10}{4}\right) + 3 \cdot \left(a^3 \cdot \left(\frac{6-\sqrt{5}}{36}\right)\right) \\ &= \frac{a^3}{24} + a^3 \cdot \left(\frac{5\sqrt{5}-10}{4}\right) + a^3 \cdot \left(\frac{6-\sqrt{5}}{12}\right) = a^3 \cdot \left(\frac{1+30\sqrt{5}-60+12-2\sqrt{5}}{24}\right) \\ &\Rightarrow v(\sigma) = a^3 \cdot \left(\frac{28\sqrt{5}-47}{24}\right). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Após este estudo, podemos calcular o volume do icosidodecaedro truncado dado por

$$v(\Omega) = 30 \cdot v(\mu) + 20 \cdot v(\sigma). \quad (6.63)$$

Lembrando que Ω é um dodecaedro truncado de aresta a' , temos

$$(a')^3 \cdot \left(\frac{495+235\sqrt{5}}{12}\right) = 30 \cdot \left(a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{8}\right)\right) + 20 \cdot \left(a^3 \cdot \left(\frac{28\sqrt{5}-47}{24}\right)\right). \quad (6.64)$$

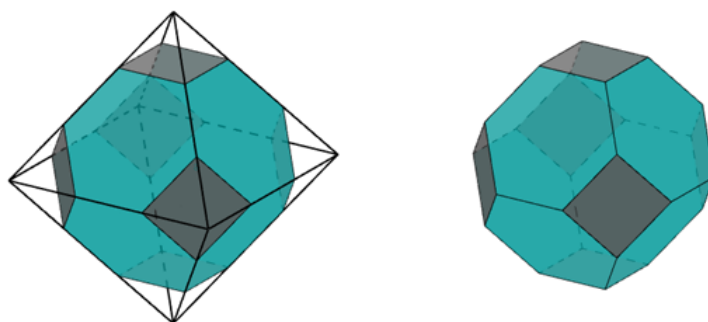
Por 6.51, vem $v(\Omega) - 30 \cdot v(\mu) - 20 \cdot v(\sigma)$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 \cdot \left(\frac{625 + 925\sqrt{5}}{12} \right) - a^3 \cdot \left(\frac{15 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{4} \right) - a^3 \cdot \left(\frac{5 \cdot (28\sqrt{5} - 47)}{6} \right) \\
 &= a^3 \cdot \left(\frac{625 + 925\sqrt{5} - 45\sqrt{5} + 45 - 280\sqrt{5} + 470}{12} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{1140 + 600\sqrt{5}}{12} \right) \\
 &= a^3 \cdot (95 + 50\sqrt{5}). \quad \blacksquare \tag{6.65}
 \end{aligned}$$

6.8 Octaedro truncado

O octaedro truncado é obtido pelo truncamento tipo 2 do octaedro regular. Ao efetuarmos o truncamento serão geradas seis faces quadradas e as faces triangulares do octaedro são convertidas em hexágonos regulares.

Figura 60 – Octaedro truncado: truncamento do tipo 2 no octaedro.



Para determinarmos o volume do octaedro truncado, podemos calcular o volume de um octaedro Ω e por consequência do truncamento, retirar o volume excedente. O excesso por sua vez corresponde à soma dos volumes de seis pirâmides μ de base quadrada. Para tanto, dada a aresta a do octaedro truncado, necessitamos conhecer os volumes de Ω e μ em função de a .

Observe a figura 61. Perceba que, dado a aresta a do octaedro truncado, teremos $\overline{AI} = \overline{ID} = \overline{DA} = a$ pois $\triangle AID$ é equiângulo, logo equilátero. Isso implica que a aresta do octaedro Ω tem comprimento $3a$.

Desse modo, para determinarmos o volume da pirâmide μ é necessário conhecer sua altura.

Da pirâmide μ apresentada na figura 62, temos $\overline{CG} = a$ e \overline{OG} medindo metade da diagonal de um quadrado de aresta a . Logo, do triângulo retângulo $\triangle COG$, temos

$$(\overline{CO})^2 = a^2 - \left(a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \overline{CO} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{6.66}$$

Figura 61 – Octaedro truncado: face de Ω .

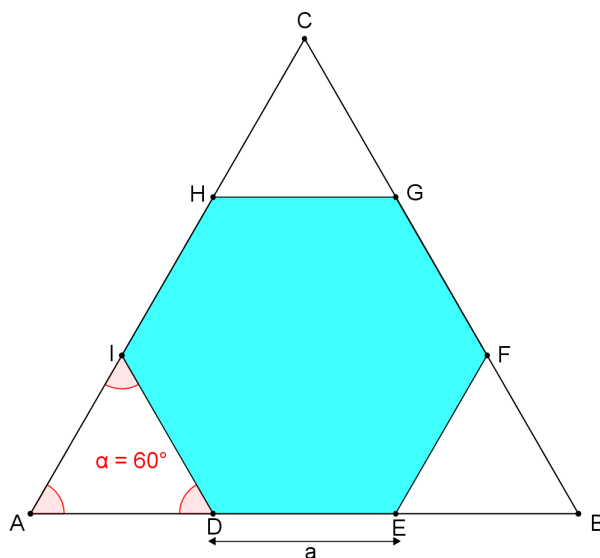
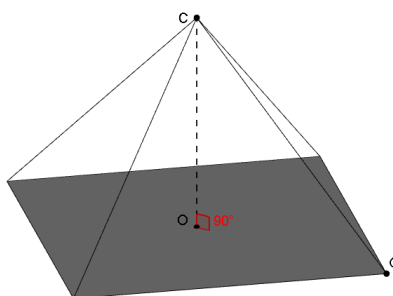


Figura 62 – Octaedro truncado: pirâmide μ .



Volume da pirâmide μ :

Assim, temos

$$v(\mu) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot (\overline{CO}) = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}. \quad (6.67)$$

Volume do octaedro Ω :

Podemos desmembrar Ω em duas pirâmides μ' de base quadrada. Dessa forma, tais pirâmides serão iguais entre si e semelhantes à pirâmide μ . Além disso, a razão de semelhança entre os lados homólogos dessas pirâmides é de 3:1. Portanto,

$$\frac{v(\mu')}{v(\mu)} = \left(\frac{3}{1}\right)^3 \Rightarrow v(\mu') = 27 \cdot a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = a^3 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v(\Omega) = a^3 \cdot 9\sqrt{2}. \quad (6.68)$$

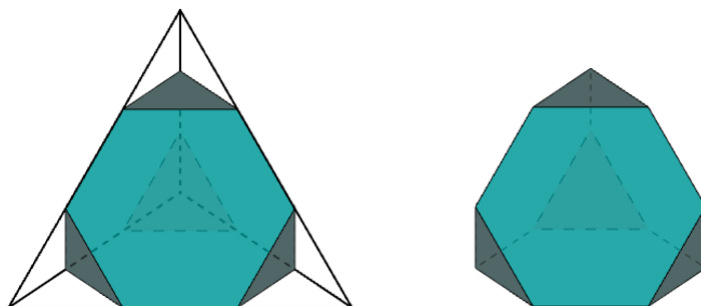
Assim, o volume do octaedro truncado é dado por

$$v(\Omega) - 6 \cdot v(\mu) = a^3 \cdot 9\sqrt{2} - a^3 \cdot \sqrt{2} = a^3 \cdot 8\sqrt{2}. \quad \blacksquare \quad (6.69)$$

6.9 Tetraedro truncado

O tetraedro truncado é obtido a partir do truncamento tipo 2 do tetraedro regular. O processo converte as faces triangulares em hexagonais além do acréscimo de três novas faces triangulares. Logo, para determinar o volume do tetraedro truncado seguiremos o mesmo raciocínio o qual estamos habituados a proceder.

Figura 63 – Tetraedro truncado: truncamento do tipo 2 do tetraedro.



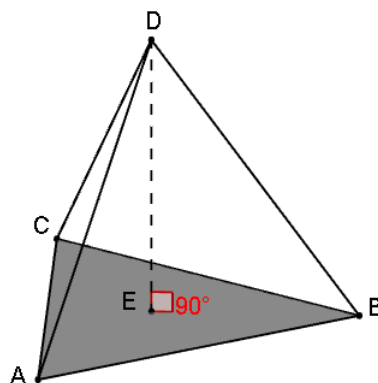
Para determinarmos o volume do tetraedro truncado de aresta α , iremos encontrar o volume de um tetraedro Ω e em seguida faremos o desconto do excesso, que para esta situação equivale à soma dos volumes de quatro pirâmides μ de base triangular (tetraedro menor da figura 63).

A figura 61 também é útil para entendermos as propriedades das faces do tetraedro Ω em questão. Logo, podemos concluir que, dado a aresta α do tetraedro truncado, a aresta de Ω terá comprimento 3α .

Volume da pirâmide μ :

O volume da pirâmide μ é reduzido ao volume de um tetraedro regular de aresta α . O qual podemos encontrar do seguinte modo:

Figura 64 – Tetraedro truncado: pirâmide μ .



Seja E o baricentro do triângulo equilátero $\triangle ABC$, temos \overline{EB} igual a dois terços da altura do mesmo triângulo. Assim, do triângulo $\triangle BDE$ vem

$$\begin{aligned} (\overline{DE})^2 &= a^2 - \left(a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow \overline{DE} = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}. \\ \Rightarrow v(\mu) &= \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Agora, pelo fato de Ω também ser um tetraedro temos

$$v(\Omega) = (3a)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = a^3 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4}. \quad (6.71)$$

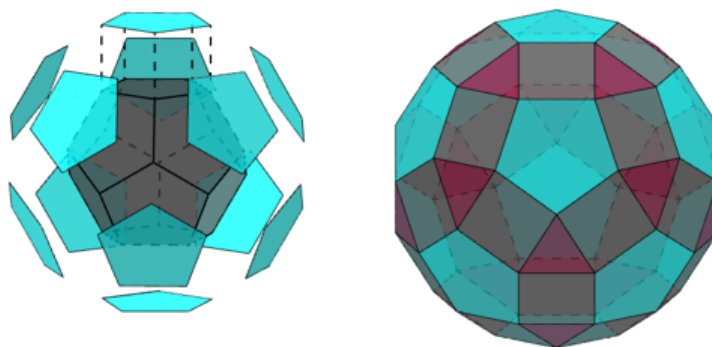
Assim, o volume do tetraedro truncado será dado por

$$v(\Omega) - 4 \cdot v(\mu) = a^3 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} - a^3 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{12} = a^3 \cdot \frac{23\sqrt{2}}{12}. \quad \blacksquare \quad (6.72)$$

6.10 Rombicosidodecaedro

Como já foi bastante enfatizado neste trabalho, o nome do sólido estudado diz muito a respeito da sua forma de construção. Para o rombicosidodecaedro, podemos afirmar que sua construção é por meio do processo de expansão das faces de um sólido de Platão. Podemos obter o rombicosidodecaedro a partir de um sólido platônico por dois modos, o primeiro usando como sólido primitivo um dodecaedro. Em que subsequente a expansão das faces pentagonais, preenche-se os espaços vazios com quadrados e triângulos regulares, e todos estes polígonos com mesma aresta do sólido original. Por outro lado, podemos escolher também como sólido primitivo um icosaedro, porém a diferença no processo seria os polígonos usados no preenchimento dos espaços vazios, que por sua vez seriam quadrados e pentágonos.

Figura 65 – Rombicosidodecaedro: expansão das faces do dodecaedro.



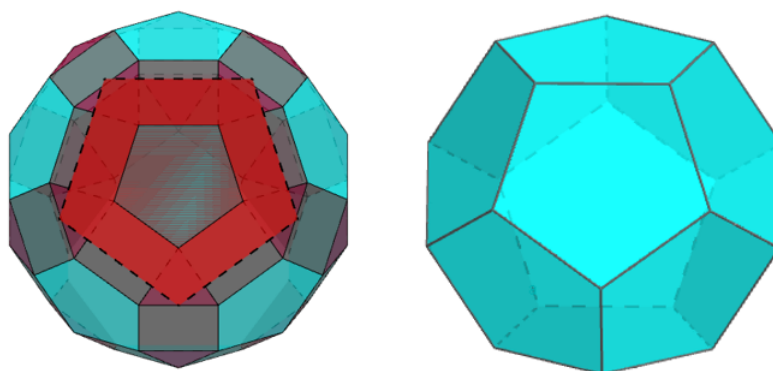
Diante dessas alternativas de construção do rombicosidodecaedro, podemos calcular o volume deste sólido partindo de um dodecaedro ou icosaedro. Desse modo, trabalharemos

com o dodecaedro e asseguramos que o processo pode ser conduzido optando também pelo icosaedro.

Para o rombicododecaedro, apresentaremos duas alternativas de cálculos que cheguem à uma mesma generalização do seu volume mediante ao comprimento de sua aresta. A primeira dessas alternativas consiste em determinar o volume de um dodecaedro Ω (descreveremos adiante, como obter Ω a partir do rombicododecaedro), em seguida diminuir pelo volume excedente em relação ao rombicododecaedro, o que segue ao raciocínio usado para sólidos anteriores. Já o segundo modo, está mais relacionado à forma como o rombicododecaedro é obtido, ou seja, pela expansão de faces de um sólido platônico (um dodecaedro, por exemplo). Para esta segunda alternativa, a ideia será determinar o volume de um dodecaedro λ adotado para obter o rombicododecaedro, e em seguida adicionar este valor ao volume do espaço gerado na expansão das faces.

Para a primeira ideia, conhecendo apenas o rombicododecaedro de aresta α , devemos usá-lo como ponto de partida para criação de Ω . Para tanto, a estratégia segue semelhante ao que fizemos para o icosidodecaedro truncado, no qual fizemos uma dilatação das suas faces decagonais a fim de obtermos um dodecaedro truncado. Aqui, faremos uma dilatação superficial e de forma homogenia em todas as faces pentagonais do rombicododecaedro até que em certo ponto da dilatação, as faces tangenciam-se e formem o dodecaedro Ω . Como sugere a figura 66.

Figura 66 – Rombicododecaedro: dilatação das faces do dodecaedro.



Para que tenhamos condições de determinar o volume de Ω em função de α , é suficiente descobirmos o comprimento de sua aresta em função deste parâmetro. Para tanto, iremos determinar tal valor fazendo uso da mesma ideia que utilizamos na situação do icosidodecaedro truncado. Em virtude disto, algumas linhas de cálculo serão ocultadas.

Inicialmente, iremos dividir a região que compreende o volume excedente em dois grupos, um formado pelos sólidos μ e o outro pelos sólidos σ . Sólidos estes definidos a seguir.

μ : prisma reto de base triangular, delimitado sobre uma face quadrada do rombicododeca-

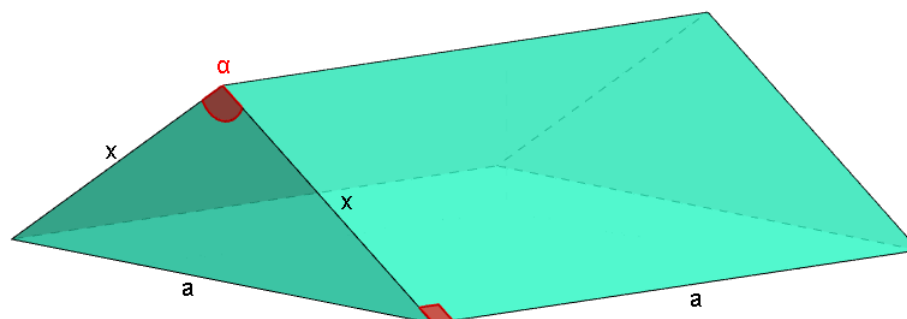
edro e sob duas faces pentagonais de Ω .

σ : região delimitada inferiormente por uma face triangular do rombicododecaedro, superiormente pelas faces pentagonais de Ω e lateralmente pelas faces de μ .

Optamos por esta divisão para detalhar os cálculos ao nosso gosto.

Através do sólido μ , podemos entender como a dilatação das faces do rombicododecaedro altera o tamanho das arestas. Visto que pela dilatação que propomos, o sólido gerado é um dodecaedro, portanto, entre tal sólido e o prisma μ há um ângulo diédrico em comum.

Figura 67 – Rombicododecaedro: sólido μ .



Note que já sabemos algumas informações sobre μ , como:

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ e } \operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \quad (6.73)$$

Onde α é um ângulo diédrico do dodecaedro. Assim, podemos utilizar a lei dos cossenos para determinar x :

$$a^2 = 2x^2 \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (6.74)$$

Por 6.45, temos

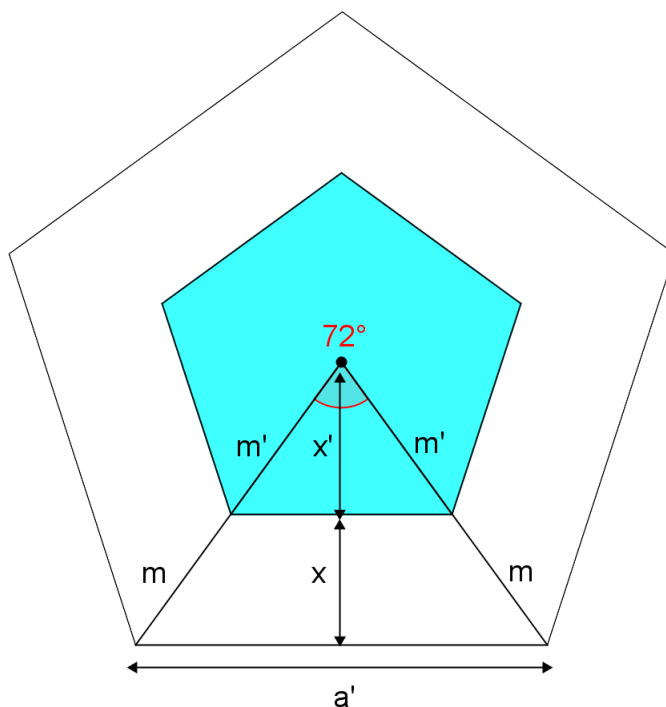
$$x = a \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}. \quad (6.75)$$

A partir disto iremos determinar o comprimento da aresta α' de Ω em função de a . Bem como encontraremos medidas que serão fundamentais para calcular o volume do rombicododecaedro. Para tanto, tomaremos a figura 68 como auxiliar.

A figura 68 representa a dilatação das faces pentagonais do rombicododecaedro, em que x' é apótema da face pentagonal do sólido. E por esta dilatação, temos a semelhança entre os pentágonos apresentados, logo

$$\frac{\alpha'}{a} = \frac{x + x'}{x'} = \frac{m + m'}{m'} \Rightarrow \frac{x}{x'} + 1 = \frac{m}{m'} + 1. \quad (6.76)$$

Figura 68 – Rombicosidodecaedro: expansão das faces pentagonais.



Agora, note que pela lei dos cossenos

$$a^2 = 2(m')^2 \cdot (1 - \cos 72^\circ)$$

$$a^2 = 2(m')^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\right) = 2(m')^2 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right) \Rightarrow (m')^2 = \frac{2a^2}{5-\sqrt{5}}$$

$$(m')^2 = a^2 \cdot \left(\frac{2}{5-\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{20}\right) \Rightarrow m' = a \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}. \quad (6.77)$$

Conhecendo m' , podemos utilizar o teorema de Pitágoras para determinar a apótema x' , do seguinte modo

$$(m')^2 = \frac{a^2}{4} + (x')^2 \Rightarrow (x')^2 = (m')^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{5-\sqrt{5}} - \frac{a^2}{4}$$

$$(x')^2 = a^2 \cdot \left(\frac{10+2\sqrt{5}-5}{20}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\right)$$

$$\Rightarrow x' = a \cdot \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}. \quad (6.78)$$

Logo,

$$\frac{x}{x'} = \frac{a \cdot \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}}{a \cdot \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \cdot \sqrt{\frac{20}{5+2\sqrt{5}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{35-15\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{\frac{35-15\sqrt{5}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{70-30\sqrt{5}}{4}} = \frac{3\sqrt{5}-5}{2}.
\end{aligned} \tag{6.79}$$

Portanto, a aresta de Ω pode ser determinada pela seguinte razão,

$$\frac{a'}{a} = \frac{3\sqrt{5}-5}{2} + 1 \Rightarrow a' = a \cdot \left(\frac{3\sqrt{5}-3}{2}\right). \tag{6.80}$$

Volume do sólido Ω :

Desse modo, temos condições de determinar o volume de Ω , visto que por 6.23 sabemos calcular o volume de um dodecaedro qualquer, dado sua aresta. Assim,

$$\begin{aligned}
v(\Omega) &= (a')^3 \cdot \left(\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\right) \\
&= 27a^3 \cdot \left(\frac{5\sqrt{5}-3 \cdot 5+3\sqrt{5}-1}{8}\right) \cdot \left(\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\right) \\
&= 27a^3 \cdot \left(\frac{8\sqrt{5}-16}{8}\right) \cdot \left(\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\right) \\
&= \frac{27a^3}{4} \cdot (\sqrt{5}-2) \cdot (15+7\sqrt{5}) \\
&= a^3 \cdot \left(\frac{27\sqrt{5}+135}{4}\right).
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Com posse de todas essas informações, temos todas as propriedades necessárias para determinarmos o volume do rombicosidodecaedro. Pois, como já temos o volume de Ω bem como várias de suas medidas segmentares e angulares, resta-nos calcular e descontar o volume excedente, o qual dividimos em dois grupos. O grupo dos sólidos μ e o grupo dos sólidos σ , já descritos.

Volume do prisma μ :

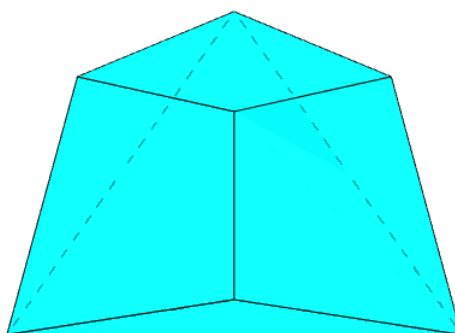
Tendo em vista que definimos μ como um prisma reto de base triangular e conhecendo suas dimensões, temos

$$v(\mu) = \frac{x^2 \cdot \text{sen } \alpha}{2} \cdot a$$

$$a^2 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{a}{2} = a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{8}\right). \quad (6.82)$$

Volume do sólido σ :

Figura 69 – Rombicosidodecaedro: sólido σ .

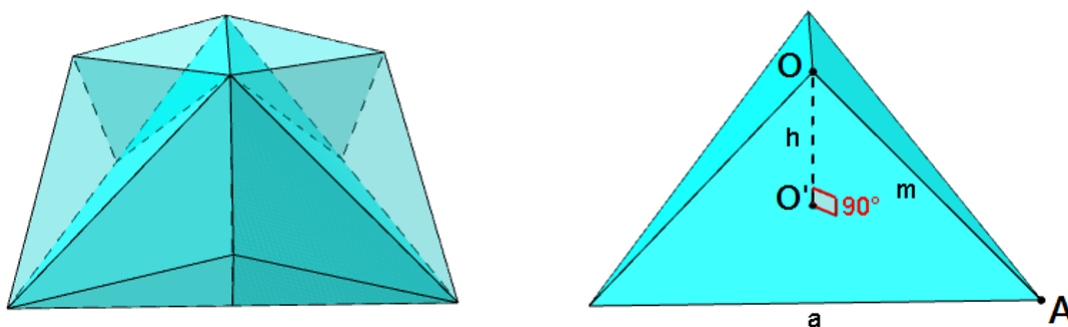


O sólido σ tem características não habituais, e por isso, a fim de obtermos seu volume formaremos dois novos grupos de sólidos. O primeiro grupo é formado apenas por uma pirâmide σ_1 , já o segundo será a região complementar composta por três pirâmides σ_2 .

Delimitação dos sólidos σ_1 e σ_2 :

Para a pirâmide σ_1 , tomaremos como sua base uma face triangular do rombosidodecaedro e seu vértice principal é comum ao vértice do dodecaedro Ω mais próxima à base (figura 70).

Figura 70 – Rombicosidodecaedro: obtenção da pirâmide σ_1 .



Já as pirâmides σ_2 , têm boa parte de suas dimensões conhecidas, e indicamos estas na figura 71.

Com essa breve descrição dos sólidos σ_1 e σ_2 já podemos direcionar nosso olhar para o cálculo do volume destes sólidos. Para a pirâmide σ_1 é necessário determinar sua altura, para tanto destacamos o fato do ponto O' (figura 70) ser baricentro da base da pirâmide. Pois o

Aplicando o valor de m em 6.83, temos

$$\begin{aligned} h^2 &= a^2 \cdot (5 - 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3} = a^2 \cdot \left(\frac{14 - 6\sqrt{5}}{3} \right) \\ \Rightarrow h &= a \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (6.86)$$

Portanto, podemos agora determinar o volume de σ_1 do seguinte modo:

$$\begin{aligned} v(\sigma_1) &= \frac{1}{3} \cdot \left(a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot h \\ \Rightarrow v(\sigma_1) &= \left(a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \right) \cdot a \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{12} \right). \end{aligned} \quad (6.87)$$

Para a pirâmide σ_2 tomaremos como base do sólido uma face que é comum a um dos prismas μ que estudamos, pois assim, não precisaremos nos preocuparmos em descobrir sua altura. Assim, com o auxílio das dimensões que sinalizamos na figura 71, temos o volume de σ_2 calculado do seguinte modo:

$$v(\sigma_2) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a \cdot h'}{2} \right) \cdot \left(\frac{a' - a}{2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot \text{sen } \alpha}{2} \right) \cdot \left(\frac{a' - a}{2} \right) \quad (6.88)$$

Como os valores de x , $\text{sen } \alpha$ e a' já são todos conhecidos em função de a , temos

$$\begin{aligned} v(\sigma_2) &= \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \cdot \left(\frac{a' - a}{2} \right) = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{5} - 5}{40} \right) \cdot (a' - a) \\ &= a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{48} \right) \cdot \left(a \cdot \left(\frac{3\sqrt{5} - 3}{2} \right) - a \right) = a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{48} \right) \cdot \left(\frac{3\sqrt{5} - 5}{2} \right) \\ v(\sigma_2) &= a^3 \cdot \left(\frac{20 - 8\sqrt{5}}{96} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{24} \right). \end{aligned} \quad (6.89)$$

Assim, por 6.87 e 6.89 podemos determinar o volume de σ , uma vez que

$$\begin{aligned} v(\sigma) &= v(\sigma_1) + 3 \cdot v(\sigma_2) \\ \Rightarrow v(\sigma) &= a^3 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{12} \right) + a^3 \cdot \left(\frac{5 - 2\sqrt{5}}{8} \right) \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{5} + 15 - 6\sqrt{5}}{24} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{21 - 8\sqrt{5}}{24} \right). \end{aligned} \quad (6.90)$$

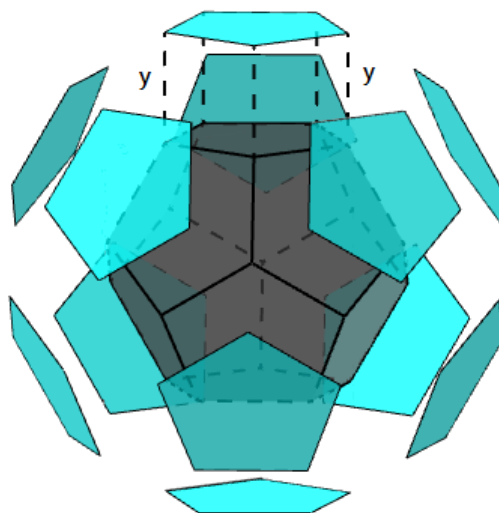
Portanto, temos agora informações suficientes que nos permitem calcular o volume do rombicosidodecaedro de aresta a . Entretanto, é importante ressaltar que este sólido possui

trinta faces quadradas e vinte faces triangulares, o que nos leva à contabilização de trinta sólidos μ e vinte sólidos σ . Desta forma, seu volume será dado por

$$\begin{aligned}
 & v(\Omega) - 30 \cdot (\mu) - 20 \cdot v(\sigma) \\
 &= a^3 \cdot \left(\frac{27\sqrt{5} + 135}{4} \right) - 30a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{8} \right) - 20a^3 \cdot \left(\frac{21 - 8\sqrt{5}}{24} \right) \\
 &= a^3 \cdot \left(\frac{162\sqrt{5} + 810 - 90\sqrt{5} + 90 - 420 + 160\sqrt{5}}{24} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{232\sqrt{5} + 480}{24} \right) \\
 &= a^3 \cdot \left(\frac{60 + 29\sqrt{5}}{3} \right). \quad \blacksquare \tag{6.91}
 \end{aligned}$$

Esta demonstração, segue a linha de raciocínio que utilizamos para sólidos anteriores, baseada em determinar o volume de um sólido Platônico e retirar o excesso. Porém, acreditamos ser conveniente também determinar o volume do rombicosidodecaedro pela forma que este é formado, pela expansão das suas faces.

Figura 72 – Rombicosidodecaedro: comprimento y do deslocamento das faces do dodecaedro.

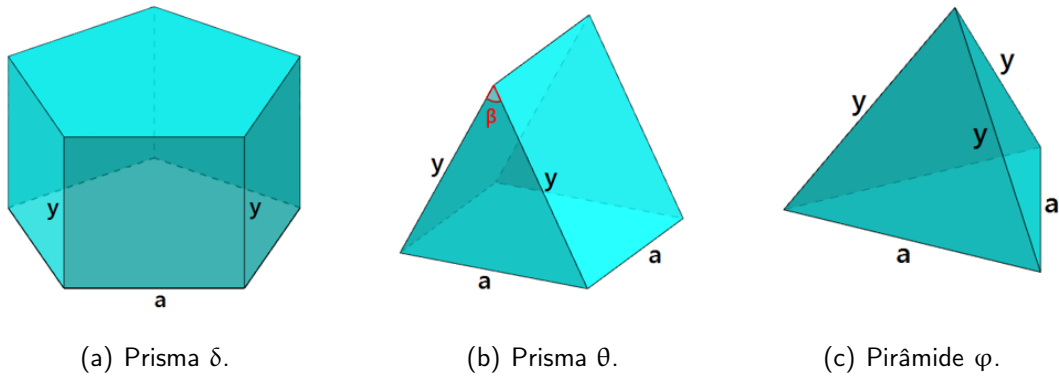


Na figura 72, simbolizamos por y como a medida que as faces são ortogonalmente deslocadas da sua posição inicial. Essa medida será fundamental no desenvolvimento dos cálculos desta segunda demonstração.

Inicialmente, note que podemos usar os segmentos de comprimento y para definir outros sólidos sob as faces do rombicosidodecaedro formado pela expansão. Agruparemos estes sólidos em três grupos, o primeiro grupo são os sólidos δ , o segundo os sólidos θ e o terceiro são os sólidos φ , sólidos sob as faces pentagonais, quadradas e triangulares, respectivamente.

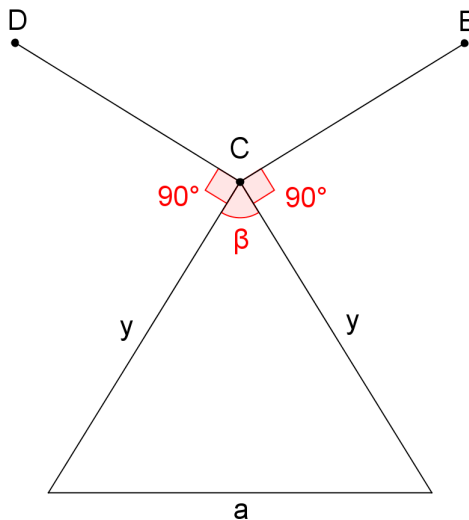
Além disso, pela ortogonalidade dos segmentos de comprimento y em relação ao dodecaedro (λ), temos respectivamente prismas retos de base pentagonal, prismas retos de base triangular e por fim pirâmides. Dessa forma, determinando e adicionando os volumes de λ , δ , θ e φ teremos conseqüentemente o volume do rombicododecaedro em função de a .

Figura 73 – Rombicododecaedro: sólidos sob as faces do rombicododecaedro.



Para determinarmos o volume destes sólidos, é importante conhecermos o comprimento y . Nesse sentido, analisaremos uma seção transversal de um prisma θ .

Figura 74 – Rombicododecaedro: seção transversal do prisma θ .



Tomamos uma seção que intersecta apótemas (DC e EC) das faces pentagonais do dodecaedro λ , pois as utilizaremos para determinar primeiramente alguma informação sobre o ângulo β . Entretanto, é importante fazermos antes um esclarecimentos. Os apótemas em questão formam um ângulo reto com a seção transversal, pois os mesmos pertencem as faces de λ que por sua vez são ortogonais às arestas de comprimento y e, adotamos propositalmente uma seção que intersecte os apótemas, logo os objetos geométricos são perpendiculares. Além disso, a fim de deixar mais explicita a posição da seção, afirmamos que C é um ponto médio de uma aresta de λ .

Agora, note que o ângulo $\angle DCE$ é o ângulo diédrico de um dodecaedro. Portanto, sabendo que os apótemas anteriormente descritos são perpendiculares à seção transversal, é fácil concluir que β é o suplemento de um ângulo (α) diédrico de λ . Assim,

$$\cos \alpha = -\cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}. \quad (6.92)$$

Logo, podemos utilizar a lei dos cossenos para determinar y .

$$a^2 = 2y^2 \cdot (1 - \cos \beta)$$

$$a^2 = 2y^2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = y^2 \cdot \left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\Rightarrow y^2 = a^2 \cdot \left(\frac{5}{10 - 2\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8}\right) \Rightarrow y = a \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}. \quad (6.93)$$

Volume do prisma δ :

Com posse destas informações, temos todas as condições para determinar o volume de δ , do seguinte modo:

$$v(\delta) = 5 \cdot \left(\frac{(m')^2 \cdot \text{sen } 72^\circ}{2}\right) \cdot y \quad (6.94)$$

Ressaltamos que m' corresponde para nós a distância do centro de um pentágono de aresta a , até um de seus vértices, algo que foi ilustrado na figura 68.

$$\begin{aligned} v(\delta) &= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5 - \sqrt{5}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 5}{8}}\right) \cdot y \\ &= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5 - \sqrt{5}}\right) \cdot a \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8}\right) = \frac{5a^3}{8} \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}\right) \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{30 + 10\sqrt{5}}{32}\right) = a^3 \cdot \left(\frac{15 + 5\sqrt{5}}{16}\right). \end{aligned} \quad (6.95)$$

Volume do prisma θ :

Já o volume do prisma θ pode ser determinado do seguinte modo:

$$v(\theta) = \left(\frac{y^2 \cdot \text{sen } \beta}{2}\right) \cdot a. \quad (6.96)$$

Lembrando que α e β são ângulos suplementares, temos

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \quad (6.97)$$

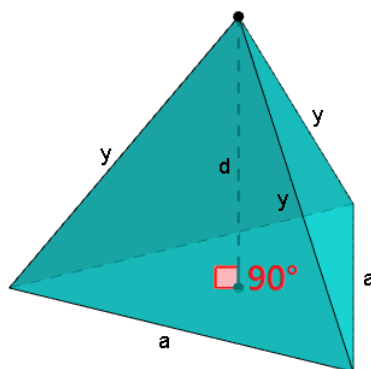
Logo,

$$v(\theta) = \frac{a}{2} \cdot a^2 \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{8} \right). \quad (6.98)$$

Volume da pirâmide φ :

Para o volume da pirâmide φ , ainda precisamos conhecer sua altura. Que por sua vez não é uma atividade trabalhosa, tendo em vista que conhecemos o comprimento de todas suas arestas.

Figura 75 – Rombicosidodecaedro: altura da pirâmide φ .



Note que a altura d da pirâmide φ é facilmente determinada pelo teorema de Pitágoras. Pois, temos

$$d^2 = y^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2. \quad (6.99)$$

É importante perceber que o pé da altura em questão é também baricentro da base, pela regularidade das arestas laterais da pirâmide, pela regularidade das arestas da base e pelo fato da altura ser perpendicular à mesma. Logo,

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \right) - \frac{a^2}{3} = a^2 \cdot \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{24} \right) \\ \Rightarrow d &= a \cdot \sqrt{\frac{14 + 6\sqrt{5}}{48}} = a \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (6.100)$$

Dessa forma, o volume da pirâmide φ é encontrado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} v(\varphi) &= \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot d \\ a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{12} \right) \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3}} \right) &= a^3 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{48} \right). \end{aligned} \quad (6.101)$$

Volume do dodecaedro λ :

Já sabemos calcular o volume de um dodecaedro dado sua aresta, por 6.23. Em especial para λ , temos

$$v(\lambda) = a^3 \cdot \left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \right). \quad (6.102)$$

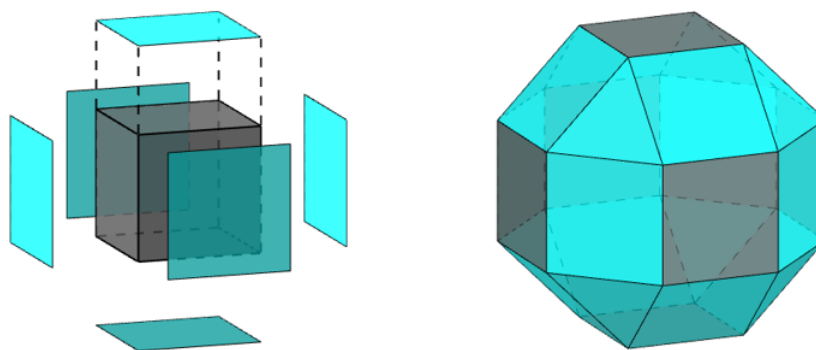
Portanto, temos agora informações suficientes para determinar o volume do rombicododecaedro pelo segundo método que propomos. Sendo este volume dado por

$$\begin{aligned} & v(\lambda) + 12v(\delta) + 30v(\theta) + 20v(\varphi) \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \right) + 12 \cdot \left(\frac{15 + 5\sqrt{5}}{16} \right) + 30 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{8} \right) + 20 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{48} \right) \\ &= \left(\frac{45 + 21\sqrt{5} + 135 + 45\sqrt{5} + 45\sqrt{5} + 45 + 15 + 5\sqrt{5}}{12} \right) = a^3 \cdot \left(\frac{240 + 116\sqrt{5}}{12} \right) \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{60 + 29\sqrt{5}}{3} \right). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (6.103)$$

6.11 Rombicuboctaedro

O rombicuboctaedro pode ser obtido pelo afastamento das faces de um cubo ou no octaedro regular. Portanto, a estratégia que utilizarmos para obter o volume deste sólido estará dependente do volume de um cubo ou octaedro.

Figura 76 – Rombicuboctaedro.

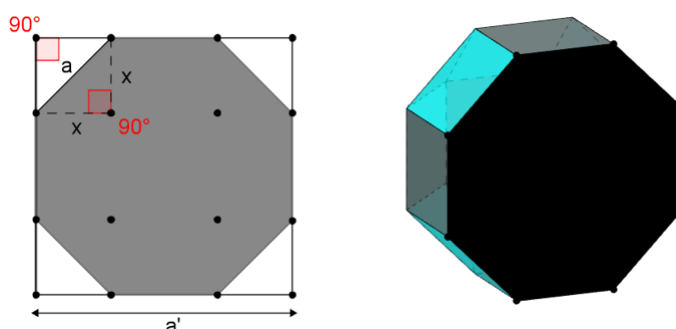


Assim como fizemos para o rombicododecaedro, aqui também apresentaremos duas formas distintas de generalizar o volume do rombicuboctaedro mediante o comprimento de sua aresta. A primeira dessas estratégias segue o modelo mais tradicional deste trabalho, ou seja, a partir de um sólido platônico (um cubo Ω , nesta situação) iremos calcular seu volume e subsequente efetuar o desconto de volumes excedentes de modo a encontrarmos o volume do

rombicuboctaedro. Já a segunda estratégia, será desenvolvida sobre a forma como o sólido é obtido. Dessa forma, iremos inicialmente determinar o volume de um cubo (λ) e em seguida calcular o volume complementar gerado pelo afastamento das faces.

Para desenvolvermos a primeira estratégia é essencial que saibamos o comprimento da aresta do cubo Ω . Nesse sentido, iremos tomar a seguinte seção transversal (figura 77) do rombicuboctaedro de aresta a , paralela à uma das faces quadradas que originalmente compunha um cubo.

Figura 77 – Rombicuboctaedro: seção transversal.



Na figura 77, representamos a' como o comprimento da aresta de Ω e x indica o comprimento que as faces quadradas de um cubo devem ser ortogonalmente afastadas para o exterior deste sólido, de modo a contribuir na construção rombicuboctaedro.

Pelo teorema de Pitágoras, é fácil ver que

$$x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (6.104)$$

Logo,

$$a' = a \cdot (1 + \sqrt{2}). \quad (6.105)$$

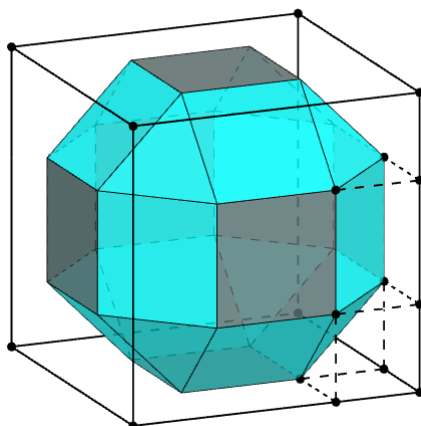
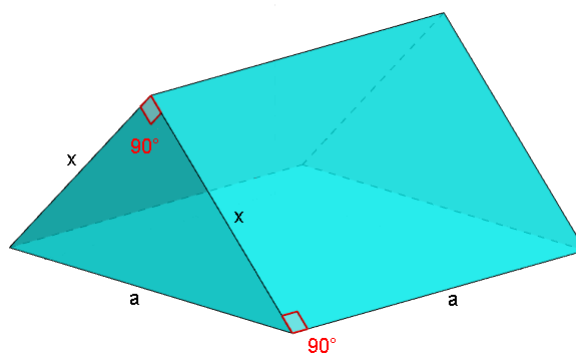
Desse modo, temos

$$v(\Omega) = (a')^3 = a^3 \cdot (7 + 5\sqrt{2}). \quad (6.106)$$

Agora que sabemos o volume de Ω , a conclusão da nossa primeira estratégia está dependente do cálculo de volume excedente. Para tanto, iremos criar dois grupos de sólidos. O primeiro corresponde aos sólidos do tipo μ enquanto o segundo são os sólidos do tipo σ . Definidos a seguir.

μ : prisma reto de base triangular, exterior a uma face quadrada do rombicuboctaedro e sob as faces de Ω .

σ : sólido limitado inferiormente por uma face triangular do rombicuboctaedro, lateralmente por faces triangulares dos prismas do tipo μ e superiormente pelas faces de Ω .

Figura 78 – Rombicuboctaedro: delimitação de μ e σ .Figura 79 – Rombicuboctaedro: prisma μ .

Volume de μ :

Note que todas as arestas do prisma μ são de comprimentos conhecidos. Portanto, o volume deste sólido é facilmente determinado por

$$v(\mu) = \frac{x^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{4}. \quad (6.107)$$

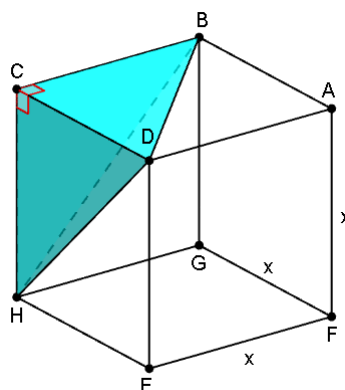
Volume de σ :

O sólido σ possui características não habituais, porém todas as suas arestas têm comprimentos determinados. Além disso, destacamos o fato deste sólido possuir faces quadrangulares (quadrados de aresta x) que são perpendiculares com as faces adjacentes. Tendo em vista que limitamos o sólido por meio das faces do cubo Ω e do prisma μ .

Pelo fato de a maioria das arestas terem mesmo comprimento (x) e pela ortogonalidade entre boa parte das faces, iremos completá-lo de modo a formar um cubo de aresta x , como ilustramos na figura 80. Isso facilitará o cálculo do volume.

Para tanto, iremos unir o sólido σ (ABDEFGH) à uma pirâmide BCDH. Desse modo,

$$v(\sigma) = x^3 - v(\text{BCDH})$$

Figura 80 – Rombicuboctaedro: sólido σ .

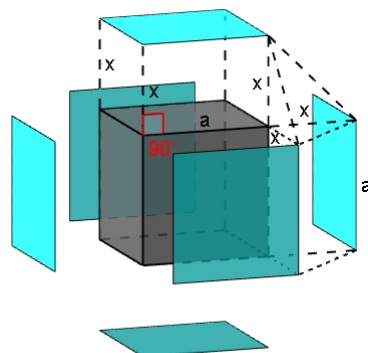
$$\begin{aligned}
 &= x^3 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot x \right) = \frac{5x^3}{6} \\
 &= \frac{5}{6} \cdot \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{4} = a^3 \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{24} \right). \quad (6.108)
 \end{aligned}$$

Com isso, temos todas as condições de determinar o volume do rombicuboctaedro, pela seguinte relação

$$\begin{aligned}
 &v(\Omega) - 12v(\mu) - 8v(\sigma) \\
 &= a^3 \cdot (7 + 5\sqrt{2}) - 12 \cdot \frac{a^3}{4} - 8 \cdot a^3 \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{24} \right) \\
 &= a^3 \cdot \left(\frac{21 + 15\sqrt{2} - 9 - 5\sqrt{2}}{3} \right) \\
 &= a^3 \cdot \left(\frac{12 + 10\sqrt{2}}{3} \right). \quad \blacksquare \quad (6.109)
 \end{aligned}$$

Para o desenvolvimento da segunda estratégia, adicionaremos ao volume de um cubo λ , de aresta a , um volume complementar, gerado pelo afastamento das faces de λ . Para tanto, é importante observarmos que, quando as faces de um cubo são afastadas para a construção do rombicuboctaedro, os espaços vazios são cobertos por doze faces quadradas e oito faces triangulares (todos sólidos com mesmo comprimento de aresta do cubo base). Desse modo, para o cálculo do volume complementar iremos calcular os volumes exteriores ao cubo λ e sob as faces quadradas e triangulares do rombicuboctaedro.

Note que podemos tomar a região sob as faces quadradas, paralelas à λ , como um conjunto de um prisma retos φ de altura x . A região complementar será um conjunto de pirâmides θ e um conjunto de prisma retos δ de bases triangulares (figura 81).

Figura 81 – Rombicuboctaedro: expansão do cubo λ .

Os volumes destes sólidos são facilmente determinados, uma vez que as características e dimensões são conhecidas. Com tudo, temos

$$v(\varphi) = a^2 \cdot x = a^2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (6.110)$$

$$v(\delta) = \frac{x^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{4}. \quad (6.111)$$

Já para a pirâmide θ , é importante lembramos que tomamos φ e δ como prismas retos, fazendo com que a pirâmide tenha três arestas perpendiculares em um vértice. Logo,

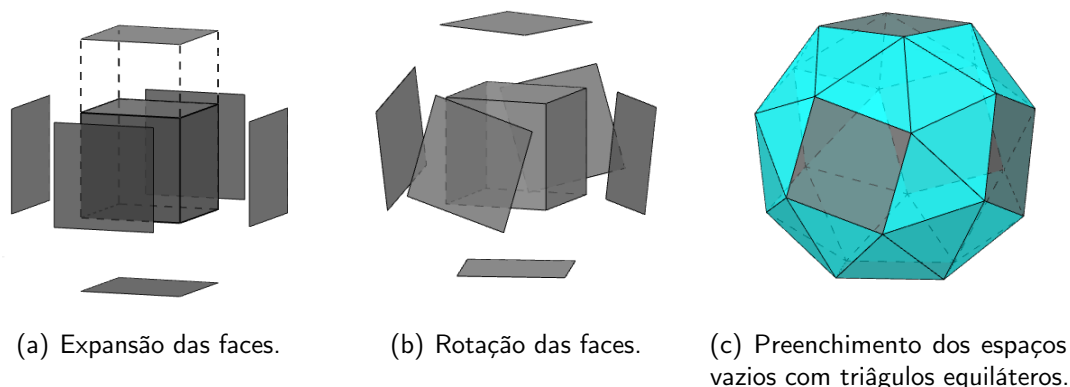
$$v(\theta) = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot x = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{24}. \quad (6.112)$$

Portanto, o volume do rombicuboctaedro será dado por

$$\begin{aligned} & v(\lambda) + 6v(\varphi) + 8v(\theta) + 12v(\delta) \\ &= a^3 + 6a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 8a^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{24}\right) + \frac{12a^3}{4} \\ &= \frac{3a^3 + 9a^3 \cdot \sqrt{2} + a^3 \cdot \sqrt{2} + 9a^3}{3} \\ &= a^3 \cdot \left(\frac{12 + 10\sqrt{2}}{3}\right). \blacksquare \end{aligned} \quad (6.113)$$

6.12 Cubo *snub*

Até aqui, os conceitos da geometria plana e espacial foram suficientes no sentido de desenvolvermos generalizações para os volumes dos sólidos arquimedianos apresentados. Entretanto, a técnica de snubificação torna o processo de generalizações do cálculo de volume não muito prático por essas áreas da geometria. Desse modo, para os sólidos arquimedianos

Figura 82 – Cubo *snub*: operação de snubficação sobre um cubo.

obtidos por tal técnica, desenvolveremos nosso raciocínio alicerçado em conceitos da geometria analítica.

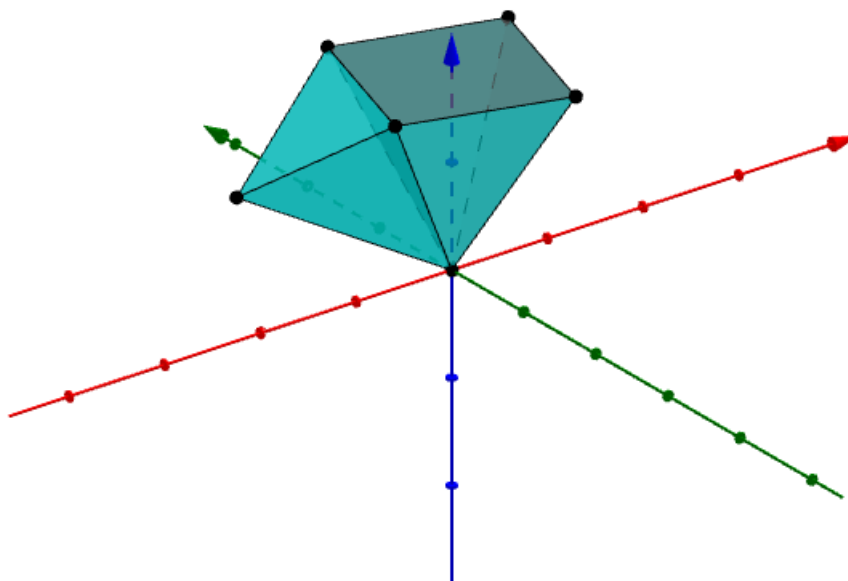
Além disso, a partir de agora, a natureza do sólido não influencia o modo como iremos proceder com os cálculos. Ou seja, não é fundamental saber qual sólido platônico deu origem ao sólido arquimediano. Assim, ainda que saibamos que o cubo *snub* é um sólido de Arquimedes obtido pela operação de snubficação efetuada sobre um cubo ou no octaedro regular, não utilizaremos esta informação para nos auxiliar no desenvolvimento dos cálculos.

A estratégia que desenvolveremos para encontramos o volume do cubo *snub*, consiste em posicionar o sólido exatamente na origem do sistema cartesiano tridimensional. Em seguida, construiremos todos os segmentos que partem da origem e chegam aos vértices do sólido. E pela regularidade de um cubo, juntamente com a uniformidade da operação de snubficação sobre as faces do mesmo, temos todos os segmentos supracitados com mesmo comprimento.

Após a construção dos segmentos, percebemos que eles formam pirâmides com as faces os quais intersectam. Assim, com base nesta estratégia, teremos seis pirâmides de base quadrada e trinta e duas pirâmides de base triangular. Portanto, é suficiente determinarmos o somatório dos volumes das trinta e oito pirâmides para encontramos consequentemente o volume do cubo *snub*.

Dessa forma, devemos determinar o volume de dois conjuntos de pirâmides σ e μ , pirâmides de base quadrada e triangular respectivamente. Porém, ainda precisamos de dados numéricos relacionados as características dessas pirâmides. Nesse sentido, com base na informação de [15], temos as coordenadas dos vértices para um cubo *snub*, centrado na origem de um sistema cartesiano, destacados no quadro 1.

Figura 83 – Cubo snub: pirâmides μ e σ .



Quadro 1 – Cubo *snub*: coordenadas cartesianas.

	1	2	3
A	$(1, \frac{1}{t}, t)$	$(\frac{-1}{t}, 1, t)$	$(t, 1, \frac{1}{t})$
B	$(-1, \frac{-1}{t}, t)$	$(\frac{1}{t}, -1, t)$	$(-t, -1, \frac{1}{t})$
C	$(-1, \frac{1}{t}, -t)$	$(\frac{1}{t}, 1, -t)$	$(-t, 1, \frac{-1}{t})$
D	$(1, \frac{-1}{t}, -t)$	$(\frac{-1}{t}, -1, -t)$	$(t, -1, \frac{-1}{t})$
E	$(-1, t, \frac{1}{t})$	$(\frac{1}{t}, t, 1)$	$(-t, \frac{1}{t}, 1)$
F	$(1, -t, \frac{1}{t})$	$(\frac{-1}{t}, -t, 1)$	$(t, \frac{-1}{t}, 1)$
G	$(1, t, \frac{-1}{t})$	$(\frac{-1}{t}, t, -1)$	$(t, \frac{1}{t}, -1)$
H	$(-1, -t, \frac{-1}{t})$	$(\frac{1}{t}, -t, -1)$	$(-t, \frac{-1}{t}, -1)$

Ressaltamos que t trata-se da constante de Tribonacci¹ cujo o valor é

$$t = \frac{1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}}{3} \approx 1,839286755214161. \quad (6.114)$$

Levando esses dados para um *software* com ferramentas da geometria dinâmica, podemos visualizar facilmente como as coordenadas do quadro 1 determinam o cubo *snub*, assim como podemos visualizar claramente as coordenadas dos conjuntos de pirâmides μ e σ . Desse modo, asseguramos que:

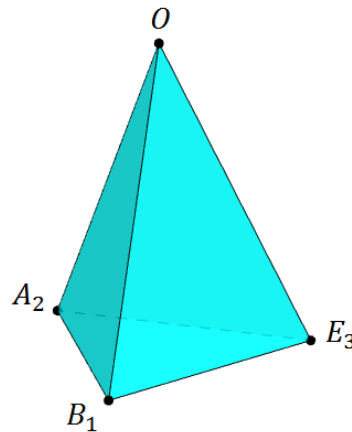
- Os vértices A_1, A_2, B_1, B_2 e $O = (0, 0, 0)$, definem uma pirâmide σ ;
- Já os vértices A_2, B_1, E_3 e $O = (0, 0, 0)$, definem uma pirâmide μ .

¹ Os números de Tribonacci são definidos pela relação de recorrência $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$, em que $1 = T_1 = T_2, T_3 = 2$ e $n \geq 4$ [15].

A partir desses vértices, temos informações suficientes para calcular o volume das pirâmides e conseqüentemente do cubo *snub*. Para tanto, utilizaremos o produto misto vetorial, para o qual a interpretação geométrica do resultado indica o volume de um paralelepípedo definido pelos vetores utilizados na operação.

Volume da pirâmide μ :

Figura 84 – Cubo *snub*: pirâmide μ .



Note que os vetores $\overrightarrow{A_2B_1}$, $\overrightarrow{A_2E_3}$ e $\overrightarrow{A_2O}$ definem um paralelepípedo. Além disso, perceba também que o volume de uma pirâmide μ é a sexta parte do volume deste sólido. Tendo em vista que o volume de μ é um terço do volume do paralelepípedo para bases comuns, no entanto a base de μ é duas vezes menor que a do paralelepípedo. Desse modo,

$$v(\mu) = \frac{\left| \left(\overrightarrow{A_2B_1} \times \overrightarrow{A_2E_3} \right) \cdot \overrightarrow{A_2O} \right|}{6} \quad (6.115)$$

Pelos dados do quadro 1, os vetores são facilmente determinados

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_2B_1} &= \left(-1 + \frac{1}{t}, -\frac{1}{t} - 1, t - t \right) = \left(\frac{1-t}{t}, -\left(\frac{1+t}{t} \right), 0 \right); \\ \overrightarrow{A_2E_3} &= \left(-t + \frac{1}{t}, \frac{1}{t} - 1, 1 - t \right) = \left(\frac{1-t^2}{t}, \frac{1-t}{t}, 1-t \right); \\ \overrightarrow{A_2O} &= \left(0 + \frac{1}{t}, 0 - 1, 0 - t \right) = \left(\frac{1}{t}, -1, -t \right). \end{aligned} \quad (6.116)$$

Logo,

$$\left(\overrightarrow{A_2B_1} \times \overrightarrow{A_2E_3} \right) \cdot \overrightarrow{A_2O} = \begin{vmatrix} \frac{1-t}{t} & -\left(\frac{1+t}{t} \right) & 0 \\ \frac{1-t^2}{t} & \frac{1-t}{t} & 1-t \\ \frac{1}{t} & -1 & -t \end{vmatrix} \quad (6.117)$$

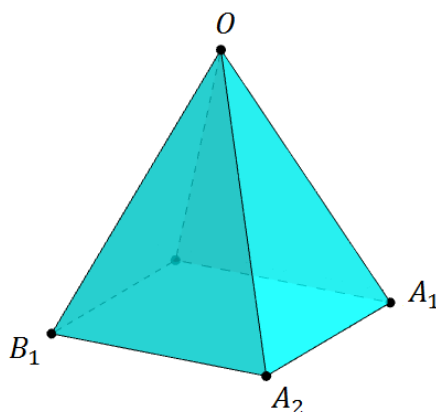
Podemos determinar o valor do determinante pelo **teorema de Laplace**, efetuando o desenvolvimento laplaciano ao longo da primeira linha da matriz. Assim, o volume da pirâmide μ em função de t é

$$6v(\mu) = (-1)^{1+1} \cdot \left(\frac{1-t}{t} \right) \cdot [(t-1) + (1-t)] + (-1)^{1+2} \cdot \left(\frac{-1-t}{t} \right) \cdot \left[(t^2-1) + \left(\frac{t-1}{t} \right) \right] + 0$$

$$= 0 + \left(\frac{t+1}{t}\right) \cdot \left(\frac{t^3 - t + t - 1}{t}\right) \Rightarrow v(\mu) = \frac{t^4 + t^3 - t - 1}{6t^2}. \quad (6.118)$$

Volume da pirâmide σ :

Figura 85 – Cubo *snub*: pirâmide σ .



Analogamente, o volume da pirâmide σ é dado por

$$v(\sigma) = \frac{\left| \left(\overrightarrow{A_2A_1} \times \overrightarrow{A_2B_1} \right) \cdot \overrightarrow{A_2O} \right|}{3}. \quad (6.119)$$

Como $\overrightarrow{A_2B_1}$ e $\overrightarrow{A_2O}$ já são conhecidos, determinaremos apenas $\overrightarrow{A_2A_1}$ com o auxílio do quadro 1.

$$\overrightarrow{A_2A_1} = \left(\frac{1}{t} + 1, -1 + \frac{1}{t}, t - t \right) = \left(\frac{1+t}{t}, \frac{1-t}{t}, 0 \right). \quad (6.120)$$

Assim,

$$\left(\overrightarrow{A_2A_1} \times \overrightarrow{A_2B_1} \right) \cdot \overrightarrow{A_2O} = \begin{vmatrix} \frac{1+t}{t} & \frac{1-t}{t} & 0 \\ \frac{1-t}{t} & -\left(\frac{1+t}{t}\right) & 0 \\ \frac{1}{t} & -1 & -t \end{vmatrix}. \quad (6.121)$$

Novamente desenvolvendo o laplaciano pela primeira linha da matriz, vem o valor do volume de σ em função de t .

$$\begin{aligned} 3v(\sigma) &= (-1)^{1+1} \cdot \left(\frac{1+t}{t}\right) \cdot (t+1) + (-1)^{1+2} \cdot \left(\frac{1-t}{t}\right) \cdot (t-1) + 0 \\ &= \frac{1+2t+t^2}{t} - \left(\frac{t-1-t^2+t}{t}\right) \Rightarrow v(\sigma) = \frac{2t^2+2}{3t}. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Portanto, como posse do volume dos dois conjuntos de pirâmides que definimos, podemos afirmar que o volume do cubo *snub* em função da constante de Tribonacci é

$$32v(\mu) + 6v(\sigma)$$

$$\begin{aligned}
&= 32 \cdot \left(\frac{t^4 + t^3 - t - 1}{6t^2} \right) + 6 \cdot \left(\frac{2t^2 + 2}{3t} \right) = \frac{16t^4 + 16t^3 - 16t - 16 + 12t^3 + 12t}{3t^2} \\
&= \frac{16t^4 + 28t^3 - 4t - 16}{3t^2}. \tag{6.123}
\end{aligned}$$

Este resultando ainda não é satisfatório para nós, porque expressa o volume de um cubo *snub* específico e além disso, o parâmetro t ainda não nos diz muito sobre a aresta do sólido. Portanto, para que tenhamos uma generalização da fórmula para qualquer cubo *snub* de aresta conhecida, devemos encontrar o valor da aresta do sólido arquimediano que construímos pelas coordenadas do quadro 1. O qual equivale a norma de um vetor como $\overrightarrow{A_2B_1}$.

$$\left\| \overrightarrow{A_2B_1} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1-t}{t} \right)^2 + \left(\frac{1+t}{t} \right)^2} = \sqrt{\frac{1-2t+t^2+1+2t+t^2}{t^2}} = \sqrt{\frac{2t^2+2}{t^2}}. \tag{6.124}$$

Para generalizarmos nossa conclusão para um cubo *snub* (Ω) qualquer de aresta α , é importante notarmos que a expressão do seu volume tem a seguinte característica

$$v(\Omega) = \alpha^3 \cdot \lambda, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{6.125}$$

Desse modo, para o cubo *snub* definido pelas coordenadas do quadro 1, temos

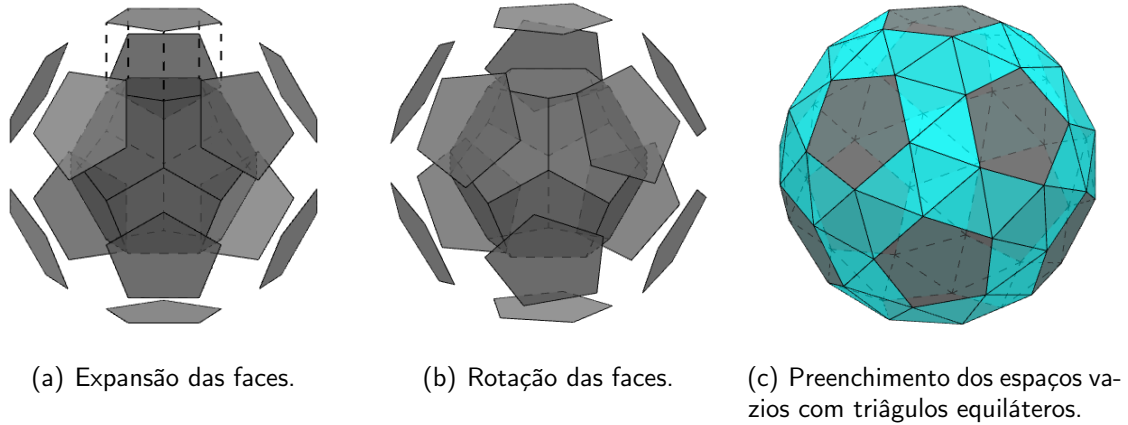
$$\begin{aligned}
\left(\left\| \overrightarrow{A_2B_1} \right\| \right)^3 \cdot \lambda &= \frac{16t^4 + 28t^3 - 4t - 16}{3t^2} \\
\Rightarrow \lambda &= \left(\frac{16t^4 + 28t^3 - 4t - 16}{3t^2} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{t^2}{2t^2+2}} \right)^3 \\
\lambda &= \frac{16t^5 + 28t^4 - 4t^2 - 16t}{6 \cdot (t^2 + 1) \cdot \sqrt{2t^2+2}} = \frac{8t^5 + 14t^4 - 2t^2 - 8t}{3 \cdot (t^2 + 1) \cdot \sqrt{2t^2+2}} \approx 7,889477399975392. \tag{6.126}
\end{aligned}$$

Pela extensão da igualdade em 6.114, já é satisfatório utilizarmos a aproximação dada em 6.126. Com isso, o volume de um cubo *snub* qualquer de aresta α , é

$$v(\Omega) \approx \alpha^3 \cdot 7,889477399975392 \text{ u.v.} \quad \blacksquare \tag{6.127}$$

6.13 Dodecaedro *snub*

Como seu nome indica, o dodecaedro *snub* também é obtido pela operação de snubificação sobre um dodecaedro regular ou no icosaedro regular. Portanto, sob a mesma justificativa que utilizamos para o cubo *snub*, procederemos nossos cálculos com suporte de conceitos da geometria analítica. Além disso, utilizaremos a mesma estratégia de obtenção do volume por meio do desmembramento do sólido em pirâmides.

Figura 86 – Dodecaedro *snub*: operação de snubificação sobre um dodecaedro.

Nesse sentido, é fundamental que saibamos as coordenadas dos vértices de um dodecaedro *snub* centrado na origem de um sistema cartesiano tridimensional. Para tanto, tomaremos as coordenadas indicadas em [5] as quais apresentamos no quadro 3.

As coordenadas indicadas para o dodecaedro são dadas por expressões um pouco extensas, o que torna a análise dos dados cansativa. Portanto, optamos por condensar essas coordenadas com base nas igualdades do quadro 2.

Quadro 2 – Dodecaedro *snub*: expressões auxiliares para compreensão das coordenadas.

$a = 2 \cdot \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right)$	$h = - \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) + \left(\frac{\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}}{\varphi} \right) - \varphi$
$b = 2 \cdot \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right)$	$i = - \left(\frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{\varphi} \right) + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right) \cdot \varphi - 1$
$c = \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) + \left(\frac{\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}}{\varphi} \right) + \varphi$	$j = \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \cdot \varphi + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right) + \frac{1}{\varphi}$
$d = \left(\frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{\varphi} \right) + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right) \cdot \varphi - 1$	$k = \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) - \left(\frac{\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}}{\varphi} \right) - \varphi$
$e = - \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \cdot \varphi + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right) + \frac{1}{\varphi}$	$l = \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) + \left(\frac{\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}}{\varphi} \right) - \varphi$
$f = - \left(\frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{\varphi} \right) + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right) \cdot \varphi + 1$	$m = \left(\frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{\varphi} \right) + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right) \cdot \varphi + 1$
$g = \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \cdot \varphi + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right) - \frac{1}{\varphi}$	$n = \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \cdot \varphi - \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right) + \frac{1}{\varphi}$

Onde a constante φ é a razão áurea e ξ é a solução da equação 6.128

$$\xi^3 - 2\xi = \varphi. \quad (6.128)$$

Os valores das constantes são

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988749895, e \quad (6.129)$$

$$\xi = \sqrt[3]{\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sqrt{\varphi - \frac{5}{27}}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sqrt{\varphi - \frac{5}{27}}}{2}\right)} \approx 1,715561499697368. \quad (6.130)$$

Quadro 3 – Dodecaedro *snub*: coordenadas cartesianas.

	1	2	3	4	5
A	(-a, b, 2)	(-c, d, e)	(-f, g, h)	(-i, j, k)	(-l, m, n)
B	(a, -b, 2)	(c, -d, e)	(f, -g, h)	(i, -j, k)	(l, -m, n)
C	(a, b, -2)	(c, d, -e)	(f, g, -h)	(i, j, -k)	(l, m, -n)
D	(-a, -b, -2)	(-c, -d, -e)	(-f, -g, -h)	(-i, -j, -k)	(-l, -m, -n)
E	(-2, a, b)	(-e, c, d)	(-h, f, g)	(-k, i, j)	(-n, l, m)
F	(2, -a, b)	(e, -c, d)	(h, -f, g)	(k, -i, j)	(n, -l, m)
G	(2, a, -b)	(e, c, -d)	(h, f, -g)	(k, i, -j)	(n, l, -m)
H	(-2, -a, -b)	(-e, -c, -d)	(-h, -f, -g)	(-k, -i, -j)	(-n, -l, -m)
I	(-b, 2, a)	(-d, e, c)	(-g, h, f)	(-j, k, i)	(-m, n, l)
J	(b, -2, a)	(d, -e, c)	(g, -h, f)	(j, -k, i)	(m, -n, l)
K	(b, 2, -a)	(d, e, -c)	(g, h, -f)	(j, k, -i)	(m, n, -l)
L	(-b, -2, -a)	(-d, -e, -c)	(-g, -h, -f)	(-j, -k, -i)	(-m, -n, -l)

A partir das coordenadas indicadas no quadro 3, podemos utilizar um *software* com ferramentas da geometria dinâmica para visualizar o dodecaedro *snub* no espaço tridimensional. Além disso, pelo fato da estratégia que utilizaremos para determinar o volume deste sólido ser a mesma que utilizamos para o cubo *snub*, podemos também visualizar as coordenadas das pirâmides que compõem o sólido arquimediano em questão.

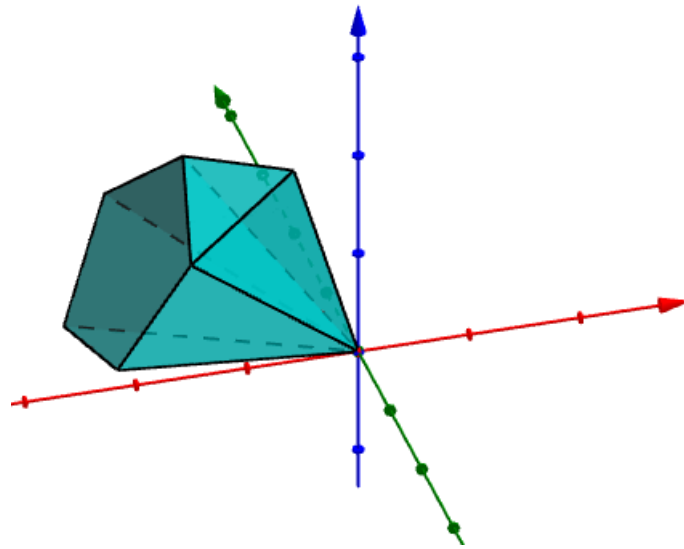
Uma observação importante é que todos os vértices são equidistantes do centro do sistema cartesiano, pelo fato de a snubificação operar de forma uniforme sobre as faces de um dodecaedro. Isso nos dá a liberdade de calcular o volume de uma pirâmide específica e não todas as pirâmides construídas.

O dodecaedro *snub*, é composto por oitenta faces triangulares e doze faces pentagonais, assim, segundo nossa estratégia, devemos calcular o somatório do volume de noventa e duas pirâmides. Entre as quais há pirâmides de base pentagonal e triangular, respectivamente pirâmides σ e μ . Para as quais calcularemos os volumes novamente pelo produto misto vetorial.

Asseguramos que:

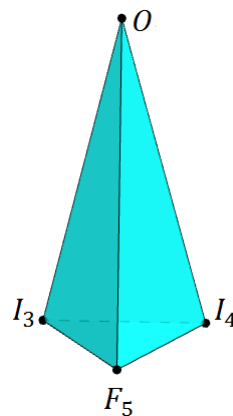
- Os vértices I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e $O = (0, 0, 0)$, definem uma pirâmide σ .
- Já os vértices I_3, I_4, F_5 e $O = (0, 0, 0)$, definem uma pirâmide μ .

Figura 87 – Dodecaedro *snub*: pirâmides μ e σ .



Volume da pirâmide μ :

Figura 88 – Dodecaedro *snub*: pirâmide μ .



Note que os vetores $\overrightarrow{OI_3}$, $\overrightarrow{OI_4}$ e $\overrightarrow{OF_5}$, definem um paralelepípedo θ . Além disso, os pontos I_3 , I_4 e O definem um triângulo, o qual podemos tomar como base da pirâmide μ . Desse modo,

$$v(\mu) = \frac{v(\theta)}{6} = \frac{|(\overrightarrow{OI_3} \times \overrightarrow{OI_4}) \cdot \overrightarrow{OF_5}|}{6}. \quad (6.131)$$

$$(\overrightarrow{OI_3} \times \overrightarrow{OI_4}) \cdot \overrightarrow{OF_5} =$$

$$\begin{vmatrix} -\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \cdot \varphi - \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) + \frac{1}{\varphi} & -\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) + \left(\frac{\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}}{\varphi}\right) - \varphi & -\left(\frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{\varphi}\right) + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) \cdot \varphi + 1 \\ -\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \cdot \varphi - \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) - \frac{1}{\varphi} & \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) - \left(\frac{\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}}{\varphi}\right) - \varphi & -\left(\frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{\varphi}\right) + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) \cdot \varphi - 1 \\ \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \cdot \varphi - \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) + \frac{1}{\varphi} & -\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) - \left(\frac{\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}}{\varphi}\right) + \varphi & \left(\frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{\varphi}\right) + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) \cdot \varphi + 1 \end{vmatrix}$$

O desenvolvimento deste determinante é simples, porém trabalhoso, assim, usaremos as constantes reais α e β indicadas em 6.132, para simplificar nossos cálculos e por fim, usaremos uma aproximação para o resultado, tendo em vista que as constantes ξ e φ são relativamente extensas e irracionais.

$$\alpha = \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) e$$

$$\beta = \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi} \right). \quad (6.132)$$

Logo,

$$\left(\overrightarrow{OI_3} \times \overrightarrow{OI_4} \right) \cdot \overrightarrow{OF_5} = \begin{vmatrix} -\alpha\varphi - \beta + \frac{1}{\varphi} & -\alpha + \frac{\beta}{\varphi} - \varphi & -\frac{\alpha}{\varphi} + \beta\varphi + 1 \\ -\alpha\varphi - \beta - \frac{1}{\varphi} & \alpha - \frac{\beta}{\varphi} - \varphi & -\frac{\alpha}{\varphi} + \beta\varphi - 1 \\ \alpha\varphi - \beta + \frac{1}{\varphi} & -\alpha - \frac{\beta}{\varphi} + \varphi & \frac{\alpha}{\varphi} + \beta\varphi + 1 \end{vmatrix}. \quad (6.133)$$

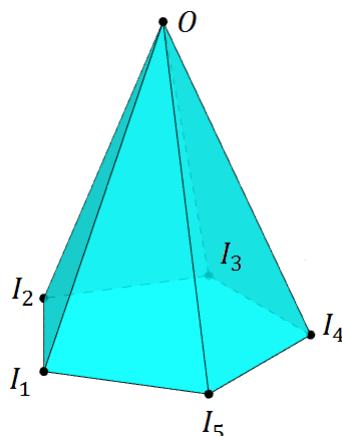
Agora, pelo teorema de Laplace, podemos desenvolver o laplaciano pela primeira linha da matriz. O que irá gerar uma expressão bem extensa, tornando sua apresentação respeitando as margens da página, desagradável. Portanto, expressaremos apenas o resultado da operação, mas ao leitor interessado, o desenvolvimento está disponível no apêndice A.1.

$$\Rightarrow v(\mu) \cong 66,18377433778738 \text{ u.v.} \quad (6.134)$$

Como α e β são irracionais, para a expressão 6.134 teremos uma aproximação do valor real.

Volume da pirâmide σ :

Figura 89 – Dodecaedro *snub*: pirâmide σ .



Os pontos I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e O , definem uma pirâmide σ . Assim, não podemos utilizar todos esses pontos simultaneamente para definir um paralelepípedo, e conseqüentemente aplicar

o produto misto vetorial nos vetores que o definem, objetivando calcular o volume de σ . Desse modo, calcularemos o volume dessa pirâmide desmembrando-a em três novas pirâmides σ_1 , σ_2 e σ_3 . As quais são definidas pelos seguintes pontos:

$$\sigma_1: I_1, I_2, I_3 \text{ e } O;$$

$$\sigma_2: I_1, I_3, I_5 \text{ e } O;$$

$$\sigma_3: I_3, I_4, I_5 \text{ e } O.$$

A escolha do desmembramento da pirâmide σ desta forma, justifica-se pelo fato de podermos aplicar o produto misto vetorial de forma explícita, tendo em vista que podemos escolher bases triangulares. Assim, podemos afirmar que o volume de σ é

$$v(\sigma) = v(\sigma_1) + v(\sigma_2) + v(\sigma_3). \quad (6.135)$$

Pela regularidade da face pentagonal de σ , juntamente com o fato de todos seus vértices serem equidistantes do ponto O , concluímos que os volumes de σ_1 e σ_3 são iguais. Logo,

$$v(\sigma) = 2v(\sigma_1) + v(\sigma_2)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{|\left(\overrightarrow{OI_1} \times \overrightarrow{OI_2}\right) \cdot \overrightarrow{OI_3}|}{6} \right) + \left(\frac{|\left(\overrightarrow{OI_1} \times \overrightarrow{OI_5}\right) \cdot \overrightarrow{OI_3}|}{6} \right) \quad (6.136)$$

Assim, temos $\left(\overrightarrow{OI_1} \times \overrightarrow{OI_2}\right) \cdot \overrightarrow{OI_3}$

$$= \begin{vmatrix} -2 \cdot \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) & 2 & 2 \cdot \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \\ -\left(\frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{\varphi}\right) - \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) \cdot \varphi + 1 & -\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \cdot \varphi + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) + \frac{1}{\varphi} & \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) + \left(\frac{\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}}{\varphi}\right) + \varphi \\ -\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \cdot \varphi - \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) + \frac{1}{\varphi} & -\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) + \left(\frac{\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}}{\varphi}\right) - \varphi & -\left(\frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{\varphi}\right) + \left(\xi\varphi + \varphi^2 + \frac{\varphi}{\xi}\right) \cdot \varphi + 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2\beta & 2 & 2\alpha \\ -\frac{\alpha}{\varphi} - \beta\varphi + 1 & -\alpha\varphi + \beta + \frac{1}{\varphi} & \alpha + \frac{\beta}{\varphi} + \varphi \\ -\alpha\varphi - \beta + \frac{1}{\varphi} & -\alpha + \frac{\beta}{\varphi} - \varphi & -\frac{\alpha}{\varphi} + \beta\varphi + 1 \end{vmatrix} \quad (6.137)$$

Novamente pela extensão do desenvolvimento do determinante, o apresentamos no apêndice A.2.

$$\Rightarrow v(\sigma_1) \cong |-69, 3167239607116| = 69, 3167239607116 \text{ u.v.} \quad (6.138)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Analogamente, } (\overrightarrow{OI_1} \times \overrightarrow{OI_5}) \cdot \overrightarrow{OI_3} \\
& = \begin{vmatrix} -2\beta & 2 & 2\alpha \\ -\frac{\alpha}{\varphi} - \beta\varphi - 1 & \alpha\varphi - \beta + \frac{1}{\varphi} & \alpha + \frac{\beta}{\varphi} - \varphi \\ -\alpha\varphi - \beta + \frac{1}{\varphi} & -\alpha + \frac{\beta}{\varphi} - \varphi & -\frac{\alpha}{\varphi} + \beta\varphi + 1 \end{vmatrix} \\
& \Rightarrow v(\sigma_2) \cong |112, 1568153572256| = 112, 1568153572256 \text{ u.v.} \quad (6.139)
\end{aligned}$$

Logo,

$$v(\sigma) \cong 250, 7902632786488 \text{ u.v.} \quad (6.140)$$

Portanto, volume do dodecaedro *snub* construído de acordo com as coordenadas cartesianas do quadro 3 é dado por

$$80v(\mu) + 12v(\sigma) \cong 8304, 185106366775 \text{ u.v.} \quad (6.141)$$

Desse modo, determinamos o volume de um dodecaedro *snub* com coordenadas conhecidas. Entretanto, procuramos uma generalização para qualquer dodecaedro *snub* de aresta conhecida. Assim, é importante notar que o volume de um dodecaedro *snub* (Ω) qualquer de aresta α tem seu volume dado por

$$v(\Omega) = \alpha^3 \cdot \lambda, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (6.142)$$

Portanto, precisamos apenas determinar λ . O que podemos fazer, sabendo o comprimento da aresta do sólido definido pelas coordenadas do quadro 3. Nesse sentido, iremos calcular a norma do vetor $\overrightarrow{I_3I_4}$.

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{I_3I_4} \right\| &= \sqrt{(-g - (-j))^2, (h - k)^2, (f - i)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{\varphi}\right)^2 + \left(2\alpha - \frac{2\beta}{\varphi}\right)^2 + (-2)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4}{\varphi^2} + \frac{4\alpha^2\varphi^2 - 8\alpha\beta\varphi + 4\beta^2}{\varphi^2} + \frac{4\varphi^2}{\varphi^2}} = \frac{\sqrt{4\alpha^2\varphi^2 - 8\alpha\beta\varphi + 4\beta^2 + 4\varphi^2 + 4}}{\varphi} \\
&\Rightarrow \left\| \overrightarrow{I_3I_4} \right\| \cong 6, 043738084132765 \text{ u.c.} \quad (6.143)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda = \frac{80v(\mu) + 12v(\sigma)}{\left(\left\| \overrightarrow{I_3I_4} \right\|\right)^3} \cong 37, 616649962733355. \quad (6.144)$$

Portanto, o volume de um dodecaedro *snub* qualquer de aresta α é aproximadamente

$$v(\Omega) \cong \alpha^3 \cdot 37, 616649962733355 \text{ u.v.} \quad \blacksquare \quad (6.145)$$

7 Conclusão

Uma boa compreensão de formas tridimensionais nos auxilia não só no contexto acadêmico, como até mesmo em atividades simples do nosso cotidiano, como projetar se é possível ou não passar à frente de um veículo em movimento, percebendo informalmente dados de distância e velocidade. Desse modo, fortalecer a base científica de informações relacionadas à geometria, é uma forma de enriquecimento não só intelectual, mas também para o exercício de atividades básicas como locomoção.

Logo, nesta dissertação, procuramos colaborar para o enriquecimento da geometria expondo pontos ainda pouco explorados. Nesse sentido, procuramos inicialmente fazer com que o leitor se sentisse confortável durante a leitura, por meio de uma revisão dos conceitos que consideramos elementares, porém de grande importância na compreensão de todo raciocínio desenvolvido nas linhas de cálculo. Além disso, definimos o que são os sólidos de Arquimedes, mostramos que dentro de delimitações há somente treze sólidos e por fim, esclarecemos como estes sólidos são obtidos a partir de sólidos platônicos. Feito isso, em nossa percepção, o leitor já poderia acompanhar todo o raciocínio no decorrer da anúncio das fórmulas encontradas.

Apesar que para boa parte dos sólidos arquimedianos o raciocínio não exige muita experiência geométrica, percebemos que foi conveniente esta revisão preliminar, pois desta forma, podemos alcançar um maior número de leitores dependendo menos do seu grau de habilidade matemática.

Para o desenvolvimento das generalizações de fórmulas para o volume dos sólidos, procuramos deixar bem explícito cada linha de cálculo, evitando o máximo que o entendimento do raciocínio dependesse menos das experiências matemáticas do leitor. Além disso, não poupamos no atributo de figuras para ilustrar cada ideia descrita. Assim, acreditamos ter alcançado satisfatoriamente nossos objetivos como um todo. Visto que, conseguimos mostrar que, é possível demonstrar como o volume dos sólidos de Arquimedes se relacionam com o comprimento de suas respectivas arestas, utilizando desde conceitos básicos da geometria até algo mais apurado, como o cálculo vetorial. Com isso, validamos a hipótese formulada inicialmente.

Diante disso, percebemos que explorar sobre sólidos semirregulares é uma rica fonte para o ensino de geometria, visto que, durante a construção da dissertação, a base de trabalhos publicados, principalmente em língua nativa, é muito limitada especialmente no que diz respeito ao volume. Assim, aos professores e alunos dos mais variados graus de instrução, podem debruçarem sobre este trabalho, obtendo mais uma forma de estudar geometria, ampliando sua visão do que é mais comum, para que tenham sobre a geometria um olhar mais holístico e sobre os poliedros uma diversificação ao pensar sobre poliedros convexos.

No que se refere a quantidade de trabalhos publicados sobre o tema desta dissertação, externamos nosso incômodo sobre esta questão, pelo fato da riquíssima fonte de conhecimento matemático não incluído nos currículos de ensino de matemática no Brasil, em diferentes níveis de educação. Restringindo a difusão dessa parte da geometria, fazendo com que até mesmo professores de matemática não conheçam esses curiosos e interessantes sólidos geométricos.

Portanto, concluímos que tudo exposto neste trabalho agrega na ampliação do nosso olhar para a geometria, bem como mostramos como a matemática pode ser mais explorada. Fazendo com que aulas de matemáticas possam ser enriquecidas, através de outras aplicações de conceitos já conhecidos, uso de *softwares* da geometria dinâmica. E por fim, percebemos neste trabalho uma boa opção de estudo sobre os sólidos de Arquimedes, tendo em vista a escassez de publicações sobre o tema.

Referências

- [1] ALMEIDA, Edjane Gomes dos Santos. **Propriedades e Generalizações dos Números de Fibonacci**. 2014. 51f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2014.
- [2] ALMEIDA, Talita Carvalho de. **Sólidos arquimedianos e cabri 3D: um estudo de truncaduras baseadas no renascimento**. 2010. 62f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2010.
- [3] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 273p.
- [4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria espacial posição e métrica**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. 476 p. v. 10.
- [5] EUSEBIA. **O Dodecaedro Snub**. eusebeia.dyndns.org.[S.l.].[2019]. Disponível em: <<http://eusebeia.dyndns.org/4d/snubdode>>. Acesso em: 10 abr. 2021.
- [6] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.
- [7] HARTSHORNE, Robin. **Geometry: Euclid and Beyond**. New York, 2000.
- [8] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 322p. v. 2.
- [9] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasil. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: 7 set. 2021.
- [10] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.442 p.
- [11] JOSÉ, Ribamar de Souza Neves. **Poliedros Arquimedianos**. 2017. 97f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT) - Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, 2017.
- [12] PEREIRA, Estéfano Gustavo Altieri. **Regularidades em Poliedros: Platão, Arquimedes e Kepler-Poinsot**. 2019. 50f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT) - Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Maringá. Maringá, pr, 2019.

[13] RIBEIRO, Thaís de Sales. **Poliedros de Arquimedes: um estudo enriquecedor para as aulas de geometria espacial na rede pública**. 2015. 69f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática do departamento de Matemática da PUC-Rio) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2015.

[14] SILVA, Ederson Marcelino da. **Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o sólido de Escher: contribuições para o ensino e aprendizagem de poliedros**. 2018. 106f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

[15] STRINGFIXER. **Cubo snub**. stringfixer.com. [S.l.].[2020]. Disponível em: <https://stringfixer.com/pt/Snub_cube>. Acesso em: 17 jul. 2021.

APÊNDICE A – Dodecaedro *snub*

A.1 Apêndice - Dodecaedro *snub*: volume da pirâmide μ

$$\begin{aligned}
 & (\overrightarrow{OI_3} \times \overrightarrow{OI_4}) \cdot \overrightarrow{OF_5} \\
 = & (-1)^{1+1} \cdot \left(-\alpha\varphi - \beta + \frac{1}{\varphi}\right) \cdot \left[\frac{\alpha^2}{\varphi} + \alpha\beta\varphi + \alpha - \frac{\alpha\beta}{\varphi^2} - \beta^2 - \frac{\beta}{\varphi} - \alpha - \beta\varphi^2 - \varphi - \left(\frac{\alpha^2}{\varphi} - \alpha\beta\varphi + \alpha + \frac{\alpha\beta}{\varphi^2} - \beta^2 + \frac{\beta}{\varphi} - \alpha + \beta\varphi^2 - \varphi\right)\right] \\
 + & (-1)^{1+2} \cdot \left(-\alpha + \frac{\beta}{\varphi} - \varphi\right) \cdot \left[-\alpha^2 - \alpha\beta\varphi^2 - \alpha\varphi - \frac{\alpha\beta}{\varphi} - \beta^2\varphi - \beta - \frac{\alpha}{\varphi^2} - \beta - \frac{1}{\varphi} - \left(-\alpha^2 + \alpha\beta\varphi^2 - \alpha\varphi + \frac{\alpha\beta}{\varphi} - \beta^2\varphi + \beta - \frac{\alpha}{\varphi^2} + \beta - \frac{1}{\varphi}\right)\right] \\
 + & (-1)^{1+3} \cdot \left(-\frac{\alpha}{\varphi} + \beta\varphi + 1\right) \cdot \left[\alpha^2\varphi + \alpha\beta - \alpha\varphi^2 + \alpha\beta + \frac{\beta^2}{\varphi} - \beta\varphi + \frac{\alpha}{\varphi} + \frac{\beta}{\varphi^2} - 1 - \left(\alpha^2\varphi - \alpha\beta - \alpha\varphi^2 - \alpha\beta + \frac{\beta^2}{\varphi} + \beta\varphi + \frac{\alpha}{\varphi} - \frac{\beta}{\varphi^2} - 1\right)\right] \\
 = & \left(-\alpha\varphi - \beta + \frac{1}{\varphi}\right) \cdot \left[2\alpha\beta\varphi - \frac{2\alpha\beta}{\varphi^2} - \frac{2\beta}{\varphi} - 2\beta\varphi^2\right] + \left(\alpha - \frac{\beta}{\varphi} + \varphi\right) \cdot \left[-2\alpha\beta\varphi^2 - \frac{2\alpha\beta}{\varphi} - 4\beta\right] + \left(-\frac{\alpha}{\varphi} + \beta\varphi + 1\right) \cdot \left[4\alpha\beta - 2\beta\varphi + \frac{2\beta}{\varphi^2}\right] \\
 = & -2\alpha^2\beta\varphi^2 + \frac{2\alpha^2\beta}{\varphi} + 2\alpha\beta + 2\alpha\beta\varphi^3 - 2\alpha\beta^2\varphi + \frac{2\alpha\beta^2}{\varphi^2} + \frac{2\beta^2}{\varphi} + 2\beta^2\varphi^2 + 2\alpha\beta - \frac{2\alpha\beta}{\varphi^3} - \frac{2\beta}{\varphi^2} - 2\beta\varphi - 2\alpha^2\beta\varphi^2 - \frac{2\alpha^2\beta}{\varphi} - 4\alpha\beta + 2\alpha\beta^2\varphi \\
 + & \frac{2\alpha\beta^2}{\varphi^2} + \frac{4\beta^2}{\varphi} - 2\alpha\beta\varphi^3 - 2\alpha\beta - 4\beta\varphi - \frac{4\alpha^2\beta}{\varphi} + 2\alpha\beta - \frac{2\alpha\beta}{\varphi^3} + 4\alpha\beta^2\varphi - 2\beta^2\varphi^2 + \frac{2\beta^2}{\varphi} + 4\alpha\beta - 2\beta\varphi + \frac{2\beta}{\varphi^2} \\
 \Rightarrow v(\mu) = & \frac{\left|-4\alpha^2\beta\varphi^2 - \frac{4\alpha^2\beta}{\varphi} + 4\alpha\beta + 4\alpha\beta^2\varphi + \frac{4\alpha\beta^2}{\varphi^2} + \frac{8\beta^2}{\varphi} - \frac{4\alpha\beta}{\varphi^3} - 8\beta\varphi\right|}{6} \approx 66,18377433778738 \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

A.2 Apêndice - Dodecaedro *snub*: volume da pirâmide σ_1

$$\begin{aligned}
& \left(\overrightarrow{OI_1} \times \overrightarrow{OI_2} \right) \cdot \overrightarrow{OI_3} \\
= & (-1)^{1+1} \cdot (-2\beta) \cdot \left[\alpha^2 - \alpha\beta\varphi^2 - \alpha\varphi - \frac{\alpha\beta}{\varphi} + \beta^2\varphi + \beta - \frac{\alpha}{\varphi^2} + \beta + \frac{1}{\varphi} - \left(-\alpha^2 - \frac{\alpha\beta}{\varphi} - \alpha\varphi + \frac{\alpha\beta}{\varphi} + \frac{\beta^2}{\varphi^2} + \beta - \alpha\varphi - \beta - \varphi^2 \right) \right] \\
+ & (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \left[\frac{\alpha^2}{\varphi^2} - \alpha\beta - \frac{\alpha}{\varphi} + \alpha\beta - \beta^2\varphi^2 - \beta\varphi - \frac{\alpha}{\varphi} + \beta\varphi + 1 - \left(-\alpha^2\varphi - \alpha\beta - \alpha\varphi^2 - \alpha\beta - \frac{\beta^2}{\varphi} - \beta\varphi + \frac{\alpha}{\varphi} + \frac{\beta}{\varphi^2} + 1 \right) \right] \\
+ & (-1)^{1+3} \cdot 2\alpha \cdot \left[\frac{\alpha^2}{\varphi} - \frac{\alpha\beta}{\varphi^2} + \alpha + \alpha\beta\varphi - \beta^2 + \beta\varphi^2 - \alpha + \frac{\beta}{\varphi} - \varphi - \left(\alpha^2\varphi^2 - \alpha\beta\varphi - \alpha + \alpha\beta\varphi - \beta^2 - \frac{\beta}{\varphi} - \alpha + \frac{\beta}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} \right) \right] \\
= & -2\beta \cdot \left(2\alpha^2 - \alpha\beta\varphi^2 + \beta^2\varphi + 2\beta - \frac{\alpha}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} - \frac{\alpha\beta}{\varphi} - \frac{\beta^2}{\varphi^2} + \alpha\varphi + \varphi^2 \right) - 2 \cdot \left(\frac{\alpha^2}{\varphi^2} + 2\alpha\beta - \frac{3\alpha}{\varphi} - \beta^2\varphi^2 + \beta\varphi + \alpha^2\varphi + \alpha\varphi^2 + \frac{\beta^2}{\varphi} - \frac{\beta}{\varphi^2} \right) \\
+ & 2\alpha \cdot \left(\frac{\alpha^2}{\varphi} - \frac{\alpha\beta}{\varphi^2} + 2\alpha + \alpha\beta\varphi + \beta\varphi^2 + \frac{\beta}{\varphi} - \varphi - \alpha^2\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2} \right) \\
= & -4\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2\varphi^2 - 2\beta^3\varphi - 4\beta^2 + \frac{2\alpha\beta}{\varphi^2} - \frac{2\beta}{\varphi} + \frac{2\alpha\beta^2}{\varphi} + \frac{2\beta^3}{\varphi^2} - 2\alpha\beta\varphi - 2\beta\varphi^2 - \frac{2\alpha^2}{\varphi^2} + \frac{6\alpha}{\varphi} - 4\alpha\beta + 2\beta^2\varphi^2 - 2\alpha^2\varphi - 2\alpha\varphi^2 - \frac{2\beta^2}{\varphi} \\
- & 2\beta\varphi + \frac{2\beta}{\varphi^2} + \frac{2\alpha^3}{\varphi} - \frac{2\alpha^2\beta}{\varphi^2} + 4\alpha^2 + 2\alpha^2\beta\varphi + 2\alpha\beta\varphi^2 + \frac{2\alpha\beta}{\varphi} - 2\alpha\varphi - 2\alpha^3\varphi^2 - \frac{2\alpha}{\varphi^2} \\
\Rightarrow & v(\sigma_1) \cong |-69, 3167239607116| = 69, 3167239607116 \text{ u.v.}
\end{aligned}$$

A.3 Apêndice - Dodecaedro *snub*: volume da pirâmide σ_2

$$\begin{aligned}
& (\overrightarrow{OI_1} \times \overrightarrow{OI_5}) \cdot \overrightarrow{OI_3} \\
= & (-1)^{1+1} \cdot (-2\beta) \cdot \left[-\alpha^2 + \alpha\beta\varphi^2 + \alpha\varphi + \frac{\alpha\beta}{\varphi} - \beta^2\varphi - \beta - \frac{\alpha}{\varphi^2} + \beta + \frac{1}{\varphi} - \left(-\alpha^2 - \frac{\alpha\beta}{\varphi} + \alpha\varphi + \frac{\alpha\beta}{\varphi} + \frac{\beta^2}{\varphi^2} - \beta - \alpha\varphi - \beta + \varphi^2 \right) \right] \\
+ & (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \left[\frac{\alpha^2}{\varphi^2} - \alpha\beta - \frac{\alpha}{\varphi} + \alpha\beta - \beta^2\varphi^2 - \beta\varphi + \frac{\alpha}{\varphi} - \beta\varphi - 1 - \left(-\alpha^2\varphi - \alpha\beta + \alpha\varphi^2 - \alpha\beta - \frac{\beta^2}{\varphi} + \beta\varphi + \frac{\alpha}{\varphi} + \frac{\beta}{\varphi^2} - 1 \right) \right] \\
+ & (-1)^{1+3} \cdot 2\alpha \cdot \left[\frac{\alpha^2}{\varphi} - \frac{\alpha\beta}{\varphi^2} + \alpha + \alpha\beta\varphi - \beta^2 + \beta\varphi^2 + \alpha - \frac{\beta}{\varphi} + \varphi - \left(-\alpha^2\varphi^2 + \alpha\beta\varphi - \alpha - \alpha\beta\varphi + \beta^2 - \frac{\beta}{\varphi} + \alpha - \frac{\beta}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} \right) \right] \\
= & -2\beta \cdot \left(\alpha\beta\varphi^2 + \alpha\varphi + \frac{\alpha\beta}{\varphi} - \beta^2\varphi + 2\beta - \frac{\alpha}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} - \frac{\beta^2}{\varphi^2} - \varphi^2 \right) - 2 \cdot \left(\frac{\alpha^2}{\varphi^2} + 2\alpha\beta - \frac{\alpha}{\varphi} - \beta^2\varphi^2 - \beta\varphi + \alpha^2\varphi - \alpha\varphi^2 + \frac{\beta^2}{\varphi} - \frac{\beta}{\varphi^2} \right) \\
+ & 2\alpha \cdot \left(\frac{\alpha^2}{\varphi} - \frac{\alpha\beta}{\varphi^2} + 2\alpha + \alpha\beta\varphi - 2\beta^2 + \beta\varphi^2 + \frac{\beta}{\varphi} + \varphi + \alpha^2\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2} \right) \\
= & -2\alpha\beta^2\varphi^2 - 2\alpha\beta\varphi - \frac{2\alpha\beta^2}{\varphi} + 2\beta^3\varphi - 4\beta^2 + \frac{2\alpha\beta}{\varphi^2} - \frac{2\beta}{\varphi} + \frac{2\beta^3}{\varphi^2} + 2\beta\varphi^2 - \frac{2\alpha^2}{\varphi^2} - 4\alpha\beta + \frac{2\alpha}{\varphi} + 2\beta^2\varphi^2 + 6\beta\varphi - 2\alpha^2\varphi + 2\alpha\varphi^2 - \frac{2\beta^2}{\varphi} + \frac{2\beta}{\varphi^2} \\
+ & \frac{2\alpha^3}{\varphi} - \frac{2\alpha^2\beta}{\varphi^2} + 4\alpha^2 + 2\alpha^2\beta\varphi - 4\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta\varphi^2 + \frac{2\alpha\beta}{\varphi} + 2\alpha\varphi + 2\alpha^3\varphi^2 - \frac{2\alpha}{\varphi^2} \\
\Rightarrow & v(\sigma_2) \cong |112, 1568153572256| = 112, 1568153572256 \text{ u.v.}
\end{aligned}$$

ANEXO A – Volume de um paralelepípedo

Teorema A.0.1. *Seja ρ um paralelepípedo de base B e altura h . Então $v(\rho) = A(B) \cdot h$*

Demonstração. Fazemos a prova em várias etapas.

1. ρ é um paralelepípedo reto retângulo, cujas arestas têm comprimento $a, b, c \in \mathbb{N}$: particionando ρ em abc cubos de aresta 1, segue dos postulados 1. e 2. de medição de volume que

$$v(\rho) = abc = A(B) \cdot h.$$

2. ρ é um paralelepípedo reto retângulo cujas arestas têm comprimentos $a, b, c \in \mathbb{Q}$: sejam $a = \frac{m}{q}$, $b = \frac{n}{q}$ e $c = \frac{p}{q}$, com $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Empilhemos q^3 cópias de ρ , de modo a obter um paralelepípedo reto retângulo δ de arestas m, n e p . O item 1, juntamente com os postulados 1. e 2 de medição de volumes, fornece

$$v(\rho) = v(\delta) = mnq$$

e, daí

$$v(\rho) = \frac{mnq}{q^3} = A(B) \cdot h.$$

3. ρ é um paralelepípedo reto retângulo cujas arestas têm comprimentos $a, b, c \in \mathbb{R}$: sejam $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ e $(c_n)_{n \geq 1}$ seqüências de números racionais, tais que $a_n < a$, $b_n < b$ e $c_n < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ e $c_n \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja, ainda, ρ_n um paralelepípedo reto retângulo contido em ρ e com arestas de comprimentos a_n , b_n e c_n . O item 2, juntamente com o postulado 3. de medição de volumes, fornece, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$v(\rho) \geq v(\rho_n) = a_n b_n c_n.$$

Mas, como tal desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a_n b_n c_n \rightarrow abc$ quando $n \rightarrow \infty$, fazendo $n \rightarrow \infty$ em tal desigualdade, obtemos $v(\rho) \geq abc$.

Por fim, utilizando seqüências $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ e $(c_n)_{n \geq 1}$ de números racionais tais que $a_n > a$, $b_n > b$, $c_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, $c_n \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$, concluímos analogamente que $v(\rho) \leq abc$. Portanto, $v(\rho) = abc = A(B) \cdot h$.

4. ρ é um paralelepípedo qualquer: seja ρ' um paralelepípedo reto retângulo de mesma altura h que ρ , cuja a base B' é um retângulo de área igual á área da base B de ρ e tal que B e B' estejam contidas em um mesmo plano α , com ρ e ρ' contidos em mesmo semiespaço, dos que α determina.

Se α' é um plano paralelo a α , a igualdade das alturas dos dois paralelepípedos garante que $\rho \cap \alpha' \neq \emptyset$ se, e só se, $\rho' \cap \alpha' \neq \emptyset$. Ademais, quando tal ocorre tais interseções são quadriláteros respectivamente congruentes a B e B', logo, têm áreas iguais. Portanto, o item 3, juntamente com o princípio de Cavalieri II, garante que

$$v(\rho) = v(\rho') = A(B') \cdot h = A(B) \cdot h.$$

[10, p-339]

