Universidade Federal do ABC

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Victor Kouak Buchaim

Técnicas de resolução e embasamento teórico de equações funcionais

Santo André, 2021

Universidade Federal do ABC

PROFMAT

Victor Kouak Buchaim

Técnicas de resolução e embasamento teórico de equações funcionais

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pelo aluno Victor Kouak Buchaim, e orientada pelo Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes.

Santo André, 2021

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Kouak Buchaim, Victor
Técnicas de resolução e embasamento teórico de equações funcionais / Victor Kouak Buchaim. — 2021.

70 fls.

Orientador: Vinicius Cifú Lopes

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2021.

1. Equações Funcionais. 2. Equação de Cauchy. 3. Funções. I. Cifú Lopes, Vinicius. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2021. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca examinadora no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) (co)orientador(a).

Santo André , 12 de agosto de 2021 .

VICTOR KOVAK BUCHAIM – Victor Buchaim

Nome completo e Assinatura do(a) autor(a)

VINICIUS CIFÚ LOPES – Vinicius Cifú Lopes

Nome completo e Assinatura do(a) (co)orientador(a)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, VICTOR KOUAK BUCHAIM realizada em 26 de Julho de 2021:

p/ Vinicius Cifú Lopes

Prof.(a) ANA CAROLINA BOERO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

p/ Vinicius Cifú Lopes

Prof.(a) MICHAEL DAVID BARRUS
University of Rhode Island

Prof.(a) HUGO LUIZ MARIANO
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Prof.(a) JEFERSON CASSIANO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Vinicius Cifú Lopes

Prof.(a) VINICIUS CIFU LOPES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC - Presidente

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

Dedico este trabalho aos meus pais, que foram os primeiros matemáticos que conheci na vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos da minha família, por terem me apoiado a seguir na jornada da matemática. Mesma jornada que meus pais trilharam tempos atrás.

Aos meus alunos, por terem me incentivado a me aprimorar como profissional. Afinal, sou professor apenas por causa de vocês.

Aos colegas do PROFMAT, pelo apoio e companheirismo desde o começo do curso.

Aos professores e coordenadores do PROFMAT, por se disponibilizarem à aperfeiçoar nossa turma de educadores. Em especial ao meu orientador Vinicius Cifú Lopes, pela dedicação em me acompanhar nesta dissertação.

E também a todos que contribuíram de alguma forma para este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"A vida é complicada, mas não desinteressante"

(Jerzy Neyman)

RESUMO

Inicio este trabalho com um capítulo sobre os principais conceitos acerca das funções. Tais conceitos serão necessários para o desenvolvimento deste texto.

A seguir, apresento a definição de equação funcional e trago técnicas de resolução para tais equações. Busco trazer problemas que são rotineiramente colocados em olimpíadas de matemática, nacionais e internacionais.

Na segunda metade do trabalho, analiso as três principais equações funcionais de Cauchy. Busco desenvolver a teoria por trás delas e também mostrar alguns exemplos de aplicação mais diretos.

Por fim, apresento ao leitor quatro importantes aplicações das equações funcionais.

Palavras-chave: Equações funcionais, Equações de Cauchy, Funções.

ABSTRACT

I begin this work with a chapter on the main concepts of functions. Such concepts will be necessary for the development of this text.

After that, I present the definition of functional equation and I provide some resolution techniques for such equations. I seek to show problems that are routinely presented at national and international Mathematical Olympiads.

In the second half of the text, I study Cauchy's three main functional equations. I develop their theory and also show some immediate examples.

Finally, I present four important applications of functional equations.

Keywords: Functional equations, Cauchy's equations, Functions.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Conforme nos mostra Christopher G. Small, no capítulo 1 de [21], os primeiros estudos sobre equações funcionais datam do século 14. Nesta época, o matemático francês Nicole Oresme (1323 – 1382) forneceu uma definição de função linear por meio de uma equação funcional. Posteriormente, Grégoire de Saint-Vincent (1584 – 1667) utilizou implicitamente uma equação funcional, em seu trabalho sobre hipérboles. Neste momento histórico, já se usava a ideia de equação funcional, porém nenhuma teoria sólida sobre equações funcionais havia sido desenvolvida.

Uma formalização mais sólida do campo das equações funcionais surgiu com o matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857). Cauchy, considerado um dos maiores matemáticos da história, deixou de legado importantes equações funcionais, dentre as quais se destaca a equação aditiva.

Além disso, antes de Cauchy efetivamente nascer, o francês Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783) havia deixado uma outra importante equação funcional, que foi melhor resolvida por Cauchy em 1821.

Após Cauchy, o ramo das equações funcionais começou a se desenvolver. Na história mais recente, autores que se destacam no assunto são: János Aczél, Palaniappan Kannappan e Prasanna Sahoo.

O objetivo desta dissertação é, num primeiro momento, definir com cuidado o conceito de equação funcional. Depois, mostro o principal método para se resolver equações funcionais: o método da substituição de variáveis.

Um dos objetivos deste texto é também trazer problemas no estilo das olimpíadas matemáticas atuais. Observei que o tema de equações funcionais é bastante recorrente em olimpíadas, principalmente na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Sendo assim, é meu intuito dar uma base preparatória, em equações funcionais, para o leitor que deseja participar de olimpíadas de matemática.

Posteriormente, apresento um estudo das três principais equações funcionais deixadas por Cauchy. Exponho essas equações e deduzo suas soluções.

Por fim, apresento quatro aplicações bastante variadas das equações funcionais e do conceito de aditividade. Na primeira, mostro como as equações funcionais podem ser úteis no cálculo de somatórios. Na segunda, trato do conceito de aditividade módulo n. Na terceira, trato do teorema da estabilidade de Hyers. E, na quarta, dou uma prova do limite trigonométrico fundamental via equações funcionais.

1

DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo, definiremos todos os conceitos básicos para que o leitor possa avançar para o tema principal, que são as equações funcionais. As definições e teoremas provados neste capítulo serão sucintos.

Para escrever as três primeiras seções deste capítulo, embasei-me em [9] e [14]. E para escrever as três últimas seções deste capítulo, apoiei-me em [6] e [10].

1.1 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma **função** $f : A \to B$ consiste em três elementos:

1. Um conjunto A, chamado de **domínio** da função;
2. Um conjunto B, chamado de **contradomínio** da função;
3. Uma **regra** clara e bem determinada que associa a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$.

O elemento $f(x)$ é o **valor** que a função assume no ponto x, enquanto que f simboliza a função propriamente. Para que f seja de fato uma função, é preciso que a regra que define $f(x)$ verifique duas condições:

- **(Sem Exceções)** A regra deve fornecer o valor de $f(x)$ para **todo** $x \in A$;
- **(Sem Ambiguidades)** Para cada $x \in A$, o valor de $f(x)$ deve ser **único**.

Sendo $f : A \to B$ uma função, o conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ é chamado de **imagem** de f. Além disso, o conjunto $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ é chamado de **gráfico** da função f. Observe que o gráfico de uma função é um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$.

Para finalizar a seção, apresentamos três breves definições.

Uma função $f : A \to B$ diz-se:

- **injetiva**, quando $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$;
- **sobrejetiva**, quando, para qualquer $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$;
- **bijetiva**, quando for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva.

1.2 PERÍODO DE FUNÇÕES

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **periódica** se existir um número real positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. O menor número real positivo p que verifica a condição anterior, quando existe, é chamado de **período** da função.

Exemplo 1.1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$ é periódica, de período $p = 2\pi$. Ou seja, temos que $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Veja este outro exemplo curioso:

Exemplo 1.2. (Ângelo Papa Neto - de [14] página 3 - Solução adaptada da referência)

A **função de Dirichlet** $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é periódica, porém não possui período.

Com efeito, dado um racional $r > 0$, podemos ver que $d(x + r) = d(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Isto segue pois, se $x \in Q$, então $(x + r) \in Q$ e assim $d(x + r) = 1 = d(x)$. E se ocorrer $x \notin Q$, temos $(x + r) \notin Q$ e tem-se $d(x + r) = 0 = d(x)$.

No entanto, não existe um menor racional positivo, de forma que não é possível determinar um período para d.

1.3 PARIDADE DE FUNÇÕES

Uma função $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma **função par** se $E(x) = E(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Uma função $O : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma **função ímpar** se $-O(x) = O(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.3. Se $n \in \mathbb{N}$, então $f(x) = x^{2n}$ é uma função par e $g(x) = x^{2n+1}$ é uma função ímpar.

Consideremos uma função qualquer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se definirmos

$$E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

teremos que E é uma função par, já que pode ser verificado que $E(x) = E(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Analogamente, se definirmos

$$O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

teremos que O é uma função ímpar, já que $-O(x) = O(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Com isso, segue que qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como soma de uma função par com uma função ímpar:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = E(x) + O(x).$$

Além disso, é possível provar que é única a representação de f como soma de uma função par com uma função ímpar.

Suponhamos que, para todo x real, tenhamos $f(x) = g(x) + h(x)$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar. Trocando-se x por $-x$ na expressão $f(x) = g(x) + h(x)$, obtém-se:

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) \Rightarrow f(-x) = g(x) - h(x).$$

Com isto, chega-se a um sistema de equações nas incógnitas $g(x)$ e $h(x)$:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

Ao se resolver o sistema de equações 1.1, conclui-se que:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = E(x).$$
$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = O(x).$$

Este argumento prova a unicidade de tal representação.

1.4 MONOTONICIDADE DE FUNÇÕES

Com base em uma função $f : A \to B$, definiremos quatro conceitos:

- f é dita **crescente** se, para $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$;
- f é dita **decrescente** se, para $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$;
- f é dita **não-decrescente** se, para $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- f é dita **não-crescente** se, para $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Se uma função $f : A \to B$ é de algum dos quatro tipos anteriores, então ela é dita uma função **monótona**. Isto é, uma função é monótona quando ela preserva (ou inverte) a relação de ordem.

1.5 LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES

Seja $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $A \backslash \{a\}$. Dizemos que f converge para $L \in \mathbb{R}$ conforme x se aproxima de a se, para todo $\epsilon > 0$, for possível encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A \quad \text{e} \quad 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Quando isto ocorre, escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Um importante teorema que facilita a operação com limites é dado abaixo. Sua demonstração pode ser encontrada na página 97 de [6], ou em qualquer outro livro de cálculo diferencial e integral.

Teorema 1.4. *Seja $f, g : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}$ tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $A \backslash \{a\}$. Suponha também que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$. Então:*

- $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$;
- $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$;
- $\lim_{x \to a} cf(x) = cL_1$, *donde* $c \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = L_1 L_2$;
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, *no caso de* $L_2 \neq 0$.

Também é possível, com a definição de limite, provar o Teorema do Confronto para funções. Sua demonstração foge do escopo deste texto, mas pode ser encontrada na página 155 de [10].

Teorema 1.5. ***(Teorema do Confronto para funções)***

Sejam $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, *onde* $A \subset \mathbb{R}$. *Seja também* $a \in \mathbb{R}$ *tal que todo intervalo aberto contendo* a *intersecta* $A \backslash \{a\}$. *Se, para todo* $x \in A \backslash \{a\}$, *valer* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *e, além disso, tivermos* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, *então* $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Vejamos, a seguir, a definição de continuidade:

Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$, é dita **contínua** no ponto $a \in A$ quando, para todo $\epsilon > 0$, for possível encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Diz-se simplesmente que f é **contínua** se f for contínua em todo $a \in A$.

Ao contrário da definição de limite, só faz sentido indagar se f é contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$ quando este ponto está no domínio de f.

A partir das definições acima, é possível provar um resultado que relaciona limite com continuidade:

Teorema 1.6. *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$, *com* $A \subset \mathbb{R}$, *e* $a \in A$ *de tal sorte que todo intervalo aberto contendo* a *intersecta* $A \backslash \{a\}$. *Então f é contínua em a se, e somente se,* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Teorema 1.7. *A função* ***constante*** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = k$, *com* $k \in \mathbb{R}$ *constante, é contínua.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto do domínio. Provemos a continuidade neste ponto arbitrário. Dado um $\epsilon > 0$, podemos tomar $\delta > 0$ como sendo qualquer número, neste caso. Deste modo,

$$(x \in A \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |k - k| = 0 < \epsilon.$$

□

Teorema 1.8. *A função **linear** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = cx$, onde $c \in \mathbb{R}$, é contínua.*

Demonstração. Se $c = 0$ a função será constante, e será contínua pelo teorema 1.7. Vamos então assumir que $c \neq 0$. Para checar a continuidade, vamos tomar $a \in \mathbb{R}$ e provar a continuidade neste ponto. Dado um $\epsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{|c|}$. Com isto,

$$(x \in A \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |cx - ca| = |c| \cdot |x - a| < |c|\delta = |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

□

Exemplo 1.9. A **função Sinal** $sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ -1, & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

é contínua em todos os pontos do domínio, exceto no ponto $a = 0$. Primeiramente vamos provar que se $a > 0$, então sgn é contínua em a. Dado $\epsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \frac{a}{2}$. Assim, se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $|x - a| < \delta$, segue que x está no conjunto $(a - \delta, a + \delta) = (\frac{a}{2}, \frac{3a}{2})$, e como $a > 0$, tem-se $x > 0$ e portanto $f(x) = 1$. Logo,

$$(x \in A \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |1 - 1| = 0 < \epsilon.$$

De forma parecida, pode-se provar a continuidade de sgn nos pontos $a < 0$.
Por fim, vamos mostrar que sgn é descontínua em $a = 0$. Tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}$. Para qualquer valor de $\delta > 0$ que se tome, é possível encontrar um $x > 0$ tal que $|x - 0| = |x| < \delta$. Um possível valor é $x = \frac{\delta}{2}$, neste caso. Como $x > 0$, segue que $f(x) = 1$. Então, para este valor de x por exemplo, não é verdade que $|f(x) - f(0)| < \epsilon$. Com efeito, $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$.

Exemplo 1.10. Outros exemplos de funções que são contínuas:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$;

- $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ tal que $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$;
- $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_a x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$;
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$;
- $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ tal que $f(x) = \cos x$;
- $f : \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \tan x$;
- $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ tal que $f(x) = |x|$.

A demonstração da continuidade nestes casos é bastante técnica, e será omitida. O leitor interessado pode buscar estas demonstrações no capítulo 7 de [13], ou também nos capítulos 3 e 6 de [6].

Os dois teoremas abaixo são bastante importantes operacionalmente, e serão dados sem demonstração. Mais detalhes podem ser encontrados em [10], na página 177.

Teorema 1.11. *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in A$, então $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ são contínuas em a. Se $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ também é contínua em a.*

Teorema 1.12. *A composta de duas funções contínuas é contínua. Ou seja, se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ é contínua em $b = f(a) \in Y$ e, além disso, $f(X) \subset Y$, então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a.*

Os teoremas 1.11 e 1.12 mostram, por exemplo, que as funções do exemplo 1.10 podem ser combinadas por soma, subtração, multiplicação, divisão (com a ressalva feita sobre o denominador) e composição, de forma a gerar novas funções contínuas.

Exemplo 1.13. A função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + 10} + \operatorname{sen} x \cdot \log x - 4$ é contínua.

Os próximos dois teoremas serão feitos sem demonstração, porém suas demonstrações podem ser encontradas nas páginas 5 e 15 do oitavo capítulo de [13].

Teorema 1.14. *(Teorema do Valor Intermediário)*

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja η um número real entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \eta$.

Teorema 1.15. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo I. Então $F(I) = \{f(x) : x \in I\}$ é um intervalo.*

1.6 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Uma **sequência** de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, que é dito o n-ésimo termo da sequência. Uma sequência é comumente denotada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, simplesmente, por (x_n).

Exemplo 1.16. Se $x_n = \frac{1}{n}$, obtém-se a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots)$.

Uma sequência (x_n) é dita **limitada** se existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência do exemplo 1.16 é limitada, já que $|x_n| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada uma sequência (x_n), dizemos que:

- (x_n) é **crescente** se $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (x_n) é **decrescente** se $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (x_n) é **não-decrescente** se $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (x_n) é **não-crescente** se $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definamos agora a noção de limite de uma sequência:

Sejam (x_n) uma sequência e $L \in \mathbb{R}$. Diz-se que (x_n) converge para L quando para todo real $r > 0$, existe um inteiro $n_0 \geq 1$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < r.$$

Se (x_n) converge para L, escrevemos $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$ ou, simplesmente, $\lim x_n = L$. No caso do exemplo 1.16, pode-se provar que $\lim x_n = 0$.

Teorema 1.17. *Se (x_n) é uma sequência **constante** tal que $x_n = k, \forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n = k$.*

Demonstração. Dado $r > 0$, podemos tomar um inteiro $n_0 \geq 1$ qualquer que seja. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - k| = |k - k| = 0 < r.$$

$\square$

Teorema 1.18. *Seja $c \in \mathbb{R}$ e (x_n) uma sequência convergente. Então* $\lim cx_n = c \lim x_n$.

Demonstração. Se $c = 0$ o resultado segue do teorema 1.17. Vamos supor $c \neq 0$ a partir de agora. Denotemos $\lim x_n = L$. Precisamos provar que $\lim cx_n = cL$. Dado $r > 0$, segue da convergência de (x_n) que existe um inteiro $n_0 \geq 1$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \frac{r}{|c|}.$$

Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow |c| \cdot |x_n - L| < r \Rightarrow |cx_n - cL| < r,$$

o que prova nosso resultado. $\square$

Um resultado importante dessa teoria é o Teorema do Confronto para sequências, que será usado mais adiante neste texto. Sua demonstração pode ser encontrada na página 9 do segundo capítulo de [13].

Teorema 1.19. ***(Teorema do Confronto para sequências)***

Sejam $(x_n), (y_n)$ e (z_n) três sequências satisfazendo $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e suponha que $\lim x_n = \lim z_n = L$. *Então,* $\lim y_n = L$.

Teorema 1.20. *Suponha que $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in \mathbb{R}$. Então* $\lim f(x_n) = f(a)$ *para toda sequência de pontos $x_n \in A$ com* $\lim x_n = a$.

Demonstração. Como f é contínua em a, temos que, dado $\epsilon > 0$, é possível encontrar $\delta > 0$ tal que

$$(x \in A \quad \text{e} \quad |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{1.2}$$

Tomemos então uma sequência de pontos $x_n \in A$ com $\lim x_n = a$. Assim, para o $\delta > 0$ acima, existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta. \tag{1.3}$$

Sendo assim, de (1.2) e (1.3), segue que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \epsilon.$$

E isto prova que $\lim f(x_n) = f(a)$. □

Como nos mostra o autor Elon no teorema 4 da página 177 de [10], a recíproca do teorema 1.20 também é verdadeira.

Finalizo a seção com um importante teorema sobre sequências. Sua demonstração pode ser encontrada na página 86 de [10].

Teorema 1.21. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

2

DEFINIÇÃO DE EQUAÇÃO FUNCIONAL

Este capítulo trata de definir o conceito de equação funcional, bem como o que são suas soluções. Ao final, mostro alguns tipos específicos de equações funcionais.

2.1 EQUAÇÃO FUNCIONAL

Informalmente falando, **equações funcionais** nada mais são do que equações, onde os dois lados são termos construídos por um número finito de funções desconhecidas e por um número finito de variáveis independentes. Essa construção é efetuada por meio de um número finito de funções conhecidas, e um número finito de substituições de funções conhecidas e desconhecidas em funções conhecidas e desconhecidas.

Nosso objetivo será determinar as funções desconhecidas da equação funcional. Neste trabalho, trataremos apenas de funções de uma variável e de equações funcionais com apenas uma função desconhecida.

Feita esta breve contextualização informal, vamos à definição formal, na linha de como é feito por Aczél em [1], nas primeiras três páginas de seu livro. Inicialmente tomemos dois conjuntos, um de funções conhecidas e um de funções desconhecidas. Se uma função f é desconhecida, diremos que f é um símbolo funcional. Além disso, as funções desses dois conjuntos precisam ser acompanhadas de seus domínios e de seu número de argumentos (aridade).

Definição 2.1. Um **termo** é definido como segue:

- Variáveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ são termos.

- Se $a_1, a_2, \ldots, a_m$ são termos e f é um símbolo funcional ou uma função conhecida, com m variáveis, então $f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ também é um termo.
- Não existem outros termos, além dos anteriores.

Definido isto, uma **equação funcional** é uma equação do tipo $A_1 = A_2$, onde A_1 e A_2 são termos que contém k variáveis independentes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ e um número finito de funções conhecidas e desconhecidas.

Vejamos então um exemplo detalhado:

Exemplo 2.2. As variáveis independentes reais x e y são termos. Sendo f uma função (desconhecida) de uma variável, $f(x)$ e $f(y)$ são termos também.

Da mesma forma, as funções conhecidas de duas variáveis $G(x,y) = x+y$ e $H(x,y) = xy$ também são termos. São termos também $A = f(G(x,y)) = f(x+y)$ e $B = H(f(x), f(y)) = f(x)\cdot f(y)$. Assim, a igualdade de termos $A = B$ fornece uma equação funcional, a saber, $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$.

As variáveis independentes pertencem a um certo domínio. Neste trabalho, esse domínio será um subconjunto de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. É muito importante se atentar ao domínio no qual a equação funcional está definida. Uma mudança no domínio pode acarretar em uma mudança nas soluções da equação.

Observação 2.3. *Vale ressaltar que o número de variáveis de uma função pode ser diferente do número de variáveis da equação funcional, na qual ela está inserida. No exemplo 2.2, a função f é de uma variável, porém a equação funcional é de duas variáveis, x e y. Para que não haja confusões, alguns autores como Efthimiou, na página 36 de [5], denotam as variáveis da equação funcional por parâmetros.*

Exemplo 2.4. São exemplos de equações funcionais:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
- $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$;
- $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cdot f(y)$;

- $f(x^2 f(y)^2) = f(x)^2 f(y)$;
- $f(x + f(x) + y) + f(x - f(x) - y) = f(x + y) + f(x - y)$.

2.2 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO FUNCIONAL

Uma **solução particular** de uma equação funcional é uma função específica que verifica a equação funcional, para todos os possíveis valores das variáveis no seu domínio, inclusive satisfeitas as condições para composição das funções nos termos. Isto é, essa tal solução torna a equação funcional uma identidade.

Uma **família parametrizada de soluções** da equação funcional é uma família de funções contendo infinitas soluções da equação, todas elas diferindo apenas por constantes. O nome família se refere ao fato de tais funções serem bastante parecidas. Por exemplo, $f(x) = ax^2 + bx$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma família de funções, onde a e b são parâmetros livres que variam nos reais.

O **conjunto de soluções** de uma equação funcional é simplesmente o conjunto de todas as suas soluções. Isto quer dizer que qualquer função pertencente ao conjunto de soluções é uma solução, e que qualquer função não pertencente a este conjunto não pode ser solução.

Utiliza-se também o termo **solução geral** quando uma família parametrizada de soluções corresponde perfeitamente ao conjunto de soluções. Isto é, quando não existem outras soluções fora desta família parametrizada de soluções.

O número de soluções de uma equação funcional pode variar bastante. Algumas equações funcionais possuem infinitas soluções, enquanto outras possuem um número finito. Outras ainda, podem possuir zero soluções.

Recorrentemente, busca-se o conjunto das soluções com alguma condição extra sobre essas funções, por exemplo continuidade ou monotonicidade, como veremos adiante.

Exemplo 2.5. Em [2], na página 71, o autor traz uma questão da Bulgaria, de 1996, em que foi pedido que se encontrasse todas as funções crescentes (ou decrescentes) $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ tais que, $\forall x \in (0, +\infty)$, valesse

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x.$$

Neste problema, observe que $f(x) = x$ é uma solução particular da equação funcional. Com efeito,

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = \frac{x^2}{f(x)} = \frac{x^2}{x} = x.$$

No entanto, uma família parametrizada de soluções será dada por $f(x) = cx$, onde $c > 0$. Vamos verificar que essa família de funções de fato resolve a equação:

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = c\frac{x^2}{f(x)} = \frac{cx^2}{cx} = x.$$

Na página 71 de [2] prova-se também que a família $f(x) = cx$, onde $c > 0$, contempla todas as soluções da equação funcional. Assim, esta família é solução geral da equação funcional, e também compõe o conjunto de soluções. Formalmente, escrevemos que o conjunto de soluções é $\{f(x) = cx : c > 0\}$. Tal equação funcional possui, portanto, infinitas soluções.

Exemplo 2.6. Na IMO de 2015, na página 3 de [17], foi pedido que se determinasse todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, valesse

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1.$$

Na página 10 de [17] prova-se que apenas as funções $f(x) = -1$ e $g(x) = x + 1$ verificam a equação funcional. Cada uma delas é uma solução particular da equação funcional. O conjunto de soluções é, portanto, $\{f(x) = -1, g(x) = x + 1\}$. Este é um exemplo de equação funcional com exatas duas soluções.

Nos próximos capítulos deste texto serão ensinadas técnicas para que se obtenha as soluções de uma equação funcional. Neste capítulo, fizemos apenas uma diferenciação entre solução particular, família parametrizada de soluções, conjunto de soluções e solução geral.

2.3 TIPOS ESPECÍFICOS DE EQUAÇÃO FUNCIONAL

Um tipo bastante simples de equação funcional é

$$F(x, f(x)) = 0,$$

onde x pertence a um domínio D e F é uma função conhecida de duas variáveis.

O autor Efthimiou, na página 36 de [5], denota as equações deste tipo por **equações funcionais algebróides**.

Exemplo 2.7. Tomando $F(a, b) = b^2 + b - 2a^2$, a equação funcional $F(x, f(x)) = 0$ se transforma em:

$$f(x)^2 + f(x) - 2x^2 = 0, \ \forall x \in D.$$

Outra classe de equações funcionais é

$$F(x, y, f(x), f(y)) = 0,$$

onde x e y pertencem a um domínio D e F é uma função conhecida de quatro variáveis.

Exemplo 2.8. Tomando $F(a, b, c, d) = ac + bd - 2$, a equação funcional $F(x, y, f(x), f(y)) = 0$ se torna:

$$xf(x) + yf(y) - 2 = 0, \ \forall x, y \in D.$$

O último tipo de equação funcional dessa seção é

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)),$$

onde x e y pertencem a um domínio D e F é uma função conhecida de duas variáveis.

As equações deste tipo são descritas por Aczél, na página 49 de [1]. Em seu texto, o autor mostra um método para resolver essas equações, por meio do princípio da indução matemática. O exemplo a seguir é apresentado na mesma página deste livro.

Exemplo 2.9. Tomando $F(a,b) = a + b + ab$ e $D = \mathbb{R}$, a equação $f(x+y) = F(f(x), f(y))$ se transformará em:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nas páginas 49, 50 e 51 de [1], Aczél demonstra que as soluções contínuas desta equação são $f(x) = -1$ e $g(x) = e^{cx} - 1$, com $c \in \mathbb{R}$. Este é novamente um exemplo de equação funcional com infinitas soluções, uma vez que c pode variar nos reais. Aqui, $f(x) = -1$ é uma solução particular, enquanto que $g(x) = e^{cx} - 1$ representa uma família parametrizada de soluções contínuas. É importante observar que a função f não advém da família g. Sendo assim, o conjunto das soluções contínuas será composto por uma solução particular e uma família parametrizada de soluções: $\{f(x) = -1, g(x) = e^{cx} - 1 : c \in \mathbb{R}\}$.

3

PROBLEMAS PRELIMINARES

Neste capítulo, analisaremos alguns problemas iniciais envolvendo equações funcionais. São questões que exigem apenas o valor da função em algum ponto específico, e não a função em si. Para resolver estas questões, basta substituir as variáveis da equação funcional por valores convenientes. Abaixo apresento alguns problemas, bem como suas soluções explicadas.

Problema 3.1. (OBM-2000 1ª fase - de [11] página 8 - Solução minha)

Seja f uma função real tal que:

- Para todos x, y reais, vale $f(x+y) = x + f(y)$;
- $f(0) = 2$.

Qual o valor de $f(2000)$?

Solução. Como conhecemos $f(0)$, podemos colocar $x = 2000$ e $y = 0$:

$$f(2000+0) = 2000 + f(0) \Rightarrow f(2000) = 2000 + 2 \Rightarrow f(2000) = 2002.$$

Problema 3.2. (IME RJ-2006/2007 - de [15] página 25 - Solução minha)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, tal que:

- $f(4) = 5$;
- $f(x+4) = f(x) \cdot f(4)$.

Calcule o valor de $f(-4)$.

Solução. A tentativa natural é substituir $x = -4$. Isso nos leva a

$$f(-4+4) = f(-4) \cdot f(4) \Rightarrow f(0) = f(-4) \cdot 5 \Rightarrow f(-4) = \frac{f(0)}{5}.$$

No entanto, falta-nos saber o valor de $f(0)$. Para descobri-lo, podemos retornar à equação inicial e fazer $x = 0$:

$$f(0+4) = f(0) \cdot f(4) \Rightarrow 5 = f(0) \cdot 5 \Rightarrow f(0) = 1.$$

Por fim, calculamos o valor de $f(-4)$:

$$f(-4) = \frac{f(0)}{5} = \frac{1}{5}.$$

Problema 3.3. (OBM-2004 1ª fase - de [11] página 6 - Solução adaptada da referência)

A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida nos inteiros, satisfaz, para todo n inteiro, a equação:

$$f(n) - (n+1) \cdot f(2-n) = (n+3)^2.$$

Quanto vale $f(0)$?

Solução. Naturalmente tentaremos colocar $n = 0$ na equação:

$$f(0) - (0+1) \cdot f(2-0) = (0+3)^2 \Rightarrow f(0) - f(2) = 9.$$

No entanto, será preciso também saber o valor de $f(2)$. Fazemos então $n = 2$ na equação:

$$f(2) - (2+1) \cdot f(2-2) = (2+3)^2 \Rightarrow f(2) - 3 \cdot f(0) = 25.$$

Sendo assim, podemos considerar que temos um sistema de incógnitas $f(0)$ e $f(2)$:

$$\begin{cases} f(0) - f(2) = 9 \\ f(2) - 3 \cdot f(0) = 25. \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos

$$-2 \cdot f(0) = 34 \Rightarrow f(0) = -17.$$

Problema 3.4. (OBM-2005 2ª fase - de [11] página 14 - Solução minha)

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz:

- Para todos x, y reais, vale $f(x + f(y)) = x + f(f(y))$;
- $f(2) = 8$.

Calcule $f(2005)$.

Solução. Tentemos inicialmente fazer $y = 2$, para poder usar a informação de que $f(2) = 8$:

$$f(x + f(2)) = x + f(f(2)) \Rightarrow f(x + 8) = x + f(8).$$

Uma boa saída neste momento é fazer $x = -6$, para que apareça novamente o valor de $f(2)$:

$$f(-6 + 8) = -6 + f(8) \Rightarrow f(2) + 6 = f(8) \Rightarrow f(8) = 8 + 6 \Rightarrow f(8) = 14.$$

Assim, tem-se

$$f(x + 8) = x + 14.$$

Por fim, basta fazer $x = 1997$ para obter $f(2005)$ do lado esquerdo:

$$f(1997 + 8) = 1997 + 14 \Rightarrow f(2005) = 2011.$$

Problema 3.5. (OBM-2009 1ª fase - de [11] página 6 - Solução adaptada da referência)

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função satisfazendo $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$ e $f(x + 12) = f(x + 21) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Então, qual o valor de $f(2009)$?

Solução. Na expressão $f(x + 12) = f(x + 21) = f(x)$, podemos substituir x por $x - 12$, para gerar uma relação mais simplificada. Essa substituição normalmente é indicada pela simbologia $x \leftarrow x - 12$. Assim:

$$f(x - 12 + 12) = f(x - 12 + 21) = f(x - 12) \Rightarrow f(x) = f(x + 9) = f(x - 12).$$

O que de fato é mais interessante nesta conta é que $f(x) = f(x + 9), \forall x \in \mathbb{Z}$. Nesta expressão, podemos fazer agora $x \leftarrow x - 9$, para obter, $\forall x \in \mathbb{Z}$,

$$f(x - 9) = f(x - 9 + 9) \Rightarrow f(x - 9) = f(x). \tag{3.1}$$

Agora na expressão $f(x + 12) = f(x)$ podemos fazer $x \leftarrow x - 9$, obtendo, $\forall x \in \mathbb{Z}$,

$$f(x - 9 + 12) = f(x - 9) \Rightarrow f(x + 3) = f(x - 9). \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2) pode-se depreender que $f(x) = f(x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Agora trabalha-se com a periodicidade de f. O resultado $f(x) = f(x + 3)$ pode ser estendido para

$$f(x) = f(x + 3) = f(x + 6) = f(x + 9) = \cdots = f(x + 2007), \tag{3.3}$$

uma vez que 2007 é múltiplo de 3. Fazendo $x = 2$ em (3.3) obtém-se $f(2) = f(2 + 2007) = f(2009)$. Sendo assim, $f(2009) = f(2) = 2$ e o problema está resolvido.

Problema 3.6. (OBM-2012 1ª fase - de [11] página 8 - Solução minha)

Considere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ e, para todo natural $n \geq 1$, satisfaz as seguintes condições:

- $f(3n) = 3 \cdot f(n) + 1$;
- $f(3n + 1) = 3 \cdot f(n) + 2$;
- $f(3n + 2) = 3 \cdot f(n)$.

Determine $f(2012)$.

Solução. Precisamos, primeiramente, descobrir o resto e o quociente da divisão de 2012 por 3, para saber qual regra aplicar. Temos que $2012 = 3 \cdot 670 + 2$ e, portanto:

$$f(2012) = f(3 \cdot 670 + 2) = 3 \cdot f(670). \tag{3.4}$$

Agora com o 670 prosseguimos da mesma maneira:

$$f(670) = f(3 \cdot 223 + 1) = 3 \cdot f(223) + 2. \tag{3.5}$$

Prosseguindo,

$$f(223) = f(3 \cdot 74 + 1) = 3 \cdot f(74) + 2 \tag{3.6}$$

$$f(74) = f(3 \cdot 24 + 2) = 3 \cdot f(24) \tag{3.7}$$

$$f(24) = f(3 \cdot 8) = 3 \cdot f(8) + 1 \tag{3.8}$$

$$f(8) = f(3 \cdot 2 + 2) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 0 = 0. \tag{3.9}$$

Substituindo a equação (3.9) em (3.8) obtemos $f(24) = 1$. Substituindo a equação (3.8) em (3.7) conseguimos $f(74) = 3$. Substituindo a equação (3.7) em (3.6) alcançamos $f(223) = 11$. Substituindo a equação (3.6) em (3.5) obtemos $f(670) = 35$. Por fim, substituindo a equação (3.5) em (3.4) tem-se a resposta: $f(2012) = 105$.

Observação 3.7. *Os valores de $f(0)$ e $f(1)$, dados no enunciado, não foram efetivamente utilizados na resolução anterior para se determinar $f(2012)$. Estes valores são dados de forma que se consiga, em teoria, obter $f(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Para se descobrir por exemplo o valor de $f(5)$, será necessário utilizar o valor de $f(1)$:*

$$f(5) = f(3 \cdot 1 + 2) = 3 \cdot f(1) = 3 \cdot 2 = 6.$$

4

EQUAÇÕES FUNCIONAIS POR SUBSTITUIÇÃO

Neste capítulo, iniciamos o estudo sobre resolução de equações funcionais. O método de resolução de equações funcionais mais amplamente utilizado é o método da substituição, que é tema deste capítulo. Este normalmente é o primeiro método a se tentar para solucionar uma equação funcional. Isto não significa que uma dada substituição sempre será frutífera. Muitas vezes, é preciso trabalhar na tentativa e erro. Além disso, nem todas as equações funcionais são resolvidas simplesmente por substituições, como veremos mais adiante.

As substituições mais simples são quando se atribui algum número a x ou a y, por exemplo 0 ou 1. Outras equações vão requerer que se faça, por exemplo, $y = 3x$ ou $y = \frac{x}{2}$. Outras ainda vão requerer truques mais avançados, que serão explicados via exemplos.

Antes de prosseguirmos, é preciso ressaltar um ponto lógico importante. A implicação abaixo, onde apenas fizemos $y = 0$, é de fato verdadeira:

$$f(x+y) = x + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = x + f(0),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Ou seja, a substituição $y = 0$ na equação original nos levou à uma função afim $f(x) = x + f(0)$. Denotando $f(0) = k$, por simplicidade, podemos escrever $f(x) = x + k$. Mas note que a seta da implicação é da esquerda para a direita. Ou seja, à principio, não se tem certeza que essa função afim de fato é solução da equação original. Portanto, é preciso testar se $f(x) = x + k$ resolve de fato a equação original. Fazendo o teste,

$$f(x) = x + k,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad f(x+y) - f(y) = (x+y+k) - (y+k) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Assim fica provado que $f(x) = x + k$ é solução da equação. Além disso, a implicação em (4.1) nos diz que se f é solução da equação funcional, então $f(x) = x + k$. Portanto conclui-se que $f(x) = x + k$ é a **única** família parametrizada de soluções da equação funcional, sendo portanto a solução geral desta equação. Ressalva feita, seguiremos para exemplos práticos de equações funcionais.

Problema 4.1. (POTI - de [20] aos 0:18 minutos - Solução adaptada do vídeo)

Determine as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$f(x) + f(2x + y) + 5xy = f(3x - y) + 2x^2 + 1.$$

Solução. Seria bastante interessante que ocorresse $f(2x + y) = f(3x - y)$, para que esses termos se cancelassem mutuamente. Para isto acontecer, basta que $2x + y = 3x - y$, isto é, que $y = \frac{x}{2}$. Façamos então a substituição $y = \frac{x}{2}$ para ver o que se consegue:

$$f(x) + f\left(\frac{5x}{2}\right) + 5x\frac{x}{2} = f\left(\frac{5x}{2}\right) + 2x^2 + 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prosseguindo,

$$f(x) = 2x^2 + 1 - \frac{5x^2}{2},\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = 1 - \frac{x^2}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Encontramos uma função f, candidata para ser a resposta. Basta apenas checar se esta função resolve a equação funcional inicial. Substituindo $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ de cada lado, esquerdo e direito, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) + f(2x + y) + 5xy &= 1 - \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{(2x + y)^2}{2} + 5xy \\ &= \frac{4 - x^2 - (4x^2 + 4xy + y^2) + 10xy}{2} \\ &= \frac{4 - x^2 - 4x^2 - 4xy - y^2 + 10xy}{2} \\ &= \frac{-5x^2 + 6xy - y^2 + 4}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(3x - y) + 2x^2 + 1 &= 1 - \frac{(3x - y)^2}{2} + 2x^2 + 1 \\ &= \frac{2 - (9x^2 - 6xy + y^2) + 4x^2 + 2}{2} \\ &= \frac{2 - 9x^2 + 6xy - y^2 + 4x^2 + 2}{2} \\ &= \frac{-5x^2 + 6xy - y^2 + 4}{2}. \end{aligned}$$

E assim fica provado que a solução da equação funcional é de fato $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$.

Problema 4.2. (POTI - de [20] aos 5:04 minutos - Solução adaptada do vídeo)

Determine as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, $\forall x \in \mathbb{R}$, vale

$$f(x) + 2f(1-x) = x^2 + 2.$$

Solução. Fazendo-se $x = 0$ e $x = 1$, seria possível encontrar os valores de $f(0)$ e $f(1)$. No entanto, saber disso em nada ajudará a encontrar f, neste caso. Um truque útil seria "inverter" o conteúdo de $f(x)$ com $f(1-x)$. Ou seja, na realidade, realizamos a substituição $x \leftarrow 1-x$:

$$f(1-x) + 2f(1-(1-x)) = (1-x)^2 + 2 \Rightarrow f(1-x) = 3 - 2x + x^2 - 2f(x). \tag{4.3}$$

Basta então substituir o resultado de (4.3) na equação funcional original:

$$f(x) + 2\cdot(3-2x+x^2-2f(x)) = x^2+2 \Rightarrow -3f(x)+6-4x+2x^2 = x^2+2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-4x+4}{3}.$$

Agora que encontramos f será novamente necessário checar se f é de fato solução da equação funcional:

$$\begin{aligned} f(x) + 2f(1-x) &= \frac{x^2-4x+4}{3} + 2\frac{(1-x)^2 - 4(1-x) + 4}{3} \\ &= \frac{x^2-4x+4}{3} + 2\frac{1-2x+x^2-4+4x+4}{3} \\ &= \frac{x^2-4x+4}{3} + \frac{2+4x+2x^2}{3} \\ &= \frac{3x^2+6}{3} \\ &= x^2+2. \end{aligned}$$

Assim, $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{3}$ é de fato a única solução.

Problema 4.3. (Andreescu e Boreico - de [2] página 105 - Solução adaptada da referência)

Encontre as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$f(xy) = xf(x) + yf(y).$$

Solução. Façamos inicialmente $y = 1$:

$$f(x) = xf(x) + f(1) \Rightarrow (1-x)f(x) = f(1). \tag{4.4}$$

Colocando $x = 1$ em (4.4), chegamos que $f(1) = 0$. Assim, $\forall x \in \mathbb{R}$, vale $(1-x)f(x) = 0$. Se $x \neq 1$, segue que $f(x) = 0$. Em resumo, $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. É fácil verificar que essa função identicamente nula de fato é solução.

Problema 4.4. (Andreescu e Boreico - de [2] página 102 - Solução adaptada da referência)

Encontre todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$f(x)y + f(y)x = (x + y)f(x)f(y).$$

Solução. Se existir algum $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(y) = 0$, segue que

$$f(x)y + 0x = (x + y)f(x)0 \Rightarrow f(x)y = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se acontecer $y \neq 0$, segue da última equação que $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Podemos ver que essa função identicamente nula de fato é solução da equação original. Prosseguimos na procura por outras soluções. Anteriormente, supusemos que existe $y \neq 0$ tal que $f(y) = 0$. Caso isto não ocorra, teremos $f(y) \neq 0$, para todo $y \neq 0$. Façamos então a substituição $y = x$ na equação funcional original:

$$f(x)x + f(x)x = 2xf(x)f(x) \Rightarrow 2xf(x) = 2xf(x)^2 \Rightarrow x(f(x) - 1)f(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se tomarmos $x \neq 0$, segue também que $f(x) \neq 0$, pelo o que assumimos. Assim, da última equação, segue que $f(x) = 1$. Ou seja, $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Utilizando a continuidade, é possível provar que $f(0) = 1$, uma vez que $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$. Isto prova que temos $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Chequemos que essa função de fato resolve a equação original:

$$f(x)y + f(y)x = 1y + 1x = x + y = (x + y)f(x)f(y).$$

Sendo assim, a equação funcional possui duas soluções: $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Observação 4.5. *Caso removêssemos a exigência de continuidade no enunciado, a função nula continuaria sendo solução da equação funcional. Além disso, dado $m \in \mathbb{R}$, a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \neq 0 \\ m, & se \quad x = 0 \end{cases}$$

também seria solução da referida equação. Para comprovar esta última afirmação, faremos três substituições. Primeiramente, coloca-se $x = y = 0$ na equação original:

$$f(0) \cdot 0 + f(0) \cdot 0 = (0 + 0) \cdot f(0)f(0) \Rightarrow m \cdot 0 + m \cdot 0 = 0 \cdot m^2 \Rightarrow 0 = 0.$$

Em segundo lugar, faz-se $x, y \neq 0$ novamente na equação original:

$$f(x)y + f(y)x = (x + y)f(x)f(y) \Rightarrow 1y + 1x = (x + y) \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow x + y = x + y.$$

Por fim, faz-se $x = 0$ e $y \neq 0$, mais uma vez na equação original:

$$f(0)y + f(y)0 = (0+y)f(0)f(y) \Rightarrow m \cdot y + 0 = y \cdot m \cdot 1 \Rightarrow my = my.$$

Problema 4.6. (Andreescu e Boreico - de [2] página 30 - Solução minha)

Determine as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y).$$

Solução. Tomemos inicialmente $x = y = 0$. Isto nos leva a

$$f(0) - f(0) = f(0)^2 \Rightarrow f(0)^2 = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

Fazendo $x = 0$ na equação funcional inicial, temos

$$f(y) - f(-y) = f(0)f(y) \Rightarrow f(y) - f(-y) = 0 \Rightarrow f(y) = f(-y),$$

donde segue que f é uma função par.

Na equação original, façamos $y = -x$:

$$f(0) - f(2x) = f(x)f(-x) \Rightarrow -f(2x) = f(x)f(x) \Rightarrow f(2x) = -f(x)^2. \tag{4.5}$$

Também na equação original, façamos $y = x$:

$$f(2x) - f(0) = f(x)f(x) \Rightarrow f(2x) = f(x)^2. \tag{4.6}$$

Somando as equações (4.5) e (4.6), obtemos $2f(2x) = 0$, o que nos leva a $f(2x) = 0$. Fazendo $2x = t$, tem-se $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. É fácil checar que a função identicamente nula verifica a equação original, sendo ela a única solução da equação.

Problema 4.7. (IMO 2018 - de [18] página 3 - Solução adaptada da página 18 da referência)

Determine todas as funções $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfazem, $\forall x, y \in (0, +\infty)$, a equação

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) f(y) = f(xy) + f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Solução. Fixemos $a > 1$ e tomemos uma nova variável $t \in (0, +\infty)$. Façamos as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}
x = y = t \quad &\Rightarrow \quad \left(t + \frac{1}{t}\right) f(t) = f(t^2) + f(1) \\
x = \frac{t}{a}, y = at \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right) f(at) = f(t^2) + f(a^2) \\
x = a^2 t, y = t \quad &\Rightarrow \quad \left(a^2 t + \frac{1}{a^2 t}\right) f(t) = f(a^2 t^2) + f\left(\frac{1}{a^2}\right) \\
x = y = at \quad &\Rightarrow \quad \left(at + \frac{1}{at}\right) f(at) = f(a^2 t^2) + f(1).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

A ideia por trás das substituições em (4.7) é que apareça um mesmo termo em mais de uma equação. Se colocarmos $x = y = t$, temos que $xy = t^2$. E também se colocarmos $x = \frac{t}{a}$ e $y = at$, da mesma forma se obtém $xy = t^2$, de modo que ambas as equações possuam o termo $f(t^2)$. Analogamente, fazemos com que apareça o termo $f(1)$ na primeira e na quarta equação ou, também, o termo $f(a^2 t^2)$ na terceira e na quarta equação.

Façamos, com base nas equações de (4.7), a primeira delas menos a segunda:

$$\left(t + \frac{1}{t}\right) f(t) - \left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right) f(at) = f(1) - f(a^2). \tag{4.8}$$

De (4.7) também façamos a terceira equação menos a quarta equação:

$$\left(a^2 t + \frac{1}{a^2 t}\right) f(t) - \left(at + \frac{1}{at}\right) f(at) = f\left(\frac{1}{a^2}\right) - f(1). \tag{4.9}$$

Com uma combinação linear das duas equações acima, é possível eliminar o termo $f(at)$. Basta fazermos $\left(at + \frac{1}{at}\right)$ vezes (4.8) menos $\left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right)$ vezes (4.9):

$$\begin{aligned}
&\left(\left(at + \frac{1}{at}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right)\left(a^2 t + \frac{1}{a^2 t}\right)\right) f(t) = \\
&= \left(at + \frac{1}{at}\right)\left(f(1) - f(a^2)\right) - \left(\frac{t}{a} + \frac{a}{t}\right)\left(f\left(\frac{1}{a^2}\right) - f(1)\right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Observação 4.8. *O princípio aplicado na combinação linear em 4.10 é o mesmo que se utiliza vastamente na teoria de sistemas lineares. Suponha que em um sistema linear tenhamos, por exemplo, um termo ax na primeira equação e um termo bx na segunda equação. Se multiplicarmos a primeira equação por b e a segunda equação por a, a incógnita x das duas equações ficaria com o mesmo coeficiente ab. Assim, bastaria subtrair as equações para que se elimine a incógnita x.*

Observe que:

$$\begin{aligned}
&\left(\left(at+\frac{1}{at}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)-\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\left(a^2t+\frac{1}{a^2t}\right)\right)= \\
&=at^2+a+\frac{1}{a}+\frac{1}{at^2}-at^2-\frac{1}{a^3}-a^3-\frac{1}{at^2} \\
&=a+\frac{1}{a}-\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right). \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Veja que a expressão 4.11 acima não depende de t e também é negativa, já que $a > 1$. Chamemos a expressão 4.11 de k. Retornando em 4.10 e dividindo ambos os lados da equação por k, obtém-se:

$$f(t)=\left(at+\frac{1}{at}\right)\left(\frac{f(1)-f(a^2)}{k}\right)-\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\left(\frac{f\left(\frac{1}{a^2}\right)-f(1)}{k}\right).$$

Os dois termos constantes chamaremos de m e n, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
f(t)&=\left(at+\frac{1}{at}\right)m-\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)n \\
f(t)&=atm+\frac{m}{at}-\frac{nt}{a}-\frac{an}{t} \\
f(t)&=\left(am-\frac{n}{a}\right)t+\left(\frac{m}{a}-an\right)\frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Chamando os novos termos constantes de c e d, tem-se

$$f(t)=ct+\frac{d}{t},$$

onde $c,d\in\mathbb{R}$. Veja que os números c e d não dependem de t. Eles dependem apenas das constantes $a, f(1), f(a), f\left(\frac{1}{a}\right)$. Vamos checar que essa família parametrizada de funções de fato resolve a equação funcional inicial. Faremos uma expansão do lado esquerdo e depois do lado direito:

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{1}{x}\right)f(y)&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(cy+\frac{d}{y}\right) \\
&=cxy+\frac{dx}{y}+\frac{cy}{x}+\frac{d}{xy}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(xy)+f\left(\frac{y}{x}\right)&=cxy+\frac{d}{xy}+\frac{cy}{x}+\frac{dx}{y} \\
&=cxy+\frac{dx}{y}+\frac{cy}{x}+\frac{d}{xy}.
\end{aligned}$$

Como os lados esquerdo e direito são idênticos, segue que todas as soluções da equação funcional, são de fato,

$$f(t)=ct+\frac{d}{t}, \qquad c,d\in\mathbb{R}.$$

Problema 4.9. (IMO 2009 - de [16] página 5 - Solução adaptada da página 23 da referência)

Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, a equação

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

Solução. Seja f uma solução da equação acima. É claro que f não pode ser constante, pois isso acarretaria $x^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, um absurdo. Veja que, ao se deparar com um problema mais complexo de equações funcionais, uma sugestão inicial é descobrir o valor da função em certos pontos. Seguindo esta linha de raciocínio, vamos provar que $f(0) = 0$.

Suponha por absurdo que $f(0) \neq 0$. Coloquemos $x = 0$ e $y = \frac{t}{f(0)}$:

$$f(0) = f(t) + 0^2 \Rightarrow f(t) = f(0).$$

Mas é impossível que tenhamos $f(t) = f(0)$, já que f não é constante. Assim, $f(0) = 0$ de fato. Faremos agora $x = t$ e $y = 0$:

$$f(tf(t)) = f(0f(t)) + t^2 \Rightarrow f(tf(t)) = t^2.$$

E também $x = t$ e $y = -t$:

$$f(tf(0)) = f(-tf(t)) + t^2 \Rightarrow f(-tf(t)) = -t^2.$$

As duas equações acima valem para todo t real e mostram que f é sobrejetiva. Além disso, se $f(t) = 0$, então $f(tf(t)) = 0$ e portanto $t^2 = 0$, donde $t = 0$. Isso mostra que $t = 0$ é a única raiz de f.

Observe também que descobrir a paridade de uma função muitas vezes é útil, pois com base nesta informação pode se depreender outras propriedades desta função.

Dado $p \in \mathbb{R}$, vamos mostrar agora que $f(-p) = -f(p)$. Isto é, que f é uma função ímpar.

Se $f(p) = 0$, então $p = 0$ e também $-p = 0$, e logo $f(-p) = 0$. Assim, $f(-p) = 0 = -f(p)$.

Suponhamos agora que $f(p) < 0$. Podemos achar $t \in \mathbb{R}$ tal que $f(p) = -t^2$. Como $t \neq 0$, segue que $f(t) \neq 0$, e podemos encontrar $a \in \mathbb{R}$ tal que $af(t) = p$. Trocando agora $x = t$ e $y = a$ na equação original:

$$f(tf(t+a)) = f(af(t)) + t^2 = f(p) + t^2 = -t^2 + t^2 = 0.$$

Como a única raiz de f é o zero, tem-se $tf(t+a) = 0$. Como $t \neq 0$, $f(t+a) = 0$. Da mesma forma, $t + a = 0$, donde $a = -t$. Assim, $p = -tf(t)$. Consequentemente,

$$f(-p) = f(tf(t)) = t^2 = -(-t^2) = -f(p).$$

Vamos agora supor que $f(p) > 0$. Assim existe $t \neq 0$ tal que $f(p) = t^2$. Tomemos $a \in \mathbb{R}$ tal que $tf(a) = p$. Vamos substituir $x = t$ e $y = a - t$:

$$f(p) = f(tf(a)) = f((a-t)f(t)) + t^2 = f((a-t)f(t)) + f(p) \Rightarrow f((a-t)f(t)) = 0 \Rightarrow (a-t)f(t) = 0.$$

Como $f(t) \neq 0$, segue $a = t$ e assim $p = tf(t)$. Assim,

$$f(-p) = f(-tf(t)) = -t^2 = -f(p).$$

Isto prova que f é uma função ímpar.

Agora realizaremos três substituições. A primeira consiste em $x = s$ e $y = t$. A segunda consiste em $x = t$ e $y = -s - t$. E a terceira consiste em $x = -s - t$ e $y = s$. O objetivo destas substituições é fazer com que as três equações seguintes venham a apresentar termos em comum.

Essas substituições nos levam a:

$$\begin{aligned} f(sf(s+t)) &= f(tf(s)) + s^2 \\ f(tf(-s)) &= f((-s-t)f(t)) + t^2 \\ f((-s-t)f(-t)) &= f(sf(-s-t)) + (s+t)^2. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que f é ímpar, podemos reescrever as equações como segue:

$$\begin{aligned} f(tf(s)) - f(sf(s+t)) &= -s^2 \\ f(tf(s)) - f((s+t)f(t)) &= -t^2 \\ f((s+t)f(t)) + f(sf(s+t)) &= (s+t)^2. \end{aligned}$$

Somando as três equações, obtemos $2f(tf(s)) = 2ts$ e, portanto, $f(tf(s)) = ts$. Como f é sobrejetiva, podemos tomar $s \in \mathbb{R}$ tal que $f(s) = 1$, e assim obtemos $f(t) = st$. Vamos substituir essa função na equação funcional original, para encontrar o valor de s:

$$\begin{aligned} f(xf(x+y)) &= f(yf(x)) + x^2 \\ sxf(x+y) &= syf(x) + x^2 \\ s^2x(x+y) &= s^2xy + x^2 \\ s^2x^2 + s^2xy &= s^2xy + x^2 \\ s^2x^2 &= x^2. \end{aligned}$$

Como a igualdade acima deve valer para todo x, temos $s^2 = 1$, e portanto $s = \pm 1$. Assim, as soluções seriam $f(x) = x$ e $f(x) = -x$. Testemos se $f(x) = x$ é realmente solução da equação funcional inicial:

$$f(xf(x+y)) = f(x(x+y)) = x(x+y) = xy + x^2 = f(yx) + x^2 = f(yf(x)) + x^2.$$

Por fim, testemos a solução $f(x) = -x$ também:

$$f(xf(x+y)) = f(x(-x-y)) = -x(-x-y) = -y(-x)+x^2 = f(y(-x))+x^2 = f(y(f(x))+x^2.$$

Assim, todas as soluções da equação funcional são $f(x) = x$ e $f(x) = -x$.

5

EQUAÇÃO ADITIVA DE CAUCHY

Faremos, a partir deste momento, um estudo sobre a equação aditiva de Cauchy, uma das mais importantes equações funcionais existentes. Para este capítulo, embasei-me na leitura de [1] e de [19]. Apenas a primeira seção deste capítulo se assemelha ao trabalho [3]. Busco, posteriormente, investigar mais profundamente a questão das soluções não-lineares da equação aditiva de Cauchy e também expandir o conceito de aditividade para o conjunto dos números complexos.

5.1 PROPRIEDADES DA EQUAÇÃO ADITIVA DE CAUCHY

Apresentei os resultados 5.4 e 5.5 que constam na seção 1.3 de [19], páginas 6 e 7. Já os teoremas 5.6 e 5.7 constam na seção 2.1.1 de [1], páginas 32 e 33.

Definição 5.1. A **Equação Aditiva de Cauchy** é descrita por:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que verifique a equação aditiva de Cauchy, é dita uma **função aditiva**.

A equação (5.1) também é chamada de **primeira equação funcional de Cauchy**.

Vamos supor que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva. Fazendo $x = y = 0$ em (5.1), obtemos:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Além disso, toda função aditiva é uma função ímpar. Para se provar este fato, basta fazer $y = -x$ em (5.1) e lembrar que $f(0) = 0$:

$$f(x - x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Observe então o seguinte fato:

Observação 5.2. *Toda função aditiva é ímpar e, em particular, é tal que $f(0) = 0$.*

Note também que a **função linear** $f(x) = ax$, onde a é uma constante real, é solução da equação (5.1). A verificação desta afirmativa é feita abaixo:

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vamos registrar esse fato na seguinte observação:

Observação 5.3. *Toda função linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é uma função aditiva.*

A pergunta natural a se fazer é: a equação aditiva de Cauchy possui outras soluções, além das funções lineares? Para tentar responder essa pergunta, provaremos mais alguns fatos sobre as funções aditivas.

Teorema 5.4. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva, então f é **racionalmente homogênea**, isto é:*

$$f(qx) = qf(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad e \quad \forall q \in \mathbb{Q}. \tag{5.2}$$

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}^*$, pode-se provar por indução matemática que

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n), \tag{5.3}$$

onde $x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Fazendo $x_i = t, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, na equação (5.3), obtemos:

$$f(nt) = nf(t), \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad e \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Note que a equação (5.4) acima também é obviamente válida para $n = 0$, uma vez que $f(0) = 0$. Agora façamos $t = \frac{m}{n}x$, com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Com isso, temos $nt = mx$. Logo,

$$f(nt) = f(mx) \Rightarrow nf(t) = mf(x) \Rightarrow f(t) = \frac{m}{n}f(x) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x). \tag{5.5}$$

Além disso, pelo fato de f ser ímpar e pela equação (5.5), segue que:

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -f\left(\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n}f(x). \tag{5.6}$$

Das equações (5.5) e (5.6) segue a validade de (5.2), uma vez que todos os racionais são da forma $\pm\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Corolário 5.5. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva, então f é linear no conjunto dos racionais. Isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(q) = cq, \qquad \forall q \in \mathbb{Q}. \tag{5.7}$$

Além disso, $c = f(1)$.

Demonstração. Sabemos do Teorema 5.4 que f é racionalmente homogênea, ou seja,

$$f(qx) = qf(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad e \quad \forall q \in \mathbb{Q}.$$

Tomando $x = 1$ e denotando $f(1) = c$ obtemos

$$f(q) = qf(1) = cq, \qquad \forall q \in \mathbb{Q}.$$

□

O teorema central da teoria das equações aditivas é o que se segue:

Teorema 5.6. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e aditiva. Então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. Isto é, f é linear.*

Demonstração. Se f é aditiva, então pelo corolário 5.5 segue que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(q) = cq, \forall q \in \mathbb{Q}$. Tomemos agora $x \in \mathbb{R}$. Assumiremos, sem provar, que todo número real é limite de uma sequência de racionais. Isto é, existe uma sequência (r_n) de racionais tal que $\lim r_n = x$. Como a sequência é de racionais, é válido que $f(r_n) = cr_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Agora, por meio dos teoremas 1.20 e 1.18, pode-se fazer:

$$f(x) = f(\lim r_n) = \lim f(r_n) = \lim cr_n = c \lim r_n = cx.$$

□

Em 1875, o matemático Gaston Darboux provou que se uma função aditiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto, então ela automaticamente será contínua em todo seu domínio. Isto significa que, no teorema 5.6, poderíamos ter colocado a hipótese de continuidade em um único ponto apenas. A tese de linearidade continuaria valendo mesmo com o enfraquecimento da hipótese citada. A prova feita por Darboux pode ser encontrada na página 32 de [1].

Além disso, a hipótese de continuidade no teorema 5.6 pode ser substituida pela hipótese de monotonicidade, como atesta o próximo teorema.

Teorema 5.7. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona e aditiva. Então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. Isto é, f é linear.*

Demonstração. Novamente, se f é aditiva, então pelo Corolário 5.5 segue que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(q) = cq, \forall q \in \mathbb{Q}$. Vamos supor aqui que f é monótona do tipo não-decrescente. Os outros casos são feitos de forma análoga.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Tomemos uma sequência (r_n) de racionais tal que $\lim r_n = x$ e $r_n < x, \forall n \in \mathbb{N}$. Também tomemos uma sequência (R_n) de racionais tal que $\lim R_n = x$ e $R_n > x, \forall n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$r_n < x < R_n.$$

Aplicando f a estes números e utilizando a não-decrescência, tem-se, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) \Rightarrow cr_n \leq f(x) \leq cR_n.$$

No entanto, pelo teorema 1.18 tem-se $\lim cr_n = c \lim r_n = cx$ e também $\lim cR_n = c \lim R_n = cx$. Pelo teorema 1.19, segue que $\lim f(x) = cx$. Mas pelo teorema 1.17 tem-se $\lim f(x) = f(x)$, já que $f(x)$ é uma sequência constante em n. Assim, $f(x) = cx$. Como x foi tomado arbitrariamente, segue que $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. □

Em 1880, Darboux também provou que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é aditiva e é tal que $f(t) \geq 0$, para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, então f será monótona. Este fato é válido pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $x + t > x$ e também

$$f(x + t) = f(x) + f(t) \geq f(x).$$

Aqui Darboux forneceu uma outra hipótese que, aplicada à uma função aditiva, acarretaria na tese de linearidade.

Existem ainda outras condições, além das citadas, que podem ser impostas a uma função aditiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de modo que f seja linear. O leitor interessado pode buscar essas informações em [19] e [1].

A partir de agora, analisemos como são as funções aditivas não-lineares. Pelos teoremas 5.6 e 5.7, é possível depreender que essas funções são descontínuas e não-monótonas. Mas elas de fato existem?

5.2 SOLUÇÕES NÃO-LINEARES DA EQUAÇÃO ADITIVA DE CAUCHY

Por algum tempo, não se soube se a equação aditiva de Cauchy possuía soluções não-lineares. Foi somente em 1905 que o matemático Georg Hamel provou que de fato existiam soluções não-lineares. Antes de apresentar tais funções, será apresentado um teorema extremamente surpreendente. É um teorema que relata o pitoresco comportamento das soluções não-lineares da equação aditiva. Para discorrer sobre este assunto utilizei a seção 1.4 de [19].

Inicialmente é preciso definir o conceito matemático de densidade:

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se **denso** em $\mathbb{R}$ se todo intervalo real não-degenerado contiver algum elemento de A.

Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ diz-se **denso** em $\mathbb{R}^2$ se todo círculo não-degenerado do plano contiver algum elemento de B.

Exemplo 5.8. Temos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ e que $\mathbb{Q}^2$ é denso em $\mathbb{R}^2$. Para uma prova detalhada da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, o leitor pode consultar a página 31 de [12].

Teorema 5.9. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função aditiva não-linear. Então seu gráfico é denso em $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. O gráfico de f é dado por:

$$G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Tomemos $x_1 \neq 0$. Segue que existe $x_2 \neq 0$ tal que

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2}.$$

Caso tal x_2 não existisse, teríamos, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x)}{x}.$$

Denotemos por conveniência $\frac{f(x_1)}{x_1} = c$. Como toda função aditiva verifica $f(0) = 0$, teríamos $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Isso acarretaria que f é linear, uma contradição com nossa hipótese de não-linearidade.

A afirmação feita, portanto, implica que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sendo assim, os vetores $v_1 = (x_1, f(x_1))$ e $v_2 = (x_2, f(x_2))$ são linearmente independentes, e portanto geram todo o $\mathbb{R}^2$. Isto significa que, dado qualquer vetor v, existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = r_1 v_1 + r_2 v_2.$$

Na combinação linear acima, se permitirmos apenas coeficientes $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, podemos fazer com que o vetor $q_1 v_1 + q_2 v_2$ fique tão perto de um dado vetor v quanto se queira. De fato, dados $v = r_1 v_1 + r_2 v_2$ como acima e $\epsilon > 0$, seja

$$B(v, \epsilon) = \{w \in \mathbb{R}^2 : |v - w| < \epsilon\}.$$

Esse é um círculo arbitrário com centro em v. Tome sequências de racionais (q_{1n}) e (q_{2n}) de modo que $\lim q_{1n} = r_1$ e $\lim q_{2n} = r_2$. Assumiremos aqui, sem demonstrar, que $\lim (q_{1n} v_1 + q_{2n} v_2) = r_1 v_1 + r_2 v_2 = v$ e que isso implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(q_{1n} v_1 + q_{2n} v_2) \in B(v, \epsilon)$, $\forall n \geq n_0$.

Agora,

$$\begin{aligned} q_1 v_1 + q_2 v_2 &= q_1(x_1, f(x_1)) + q_2(x_2, f(x_2)) \\ &= (q_1 x_1, q_1 f(x_1)) + (q_2 x_2, q_2 f(x_2)) \\ &= (q_1 x_1 + q_2 x_2, q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)) \\ &= (q_1 x_1 + q_2 x_2, f(q_1 x_1 + q_2 x_2)) \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o teorema 5.4 e o fato de f ser aditiva.

Consideremos agora o seguinte conjunto:

$$G' = \{(q_1 x_1 + q_2 x_2, f(q_1 x_1 + q_2 x_2)) : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}.$$

Pelo o que foi dito, G' é um conjunto denso em $\mathbb{R}^2$. Além disso, temos $G' \subset G$, o que prova que G também é denso em $\mathbb{R}^2$, e assim a prova está concluída.

$\square$

O próximo exemplo apresenta a ideia por trás das bases de Hamel. Após apresentar este exemplo, defino formalmente o que é uma base de Hamel para $\mathbb{R}$.

Exemplo 5.10. Consideremos o seguinte conjunto:

$$A = \{r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} : r, s, t \in \mathbb{Q}\}.$$

Cada elemento de A é expresso como combinação linear, com coeficientes racionais, dos elementos de H:

$$H = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}.$$

Vamos tomar uma função aditiva $f : A \to A$. Fazendo isso, é possível provar de forma análoga a 5.4, que:

$$f(r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3}) = rf(1) + sf(\sqrt{2}) + tf(\sqrt{3}), \qquad \forall r, s, t \in \mathbb{Q}.$$

Sendo assim, se os valores de $f(1), f(\sqrt{2})$ e $f(\sqrt{3})$ forem conhecidos, então f fica inteiramente determinada em A. Considerando todas as possibilidades de valores para $f(1), f(\sqrt{2})$ e $f(\sqrt{3})$, em A, encontram-se todas as funções aditivas $f : A \to A$.

O que aconteceria se o conjunto A fosse substituído por $\mathbb{R}$?

Definição 5.11. Um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é uma **base de Hamel** para $\mathbb{R}$ se todo $x \in \mathbb{R}^*$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de B, com coeficientes racionais não-nulos, sendo essa combinação linear única e finita.

Na definição 5.11, implicitamente considera-se o espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$. A existência dessas bases de Hamel para $\mathbb{R}$, as quais são sempre infinitas, advém do Lema de Zorn. Uma demonstração completa da existência dessas bases pode ser encontrada no capítulo 1 de [8].

A definição acima nos diz que, se $x \in \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ é uma base de Hamel, então existem $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n,$$

onde $b_i \in B, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Seja agora $w : B \to \mathbb{R}$ uma função definida arbitrariamente na base de Hamel B. Podemos definir uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = r_1 w(b_1) + r_2 w(b_2) + \cdots + r_n w(b_n). \tag{5.8}$$

Observe que, por meio desta definição, $f(b) = w(b), \forall b \in B$.

Provemos agora que f verifica de fato a equação aditiva, independentemente da escolha da função w. Tomando $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$x = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n,$$

onde $r_i \in \mathbb{Q}$ e $b_i \in B, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Da mesma forma,

$$y = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_t a_t,$$

onde $q_i \in \mathbb{Q}$ e $a_i \in B, \forall i \in \{1, 2, \ldots, t\}$.

Para que possamos obter as representações de x e y nos mesmos elementos da base de Hamel, vamos tomar um novo conjunto:

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_t\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}.$$

Assim, podemos dizer que

$$\begin{aligned} x &= e_1 c_1 + e_2 c_2 + \cdots + e_k c_k \\ y &= f_1 c_1 + f_2 c_2 + \cdots + f_k c_k, \end{aligned}$$

onde $e_i, f_i \in \mathbb{Q}$ e $c_i \in B, \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. No entanto, alguns destes coeficientes podem ser zero. Com isto, tem-se

$$x + y = (e_1 + f_1)c_1 + (e_2 + f_2)c_2 + \cdots + (e_k + f_k)c_k.$$

Agora, utilizando a expressão em (5.8), tem-se

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (e_1 + f_1)w(c_1) + (e_2 + f_2)w(c_2) + \cdots + (e_k + f_k)w(c_k) \\ &= \left(e_1 w(c_1) + e_2 w(c_2) + \cdots + e_k w(c_k)\right) + \left(f_1 w(c_1) + f_2 w(c_2) + \cdots + f_k w(c_k)\right) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Isto prova que f, definida como em (5.8), é de fato aditiva.

Exemplo 5.12. Como exemplo, construiremos uma função aditiva não-linear. Seja $b \in B$. Tomemos a função $w : B \to \mathbb{R}$ como

$$w(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in B \backslash \{b\} \\ 1, & \text{se} \quad x = b. \end{cases}$$

Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conforme foi feito em (5.8). Suponhamos, por absurdo, que $f(x) = cx$, com $c \in \mathbb{R}$. Da definição de f, segue que $f(b) = 1$, e assim $cb = 1$. Tomando agora $p \in B \backslash \{b\}$, segue que $f(p) = 0$, ou seja, $cp = 0$. Como $c \neq 0$ pela primeira equação, tem-se $p = 0$. Isso acarreta $B \backslash \{b\} = \{0\}$ e assim $B = \{0, b\}$. Um absurdo, já que um conjunto com dois elementos não pode ser base de Hamel, uma vez que toda base de Hamel é infinita. Sendo assim, f é aditiva e não-linear.

Observe que as funções definidas via bases de Hamel também contemplam as funções lineares. Se a função $w : B \to \mathbb{R}$ é tal que existe $c \in \mathbb{R}$ com $w(b) = cb, \forall b \in B$, segue que

$$
\begin{aligned}
f(x) &= r_1 w(b_1) + r_2 w(b_2) + \cdots + r_n w(b_n) \\
&= r_1 c b_1 + r_2 c b_2 + \cdots + r_n c b_n \\
&= c(r_1 b_1 + r_2 b_2 + \cdots + r_n b_n) \\
&= cx,
\end{aligned}
$$

e então f será linear, além de aditiva.

Por outro lado, se não existir $c \in \mathbb{R}$ com $w(b) = cb, \forall b \in B$, então f será não-linear, mas ainda será aditiva. Sendo assim, as funções definidas conforme em (5.8) são uma solução geral para a equação aditiva de Cauchy.

Para finalizar a seção, vale ressaltar que não se tem um exemplo concreto de base de Hamel para $\mathbb{R}$. Apenas sabe-se que tal base existe, devido ao Lema de Zorn, como foi mencionado anteriormente. Como nos mostra o teorema 5.9, seria uma tarefa bastante árdua esboçar o gráfico de uma função aditiva não-linear, visto que tal gráfico é denso em $\mathbb{R}^2$.

5.3 FUNÇÕES ADITIVAS NOS COMPLEXOS

Para escrever sobre as funções aditivas nos complexos, inicialmente utilizo a segunda seção do primeiro capítulo de [22]. Já para escrever os teoremas 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16 me baseei na seção 1.6 de [19], páginas 16, 17 e 18.

Iniciaremos esta seção relembrando brevemente o conceito de número complexo. Após isso, estudaremos as funções aditivas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

A começar, um número complexo z é um par ordenado de números reais: $z = (x, y)$. Tomando $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ números complexos, eles satisfazem as seguintes regras de manipulação para soma e produto:

- $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- $z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Além disso, o número complexo $(x, 0)$ é identificado apenas como x. Já o número complexo $(0, 1)$ é chamado de **unidade imaginária** e é representado por i. Pela propriedade do produto, é possível provar que $i^2 = -1$, e nesse sentido pode-se escrever $i = \sqrt{-1}$. Além disso, dado um complexo $z = (x, y)$, ele pode ser escrito como segue:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi.$$

A partir de agora escreveremos muitas das vezes $z = x + yi$. Nesta notação, x é dito a **parte real** de z, denotado por $x = Re(z)$. O valor y, por sua vez, é a **parte imaginária** de z, denotado por $y = Im(z)$.

Dado $z = x + yi$, definimos o **conjugado** de z como $\overline{z} = x - yi$. Também definimos o **módulo** de z como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Consideremos uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Essa função pode ser decomposta como $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$, onde $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Nesta situação, $f_1(z) = Re(f(z))$ e $f_2(z) = Im(f(z))$.

Teorema 5.13. *Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é aditiva e decomposta em $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$, onde $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, então f_1 e f_2 também são aditivas.*

Demonstração. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, provemos a aditividade de f_1:

$$f_1(z_1 + z_2) = Re(f(z_1 + z_2)) = Re(f(z_1) + f(z_2)) = Re(f(z_1)) + Re(f(z_2)) = f_1(z_1) + f_1(z_2).$$

Da mesma forma, segue a adititivade de f_2:

$$f_2(z_1 + z_2) = Im(f(z_1 + z_2)) = Im(f(z_1) + f(z_2)) = Im(f(z_1)) + Im(f(z_2)) = f_2(z_1) + f_2(z_2).$$

□

O próximo lema será usado para, posteriormente, provar um importante teorema.

Lema 5.14. *Se $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é aditiva, então existem funções aditivas $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, $\forall z \in \mathbb{C}$, vale*

$$g(z) = g_1(Re(z)) + g_2(Im(z)).$$

Demonstração. Vamos definir $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g_1(x) = g(x)$ e por $g_2(y) = g(iy)$. Considerando $z = x + iy$ tem-se, pela aditividade de g,

$$g(z) = g(x + iy) = g(x) + g(iy) = g_1(x) + g_2(y) = g_1(Re(z)) + g_2(Im(z)).$$

Dados $a, b \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, provemos que g_1 e g_2 são aditivas:

$$g_1(a + b) = g(a + b) = g(a) + g(b) = g_1(a) + g_2(b)$$
$$g_2(a + b) = g(i(a + b)) = g(ia + ib) = g(ia) + g(ib) = g_2(a) + g_2(b).$$

□

Teorema 5.15. *Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é aditiva, então existem funções aditivas $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$, todas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que, $\forall z \in \mathbb{C}$,*

$$f(z) = f_{11}(Re(z)) + f_{12}(Im(z)) + if_{21}(Re(z)) + if_{22}(Im(z)).$$

Demonstração. Inicialmente, podemos decompor $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$, com $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Pelo teorema 5.13, temos f_1 e f_2 aditivas, já que f é aditiva. Utilizando agora o lema 5.14, dado $z \in \mathbb{C}$, existem funções aditivas $f_{11}, f_{12} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f_1(z) = f_{11}(Re(z)) + f_{12}(Im(z))$. Pelo mesmo lema 5.14, existem funções aditivas $f_{21}, f_{22} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f_2(z) = f_{21}(Re(z)) + f_{22}(Im(z))$. Substituindo esses dois resultados anteriores em $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$, tem-se

$$f(z) = f_{11}(Re(z)) + f_{12}(Im(z)) + if_{21}(Re(z)) + if_{22}(Im(z)).$$

□

O próximo teorema nos mostra a forma de uma função complexa aditiva e contínua. Antes de prosseguir para o teorema, é preciso esclarecer o conceito de continuidade para funções complexas, conforme é descrito na página 4 de [4].

Uma função $f : D \to \mathbb{C}$, com $D \subset \mathbb{C}$, é dita **contínua** no ponto $a \in D$ quando, para todo $\epsilon > 0$, for possível encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$(z \in D \quad \text{e} \quad |z - a| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \epsilon.$$

Diz-se simplesmente que f é **contínua** se f for contínua em todo $a \in D$.

Teorema 5.16. *Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função aditiva e contínua, então existem $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tal que, $\forall z \in \mathbb{C}$,*

$$f(z) = w_1 z + w_2 \overline{z}.$$

Demonstração. Como f é aditiva, segue do teorema 5.15 que existem funções aditivas $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$, todas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = f_{11}(Re(z)) + f_{12}(Im(z)) + if_{21}(Re(z)) + if_{22}(Im(z)).$$

É possível provar que a continuidade de f implica a continuidade de $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$. Resumidamente, dados $x, r \in \mathbb{R}$ e $|x - r| < \delta$, tem-se

$$|f_{11}(x) - f_{11}(r)| \leq |f_{11}(x) + if_{21}(x) - f_{11}(r) - if_{21}(r)| = |f(x + 0i) - f(r + 0i)| < \epsilon.$$

Acima, usamos que $|x| \leq |x + yi|$. Esta desigualdade segue da desigualdade $x^2 \leq x^2 + y^2$ nos números reais.

A linha de raciocínio feita prova a continuidade da função f_{11}. De forma análoga, se prova a continuidade de f_{12}, f_{21} e f_{22}.

Sendo as funções $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ aditivas e contínuas, segue do teorema 5.6 que existem $c_{kj} \in \mathbb{R}$, com $k, j \in \{1, 2\}$, tal que

$$f_{kj}(x) = c_{kj}x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} f(z) &= f_{11}(Re(z)) + f_{12}(Im(z)) + if_{21}(Re(z)) + if_{22}(Im(z)) \\ &= c_{11}Re(z) + c_{12}Im(z) + ic_{21}Re(z) + ic_{22}Im(z) \\ &= (c_{11} + ic_{21})Re(z) + (c_{12} + ic_{22})Im(z). \end{aligned}$$

Denotando $(c_{11} + ic_{21}) = \alpha \in \mathbb{C}$ e $(c_{12} + ic_{22}) = \beta \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha Re(z) + \beta Im(z) \\ &= \alpha Re(z) - (\beta i)iIm(z) \\ &= \frac{\alpha + \beta i}{2}Re(z) + \frac{\alpha - \beta i}{2}Re(z) - \frac{\alpha + \beta i}{2}iIm(z) + \frac{\alpha - \beta i}{2}iIm(z) \\ &= \frac{\alpha - \beta i}{2}(Re(z) + iIm(z)) + \frac{\alpha + \beta i}{2}(Re(z) - iIm(z)) \\ &= \frac{\alpha - \beta i}{2}z + \frac{\alpha + \beta i}{2}\overline{z}. \end{aligned}$$

Denotando $\frac{\alpha - \beta i}{2} = w_1 \in \mathbb{C}$ e $\frac{\alpha + \beta i}{2} = w_2 \in \mathbb{C}$, obtemos

$$f(z) = w_1 z + w_2 \overline{z}.$$

□

Observe que, para funções complexas, as condições de continuidade e aditividade não são suficientes para garantir a linearidade da função, como acontecia para funções reais. Para funções complexas, é preciso uma condição mais forte do que continuidade, para garantir a linearidade. É possível mostrar que se uma função complexa é analítica (ou diferenciável) e aditiva, então essa função será linear. Não entraremos neste enfoque aqui. O leitor interessado pode consultar esta demonstração na página 19 de [19]. O objetivo aqui foi estabelecer uma comparação entre as funções complexas aditivas e as funções reais aditivas.

5.4 APLICAÇÕES DIRETAS DA EQUAÇÃO ADITIVA DE CAUCHY

Nesta seção, mostraremos que algumas equações funcionais recaem na equação aditiva de Cauchy, quando se realiza as devidas substituições. Sendo assim, utilizaremos aqui toda a teoria desenvolvida anteriormente, principalmente no que tange aos teoremas 5.6 e 5.7.

Problema 5.17. (Efthimiou - de [5] página 89 - Solução minha)

Encontre as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, fixado $a > 0$ e dados $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(x+y) = a^y f(x) + a^x f(y).$$

Solução. Primeiramente, divide-se os dois lados da equação por $a^x a^y$:

$$\frac{f(x+y)}{a^x a^y} = \frac{f(x)}{a^x} + \frac{f(y)}{a^y}.$$

Denotemos agora $g(x) = \frac{f(x)}{a^x}$. Sendo assim, tem-se

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Assim, g é aditiva. Como f e a^x são contínuas, segue do teorema 1.11 que g também é contínua. Agora, pelo teorema 5.6, segue que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, tem-se $f(x) = cxa^x$. Por fim, mostremos que esta f de fato resolve a equação original. Dados $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = c(x+y)a^{x+y} = ca^x a^y (x+y) = ca^x a^y x + ca^x a^y y = a^y f(x) + a^x f(y).$$

Problema 5.18. (Andreescu e Boreico - de [2] página 49 - Solução adaptada da referência)

Encontre as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + yz) = x + f(y)f(z).$$

Solução. Seja f uma solução da referida equação funcional. Inicialmente provemos que f é injetiva. Para tal, tomemos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $f(x_1) = f(x_2)$, bem como $y, z \in \mathbb{R}$ quaisquer. Assim,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)+yz) = f(f(x_2)+yz) \Rightarrow x_1 + f(y)f(z) = x_2 + f(y)f(z) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

A função f também é sobrejetiva, pois se fixarmos y e z no lado direito da equação, o valor $x + f(y)f(z)$ percorre todos os reais. Deste modo, o lado esquerdo também contempla todos os reais. Conclui-se então que f é bijetiva.

Tomemos agora $z_1 \in \mathbb{R}$ tal que $f(z_1) = 1$. Na equação original, coloquemos $x = 0$ e $z = z_1$:

$$f(f(0) + yz_1) = 0 + f(y)f(z_1) \Rightarrow f(f(0) + yz_1) = f(y).$$

Da injetividade, segue que $f(0) + yz_1 = y, \forall y \in \mathbb{R}$. Colocando $y = 0$, obtemos $f(0) = 0$, e a equação anterior se transforma em $yz_1 = y, \forall y \in \mathbb{R}$. Colocando $y = 1$, obtemos $z_1 = 1$. Desta forma, tem-se $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

Na equação funcional inicial, deixemos x variar nos reais e coloquemos $y = 0$:

$$f(f(x) + 0z) = x + f(0)f(z) \Rightarrow f(f(x)) = x.$$

Novamente retornando à equação original, coloquemos $z = 1$, $x = f(u)$ e $y = v$:

$$f(f(f(u)) + v) = f(u) + f(v)f(1) \Rightarrow f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Sendo assim, f é aditiva. Na equação original, mais uma vez, façamos $x = 0$ e $y = z$:

$$f(f(0) + z^2) = 0 + f(z)f(z) \Rightarrow f(z^2) = f(z)^2 \geq 0.$$

E assim temos que $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty)$, pelo fato de que a imagem de $g(z) = z^2$ é $[0, +\infty[$.

Tomemos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > b$. Assim, $a - b > 0$ e $f(a - b) \geq 0$. Da aditividade,

$$f(a) = f(b + a - b) = f(b) + f(a - b) \geq f(b).$$

Isto prova que f é não-descrescente, e portanto monótona. Sendo f aditiva e monótona, segue do teorema 5.7 que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. Como $f(1) = 1$, segue que $c = 1$ e portanto $f(x) = x$. Provemos, para finalizar, que $f(x) = x$ de fato resolve a equação funcional original. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + yz) = f(x) + yz = x + yz = x + f(y)f(z).$$

Conclui-se então que $f(x) = x$ é a única solução.

Problema 5.19. (Andreescu e Boreico - de [2] página 115 - Solução adaptada da referência)

Encontre as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$f(y + zf(x)) = f(y) + xf(z).$$

Solução. Seja f uma solução da referida equação funcional. Observe que a função $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, é uma possível solução. Supondo agora que f não é identicamente nula, segue que existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(z_0) \neq 0$. Agora tomemos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Tem-se:

$$f(y + z_0 f(x_1)) = f(y + z_0 f(x_2)) \Rightarrow f(y) + x_1 f(z_0) = f(y) + x_2 f(z_0) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

donde segue que f é injetiva. Tomando novamente $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(z_0) \neq 0$, e também fixando y, segue que o lado direito da equação funcional original percorre todos os reais. Logo o mesmo deve ocorrer com o lado esquerdo da equação. Isto prova que f também é sobrejetiva, e portanto bijetiva.

Façamos agora uma série de substituições na equação funcional original.

Em primeiro lugar, façamos $x = 0$ e $z = 1$ para obter $f(y + f(0)) = f(y)$. Pela injetividade, segue que $y + f(0) = y$ e, portanto, $f(0) = 0$.

Em segundo lugar, faz-se $y = 0$ e $x = z = 1$. Assim, tem-se $f(f(1)) = f(1)$ e da injetividade segue que $f(1) = 1$.

Em terceiro lugar, coloca-se $y = 0$ e $z = 1$, para obter $f(f(x)) = xf(1) = x$.

Em quarto lugar, é preciso fazer $y = 0$ e $x \leftarrow f(x)$:

$$f(zf(f(x))) = f(x)f(z) \Rightarrow f(zx) = f(x)f(z). \tag{5.9}$$

Por último, colocamos $z = 1$ e $x \leftarrow f(x)$:

$$f(y + f(f(x))) = f(y) + f(x)f(1) \Rightarrow f(y + x) = f(y) + f(x).$$

Logo f é aditiva. Tomemos $x \geq 0$ e façamos, em (5.9), as mudanças $z = \sqrt{x}$ e $x \leftarrow \sqrt{x}$:

$$f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0.$$

E assim temos que $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, +\infty)$.

Tomemos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > b$. Como no problema anterior, $a - b > 0$ e $f(a - b) \geq 0$, então

$$f(a) = f(b + a - b) = f(b) + f(a - b) \geq f(b).$$

De modo que f é monótona. Pelo teorema 5.7, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$. Como $f(1) = 1$, segue que $c = 1$.

Por fim, $f(x) = x$ de fato é solução da equação original:

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$f(y + zf(x)) = y + zf(x) = y + zx = f(y) + xf(z).$$

Assim, as duas soluções da equação funcional são $f(x) = 0$ e $f(x) = x$.

6

AS OUTRAS EQUAÇÕES DE CAUCHY

Neste capítulo, estudaremos a equação exponencial de Cauchy e também a equação logarítmica de Cauchy. Veremos também alguns exemplos de aplicação. Para escrever este capítulo usei o capítulo 2 de [19].

6.1 EQUAÇÃO EXPONENCIAL DE CAUCHY

Os teoremas 6.2 e 6.3 aqui demonstrados podem ser localizados na página 26 de [19].

Definição 6.1. A **equação exponencial de Cauchy** é descrita por:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Teorema 6.2. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, então $f(x) = 0$ ou $f(x) = e^{A(x)}$, onde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva e* ***e*** *é o número de Euler.*

Demonstração. É fácil ver que a função identicamente nula $f(x) = 0$ é uma solução da referida equação funcional. Abaixo mostramos que se f é solução e se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(m) = 0$, então f é identicamente nula. Tomando $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x-m+m) = f(x-m)f(m) = f(x-m) \cdot 0 = 0.$$

Tomemos agora f uma solução não identicamente nula. Pela análise acima, f nunca se anula.

Na equação funcional, façamos então $x = y = \frac{t}{2}$:

$$f(t) = f\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right) f\left(\frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{t}{2}\right)^2.$$

Ou seja, f é estritamente positiva, uma vez que nunca se anula. Sendo assim, é possível tomar o logaritmo natural dos dois lados da equação funcional original:

$$\ln f(x+y) = \ln\left(f(x)f(y)\right) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Denotando $\ln f(x) = A(x)$, onde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tem-se

$$A(x+y) = A(x) + A(y).$$

E portanto a função A é aditiva.

Da substituição acima temos $f(x) = e^{A(x)}$, com $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva, o que conclui a prova do teorema. □

O próximo teorema é uma decorrência quase direta deste anterior:

Teorema 6.3. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e é tal que $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, então $f(x) = 0$ ou $f(x) = e^{cx}$, onde $c \in \mathbb{R}$ e* ***e*** *é o número de Euler.*

Demonstração. Se f verifica $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, segue do teorema 6.2 que $f(x) = 0$ ou $f(x) = e^{A(x)}$, com $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditiva. Observemos que $f(x) = 0$ é uma possível solução contínua.

Além disso, se $f(x) = e^{A(x)}$ é contínua segue que $A(x) = \ln f(x)$ também é contínua, pelo teorema 1.12, uma vez que A é a composta de ln com $f(x)$. Assim, A é contínua e aditiva. Portanto, pelo teorema 5.6, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $A(x) = cx$. Consequentemente, tem-se $f(x) = e^{cx}$ como solução contínua. □

Para terminar a seção, apresento um problema resolvido.

Problema 6.4. (Efthimiou - de [5] página 90 - Solução minha)

Sendo $a > 0$, encontre as soluções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da equação funcional

$$f(x+y) = a^{xy} f(x)f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Solução. Na equação fornecida, façamos a mudança de variável $f(x) = a^{\frac{x^2}{2}} g(x)$. Assim a equação se transforma em:

$$\begin{aligned}
a^{\frac{(x+y)^2}{2}} g(x+y) &= a^{xy} a^{\frac{x^2}{2}} g(x) a^{\frac{y^2}{2}} g(y) \\
a^{\frac{(x+y)^2}{2}} g(x+y) &= a^{(xy+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})} g(x) g(y) \\
a^{\frac{(x+y)^2}{2}} g(x+y) &= a^{\frac{(x+y)^2}{2}} g(x) g(y) \\
g(x+y) &= g(x) g(y).
\end{aligned}$$

É importante observar que a continuidade de f implica a continuidade de g. Como g também verifica a equação exponencial de Cauchy, segue do teorema 6.3 que $g(x) = 0$ ou $g(x) = e^{cx}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

Se acontecer $g(x) = 0$, tem-se $f(x) = a^{\frac{x^2}{2}} \cdot 0$ e, portanto, $f(x) = 0$. E se acontecer $g(x) = e^{cx}$, tem-se $f(x) = a^{\frac{x^2}{2}} e^{cx}$.
Deste modo, as soluções contínuas da equação funcional original são $f(x) = 0$ e $f(x) = a^{\frac{x^2}{2}} e^{cx}$, onde c é uma constante real.

6.2 EQUAÇÃO LOGARÍTMICA DE CAUCHY

Os teoremas 6.6 e 6.7 são encontrados também em [19], nas páginas 28 e 29.

Definição 6.5. A **equação logarítmica de Cauchy** é descrita por:

$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^*. \tag{6.2}$$

Teorema 6.6. *Se $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ é tal que $f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^*$, então $f(x) = A(\ln|x|)$ onde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função aditiva e* **ln** *é o logaritmo natural.*

Demonstração. Façamos $x = y = t$ na equação funcional dada, para obter

$$f(t^2) = 2f(t).$$

Fazendo também $x = y = -t$ na equação funcional inicial, tem-se

$$f(t^2) = 2f(-t).$$

As duas equações acima provam que f é uma função par:

$$f(t) = f(-t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}^*.$$

Consideremos, por hora, que $x > 0$ e $y > 0$. Assim, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = e^s \qquad e \qquad y = e^t.$$

E assim,

$$s = \ln x \qquad e \qquad t = \ln y.$$

Na equação original, realizamos a mudança de variáveis $x = e^s$ e $y = e^t$:

$$f(e^s e^t) = f(e^s) + f(e^t) \Rightarrow f(e^{s+t}) = f(e^s) + f(e^t).$$

Definindo $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $A(s) = f(e^s)$, tem-se, como consequência da equação anterior,

$$A(s+t) = A(s) + A(t).$$

Isto prova que A é aditiva. Substituindo $s = \ln x$ e $e^s = x$ em $A(s) = f(e^s)$, obtém-se:

$$A(\ln x) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Como $f(t) = f(-t)$, temos que:

$$f(x) = A(\ln |x|), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

□

Teorema 6.7. *Se $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ é contínua e é tal que $f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^*$, então $f(x) = c \ln |x|$, onde $c \in \mathbb{R}$ e* **ln** *é o logaritmo natural.*

Demonstração. Se $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ verifica a equação funcional dada, segue do teorema 6.6 que $f(x) = A(\ln |x|)$, onde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é aditiva. Como $A = f \circ \exp$, temos que A é contínua por ser uma composição de funções contínuas. Assim, pelo teorema 5.6, segue que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $A(t) = ct$. Sendo assim, $f(x) = c \ln |x|$. □

Problema 6.8. (Sahoo e Kannappan - de [19] página 36 - Solução minha)

Encontre as soluções contínuas $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ da equação funcional

$$f(xy) = yf(x) + xf(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Solução. Inicialmente divide-se os dois lados da equação dada por xy:

$$\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}.$$

Agora definimos $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Com isso,

$$g(xy) = g(x) + g(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^*.$$

Como f é contínua, segue que g também é contínua. Como g verifica a equação logarítmica de Cauchy, segue do teorema 6.7 que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = c \ln |x|$. Como $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, segue que $f(x) = cx \ln |x|$.

7

APLICAÇÕES E OUTROS PROBLEMAS

Aqui apresento um compilado com quatro interessantes aplicações das equações funcionais e do conceito de aditividade. Na seção 7.1, trago o cálculo de somatórios conforme é feito em [19], na página 80. Na seção 7.2, mostro uma análise da aditividade módulo n. Já na seção 7.3, apresento o Teorema de Hyers, conforme é feito na página 294 de [19]. Por fim, na seção 7.4 apresento o cálculo do limite trigonométrico fundamental feito por Leopold Vietoris, sob uma análise de Aczél, com algumas modificações. O texto original se encontra na página 86 de [1].

7.1 SOMATÓRIOS

Nesta seção, vejamos como alguns somatórios podem ser calculados com ajuda da equação aditiva.

Inicialmente conheceremos uma reflexão acerca da seguinte equação, com $k \in \mathbb{R}$ fixo:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + kxy, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Provemos que a mudança $g(x) = f(x) - \frac{kx^2}{2}$ gera uma equação aditiva:

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - \frac{k(x+y)^2}{2} \\ &= f(x) + f(y) + kxy - \frac{k(x^2+2xy+y^2)}{2} \\ &= f(x) + f(y) + kxy - \frac{kx^2}{2} - \frac{ky^2}{2} - kxy \\ &= f(x) - \frac{kx^2}{2} + f(y) - \frac{ky^2}{2} \\ &= g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Isto é, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

Mostremos, a seguir, como os conceitos acima mencionados podem ser úteis no cálculo de somatórios. Nosso objetivo é encontrar uma expressão para o cálculo de $f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, onde f é uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Observe que:

$$\begin{aligned} f(m+n) &= 1 + 2 + \cdots + m + (m+1) + \cdots + (m+n) \\ &= f(m) + (m+1) + \cdots + (m+n) \\ &= f(m) + mn + 1 + 2 + \cdots + n \\ &= f(m) + mn + f(n). \end{aligned}$$

Isto prova que $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$. Pela observação feita anteriormente, sabemos que a mudança $g(n) = f(n) - \frac{n^2}{2}$ transforma a equação anterior em $g(m+n) = g(m) + g(n)$. Nos números naturais, a solução da equação aditiva de Cauchy é dada por $g(n) = cn$, onde $c \in \mathbb{R}$. Este fato pode ser provado por indução, fazendo-se uma análise análoga ao que foi feito na demonstração do teorema 5.4. Sendo assim, tem-se $cn = f(n) - \frac{n^2}{2}$, e portanto $f(n) = cn + \frac{n^2}{2}$. Mas temos que $f(1) = 1$, e assim $1 = c + \frac{1}{2}$, donde $c = \frac{1}{2}$. Assim, tem-se

$$f(n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}.$$

Ou também

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Outros somatórios mais complexos também podem ser calculados com auxilio da equação aditiva de Cauchy. O leitor interessado pode consultar essas informações extras em [19], na página 80 e seguintes.

7.2 ADITIVIDADE MÓDULO N

Inicialmente, definiremos alguns conceitos de aritmética modular. Posteriormente, veremos o que é uma função aditiva módulo n.

Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são **congruentes** módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

De forma equivalente, tem-se $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, m divide $a - b$. Esta segunda caracterização de congruência costuma ser mais utilizada.

Exemplo 7.1. Temos que $13 \equiv -1 \pmod 2$, uma vez que 2 divide $13 - (-1) = 14$.

Das definições de módulo, seguem duas propriedades importantes:

- Se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv b \pmod m$, então $a \equiv c \pmod m$;
- Se $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$, então $(a + c) \equiv (b + d) \pmod m$.

Apresentaremos, sem demonstração, o Pequeno Teorema de Fermat. Sua prova pode ser encontrada na página 156 de [7].

Teorema 7.2. ***(Pequeno Teorema de Fermat)***

Se p é um número primo e $a \in \mathbb{Z}$, então

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

Estudemos, a partir deste momento, o comportamento da função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x^p$, com p primo.

Temos que $f(x + y) = (x + y)^p$. Pelo teorema 7.2, segue que

$$f(x + y) \equiv (x + y) \pmod p. \tag{7.1}$$

Além disso, o teorema 7.2 também garante que $f(x) \equiv x \pmod p$ e $f(y) \equiv y \pmod p$. Sendo assim, é possível dizer que

$$f(x) + f(y) \equiv (x + y) \pmod p. \tag{7.2}$$

Das equações (7.1) e (7.2), segue que

$$f(x + y) \equiv f(x) + f(y) \pmod p. \tag{7.3}$$

Com base no resultado de (7.3), pode-se dizer que a função f é uma função **aditiva módulo** p.

Tomemos agora $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x^n$, com n composto. Será que f continua sendo uma função aditiva módulo n? A resposta, em geral, é negativa. Vejamos um caso.

Vamos considerar $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x^4$. Tomemos $x = y = 1$. Assim, $f(x + y) = f(1 + 1) = f(2) = 2^4 = 16$ e também $f(x) = f(y) = f(1) = 1^4 = 1$. Desta forma,

$f(x)+f(y)=2$. Logo não é verdade que $f(x+y)\equiv f(x)+f(y) \pmod 4$, uma vez que 4 não divide $16-2$. Este exemplo mostra a importância da primalidade do expoente.

Seguindo a linha de raciocínio, façamos $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tal que $g(x)=(x^p)^p$, com p primo. Pelo teorema 7.2, segue

$$g(x+y)\equiv(x+y)^p\equiv(x+y) \pmod p. \tag{7.4}$$

Novamente, pelo teorema 7.2, segue $g(x)\equiv x^p\equiv x \pmod p$ e $g(y)\equiv y^p\equiv y \pmod p$. Daí segue

$$g(x)+g(y)\equiv(x+y) \pmod p. \tag{7.5}$$

De (7.4) e (7.5) temos:

$$g(x+y)\equiv g(x)+g(y) \pmod p.$$

Logo esta função g também é aditiva módulo p.

De forma análoga, também pode-se tomar $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tal que $h(x)=x^{p^n}$, com p primo e $n\in\mathbb{N}^*$. Prova-se por indução matemática que essa função h também é aditiva módulo p.

7.3 TEOREMA DE HYERS

Suponhamos que, em alguma situação, a equação aditiva de Cauchy não seja verdadeira para todos $x,y\in\mathbb{R}$, mas que ela seja **aproximadamente** verdadeira. Em termos matemáticos, isto significa que existe $\delta>0$ tal que:

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|\leq\delta, \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

A pergunta que fica é: uma pequena mudança na equação aditiva de Cauchy acarretaria também uma pequena mudança em suas soluções? É disso que se trata a teoria da estabilidade de equações funcionais.

Nesse contexto, o matemático Donald H. Hyers obteve um importante resultado sobre a estabilidade da equação aditiva. Apresento a demonstração do Teorema de Hyers seguindo o raciocínio descrito em [19], da página 294 em diante. Sigo a demonstração feita na referência com uma certa precisão, porque a lógica utilizada não admite muita flexibilidade.

Antes, porém, é preciso definir o conceito de sequência de Cauchy. Uma sequência (x_n) de número reais é dita uma **sequência de Cauchy** se, para cada $\epsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que, para todos os naturais $n, m \geq n_0$, vale

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

O teorema abaixo será apresentado sem demonstração. Sua prova pode ser encontrada na página 99 de [10].

Teorema 7.3. *Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, ela é uma sequência de Cauchy.*

Teorema 7.4. ***(Teorema da estabilidade de Hyers)***

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real, tal que, para algum $\delta > 0$, verifica

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \delta, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Então existe uma única função aditiva $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - A(x)| \leq \delta, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para algum $\delta > 0$, vale

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \delta, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Primeiramente, provemos que $\left(\frac{f(2^n x)}{2^n}\right)$ é uma sequência de Cauchy, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ fixado.

Fazendo $y = x$ na equação (7.6), obtemos

$$|f(2x) - 2f(x)| \leq \delta, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Faz-se então $x \leftarrow 2^{k-1}x$, onde $k \in \mathbb{N}^*$. Assim,

$$|f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)| \leq \delta, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vamos considerar que $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de forma que a inequação acima representaria, na verdade, n inequações distintas. Multipliquemos cada uma dessas inequações por $\frac{1}{2^k}$ e somemos todas elas:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} |f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \delta.$$

O que nos leva a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} |f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)| \leq \delta \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Da desigualdade triangular $|a+b| \leq |a|+|b|$, segue que:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f(2^k x)}{2^k} - \frac{f(2^{k-1}x)}{2^{k-1}} \right) \right| \leq \delta \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

A soma acima é telescópica, e resulta em:

$$\left| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right| \leq \delta \left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \tag{7.7}$$

Vemos que a inequação acima é válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Agora tomemos $n, m \in \mathbb{N}$, com $n > m > 0$. Com isso, $n - m \in \mathbb{N}^*$. Na equação anterior, substitui-se $n \leftarrow n - m$:

$$\left| \frac{f(2^{n-m} x)}{2^{n-m}} - f(x) \right| \leq \delta \left(1 - \frac{1}{2^{n-m}}\right).$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{1}{2^m}$, obtemos:

$$\left| \frac{f(2^{n-m} x)}{2^n} - \frac{f(x)}{2^m} \right| \leq \delta \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right).$$

Agora realizamos a substituição $x \leftarrow 2^m x$:

$$\left| \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right| \leq \delta \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right).$$

Se $m \to +\infty$, temos também que $n \to +\infty$, já que $n > m$. Disso segue que:

$$\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right) = 0.$$

E portanto

$$\lim_{m \to +\infty} \left| \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right| = 0.$$

Da definição de limite, temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $m > m_0$ acarreta

$$\left| \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^m x)}{2^m} \right| < \epsilon.$$

Como $n > m$, segue automaticamente que tal implicação é válida para $n, m > m_0$. Este argumento prova que $\left(\frac{f(2^n x)}{2^n}\right)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pelo teorema 7.3, segue que essa sequência é convergente. Isto é, seu limite existe, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado. Definamos então $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$A(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Provemos que a função $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, conforme definida acima, é aditiva.

$$\begin{aligned}
|A(x+y) - A(x) - A(y)| &= \left| \lim_{n\to+\infty} \frac{f(2^n(x+y))}{2^n} - \lim_{n\to+\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} - \lim_{n\to+\infty} \frac{f(2^n y)}{2^n} \right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} |f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)| \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\delta}{2^n} \\
&= \delta \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Onde, acima, usamos a hipótese de que $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \delta$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. O argumento feito prova o que queríamos.

O próximo objetivo é mostrar que $|f(x) - A(x)| \leq \delta$. Para isso, fazemos:

$$\begin{aligned}
|f(x) - A(x)| &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right| \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \delta \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) && \text{pela equação (7.7)} \\
&= \delta \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\
&= \delta \cdot 1 \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Isso prova o que queríamos. Por fim, provemos que tal função aditiva $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é única. Suponhamos, para tal, que exista outra função aditiva $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - B(x)| \leq \delta$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Com isto,

$$\begin{aligned}
|B(x) - A(x)| &= \frac{1}{n} |B(nx) - A(nx)| && \text{já que A e B são aditivas} \\
&\leq \frac{1}{n} |B(nx) - f(nx)| + \frac{1}{n} |f(nx) - A(nx)| && \text{pela desigualdade triangular} \\
&\leq \frac{2\delta}{n}.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to +\infty$ e utilizando o teorema 1.19, tem-se

$$|B(x) - A(x)| = 0.$$

Isso comprova que B é a mesma função que A. $\square$

Esse teorema, portanto, mostra que a equação aditiva de Cauchy possui um certo grau de estabilidade. Nesse contexto, o termo $f(x+y) - f(x) - f(y)$ é chamado de

diferença de Cauchy de f. Se uma função possui sua diferença de Cauchy limitada, isto é, se existe $\delta > 0$ tal que $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \delta$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, então diz-se que tal função é **aproximadamente aditiva** ou δ-**aditiva**.

A teoria da estabilidade de equações funcionais é bastante extensa. Após Hyers, outros matemáticos provaram resultados mais gerais. O leitor interessado pode buscar mais informações em [19], a partir do capítulo 18.

7.4 LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL

Nos cursos de cálculo diferencial e integral, é ensinado o limite trigonométrico fundamental com x medido em radianos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Há inúmeras demonstrações deste limite na literatura. Nesta dissertação, apresentarei a demonstração feita pelo matemático supercentenário Leopold Vietoris, em 1957. Vietoris, em sua demonstração, utiliza a equação aditiva de Cauchy. Esta prova pode ser encontrada em [1], na página 86 e seguintes. Na primeira parte da demonstração, sigo a referência com uma certa proximidade, para preservar a ordem lógica. Já na segunda parte da demonstração, apresento algumas reflexões mais aprofundadas que não constavam na referência.

Da trigonometria, sabe-se que, para qualquer a,

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a.$$

Fazendo $2a = x$, tem-se:

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}. \tag{7.8}$$

Da mesma forma, substituindo-se $x \leftarrow \frac{x}{2}$ em (7.8), chega-se em:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4}. \tag{7.9}$$

Substituindo (7.9) em (7.8), tem-se:

$$\operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen} \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}.$$

Repetindo este processo, podemos afirmar que

$$\operatorname{sen} x = f_n(x) g_n(x), \tag{7.10}$$

onde

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{2^n} \\ g_n(x) &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^n}. \end{aligned}$$

Se colocarmos $h_n(x) = g_n(x)\cos\frac{x}{2^n}$, temos

$$h_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos^2\frac{x}{2^n}.$$

Assim,

$$h_{n-1}(x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cos\frac{x}{2^{n-1}} = h_n(x)\left(\frac{\cos\frac{x}{2^{n-1}}}{\cos^2\frac{x}{2^n}}\right).$$

Mas é válido que $\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \cos^2\frac{x}{2^n} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2^n}$ e que $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2^n} \geq 0$, e assim

$$h_{n-1}(x) = h_n(x)\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2^n} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2^n}}{\cos^2\frac{x}{2^n}}\right) \leq h_n(x).$$

Além disso,

$$h_n(x) = g_n(x)\cos\frac{x}{2^n} \leq g_n(x) = g_{n-1}(x)\cos\frac{x}{2^n} \leq g_{n-1}(x) \leq 1.$$

Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, essas desigualdades são estritas e temos:

$$h_{n-1}(x) < h_n(x) < g_n(x) < g_{n-1}(x).$$

Isto prova que tanto (h_n) como (g_n) são sequências monótonas e limitadas. Segue do teorema 1.21 que (h_n) e (g_n) são convergentes. Sendo assim, existe $\lim g_n(x) = g(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. E também vale que

$$1 \geq g(x) > h_1(x) = \cos^2\frac{x}{2} > 0. \tag{7.11}$$

Essas desigualdades são estritas, após o limite, porque

$$h_{n-1}(x) < h_n(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq g_n(x) < g_{n-1}(x).$$

Da equação (7.10) reescrita como $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{g_n(x)}$, segue que (f_n) também é convergente, com limite positivo. Isto é, $\lim f_n(x) = f(x) > 0$, já que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ acarreta $\operatorname{sen} x > 0$. Sendo assim, se tomarmos o limite $n \to +\infty$ em (7.10), temos

$$\operatorname{sen} x = f(x)g(x).$$

Provemos agora que a função f é aditiva. Para isso, utilizamos o fato de que $f(x) = \lim f_n(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x+y) = \lim f_n(x+y) &= \lim\left(2^n \operatorname{sen}\frac{x+y}{2^n}\right)\\
&= \lim\left(2^n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\cos\frac{y}{2^n} + 2^n \operatorname{sen}\frac{y}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\right)\\
&= \lim\left(2^n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\right)\lim\left(\cos\frac{y}{2^n}\right) + \lim\left(2^n \operatorname{sen}\frac{y}{2^n}\right)\lim\left(\cos\frac{x}{2^n}\right)\\
&= \lim\left(2^n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\lim\frac{y}{2^n}\right) + \lim\left(2^n \operatorname{sen}\frac{y}{2^n}\right)\cos\left(\lim\frac{x}{2^n}\right)\\
&= \lim\left(2^n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}\right) + \lim\left(2^n \operatorname{sen}\frac{y}{2^n}\right) = \lim f_n(x) + \lim f_n(y) = f(x) + f(y),
\end{aligned}$$

onde a igualdade $\lim\left(\cos\frac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\lim\frac{x}{2^n}\right)$ segue do teorema 1.20, já que a função cosseno é contínua no zero.

Além disso, para todo n, a função $f_n(x) = 2^n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}$ é crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Isso vale porque a função seno é crescente no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Sendo assim, $f(x) = \lim f_n(x)$ é uma função não-decrescente e, portanto, monótona. Segue então do teorema 5.7, que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$. Assim,

$$\operatorname{sen} x = cxg(x).$$

E consequentemente

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = cg(x).$$

Sabemos que $\lim_{x\to 0^+}\cos^2\frac{x}{2} = \cos^2 0 = 1^2 = 1$. Assim, aplicando o teorema 1.5 em (7.11), segue que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} cg(x) = c\lim_{x\to 0^+} g(x) = c.$$

E também

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} t}{-t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = c,$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de que seno é uma função ímpar. Em resumo, segue que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = c.$$

Com isso, calculemos a derivada de $\operatorname{sen} x$ como é tradicional:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} + c \cos x \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} + c \cos x \\
&= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen} h}{\cos h + 1} + c \cos x \\
&= \operatorname{sen} x \cdot c \cdot 0 + c \cos x = c \cos x.
\end{aligned}$$

Calculemos também a derivada de $\cos x$:

$$\begin{aligned}
\cos' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} \\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} - c \operatorname{sen} x \\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} - c \operatorname{sen} x \\
&= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen} h}{\cos h + 1} - c \operatorname{sen} x \\
&= \cos x \cdot c \cdot 0 - c \operatorname{sen} x = -c \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Assim fica provado que $\operatorname{sen}' x = c \cos x$ e que $\cos' x = -c \operatorname{sen} x$.

Apresento agora o motivo pelo qual devemos ter $c \geq 0$. Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos $\operatorname{sen} x > 0$ e assim $\frac{\operatorname{sen} x}{x} > 0$. Da mesma forma, se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, tem-se $\operatorname{sen} x < 0$ e assim novamente $\frac{\operatorname{sen} x}{x} > 0$. Isso garante que $c \geq 0$. Essa informação será importante nos próximos parágrafos, já que $c \geq 0$ implica $\sqrt{c^2} = |c| = c$.

Agora mostraremos que o valor de c depende da unidade de medida escolhida para os ângulos. Neste texto calcularemos o valor de c para as três principais unidades de medida: radiano, grau e grado.

Sabemos que a circunferência de raio 1 possui perímetro 2π. Essa circunferência pode ser parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, onde $t \in [0, m]$, sendo $m > 0$ a medida angular de uma volta completa. Isto é, para radianos, tem-se $m = 2\pi$. Para graus tem-se $m = 360^\circ$ e, para grados, tem-se $m = 400\text{grd}$. Para derivar uma curva, sabemos que basta derivar cada função componente. Sendo assim, $\gamma'(t) = (-c \operatorname{sen} t, c \cos t)$.

Do cálculo integral, podemos igualar o comprimento da curva γ ao valor já conhecido de 2π. Isto nos permitirá achar c em função de m :

$$
\begin{aligned}
2\pi &= \int_0^m \|\gamma'(t)\| \, dt \\
&= \int_0^m \|(-c \operatorname{sen} t, c \cos t)\| \, dt \\
&= \int_0^m \sqrt{(-c \operatorname{sen} t)^2 + (c \cos t)^2} \, dt \\
&= \int_0^m \sqrt{c^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)} \, dt \\
&= \int_0^m c \, dt \\
\Rightarrow \frac{2\pi}{m} &= c.
\end{aligned}
$$

Portanto, se a unidade de medida angular é o tradicional radiano, vale que $m = 2\pi$ e desta forma $c = 1$. Se a unidade de medida angular for o grau, segue que $m = 360^\circ$ e assim $c = \frac{\pi}{180^\circ}$. E por fim, se a medida angular for o grado, tem-se $m = 400\text{grd}$ e consequentemente $c = \frac{\pi}{200\text{grd}}$.

CONCLUSÃO

Com este trabalho, pretendi mostrar que o tema de equações funcionais pode sim ser introduzido em um curso de Ensino Médio. Um aluno de Ensino Médio já tem familiaridade com as propriedades das funções. Além disso, os conceitos de limite e continuidade de funções podem ser passados ao aluno de forma mais intuitiva, não necessariamente com tanto rigor. O conceito matemático de mudança de variável também já é naturalmente tratado no Ensino Médio.

Ao abordar o tema de equações funcionais no Ensino Médio, temos alguns ganhos. Primeiramente, capacita-se o aluno para prestar as olimpíadas de matemática. Como já foi mencionado, este tema é vastamente cobrado em tais olimpíadas.

Em segundo lugar, coloca-se o aluno dentro do universo abstrato da matemática. Uma equação funcional é, sem dúvida, mais complexa que uma equação de uma variável. No primeiro caso, busca-se uma função como solução, e não um simples número. O aluno então percebe a vasta gama de tipos de equações que se encontra no escopo da matemática.

E, por fim, fornece-se o ferramental para que o aluno avance em seus estudos de matemática ou física. Com essa abstração, o aluno fica apto a estudar equações diferenciais que descrevem fenômenos físicos mais avançados, por exemplo.

BIBLIOGRAFIA

[1] ACZÉL, János. *Lectures on functional equations and their applications*. New York: Academic Press, 1966.

[2] ANDREESCU, Tito; BOREICO, Iurie. *Functional equations*. Electronic edition. 2007.

[3] BEZERRA, Alex Pereira. *Uma introdução às equações funcionais*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba. Paraíba, p. 60. 2014.

[4] COELHO, Lucicléia. *Funções complexas*. Trabalho de conclusão de curso (Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina. Santa Catarina, p. 69. 2000.

[5] EFTHIMIOU, Costas. *Introduction to functional equations*: theory and problem-solving strategies for mathematical competitions and beyond. 2. ed. AMS, 2010.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. v. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[7] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[8] HINCKEL, Francielle. *Introdução aos espaços vetoriais de dimensão infinita*. Trabalho de conclusão de curso (Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina. Santa Catarina, p. 55. 2009.

[9] LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do ensino médio*. v. 1. 8. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[10] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*. v. 1. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

[11] LOPES, Davi. *Introdução às equações funcionais*. Notas de aula. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2019/01/Davi_Lopes_Introducao_as_Equacoes_Funcionais.pdf

Acessado em: 07/06/2021.

[12] MONTEIRO, Martha Salerno. *Introdução à análise real*. Notas de aula.
Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/mat0315/reais.pdf
Acessado em: 07/06/2021.

[13] NETO, Antônio Caminha Muniz. *Fundamentos de cálculo*. SBM, 2015.

[14] NETO, Ângelo Papa; NETO, Antônio Caminha. *Material teórico - módulo: funções - noções básicas*. Notas de aula.
Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/index.php/modulo/ver?modulo=34&tipo=7
Acessado em: 30/07/2021.

[15] NETTO, Sérgio Lima. *A matemática no vestibular do IME*. 1. ed. Fortaleza: Vestseller, 2011.

[16] Prova da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) de 2009.
Disponível em: https://www.imo-official.org/problems/IMO2009SL.pdf
Acessado em: 04/06/2021.

[17] Prova da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) de 2015.
Disponível em: https://www.imo-official.org/problems/IMO2015SL.pdf
Acessado em: 04/06/2021.

[18] Prova da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) de 2018.
Disponível em: https://www.imo-official.org/problems/IMO2018SL.pdf
Acessado em: 04/06/2021.

[19] SAHOO, Prasanna K; KANNAPPAN, Palaniappan. *Introduction to functional equations*. USA: CRC Press, 2011.

[20] SECCO, Matheus. *Funções e substituições algébricas*. Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo.
Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=XElqwjzTii0
Acessado em: 04/06/2021.

[21] SMALL, Christopher G. *Functional equations and how to solve them*. USA: Springer, 2007.

[22] SOARES, Márcio G. *Cálculo em uma variável complexa*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.