FRANCISCO ULISSES DA SILVA SOUSA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE POR MEIO DA METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA ADAPTADA AO ENSINO REMOTO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

21 de dezembro de 2021

FRANCISCO ULISSES DA SILVA SOUSA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE POR MEIO DA METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA ADAPTADA AO ENSINO REMOTO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. NELSON MACHADO BARBOSA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
21 de dezembro de 2021

FICHA CATALOGRÁFICA
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

S725 Sousa, Francisco Ulisses da Silva.

ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE POR MEIO DA METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA ADAPTADA AO ENSINO REMOTO / Francisco Ulisses da Silva Sousa. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2021.

191 f. : il.
Bibliografia: 84 - 86.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2021.
Orientador: Nelson Machado Barbosa.

1. Proporcionalidade. 2. Sala de Aula Invertida Adaptada. 3. Ensino Remoto. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

FRANCISCO ULISSES DA SILVA SOUSA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE POR MEIO DA METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA ADAPTADA AO ENSINO REMOTO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 21 de Dezembro de 2021.

Prof. ROGER RUBEN HUAMAN HUANCA
D.Sc. - UEPB

Prof. RAFAEL BRANDÃO DE REZENDE BORGES
D.Sc. - UERJ

Profª. AUSBERTO SILVERIO CASTRO VERA
D.Sc. - UENF

Profª. ELBA OROCIA BRAVO ASENJO
D.Sc. - UENF

Prof. NELSON MACHADO BARBOSA
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

A Deus, por ter cuidado de cada detalhe em minha vida; a minha esposa, pelo companheirismo, carinho, compreensão e por me dar forças sempre que precisei; a meus pais que sempre estiveram comigo me apoiando e auxiliando na caminhada até aqui; e a todos os familiares e amigos que torceram por mim.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida, por sempre estar comigo, pela sabedoria e pelo dom de lecionar.

Aos meus pais, Cremilda e Francisco, pela preocupação e amor dedicados a mim todo esse tempo, além de todo o apoio e investimento na minha formação acadêmica. Aos meus irmãos, Antonio e Kaliani, por toda parceria ao longo da vida.

A minha esposa Miriã, pelo carinho, pelo apoio incondicional e companheirismo em todos os momentos.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), pelos inúmeros recursos disponibilizados ao longo da minha trajetória acadêmica e à Sociedade Brasileira de Matemática, por fornecer meios para que a Ciência se desenvolva.

Ao meu orientador, Prof. Dr Nelson Machado Barbosa pela confiança no meu trabalho, pelo apoio, dedicação, paciência, competência e disponibilidade durante todo o processo de elaboração desta pesquisa.

Aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos e colaboração.

Aos meus amigos do programa, pela parceria e troca de conhecimento.

Ao amigo, professor e diretor Anderson Carneiro Machado, pela ajuda indispensável ao disponibilizar suas aulas para aplicação de minha pesquisa.

Aos alunos da turma 701 da Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição, por aceitarem ser protagonistas desse trabalho e contribuir diretamente com a aplicação desta pesquisa.

Por fim, a todos que, de alguma forma, estiveram ao meu lado me apoiando e auxiliando na realização desse trabalho.

"Quem ensina aprende ao ensinar. E quem aprende ensina ao aprender"

(Paulo Freire)

Resumo

Muitos são os desafios presentes no ensino de matemática e, dentre eles, está a busca por novas metodologias para aperfeiçoar ainda mais o ensino e aprendizagem da disciplina. Diante disso, a presente pesquisa tem como finalidade propor uma sequência didática para o estudo dos conceitos de proporcionalidade tratados no 7º ano do Ensino Fundamental anos finais, por meio da metodologia Sala de Aula Invertida, de forma adaptada ao ensino puramente remoto. A principal adaptação proposta é a implementação das aulas síncronas, já que na pesquisa foram utilizados softwares de videoconferência para desenvolver as explicações e as atividades que ocorreriam presencialmente no método convencional de ensino. Já, a parte assíncrona da metodologia Sala de Aula Invertida foi realizada por intermédio de videoaulas. A partir disso, desenvolveu-se uma pesquisa de caráter exploratório, de natureza aplicada, que utilizou uma abordagem tanto quantitativa quanto qualitativa para examinar os dados obtidos por meio da aplicação de questionários e da observação direta da participação dos estudantes durante os encontros síncronos. Dessa forma, foi observado que a Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto pode contribuir de forma significativa para a aprendizagem e compreensão do tema proposto durante o período de isolamento social, além de fortalecer o desenvolvimento de aptidões como a responsabilidade, autonomia, organização, criatividade e a confiança dos estudantes no ensino-aprendizagem de proporcionalidade.

Palavras-chaves: Proporcionalidade; Sala de Aula Invertida Adaptada; Ensino Remoto.

Abstract

There are many challenges present in the teaching of mathematics and, among them, is the search for new methodologies to further improve the teaching and learning of the discipline. Therefore, the present research aims to propose a didactic sequence for the study of the concepts of proportionality treated in the 7th year of Elementary School final years, through the called Flipped Classroom, adapted to purely remote teaching. The main proposed adaptation is the implementation of synchronous classes, since in the research videoconferencing software was used to develop the explanations and activities that would occur in person in the conventional teaching method. The asynchronous part of the Flipped Classroom methodology was carried out through video classes on the Khan Academy Platform. From there, it developed an exploratory research, of an applied nature, which used a both quantitative and qualitative approach to examine the obtained through the application of questionnaires and direct observation of student participation during synchronous meetings. In this way, it was observed that the Inverted Classroom Adapted to Remote Teaching can contribute significantly to the learning and understanding of the proposed theme during the period of social isolation, in addition to strengthening the development of skills such as responsibility, autonomy, organization, creativity and student confidence in proportionality teaching-learning.

Key-words: Proportionality; Adapted Flipped Classroom; Remote Teaching.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de quadros

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNE	Conselho Nacional de Educação
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
MEC	Ministério da Educação
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
SAI	Sala de Aula Invertida
TDIC's	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O conhecimento matemático é algo necessário a todo cidadão, seja por sua grande aplicação em situações cotidianas ou pela capacidade de potencializar a formação de pessoas críticas, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2017). A partir da capacidade de ler, escrever e manipular números, é possível o indivíduo compreender os demais conteúdos curriculares, fazendo uso dos mesmos em variadas situações do dia a dia.

Nesse sentido, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da área de Matemática e suas Tecnologias, para o desenvolvimento de tais habilidades previstas para o Ensino Fundamental - Anos Finais:

> [...] é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas (BRASIL, 2017, p. 298).

Entretanto, no cotidiano escolar, a Matemática pode representar uma grande dificuldade para o aluno. Visto que, a BNCC propõe a consolidação, ampliação e o aprofundamento dos conceitos essenciais desenvolvidos nas séries anteriores (BRASIL, 2017). Desta forma, a partir do 6º Ano (primeira série dos anos finais do ensino fundamental) as dificuldades se acentuam, pois o aprendizado passa a ir além das quatro operações básicas, abordando conceitos mais complexos e abstrações.

De acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015), as dificuldades, por parte dos alunos, no ensino-aprendizagem da matemática, iniciam-se nos primeiros anos escolares e tendem a se agravar, causando aversão à disciplina com o passar do tempo, se não for corrigida. Sendo assim, o professor deve buscar formas alternativas para motivar e solucionar tais desafios, uma vez que:

> Aulas que privilegiam apenas exposições orais tendem a ser cada vez mais curtas, porque mantêm os estudantes atentos e concentrados por pouco

> tempo. Nesse sentido, as tecnologias digitais oferecem diferentes possibilidades de aprendizagem e, se bem utilizadas pela escola, constituem-se como uma oportunidade para que os alunos possam aprender mais e melhor (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015, p. 49).

Diante de tudo isso, o presente trabalho tem como motivação aplicar uma metodologia, capaz de ser experimentada durante o Ensino Remoto, visando tornar o ensino-aprendizagem de Proporcionalidade mais eficiente, através da metodologia de Ensino Híbrido em um novo formato, adotando a estratégia da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto.

De acordo com Christensen, Horn e Staker (2013):

> O ensino híbrido é um programa de educação formal no qual um aluno aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino online, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, lugar, modo e/ou ritmo do estudo, e pelo menos em parte em uma localidade física supervisionada, fora de sua residência (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2013, p. 9).

Nesse contexto, a Sala de Aula Invertida é o modelo no qual inverte-se a forma tradicional de ensino e, segundo Bergmann e Sams (2020):

> Basicamente, o conceito de sala de aula invertida é o seguinte: o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula.(BERGMANN; SAMS, 2020, p. 11)

Ou seja, de acordo com Bergmann e Sams (2020) o conteúdo e as orientações são estudadas em casa, antes de cada aula presencial na escola, que agora passa a ser local de revisar e aprofundar os conteúdos já estudado, através da solução de exercícios e debates em grupo.

A experimentação da presente pesquisa se deu nos meses de março e abril de 2021, em um cenário de isolamento social, devido a pandemia global causada pelo novo coronavírus, responsável pela Covid-19. No dia 10 de dezembro de 2020, o MEC homologou o Parecer nº 19 (BRASIL, 2020), do Conselho Nacional de Educação (CNE), que estende até 31 de dezembro de 2021 a permissão para atividades remotas no Ensino Básico e Superior em todo o país. O documento ainda traz algumas sugestões/recomendações em relação ao Ensino Remoto:

> Deve-se, ainda, admitir a possibilidade de tornar o contato com os pais ou responsáveis pelas atividades, mais efetivo com o uso de internet, celular ou mesmo de orientações de acesso síncrono ou assíncrono, sempre que possível. A escola, por sua vez, poderá definir a oferta do instrumento de resposta e feedback, caso julgue necessário. Essa possibilidade pode se configurar como algo viável e possível mesmo para a rede pública em todos ou em determinados municípios ou localidades, respeitadas suas realidades locais (BRASIL, 2020, p. 31).

A adaptação central deste trabalho em relação ao Ensino Híbrido: Sala de Aula Invertida, para aplicação da sequência didática, foi substituir os encontros presenciais por aulas ao vivo (síncronas), através de videoconferências, para esclarecer as dúvidas dos alunos e desenvolver as atividades pertinentes ao ensino-aprendizagem de Proporcionalidade. Enquanto isso, a parte assíncrona da metodologia SAI foi realizada por intermédio das videoaulas da Plataforma Khan Academy, dando autonomia e flexibilidade para o processo de construção do conhecimento.

Sendo assim, esta pesquisa foi desenvolvida buscando responder a seguinte questão: Como o Ensino Híbrido nesse novo formato, em particular a Sala de aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto, pode auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de proporcionalidade para uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental Anos Finais?

Em síntese, esta pesquisa foi desenvolvida buscando tornar o processo de ensino-aprendizagem de Proporcionalidade para uma turma de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, mais dinâmico e participativo, utilizando o Ensino Híbrido, através Sala de Aula Invertida Adaptado ao Ensino Remoto como estratégia.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é aplicar uma sequência didática por meio da estratégia Sala de Aula Invertida, de forma adaptada ao Ensino Remoto, para estimular uma maior participação dos alunos durante as aulas, visando uma maior compreensão e assimilação dos conceitos de Proporcionalidade, em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental. Para isso, delimitou-se os seguintes objetivos específicos:

- Diagnosticar os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao conteúdo de proporcionalidade;
- Utilizar recursos didáticos através das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação, como ferramentas pedagógicas para o ensino de proporcionalidade;
- Incentivar os alunos a estudarem previamente os conceitos a serem trabalhos durante os encontros síncronos, através de videoaulas;
- Tornar as aulas menos expositivas e, assim, estimular uma maior participação dos alunos no processo de construção do conhecimento;

1.2 Justificativa

Entre os conteúdos estudados nos anos finais do Ensino Fundamental, destaca-se o desenvolvimento do pensamento proporcional, através do estudo de proporcionalidade.

Este, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; perímetro etc. Além disso, segundo Miranda (2009), essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc.

Os alunos, na maioria das vezes, possuem uma ideia equivocada de que a Matemática é composta por conteúdos independentes e que não necessitam de conhecimentos prévios para serem compreendidos. Segundo Castro (2014, p. 12), "os livros didáticos constantemente apresentam os conteúdos como se fossem sempre novidade, sem correlação com os conteúdos já ensinados". Por isso, muitas vezes estudam por obrigação e buscam apenas memorizar tais assuntos. Como exemplo disso, podemos destacar o estudo das frações, os números decimais, as razões, as porcentagens e as escalas que têm como conceito fundamental a proporcionalidade.

Outra colocação importante de Castro (2014, p. 12) é que "O conteúdo proporcionalidade é apresentado nos livros didáticos de forma mecânica, abusando-se do uso da regra de três, e muitas vezes sem o entendimento do conceito e a sua relação com situações do cotidiano". Para o autor, o problema desta abordagem está no fato dos alunos memorizarem a regra sem entenderem o porquê da utilização da mesma.

O conceito de Proporcionalidade, de acorco com Brasil (1998), é essencial não somente no contexto escolar, mas também no dia a dia das pessoas. Ele é importante para lidar com várias situações do mundo, para compreendermos outras áreas do conhecimento, além de contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos indivíduos.

Segundo INEP (2019), o sucesso da aprendizagem está no desenvolvimento do letramento matemático, definido no PISA 2018 como:

> [...]a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos (INEP, 2019, p. 98).

De acordo com INEP (2019, p. 109), apenas 9,3% dos estudantes brasileiros que participaram do PISA 2018 demonstraram alguma capacidade para trabalhar com relações de proporcionalidade, contra 24,4% dos estudantes dos países da OCDE.

Além disso, devemos considerar os erros que os alunos cometem ao resolver questões sobre proporcionalidade, como os erros conceituais diretamente relacionados ao conteúdo, dificuldades de outras naturezas se encontram intimamente associadas, como, por exemplo, a interpretação das questões.

No geral, a média de proficiência dos jovens brasileiros em Matemática no PISA 2018 foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos estudantes dos países da OCDE

(492). A figura 1 apresenta as médias dos estudantes de 15 anos do Brasil e de 16 países selecionados, conforme INEP (2019).

Figura 1 – Médias das Proficiências em Matemática dos Países Selecionados

PAÍS	RANKING[1]	MÉDIA
Coreia	5-9	526
Canadá	10-16	512
Finlândia	12-18	507
Portugal	23-31	492
Média OCDE	-	489
Espanha	32-37	481
Estados Unidos	32-39	478
Uruguai	54-60	418
Chile	55-60	417
México	60-63	409
Costa Rica	61-66	402
Peru	62-67	400
Colômbia	66-70	391
Brasil	69-72	384
Argentina	70-73	379
Panamá	76-77	353
República Dominicana	78-78	325

Fonte: (INEP, 2019)

É preciso, portanto, pensar novas formas de ensinar e de se aprender Matemática, em específico nos estudos de proporcionalidade. De acordo com Libâneo (2006), o professor tem entre seus deveres, auxiliar o aluno na busca do conhecimento, tornando um ponto de apoio para que o faça de forma natural, desenvolvendo conjecturas, analisando o contexto e finalmente traçando uma resolução. Isso ajuda os indivíduos a reconhecerem o papel que a Matemática desempenha nas relações sociais e no mundo.

Em suma, mediante às informações supramencionadas e levando-se em consideração os desafios impostos à educação pela pandemia mundial, causada pelo novo Coronavírus, o pesquisador julgou oportuno estudar como o Ensino Híbrido, através da metodologia da Sala de Aula Adaptada ao Ensino Remoto, pode auxiliar e otimizar o processo de ensino-aprendizagem de Proporcionalidade, dando mais autonomia para os alunos no processo de construção do conhecimento.

1.3 Estrutura do trabalho

Os capítulos deste trabalho foram estruturados da seguinte maneira:

No Capítulo 2, são apresentadas uma breve análise sobre as diferentes “personalidaes” de um número racional e uma revisão sobre os aspectos teóricos da Proporcionalidade, além de uma abordagem do uso das Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática e, uma pesquisa sobre o Ensino Híbrido, em especial sobre o modelo da Sala de Aula Invertida e o contexto do Ensino Remoto. Além disto, apresenta-se a Plataforma Khan Academy utilizada na experimentação deste trabalho.

Já no Capítulo 3, são apresentados os aspectos metodológicos da pesquisa: como se deu sua preparação, os sujeitos, recursos didáticos e instrumentos de coleta de dados utilizados, sua elaboração e descrição das atividades.

O Capítulo 4, se destina à apresentação dos resultados após a experimentação da proposta.

Finalmente, o Capítulo 5 narra as considerações finais obtidas com esta pesquisa.

Capítulo 2

Referencial Teórico

Neste capítulo será apresentada uma breve abordagem sobre as diferentes ”personalidades” número racional; os aspectos teóricos do estudo de Proporcionalidade, suas definições e, também alguns aspectos de seu ensino e aprendizagem; serão abordadas algumas perspectivas do ensino da Matemática, além de discutir as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e Orientações Curriculares para o Ensino Fundamental, referentes ao ensino de Proporcionalidade.Além disso, neste capítulo serão discutidas questões sobre a Tecnologia e a Educação Matemática; sobre o uso de Tecnologias Digitais no Ensino da Matemática e a descrição dos recursos tecnológicos (aplicativos) selecionados para o desenvolvimento da sequência didática.

2.1 As diferentes “personalidades” do número racional

De acordo com, Onuchic e Allevato (2008) o significado de um número racional pode ser interpretado de diferentes formas, são elas: **ponto racional**, **quociente**, **fração**, **razão** e **operador**. Essas formas são denominadas de “personalidades” e segundo os autores a construção do conhecimento matemático depende da abordagem correta do significado de um número racional no problema em que este está inserido. Segundo, Onuchic e Allevato (2008):

> Não raro, razões são consideradas como frações, uma vez que, a partir de seu símbolo, a notação barra fracionária, induzem a um tratamento semelhante. É necessário que se tenha um real conhecimento e que se reflita cuidadosamente sobre suas diferenças (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 99).

Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2008) afirmam que essas “personalidades” não são facilmente identificadas, por professores e alunos e, atribuem a isto à razão das grandes dificuldades encontradas durante a resolução de problemas envolvendo números racionais.

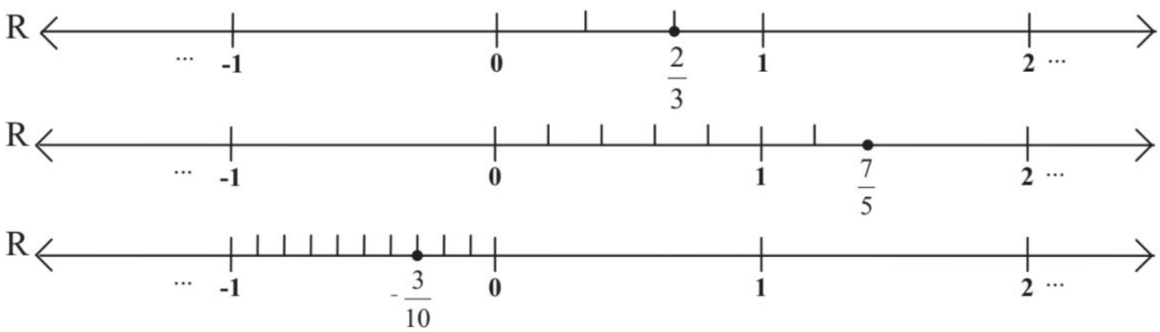
Apresentaremos, a seguir, alguns problemas aonde é possível evidenciar as diferentes "personalidades" dos números racionais, segundo Onuchic e Allevato (2008).

- **Ponto racional**

Problema 1 (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 87): Localize os números $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$ e $\frac{-3}{10}$ na reta real.

De acordo com, Onuchic e Allevato (2008) este problema permite que os alunos tenham a oportunidade de trabalhar com a "personalidade" do número racional chamada **ponto racional**: todo número racional $\frac{a}{b}$ ocupa um ponto bem definido na reta reta e, reciprocamente, a todo ponto racional da reta corresponde um número racional, conforme mostra a Figura 2.

Figura 2 – Localização dos números racionais do Problema 1.



Fonte: (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 87)

Entretanto, segundo Onuchic e Allevato (2008, p. 86) estudantes e professores em curso de formação tendem a fazer a divisão dos termos constituintes dos números racionais dados, para obter uma aproximação decimal antes de localizar o número racional na reta real. Sendo assim, os autores afirmam que:

> É preciso, nesse momento, que lhes reforce que $\frac{2}{3}$ e 0,6, ou as outras aproximações, não correspondem ao mesmo ponto. É preciso que compreendam que $\frac{2}{3} = 0,666...$, uma dízima periódica simples cuja fração geratriz é $\frac{2}{3}$ (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 87).

- **Quociente**

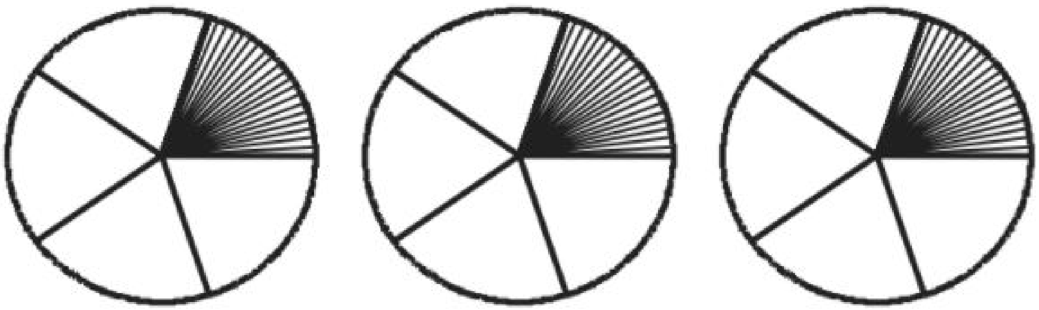
Quando **um número de objetos precisa ser repartido igualmente num certo número de grupos**, temos uma "personalidade" dos números racionais denominada **quociente**, conforme Onuchic e Allevato (2008). Problema 2, a seguir, exemplifica esta personificação do número racional.

Problema 2 (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 88): Três pizzas devem ser divididas igualmente entre cinco pessoas. Quanto de pizza cada pessoa comerá?

Neste caso, $\frac{a}{b} = a \div b$, com $a,b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Então, $\frac{3\ pizzas}{5\ pessoas}$ significa $3\ pizzas \div 5\ pessoas$. A Figura 3 demonstra a representação a solução geométrica do Problema 2.

Figura 3 – Solução geométrica do Problema 2.



Fonte: (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 88)

De acordo com, Onuchic e Allevato (2008) esta personalidade é a que aparece mais frequentemente nas aplicação e está associada ao uso dos números racionais como solução para situação de divisão.

- **Fração**

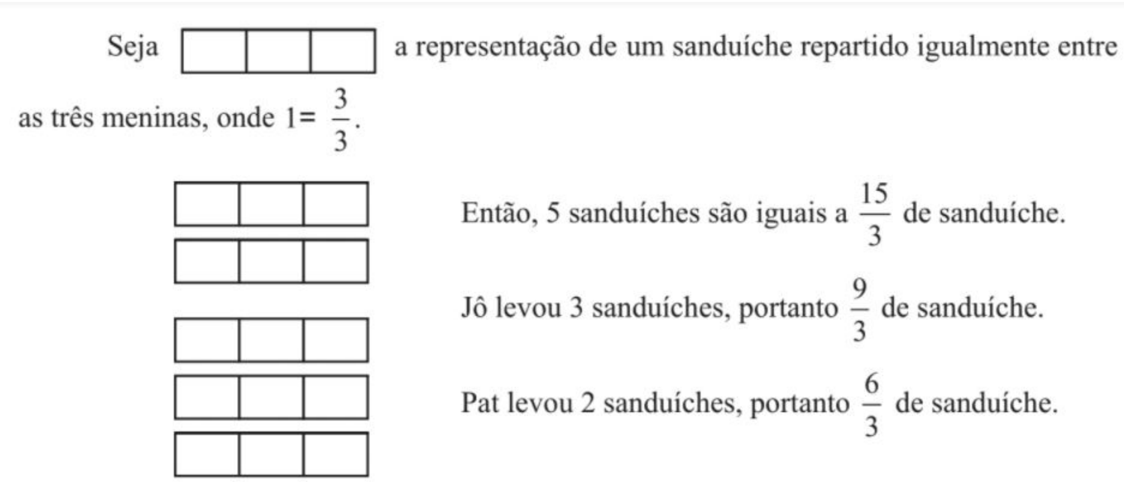
Problema 3 (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 89): Jô, Pat e Cris resolveram fazer um piquenique e combinaram levar sanduíches para o almoço. Jô levou 3 sanduíches, Pat levou 2 e Cris se esqueceu do combinado e não levou nenhum. Assim, resolveram repartir os sanduíches que tinham levado igualmente entre as três, mas cobraram de Cris R$ 5,00 por sua parte. Que parte dos R$ 5,00 recebeu Jô? E Pat?

Onuchic e Allevato (2008), afirmam que neste tipo de problema os alunos tendem a responder de forma errônea, pois:

> Quando esse problema é apresentado aos alunos, após algum tempo dado para a sua resolução, pede-se, um a um, a resposta obtida. Com frequência a maioria responde que, dos R$5,00, R$3,00 vão para Jô e R$2,00 para Pat. Isso reflete que a maioria das pessoas foi levada a reconhecer os números contidos no problema e buscar uma possível operação sobre eles (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 89).

Os autores, então, apresentam uma solução para o Problema 3, conforme a Figura 4 através de uma representação gráfica, onde cada sanduíche é representado pela fração $\frac{3}{3}$, logo podemos representar os 5 sanduíche pela fração $\frac{15}{3}$.

Figura 4 – Representação gráfica do Problema 3.



Fonte: (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 89)

Como as 15 partes foram divididas igualmente entre as 3 meninas, cada uma comeu $\frac{5}{3}$ de sanduíche e ofereceu à Cris $\frac{4}{3}$. Pat, por sua vez, comeu $\frac{5}{3}$ de sanduíche e deu à Cris $\frac{1}{3}$. Portanto, como Cris pagou R$ 5,00 por sua parte, ela pagou R$ 1,00 por cada terço de sanduíche. Assim, a matemática mostra que Jô deve receber R$ 4,00 e Pat R$ 1,00.

Portanto, segundo Onuchic e Allevato (2008) ao olharmos o todo, 1 sanduíche, repartido em 3 partes, surge outra "personalidade" do número racional, a **fração**, que é uma **relação da parte com o todo**.

- **Razão**

Problema 4 (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 93): Duas jarras iguais contêm misturas de álcool e água nas razões de $\frac{3}{5}$ (três para cinco), na primeira jarra e $\frac{3}{7}$ (três para sete) na segunda. Juntando-se os conteúdos das duas jarras qual será a razão entre álcool e água na mistura resultante?

De acordo com, Onuchic e Allevato (2008) neste problema é importante observar que as jarras possuem a mesma capacidade volumétrica, ou seja, o volume V_1 da jarra 1 é o mesmo que o da jarra 2 (V_2).

Vamos supor, por sugestão da razão $\frac{3}{5}$, que este volume $V_1 = V_2 = V$ seja de $8l$. Se $\frac{3}{7}$ é a razão da mistura na jarra 2, estes $8l$ são formados por 10 partes de $0,8l$ cada, das quais 3 partes $= 2,4l$ são álcool e 7 partes $= 5,6l$ são água.

Assim, para a jarra 2, tem-se a razão $2,4l$ álcool : $5,6l$ água. Se $V_1 + V_2 = 16l$, dos quais $5,4l$ são de álcool ($3l$ da jarra 1 $+$ $2,4l$ da jarra 2) e $10,6l$ são de água ($5l$ da jarra 1

$+\ 5,6l$ da jarra 2), a razão entre álcool e água na mistura final será $\dfrac{5,4l}{10,6l} = \dfrac{54}{106} = \dfrac{27}{53}$ ou, com outra notação para a razão, $27 : 52$.

Portanto, segundo Onuchic e Allevato (2008) uma **razão**, denotada por $\dfrac{a}{b} = a : b$ *(a está para b)* é uma das "personalidades" dos números racionais, aonde há uma **comparação multiplicativa entre duas grandezas**. Sendo assim, Onuchic e Allevato (2008) afirmam que:

> O conceito de razão é relevante porque fundamenta o conceito de proporcionalidade, que é uma idéia unificadora na Matemática (EUA; 1992), pois é um conceito que "liga" diversos ramos da matemática escolar, como medida, estatística, aritmética, funções, álgebra e geometria. Da proporcionalidade derivam outros importantes conceitos e conteúdos: regras de três, divisão em partes proporcionais, quantidades intensivas, misturas, porcentagem, taxas, juros, descontos, escalas, estimativas populacionais, variação direta, variação inversa, razões trigonométricas, semelhança de triângulos, probabilidades, etc. O conceito de proporcionalidade está presente não apenas na Matemática, mas, também, em outras áreas do conhecimento. Em Física, no estudo da densidade, da ótica, da velocidade; em Química, no estudo de equivalências químicas; em Artes, na ampliação e redução de figuras; em Geografia, na interpretação das escalas de mapas;... (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 97).

- **Operador**

De acordo com, Onuchic e Allevato (2008) na multiplicação $a{\cdot}b = c \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{b}, b \neq 0 \\ b = \dfrac{c}{a}, a \neq 0 \end{cases}$, uma dificuldade para os alunos se mostra quando o multiplicador se apresenta como um número racional. Por exemplo, como interpretar $\dfrac{3}{5} \cdot 15$? Neste caso, a barra fracionária $\dfrac{a}{b}$, é utilizada para representar uma classe particular de uma função composta definida por $\dfrac{a}{b} \cdot x = a \cdot (x \div b) = (a \cdot x) \div b$, onde a e b são constantes e x é uma expressão numérica para alguma quantidade.

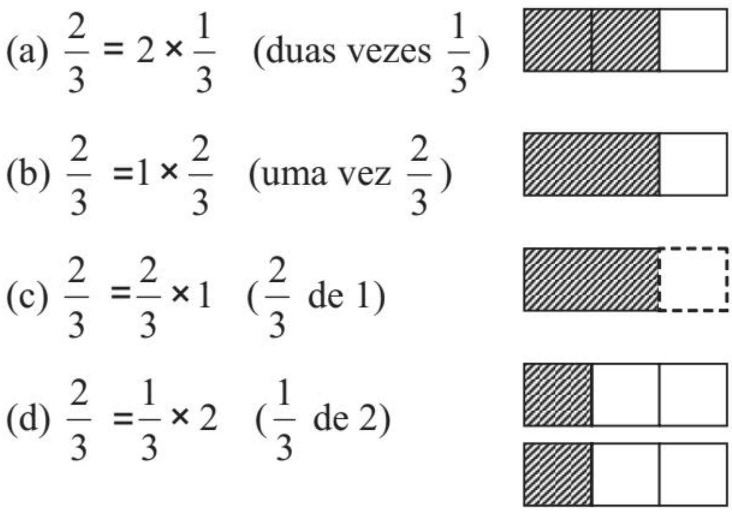
Portante, segundo Onuchic e Allevato (2008):

> A barra fracionária não é nem um símbolo funcional nem um delimitador, mas um símbolo para a operação composição de funções. Então, $\dfrac{3}{5} \cdot 15$ deveria ser interpretado como uma função composta e, assim $\dfrac{3}{5} \cdot 15 = 3 \cdot (15 \div 3) = (3 \cdot 5) \div 5 = 3 \cdot 3 = 45 \div 5 = 9$ (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 94).

Problema 5 (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 94): Represente geometricamente $\dfrac{2}{3}$ de quatro maneiras diferentes.

Na Figura 5, temos quatro representações distintas do número racional $\dfrac{2}{3}$, sendo assim, de acordo com Onuchic e Allevato (2008), a "personalidade" **operador** tem o significado semelhante ao de "encolher" ou "esticar", de "reduzir" ou "ampliar".

Figura 5 – Representação gráfica do Problema 5.



Fonte: (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 94)

Portanto, de acordo com Onuchic e Allevato (2008) ao analisar as diferentes “personalidades” dos números racionais o fundamental é permitir que os alunos desenvolvam compreensões sobre estes conceitos, dando-lhes a oportunidade de encontrar diferentes significados dentro de uma variedade de problemas.

2.2 Aspectos Teóricos da Proporcionalidade

Apresentaremos a seguir as principais definições e teoremas de proporcionalidade de acordo com Lima et al. (2001) e Lima (2012).

Definição 2.1. *(LIMA et al., 2001, p. 3) Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:*

1) *Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.*

2) *Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado, etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Nas condições supramencionadas, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se uma proporcionalidade.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *(LIMA et al., 2001, p. 16) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função com as seguintes propriedades:*

1) $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$*;*

2) $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^+$*.*

Então $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ *para todo* $c \in \mathbb{R}^+$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^+$*.Consequentemente,* $f(x) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$ *com* $a = f(1)$*.*

Demonstração: (LIMA et al., 2001, p. 16) Em primeiro lugar, para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n \cdot f(rx) = f(n \cdot rx) = f(m \cdot x) = m \cdot f(x),$$

por 2, logo $f(r \cdot x) = \dfrac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x)$. Assim, a igualdade $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ é válida quando c é racional. Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c \cdot f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c \cdot f(x)$ ou $f(cx) > c \cdot f(x)$. Consideremos o primeiro caso. Temos então $\dfrac{f(cx)}{f(x)} < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $\dfrac{(cx)}{f(x)} < r < c$, logo $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. Como r é racional, vale $r \cdot f(x) = f(rx)$. Assim, podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas, como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade 1, isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(cx) < c \cdot f(x)$. De modo inteiramente análogo se vê que $f(cx) > c \cdot f(x)$ é impossível. Portanto deve ser $f(x) = c \cdot f(x)$ para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}^+$.

Corolário 1. *(LIMA et al., 2001, p. 8) Se* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é uma proporcionalidade então tem-se, para todo* $x > 0$*,* $f(x) = ax$*, onde* $a = f(1)$*.*

Com efeito, pelo Teorema Fundamental, para quaisquer $x, c \in \mathbb{R}^+$, vale $f(xc) = x \cdot f(c) = f(c).x$. Em particular, tomando $c = 1$, obtemos $f(x) = a \cdot x$, onde $a = f(1)$.

Definição 2.2. *(LIMA et al., 2001, p. 8) Uma função* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *definida por* $f(x) = ax$*, onde* $a \in \mathbb{R}^+$ *é uma constante, chama-se uma função linear. Quando* $a > 0$*, a função linear* $f(x) = ax$ *transforma um número real positivo* x *no número positivo* ax*, logo define, por restrição, uma proporcionalidade* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*. Acabamos de ver que, reciprocamente, toda proporcionalidade é a restrição de uma função linear a* $\mathbb{R}^+$*. O coeficiente* a *chama-se o fator de proporcionalidade.*

Corolário 2. *(LIMA et al., 2001, p. 8) se* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é uma proporcionalidade então, para quaisquer* x_1, x_2 *com* $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$*, tem-se* $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$ *. Com efeito, ambos esses quocientes são iguais ao fator de proporcionalidade a. A igualdade* $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$ *chama-se uma* ***proporção****.*

Chama-se **regra de três** ao problema que consiste em, conhecendo três dos números x_1, y_1, x_2, y_2, determinar o quarto.

Definição 2.3. *(LIMA, 2012, p. 129) Diz-se que duas grandezas são inversamente proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$ que associa a cada valor x de uma delas um valor bem definido y da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:*

1) *Quanto maior for x, menor será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x' \Rightarrow y' < y$.*

2) *Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dividido por dois, por três, etc. Em linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto \frac{y}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Assim, dizer que y é inversamente proporcional a x equivale a dizer que y é proporcional a $\frac{1}{x}$. Segue-se então do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que se y é inversamente proporcional a x então tem-se $y = \frac{a}{x}$, onde o fator de proporcionalidade a é o valor de y que corresponde a $x = 1$.

Definição 2.4. *(LIMA, 2012, p. 129) Suponhamos que a grandeza y seja função da grandeza x, isto é, $y = f(x)$. Diremos que y é **diretamente proporcional** a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

1º) *y é uma função crescente de x;*

2º) *se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também fica multiplicado por n. Em termos matemáticos: $f(n.x) = n.f(x)$ para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}$.*

Analogamente, temos a definição a seguir:

Definição 2.5. *(LIMA, 2012, p. 130) Diz-se que y é **inversamente proporcional** a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

1º) *$y = f(x)$ é uma função decrescente de x;*

2º) *se multiplicar x por um número natural n, o valor correspondente de y fica dividido por n, isto é, $f(n \cdot x) = \dfrac{1}{n} \cdot f(x)$ para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}$*

Se existissem apenas números racionais, ou seja, se duas grandezas da mesma espécie fossem sempre comensuráveis, então da igualdade $f(nx) = n \cdot f(x)$ válida para todo x e todo $n \in \mathbb{N}$, poderíamos concluir que $y = f(x)$ é uma função crescente e, analogamente, de $f(nx) = \dfrac{f(x)}{n}$ se concluiria que $y = f(x)$ é uma função decrescente. Isto é o que mostraremos agora. Em primeiro lugar, vejamos o lema adiante:

Lema 2.1. *(LIMA, 2012, p. 129) Se $f(n.x) = n \cdot f(x)$ para todo $x > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ para todo número racional $r = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: (LIMA, 2012, p. 129) Temos:

$$q \cdot f(r \cdot x) = f(q \cdot r \cdot x) = f(q \cdot \frac{p}{q} \cdot x) = f(p \cdot x) = p \cdot f(x).$$

Logo, $f(r \cdot x) = \frac{p}{q} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$, como queríamos demonstrar.

Usando o mesmo tipo de raciocínio, pode-se demonstrar que, similarmente, se $f(nx) = f(x = n)$ para todo $x > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$ então $f(rx) = \frac{f(x)}{r}$ para todo número racional $r > 0$.

Em seguida, tentaremos provar que a condição $f(nx) = n \cdot f(x)$ implica que a função $y = f(x)$ é crescente. Para isto, consideremos $x < x'$. Então $x' = c \cdot x$ onde $c > 1$. Se o número c fosse racional (ou seja, se as grandezas x e x' fossem comensuráveis), teríamos $f(x') = f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ e daí $f(x) < f(x')$ porque $c > 1$. Entretanto, pode ocorrer que c seja irracional (por exemplo, x pode ser o lado e x' a diagonal de um quadrado) e então não podemos utilizar o lema 2.1.

Teorema 2.2. *(LIMA, 2012, p. 129) As seguintes afirmações a respeito de $y = f(x)$ são equivalentes:*

1) y é diretamente proporcional a x;

2) para todo número real $c > 0$, tem-se $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$;

3) existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade"entre x e y, tal que $f(x) = k \cdot x$ para todo x.

Demonstração: (LIMA, 2012, p. 129) Provaremos que $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ Para que $(1) \Rightarrow (2)$, suponhamos, por absurdo, que $y = f(x)$ seja diretamente proporcional a x mas que se consiga achar um número real c tal que $f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x)$. Para fixar ideias, seja $f(cx) < cf(x)$ isto é, $f(cx)/f(x) < c$. Entre dois números reais quaisquer existe sempre um número racional. Podemos então achar r racional tal que $f(cx)/f(x) < r < c$, o que significa $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. O lema que provamos anteriormente nos permite reescrever estas desigualdades como $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. Mas a desigualdade $f(cx) < f(rx)$ juntamente com o fato de ser $r < c$, está em contradição com a hipótese de y ser diretamente proporcional a x, e ser, portanto, uma função crescente de x. Analogamente se prova que não pode ser $f(cx) > c \cdot f(x)$. Logo temos $f(cx) = c \cdot f(x)$, o que mostra que $(1) \Rightarrow (2)$.

Para provar que $(2) \Rightarrow (3)$, tomemos $k = f(1)$. Então, em virtude da hipótese (2) usada com x em lugar de c, temos $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot k$, logo $f(x) = k \cdot x$.

Finalmente, completamos o ciclo da demonstração provando que $(3) \Rightarrow (1)$. Primeiro relembramos o acordo feito anteriormente: só lidamos com grandezas cujas medidas são números positivos. Logo $k = f(1) > 0$. Então $x < x'$ implica $kx < k \cdot x'$, ou seja, $f(x) < f(x')$, portanto $y = f(x)$ é uma função crescente de x. Além disso, $f(nx) = k \cdot nx = n \cdot kx = n \cdot f(x)$; conclusão: y é diretamente proporcional a x.

Raciocínio análogo ao anterior demonstra o teorema a seguir:

Teorema 2.3. *(LIMA, 2012, p. 130) As seguintes afirmações a respeito de $y = f(x)$ são equivalentes:*

1) y é inversamente proporcional a x;

2) para todo número real c, tem-se $f(cx) = \dfrac{f(x)}{c}$;

3) existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade"entre x e y, tal que $f(x) = \dfrac{k}{x}$ para todo x.

Uma atividade interessante e bastante educativa consiste em esboçar o gráfico da função $y = f(x)$.

No caso de y ser diretamente proporcional a x, temos $y = kx$. Quando y é inversamente proporcional a x, temos $y = \dfrac{k}{x}$. No primeiro caso, o gráfico é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas e no segundo é uma hipérbole.

2.3 Tecnologias Digitais no Ensino de Matemática

O uso de Tecnologias Digitais é um tema que há muito tempo desperta a atenção e o interesse de diversos pesquisadores em Educação Matemática. Esses estudiosos do tema mostram que escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem são influenciados, cada vez mais, pelos recursos da informática. Nesse cenário, insere-se mais um desafio para a escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer.

O trabalho de Silva (2016), intitulado "Algumas Tecnologias de Informação e Comunicação Como Ferramentas Para o Ensino de Matemática", faz uma análise moderada sobre a utilização das tecnologias digitais como forma de melhorar a didática, no que diz respeito às aulas de matemática, possibilitando ao aluno uma melhor visualização dos conceitos estudados. O Autor cita um aumento notável das pesquisas nesta área, realçando a preocupação dos educadores em inserir as tecnologias em suas práticas docentes.

Para Silva (2016), as Tecnologias Digitais representam uma oportunidade de mudança na educação centrada na figura do professor para uma modelo direcionado para a construção de saberes e conhecimentos por parte do próprio aluno.

As razões pelas quais as tecnologias e recursos digitais devem estar presentes no cotidiano das escolas são inúmeras. Dentre elas, temos a necessário promover a alfabetização e o letramento digital, tornando acessíveis as tecnologias e as informações que circulam nos meios digitais e oportunizando a inclusão digital. Essa necessidade de mudança no modelo de ensino predominante no Brasil, é uma realidade descrita na própria BNCC:

> Há que se considerar, ainda, que a cultura digital tem promovido mudanças sociais significativas nas sociedades contemporâneas. Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, tablets e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores. Os jovens têm se engajado cada vez mais como protagonistas da cultura digital, envolvendo-se diretamente em novas formas de interação multimidiática e multimodal e de atuação social em rede, que se realizam de modo cada vez mais ágil (BRASIL, 2017, p. 61).

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) destaca o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao uso crítico e responsável das tecnologias digitais, como destaca a competência geral 5:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2017, p. 9).

Vicente e Paulino (2013), afirmam que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's), são de grande importância para manutenção do ensino e podem ajudar os alunos a vislumbrarem os conteúdos sobre outra óptica, dando-lhes novos sentidos e ampliando a sua imaginação:

> Mas é sobretudo, na disciplina de Matemática que as TIC têm ajudado e funcionado como alavanca e motor de aprofundamento de conhecimentos, de sistematização de noções e conteúdos, de desenvolvimento da capacidade de observação, comunicação e investigação matemática, contribuindo para despertar e estimular para a disciplina, olhar para a Matemática como uma disciplina atrativa, interessante e necessária desfazendo a ideia de que a matemática é uma disciplina de sucesso, só para alguns alunos. E os professores de Matemática têm sido, sem dúvida, os impulsionadores deste trabalho (VICENTE; PAULINO, 2013, p. 2).

Assim como Vicente e Paulino (2013), para Bacich, Neto e Trevisani (2015) o emprego das tecnologias digitais no educação é válido, uma vez que:

> Crianças e jovens estão cada vez mais conectadas às tecnologias digitais, configurando-se como uma geração que estabelece novas relações com o

> conhecimento e que, portanto, requer que transformações aconteçam na escola (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015, p. 47).

Segundo Bacich, Neto e Trevisani (2015) o emprego de Tecnologias Digitais no contexto escolar proporciona inúmeras possibilidades para trabalhos educacionais mais significativos para o professor e seus alunos e, se bem utilizadas pela escola apresentam-se como excelente oportunidade para que o aluno possa aprender mais e melhor. A utilização de vídeos educativos permite que conceitos, figuras, relações, gráficos sejam apresentados de forma atrativa e dinâmica. Uma vez que, o ritmo e a cores, apresentadas nos vídeos, são fatores estéticos importantes para captar o interesse do aluno. Além disso, esse tipo de recurso possibilita uma observação mais completa e detalhada na medida em que permite pausar a imagem, voltar, rever ou antecipar.

Assim, propõe-se que o ensino de Matemática possa aproveitar ao máximo os recursos tecnológicos, tanto pela sua receptividade social como para melhorar a linguagem expressiva e comunicativa dos alunos.

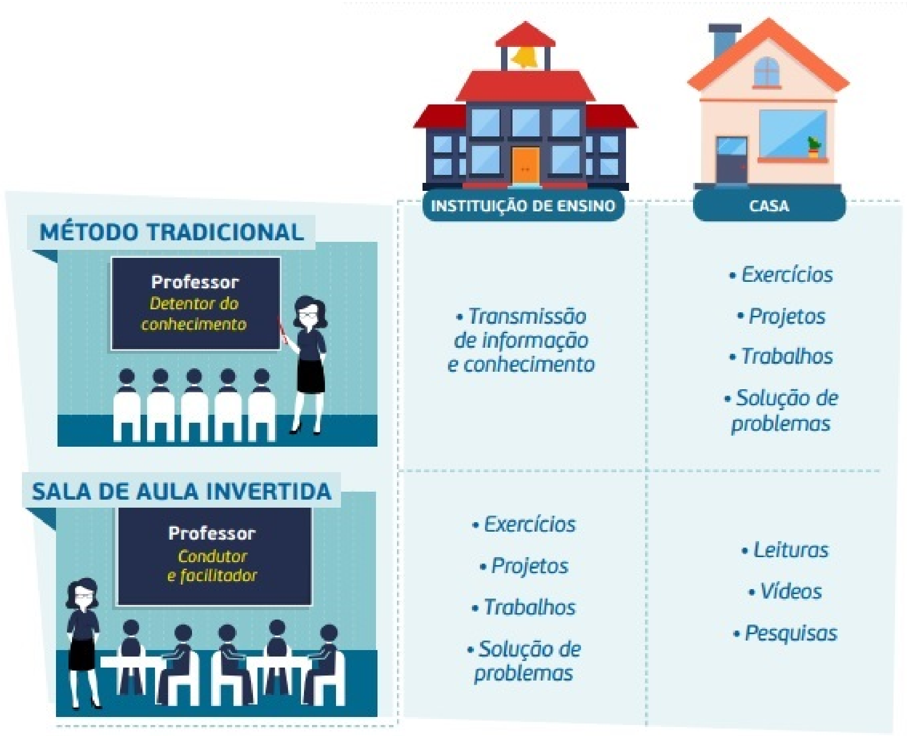
2.4 A Sala de Aula Invertida

A sala de aula invertida é uma metodologia de ensino híbrido que inverte o processo de aprendizagem tradicional do aluno: a aquisição do conhecimento não acontece apenas em aulas expositivas na escola, mas também fora dela, com a ajuda de recursos tecnológicos. Antes da aula, o estudante pode ter contato com o conteúdo em casa. Assim, o tempo na escola é usado para aprofundar conceitos, tirar dúvidas e realizar exercícios e atividades práticas. Conforme Bacich e Moran (2015):

> Na sala de aula invertida a teoria é estudada em casa, no formato on-line, por meio de leituras e vídeos, enquanto o espaço da sala de aula é utilizado para discussões, resolução de atividades, entre outras propostas. No entanto, podemos considerar algumas maneiras de aprimorar esse modelo, envolvendo a descoberta, a experimentação, como proposta inicial para os estudantes, ou seja, oferecer possibilidades de interação com o fenômeno antes do estudo da teoria. Diversos estudos têm demonstrado que os estudantes constroem sua visão sobre o mundo ativando conhecimentos prévios e integrando as novas informações com as estruturas cognitivas já existentes para que possam, então, pensar criticamente sobre os conteúdos ensinados. Essas pesquisas também indicam que os alunos desenvolvem habilidades de pensamento crítico e têm uma melhor compreensão conceitual sobre uma ideia quando exploram um domínio primeiro e, a partir disso, têm contato com uma forma clássica de instrução, como uma palestra, um vídeo ou a leitura de um texto (BACICH; MORAN, 2015, p. 46).

Assim, para a melhor fixação dos conceitos e informações apresentadas na disciplina, é necessário que o aluno reserve um tempo para estudar o conteúdo antes da aula presencial. Na Figura 6 é apresentado um modelo de funcionamento da SAI.

Figura 6 – Funcionamento da Sala de Aula Invertida



Fonte: (REVISTA ENSINO INOVATIVO, 2015, p. 16)

Dessa forma, através desta metodologia de ensino o aluno também se responsabiliza pelo seu próprio aprendizado. Uma vez que ao assistir os vídeos, ele pode pausar e repetir o conteúdo de acordo com seu ritmo e compreensão. Os estudantes que aprenderam rapidamente podem otimizar o seu tempo fazendo mais exercícios. Na sala de aula, os professores atendem os alunos de forma individual e em grupo, transformando a aula em uma conversa, mudando o layout tradicional das cadeiras enfileiradas. Os vídeos também ajudam quem precisou faltar e precisa de aulas de reposição.

Nesse sentido, de acordo com Bacich e Moran (2018), o emprego das TIDC's, sobretudo na educação, é importante, pois:

> Na abordagem da sala de aula invertida, o conteúdo e as instruções recebidas são estudados on-line, antes de o aluno frequentar a aula, usando as TDIC, mais especificamente, os ambientes virtuais de aprendizagem. A sala de aula torna-se o lugar de trabalhar os conteúdos já estudados, realizando atividades práticas como resolução de problemas e projetos, discussão em grupo e laboratórios (BACICH; MORAN, 2018, p. 78).

Assim, equipamentos como o computador, o tablet e o smartphone no ambiente educacional atuam como pontes entre o espaço escolar e os lares dos estudantes ampliando os momentos de estudo. Dessa forma, de acordo com Bergmann e Sams (2020), o tempo na sala de aula é totalmente reestruturado. Uma vez que, a partir da metodologia da SAI os alunos serão capazes de fazer perguntas sobre o conteúdo que foi transmitido pelo vídeo, ainda nos primeiros momentos da aula. Desse modo, é possível esclarecer os equívocos antes que sejam cometidos novos erros. Sendo assim, o professor pode dedicar o resto do tempo para desenvolver atividades mais extensas e/ou solução de problemas.

Portanto, a sala de aula presencial torna-se um espaço de prática e aprendizagem significativa, onde o aluno participa de debates e de atividades, faz exercícios nos quais são retomados os conteúdos estudados por ele previamente, se envolve em descobertas e projetos, troca ideias e experiências

2.4.1 A Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto

De acordo com Brasil (2020), as atividades pedagógicas não presenciais poderão ser utilizadas de forma integral nos casos excepcionais de:

> I - suspensão das atividades letivas presenciais por determinação das autoridades locais; e II - condições sanitárias locais que tragam riscos à segurança das atividades letivas presenciais (BRASIL, 2020, p. 2).

Sendo assim, com a necessidade da adoção de medidas sanitárias, em decorrência do novo Coronavírus e, com a consequente suspensão das atividades presenciais de instituições e redes escolares, públicas e privadas e de todas as modalidades de educação e ensino, o cenário educacional tornou-se extremamente crítico.

De acordo com INEP (2021), o Brasil registrou uma média de 279 dias de suspensão de atividades presenciais durante o ano letivo de 2020, considerando instituições públicas e privadas. Ao longo desse período, o meio mais utilizado para manter contato e oferecer apoio tecnológico junto aos estudantes se deu através de aplicativos de mensagens. No que diz respeito às estratégias e ferramentas para o desenvolvimento das atividades de ensino-aprendizagem, a disponibilização de materiais impressos para retirada na escola aparece entre as mais utilizadas. Além disso, as aulas ao vivo foram implantadas em 31,9% das escolas municipais, mas em 2.142 cidades, nenhuma das escolas municipais adotou essa medida.

Diante disso, é possível observar que as TDIC's passaram a ocupar um papel de destaque ainda maior no processo de ensino-aprendizagem, como forma de mitigar os impactos negativos na educação, durante esse período excepcional.

No município de Campos dos Goytacazes, segundo a pesquisa realizada por Brasil (2020), apenas 8,9% das escolas municipais adotaram a transmissão de aulas ao vivo pela internet, como mostra o Quadro 1:

Em relação ao Ensino Remoto, segundo Brasil (2020):

> Por atividades pedagógicas não presenciais na Educação Básica, entende-se o conjunto de atividades realizadas com mediação tecnológica ou por

Quadro 1 – Percentual de Escolas da Rede Municipal de Ensino de Campos dos Goytacazes-RJ que Adotaram Estratégias de Continuidade das Atividades Pedagógicas Durante a Suspensão das Aulas Presenciais

Estratégias e ferramentas adotadas no desenvolvimento das atividades de ensino-aprendizagem	(%)
1) Treinamento junto aos pais e alunos para uso de métodos/materiais dos programas de ensino não presencial	10
2) Disponibilização de materiais de ensino-aprendizagem impressos (livros didáticos impressos, apostilas, atividades em folha etc.) para retirada na escola pelos alunos ou responsáveis e/ou entrega em domicílio	95
3) Disponibilização de materiais de ensino-aprendizagem na internet (vídeos, podcasts, publicações em redes sociais, plataformas virtuais, aplicativos para celular)	56,7
4) Realização de aulas ao vivo (síncronas) mediadas pela internet e com possibilidade de interação direta entre os alunos e o professor	18,3
5) Transmissão de aulas ao vivo (síncronas) por TV ou rádio	7,2
6) Transmissão de aulas ao vivo (síncronas) pela internet	8,9
7) Transmissão de aulas previamente gravadas (assíncronas) por TV ou rádio	17,8
8) Disponibilização de aulas previamente gravadas (assíncronas) pela internet	25,6
9) Realização de avaliações e testes, remotamente, pela internet ou com envio / devolução de material físico	30
10) Suporte aos alunos, seus pais ou responsáveis para a elaboração e o desenvolvimento de planos de estudos / estudos dirigidos	27,8
11) Atendimento virtual ou presencial escalonado com os alunos, seus pais ou responsáveis	33,3
12) Nenhuma das opções selecionadas	1,7

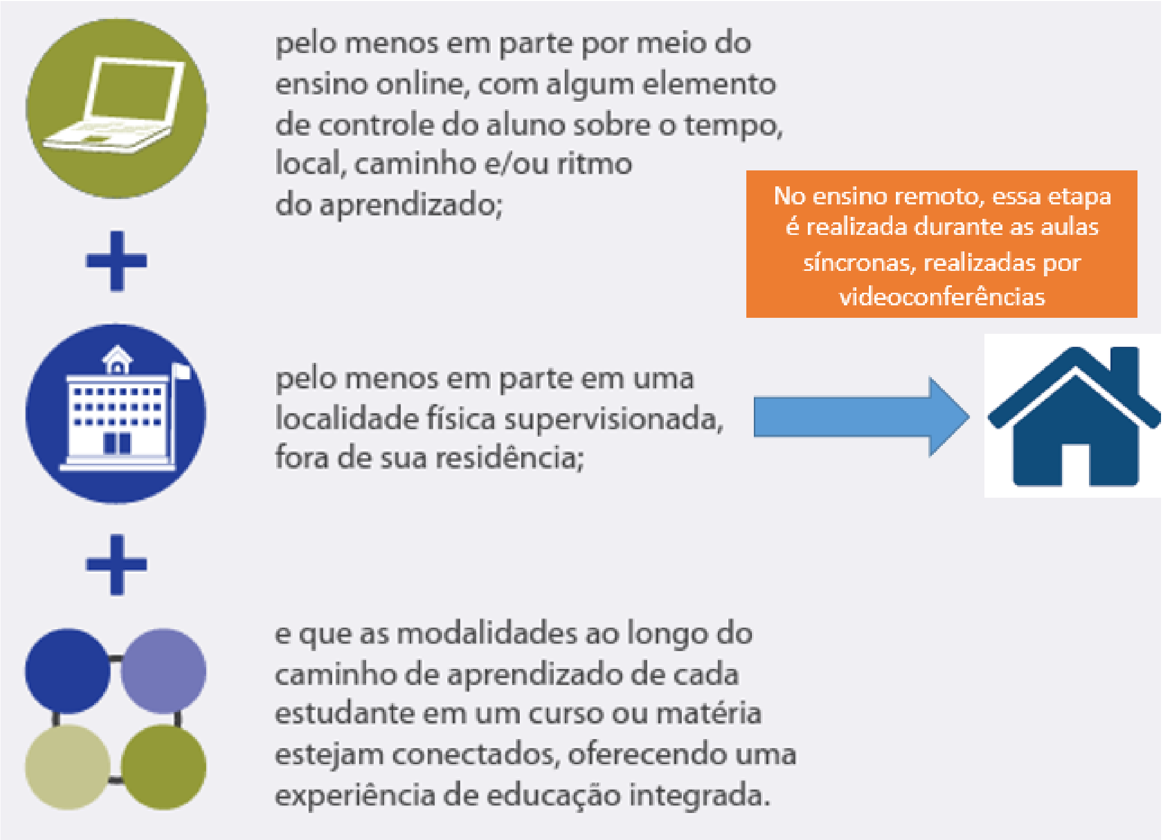
Fonte: Elaboração Próprio com Base nos Dados de (INEP, 2021)

> outros meios, a fim de garantir atendimento escolar essencial durante o período de restrições de presença física de estudantes na unidade educacional (BRASIL, 2020, p. 10).

Sendo assim, as práticas pedagógicas e a metodologia de ensino-aprendizagem adotada pelos professores também devem se adaptar à nova realidade educacional. Nesse sentido, mediante ao cenário de isolamento social, o Ensino Híbrido apresenta-se como uma alternativa ao Ensino Tradicional. Diante isso, este trabalho propõe a flexibilização do Ensino Híbrido em dois momentos, visando adaptar a SAI ao Ensino Remoto. Nesta abordagem, a aprendizagem assíncrona se dará com a disponibilização de videoaulas e exercícios na Plataforma Khan Academy e a aprendizagem síncrona, por meio de encontros remotos, através de uma plataforma de videoconferência. A figura Figura 7, mostra essa adaptação em relação a estrutura do Ensino Híbrido, conforme Christensen, Horn e Staker (2013).

Com essa adaptação, as vantagens trazidas pela SAI, discutidas anteriormente

Figura 7 – Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto



Fonte: Adaptado de (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2013, p. 8)

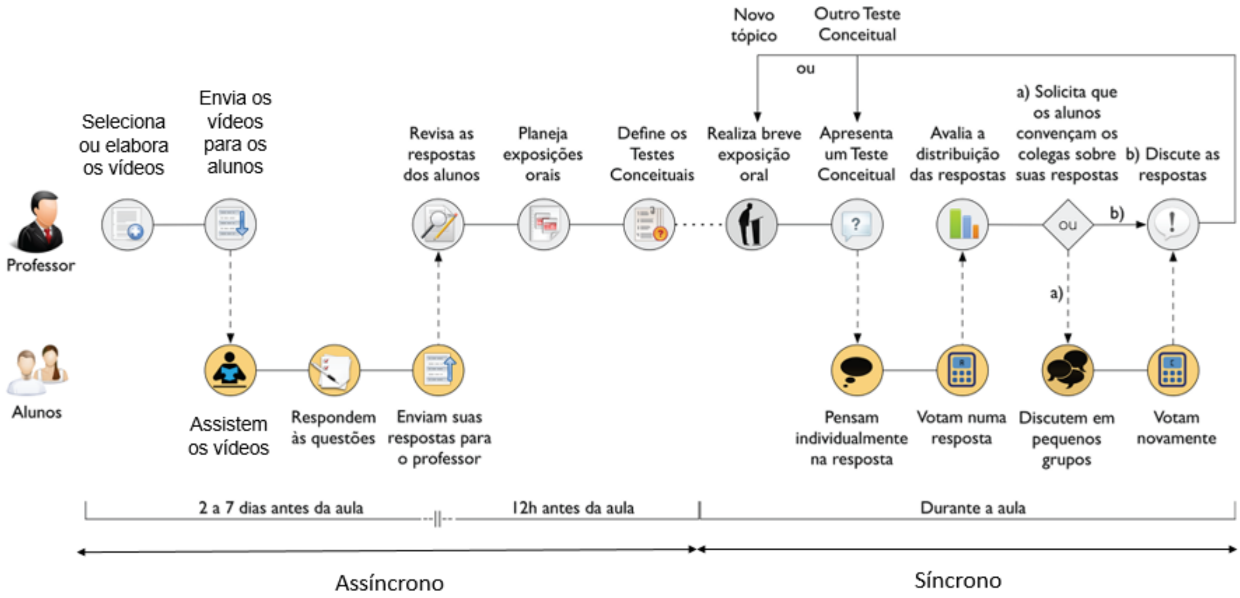
tornam-se ainda mais relevantes ao adotar essa estratégia durante o Ensino Remoto. São elas:

- Potencialização do uso das TDIC’s no espaço educacional;
- O Ensino Remoto fica mais dinâmico, possibilitando um acesso mais flexível ao conteúdo;
- O aluno tem a oportunidade de escolher onde, e quando, é o melhor momento para acessar e estudar o material disponibilizado pelo professor;
- O Professor pode gerenciar diversas atividades, além de avaliá-las de forma mais rápida;

Na Figura 8, temos um modelo das etapas do funcionamento da SAI adaptada ao ensino remoto.

A próxima subseção tem o objetivo de apresentar a Plataforma Khan Academy, ambiente virtual de aprendizagem que foi utilizado durante a experimentação desta pesquisa.

Figura 8 – Etapas do Funcionamento da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto



Fonte: Adaptado de (OLIVEIRA; ARAUJO; VEIT, 2016, p. 11)

2.4.2 A Plataforma Khan como recurso tecnológico

Atualmente, para dar suporte ao estudante, seja em sala de aula ou mesmo fora dela, estão disponíveis gratuitamente na internet diversos tipos de ferramentas digitais, entre elas as plataformas adaptativas, para auxiliar o professor a dar mais autonomia aos estudantes e a personalizar o processo de ensino e aprendizagem. Essas plataformas propõem atividades sob medida para o estudante, levando em consideração as respostas dadas por ele ao completar uma determinada tarefa na plataforma, ou seja, o próprio sistema detecta as dificuldades do estudante e de forma automática propõe exercícios a fim de superá-las.

Bacich, Neto e Trevisani (2015) destacam que a tecnologia tem papel fundamental para promover ao professor ferramentas on-line que possibilitem diversificar e melhorar o processo de ensino aprendizagem e:

> Algumas delas, como a Khan Academy, permitem ao aluno aprender matemática assistindo vídeos-aula realizando exercícios e avançando em níveis do conhecimento daquele conteúdo de forma autônoma. Isso libera o professor para avaliar os dados de aprendizagem do estudante produzidos pelo sistema (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015, p. 111).

Dentre elas, destacamos a Khan Academy, que por sua vez trata-se de uma plataforma mundialmente conhecida, de origem norte americana, criada por Salman Khan para atender originalmente dificuldades na disciplina de Matemática, mas, que hoje dispõe de outras disciplinas como Português, História, Geografia, Química, Física e etc.

Segundo Khan (2013), fundador e primeiro docente da Khan Academy, o objetivo da plataforma é oferecer educação gratuita a qualquer pessoa em qualquer lugar. Para ele:

> O velho modelo da sala de aula simplesmente não atende às nossas necessidades em transformação. É uma forma de aprendizagem essencialmente passiva, ao passo que o mundo requer um processamento de informação cada vez mais ativo (KHAN, 2013, p. 9).

A plataforma educacional Khan Academy é um ambiente virtual de ensino e aprendizagem onde o aluno exerce o protagonismo com relação aos seus avanços de aprendizagem. Ela é composta de videoaulas, *games*, textos e exercícios que auxiliam os alunos no aprendizado dos conteúdos escolares, por meio de um ambiente virtual que pode ser acessado de computadores com internet. A plataforma considera o nível e o ritmo de aprendizagem do estudantes, realizando testes de nivelamento, onde o próprio sistema identifica quais habilidades o aluno já possui e quais ele precisa aprimorar, para a partir daí apresentar-lhe exercícios correspondentes a seu ritmo de aprendizagem.

A seguir, apresentaremos brevemente a interface da Plataforma Khan Academy, bem como sua estrutura e funcionamento.

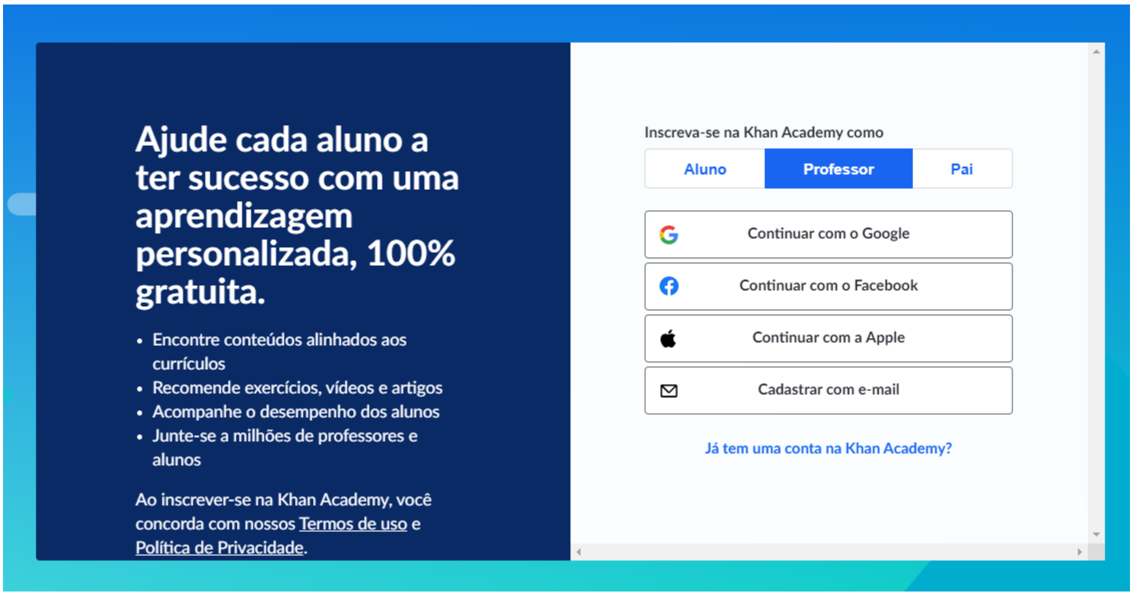
A página inicial da plataforma possui perfil de usuário para alunos, professores e pais, conforme mostra a Figura 9.

Figura 9 – Página Inicial da Plataforma Khan Academy

Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Na Figura 10, por exemplo, temos a tela de inscrição como professor com as opções de login utilizando uma conta do Gmail, Facebook, Apple ou com e-mail, para quem ainda não possui uma conta na Khan Academy.

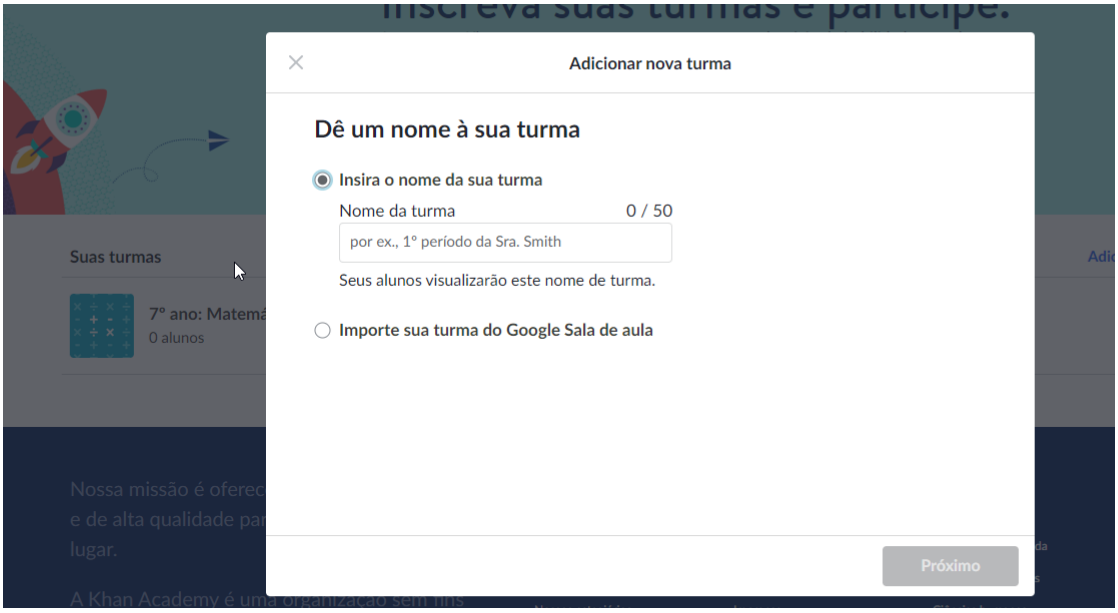
Figura 10 – Tela de inscrição na plataforma Khan Academy como professor



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Após a conclusão do cadastro na plataforma, o docente tem a opção de criar sua turma de alunos ou importar uma turma já existente do Google Sala de aula, conforme mostra a Figura 11.

Figura 11 – Tela de adição de uma nova turma

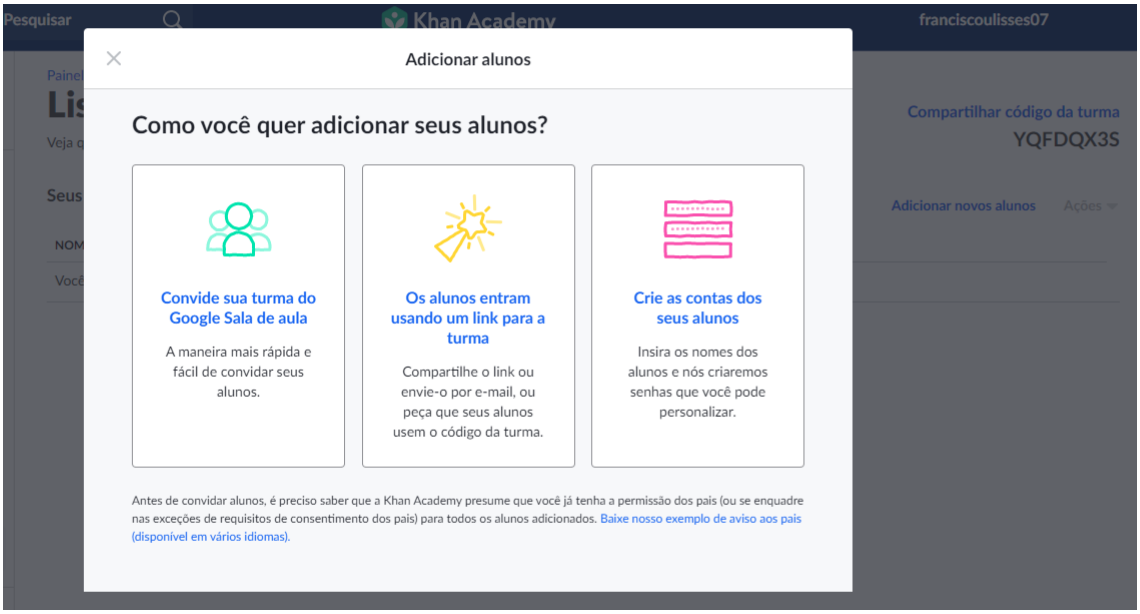


Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Em seguida, o professor precisa adicionar os alunos na sala, o que pode ser feito de três maneiras, conforme a Figura 12.

Na Figura 13, temos o exemplo de uma turma da disciplina de Matemática do 7º ano. A partir daqui o professor pode recomendar conteúdos, vídeos e atividades, de acordo

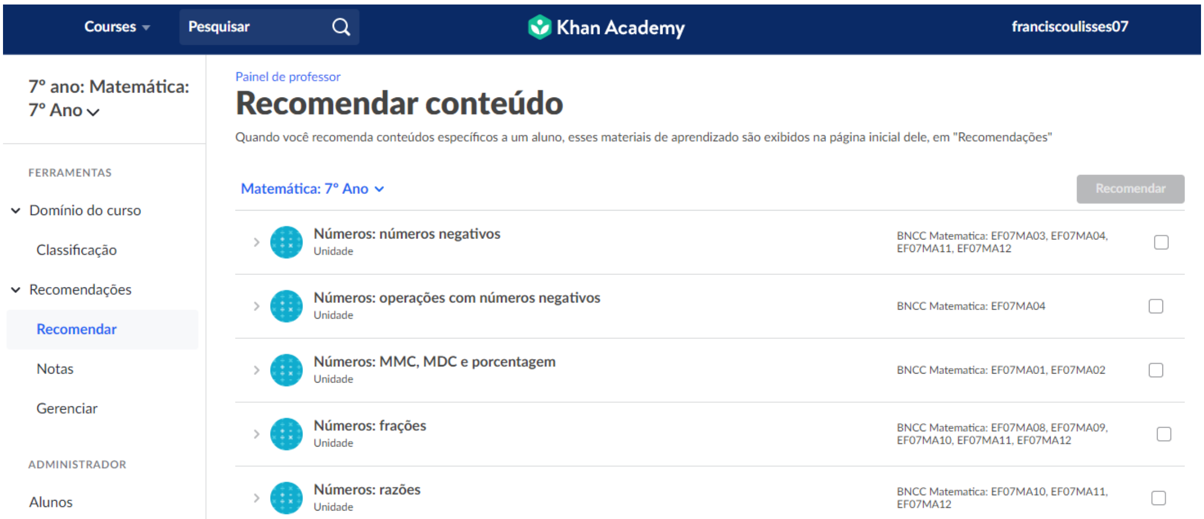
Figura 12 – Tela de adição de alunos na turma



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

com a Base Nacional Comum Curricular e acompanhar em tempo real, aos dados do desempenho e progresso de cada aluno, proporcionando aos alunos um ambiente de estudo mais dinâmico e participativo.

Figura 13 – Tela de recomendação de conteúdos para uma turma do 7º ano



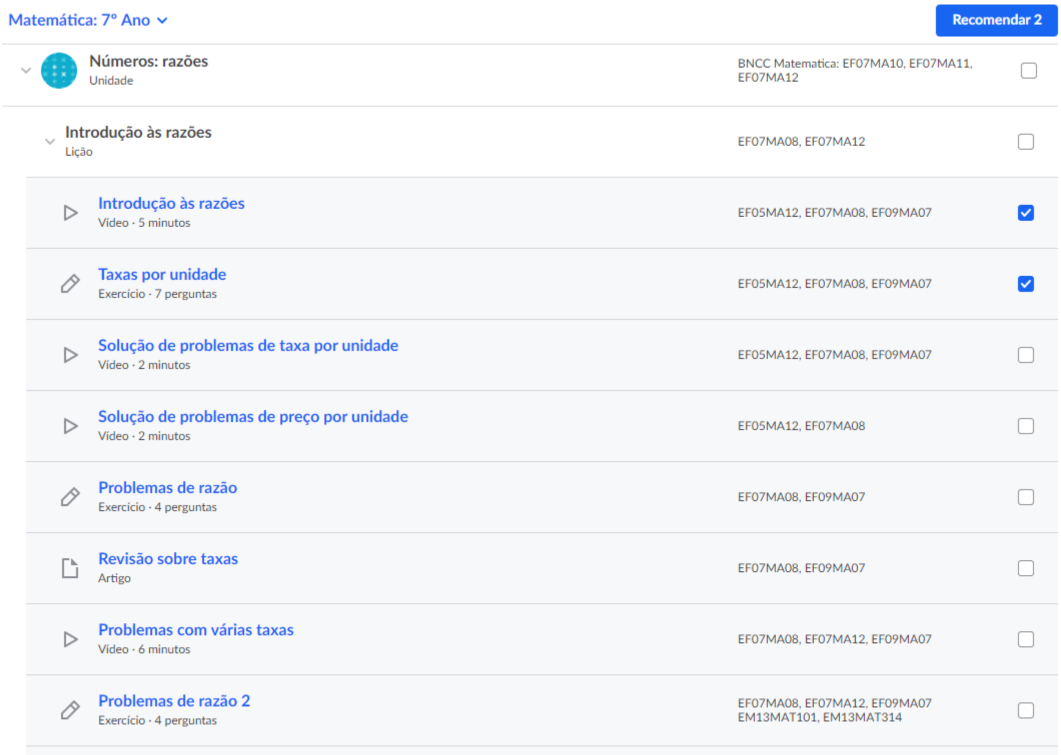
Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

A Figura 14, mostra uma lista de tópicos que podem ser recomendados para o ensino de razão e proporção, através de vídeos e atividades.

Após assistir ao vídeo, conforme a Figura 15, o educando é estimulado a responder um lista para verificar a sua compreensão em relação ao conteúdo trabalhado.

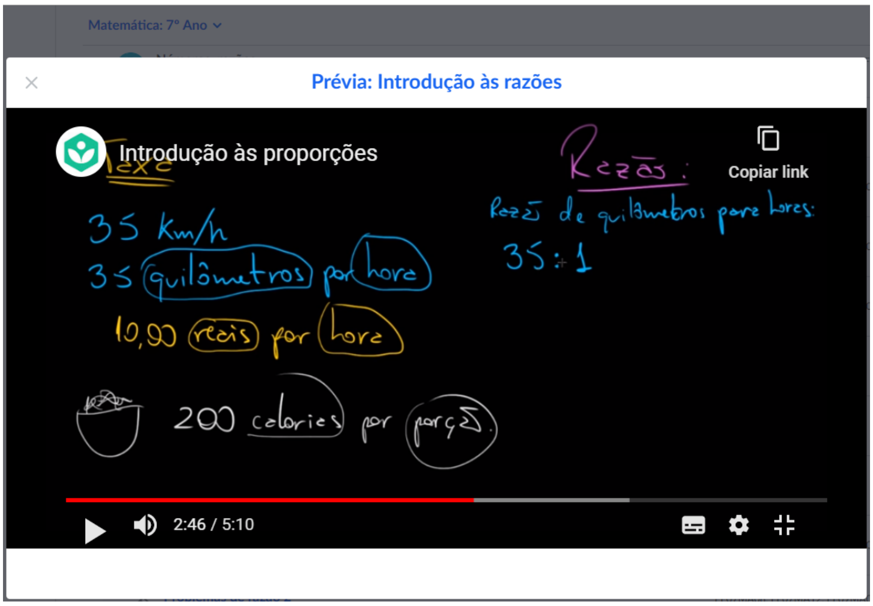
A lista de exercícios é composta por 21 questões, onde a plataforma seleciona 7

Figura 14 – Tela de recomendação do conteúdo de razão e proporção para o 7º ano



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

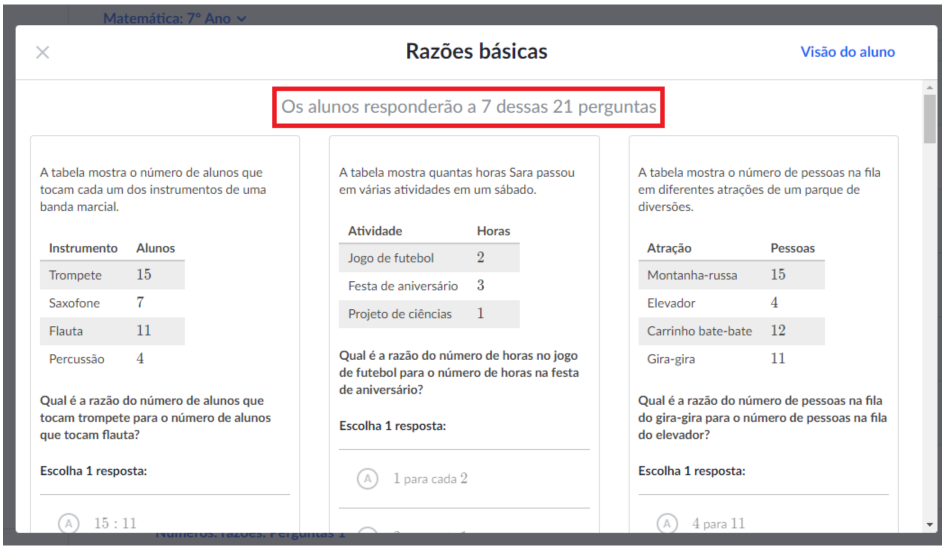
Figura 15 – Vídeo de introdução às razões e proporções para uma turma do 7º ano



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

deles, conforme mostra a Figura 16

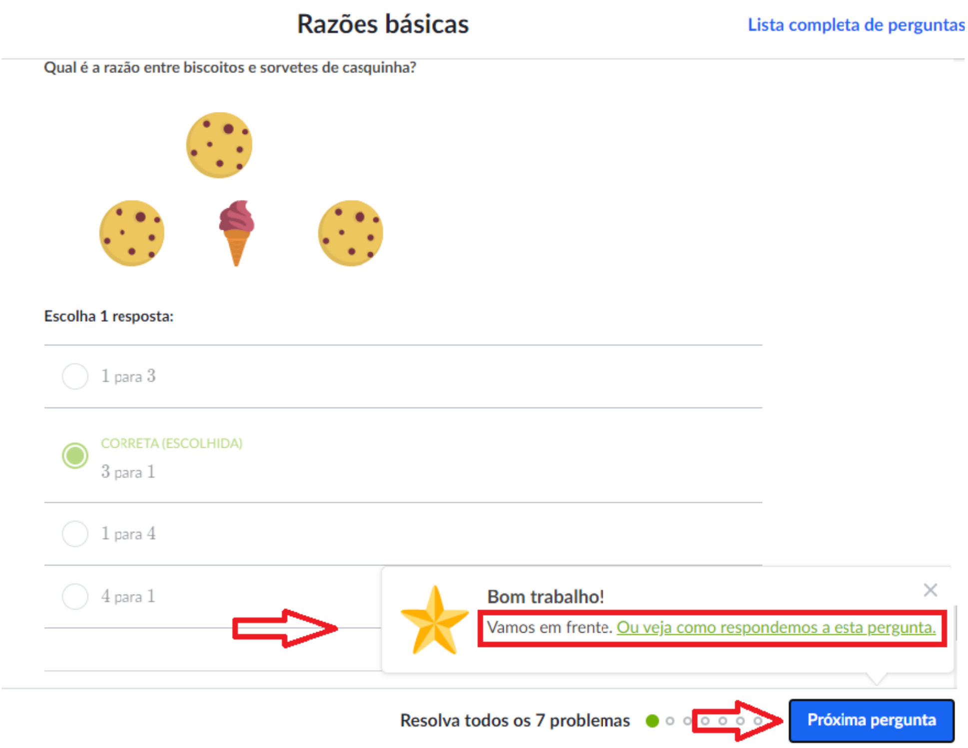
Figura 16 – Lista de exercícios da Plataforma Khan Academy, na visão do professor



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Na Figura 17 temos um exemplo de uma questão a partir da visão do aluno. Ao acertar o exercício o aluno pode seguir para próxima questão ou ver a solução de acordo com a plataforma, caso ainda esteja inseguro quanto a sua resposta.

Figura 17 – Lista de exercícios da Plataforma Khan Academy, na visão do aluno



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

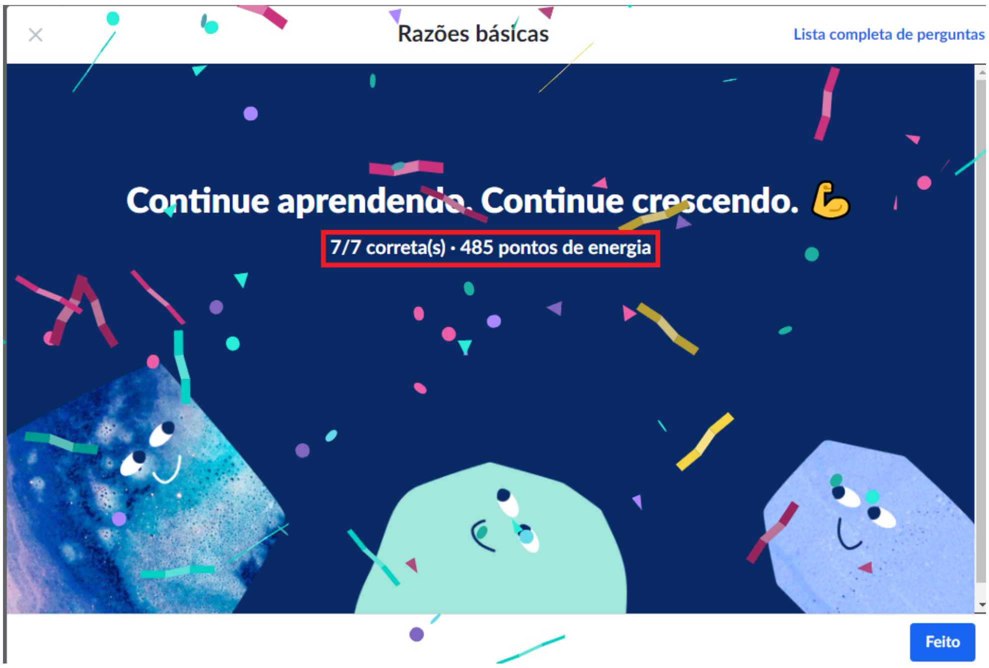
Após concluir todas as questões da lista indicadas pelo professor, conforme mostra a Figura 18, o aluno recebe recompensas de acordo com as atividades realizadas. Essas recompensas vão desde pontos de energia até a conquista de medalhas.

De acordo com o suporte da plataforma, desde vinte e dois de setembro de dois mil e dezessete, os alunos recebem pontos pelas seguintes tarefas de aprendizado:

- Completar os desafios de programação;
- Completar vídeos;
- Pelos vídeos já assistidos;
- Resolver exercícios;
- Completar atividades.

Os pontos de energia servem apenas para medir o esforço do aluno na plataforma Khan Academy, assim, eles ganham mais pontos de energia ao se esforçarem para aumentar seus conhecimentos. Dessa forma, o acúmulo de pontos funciona como um estímulo positivo, pelo tempo dedicado a tentar cumprir as tarefas, seja assistindo vídeos, seja tentando resolver exercícios.

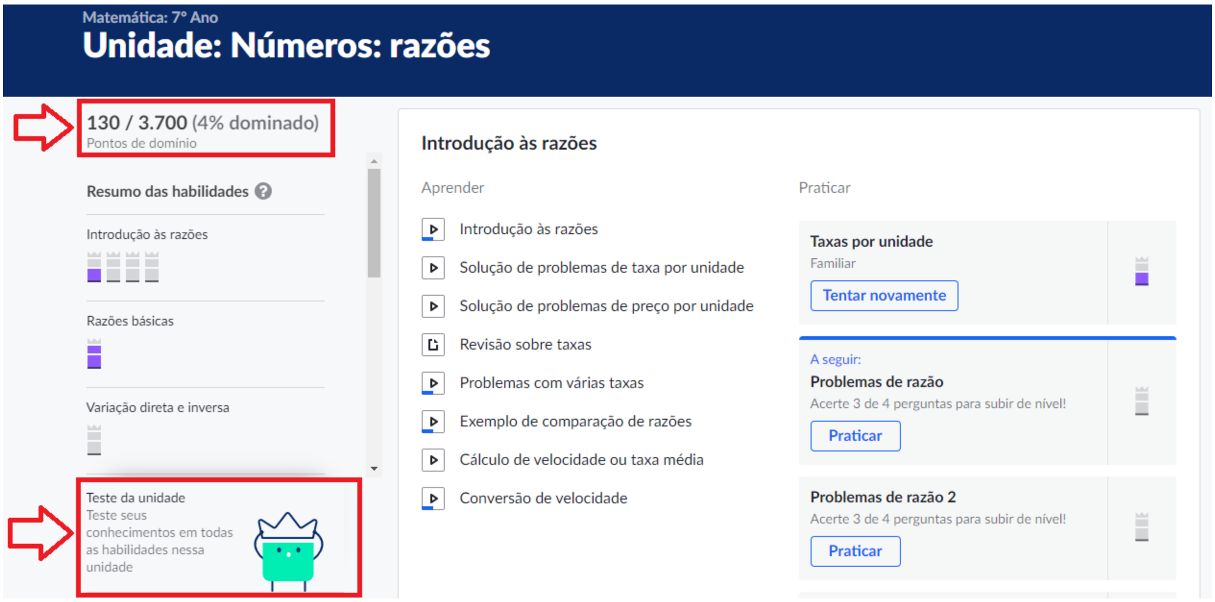
Figura 18 – Mensagem da Plataforma Khan Academy após a conclusão de uma lista de exercícios



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Além disso, o acúmulo de pontos permite uma passagem pelos níveis de domínio. Assim, ao ultrapassar uma determinada quantidade de pontos de energia acumulados, após a conclusão de atividades que servem de pré-requisitos, o aluno é levado ao próximo nível de domínio do conteúdo estudado, conforme mostra a Figura 19.

Figura 19 – Tela de pontos de domínio da Plataforma Khan Academy



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

As medalhas, conforme mostra a Figura 20, são outra forma de recompensa que o aluno ao cumprir um determinados requisitos, que a própria plataforma determina.

Figura 20 – Tela de medalhas da Plataforma Khan Academy

Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

As medalhas podem ser classificadas como:

Medalhas Meteorito: são comuns e fáceis de ganhar quando se está apenas começando.

Medalhas Lua: são medalhas incomuns e representam um bom investimento na aprendizagem.

Medalhas Terra: são prêmios raros e requerem uma quantidade significativa de conhecimento.

Medalhas Sol: para ganhá-las o aluno precisa demonstrar muita dedicação no uso da plataforma.

Medalhas Buraco Negro: são as premiações mais raras da Khan Academy.

Medalhas de Desafios: são prêmios especiais conferidos ao se completar os desafios de tópicos.

Além disso, a Khan Academy também colabora para a prática docente em sala de aula, na medida em que o professor tem a oportunidade de acompanhar o desempenho dos seus alunos e gerenciar o processo de aprendizagem deles, identificando os conteúdos em que estão tendo dificuldades e, a partir disso, propor atividades de forma individualizada a fim de que possam superá-las.

Capítulo 3

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo, são descritos a pesquisa desenvolvida; o perfil socioeconômico dos alunos; a forma de coleta de dados, com as respectivas descrições dos instrumentos utilizados; a elaboração da sequência didática, com as respectivas descrições das atividades desenvolvidas e a justificativa do trabalho.

3.1 Caracterização da Pesquisa

A finalidade desta pesquisa é trazer a investigação de como a utilização da estratégia de ensino denominada Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto, atrelada ao Ensino Híbrido, pode auxiliar no ensino-aprendizagem de proporcionalidade, de uma turma de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma instituição pública do Município de Campos dos Goytacazes - RJ (Figura 21), em um cenário de isolamento social, em que o Ensino Remoto foi instituído nas instituições de ensino.

Para tanto, a presente pesquisa apresenta uma abordagem de aspectos qualitativos e quantitativos, com predominância qualitativa, uma vez que há uma maior preocupação com a reflexão sobre os resultados obtidos em detrimento da representatividade numérica, embora, segundo Creswell (2010), a análise numérica se faça necessária em determinados momentos.

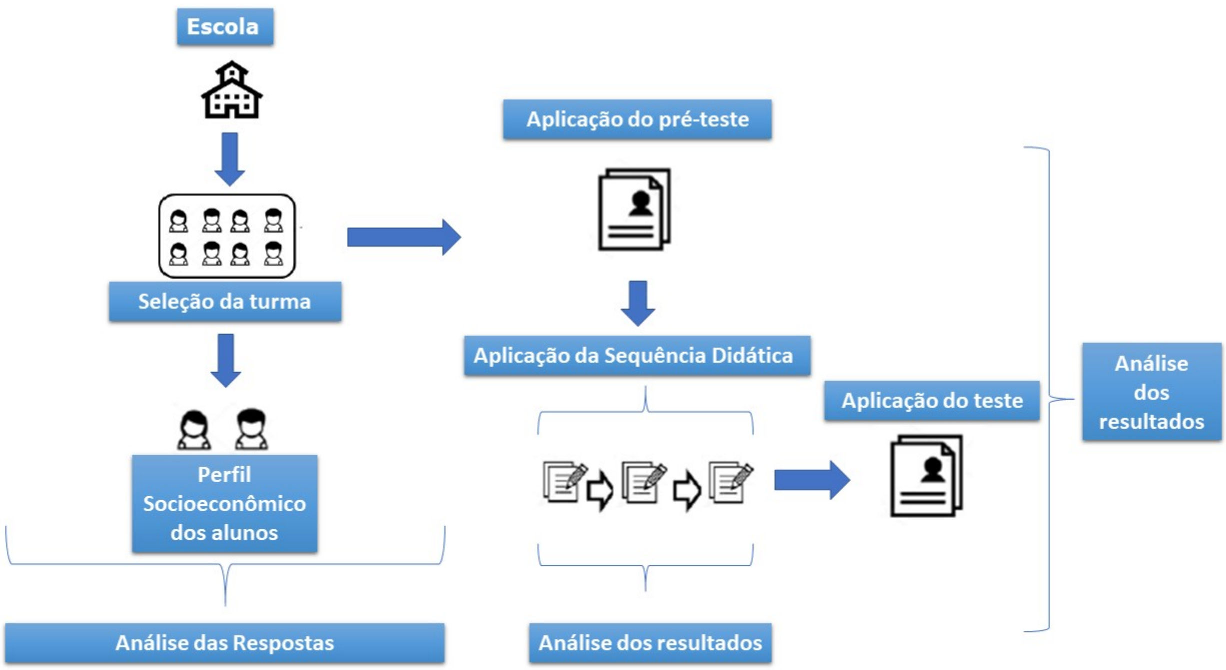
De acordo com Moreira (2002, p. 17), "em termos genéricos, a pesquisa qualitativa pode ser associada à coleta e análise de texto (falado e escrito) e a observação direta do comportamento". Sendo assim, a pesquisa qualitativa é aquela na qual o pesquisador tem interesse em interpretar situação do estudo de forma subjetiva e o interesse se deposita principalmente sobre o processo da pesquisa.

Quanto à natureza, pode-se afirmar que esta pesquisa é aplicada, uma vez que apresenta resultados em relação à implementação da estratégia de ensino Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto, aplicada ao estudo de proporcionalidade. Conforme Gil (2008), a pesquisa aplicada é caracterizada essencialmente pelo interesse na aplicação, utilização e consequências práticas dos conhecimentos.

Além disso, de acordo Gil (2008), ao propor a utilização de uma metodologia de ensino para aperfeiçoar o processo de ensino-aprendizagem, esta pesquisa classifica-se como exploratória em relação aos seus fins, uma vez que seu principal objetivo é aprimorar, esclarecer e modificar conceitos e ideias, para formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis de estudos futuros.

Em relação aos procedimentos, este estudo pode ser classificado como intervenção pedagógica, já que segundo Gil (2010) e Damiani et al. (2013) as pesquisas do tipo intervenção pedagógica são aplicadas, isto é, têm como finalidade contribuir para a solução de problemas práticos. Sendo assim, refere-se à praticas pedagógicas que são planejadas, executadas e avaliadas com o intuito de aperfeiçoar a aprendizagem do estudante.

Figura 21 – Fluxograma básico elaborado para a execução do presente projeto.



Fonte: Elaboração própria

3.2 Os Sujeitos da Pesquisa

A presente pesquisa foi experimentada na Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição, localizada na Praça do Arraial , sem número, em Travessão, distrito do município de Campos dos Goytacazes – RJ. O termo de solicitação para realização das atividades, a autorização da escola para experimentação da pesquisa e o termo de autorização do responsável encontram-se no Apêndice A.

A Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição oferta as seguintes modalidades de ensino: Pré-escola; Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Anos Finais do Ensino Fundamental. A Escola funciona em dois turnos, matutino e vespertino, e possui um total de 464 alunos, distribuídos em 22 turmas.

A estrutura física da escola é modesta: todas as salas são equipadas com quadro branco e ventilador. Além disso, a escola possui uma biblioteca e não dispõe de laboratório de ciências, quadra coberta e um laboratório de informática e, portanto, os alunos não têm acesso direto a computadores no ambiente escolar.

A Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição foi escolhida pela abertura que a direção dá no sentido de incentivar as pesquisas acadêmicas e por já ter sido local de trabalho do pesquisador.

É importante destacar que a aplicação começou em março de 2021 em um cenário de pandemia, onde os estudantes estavam imersos no Ensino Remoto. Uma vez que, diante da pandemia, o Ministério da Educação (MEC) autorizou a substituição das aulas presenciais pelo modelo remoto para as instituições de ensino superior e, posteriormente, para a educação básica. As autorizações, que antes deveriam durar apenas um mês, foram prorrogadas por três vezes. Agora a permissão se estende até 31 de dezembro deste ano.

3.3 Instrumentos Empregados para Coleta de Dados

Foram utilizados nesta pesquisa os seguintes instrumentos: questionário do aluno, pré-teste, aplicação da sequência didática, a observação, feita nas aulas síncronas e o pós-teste, visto que de acordo com Creswell (2010) em pesquisas do tipo mista:

> A coleta de dados também envolve a obtenção tanto de informações numéricas (por exemplo, em instrumentos) como de informações de texto (por exemplo, em entrevistas), de forma que o banco de dados final represente tanto informações quantitativas como qualitativas (CRESWELL, 2010, p. 35).

Os instrumentos empregados têm como objetivo otimizar a coleta de dados e, com isso, acredita-se, aumentar a validade dos resultados obtidos, uma vez que, segundo Gerhardt e Silveira (2009, p. 68), "A coleta de dados é a busca por informações para a elucidação do fenômeno ou fato que o pesquisador quer desvendar."

Em relação à observação, Gil (2008) afirma que ela é um elemento fundamental para a pesquisa e dever estar presente:

> Desde a formulação do problema, passando pela construção de hipóteses, coleta, análise e interpretação dos dados, a observação desempenha papel imprescindível no processo de pesquisa. É, todavia, na fase de coleta de dados que o seu papel se torna mais evidente. A observação é sempre

> utilizada nessa etapa, conjugada a outras técnicas ou utilizada de forma exclusiva.(GIL, 2008, p. 100)

Além disso, na concepção de Gerhardt e Silveira (2009, p. 74) a observação enquanto técnica de coleta de dados "consiste em ver, ouvir e examinar os fatos, os fenômenos que se pretende investigar". Portanto, a técnica da observação realiza um importante papel no contexto da descoberta e exige que o investigador a tenha um contato mais próximo com o objeto de estudo.

Assim, a observação foi utilizada ao longo das aulas síncronas e na correção das atividades, para avaliar a participação, compreensão e possíveis dificuldades por parte dos alunos.

Adiante, são descritos os instrumentos empregados para a coleta de dados da presente pesquisa, os quais constituem o Apêndice B deste trabalho.

Questionário do Aluno: Foi elaborado um questionário destinado aos alunos, a fim de obter dados sobre a identificação dos mesmos e a utilização de tecnologias na educação. Os questionários foram aplicados pelo pesquisador através do Google Formulários, com o intuito de obter informações socioeconômicas importantes para a caracterização do público-alvo da pesquisa. Pretendia-se também analisar o posicionamento dos alunos diante dos recursos tecnológicos, como *smartphones* e computadores.

Pré-teste: Foi elaborado um Pré-teste com 7 questões discursivas, extraídas da obra de Dante (2018). O Pré-teste foi disponibilizado em PDF e enviado através do *WhatsApp*. Os alunos não foram auxiliados enquanto tentavam resolver as questões. A aplicação do pré-teste teve como finalidade averiguar os conhecimentos dos alunos em relação ao conceito de razão, para melhor caracterizar o público-alvo da pesquisa e direcionar ações a serem colocadas em prática durante a sequência didática.

Sequência Didática: A sequência didática elaborada, teve como objetivo principal trabalhar proporcionalidade com os alunos, de forma diferenciada da abordagem tradicional da aula expositiva, utilizando, para isso, os vídeos contextualizados da Plataforma Khan, os quais, inegavelmente, são capazes de fugir da estrutura das aulas tradicionais. Durante a aplicação da sequência didática, o pesquisador auxiliou os alunos na resolução das atividades.

Pós-teste: Foi elaborado um Pós-teste com 15 questões (discursivas e objetivas), buscando mensurar a apreensão dos conteúdos trabalhados com os alunos durante a sequência didática. Os alunos não foram auxiliados enquanto tentavam resolver as questões.

Questionário Final: Foi elaborado um questionário investigativo, objetivando sondar os alunos quanto a diferentes aspectos do presente trabalho, tais como: os benefícios da utilização da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto como estratégia de ensino-aprendizagem de proporcionalidade; a Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto dinamizou o processo de ensino-aprendizagem durante o Ensino Remoto; o posicionamento dos mesmos quanto ao estudo dos conteúdos antes dos encontros síncronos; se as videoaulas e as atividades semanais realizadas na Plataforma Khan contribuíram para a compreensão do assunto estudado; ao assistir aos vídeos o aluno fez uso do recurso "pausar"e "assistir novamente".

Além disso, no Quadro 2 são apresentadas as datas de aplicações dos instrumentos de coleta de dados, bem como o número de participantes.

Quadro 2 – Ficha técnica dos instrumentos empregados na presente pesquisa

Atividades	Alunos Participantes	Datas das Aplicações
Questionário do aluno	6	02/03/2021
Pré-teste	6	09/03/2021
Sequência didática	6	16/03/2021
		23/03/2021
		30/03/2021
		06/04/2021
		13/04/2021
		20/04/2021
		27/02/2021
Pós-teste	6	04/05/2021
Questionário final	6	04/05/2021

Fonte: Elaboração própria

3.4 Etapas da Pesquisa

A fim de investigar os efeitos da utilização da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto no processo de ensino-aprendizagem de Proporcionalidade para os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, a presente pesquisa foi dividida em sete etapas:

Revisão Bibliográfica:

- Sobre a história e teoria da Proporcionalidade, dificuldades no processo de ensino-aprendizagem desse assunto e sobre a presença desse conteúdo nos Documentos Oficiais, objetivando atualização quanto ao tema abordado.

- Sobre a presença das TDIC's na Educação, sobre o Ensino Híbrido, dando ênfase à metodologia da Sala de Aula Invertida. Além de, reunir informações a respeito do Ensino Remoto no Brasil durante a pandemia causada pelo novo coronavírus e adaptar a metodologia adotada a esse contexto.

Aplicação do Questionário do Aluno: buscando coletar dados sobre o público-alvo da pesquisa.

Aplicação de um Pré-teste: com o objetivo de sondar os alunos quanto ao domínio de conteúdos relacionados ao tema da pesquisa.

Elaboração e Aplicação da Sequência Didática: trabalhando conteúdos pertinentes ao tema, através da Plataforma Khan Academy com vídeos e atividades contextualizadas.

Aplicação do Pós-teste: buscando mensurar a apreensão dos conceitos trabalhados.

Aplicação do Questionário Final: objetivando sondar o aluno quanto aos benefícios da utilização da Sala de Aula Invertida, de forma adaptada ao ensino remoto, como metodologia de ensino-aprendizado dos conceitos de Proporcionalidade, a aspectos da sequência didática aplicada (aprendizado de proporcionalidade, uso da Plataforma Khan Academy).

Análise dos dados obtidos: Analisar e discutir os resultados obtidos com os instrumentos de coletas de dados.

3.5 Sequência Didática

Esta seção apresenta a Sequência Didática elaborada para experimentação desta pesquisa.

a. Tema: Proporcionalidade.

b. Conteúdos pré-requisitos: Operações com números racionais, razões.

c. Conteúdos abordados: Proporções, grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais, situações de não proporcionalidade, regra de três simples.

d. Habilidades da BNCC: EF07MA17.

e. Tempo de execução: 12 horas.

f. Materias necessários: Para desenvolvimento dessa sequência didática de forma remota, tornou-se necessário a utilização de Internet, de um ambiente virtual de aprendizagem – nesta pesquisa foi utilizada a Plataforma Khan Academy (subseção 2.4.2) – e de um dispositivo eletrônico para acesso. O pesquisador fez uso de notebook (que possui câmera e microfone acoplados), de celular e de mesa digitalizadora.

g. Metodologia de ensino: Ensino Híbrido - Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto. Visando aplicar a metodologia da Sala de Aula Invertida durante o desenvolvimento do Ensino Remoto, o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo aconteceu em dois momentos, a saber:

- **Assíncrono:** disponibilização das videoaulas com o conteúdo e de exercícios de fixação na Plataforma Khan Academy, antes do encontro síncrono, para garantir que os alunos acompanhassem a metodologia de ensino e para provocar o surgimento de dúvidas que seriam posteriormente esclarecidas pelo professor; os alunos tiveram o prazo de uma semana para concluir essas atividades na plataforma.

- **Síncrono:** aulas remotas com o professor utilizando o Hangouts Meet do Google para revisar o conteúdo estudado e esclarecer as dúvidas encontradas pelos alunos. Nas aulas síncronas, os alunos desenvolviam atividades propostas pelo professor e tinham acesso a outros exemplos sobre o conteúdo estudado.

h. Objetivos: Promover o ensino de Proporcionalidade e seus conceitos, possibilitando aplicações em situações cotidianas.

i. Público-alvo: Estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental II, da Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição.

j. Intrumentos avaliativos: Ao longo do desenvolvimento do conteúdo foram aplicadas atividades na Plataforma Khan Academy, para verificar quais etapas do conteúdo ainda não estavam elucidadas para os alunos, visando propiciar o esclarecimento dessas eventuais dificuldades, além de estabelecer estatisticamente o desempenho desses alunos. Além disso, no final da sequência didática, os alunos responderam um pós-teste.

k. Descrição das aulas: O cronograma de desenvolvimento detalhado das aulas está disposto no quadro Quadro 3.

Quadro 3 – Cronograma para Desenvolvimento da Sequência Didática.

DATA	METODOLOGIA	ATIVIDADE	CONTEÚDO	DURAÇÃO
16/03/2021	Síncrona	Apresentação da Metodologia	Ensino Híbrido - Sala de Aula Invertida	1h 40 min
	Assíncrona	Disponibilização do vídeo 1	Introdução às Razões	
		Disponibilização do vídeo 2	Razões básicas	

Quadro 3 – Cronograma para Desenvolvimento da Sequência Didática.

DATA	METODOLOGIA	ATIVIDADE	CONTEÚDO	DURAÇÃO
		Disponibilização do vídeo 3	Exemplo de comparação de razões	
		Exercícios selecionados na plataforma	Razões	
23/03/2021	Síncrona	Aula ao vivo para correção do pré-teste e esclarecimento de dúvidas	Razões	1h 40 min
	Assíncrona	Disponibilização do vídeo 4	Escrita de proporções	
		Disponibilização do vídeo 5	Resolução de proporções	
		Exercícios selecionados na plataforma	Proporções	
30/03/2021	Síncrona	Aula ao vivo para correção dos exercícios e esclarecimento de dúvidas	Proporções	1h 40 min
	Assíncrona	Disponibilização do vídeo 6	Problemas envolvendo proporções	
		Disponibilização do vídeo 7		
		Disponibilização do vídeo 8		
		Disponibilização do vídeo 9		
		Exercícios selecionados na plataforma	Relações proporcionais	
06/04/2021	Síncrona	Aula ao vivo para correção dos exercícios e esclarecimento de dúvidas	Proporções	1h 40 min
	Assíncrona	Disponibilização do vídeo 10	Grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e situações de não proporcionalidade	
		Disponibilização do vídeo 11		

Quadro 3 – Cronograma para Desenvolvimento da Sequência Didática.

DATA	METODOLOGIA	ATIVIDADE	CONTEÚDO	DURAÇÃO
		Disponibilização do vídeo 12		
		Disponibilização do vídeo 13		
		Exercícios selecionados na plataforma		
13/04/2021	Síncrona	Aula ao vivo para correção dos exercícios e esclarecimentos de dúvidas	Relação de proporcionalidade entre duas grandezas	1h 40 min
	Assíncrona	Disponibilização do vídeo 14	Regra de três simples entre grandezas diretamente proporcionais	
20/04/2021	Síncrona	Aula ao vivo para correção dos exercícios e esclarecimentos de dúvidas	Regra de três simples entre grandezas diretamente proporcionais	1h 40 min
	Assíncrona	Disponibilização do vídeo 15	Regra de três simples entre grandezas inversamente proporcionais	
27/04/2021	Síncrona	Aula ao vivo para correção dos exercícios e esclarecimentos de dúvidas	Regra de três simples entre grandezas inversamente proporcionais	1h 40 min
		Preparação para o pós-teste	Orientações gerais	

Fonte: Elaboração própria

3.5.1 Seleção das Videoaulas

De acordo com Bergmann e Sams (2020, p. 32), a utilização de vídeos produzidos por outros professores, ao invés de gravar os próprios vídeos, é uma boa opção para quem está começando a inverter a sala de aula, devido à grande quantidade de vídeos de qualidade disponíveis na internet. Além disso, é uma forma de incentivo para que os alunos façam suas próprias buscas on-line de videoaulas interessantes e, assim, assumam uma postura de maior responsabilidade na construção do próprio conhecimento.

No Quadro 4, estão dispostos os vídeos utilizados na metodologia da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto. Foram selecionados, ao todo, quinze videoaulas sobre os conteúdos de Razão e Proporção.

Quadro 4 – Conteúdo, Duração e Endereço Eletrônico das Videoaulas.

VÍDEO	CONTEÚDO	DURAÇÃO	ENDEREÇO ELETRÔNICO
1	Razões	00:04:00	https://youtu.be/Zj8HYLtgsS8
2		00:03:59	https://youtu.be/xc_TXMW0akA
3		00:03:52	https://youtu.be/e7QznLVCsxg
4	Proporções	00:05:50	https://youtu.be/ACv2Am_EcJ0
5		00:07:22	https://youtu.be/mP0L1tQBsqc
6	Problemas Envolvendo Proporções	00:05:51	https://youtu.be/561c-ODXpII
7		00:02:47	https://youtu.be/ZqnlPZ-FN54
8		00:02:14	https://youtu.be/wg6mOX3tfDA
9		00:01:17	https://youtu.be/hiA2cxHkIM4
10	Relação de Proporcionalidade Entre Grandezas	00:07:18	https://youtu.be/Bn1xJphOnFA
11		00:03:33	https://youtu.be/kkGHXT7Vrsk
12		00:09:15	https://youtu.be/IluzT6lwwLA
13		00:07:15	https://youtu.be/ozPo5fg1x7U
14	Regra de Três Simples	00:05:20	https://youtu.be/CjizOd2iN7I
15		00:06:42	https://youtu.be/ZrDq-U9IBj8

Fonte: Elaboração própria

O pesquisador buscou utilizar vídeos curtos e contextualizados, sobretudo para tornar o processo de ensino-aprendizagem mais fluido e interessante. Os vídeos foram selecionados na Plataforma Khan Academy e também estão disponíveis no YouTube.

O próximo capítulo narra as vivências e os resultados obtidos ao longo da aplicação desta pesquisa.

Capítulo 4

Experimentação e Análise dos Dados

Este capítulo narra a experimentação da Sequência Didática, trazendo uma análise das situações vivenciadas pelo pesquisado com os alunos e também dos dados coletados ao longo dessa pesquisa através do Questionário do Aluno; do Pré-Teste; da Sequência Didática; do Pós-Teste e do Questionário Final.

4.1 Análise do Questionário do Aluno

O Questionário do Aluno aplicado nesta pesquisa foi elaborado e disponibilizado via Google Forms. Um total de 6 alunos com idade de 12 anos responderam o formulário. Entre os participantes da presente pesquisa, todos os entrevistados disseram possuir smartphone em casa, como é possível observar no Quadro 5. Além disso, todos os alunos afirmaram possuir internet banda larga em casa. A familiaridade dos alunos com aparelhos do tipo smartphone é um ponto positivo para o pesquisador utilizar a tecnologia em sala de aula, pois muitos aplicativos educacionais são produzidos para serem utilizados nestes aparelhos. Trata-se, portanto, inicialmente de um público familiarizado com o uso da internet, mas isto não pressupõe que estejam preparados para o uso correto das plataformas digitais.

Quadro 5 – Respostas do Questionário do Aluno

Respostas do Questionário do Aluno		
1) Você possui computador em casa?	**Sim**	**Não**
	33%	67%
2) Possui smartphone?	**Sim**	**Não**
	100%	0%
3) Você possui tablet?	**Sim**	**Não**
	17%	83%
4) Você possui internet banda larga em casa?	**Sim**	**Não**
	100%	0%

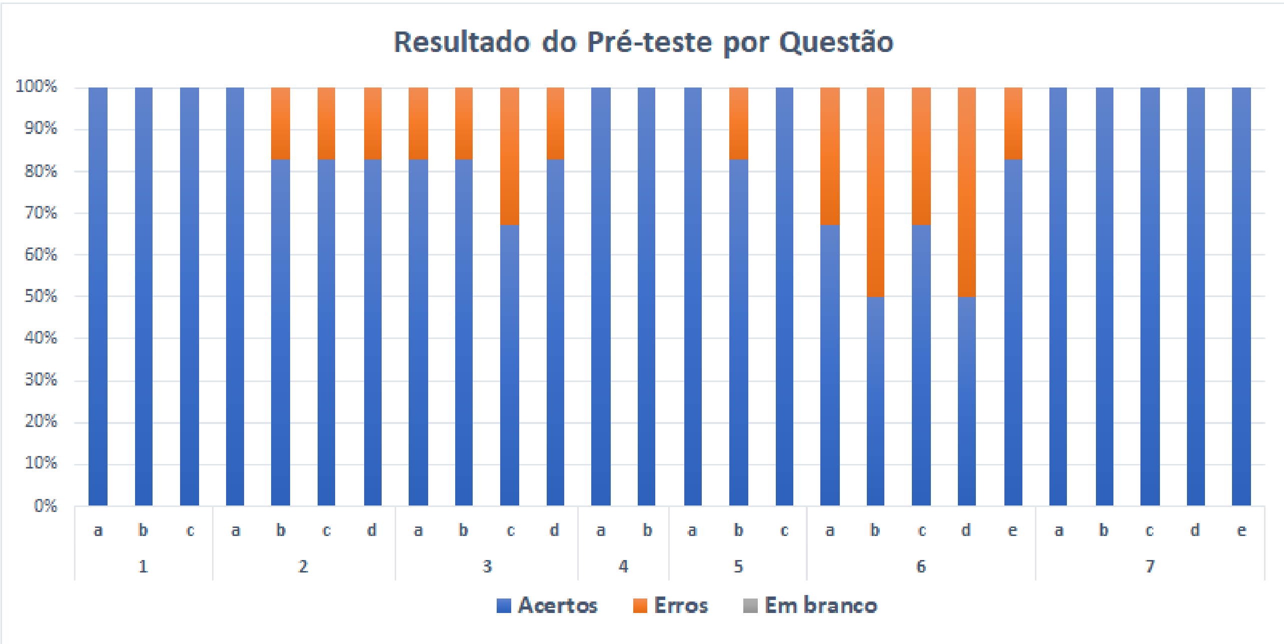
Fonte: Dados da pesquisa

As análises das respostas do questionário do aluno nos permitiram constatar que a maioria não possui computador em casa, mas todos os alunos possuem smartphone e acesso à internet, o que viabiliza a aplicação da metodologia Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto.

4.2 Análise do Pré-teste

No Gráfico 1, são apresentados os percentuais de erros, acertos e questões deixadas em branco pelos seis alunos que responderem o pré-teste. É válido destacar que até a aplicação dessa atividade os alunos não haviam tido aula síncrona do conteúdo e acesso aos vídeos da Plataforma Khan Academy.

Gráfico 1 – Resultados do Pré-teste: percentual de acerto por questão.



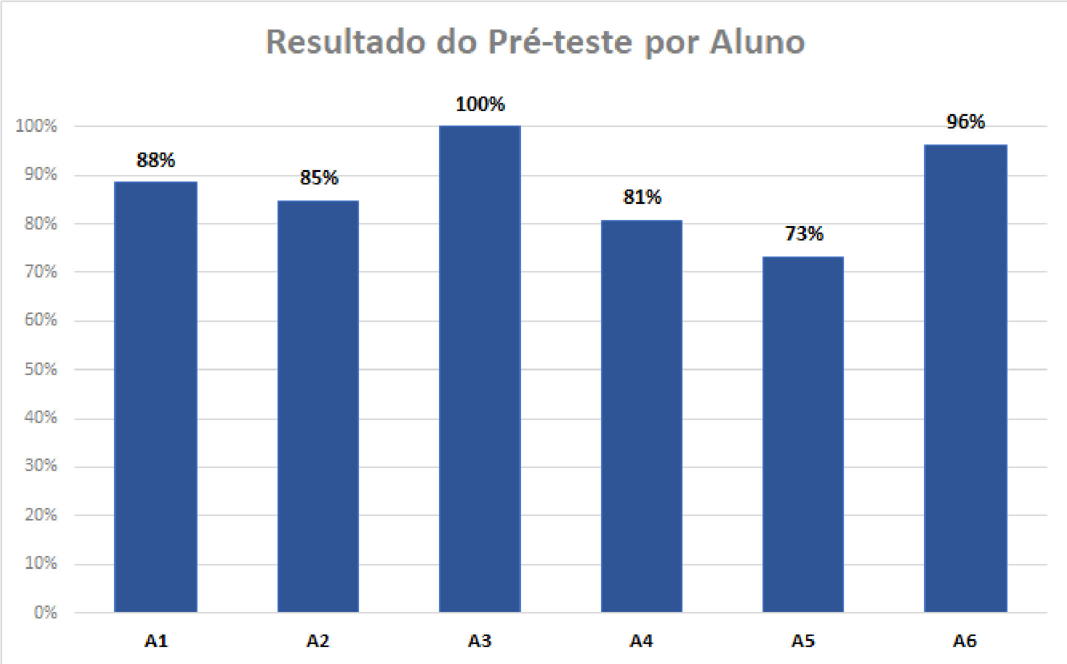
Fonte: Dados da pesquisa

Sendo assim, conforme Bacich, Neto e Trevisani (2015), após a aplicação de uma avaliação diagnóstica o professor pode planejar melhor as suas ações pedagógicas, aplicando atividades de revisão ou reforço antes de aprofundar o conteúdo. Dessa forma, a análise do pré-teste contribui para identificar as dificuldades e o domínio dos conceitos necessários para o desenvolvimento da presente pesquisa.

O Gráfico 2 mostra os resultados dos seis alunos que responderam o Pré-teste. O percentual de acerto médio desses alunos foi cerca de 87% e o desvio padrão em torno da média foi de 10%.

Após a análise das questões do pré-teste, chegou-se às seguintes constatações: a maior partes dos alunos sabem interpretar e escrever uma razão, o que demonstra ser um

Gráfico 2 – Resultados do Pré-teste: percentual de acerto por aluno que realizou a atividade..



Fonte: Dados da pesquisa

ponto positivo para o desenvolvimento da sequência didática, ainda assim, todos os alunos participantes do pré-teste obtiveram um aproveitamento superior a 50%, o que merece se mostra um ponto positivo para aplicação da sequência didática.

4.3 Aplicação da Sequência Didática e Análise dos Dados

No dia 02 de março de 2021, os alunos foram convidados a participar da presente pesquisa e, em seguida, foram apresentados à metodologia de ensino que seria trabalhada: a Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto. Ainda nesta data, foram disponibilizados o questionário do aluno e o termo de autorização do responsável, com data de entrega até o próximo encontro síncrono, a ser realizado no dia 09 de março, data da aplicação do pré-teste. Além disso, os alunos foram informados sobre a dinâmica das aulas durante a experimentação, isto é, do compromisso e autonomia que teriam para acessar o conteúdo disponível nas videoaulas antes da aula presencial para, assim, termos mais tempo para resolução de exercícios e debates em grupos. É válido ressaltar, que toda à aplicação da pesquisa foi realizada de forma remota, através do Google Meet.

Na aula do dia 16 de março de 2021, os alunos foram apresentados a Plataforma Khan Academy e orientados sobre a forma ideal de assistir as videoaulas, sendo instruídos a explorar os recursos de pausar e voltar o vídeo para um melhor entendimento do conteúdo, a fazer anotações no caderno e separar as dúvidas para esclarecer na aula seguinte.

Eles também puderam esclarecer eventuais dúvidas sobre a metodologia de ensino e se mostraram animados com a realização dos encontros ao vivo, visto que de acordo com INEP (2021) no Município de Campos dos Goytacazes o atendimento aos alunos durante à fase de isolamento social se deu majoritariamente através da entrega de apostilas impressas.

Levando em consideração a análise do pré-teste, o pesquisador julgou necessária uma revisão dos conceitos básicos de razões, afim de nivelar o conhecimento dos estudantes para dar continuidade a pesquisa. Assim sendo, ainda no dia 16 de março de 2021, foram recomendadas na Plataforma Khan Academy as três primeiras videoaulas sobre: Introdução às Razões, Razões Básicas e Exemplo de Comparação de Razões. Nesse mesmo dia, o pesquisador disponibilizou uma atividade de verificação de aprendizagem na plataforma, com um prazo de conclusão de uma semana.

As Figura 22 e Figura 23 mostram, respectivamente, a visão da videoaula 1 na plataforma e o resultados obtidos pelos alunos após a realização das atividades recomendadas. É importante destacar que até a aplicação dessa atividade os alunos não haviam tido aula síncrona do conteúdo. Ainda assim, apenas dois alunos não obtiveram um bom desempenho. O aluno A2 afirmou ter realizado a tarefa sem atenção, enquanto o aluno A6 não assistiu uma das videoaulas.

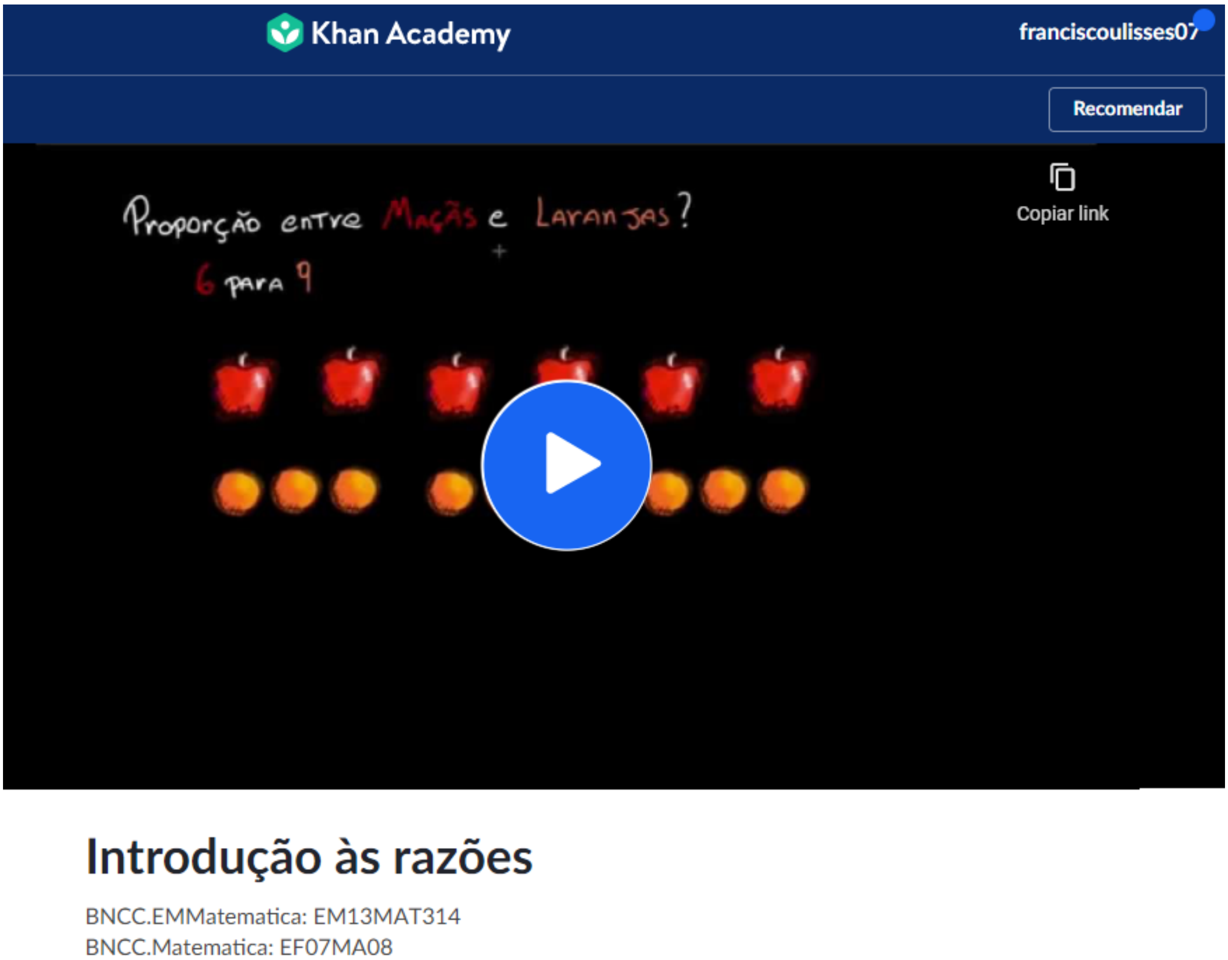
A participação dos alunos na aula síncrona do dia 30 de março foi muito positiva, eles apontaram algumas dificuldades em reconhecer e escrever uma proporção e refletiram sobre os pontos positivos em estudar o conteúdo com antecedência. Segundo eles, dessa forma as aulas se tornam mais atrativas, pois o estudo prévio do conteúdo possibilita uma maior interação no processo de construção do conhecimento. Sendo assim, tais afirmações vão de encontro aos benefícios e potencialidades da implementação da Sala da Aula Invertida, aqui de modo adaptado ao Ensino Remoto, descritos por Bergmann e Sams (2020). Sessenta por cento(60%) dos alunos concluíram integralmente a atividade antes da aula ao vivo, conforme mostra a Figura 24.

Como alguns alunos sinalizaram estar um pouco inseguros em relação ao conteúdo e com dúvidas, foram selecionados exercícios no livro de Dante (2018) do Programa Nacional do Livro Didático(PNLD), para serem discutidos e resolvidos em aula. Após isso, a experimentação continuou seguindo a mesma dinâmica: os vídeos 6, 7, 8 e 9 foram disponibilizados, bem como os exercícios a serem resolvidos até o próximo encontro síncrono.

Na aula do dia 06 de abril de 2021, foram discutidas algumas situações cotidianas que envolvem o pensamento proporcional, além das desenvolvidas nas videoaulas disponibilizadas na semana anterior. O percentual de entrega das atividades permaneceu em 60%. Na Figura 25, temos um exemplo de questão disponibilizada na plataforma Khan.

Em relação a questão apresentada na Figura 25 os alunos demonstraram ter dificul-

Figura 22 – Videoaula 1 na Plataforma Khan Academy.



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

dades em trabalhar com números decimais. Dessa forma, foi necessária uma intervenção por parte do pesquisador através de uma atividade de revisão sobre operações com números decimais. Os alunos afirmaram não lembrar muito bem desse conteúdo, pois segundo eles, este tema foi trabalhado no ano anterior e, devido a pandemia e o Ensino Remoto, desenvolvido apenas através de apostilas impressas, não foi possível compreendê-lo totalmente.

Nesta hora, os estudantes refletiram sobre a importância do papel de um professor no processo de ensino-aprendizagem e as vantagens da utilização da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto, uma vez que, as dúvidas são identificadas e sanadas rapidamente.

Ainda na aula do dia 06 de abril de 2021, foram enviadas as videoaulas da próxima aula: vídeos 10, 11, 12 e 13. De modo que, na aula do dia 13 de abril foram discutidas as relações entre grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e situações de não proporcionalidade.

Figura 23 – Resultado da primeira atividade proposta após os vídeos 1,2 e 3.

ALUNOS	Problemas de razão	Razões básicas	Razões básicas
A1	75	✓	71
A2	50	✓	100
A3	100	✓	100
A4	75	✓	100
A5	75	✓	100
A6	100	-	0
A7	75	✓	100
A8	100	✓	86
A9	100	✓	100
A10	75	✓	71

Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Figura 24 – Resultados da atividade proposta após os vídeos 4 e 5.

ALUNOS	Exemplo de escrita de proporções	Escrevendo proporções	Exemplo prático: Resolução de proporções	Resolução de proporções
A1	✓	100	✓	100
A2	-	-	✓	-
A3	✓	100	✓	100
A4	-	0	-	-
A5	✓	100	✓	57
A6	✓	0	✓	-
A7	✓	100	✓	86
A8	✓	100	✓	86
A9	✓	75	✓	86
A10	-	-	-	-

Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Figura 25 – Questão sobre o reconhecimento de uma relação de proporcionalidade.

Miguel deu uma gorjeta de $\$1{,}32$ para um pedido que custou $\$8{,}80$.

Determine se as gorjetas abaixo são proporcionais à gorjeta dada por Miguel.

	É proporcional à gorjeta dada por Miguel	Não é proporcional à gorjeta dada por Miguel
$\$2{,}22$ de gorjeta para um pedido de $\$14{,}80$		
$\$1{,}86$ de gorjeta para um pedido de $\$10{,}50$		
$\$0{,}78$ de gorjeta para um pedido de $\$5{,}20$		

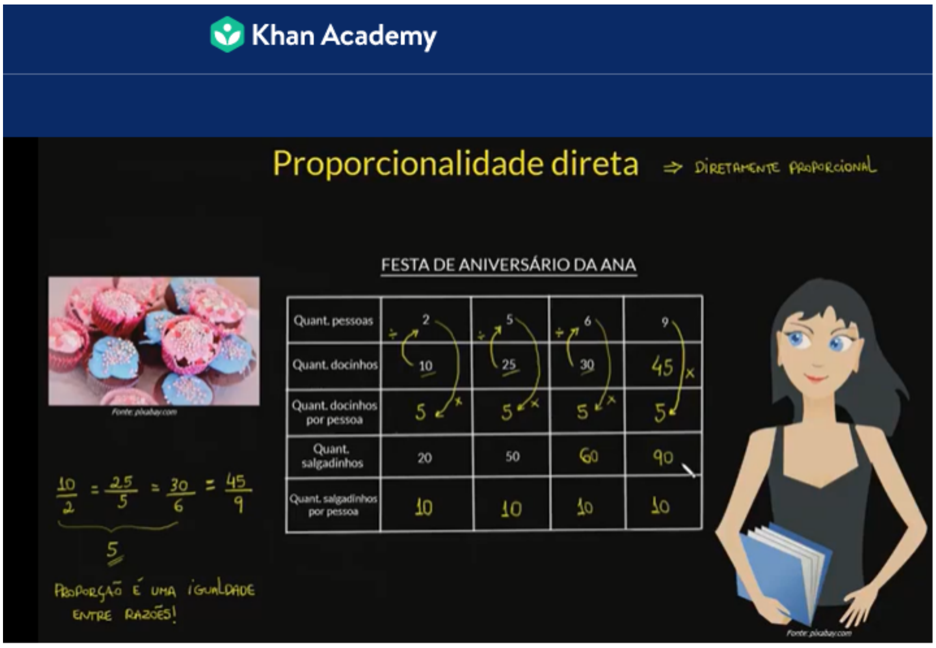
Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Nas Figura 26 e Figura 27, temos a ilustração de dois vídeos recomendados que tratam sobre a relação entre grandezas diretamente proporcionais. O vídeo 10 demonstra a variação da quantidade de doces e salgadinhos no planejamento de uma festa de aniversários, de acordo com o número de convidados, para que se mantenha uma mesma quantidade de doces e salgadinhos para cada pessoa. Ou seja, os alunos foram levados a perceber que dobrando o número de convidados deve-se dobrar a quantidade de doces e salgadinhos, triplicando o número de convidados deve-se triplicar a quantidade de doces e salgadinhos e assim por diante. Enquanto no vídeo 11, temos uma situação em que a impressora utilizada para imprimir os convites da festa tem uma capacidade de impressão de 1000 a cada 50 minutos. Logo, neste mesmo ritmo em 5 minutos ela irá imprimir 100 folhas, pois dividindo o tempo por dez, temos um décimo da quantidade de folhas.

Os alunos acharam os vídeos interessantes e se identificaram com a situação problema utilizada na explanação do conteúdo estudado. Além disso, foram desenvolvidas duas atividades durante a aula on-line, visando consolidar o conteúdo proposto para essa semana.

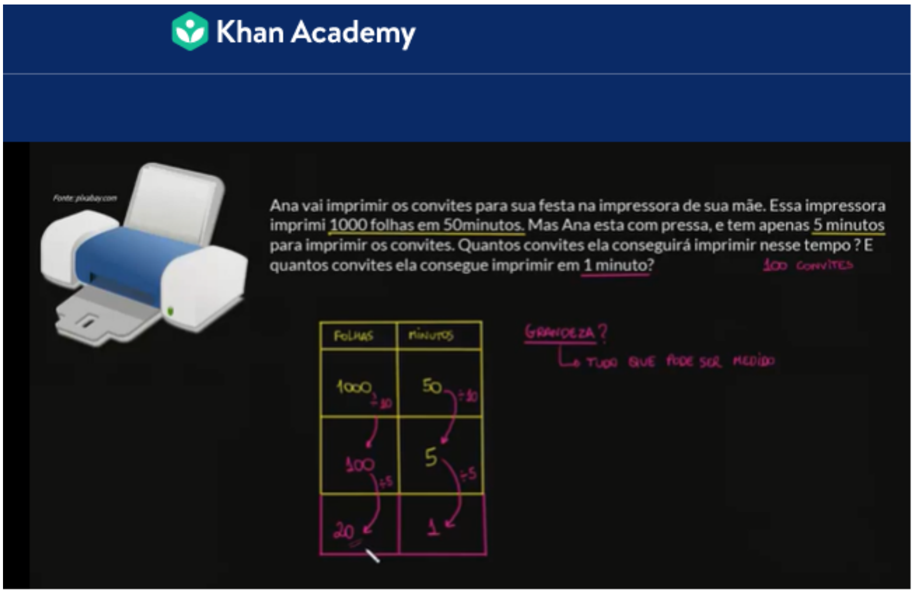
Na atividade 1, os alunos calcularam o perímetro e a área de um quadrado (Figura 28), de acordo com o tamanho do seu lado e preencheram a Tabela 1. Logo após, o pesquisador os questionou sobre a relação entre o valor do lado do quadrado e o seu perímetro. Os alunos, então afirmaram que após analisar a Tabela 1, trata-se de uma relação entre grandezas diretamente proporcionais, enquanto a relação entre o lado e a área do quadrado é uma situação de não proporcionalidade. Um outro exemplo de não proporcionalidade dado em aula foi a relação entre a altura e a idade de uma pessoa.

Figura 26 – Visão do vídeo 10 na Plataforma Khan Academy



Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Figura 27 – Visão do vídeo 11 na Plataforma Khan Academy



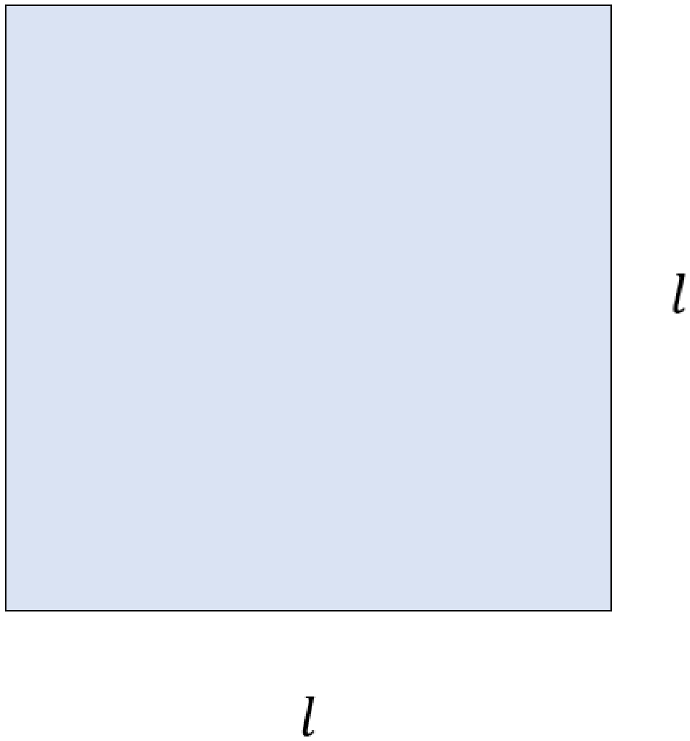
Fonte: (PLATAFORMA KHAN ACADEMY, 2008)

Tabela 1 – Atividade 1: Relação Entre Grandezas Diretamente Proporcionais e Grandezas Não Proporcionais

Lado(l)	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm
Perímetro: 4l	4 cm	8 cm	12 cm	16 cm
Área: l^2	1 cm^2	4 cm^2	9 cm^2	16 cm^2

Fonte: Elaboração própria

Figura 28 – Atividade 1: Grandezas Diretamente Proporcionais e Grandezas Não Proporcionais



Fonte: Elaboração própria

Ainda na aula do dia 13 de abril de 2021, o professor realizou a atividade 2 ao vivo, para exemplificar uma relação entre grandezas inversamente proporcionais. A Figura 29 ilustra os materiais utilizados:

- Uma garrafa pet de 2l;
- Um funil;
- Uma jarra de suco de uva;
- Um copo descartável de 100 ml;
- Um copo descartável de 200 ml;
- Um copo descartável de 400 ml;
- Um copo descartável de 500 ml.

Na atividade 2, os alunos tiveram que analisar a relação entre o números de copos necessários para encher uma mesma garrafa pet de 2 litros, de acordo com a capacidade do volumétrica do copo utilizado. O experimento foi conduzido pelo pesquisador e os dados foram anotados, conforme mostra a Tabela 2. Durante o preenchimento da Tabela 2,

Figura 29 – Atividade 2: Grandezas Inversamente Proporcionais

Fonte: Elaboração própria

os alunos observaram que ao dobrar o volume do copo usado para encher a garrafa, a quantidade de copos necessários caiu pela metade. Além disso, se compararmos os copos de 100 ml e 500 ml, ao quintuplicar o volume do copo utilizado precisamos de cinco vezes menos copos para encher a mesma garrafa. Portanto, o número de copos necessários é uma grandeza inversamente proporcional ao volume do copo utilizado.

Tabela 2 – Atividade: Relação Entre Grandezas Inversamente Proporcionais

Capacidade do Copo	100 mL	200 mL	400 mL	500 mL
Número de Copos	20	10	5	4

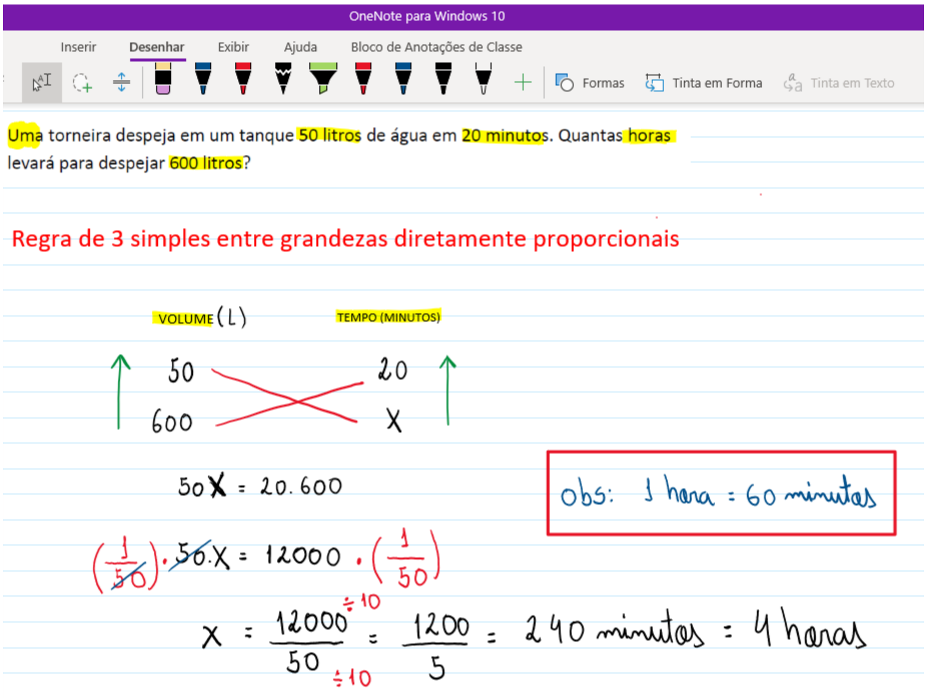
Fonte: Elaboção própria

Após as atividades 1 e 2, os alunos sinalizaram estar seguros em relação a identificação de situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e situações de não proporcionalidade. Assim sendo, o vídeo 14 foi disponibilizado e deveria ser estudado até o próximo encontro síncrono.

No dia 20 do mesmo mês, foi discutido o tema do vídeo 14: Regra de três simples entre grandezas diretamente proporcionais. Nessa aula, foram corrigidas as questões passadas para casa e, em seguida também foram resolvidas algumas questões extras em conjunto com os alunos, com a finalidade de avaliar a compreensão a cerca do tema estudado. É importante ressaltar que ao longo da experimentação as aulas foram ministradas no software OneNote, com o auxilio de uma mesa digitalizadora, como mostra a Figura 30.

Ainda nessa mesma aula, foram disponibilizados o vídeo 15 e os exercícios referente ao conteúdo de: Regra de três simples entre grandezas inversamente proporcionais. Assim como, na aula anterior, no encontro síncrono do dia 27 de março foi feita uma revisão do

Figura 30 – Questão sobre Regra de três simples entre Grandezas Diretamente Proporcionais



Fonte: Elaboração própria

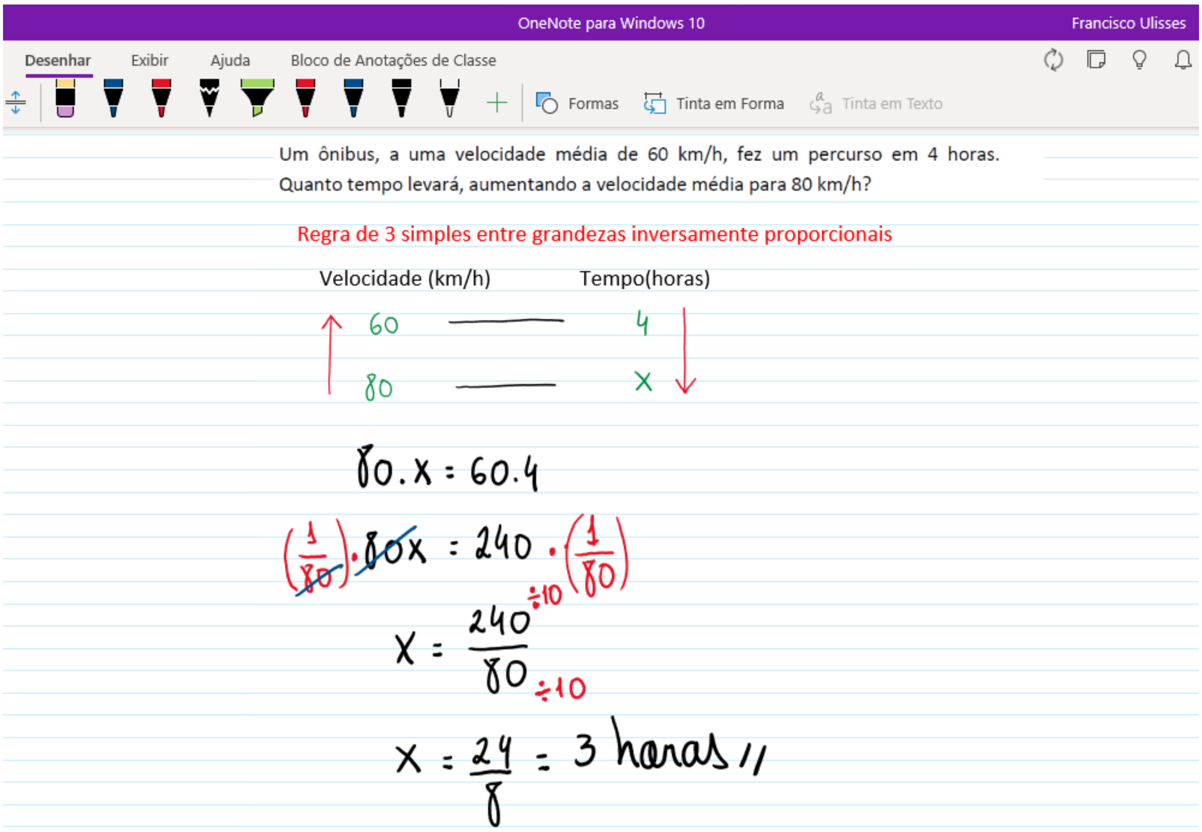
conteúdo trabalhado na videoaula 15 e, logo após foram desenvolvidas alguns exercícios relativos ao tema estuda em com a participação efetiva dos alunos, conforme mostra a Figura 31.

Além disso, nessa aula foi promovido um debate sobre a importância de identificar o tipo de relação entre as grandezas proporcionais, antes de efetivamente resolvermos uma regra de três simples. Assim, chegou-se às seguintes constatações, que merecem atenção do pesquisador:

- Grande parte dos alunos tem dificuldade em diferenciar grandezas diretamente proporcionais de grandezas inversamente proporcionais;
- Os alunos tendem a acreditar que duas grandezas são diretamente proporcionais, quando na verdade são inversamente proporcionais;
- Grande parte dos alunos tem dificuldade em reconhecer situações de não proporcionalidade;

Após o debate e o esclarecimentos das dúvidas, os alunos receberam algumas orientações sobre a aplicação do pós-teste e do questionário final. O pesquisador explicou sobre a importância da participação deles e agradeceu pela atenção e comprometimento

Figura 31 – Questão sobre Regra de três simples entre Grandezas Inversamente Proporcionais



Fonte: Elaboração própria

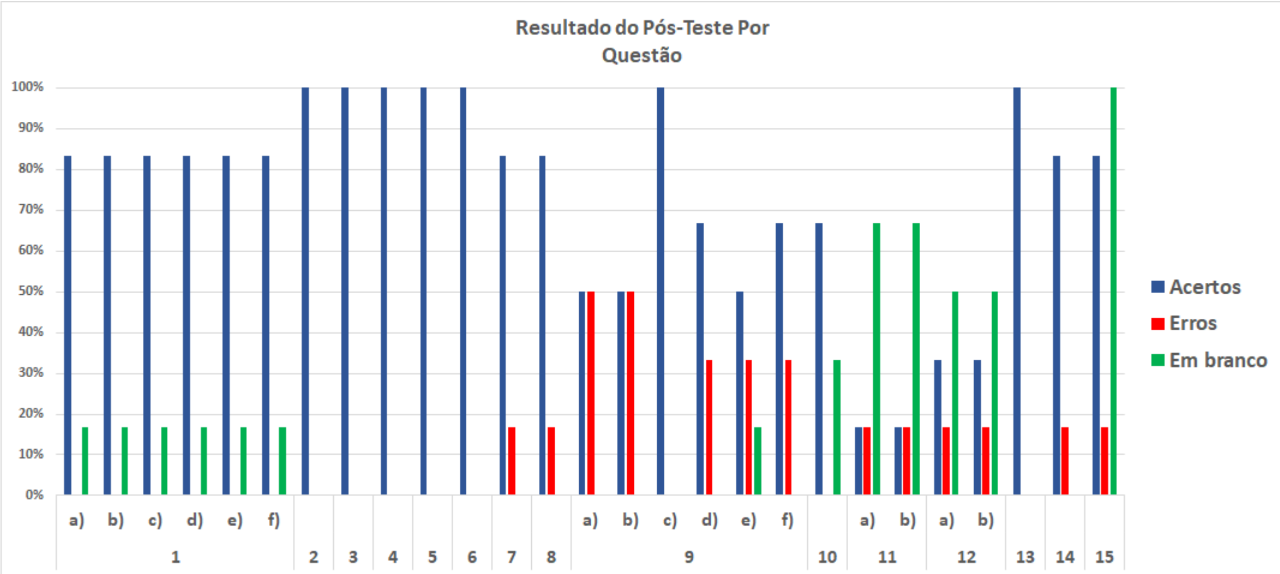
de todos. Em seguida, o questionário final foi aplicado através do google formulários e o pós-teste foi encaminhado via WhatsApp, com um prazo de devolução de uma semana.

4.4 Análise do Pós-teste

No Gráfico 3, é possível observar os totais de erros, acertos e questões deixadas em branco pelos alunos ao responderem o pós-teste. Ao todo, os 6 alunos que concluíram a experimentação responderam ao teste. Além disso, o Gráfico 4 traz os resultados obtidos nessa avaliação por aluno, a média de acertos foi de 77% e o desvio padrão ficou 11% em torno da média. Na análise do pós-teste os alunos foram denominados A1, A2, A3... A6.

Na questão 1 (Apêndice B) os alunos tinham que verificar se as razões formam ou não uma proporção, devendo utilizar o símbolo de igual caso a sentença fosse verdadeira ou de diferente, em caso contrário. A maioria dos alunos acertou todos os itens da questão, com exceção de apenas um aluno que deixou a questão completamente em branco. O aluno A3 resolveu corretamente a questão, utilizando a propriedade fundamental das proporções (Figura 32).

Gráfico 3 – Desempenho dos alunos em cada questão do Pós-teste

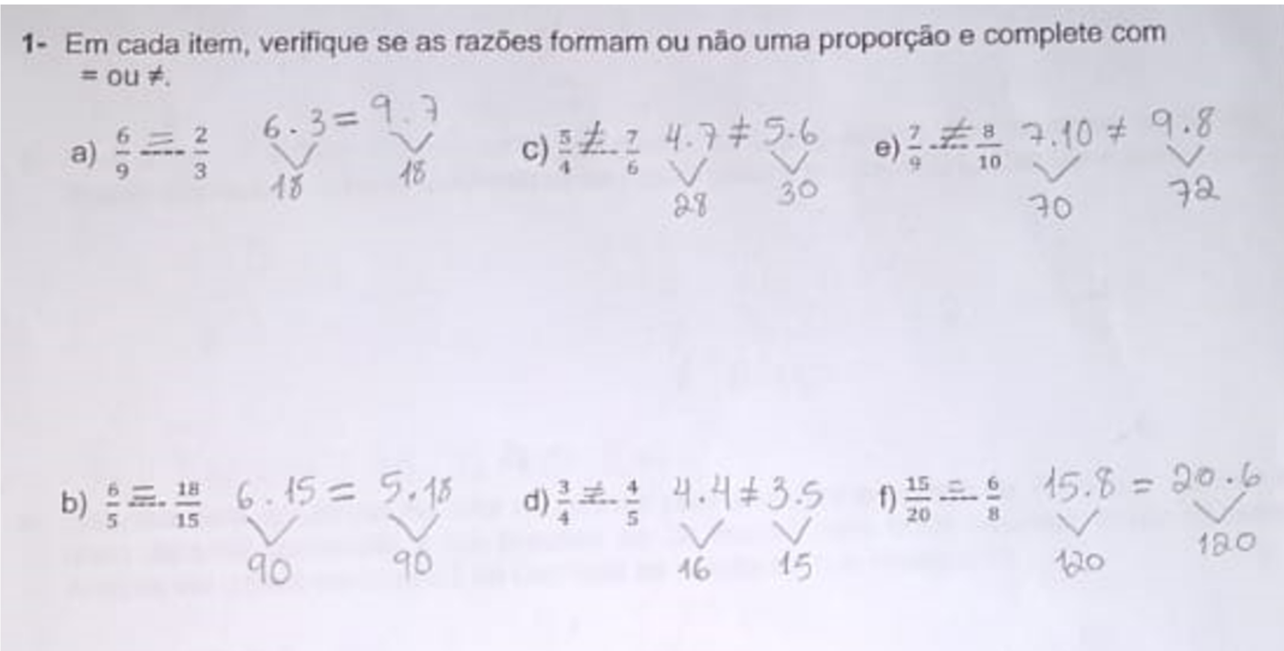


Fonte: Dados da pesquisa

Gráfico 4 – Desempenho por aluno no Pós-teste

Fonte: Dados da pesquisa

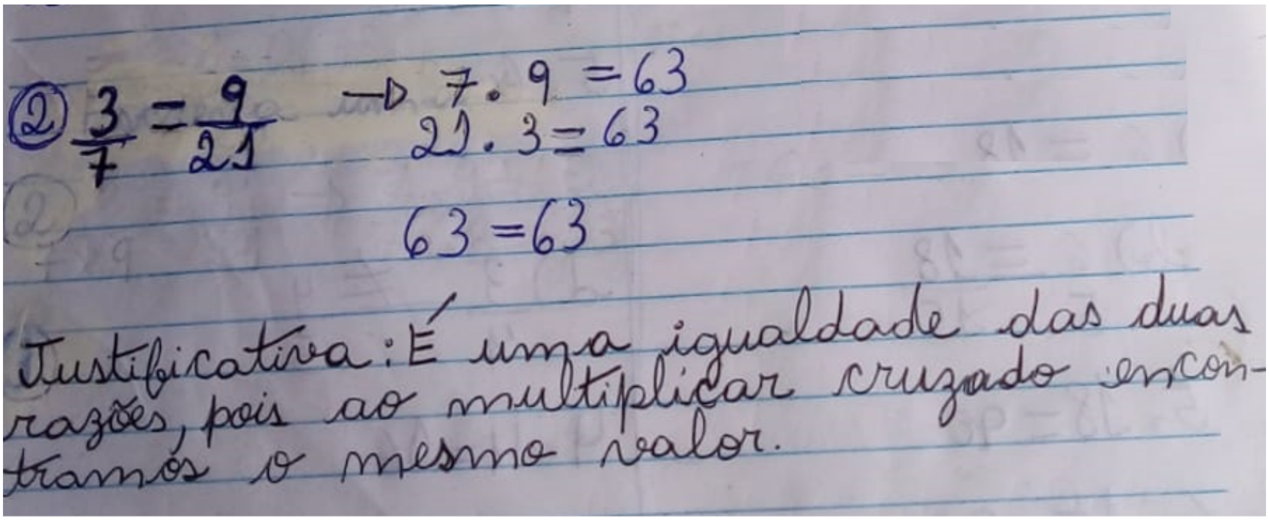
Figura 32 – Resolução correta da questão 1 do pós-teste, registrada pelo aluno A3



Fonte: Dados da pesquisa

A questão 2 forneceu quatro valores e solicitou que os alunos escrevessem uma proporção com eles e, justificassem através da propriedade fundamental das proporções. O aluno A4, assim como os demais, respondeu corretamente como mostra a Figura 33.

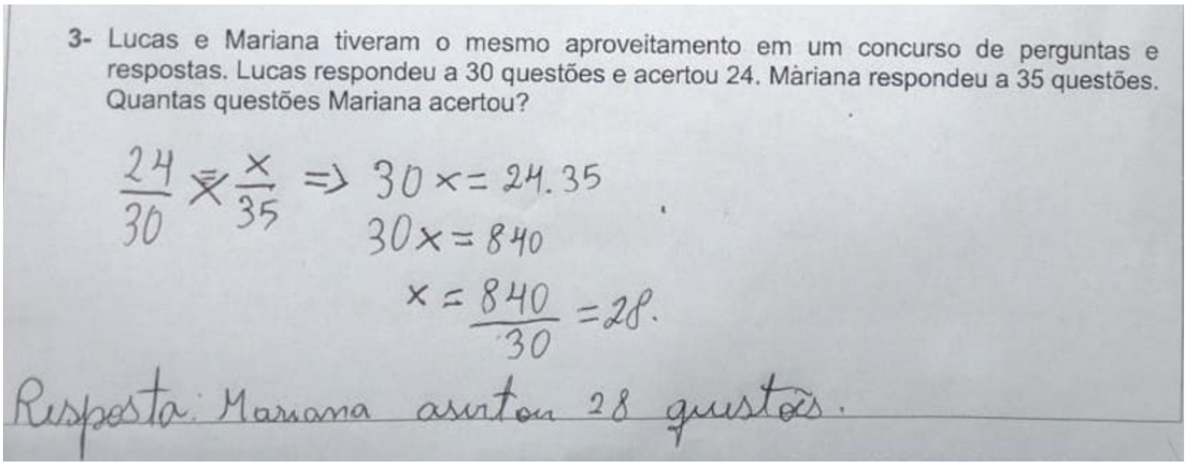
Figura 33 – Resolução correta da questão 2 do pós-teste, registrada pelo aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa

Todos os alunos acertaram as questões 3, 4, 5 e 6, possivelmente por se tratarem de relações entre grandezas diretamente proporcionais. As Figura 34, Figura 35, Figura 36 e Figura 37 mostram que os aluno A1, A2, A3 e A5, respectivamente, foram capazes de identificar, escrever e resolver uma proporção. Entretanto, não analisaram o tipo de relação entre as grandezas envolvidas.

Figura 34 – Resolução correta da questão 3 do pós-teste, registrada pelo aluno A1



3- Lucas e Mariana tiveram o mesmo aproveitamento em um concurso de perguntas e respostas. Lucas respondeu a 30 questões e acertou 24. Màriana respondeu a 35 questões. Quantas questões Mariana acertou?

$\frac{24}{30} = \frac{x}{35} \Rightarrow 30x = 24.35$

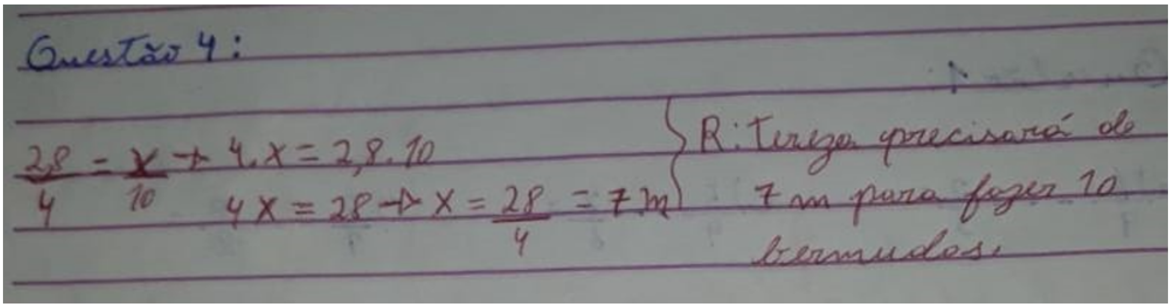
$30x = 840$

$x = \frac{840}{30} = 28.$

Resposta: Mariana acertou 28 questões.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 35 – Resolução correta da questão 4 do pós-teste, registrada pelo aluno A2



Questão 4:

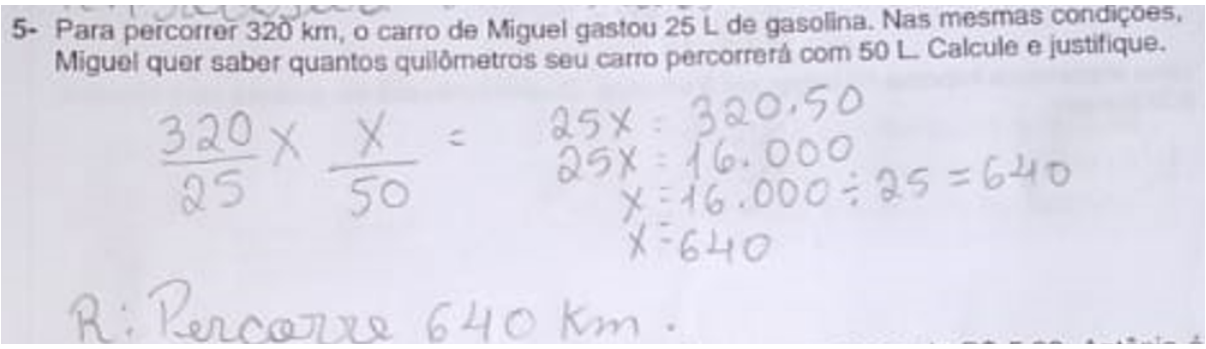
$\frac{28}{4} = \frac{x}{10} \to 4.x = 2,8.10$

$4x = 28 \to x = \frac{28}{4} = 7m$

R: Tereza precisará de 7 m para fazer 10 bermudas.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 36 – Resolução correta da questão 5 do pós-teste, registrada pelo aluno A3



5- Para percorrer 320 km, o carro de Miguel gastou 25 L de gasolina. Nas mesmas condições, Miguel quer saber quantos quilômetros seu carro percorrerá com 50 L. Calcule e justifique.

$\frac{320}{25} \times \frac{X}{50} =$

$25X = 320.50$

$25X = 16.000$

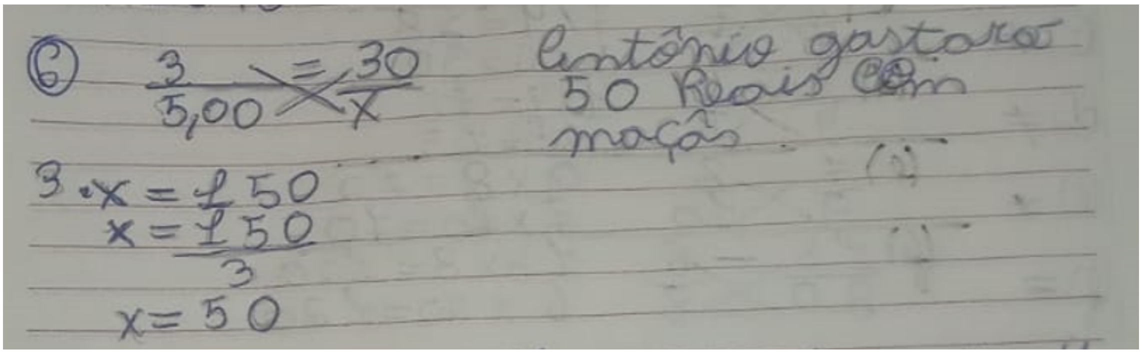
$X = 16.000 \div 25 = 640$

$X = 640$

R: Percorre 640 km.

Fonte: Dados da pesquisa

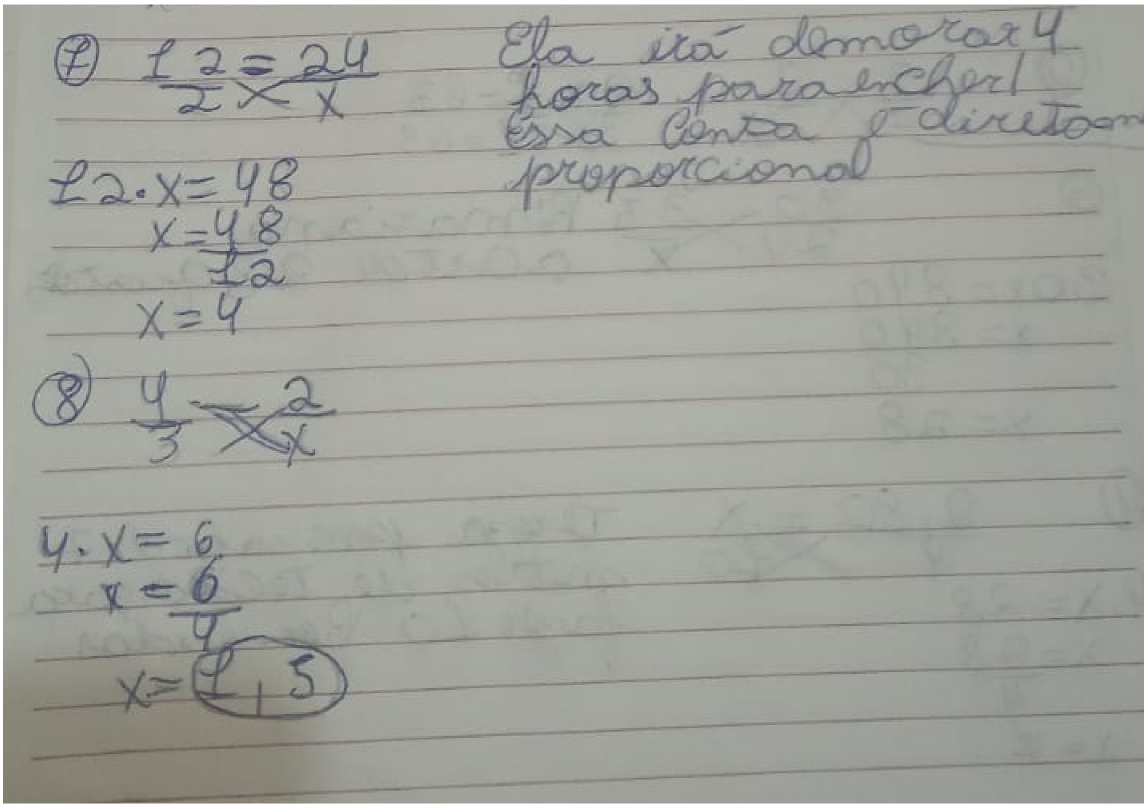
Figura 37 – Resolução correta da questão 6 do pós-teste, registrada pelo aluno A5



Fonte: Dados da pesquisa

As questões 7 e 8 foram respondidas corretamente por cinco alunos, os quais, interpretaram a relação entre as grandezas envolvidas no problema de forma correta, ou seja, perceberam que as grandezas são inversamente proporcionais. Enquanto, o aluno A5 solucionou as duas questões de forma errônea, pois considerou que as grandezas são diretamente proporcionais, conforme é mostrado na Figura 38.

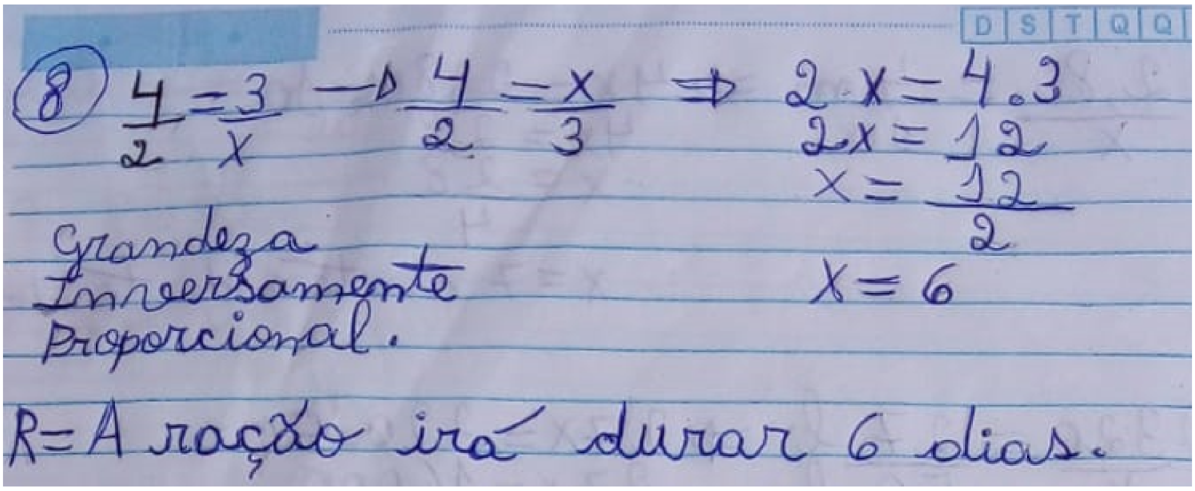
Figura 38 – Resolução incorreta das questões 7 e 8 do pós-teste, registrada pelo aluno A5



Fonte: Dados da pesquisa

Uma solução correta para a questão 8, por exemplo, foi apresentada pelo aluno A4, como é mostrado na Figura 39, aonde podemos visualizar a sua estratégia de resolução para o problema proposto.

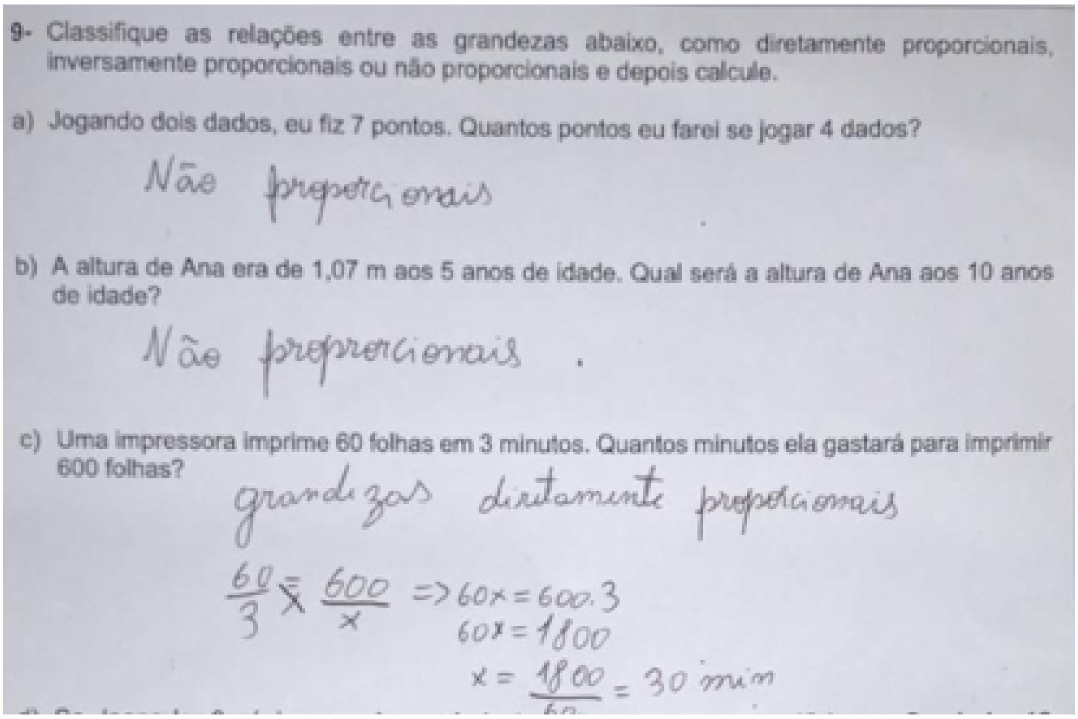
Figura 39 – Resolução correta da questão 8 do pós-teste, registrada pelo aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa

Os item (a), (b) e (e) da questão 9 tiveram um percentual de acerto de 50%, ou seja, metade dos alunos não observaram que as situações descritas representam casos de não proporcionalidade. Além disso, o item (d) também contou com um percentual de 50% de aproveitamento. Enquanto, o item (c) teve um percentual de 100% acertos e o item (f) de 67%. A Figura 40, mostra a solução da questão 9, registrada pelo aluno A1.

Figura 40 – Resolução correta dos itens a, b e c da questão 9 do pós-teste, registrada pelo aluno A1


9- Classifique as relações entre as grandezas abaixo, como diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais e depois calcule.

a) Jogando dois dados, eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?

Não proporcionais

b) A altura de Ana era de 1,07 m aos 5 anos de idade. Qual será a altura de Ana aos 10 anos de idade?

Não proporcionais.

c) Uma impressora imprime 60 folhas em 3 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 600 folhas?

grandezas diretamente proporcionais

$\frac{60}{3} = \frac{600}{x} \Rightarrow 60x = 600.3$

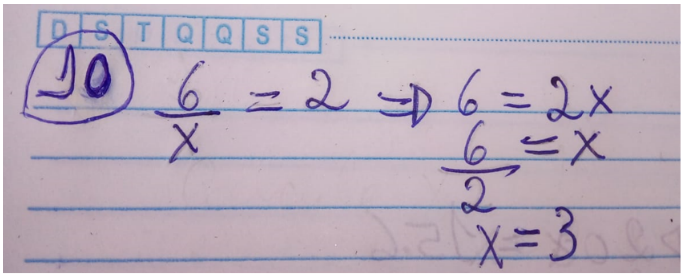
$60x = 1800$

$x = \frac{1800}{60} = 30$ min

Fonte: Dados da pesquisa

A questão 10 foi respondida corretamente por 4 alunos, enquanto 2 alunos deixaram a questão em branco. Portanto, aproximadamente 67% dos estudantes utilizaram corretamente a constante de proporcionalidade entre grandezas diretamente proporcionais para escrever a proporção pedida. A Figura 41, mostra a solução da questão 10, registrada pelo aluno A4.

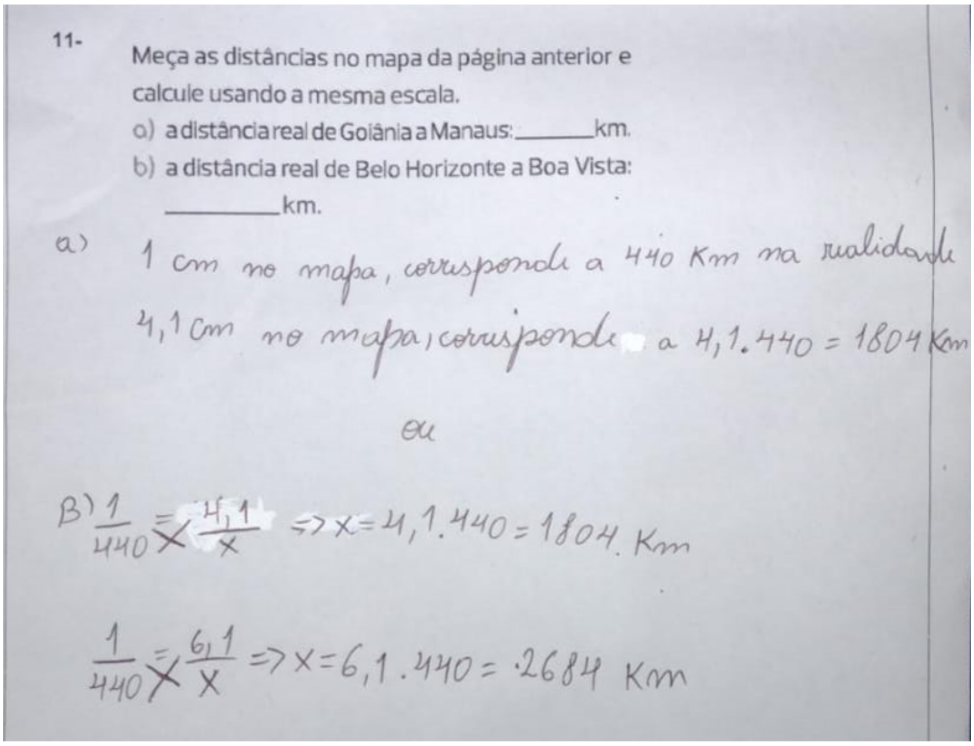
Figura 41 – Resolução correta da questão 10 do pós-teste, registrada pelo aluno A4



Fonte: Dados da pesquisa

A questão 11 foi respondida integralmente, de maneira correta, por apenas um aluno. Enquanto isso, quatro alunos deixaram a questão em branco e um aluno respondeu de forma incorreta. O objetivo da questão era diagnosticar a capacidade dos alunos em identificarem uma escala como um proporção, entretanto o alto percentual de erro deve estar associado a dificuldade dos alunos em realizar medidas de comprimento. Na Figura 42 é possível visualizar a resolução correta da questão 11, feita pelo aluno A1.

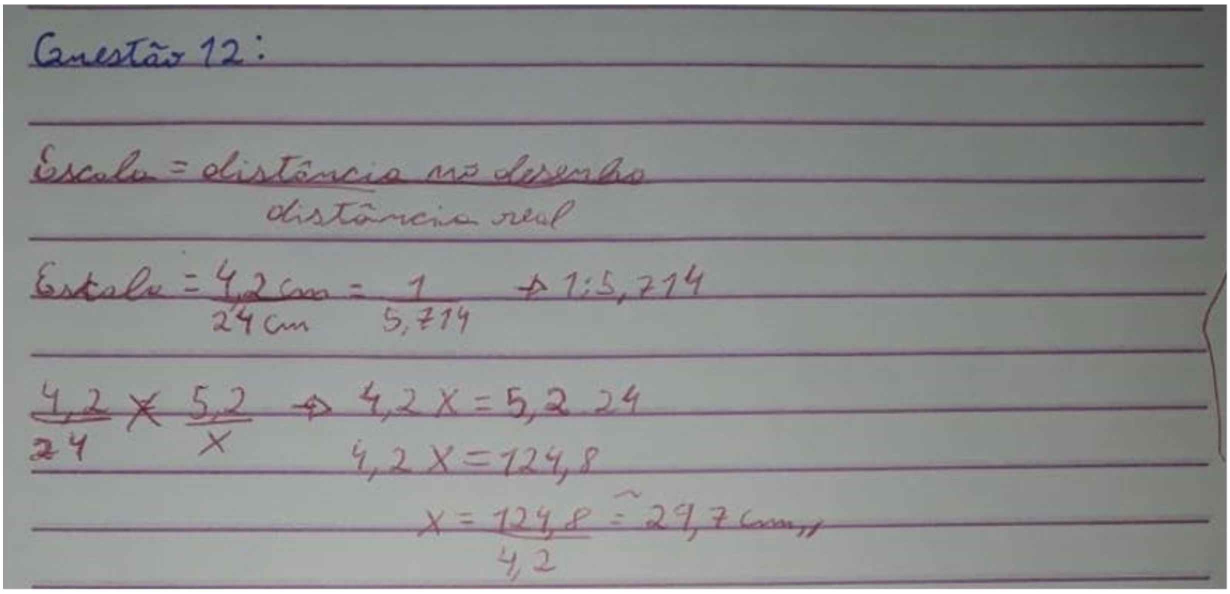
Figura 42 – Resolução correta da questão 11 do pós-teste, registrada pelo aluno A1



Fonte: Dados da pesquisa

Assim como na questão anterior, na questão 12 os alunos também demonstraram uma certa dificuldade durante a resolução. Dois alunos responderam a questão corretamente, três deixaram em branco e um aluno respondeu de forma errada. Na Figura 43, é possível observar a estratégia de resolução utilizada pelo aluno A2. O aluno mediu a largura do desenho e, depois utilizou os conceitos de razão e proporção. Sabendo que uma escala é a razão entre a distância na imagem e a distância real e, em seguida igualando-a com a razão entre a altura da imagem e a altura real é possível encontrar o valor da altura real.

Figura 43 – Resolução correta da questão 12 do pós-teste, registrada pelo aluno A2



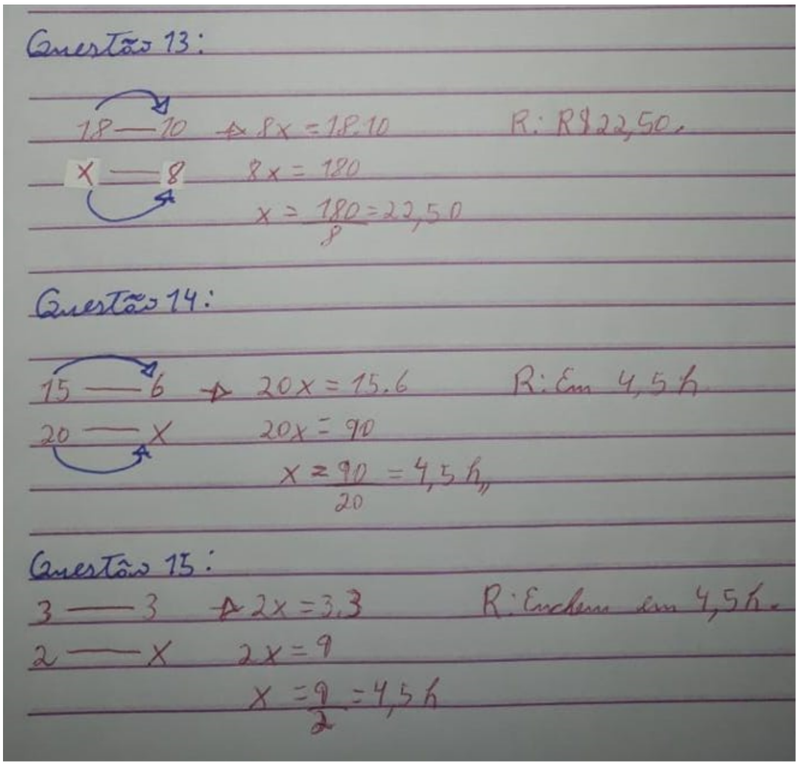
Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, nas questões 13, 14 e 15 os alunos deviam utilizar regra de três simples para resolver os problemas propostos. Mas, para isso, era necessário primeiramente identificar que as três questões tratam de relações entre grandezas inversamente proporcionais. Analisando as respostas dos alunos é possível constatar que as três questões apresentaram um alto índice de acertos. Apenas o aluno A5 errou as questões 14 e 15 e nenhum aluno deixou de responder uma das questões.

Na Figura 44, temos a resolução correta das questões 13, 14 e 15, segundo o aluno A5, enquanto na Figura 45 são apresentadas as questões 14 e 15 resolvidas de forma incorreta pelo aluno A5, uma vez que, o mesmo não identificou a relação entre grandezas inversamente proporcionais nas duas questões.

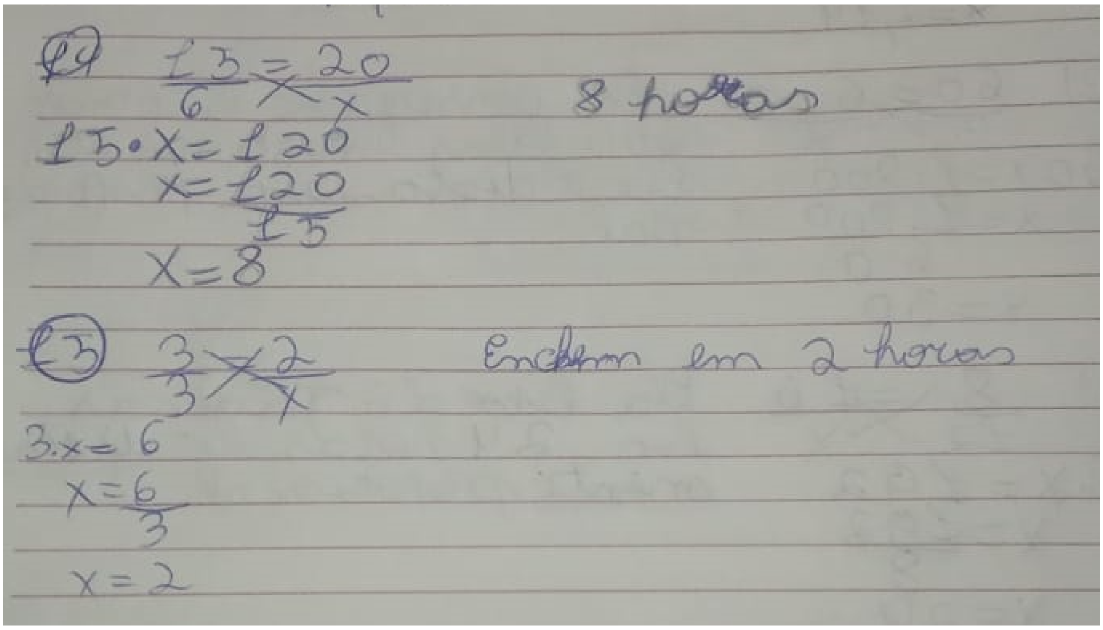
Portanto, após a análise do pós-teste foi possível constatar que a aplicação da sequência didática, através da metodologia Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto foi capaz de auxilar na construção dos conceitos de Proporcionalidade, uma vez que os alunos demonstraram uma evolução na aprendizagem e conseguiram resolver as questões propostas.

Figura 44 – Resolução correta das questões 13, 14 e 15 do pós-teste, registrada pelo aluno A2



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 45 – Resolução incorreta das questões 14 e 15 do pós-teste, registrada pelo aluno A5



Fonte: Dados da pesquisa

4.5 Análise do Questionário Final

Após a experimentação da metodologia de ensino proposta nesta pesquisa foi elaborado um Questionário (Apêndice B) para que os alunos pudessem avaliar a vivência da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto, no processo de ensino-aprendizagem de Proporcionalidade.

O Questionário aplicado nesta pesquisa foi elaborado e disponibilizado via Google Forms, sendo respondido pelos alunos de forma anônima. Ao disponibilizá-lo, o pesquisador solicitou que os alunos respondessem com atenção todas as questões. Ao todo seis alunos responderam o Questionário que era composto por quatorze perguntas para que os alunos julgassem utilizando uma dentre as opções: concordo, concordo parcialmente, não concordo nem discordo, discordo parcialmente e discordo; e duas questões abertas. As questões são descritas a seguir:

1) Ao estudar o conteúdo antes dos encontros houve maior facilidade para a compreensão dos conteúdos trabalhos durante as aulas.

2) Eu consegui assistir as videoaulas do conteúdo antes da aula on-line com o professor.

3) As videoaulas e as atividades semanais realizadas na Plataforma Khan contribuíram para a compreensão do assunto estudado.

4) Ao assistir aos vídeos, eu fiz uso do recurso "pausar".

5) Ao assistir aos vídeos, eu fiz uso do recurso "avançar".

6) Ao assistir aos vídeos, eu fiz uso do recurso "assistir novamente".

7) Durante o vídeo, eu fiz anotações sobre o conteúdo que estava sendo explicado.

8) Os exercícios realizados na Plataforma Khan, após os vídeos contribuíram para o entendimento dos conceitos estudados.

9) A correção dos exercícios propostos na Plataforma Khan, durante as aulas ao vivo foram relevantes para auxiliar na compreensão do conteúdo.

10) Os encontros durante as aulas síncronas foram mais produtivos, com o conhecimento dos conteúdos a serem trabalhados em aula.

11) Em relação a aprendizagem do conteúdo, o modelo da Sala de Aula Invertida adaptada ao ensino remoto se mostrou mais interessante que o modelo tradicional de ensino.

12) A Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto dinamizou o processo de ensino-aprendizagem durante o Ensino Remoto.

13) Eu considero que o papel do professor durante as aulas remotas foi importante.

14) Eu gostaria de continuar utilizando o modelo Sala de Aula Invertida nas aulas de matemática.

15) Liste os pontos positivos da sala de aula invertida.

16) Liste os pontos negativos da sala de aula invertida Adaptada ao Ensino Remoto.

A Tabela 3 apresenta o quantitativo de respostas por aluno em cada questão objetivo, de acordo com itens da Escala Likert. É importante destacar que os seis alunos que participaram integralmente da aplicação da sequência didática responderam o questionário final.

Tabela 3 – Questionário Final: Resultados das Questões de Múltipla Escolha.

Questão	Total de participantes	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
1	6	66,67%	33,33%	0%	0%	0%
2	6	66,67%	16,67%	16,67%	0%	0%
3	6	100%	0%	0%	0%	0%
4	6	66,67%	16,67%	0%	0%	16,67%
5	6	50%	16,67%	0%	0%	33,33%
6	6	66,67%	0%	16,67%	0%	16,67%
7	6	50%	33,33%	0%	16,67%	0%
8	6	83,33%	0%	16,67%	0%	0%
9	6	66,67%	16,67%	16,67%	0%	0%
10	6	100%	0%	0%	0%	0%
11	6	83,33%	0%	16,67%	0%	0%
12	6	83,33%	16,67%	0%	0%	0%
13	6	100%	0%	0%	0%	0%
14	6	83,33%	16,67%	0%	0%	0%

Fonte: Dados da pesquisa

A Questão 1 buscou investigar se, na concepção dos alunos que participaram da pesquisa, houve uma maior facilidade na compreensão dos conteúdos trabalhados no decorrer das aulas ao vivo, mediante um contato prévio com o conteúdo e, conforme mostra a Tabela 3, 66,67% informaram concordar plenamente. Portanto, é possível afirmar que para a maioria dos alunos, a metodologia da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto, foi capaz de tornar o processo ensino-aprendizagem de Proporcionalidade mais eficiente e interessante.

A Questão 2 buscou averiguar se os alunos assistiram as aulas recomendadas dentro do prazo estabelecido, antes das aulas. Ou seja, a questão traz os resultados relacionados à metodologia da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto. Sendo assim, conforme o Tabela 3 um percentual de 83,33% afirmaram concordar com o acesso ao conteúdo antes das aulas. Portanto, é possível concluir que a maior parte dos alunos conseguiam assistir às videoaulas antes da aula síncrona na maioria das vezes, mas em alguns momentos eles não conseguiram se organizar para tal.

É válido destacar que, a metodologia de ensino Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto depende fortemente da participação dos alunos e, que eles cumpram com a responsabilidade de assistirem os vídeos e praticarem as atividades antes das aulas.

A Questão 3 sondou os alunos em relação a plataforma utilizada para disponibilização dos vídeos e atividades semanais e, todos os 6 alunos afirmaram concordar que a plataforma contribui significativamente para a compreensão do estudo de proporcionalidade, conforme mostrado na Tabela 3.

As Questões 4, 5 e 6 fizeram um levantamento acerca da exploração das videoaulas e seus recursos como ferramenta de ensino, buscando averiguar se os alunos seguiram as instruções dadas pelo pesquisador, na data da apresentação da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto. Nesse sentido, a Tabela 3 mostra que 83,33% dos alunos utilizaram o recurso de pausar o vídeo para fazer anotações. Sendo assim, a possibilidade de pausar uma explicação é um recurso poderoso para o aluno, pois, permite esta flexibilidade que muitas vezes seria impossível em uma sala de aula tradicional.

Em relação ao recurso de assistir novamente aos vídeos, 66,67% dos alunos afirmaram ter feito uso desse recurso conforme podemos ver na Tabela 3. Segundo Bergmann e Sams (2020) a inversão da sala de aula ajuda alunos com diferentes habilidades a se superarem, uma vez que, devido a possibilidade de assistirem novamente os vídeos, não precisam fazer anotações apressadas, na esperança de compreenderem a matéria depois. Em vez disso, os alunos podem retroceder os vídeos quantas vezes julgarem necessário e se empenharem de fato na apreensão dos conceitos importantes.

Nesse sentido, Bergmann e Sams (2020, p. 22) afirmam que o professor deve sempre recomendar, "em especial, aos alunos mais vagarosos que usem sem inibição o botão de retrocesso, para que ouçam nossa explicação mais de uma vez e a absorvam profundamente". Portanto, o recurso assistir novamente é uma ótima ferramental de otimização do processo de ensino e aprendizagem.

A Questão 7 buscou averiguar se os alunos fizeram algum tipo de anotação sobre os conteúdos que estavam sendo explicados nos vídeos e, conforme a Tabela 3, 50% concordam em ter feito uso desse recurso. É importante destacar que a responsabilidade, o interesse a a participação dos alunos são fatores imprescindíveis para o sucesso de qualquer metodologia.

Segundo Bacich, Neto e Trevisani (2015), assim como para Bergmann e Sams (2020), um dos pontos positivos da inversão da sala de aula é a possibilidade do aluno fazer suas próprias anotações e, cada um no seu tempo, uma vez que, existem alunos que são mais vagarosos e outros são mais rápidos para copiar o conteúdo que está sento ministrado. Sendo assim, a Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto se mostrou capaz de potencializar o ensino-aprendizagem de Proporcionalidade, através dos vídeos e atividades da Plataforma Khan Academy.

As Questões 8 e 9, buscaram averiguar se a disponibilização e a correção dos exercícios da Plataforma Khan contribuíram para o entendimento dos conceitos estudados. De acordo com a Tabela 3, a maior parte dos estudante concordam de forma plena ou parcial. O resultado obtido, na presente pesquisa, realiza de forma remota, está de acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015, p. 111), que afirmam que a Khan Academy é uma ferramenta que permite ao aluno aprender matemática, por meio da SAI.

Além disso, avaliando o resultado das Questões 8 e 9, por meio da Tabela 3, pode-se afirmar que a correção das atividades propostas para casa foi relevante para auxiliar na absorção do conceitos de Proporcionalidade. Segundo Bacich, Neto e Trevisani (2015), as atividades de revisão ou de reforço são importantes, antes do aprofundamento de novos conteúdos. Sendo assim, analisando a Tabela 3 podemos constatar que todos os alunos que responderam o questionário final concordam com a afirmação.

A Questão 10 buscou averiguar se, de acordo com a percepção dos alunos, as aulas foram mais produtivas com o conhecimento prévio dos conteúdos a serem trabalhados na aula seguinte. Assim, ao analisar a Tabela 3 foi possível constatar que todos os alunos participantes do questionário final, concordam que o estudo prévio dos conceitos a serem trabalhados em aula, auxiliou na identificação e assimilação dos conceitos de Proporcionalidade desenvolvidos em aula. Essa é uma das principais vantagens da utilização da metodologia de ensino experimentada, em relação ao método de ensino tradicional.

Na Questão 11 os alunos foram questionados se o modelo da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto se mostrou mais interessante que o modelo tradicional de ensino e, conforme a Tabela 3 a maioria dos alunos afirmaram concordar, enquanto apenas um aluno afirmou não concordar nem discordar.

Avaliando o resultado da Questão 12 (Tabela 3), pode-se afirmar que de modo geral os alunos concordam plenamente com a afirmação de que a Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto dinamizou o processo de ensino-aprendizagem de Proporcionalidade, e esse resultado também pode ser observado na Tabela 3.

Na Questão 13, todos os alunos consideram importante o papel do pesquisador durante essas aulas em que a metodologia de ensino desta pesquisa foi vivenciada, conforme mostrou a Tabela 3. Esse resultado corrobora para o fato de que a metodologia de ensino Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto não contribui para que a figura do professor seja substituído pela tecnologia, mas sim para agregar os recursos tecnológicos no âmbito educacional, permitindo que o professor atue de forma direcionada, revisando o conteúdo, esclarecendo as dúvidas individuais e desenvolvendo exercícios com os alunos.

A Questão 14, última questão de múltipla escolha, buscava investigar se os alunos tinham interesse em continuar com a metodologia da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto. A Tabela 3 mostra que, em geral, os alunos concordam com essa afirmação, pois apenas 16,67% dos alunos, afirmaram concordar parcialmente em continuar utilizando essa metodologia.

Na Questão 15 do Questionário, os alunos puderam listar os pontos positivos da metodologia experimentada. Eles destacaram principalmente: a facilidade de poder ter acesso às videoaulas a qualquer momento e de explorar os recursos do vídeo; o fato deles chegarem na sala de aula com noção do que seria estudado e que isso facilitou na identificação das dúvidas e possibilitou mais tempo para a resolução de exercícios; a dinamização do Ensino Remoto que muitas vezes torna-se cansativo. As respostas obtidas estão dispostas a seguir:

- A1: *"Que conseguimos entender melhor e acompanhar."*
- A2: *"É bem mas fácil e prático de entender."*
- A3: *"O lado bom é que nos podemos perguntar diretamente ao professor."*
- A4: *"Eu não gostava das matérias de matemática, mas com o esse método de ensino, que o professor ensinou, passei a ter mais aptidão, a matéria."*
- A5: *"Posso ver a hora que quiser, se não entendi algo."*
- A6: *"Mais tempo para resolver questões, em vez da teoria."*

A última questão do Questionário, Questão 16, pedia aos alunos que listassem os pontos negativos da metodologia de ensino experimentada. Um aluno afirmou que a metodologia não possui pontos negativos. As principais desvantagens que eles elencaram foram: aulas totalmente remotas; a dificuldade do aluno em assistir à videoaula antes da aula síncrona - por problemas na internet ou por falta vontade . As respostas dos alunos estão listadas a seguir:

- A2: *"Que as vezes não dá para participar."*
- A3: *"Eu acho que nada,só não dar pra entender igual presencial,mas mesmo assim prestando atenção tem como."*
- A4: *'Eu não encontrei, nenhum ponto negativo, na sala de aula invertida."*
- A6: *"Não queria que tivesse muitos vídeos."*

Analisando as respostas obtidas em todas as questões do Questionário Final e também os resultados obtidos no Pós-teste, pode-se afirmar que a metodologia de ensino Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto se mostrou eficaz para o ensino de Proporcionalidade durante o Ensino Remoto, e as vantagens dessa metodologia se tornaram mais evidentes nessa experimentação do que as desvantagens e dificuldades. Também é possível compreender melhor a importância do papel do professor como mediador da aprendizagem.

Além disso, o professor é figura principal na escolha de estratégias e desenvolvimento de atividades contextualizadas para incentivar uma maior participação dos alunos nas aulas, avaliando o nível de compreensão do conteúdo e identificando possíveis lacunas no processo de construção do conhecimento.

Capítulo 5

Considerações Finais

A primeira etapa desta pesquisa foi construir um referencial teórico com o intuito de garantir o embasamento necessário para o entendimento dos temas trabalhados e da implementação da Sala de Aula Invertida, de forma adaptada ao ensino remoto. Durante a pesquisa bibliográfica para elaboração do referencial teórico, foi possível um estudo aprofundado sobre Ensino Híbrido e uma revisão bibliográfica, em especial, sobre a Sala de Aula Invertida, estimulando a implantação de diferentes estratégias de ensino, visando a transformação do processo de ensino-aprendizagem de Proporcionalidade, colocando o aluno como protagonista do processo de construção do conhecimento. Além disso, o isolamento social mostra-se como um momento muito oportuno para inserção dessas metodologias e recursos, uma vez que o contato professor-aluno está restrito ao uso das ferramentas digitais.

Nesse sentido, durante a aplicação da metodologia da Sala de Aula Invertida, de forma adaptada ao ensino remoto os alunos foram incentivados a estudar, através de videoaulas, semanalmente os tópicos do conteúdo de proporcionalidade antes dos encontros síncronos e a fazerem anotação sobre situações do seu cotidiano que estivessem relacionadas com o conteúdo. Com isso, durante os encontros síncronos foi possível observar uma maior interação dos alunos durante as aulas remotas. Estes passaram a tirar mais dúvidas e a fazerem questionamentos a cerca do conteúdo trabalhado semanalmente.

Em relação a adaptação da proposta para a metodologia de Ensino Híbrido denominada Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto, pode-se afirmar, de acordo com os resultados obtidos no questionário final, que ela se mostrou eficaz no ensino de Proporcionalidade tanto ao analisar os resultados das atividades desenvolvidas pelos alunos, quanto ao avaliar o resultado da aplicação do pós-teste e do questionário final. No entanto, a principal desvantagem observada a respeito da metodologia de ensino proposta é a dificuldade de desenvolver um ambiente mais colaborativo de aprendizagem, uma vez que a aula on-line impõe barreiras físicas que limitam a troca de experiências entre os sujeitos envolvidos no processo.

No que diz respeito ao Ensino Remoto, no inicio a participação dos alunos durante os encontros remotos foi um dos principais desafios, devido aos atrasos por falta de conexão com a internet e pela timidez, inclusive porque o aluno não pode ser obrigado a utilizar a câmera, o microfone e a interagir de maneira semelhante ao que é esperado na escola. Além disso, ainda existem outros fatores que podem afetar negativamente o Ensino Remoto como: a falta de energia elétrica, falta de um espaço adequado para estudar em casa, etc. Mas, apesar disso e do contexto socioeconômico dos alunos que participaram desta pesquisa, pode-se dizer que a Sala de Aula Invertida adaptada ao Ensino Remoto, se mostrou uma excelente alternativa para melhorar o aprendizado e minimizar as perdas educacionais causadas pela necessidade do isolamento social.

Em relação aos alunos, de acordo com o questionário final a maioria concordou que foi produtivo participar das aulas ao vivo já conhecendo o conteúdo, por meio das videoaulas disponibilizadas previamente na Plataforma Khan Academy. Para eles essa estratégia contribuí para a compreensão dos conceitos de Proporcionalidade e, além disso, ao assistirem as aulas, eles puderam explorar os recursos proporcionados por essa metodologia de ensino. Outro aspecto que os estudantes reconheceram como importante foi o desenvolvimento e a correção de diversas atividades, processo que colaborou com a identificação das lacunas de conhecimento e auxiliou na sedimentação dos conceitos estudados. Ademais, todos eles concordaram de forma plena ou parcial que a metodologia de ensino experimentada se mostrou mais interessante que a metodologia tradicional. Tais resultados demonstram que a utilização da Sala de Aula Invertida Adaptada ao Ensino Remoto, se mostrou uma boa metodologia para torna mais intuitivo o estudo da Proporcionalidade, com o aumento da disponibilidade de tempo para o professor revisar o conteúdo e esclarecer as dúvidas dos alunos.

Diante do exposto, é possível afirmar que a metodologia adotada favoreceu o processo de ensino-aprendizagem de Proporcionalidade, fato esse que foi confirmado após a experimentação da pesquisa. O presente trabalho trouxe diversos benefícios para as turmas onde a sequência didática foi aplicada, aumentando o interesse dos alunos, melhorando o aprendizado e expondo a presença do conceito de Proporcionalidade em situações cotidianas, de forma a envolver o aluno e motivá-lo.

Por fim, acredita-se que a SAI é uma metodologia capaz de construir e transmitir o conhecimento de diversas áreas da Matemática. Sendo assim, espera-se que este trabalho sirva como ponto de partida para o desenvolvimento de novas estratégias de ensino do tema Proporcionalidade, fornecendo informações para trabalhos futuros e, para que professores transformem suas práticas pedagógicas, afim de proporcionar aos estudantes a construção de um conhecimento mais significativo através do uso de recursos tecnológicos.

Referências

ÁVILA, G. *Análise Matemática para Licenciatura*. 3. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2001. Citado na página 177.

BACICH, L.; MORAN, J. Aprender e ensinar com foco na educação híbrida. *Revista Pátio*, Junho 2015. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2015/07/hibrida.pdf. Citado na página 33.

BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem téorico-prática. Porto Alegre: Editora Penso, 2018. Citado na página 34.

BACICH, L.; NETO, A.; TREVISANI, F. *Ensino Híbrido*: Personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre - RS: Penso, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 16, 17, 32, 33, 38, 58, 79 e 80.

BERGMANN, J.; SAMS, a. *Sala de Aula Invertida*: Uma metodologia ativa de aprendizagem. Rio de Janeiro: LTC, 2020. Citado 5 vezes nas páginas 17, 34, 55, 60 e 79.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. Citado 13 vezes nas páginas 172, 173, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184 e 185.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC / SEF: [s.n.], 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Citado 5 vezes nas páginas 19, 187, 188, 189 e 190.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC: [s.n.], 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Citado 5 vezes nas páginas 16, 32, 187, 190 e 191.

BRASIL. *Parecer CNE/CP n 19/2020*. Brasília, 2020. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2020-pdf/167131-pcp019-20/file. Citado 3 vezes nas páginas 17, 35 e 36.

CASTRO, F. *A Relação da Proporcionalidade com Outros Temas Matem'aticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa, 2014. Disponível em: http://www.locus.ufv.br/handle/123456789/8416. Citado na página 19.

CHRISTENSEN, C.; HORN, M.; STAKER, H. *Ensino Híbrido: uma Inovação Disruptiva?*: Uma introdução à teoria dos híbridos. Instituto Península, 2013. Disponível em: https://www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensino-hibrido_uma-inovacao-disruptiva.pdf. Citado 3 vezes nas páginas 17, 36 e 37.

CRESWELL, J. W. *Projeto de Pesquisa: Método qualitativo, quantitativo e misto*. 3. ed. Porto Alegre - RS: Bookman, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 49.

DAMIANI, M. F.; ROCHEFORT, R. S.; CASTRO, R. F.; DARIZ, M. R.; PINHEIRO, S. S. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. *Cadernos de educação*, Pelotas - RS, n. 45, p. 57–67, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822/3074. Citado na página 48.

DANTE, L. *Projeto Teláris*: matemática. 3. ed. São Paulo: Editora Ática, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 60.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 5. ed. Campinas - SP: Editora Unicamp, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 180, 181, 182, 183, 184 e 185.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de Pesquisa*. 1. ed. Porto Alegre - RS: Editora da UFRGS, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

GIL, A. C. *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. 6. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 47, 48, 49 e 50.

GIL, A. C. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. 5. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2010. Citado na página 48.

INEP. *Relatório Brasil no PISA 2018*. Brasília - DF: [s.n.], 2019. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

INEP. *Sinopses Estatísticas da Pesquisa Resposta Educacional à Pandemia de COVID-19 - Educação Básica*. Brasília: [s.n.], 2021. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores/censo-escolar/pesquisas-suplementares/pesquisa-covid-19. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 60.

KHAN, S. *Um mundo, uma escolha*: A educação reinventada. Rio de Janeiro - RJ: Editora Intrínseca, 2013. Citado na página 39.

LIBÂNEO, J. C. *Didática*. [S.l.]: Cortez Editora, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 189.

LIMA, E.; CARVALHO, P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. Temas e problemas. In: *Coleção do Professor de Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

LIMA, E. L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2012. Citado 4 vezes nas páginas 27, 29, 30 e 31.

MELO, P. *Teorema de Tales*. 2014. Disponível em: https://www.estudopratico.com.br/teorema-de-tales/. Citado na página 174.

MIRANDA, M. *Pensamento Proporcional: uma análise qualitativa de dissertações*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: file:///C:/Users/franc/Downloads/Marcia%20Regiane%20Miranda.pdf. Citado na página 19.

MOREIRA, D. A. *O Método Fenomenológico na Pesquisa*. São Paulo: Pioneira Thomson, 2002. Citado na página 47.

OLIVEIRA, T.; ARAUJO, I.; VEIT, E. Sala de aula invertida (flipped classroom): Inovando as aula de física. *Física na escola*, v. 14, n. 2, p. 4–13, 2016. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/159368. Citado na página 38.

ONUCHIC, L.; ALLEVATO, N. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. *Bolema*, Rio Claro - SP, n. 31, p. 79 a 102, 2008. Citado 6 vezes nas páginas 22, 23, 24, 25, 26 e 27.

PLATAFORMA KHAN ACADEMY. *Khan Academy*. New Orleans, 2008. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/. Citado 11 vezes nas páginas 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 61, 62, 63 e 64.

PORTAL DO PROFESSOR. *Papiro de Rhind: Sequências e Progressões*. Brasília, 2019. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41049. Citado na página 173.

REVISTA ENSINO INOVATIVO. *Um Novo Cenário Educacional: Metodologias Inovadoras*. 2015. Disponível em: https://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/ei/issue/view/3058/1206. Citado na página 34.

ROQUE, T. *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. [S.I.]: Zahar, 2012. Citado 11 vezes nas páginas 172, 173, 174, 176, 177, 179, 180, 181, 182, 183 e 185.

SILVA, R. D. *Algumas Tecnologias De Informação e Comunicação Como Ferramentas Para O Ensino de Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2016. Citado na página 31.

VICENTE, J. M.; PAULINO, R. O pte, as tic, a matemática e o geogebra. *Adolesciência, Revista Júnior de Investigação*, v. 2, p. 4, Dezembro 2013. Disponível em: https://bibliotecadigital.ipb.pt/bitstream/10198/12974/1/109-656-1-PB.pdf. Citado na página 32.

Apêndices

APÊNDICE A

Solicitação para realização da pesquisa

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Campos dos Goytacazes, 02 de Março de 2021.

De **Nelson Machado Barbosa**
Professor Associado do Laboratório de Ciências Matemáticas — CCT/UENF

Para Direção da Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição

Ass.: Solicitação para realização de atividades

Prezado Diretor,

Ao cumprimentá-lo cordialmente venho por meio deste, solicitar a V. Senhoria, a autorização para que o discente **FRANCISCO ULISSES DA SILVA SOUSA,** regularmente matriculado no curso de Pós-Graduação em Matemática, pela Universidade Estadual do Norte Fluminense, possa desenvolver seu experimento de mestrado na turma do 7º Ano do Ensino Fundamental, da Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição. Vale ressaltar que essas atividades contribuirão de forma significativa para o ensino e aprendizado do conceito de proporcionalidade, através do Ensino Híbrido: Sala de Aula Invertida.

Atenciosamente,

Campos dos Goytacazes, 02 de março de 2021.

Assinatura: ______________________
Nelson Machado Barbosa
Matrícula: 10.874-1

Prof. Nelson M. Barbosa
Lab. Ciências Matemáticas
CCT / UENF
ID: 4193443-1

RECEBIDO
Data 02/03/21 Hora 10 horas
Rubrica ______ Matr.: 38417

UENF Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

PROFMAT

SBM

TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Prezado(a) Diretor(a),

Os alunos da turma 701, da Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição, estão sendo convidados a participar de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da UENF, realizado pelo mestrando e professor de matemática dos referidos alunos, Francisco Ulisses da Silva Sousa. A pesquisa será realizada de forma adaptada ao ensino remoto, durante as aulas de Matemática, com o seguinte tema: ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE ATRAVÉS DO ENSINO HÍBRIDO: SALA DE AULA INVERTIDA, onde os alunos irão aprender Proporções por meio do Ensino Híbrido, que é a fusão do método tradicional de ensino com as tecnologias digitais. Para isso, eles terão acesso prévio ao conteúdo que será abordado nas aulas síncronas, através da plataforma Khan Academy. A metodologia de Sala de Aula Invertida consiste em expandir o processo de ensino para além dos encontros síncronos, trazendo autonomia para o aluno no processo de construção do saber. Além disso, essa metodologia permite que as aulas sejam mais dinâmicas, disponibilizando mais tempo para resolução de questões e desenvolvimento de atividades. O objetivo principal dessa experimentação é a verificar se essa metodologia acarreta melhora no processo de ensino-aprendizagem dos alunos. Dessa forma, gostaria de pedir sua autorização para que a Escola e a referida turma possam participar da pesquisa, e que os registros das atividades possam ser publicados.

Desde já, agradeço, e se estiver de acordo, peço que preencha o formulário a seguir:

- -

Eu, Anderson Carneiro Machado, diretor(a) da Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição, autorizo a participação da turma 701 na pesquisa sobre ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE ATRAVÉS DO ENSINO HÍBRIDO: SALA DE AULA INVERTIDA, desenvolvida pelo professor de Matemática Francisco Ulisses da Silva Sousa.

Anderson Carneiro Machado

Assinatura

Anderson Carneiro Machado
Diretor Geral
Matrícula: 38.417
Portaria nº 1836 / 2017

Campos dos Goytacazes, 02 de março de 2021.

TRABALHO DE PESQUISA CIENTÍFICA

AUTORIZAÇÃO

Senhores Pais/Responsáveis,

Os alunos da turma 701 da Escola Municipal Nossa Senhora da Conceição, estão sendo convidados a participarem de uma pesquisa do Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, da Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF), realizada pelo professor de Matemática, Francisco Ulisses da Silva Sousa. A pesquisa será realizada de forma remota, durante algumas aulas de forma síncrona e assíncrona, com o seguinte título: ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE ATRAVÉS DO ENSINO HÍBRIDO: SALA DE AULA INVERTIDA, onde os alunos irão aprender e aplicar o conceito de proporcionalidade através de atividades contextualizadas e tecnológicas. Tendo como objetivo principal a melhora no ensino aprendizagem do seu filho(a), pedimos sua autorização para que ele(a) possa participar das atividades, e que os registros das atividades possam ser publicados.

OBS.: Os resultados de atividades e questionários aplicados serão divulgados anonimamente de maneira coletiva e as fotos utilizadas não exporão a imagem de qualquer aluno.

Desde já, agradeço, e peço que, aprovando a participação do seu filho(a), destaque e preencha o formulário a seguir:

- -

Eu, ____, autorizo a

participação de meu filho(a) ____

na pesquisa desenvolvida pelo professor de Matemática, Francisco Ulisses da Silva Sousa, sobre ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE ATRAVÉS DO ENSINO HÍBRIDO: SALA DE AULA INVERTIDA

Nome do aluno:____

Campos dos Goytacazes, ___ de março de 2021.

APÊNDICE B

Instrumentos de Coleta de Dados

QUESTIONÁRIO DO ALUNO

Prezado(a) aluno (a),
sua resposta a este questionário contribuirá para o desenvolvimento de minha pesquisa de Dissertação de Mestrado. Seu empenho nas respostas e resoluções me auxiliará a melhor compreender as dificuldades do tema proposto e sugerir atividades e recursos para melhoria do processo de ensino-aprendizado.
Conto com sua colaboração!
Obrigado!

Francisco Ulisses da Silva Sousa

---

*Obrigatório

1. Idade: *

____

Uso de tecnologias

2. Você possui computador em casa? *

Marcar apenas uma oval.

- ⬭ Sim
- ⬭ Não

3. Possui Smartphone? *

Marcar apenas uma oval.

- ⬭ Sim
- ⬭ Não

4. Você possui Tablet? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

5. Você possui internet banda larga em casa? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

Aluno(a): ____

Turma:7ºano ________________________ **Data:**____/_____/_____

Pré-Teste

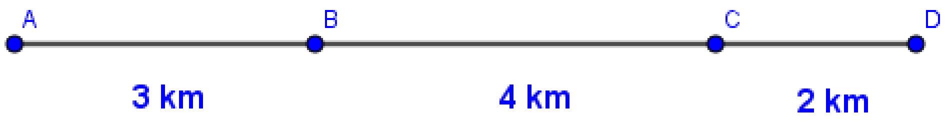
1. Em uma prova de testes. Maria acertou 14 questões e errou 6. Escreva na forma de fração irredutível:

a) a razão entre o número de acertos e o número de erros:

b) a razão entre o número de erros e o número de acertos:

c) a razão entre o número de acertos e o número total de questões:

2. Observe a figura abaixo:



Calcule a razão entre as medidas de:

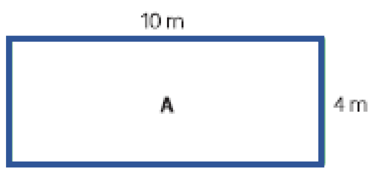
a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$:__________________

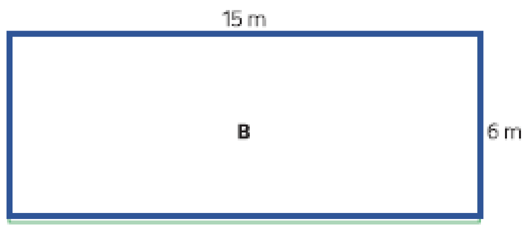
b) $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$:__________________

c) $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$:__________________

d) $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$:__________________

3. Calcule:





a) a razão entre o comprimento de A e o comprimento de B:_____________________

b) a razão entre a largura de A e a largura de B:______________________________

c) a razão entre o perímetro de A e o perímetro de B:__________________________

d) a razão entre a área de A e a área de B:___________________________________

4. Calcule e indique na forma de fração irredutível:

a) a razão que tem 21 como antecedente e 49 como consequente:

b) a razão que tem 49 como antecedente e 21 como consequente.

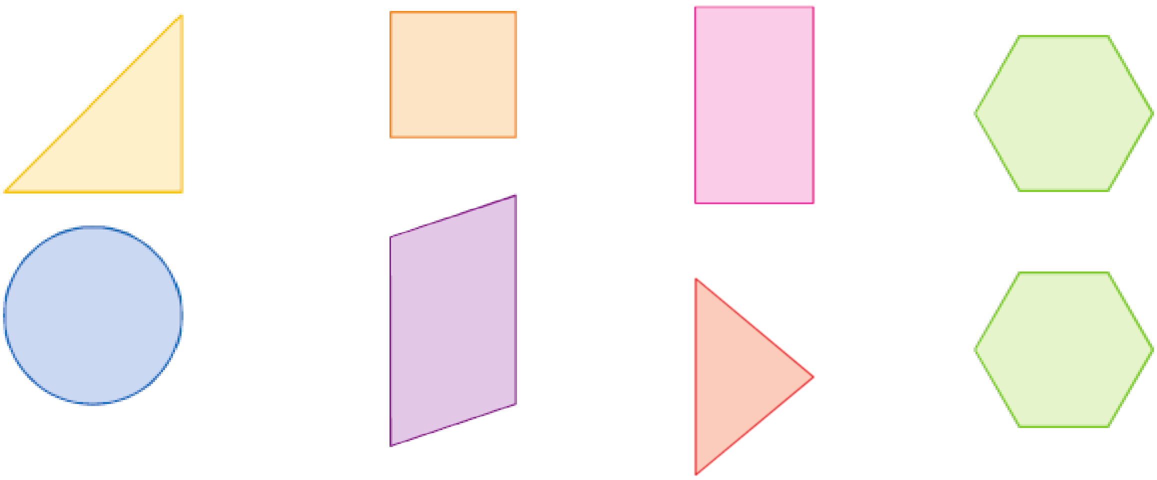
5. Calcule as razões correspondentes a cada item, considerando a situação a seguir:
Em uma partida de basquete, a equipe de Paulo e Vitor marcou 80 pontos, dos quais Paulo marcou 16 e Vitor 20.

a) Razão entre o número de pontos marcados por Paulo e o número de pontos marcados por Vitor.

b) Razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados pela equipe.

c) Razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados por Paulo

6. Observe todas as figuras representadas a seguir.



Indique a razão entre o número:

a) de círculos e de regiões triangulares:________________________________

b) de regiões triangulares e o total de figuras:___________________________

c) de círculos e de regiões de quatro lados:_____________________________

d) de regiões triangulares e de regiões de quatro lados:____________________

e) de círculos e de regiões de seis lados:______________________________

7. Ligue cada quadro à esquerda, que indica porcentagem, com o quadro à direita, que apresenta a razão correspondente.

75%	3 em 5
25%	3 para 4
50%	$\frac{1}{4}$
60%	1 : 2
10%	$\frac{1}{10}$

PROFMAT

Aluno(a): ____

Turma:7ºano _______________________ **Data:**____/_____/_____

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Teste

1- Em cada item, verifique se as razões formam ou não uma proporção e complete com = ou ≠.

a) $\frac{6}{9}$ ---- $\frac{2}{3}$

c) $\frac{5}{4}$ ---- $\frac{7}{6}$

e) $\frac{7}{9}$ ---- $\frac{8}{10}$

b) $\frac{6}{5}$ ---- $\frac{18}{15}$

d) $\frac{3}{4}$ ---- $\frac{4}{5}$

f) $\frac{15}{20}$ ---- $\frac{6}{8}$

2- Escreva uma proporção usando os números 3, 7, 9 e 21 e justifique que realmente é uma proporção pela propriedade fundamental.

3- Lucas e Mariana tiveram o mesmo aproveitamento em um concurso de perguntas e respostas. Lucas respondeu a 30 questões e acertou 24. Mariana respondeu a 35 questões. Quantas questões Mariana acertou?

4- Tereza é costureira. Ela está fazendo bermudas encomendadas por uma instituição. Com 2,80 m de tecido, ela fez 4 bermudas. Agora ela quer saber de quantos metros precisará para fazer 10 bermudas?

5- Para percorrer 320 km, o carro de Miguel gastou 25 L de gasolina. Nas mesmas condições, Miguel quer saber quantos quilômetros seu carro percorrerá com 50 L. Calcule e justifique.

6- Gabriela está vendendo na feira saquinhos com 3 maças ao preço de R$ 5,00. Antônio é dono de uma confeitaria e vai precisar de 30 maças para fazer algumas tortas. Quanto Antônio vai gastar comprando de Gabriela as maçãs de que necessita?

7- Uma torneira que despeja 12 litros de água por minuto enche uma piscina em 2 horas. Se essa torneira despejasse 24 litros de água por minuto, em quanto tempos encheria essa mesma piscina?
Responda e justifique: as grandezas indicadas em litros por minuto e horas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?

8- A ração que José tem é suficiente para alimentar igualmente 4 cachorros por 3 dias. Se fossem 2 cachorros e se fosse mantida a quantidade de ração por cachorro, a ração daria para quantos dias?

9- Classifique as relações entre as grandezas abaixo, como diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais e depois calcule.

a) Jogando dois dados, eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?

b) A altura de Ana era de 1,07 m aos 5 anos de idade. Qual será a altura de Ana aos 10 anos de idade?

c) Uma impressora imprime 60 folhas em 3 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 600 folhas?

d) Se Joana ler 8 páginas por hora, ela lerá um livro de contos em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela lerá esse livro?

e) Nos 7 primeiros dias de janeiro, choveu em 3 dias. E, nos 10 primeiros dias de janeiro, choveu em quantos dias?

f) Para encher um tanque, são necessárias 30 vasilhas de 6L cada uma. Se forem usadas vasilhas de 3L cada uma, quantas serão necessárias?

10- Calcule x, sabendo que 6 e x são valores correspondentes a duas grandezas diretamente proporcionais e que o coeficiente de proporcionalidade, nessa ordem é 2.

Escala

A escala é usada principalmente na elaboração de mapas, plantas baixas e maquetes.

Escala é a razão entre uma medida de comprimento no desenho e a medida de comprimento correspondente na realidade.

$$\text{escala} = \frac{\text{distância no desenho}}{\text{distância real}}$$

Um mapa, como o do Brasil, por exemplo, é uma representação do país, visto de cima, em tamanho reduzido e que preserva as relações de tamanho.

Qualquer mapa, planta ou maquete tem uma escala.

Brasil político

A escala do mapa indica a razão entre a distância representada e a distância real.

No mapa ao lado, a escala é de 1 cm para 440 km, isto é, cada 1 cm no mapa corresponde a 440 km (ou 44 000 000 cm) na realidade.

As distâncias nos mapas são diretamente proporcionais às distâncias correspondentes na realidade.

Indica-se essa escala assim: 1: 44 000 000 ou $\frac{1}{44\,000\,000}$ ou 1 cm : 440 km. (Lê-se: um centímetro para quatrocentos e quarenta quilômetros.)

No mapa da página anterior, a distância em linha reta de Porto Alegre a Cuiabá é de 3,8 cm. Como calcular a distância real entre essas duas capitais?

Veja no quadro abaixo:

Para cada 1 cm no mapa, correspondem 440 km na realidade. ($\times 440$)

Para 3,8 cm no mapa, correspondem $3{,}8 \cdot 440 = 1672$ km na realidade.

Portanto, a distância real de Porto Alegre a Cuiabá, em linha reta, é de 1697,5 km.

11- Meça as distâncias no mapa da página anterior e calcule usando a mesma escala.

a) a distância real de Goiânia a Manaus: _______ km.

b) a distância real de Belo Horizonte a Boa Vista: __________ km.

12-

Veja abaixo a página de um livro representada em escala.

Representação da página de um livro.

a) Sabendo que a largura real dessa página é de 24 cm, qual foi a escala usada no desenho?

b) Usando o desenho e a escala, determine a altura real dessa página.

Usando regra de três simples, resolva os problemas a seguir.

13- Guardando R$ 18,00 por mês, Gilberto conseguiu juntar certa quantia em 10 meses. Para obter essa mesma quantia em 8 meses, quanto ele deveria ter guardado por mês?

14- Para a festa junina, um grupo de 15 alunos fez certo número de bandeirinhas em 6 h. Em quantas horas um grupo de 20 alunos, trabalhando no mesmo ritmo, faria a mesma quantidade de bandeirinhas?

15- Três torneiras iguais enchem uma caixa-d'água em 3 horas. Duas torneiras iguais a essas enchem a mesma caixa-d'água em quantas horas?

Questionário Final

*Obrigatório

1. Nome Completo: *

2. Com relação as atividades assinale com um "X", nas afirmações abaixo, o grau de concordância que melhor representa a sua percepção. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Ao estudar o conteúdo antes dos encontros houve maior facilidade para a compreensão dos conteúdos trabalhos durante as aulas.					

3. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Eu consegui assistir as videoaulas de conteúdo antes da aula online com o professor.					

4. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
As videoaulas e as atividades semanais realizadas na plataforma khan contribuíram para a compreensão do assunto estudado.					

5. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Ao assistir aos vídeos, eu fiz uso do recurso "pausar"					

6. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Ao assistir aos vídeos, eu fiz uso do recurso "avançar"					

7. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Ao assistir aos vídeos, eu fiz uso do recurso "assistir novamente"	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭

8. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Durante o vídeo, eu fiz anotações sobre o conteúdo que estava sendo explicado.	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭

9. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Os exercícios realizados na plataforma khan, após os vídeos contribuíram para o entendimento dos conceitos estudados.	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭

10. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
A correção dos exercícios propostos na plataforma khan, durante as aulas ao vivo foram relevantes para auxiliar na compreensão do conteúdo.	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭

11. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Os encontros durante as aulas síncronas foram mais produtivos, com o conhecimento dos conteúdos a serem trabalhados em aula.					

12. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Em relação a aprendizagem do conteúdo, o modelo da Sala de Aula Invertida adaptada ao ensino remoto se mostrou mais interessante que o modelo tradicional de ensino.					

13. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
A Sala de Aula Invertida adaptada ao ensino remoto dinamizou o processo de ensino-aprendizagem durante o Ensino Remoto.	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭

14. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Eu considero que o papel do professor durante essas aulas foi importante.	⬭	⬭	⬭	⬭	⬭

15. *

Marcar apenas uma oval por linha.

	Concordo	Concordo parcialmente	Não concordo e nem discordo	Discordo parcialmente	Discordo
Eu gostaria de continuar utilizando o modelo Sala de Aula Invertida nas aulas de matemática.	◯	◯	◯	◯	◯

16. Liste os pontos positivos da sala de aula invertida. *

17. Liste os pontos negativos da sala de aula invertida. *

APÊNDICE C

Respostas do Pré-teste

1. Em uma prova de testes, Maria acertou 14 questões e errou 6. Escreva na forma de fração irredutível:

a) a razão entre o número de acertos e o número de erros:

a) $\frac{14 \div 2 = 7}{6 \div 2 = 3}$

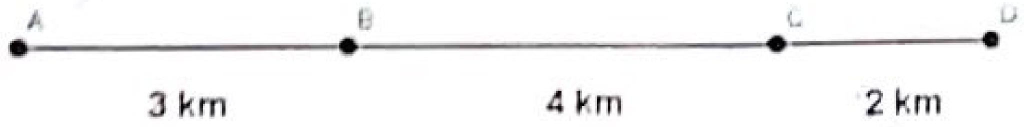
b) a razão entre o número de erros e o número de acertos:

b) $\frac{6 \div 2 = 3}{14 \div 2 = 7}$

c) a razão entre o número de acertos e o número total de questões:

c) $\frac{14 \div 2 = 7}{20 \div 2 = 10}$

2. Observe a figura abaixo:



Calcule a razão entre as medidas de:

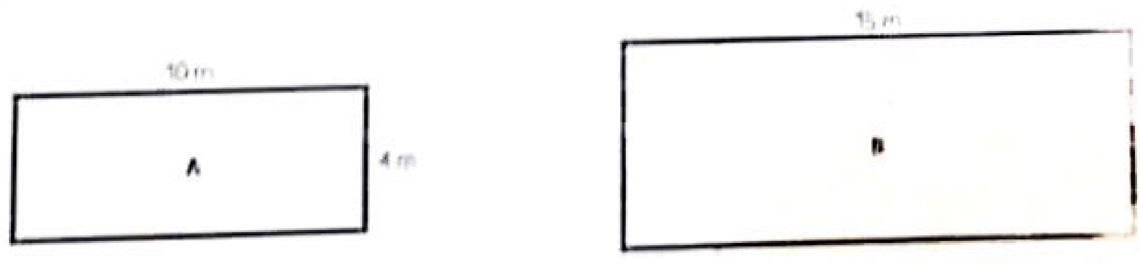
a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$: 3/4 ou $\frac{3 \div 1}{4 \div 1}$ $\frac{3}{4}$ km

b) $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$: $\frac{2}{6}$ km

c) $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$: $\frac{5}{1}$

d) $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$: $\frac{5}{3}$

3. Calcule:



a) a razão entre o comprimento de A e o comprimento de B: 2/3

b) a razão entre a largura de A e a largura de B: 2/3

c) a razão entre o perímetro de A e o perímetro de B: 20/8

d) a razão entre a área de A e a área de B: 5/2 , 5/3

4. Calcule e indique na forma de fração irredutível:

a) a razão que tem 21 como antecedente e 49 como consequente: $= \frac{3}{7}$

4 $\frac{21 \div 7 = 3}{49 \div 7 = 7}$

b) a razão que tem 49 como antecedente e 21 como consequente. $= \frac{7}{3}$

$\frac{49 \div 7 = 7}{21 \div 7 = 3}$

5. Calcule as razões correspondentes a cada item, considerando a situação a seguir:
Em uma partida de basquete, a equipe de Paulo e Vitor marcou 80 pontos, dos quais Paulo marcou 16 e Vitor 20.

a) Razão entre o número de pontos marcados por Paulo e o número de pontos marcados por Vitor. $\frac{16 \div 4 = 4}{20 \div 4 = 5}$

R: $\frac{4}{5}$

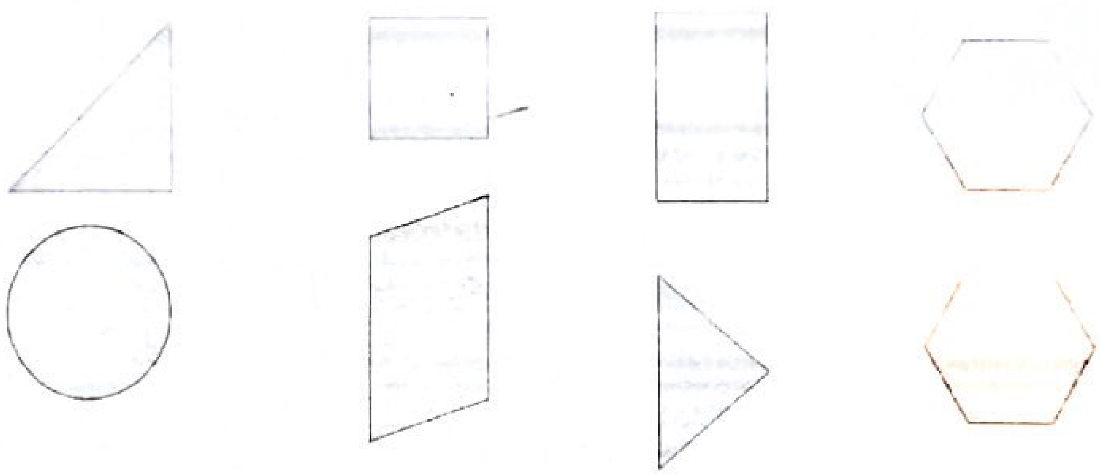
b) Razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados pela equipe. $\frac{16 \div 8 = 2}{80 \div 8 = 10}$

R: $\frac{2}{10}$

c) Razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados por Paulo $\frac{20 \div 4 = 5}{16 \div 4 = 4}$

R. $\frac{5}{4}$

6. Observe todas as figuras representadas a seguir.



Indique a razão entre o número:

a) de círculos e de regiões triangulares: 1/2

b) de regiões triangulares e o total de figuras: 2/8

c) de círculos e de regiões de quatro lados: 1/3

d) de regiões triangulares e de regiões de quatro lados: 2/3

e) de círculos e de regiões de seis lados: 1/2

7. Ligue cada quadro à esquerda, que indica porcentagem, com o quadro à direita, que apresenta a razão correspondente.

75%	3 em 5
25%	3 para 4
50%	$\frac{1}{4}$
60%	1 : 2
10%	$\frac{1}{10}$

Teste

1- Em uma prova de testes. Maria acertou 14 questões e errou 6. Escreva na forma de fração irredutível:

a) A razão entre o número de acertos e o numero de erros:

7÷3

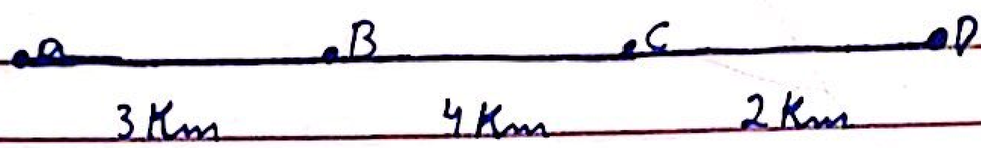
b) A razão entre o número de erros e o números de acertos:

3÷7

c) A razão entre o número de acertos e o total de questões:

7÷10

2- Observe a figura abaixo:



Calcule a razão entre as medidas de:

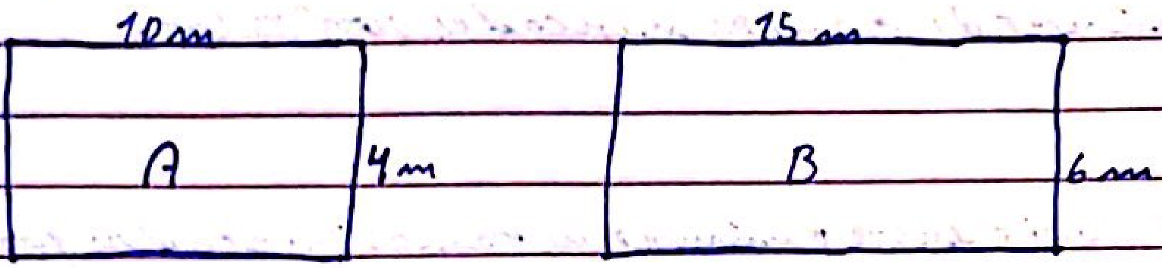
a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$: $3 \div 4$

b) $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$: $2 \div 6 = 1 \div 3$

c) $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$: $7 \div 2$

d) $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$: $9 \div 7$

3-Calcule:



a) A razão entre o comprimento de A e o comprimento de B:

10÷15=2÷3

b) A razão entre a largura de A e a largura de B:

4÷6=2÷3

c) A razão entre o perímetro de A e o perímetro de B:

28÷42=2÷3

d) A razão entre a área de A e a área de B:

40÷90=4÷9

4-Calcule e indique na forma de fração irredutível:

a) A razão que tem 21 como antecedente e 49 como consequente:

$3 \div 7$

b) A razão que tem 49 como antecedente e 21 como consequente.

$7 \div 3$

a) Razão entre o número de pontos marcados por Paulo e o número de pontos marcados por Vitor.
16 ÷ 20 = 4 ÷ 5

B) Razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados pela equipe.
20 ÷ 80 = 1 ÷ 4

c) Razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados por Paulo.
20 ÷ 16 = 5 ÷ 4

Indique a razão entre o numero:

a) de circulos e de regiões triangulares: 1÷2

b) de regiões triangulares e o total de figurinhas: 2÷8=1÷4

c) de círculos de regiões de quatro lados: 1÷3

d) de regiões triangulares e de regiões de quatro lados: 2÷3

e) de círculos e de regiões de seis lados: 1÷2

7- Ligue cada quadro à esquerda, que indica porcentagem, com o quadro à direita, que apresenta a razão correspondente.

75%	3 em 5
25%	3 para 4
50%	$\frac{1}{4}$
60%	1:2
10%	$\frac{1}{10}$

1. Em uma prova de testes, Maria acertou 14 questões e errou 6.
Escreva na forma de fração irredutível:

a) a razão entre o número de acertos e o número de erros:

$\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

b) a razão entre o número de erros e o número de acertos:

$\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$

c) a razão entre o número de acertos e o número total de questões:

$\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

2- Observe a figura abaixo:

Calcule a razão entre as medidas de:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$: $3/4 = 0{,}75$

b) $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$: $2/6 = 0{,}33...$

c) $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$: $7/2 = 3{,}5$

3. Calcule:

a) a razão entre o comprimento de A e o comprimento de B:
10/15 = 2/3

b) a razão entre a largura de A e a largura de B:
4/6 = 2/3

c) a razão entre o perímetro de A e o perímetro de B:
28/42 = 4/6

d) a razão entre a área de A e a área de B:
40/90 = 8/18

4. Calcule e indique na forma de fração irredutível:

a) a razão que tem 21 como antecedente e 49 como consequente:

21/49 = 3/7

b) a razão que tem 49 como antecedente e 21 como consequente:

49/21 = 7/3

Em uma partida de basquete, a equipe de Paulo e Vitor marca 80 pontos, dos quais Paulo marcou 16 e Vitor 20.

a) Razão entre o número de pontos marcados por Paulo e o número de pontos marcados por Vitor.

$$\frac{16}{20}$$

b) Razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados pela equipe.

$$\frac{20}{80}$$

c) Razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados por Paulo.

$$\frac{20}{16}$$

a) de círculos e de regiões triangulares: $\frac{1}{2}$

b) de regiões triangulares e o total de figuras: $\frac{2}{8}$

c) de círculos e de regiões de quatro lados: $\frac{1}{3}$

d) de regiões triangulares e de regiões quatro lados: $\frac{2}{3}$

e) de círculos e de regiões de seis lados: $\frac{1}{2}$

7- Ligue cada quadro à esquerda, que indica porcentagem, com o quadro à direita, que apresenta a razão correspondente.

75%	3 em 5
25%	3 em 4
50%	$\frac{1}{4}$
60%	1:2
10%	$\frac{1}{10}$

1)
a) 14 : 6 (a) $\frac{14}{6} = \frac{6}{14}$ (b)
b) 6 : 14
c) 20 (c) 14
+6
20

2)
a) 3 : 4
b) 2 : 6
c) 7 : 2
d) 9 : 7

3)
a) 10 : 15 (a) $\frac{10}{15} = \frac{4}{6}$ (b)
b) 4 : 6
(c) 10 + 10 + 4 + 4 = 28
c) 28 : 42 15 + 15 + 6 + 6 = 42
d) 40 : 90 (d) 10 x 4 = 40
15 x 6 = 90

4)
a) 21 : 49 (a) 21 ÷ 49

(b) 49 ÷ 21

b) 49 : 21

5

(a) 16 : 20

(b) 20 : 80

(c) 20 : 16

6

(a) 1 : 4

(b) 4 : 8

(c) 1 : 3

(d) 4 : 3

(e) 1 : 2

7

$25\% = \frac{1}{4}$

$75\% = \frac{3}{4}$

$50\% = 1 : 2$

$60\% = \frac{3}{5}$

$10\% = \frac{1}{10}$

Matemática

1- Em uma prova de testes, Maria acertou 14 questões e errou 6. Escreva na forma de fração irredutível:

a) A razão entre o número de acertos e o número de erros: $\frac{14}{6}$

b) A razão entre o número de erros e o número de acertos: $\frac{6}{14}$

c) A razão entre o número de acertos e o número total de questões: $\frac{14}{20}$

2- Observe a figura abaixo.

Calcule a razão entre as medidas de:

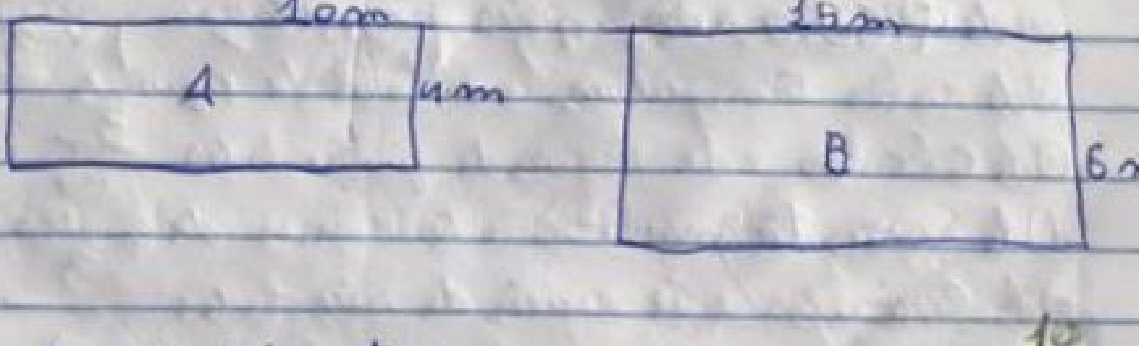
a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$: $\frac{3}{4}$

b) $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$: $\frac{2}{6}$

c) $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$: $\frac{7}{2}$

d) $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$: $\frac{9}{7}$

3 Calcule:



a) A razão entre o comprimento de A e o comprimento de B: $\frac{10}{15}$

b) A razão entre a largura de A e a largura de B: $\frac{4}{6}$

c) A razão entre o perímetro de A e o perímetro de B: $\frac{28}{42}$

d) A razão entre a área de A e a área de B: $\frac{40}{90}$

4- Calcule e indique na forma de frações irredutível:

a) a razão que tem 21 como antecedente e 49 como consequente: $\frac{21}{49}$

b) a razão que tem 49 como antecedente e 21 como consequente: $\frac{49}{21}$

5- Calcule as razões correspondentes a cada item considerando a situação a seguir: Em uma partida de basquete a equipe de Bulo e Vitor marcou 80 pontos dos quais Bulo marcou 16 e Vitor 20.

a) razão entre o número de pontos marcados por Bulo e o número de pontos marcados por Vitor. $\frac{16}{20} = 0,8$

b) razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados pela equipe. $\frac{20}{80} = 0,25$

c) Razão entre o número de pontos marcados por Vitor e o número de pontos marcados por Bulo. $\frac{20}{16} = 1,25$

6- Observe todas as figuras representadas a seguir

Indique a razão entre o número:

a) de círculos e de regiões triangulares $\frac{3}{3}$

b) de regiões triangulares e o total de figuras $\frac{3}{8}$

c) de círculos e de regiões de quatro lados $\frac{3}{2}$

d) de regiões triangulares e de regiões de quatro lados $\frac{3}{2}$

e) de círculos e de regiões de seis lados $\frac{3}{2}$

7- Ligue cada quadro à esquerda que indica porcentagem com o quadro à direita que apresenta a razão correspondente

75%	3 em 5
25%	3 para 4
50%	$\frac{1}{4}$
60%	1:2
10%	$\frac{1}{10}$

APÊNDICE D

Respostas do Pós-teste

Teste

1- Em cada item, verifique se as razões formam ou não uma proporção e complete com = ou ≠.

a) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{4} \neq \frac{7}{6}$ e) $\frac{7}{9} \neq \frac{8}{10}$

a) $\frac{6}{9} \times \frac{2}{3} = 6.3 \Rightarrow 2.9$ c) $\frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \Rightarrow 5.6 \neq 7.4$ e) $\frac{7}{9} \times \frac{8}{10} \Rightarrow 7.10 \neq 9.8$

$18 = 18$ $30 \neq$ $70 \neq 72$

b) $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$ d) $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{5}$ f) $\frac{15}{20} = \frac{6}{8}$

b) $\frac{6}{5} \times \frac{18}{15} \Rightarrow 6.15 = 5.18$ d) $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \Rightarrow 3.5 \neq 4.4$ f) $\frac{15}{20} \times \frac{6}{8} \Rightarrow 15.8 = 20.6$

$90 = 90$ $15 \neq 16$ $120 = 120$

2- Escreva uma proporção usando os números 3, 7, 9 e 21 e justifique que realmente é uma proporção pela propriedade fundamental.

$\frac{3}{9} = \frac{7}{21}$ $3 \cdot 21 = 9 \cdot 7$

$63 = 63$

3- Lucas e Mariana tiveram o mesmo aproveitamento em um concurso de perguntas e respostas. Lucas respondeu a 30 questões e acertou 24. Mariana respondeu a 35 questões. Quantas questões Mariana acertou?

$\frac{24}{30} \times \frac{x}{35} \Rightarrow 30x = 24.35$

$30x = 840$

$x = \frac{840}{30} = 28.$

Resposta: Mariana asertou 28 questões.

4- Tereza é costureira. Ela está fazendo bermudas encomendadas por uma instituição. Com 2,80 m de tecido, ela fez 4 bermudas. Agora ela quer saber de quantos metros precisará para fazer 10 bermudas?

$$\frac{2{,}8}{4} = \frac{x}{10} \Rightarrow 4 . x = 2{,}8 . 10$$

$$4x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{4} = 7\ m$$

5- Para percorrer 320 km, o carro de Miguel gastou 25 L de gasolina. Nas mesmas condições, Miguel quer saber quantos quilômetros seu carro percorrerá com 50 L. Calcule e justifique.

$$\frac{320}{25} = \frac{x}{50} \Rightarrow 25x = 320.50$$

$$25x = 16000$$

$$x = \frac{16000}{25} \Rightarrow x = 640\ Km$$

6- Gabriela está vendendo na feira saquinhos com 3 maças ao preço de R$ 5,00. Antônio é dono de uma confeitaria e vai precisar de 30 maças para fazer algumas tortas. Quanto Antônio vai gastar comprando de Gabriela as maças de que necessita?

$$\frac{3}{5} = \frac{30}{x} \Rightarrow 3x = 5.30$$

$$3x = 150$$

$$x = \frac{150}{3} = R\$\ 50{,}00$$

7- Uma torneira que despeja 12 litros de água por minuto enche uma piscina em 2 horas. Se essa torneira despejasse 24 litros de água por minuto, em quanto tempos encheria essa mesma piscina?
Responda e justifique: as grandezas indicadas em litros por minuto e horas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais? grandezas inversamente propo-
sione

12 — 2
24 — x

$$\Rightarrow 24x = 12.2$$

$$24x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{24} = 1h$$

8- A ração que José tem é suficiente para alimentar igualmente 4 cachorros por 3 dias. Se fossem 2 cachorros e se fosse mantida a quantidade de ração por cachorro, a ração daria para quantos dias? grandezas inversamente proporcionais

4 — 3
2 — x

$$\Rightarrow 2x = 4.3$$

$$2x = 12 \Rightarrow x\ \frac{12}{2} = 6\ dias$$

9- Classifique as relações entre as grandezas abaixo, como diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais e depois calcule.

a) Jogando dois dados, eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?

Não proporcionais

b) A altura de Ana era de 1,07 m aos 5 anos de idade. Qual será a altura de Ana aos 10 anos de idade?

Não proprorcionais.

c) Uma impressora imprime 60 folhas em 3 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 600 folhas?

grandezas diretamente proporcionais

$$\frac{60}{3} \times \frac{600}{x} \Rightarrow 60x = 600 \cdot 3$$

$$60x = 1800$$

$$x = \frac{1800}{60} = 30 \text{ min}$$

d) Se Joana ler 8 páginas por hora, ela lerá um livro de contos em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela lerá esse livro?

grandezas inversamente proporcionais

8 — 12 $\Rightarrow 16x = 96$

16 — x $\quad x = \frac{96}{16} = 6h$

e) Nos 7 primeiros dias de janeiro, choveu em 3 dias. E, nos 10 primeiros dias de janeiro, choveu em quantos dias?

Não proporcionais

f) Para encher um tanque, são necessárias 30 vasilhas de 6L cada uma. Se forem usadas vasilhas de 3L cada uma, quantas serão necessárias?

grandezas inversamente proporcionais

30 — 6 $\Rightarrow 3x = 30 \cdot 6$

x — 3 $\quad 3x = 180$

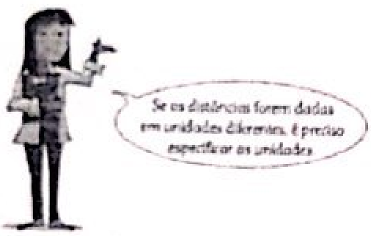
$x = \frac{180}{3} = 60$ vasilhas

10- Calcule x, sabendo que 6 e x são valores correspondentes a duas grandezas diretamente proporcionais e que o coeficiente de proporcionalidade, nessa ordem é 2.

$$\frac{6}{x} = 2 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Escala

A escala é usada principalmente na elaboração de mapas, plantas baixas e maquetes.



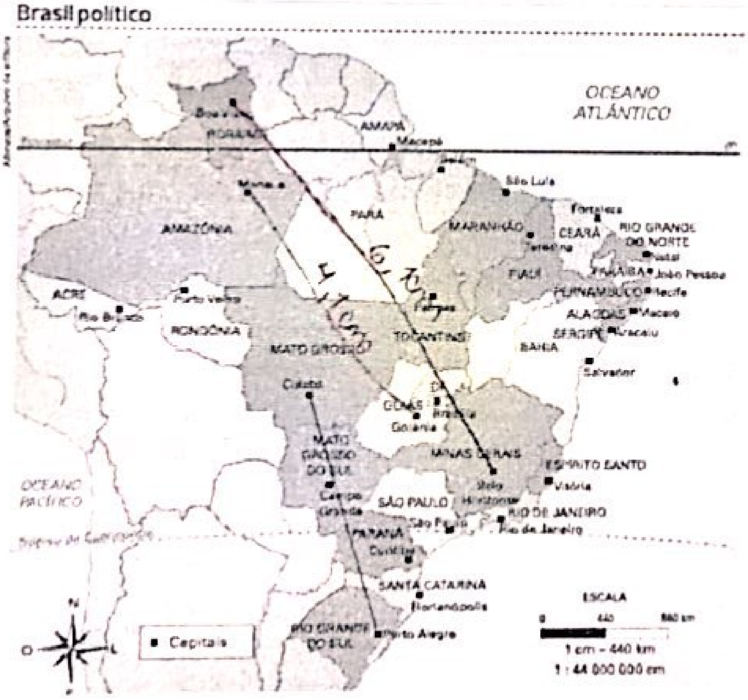
Escala é a razão entre uma medida de comprimento no desenho e a medida de comprimento correspondente na realidade.

$$\text{escala} = \frac{\text{distância no desenho}}{\text{distância real}}$$

Um mapa, como o do Brasil, por exemplo, é uma representação do país, visto de cima, em tamanho reduzido e que preserva as relações de tamanho.

Qualquer mapa, planta ou maquete tem uma escala.

Brasil político



A escala do mapa indica a razão entre a distância representada e a distância real.

No mapa ao lado, a escala é de 1 cm para 440 km, isto é, cada 1 cm no mapa corresponde a 440 km (ou 44 000 000 cm) na realidade.

As distâncias nos mapas são diretamente proporcionais às distâncias correspondentes na realidade.

Indica-se essa escala assim: 1: 44 000 000 ou $\frac{1}{44\,000\,000}$ ou 1 cm : 440 km. (Lê-se: um centímetro para quatrocentos e quarenta quilômetros.)

No mapa da página anterior, a distância em linha reta de Porto Alegre a Cuiabá é de 3,8 cm. Como calcular a distância real entre essas duas capitais?

Veja no quadro abaixo:

Para cada 1 cm no mapa, correspondem 440 km na realidade. ($\times 440$)   Para 3,8 cm no mapa, correspondem $3{,}8 \cdot 440 = 1672$ km na realidade.

Portanto, a distância real de Porto Alegre a Cuiabá, em linha reta, é de 1697,5 km.

11- Meça as distâncias no mapa da página anterior e calcule usando a mesma escala.

a) a distância real de Goiânia a Manaus: ______ km.

b) a distância real de Belo Horizonte a Boa Vista: ______ km.

a) 1 cm no mapa, corresponde a 440 Km na realidade

4,1 cm no mapa, corresponde a $4{,}1 . 440 = 1804$ k

ou

B) $\frac{1}{440} = \frac{4{,}1}{x} \Rightarrow x = 4{,}1 . 440 = 1804$. Km

$\frac{1}{440} = \frac{6{,}1}{x} \Rightarrow x = 6{,}1 . 440 = 2684$ Km

12-

Veja abaixo a página de um livro representada em escala.

Representação da página de um livro.

a) Sabendo que a largura real dessa página é de 24 cm, qual foi a escala usada no desenho?

b) Usando o desenho e a escala, determine a altura real dessa página.

a) $\text{Escala} = \dfrac{\text{distância no desenho}}{\text{distância real}}$ $\div 4,2$

$\text{Escala} = \dfrac{4,2\ cm}{24\ cm} \div 4,2 = \dfrac{1}{5,714} \Rightarrow 1 : 5,714$

b) $\dfrac{4,2}{24} = \dfrac{5,2}{x} \Rightarrow 4,2x = 5,2 \cdot 24$

$4,2x = 124,8$

$x = \dfrac{124,8}{4,2} = 29,7\ cm$

Usando regra de três simples, resolva os problemas a seguir.

13- Guardando R$ 18,00 por mês, Gilberto conseguiu juntar certa quantia em 10 meses. Para obter essa mesma quantia em 8 meses, quanto ele deveria ter guardado por mês?

$$\begin{array}{l} 18 — 10 \\ x — 8 \end{array} \Rightarrow 8x = 18 \cdot 10$$

$$8x = 180$$

$$x = \frac{180}{8} = 22,5$$

Resposta 22,5

14- Para a festa junina, um grupo de 15 alunos fez certo número de bandeirinhas em 6 h. Em quantas horas um grupo de 20 alunos, trabalhando no mesmo ritmo, faria a mesma quantidade de bandeirinhas?

$$\begin{array}{l} 15 — 6 \\ 20 — x \end{array} \Rightarrow 20x = 15 \cdot 6$$

$$20x = 90$$

$$x = \frac{90}{20} = 4,5\,h$$

15- Três torneiras iguais enchem uma caixa-d'água em 3 horas. Duas torneiras iguais a essas enchem a mesma caixa-d'água em quantas horas?

$$\begin{array}{l} 3 — 3 \\ 2 — x \end{array} \Rightarrow 2x = 3 \cdot 3$$

$$2x = 9$$

$$x = \frac{9}{2} = 4,5\,h$$

Teste

1- Em cada item, verifique se as razões formam ou não uma proporção e complete com = ou ≠.

a) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\frac{6}{9} \times \frac{2}{3} \Rightarrow 6.3 = 2.9$
$18 = 18$ //

c) $\frac{5}{4} \neq \frac{7}{6}$

$\frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \Rightarrow 5.6 \neq 7.4$
$30 \neq 28$

e) $\frac{7}{9} \neq \frac{8}{10}$

$\frac{7}{9} \times \frac{8}{10} \Rightarrow 7.10 \neq 9.8$
$70 \neq 72$

b) $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$

$\frac{6}{5} \times \frac{18}{15} \Rightarrow 6.15 = 5.18$
$90 = 90$

d) $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{5}$

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \Rightarrow 3.5 \neq 4.4$
$15 \neq 16$

f) $\frac{15}{20} = \frac{6}{8}$

$\frac{15}{20} \times \frac{6}{8} \Rightarrow 15.8 = 20.6$
$120 = 120 = 120$

2- Escreva uma proporção usando os números 3, 7, 9 e 21 e justifique que realmente é uma proporção pela propriedade fundamental.

$\frac{3}{9} = \frac{7}{21}$, Pois $3.21 = 9.7$
$63 = 63$

3- Lucas e Mariana tiveram o mesmo aproveitamento em um concurso de perguntas e respostas. Lucas respondeu a 30 questões e acertou 24. Mariana respondeu a 35 questões. Quantas questões Mariana acertou?

$30 - 24$
$35 \quad x$
$30x = 840$
$x = \frac{840}{30}$

$x = 28$

24 de 30 é 80%
80% de 35 = 28

4- Tereza é costureira. Ela está fazendo bermudas encomendadas por uma instituição. Com 2,80 m de tecido, ela fez 4 bermudas. Agora ela quer saber de quantos metros precisará para fazer 10 bermudas?

$2{,}80 \text{ — } 4$
$x \text{ — } 10$

$4x = 2{,}80 \times 10$
$4x = 280$
$x = \frac{280}{4}$ $x = 7m$

5- Para percorrer 320 km, o carro de Miguel gastou 25 L de gasolina. Nas mesmas condições, Miguel quer saber quantos quilômetros seu carro percorrerá com 50 L. Calcule e justifique.

$320 \text{ — } 25$
$x \text{ — } 50$

$25x = 320 \cdot 50$
$25x = 16000$
$x = \frac{16000}{25}$ $x = 640$

Percorrerá 640Km

6- Gabriela está vendendo na feira saquinhos com 3 maças ao preço de R$ 5,00. Antônio é dono de uma confeitaria e vai precisar de 30 maças para fazer algumas tortas. Quanto Antônio vai gastar comprando de Gabriela as maçãs de que necessita?

$30 \div 3 = 10$
$10 \times 5 = 50$

Antônio vai gastar 50,00

7- Uma torneira que despeja 12 litros de água por minuto enche uma piscina em 2 horas. Se essa torneira despejasse 24 litros de água por minuto, em quanto tempos encheria essa mesma piscina?
Responda e justifique: as grandezas indicadas em litros por minuto e horas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?

$12 \text{ — } 2$
$24 \text{ — } x$

$24x = 12 \cdot 2$
$\Rightarrow 24x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{24} = 1h$

1 hora

8- A ração que José tem é suficiente para alimentar igualmente 4 cachorros por 3 dias. Se fossem 2 cachorros e se fosse mantida a quantidade de ração por cachorro, a ração daria para quantos dias?

$4 : 2 = 2 \times 3 = 6$

Daria para 6 dias.

9- Classifique as relações entre as grandezas abaixo, como diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais e depois calcule.

a) Jogando dois dados, eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?

$2 - 7$; $4 - x$; $2x = 7 \times 4 = 28$; $x = \frac{28}{2}$; $x = 14$; Farei 14 pontos

não proporcionais

b) A altura de Ana era de 1,07 m aos 5 anos de idade. Qual será a altura de Ana aos 10 anos de idade?

$1.07 - 5$; $x - 10$; $5x = 10,7$; $x = \frac{10,7}{5}$; $x = 2,14$; Terá 2,14 m

não proporcionais

c) Uma impressora imprime 60 folhas em 3 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 600 folhas?

$60 - 3$; $600 - x$; $60x = 1.800$; $x = \frac{1800}{60}$; $x = 30$; Gastará 30 minutos.

Grandezas diretamente proporcionais

d) Se Joana ler 8 páginas por hora, ela lerá um livro de contos em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela lerá esse livro?

$8 - 1$; $16 - x$; $8x = 16$; $x = \frac{16}{8}$; $x = 2$; Ela lerá em 2 horas.

Grandezas inversamente proporcionais

e) Nos 7 primeiros dias de janeiro, choveu em 3 dias. E, nos 10 primeiros dias de janeiro, choveu em quantos dias?

$7 - 3$; $10 - x$; $7x = 30$; $x = \frac{30}{7}$; $x = 4,2$; Choveu em 4,2 dias.

não proporcionais

f) Para encher um tanque, são necessárias 30 vasilhas de 6L cada uma. Se forem usadas vasilhas de 3L cada uma, quantas serão necessárias?

$30 - 6$; $x - 3$; $= 6x = 90$; $x = \frac{90}{6}$; $x = 15$; Serão 15 vasilhas

Grandezas inversamente proporcionais

10- Calcule x, sabendo que 6 e x são valores correspondentes a duas grandezas diretamente proporcionais e que o coeficiente de proporcionalidade, nessa ordem é 2.

$\frac{6}{x} = 2 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

Escala

A escala é usada principalmente na elaboração de mapas, plantas baixas e maquetes.

Escala é a razão entre uma medida de comprimento no desenho e a medida de comprimento correspondente na realidade.

$$\text{escala} = \frac{\text{distância no desenho}}{\text{distância real}}$$

Um mapa, como o do Brasil, por exemplo, é uma representação do país, visto de cima, em tamanho reduzido e que preserva as relações de tamanho.

Qualquer mapa, planta ou maquete tem uma escala.

Brasil político

A escala do mapa indica a razão entre a distância representada e a distância real.

No mapa ao lado, a escala é de 1 cm para 440 km, isto é, cada 1 cm no mapa corresponde a 440 km (ou 44 000 000 cm) na realidade.

As distâncias nos mapas são diretamente proporcionais às distâncias correspondentes na realidade.

Indica-se essa escala assim: 1 : 44 000 000 ou $\frac{1}{44\,000\,000}$ ou 1 cm : 440 km. (Lê-se: um centímetro para quatrocentos e quarenta quilômetros.)

No mapa da página anterior, a distância em linha reta de Porto Alegre a Cuiabá é de 3,8 cm. Como calcular a distância real entre essas duas capitais?

Veja no quadro abaixo:

Para cada 1 cm no mapa, correspondem $\xrightarrow{\times 440}$ 440 km na realidade

Para 3,8 cm no mapa, correspondem $3{,}8 \cdot 440 = 1672$ km na realidade.

Portanto, a distância real de Porto Alegre a Cuiabá, em linha reta, é de 1697,5 km.

11- Meça as distâncias no mapa da página anterior e calcule usando a mesma escala.

a) a distância real de Goiânia a Manaus: 1760 km.

b) a distância real de Belo Horizonte a Boa Vista: 3070 km.

4 . 440

7 • 440

12- Veja abaixo a página de um livro representada em escala.

Representação da página de um livro.

a) Sabendo que a largura real dessa página é de 24 cm, qual foi a escala usada no desenho?

b) Usando o desenho e a escala, determine a altura real dessa página.

a) $24 \cdot 440 = 0{,}054$

b) $6 \cdot 440 = 2.640$

Usando regra de três simples, resolva os problemas a seguir.

13- Guardando R$ 18,00 por mês, Gilberto conseguiu juntar certa quantia em 10 meses. Para obter essa mesma quantia em 8 meses, quanto ele deveria ter guardado por mês?

Deveria ter guardado 14,40

$$\begin{matrix} 18 & 10 \\ x & 8 \end{matrix}$$

$10x = 144$

$x = \frac{144}{10} = x = 14,40$

14- Para a festa junina, um grupo de 15 alunos fez certo número de bandeirinhas em 6 h. Em quantas horas um grupo de 20 alunos, trabalhando no mesmo ritmo, faria a mesma quantidade de bandeirinhas?

$$\begin{matrix} 15 & 6 \\ 20 & x \end{matrix}$$

$15x = 120$

$x = \frac{120}{15} = x = 8$

Em 8 horas.

15- Três torneiras iguais enchem uma caixa-d'água em 3 horas. Duas torneiras iguais a essas enchem a mesma caixa-d'água em quantas horas?

$$\begin{matrix} 3 & 3 \\ 2 & x \end{matrix}$$

Em 2 horas

$3x = 6$

$x = \frac{6}{3}$

$x = 2$

D S T Q Q S S

Teste

Questão 1:

a) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} =$

$\frac{6}{9} \times \frac{2}{3} \rightarrow 6.3 = 2.9$

$18 = 18$

c) $\frac{5}{4} \neq \frac{7}{6} =$

$\frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \rightarrow 5.6 \neq 7.4$

$30 \neq 28$

e) $\frac{7}{9} \neq \frac{8}{10} =$

$\frac{7}{9} \times \frac{8}{10} \rightarrow 7.10 \neq 9.8$

$70 \neq 72$

b) $\frac{6}{5} = \frac{18}{15} =$

$\frac{6}{5} \times \frac{18}{15} \rightarrow 6.15 = 5.18$

$90 = 90$

d) $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{5} =$

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \rightarrow 3.5 \neq 4.4$

$15 \neq 16$

f) $\frac{15}{20} = \frac{6}{8} =$

$\frac{15}{20} \times \frac{6}{8} \rightarrow 15.8 = 20.6$

$120 = 120$

Questão 2:

$\frac{3}{9} = \frac{7}{21}$ pois $3.21 = 9.7$

$63 = 63$

Questão 3:

$\frac{24}{30} \times \frac{x}{35} \rightarrow 30x = 24.35$

$30x = 840$

$x = \frac{840}{30} = 28$

R: Mariana acertou 28 questões.

kajoma

D S T Q Q S S

Questão 4:

$\frac{28}{4} = \frac{x}{10} \rightarrow 4.x = 28.10$

$4x = 28 \rightarrow x = \frac{28}{4} = 7m$

R: Tereza precisará de 7 m para fazer 10 bermudas.

Questão 5:

$\frac{320}{25} \times \frac{x}{50} \rightarrow 25x = 320.50$

$25x = 16000$

$x = \frac{16000}{25} \rightarrow x = 640 Km$

R: Com 50L Miguel percorrerá 64Km pos é o dobro de litros...

Questão 6:

$\frac{3}{5} = \frac{30}{x} \rightarrow 3x = 5.30$

$3x = 150$

$x = \frac{150}{3} =$ R$ 50,00

R: Antônio vai gastar 50,00 reais.

Questão 7:

$12 — 2 \rightarrow 24x = 12.2$

$24 — x$

$24x = 24 \rightarrow \frac{24}{24} = 1h$

R: Essa piscina estaria cheia em 1h.

kajoma

D | S | T | Q | Q | S | S

Questão 8:

$4 — 3$
$2 — x$

$\rightarrow 2x = 4.3$

$2x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$ dias

R: A ração daria para 6 dias.

Questão 9:

a) $2 \ldots 7$
$4 \ldots x$

$2x = 4 \times 7$
$x = 28/2$
$x = 14$ pontos

R: Será 14 pontos.

b)
$5 \quad 1,07 \qquad 5x = 1,04 - 10 = 5x = 1,7$
$10 \quad x$

R: A altura de Ana será de 1,7

c)
$\frac{60}{3} \quad \frac{600}{x} \rightarrow 60x = 600.3$

$60x = 1800$

$x = \frac{1800}{60} = 30$ min

R: Ela gastará 30 minutos.

D S T Q Q S S

d)

$$\begin{array}{l} 8 \text{ — } 12 \\ 16 \text{ — } x \end{array} \rightarrow 16x = 96$$

$$x = \frac{96}{16} = 6h$$

R: Ela lerá o livro em 6 h.

e)

5 dias – 3 dias choveu

10 dias – 6 dias choveu.

f)

$$\begin{array}{l} 30 \text{ — } 6 \\ x \text{ — } 3 \end{array} \rightarrow 3x = 30 \cdot 6$$

$$3x = 180$$

$x = \frac{180}{3} = 60$ vasilhas.

Questão 10:

$\frac{6}{x} = 2 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

Questão 11:

a) a distância real de Goiânia a Manaus 1804 Km.

b) a distância real de Belo Horizonte à Boa Vista: 2684 Km

D S T Q Q S S

Questão 12:

$$\text{Escala} = \frac{\text{distância no desenho}}{\text{distância real}}$$

$$\text{Escala} = \frac{4,2\text{ cm}}{24\text{ cm}} = \frac{1}{5,714} \rightarrow 1:5,714$$

$$\frac{4,2}{24} \times \frac{5,2}{x} \rightarrow 4,2x = 5,2 \cdot 24$$

$$4,2x = 124,8$$

$$x = \frac{124,8}{4,2} \cong 29,7\text{ cm}$$

Questão 13:

18 — 10 $\rightarrow 8x = 18 \cdot 10$ R: R$ 22,50.

x — 8 $\quad 8x = 180$

$$x = \frac{180}{8} = 22,50$$

Questão 14:

15 — 6 $\rightarrow 20x = 15 \cdot 6$ R: Em 4,5 h

20 — x $\quad 20x = 90$

$$x = \frac{90}{20} = 4,5\text{ h}$$

Questão 15:

3 — 3 $\rightarrow 2x = 3 \cdot 3$ R: Enchem em 4,5 h.

2 — x $\quad 2x = 9$

$$x = \frac{9}{2} = 4,5\text{ h}$$

1 a) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$9 \cdot 2 = 18$

$6 \cdot 3 = 18$

b) $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$

$5 \cdot 18 = 90$

$6 \cdot 15 = 90$

c) $\frac{5}{4} \neq \frac{7}{6}$

$4 \cdot 7 = 28$

$5 \cdot 6 = 30$

d) $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{5}$

$4 \cdot 4 = 16$

$3 \cdot 5 = 15$

e) $\frac{7}{9} \neq \frac{8}{10}$

$9 \cdot 8 = 72$

$7 \cdot 10 = 70$

f) $\frac{15}{20} = \frac{6}{8}$

$20 \cdot 6 = 120$
$15 \cdot 8 = 120$

② $\frac{3}{7} = \frac{9}{21} \rightarrow 7 \cdot 9 = 63$
$21 \cdot 3 = 63$

Grandeza Diretamente Proporcional.

$63 = 63$

Justificativa: É uma igualdade das duas razões, pois ao multiplicar cruzado encontramos o mesmo valor.

③ $\frac{30}{35} = \frac{24}{x} \Rightarrow 30x = 35 \cdot 24$

$30x = 840$

$x = \frac{840}{30}$

$x = 28$

Grandeza Diretamente Proporcional.

D | S | T | Q | Q | S | S

(4) $\frac{2{,}80}{x} = \frac{4\,m}{10} \Rightarrow 4x = 2{,}80 \cdot 10$

$4x = 28$

$x = \frac{28}{4}$

$x = 7$ metros de tecido.

(5) $\frac{320}{25} = \frac{x\ l}{50\ l} \Rightarrow 25x = 320 \cdot 50$

$25x = 16.000$

$x = \frac{16.000}{25}$

$x = 640$ Km

Grandeza Inversamente Proporcional.

Justificativa: Se ele dobrou a quantidade de gasolina, consequentemente aumentou (dobrou) o percurso, sendo assim uma proporção direta.

(6) $\frac{3}{30} = \frac{5}{X} \Rightarrow 3X = 30 \cdot 5$

$$3X = 150$$

$$X = \frac{150}{3}$$

$$X = 50$$

R= Ele gastará R$ 50,00.

(7) $\frac{12\,l}{24\,l} = \frac{2\,h}{X} \rightarrow \frac{12\,l}{24} = \frac{x}{2} \Rightarrow 24x = 12 \cdot 2$

$$24x = 24$$

$$x = \frac{24}{24}$$

$$x = 1$$

Inversamente Proporcional.

D S T Q Q S S

8) $\frac{4}{2} = \frac{3}{x} \rightarrow \frac{4}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow 2x = 4 \cdot 3$

$2x = 12$

$x = \frac{12}{2}$

$x = 6$

Grandeza Inversamente Proporcional.

R= A ração irá durar 6 dias.

9) A) Não Proporcional, não há como calcular.

B) Não Proporcional, não há como calcular.

C) $\frac{60}{600} = \frac{3}{x} \Rightarrow 60x = 600 \cdot 3$

$60x = 1.800$

$x = \frac{1.800}{60}$

$x = 30$

Grandeza Diretamente Proporcional.

R= 30 minutos.

D) $\frac{8}{16} = \frac{1}{x} \Rightarrow 8x = 16 \cdot 1$

$8x = 16$

$x = \frac{16}{8}$

$x = 2$ horas

Grandeza Diretamente Proporcional.

E) Não Proporcional, não há como calcular

F) $\frac{30}{6} = \frac{x}{3} \rightarrow \frac{30}{x} = \frac{6}{3} \Rightarrow 3x = 30 \cdot 6$

$3x = 180$

$x = \frac{180}{3}$

$x = 60$ vasilhas.

Grandeza Inversamente Proporcional.

kajoma

D S T Q Q S S

10 $\frac{6}{x} = 2 \Rightarrow 6 = 2x$

$\frac{6}{2} = x$

$x = 3$

11 a) Mapa Real

x4,4 ⊳1 cm 44.000.000 cm x4,4

⊳4,4 cm 193.600.000 cm

R= 1.936 Km.

b) Mapa Real

x7,1 ⊳1 cm 440 Km

⊳7,1 3.124 Km x7,1

R= 3.124 Km.

(12) A) $:3 \left(\begin{array}{l} \to 3 \text{ cm} \longrightarrow 24 \text{ cm} \\ \to 1 \text{ cm} \longrightarrow 8 \text{ cm} \end{array} \right) :3$ $1:8$

B) $\times 4 \left(\begin{array}{l} \to 1 \text{ cm} \longrightarrow 8 \text{ cm} \\ \to 4 \text{ cm} \longrightarrow 32 \text{ cm} \end{array} \right) \times 4$ 32 cm

(13) $18{,}00 \longrightarrow 10$
$x \longrightarrow 8$

$18 \longrightarrow 8$
$x \longrightarrow 10$

$\Rightarrow 8x = 18 \cdot 10$
$8x = 180$
$x = \frac{180}{8}$
$x = 22{,}50$

R= Ele terá que juntar em 8 meses R$ 22,50.

14 $15 \text{ --- } 6$
$20 \text{ --- } x$

$15 \text{ --- } x$
$20 \text{ --- } 6$

$\Rightarrow 20x = 15 \cdot 6$
$20x = 90$
$x = \frac{90}{20}$
$x = 4,5$

R= 4 horas e 50 minutos.

15 $3 \text{ --- } 3$
$2 \text{ --- } x$

$3 \text{ --- } x$
$2 \text{ --- } 3$

$\Rightarrow 2x = 3 \cdot 3$
$2x = 9$
$x = \frac{9}{2}$
$x = 4,5$

R= 4 horas e 50 minutos.

Teste

1- Em cada item, verifique se as razões formam ou não uma proporção e complete com = ou ≠.

a) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ $\quad 6.3 = 9.2$ $\quad 18 \quad 18$

c) $\frac{5}{4} \neq \frac{7}{6}$ $\quad 4.7 \neq 5.6$ $\quad 28 \quad 30$

e) $\frac{7}{9} \neq \frac{8}{10}$ $\quad 7.10 \neq 9.8$ $\quad 70 \quad 72$

b) $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$ $\quad 6.15 = 5.18$ $\quad 90 \quad 90$

d) $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{5}$ $\quad 4.4 \neq 3.5$ $\quad 16 \quad 15$

f) $\frac{15}{20} = \frac{6}{8}$ $\quad 15.8 = 20.6$ $\quad 120 \quad 120$

2- Escreva uma proporção usando os números 3, 7, 9 e 21 e justifique que realmente é uma proporção pela propriedade fundamental.

$\frac{3}{7}$ $\frac{9}{21}$, mais $\quad 7.9 = 3.21$

$63 = 63$

3- Lucas e Mariana tiveram o mesmo aproveitamento em um concurso de perguntas e respostas. Lucas respondeu a 30 questões e acertou 24. Mariana respondeu a 35 questões. Quantas questões Mariana acertou?

$\frac{30}{24} \times \frac{35}{x}$

$30x = 24.35$

$30x = 840$

$x = 840 \div 3 = 28$

$x = 28$

R: Mariana acertou 28 questões.

4- Tereza é costureira. Ela está fazendo bermudas encomendadas por uma instituição. Com 2,80 m de tecido, ela fez 4 bermudas. Agora ela quer saber de quantos metros precisará para fazer 10 bermudas?

$\frac{2,80}{4} \times \frac{x}{10} = \quad 4x = 2,80 \cdot 10$

$4x = 28$

$x = 28 \div 4 = 7$

$x = 7$

c

R: Precisará de 7 metros.

5- Para percorrer 320 km, o carro de Miguel gastou 25 L de gasolina. Nas mesmas condições, Miguel quer saber quantos quilômetros seu carro percorrerá com 50 L. Calcule e justifique.

$\frac{320}{25} \times \frac{x}{50} = \quad 25x = 320 \cdot 50$

$25x = 16.000$

$x = 16.000 \div 25 = 640$

$x = 640$

c

R: Percorre 640 Km.

6- Gabriela está vendendo na feira saquinhos com 3 maças ao preço de R$ 5,00. Antônio é dono de uma confeitaria e vai precisar de 30 maças para fazer algumas tortas. Quanto Antônio vai gastar comprando de Gabriela as maçãs de que necessita?

c

$\frac{3}{5} \times \frac{30}{x} = \quad 3x = 5 \cdot 30$

$3x = 150$

$x = 150 \div 3 = 50$

R Gastar 50.

7- Uma torneira que despeja 12 litros de água por minuto enche uma piscina em 2 horas. Se essa torneira despejasse 24 litros de água por minuto, em quanto tempos encheria essa mesma piscina?

Responda e justifique: as grandezas indicadas em litros por minuto e horas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais?

c

$\frac{12}{24} \times \frac{x}{120} \quad 24x = 12 \cdot 120$

$24x = 1.440$

$x = 1.440 \div 24 = 60$ ou 1 h.

$x = 60$

R: É igual 60 minutos ou 1 hora.

8- A ração que José tem é suficiente para alimentar igualmente 4 cachorros por 3 dias. Se fossem 2 cachorros e se fosse mantida a quantidade de ração por cachorro, a ração daria para quantos dias?

c

$\frac{2}{4} \quad \frac{3}{x} \quad 2x = 4 \cdot 3$

$2x = 12$

$x = 12 \div 2 = 6$

$x = 6$

R: 6 dias.

9- Classifique as relações entre as grandezas abaixo, como diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais e depois calcule.

a) Jogando dois dados, eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?

Não proporcionais

b) A altura de Ana era de 1,07 m aos 5 anos de idade. Qual será a altura de Ana aos 10 anos de idade?

Não proporcionais

c) Uma impressora imprime 60 folhas em 3 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 600 folhas?

Grandezas inversamente proporcionais

d) Se Joana ler 8 páginas por hora, ela lerá um livro de contos em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela lerá esse livro?

Grandezas inversamente proporcionais

e) Nos 7 primeiros dias do janeiro, choveu em 3 dias. E, nos 10 primeiros dias de janeiro, choveu em quantos dias?

Não proporcionais

f) Para encher um tanque, são necessárias 30 vasilhas de 6L cada uma. Se forem usadas vasilhas de 3L cada uma, quantas serão necessárias?

Grandezas inversamente proporcionais

10- Calcule x, sabendo que 6 e x são valores correspondentes a duas grandezas diretamente proporcionais e que o coeficiente de proporcionalidade, nessa ordem é 2.

$$\frac{6}{x} = 2 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

Escala

A escala é usada principalmente na elaboração de mapas, plantas baixas e maquetes.

Escala é a razão entre uma medida de comprimento no desenho e a medida de comprimento correspondente na realidade.

$$\text{escala} = \frac{\text{distância no desenho}}{\text{distância real}}$$

Um mapa, como o do Brasil, por exemplo, é uma representação do país, visto de cima, em tamanho reduzido e que preserva as relações de tamanho.

Qualquer mapa, planta ou maquete tem uma escala.

Brasil político

A escala do mapa indica a razão entre a distância representada e a distância real.

No mapa ao lado, a escala é de 1 cm para 440 km, isto é, cada 1 cm no mapa corresponde a 440 km (ou 44 000 000 cm) na realidade.

As distâncias nos mapas são diretamente proporcionais às distâncias correspondentes na realidade.

Indica-se essa escala assim: 1 : 44 000 000 ou $\frac{1}{44\,000\,000}$ ou 1 cm : 440 km. (Lê-se: um centímetro para quatrocentos e quarenta quilômetros.)

No mapa da página anterior, a distância em linha reta de Porto Alegre a Cuiabá é de 3,8 cm. Como calcular a distância real entre essas duas capitais?

Veja no quadro abaixo.

$\times 440$

Para cada 1 cm no mapa, correspondem 440 km na realidade.

Para 3,8 cm no mapa, correspondem $3{,}8 \cdot 440 = 1672$ km na realidade.

Portanto, a distância real de Porto Alegre a Cuiabá, em linha reta, é de 1697,5 km.

11- Meça as distâncias no mapa da página anterior e calcule usando a mesma escala.

a) a distância real de Goiânia a Manaus: 1.804 km.

b) a distância real de Belo Horizonte a Boa Vista: 2.684 km.

a) $\frac{1}{440} \times \frac{4{,}1}{x} \Rightarrow x = 4{,}1 \cdot 440 = 1804$ Km

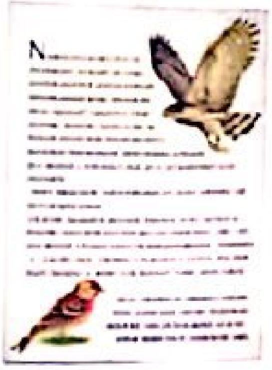
b) $\frac{1}{440} \times \frac{6{,}1}{x} \Rightarrow x = 6{,}1 \cdot 440 = 2684$ Km

1 cm no mapa, correspondi a 440 Km na realidadi

4,1 cm no mapa, correspondi a $4{,}1 \cdot 440 = 1804$ Km

12-

Veja abaixo a página de um livro representada em escala.



Representação da página de um livro.

a) Sabendo que a largura real dessa pagina é de 24 cm, qual foi a escala usada no desenho?

b) Usando o desenho e a escala, determine a altura real dessa página.

a) $\text{Escala} = \dfrac{\text{distância no desenho}}{\text{distância real}} \div 4{,}2$

$\text{Escala} = \dfrac{4{,}2 \text{ cm}}{24 \text{ cm} \div 4{,}2} = \dfrac{1}{5{,}714} \Rightarrow 5{,}714$

b) $\dfrac{4{,}2}{24} \times \dfrac{5{,}2}{x} \Rightarrow 4.2x = 5{,}2 \cdot 24$

$4.2x = 124{,}8$

$x = \dfrac{124{,}8}{4{,}2} = 29{,}7 \text{ cm}$

Usando regra de três simples, resolva os problemas a seguir.

13- Guardando R$ 18,00 por mês, Gilberto conseguiu juntar certa quantia em 10 meses. Para obter essa mesma quantia em 8 meses, quanto ele deveria ter guardado por mês?

$$\frac{18,00}{8} \quad \frac{x}{10}$$

$8x = 18,00 \cdot 10$
$8x = 180$
$x = 180 \div 8 = 22,50$
$x = 22,50$

R: Deveria ter guardado 22,50 por mês.

14- Para a festa junina, um grupo de 15 alunos fez certo número de bandeirinhas em 6 h. Em quantas horas um grupo de 20 alunos, trabalhando no mesmo ritmo, faria a mesma quantidade de bandeirinhas?

$$\frac{15}{20} \quad \frac{x}{6}$$

$20x = 15 \cdot 6$
$20x = 90$
$x = 90 \div 20 = 4,5$ //
$x = 4,5$

R: Em 4,5

15- Três torneiras iguais enchem uma caixa-d'água em 3 horas. Duas torneiras iguais a essas enchem a mesma caixa-d'água em quantas horas?

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{x}$$

$2x = 3 \cdot 3$
$2x = 9$
$x = 9 \div 2 = 4,5$
$x = 4,5$

R: Enche a mesma caixa de água em 4,5 horas.

data
fecha

(1) $\frac{30}{6} = \frac{x}{3}$ $30 \cdot x = 18$ São inversamente proporcionais

$6 \cdot x = 10$ | $x = \frac{18}{30}$

$x = \frac{10}{6}$ | $x = 0{,}6$

$x = 1{,}666666671$

(12) $\frac{18{,}00}{10} = \frac{8}{x}$

$18{,}00 \cdot x = 80$ | $18{,}00 \times 10 = 180$

$x = \frac{80}{18{,}00}$ | $180 \div 8 = 22{,}5$

(14) $\frac{15}{6} = \frac{20}{x}$ 8 horas

$15 \cdot x = 120$

$x = \frac{120}{15}$

$x = 8$

(13) $\frac{3}{3} = \frac{2}{x}$ Enchem em 2 horas

$3 \cdot x = 6$

$x = \frac{6}{3}$

$x = 2$

APÊNDICE E

História da Proporcionalidade

A ideia de proporcionalidade é um dos mais antigos conceitos matemáticos. De acordo com Roque (2012, p. 28), a matemática do Egito antigo foi especialmente conhecida através do Papiro de Rhind [1], também conhecido como Papiro de Ahmes, como mostra a Figura 46, escrito em hieróglifo e datado de cerca de 1650 a.C. O papiro detalha a solução de 84 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais e, segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 31), a solução de alguns deles apresenta conhecimento de manipulações semelhante à regra de três simples como conhecemos hoje.

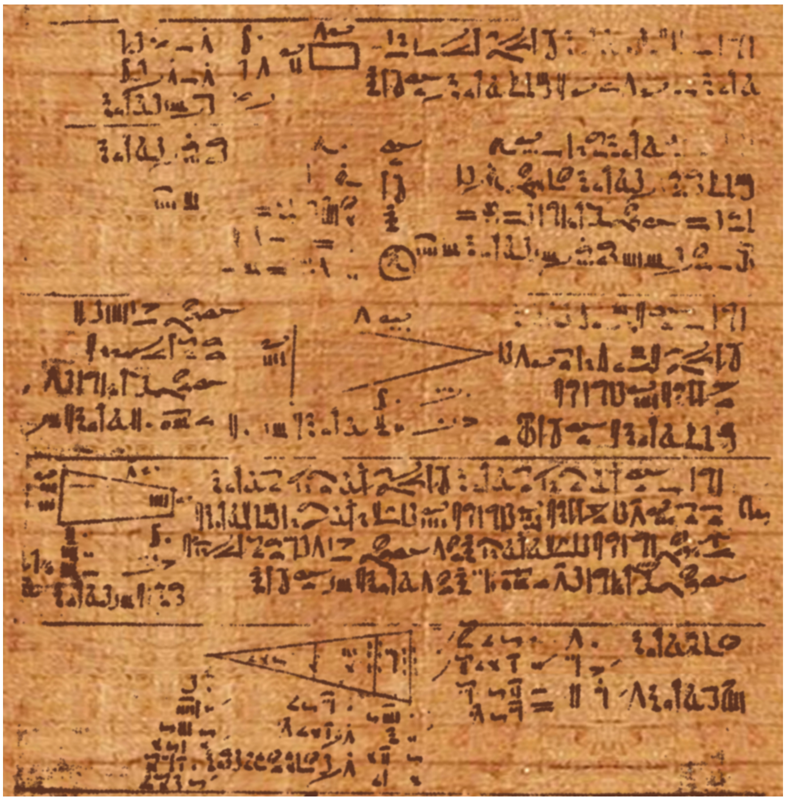
Boyer e Merzbach (2012, p. 32), destacam os problemas 63 e 72. No problema 63 pede-se que sejam repartidos 700 pães entre 4 pessoas, em partes proporcionais a $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$. Já, o problema 72 propõe calcular o número de pães, de 45 unidades de volume por grão, que se obtém com a mesma quantidade de grãos utilizados para fazer 100 pães, de 10 unidades de volume por grão.

A solução apresentada para o problema 63 é obtida fazendo a divisão de 700 pela soma das frações na proporção e calculando $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ deste valor. Ou seja, se $\frac{21}{12} = \frac{7}{4} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})$[3], que é a soma das frações na proporção, equivale a 700, um inteiro equivale a 400. Assim, $\frac{2}{3}$ de 400 equivale a $266\dfrac{2}{3}$ e assim por diante. Já, a solução do problema apresentada ao problema 72 é $\frac{100}{10}$x45 ou 450 pães. Ou seja, se 10 grãos, de 10 unidades de volume por grão, fornecem 100 pães, então 10 grãos de 45 unidades de volume por grão fornecem 450 pães.

Além disso, segundo Roque (2012, p. 76), a história da matemática nos mostra vestígios de estudos e aplicação da proporcionalidade nas primeiras civilizações da antiguidade, por exemplo, os egípcios no século V a.C. Segundo o grego Heródoto[2], dominavam conceitos de geometria plana de modo que, após as enchentes do rio Nilo, os agrimensores determinavam a redução sofrida por cada terreno, passando o proprietário a pagar um

1 Alexander Henry Rhind foi um antiquário escocês que comprou este papiro no Egito, em 1850 d.C.
3 Os egípcios usavam somente frações unitárias. Logo, $\frac{7}{4}$ é a notação atual para $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.
2 Heródoto viveu entre 485 a.C e 425 a.C. e é considerado o pai da história.

Figura 46 – Uma parte do papiro Rhind



Fonte: (PORTAL DO PROFESSOR, 2019)

tributo proporcional ao que restou de área disponível para cultivo.

> Quando das inundações do Nilo, o rei Sesóstris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos (ROQUE, 2012, p. 76).

Na Mesopotâmia, de acordo com Boyer e Merzbach (2012) para suprir as lacunas existentes em suas tabelas de potências sucessivas de um dado número, semelhantes às nossas tabelas de logaritmos, os matemáticos babilônios não hesitavam em interpolavam por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados, usando proporção como ferramenta: *"A interpolação linear parece ter sido comumente usada na Mesopotâmia antiga, e a notação posicional é conveniente para a regra de três"* (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 43).

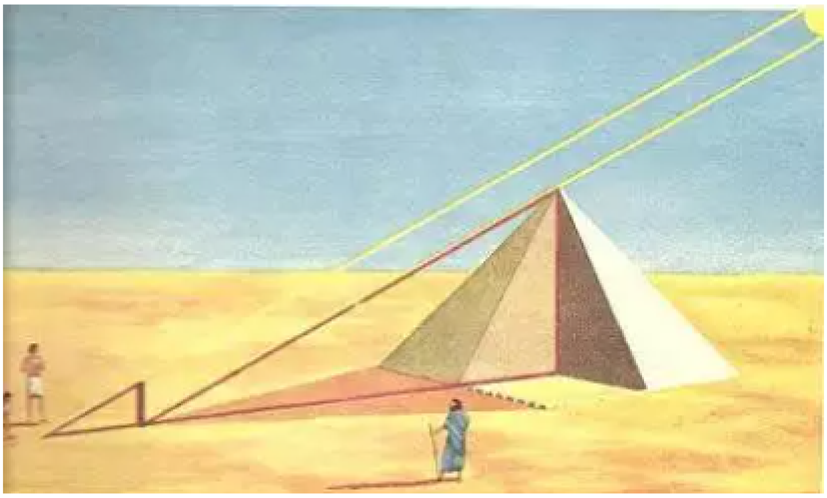
Quanto à aplicação de proporções à geometria, Boyer e Merzbach (2012, p. 48) afirma que provável que os babilônios tinham conhecimento de que os lado correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais.

Já na Grécia antiga, um dos primeiros matemáticos foi Tales de Mileto (624-548 a.C.), que teria vivido nos séculos VII e VI a.C. e sido influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios.

Tales, além de matemático, foi um filósofo, engenheiro, astrônomo e homem de negócios da Grécia Antiga. Nasceu na cidade de Mileto, colônia grega localizada na Ásia menor. Desenvolveu um dos Teoremas mais importantes na área de geometria: O Teorema de Tales.

Um de seus feitos teria sido, justamente, o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, conforme mostra a Figura 47. A partir do uso de proporcionalidade, devido à semelhança entre a relação da altura desta e sua sombra e, por outro lado, a relação da própria altura e a sua sombra.

Figura 47 – Cálculo da altura de uma pirâmide



Fonte: (MELO, 2014)

Tales definiu que:

Definição E.1. *Duas ou mais retas de um mesmo plano formam um feixe de retas paralelas quando, tomadas duas a duas, são sempre paralelas.*

Definição E.2. *Se uma reta corta uma das retas de um feixe de paralelas, então, ela também corta as demais. Dizemos que essa reta é transversal ao feixe de paralelas.*

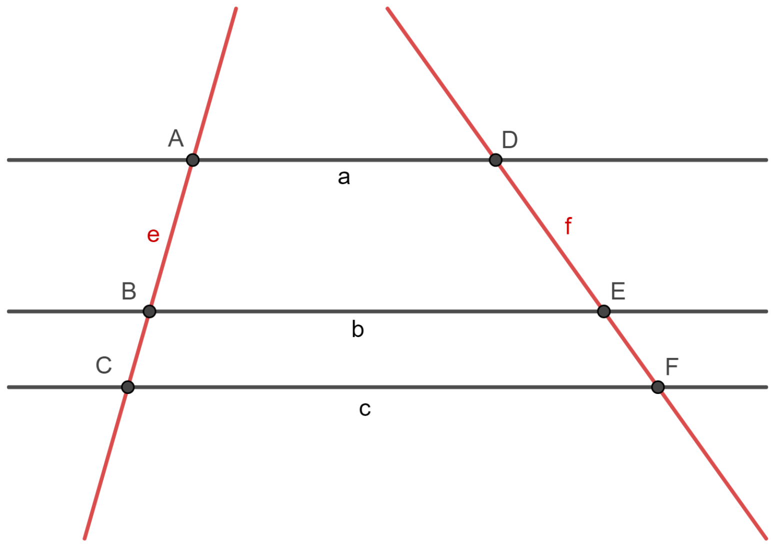
Teorema E.1. *Feixes de retas paralelas cortadas ou intersectadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes.*

Na figura 48 de acordo com o Teorema de Tales, pode-se escrever as razões:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}, \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}.$$

Ainda na Grécia, de acordo com Roque (2012), a matemática pitagórica, desenvolvida na primeira metade do século V a.C., teria feito a transição entre as épocas de Tales e Euclides. Também influenciado pela matemática egípcia, Pitágoras (580-500 a.C.) teria

Figura 48 – Feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais



Fonte: Elaboração Própria

introduzido um tipo de matemática abstrata na Grécia, que pode ser distinguida pelo menos em três funções diferentes sobre as quais as doutrinas pitagóricas foram construídas:

- designavam posição ou ordem;
- determinavam uma forma espacial (números figurados);
- exprimiam razões que permitiam compreender as leis naturais.

Para os pitagóricos, todas as propriedades das coisas, bem como seus modos e comportamentos, podiam ser reduzidas a propriedades que as coisas têm em virtude de serem contáveis. Em seguida, essas coisas eram comparadas por meio da razão (logos) entre seus números.

O emprego do termo logos em seu sentido matemático, significando razão, é atribuído a Pitágoras e devia designar a comunicação de algo essencial sobre alguma coisa, por exemplo, a relação $3:4:5$ determinava a forma de um triângulo retângulo.

A Pitágoras, segundo Boyer e Merzbach (2012), foi atribuída a descoberta da teoria das proporções. Inicialmente o estudo das proporção ou da igualdade de razões tinha motivação aritmética, mas posteriormente as quantidades a, b e c que entravam em tais proporções seriam olhadas como grandezas geométricas. De acordo com o autor:

> Conta-se que Pitágoras soube, na Mesopotâmia, das três médias, aritmética, geométrica e a subcontrária (mais tarde conhecida como harmônica) e

> da "proporção áurea"que relacionava duas delas: o primeiro de dois números está para a sua média aritmética como a média harmônica está para o segundo número (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 60).

Adiante, os pitagóricos generalizaram esse trabalho acrescentando sete novas médias, totalizando dez ao total. Estas médias e a proporção áurea são apresentadas por Boyer e Merzbach (2012, p. 61), supondo que b é a média de a e c, onde $a < c$:

(1) **Aritmética:** $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{a} = \dfrac{b}{b} = \dfrac{c}{c}$, equivalente a: $a + c = 2b$.

(2) **Geométrica:** $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$, equivalente a: $ac = b^2$

(3) **Harmônica:** $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{c}$, equivalente a: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$ ou $b = \dfrac{2ac}{a+c}$

(4) **Proporção Áurea:** $a : \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{2ac}{a+c} : c.$

(5) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{a}$

(6) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{b}{a}$

(7) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{b}$

(8) $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{c}{a}$

(9) $\dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{c}{a}$

(10) $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{b}{a}$

(11) $\dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{b}{a}$

De acordo com Roque (2012, p. 82), a partir do século V a.C, *"era comum a construção de soluções para problemas geométricos e a comparação de grandezas geométricas por meio de razões."*

Um exemplo da aplicação da teoria de proporções à geometria, e que demonstra, segundo Boyer e Merzbach (2012), uma certa influência da escola pitagórica, é o teorema sobre as quadraturas de lunas[4], atribuído a Hipócrates Quios (430 a.C.): *segmentos de círculos semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases.*

[4] Luna: figura limitada por dois arcos circulares de raios diferentes.

> O relato de Eudemo diz que Hipócrates demonstrou isso, mostrando primeiro que as áreas de dois círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Aqui Hipócrates usa a linguagem e conceitos de proporção que desempenhou papel tão grande no pensamento pitagórico (BOYER; MERZBACH, 2012, p.65).

Eudemo acreditava que Hipócrates havia dado uma demonstração rigorosa do teorema, mas para Boyer e Merzbach (2012) isto parece impossível, pois naquela época a teoria das proporções estava definida apenas para grandezas comensuráveis.

Em torno de 400 a.C., a suposição básica dos pitagóricos, de que tudo dependia dos números inteiros, foi abalada pela descoberta dos segmentos incomensuráveis: os números inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever propriedades geométricas básicas, como comparar a diagonal de um quadrado ou de um pentágono com seu lado. A descoberta do incomensurável causou um verdadeiro escândalo lógico e representou um momento de crise na Matemática, pois pareceu arruinar teoremas envolvendo proporções. Afinal, Pitágoras apercebeu certas relações numéricas entre o comprimento de uma corda musical e o som por ela emitido e, a partir disso, segundo Ávila (2001), ele:

> fez observações semelhantes com relação a outros fenômenos, intuindo daí que o número fosse de fato a essência de todos os fenômenos, permeando a Natureza inteira. Sendo assim, era de se esperar que a razão de dois segmentos de reta pudesse sempre ser expressa como a razão de dois números (naturais) (ÁVILA, 2001, p. 25).

A perturbação causada pela descoberta dos segmentos incomensuráveis, para Boyer e Merzbach (2012), devia-se à crença fundamental do pitagorismo de que o significado de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, poderia ser explicado em termos aritméticos ou das propriedades inerente dos inteiros e suas razões.

O fato de que a teoria das proporções existente até então não dava conta das magnitudes incomensuráveis mostra, segundo Roque (2012), que a teoria das proporções dos pitagóricos era uma teoria numérica, aplicável somente às magnitudes comensuráveis, provavelmente nos mesmos moldes do que é apresentada no livro VII dos Elementos de Euclides.

> Há uma versão no livro VII que pode ser aplicada somente à razão entre inteiros e é atribuída aos pitagóricos. A definição contida aí é usada para razões entre grandezas comensuráveis (ROQUE, 2012, p. 98).

Além disso, de acordo com Roque (2012), uma segunda versão, supostamente posterior à primeira, está no livro V e é atribuída ao matemático platônico Eudoxo (408-355 a.C.). Essa última teoria das razões e proporções é bastante sofisticada e se aplica igualmente a grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Contudo, não se sabe ao certo como hipócrates efetivamente demonstrou que as áreas de círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros, mas segundo Boyer e Merzbach (2012) de algum modo isto deve ter envolvido a utilização de proporções ou igualdade de razões.

Aparentemente os gregos utilizavam a ideia de que quatro quantidades estão em proporção, $a : b = c : d$, se as duas razões $a : b$ e $c : d$ têm a mesma subtração mútua. Mas, isto nada mais é do que uma aplicação do algoritmo euclidiano, enunciado por Euclides também no Livro VII dos Elementos – Proposição 2, como um tipo da subtração recíproca, o que reforça a hipótese de que os pitagóricos fizessem uso da técnica aqui apresentada para verificar proporções, processo para achar o máximo divisor comum (m.d.c.) entre dois números inteiros. Tal algoritmo consiste em: *"Dividir o maior dos dois números inteiros positivos pelo menor e então dividir o divisor pelo resto. Continuar este processo de dividir o último divisor pelo último resto, até que a divisão seja exata. O divisor final é o m.d.c. procurado".*

Vejamos esta técnica, tomando as razões $36 : 53$ e $72 : 106$, por exemplo, e aplicando a cada uma delas o algoritmo euclidiano:

$$\begin{array}{c||c} 53 - \mathbf{1}.36 = 17 & 106 - \mathbf{1}.72 = 34 \\ 36 - \mathbf{2}.17 = 2 & 72 - \mathbf{2}.34 = 4 \\ 17 - \mathbf{8}.2 = 1 & 34 - \mathbf{8}.4 = 2 \\ 2 - \mathbf{2}.1 = 0 & 4 - \mathbf{2}.2 = 0 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{c||c} 53 = \mathbf{1}.36 + 17 & 106 = \mathbf{1}.72 + 34 \\ 36 = \mathbf{2}.17 + 2 & 72 = \mathbf{2}.34 + 4 \\ 17 = \mathbf{8}.2 + 1 & 34 = \mathbf{8}.4 + 2 \\ 2 = \mathbf{2}.1 + 0 & 4 = \mathbf{2}.2 + 0 \end{array}$$

A proporção entre as razões é verificada, pois os quocientes **1, 2, 8 e 2** representam o número inteiro de vezes que as quantidades menores, ou restos, cabem nos maiores, é o mesmo para as duas razões.

Para nós hoje é fácil perceber que a crise dos incomensuráveis seria resolvida com a introdução, na Matemática, dos números fracionários e dos números irracionais. Entretanto os gregos utilizaram um caminho diferente, elaborando um modo de falar em igualdade de razões mesmo no caso de grandezas incomensuráveis.

O criador dessa teoria, exposta no Livro V dos Elementos de Euclides, foi Eudoxo de Cnido (**Definição** E.3), matemático e astrônomo ligado à escola de Platão.

Definição E.3 (**De Eudoxo**). *Dadas quatro grandezas da mesma espécie, A, B, C e D (segmentos, áreas ou volumes), diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os números m e n, se tenha:*

$$mA > nB \Leftrightarrow mC > nD; mA = nB \Leftrightarrow mC = nD;$$
$$mA < nB \Leftrightarrow mC < nD.$$

A definição dada por Eudoxo para a igualdade de razões significa, em notação atual, que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ se, e somente se, dados inteiros m e n, sempre que $ma < nb$ então $mc < nd$, ou se $ma = nb$ então $mc = nd$, ou se $ma > nb$ então $mc > nd$. Esta definição de igualdade de razões se assemelha ao processo de multiplicação cruzada utilizada nos dias atuais,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

processo equivalente a reduzir a um mesmo denominador.

Mas a teoria das proporções de Eudoxo tem resultados mais amplos. Boyer e Merzbach (2012, p. 80) afirmam que a definição dada por Eudoxo *"não está muito longe das definições de número real dadas no século XIX, pois divide a coleção dos números racionais* m/n *em duas classes, conforme* $ma \leqslant nb$ *ou* $ma > nb$*."*

Ainda de acordo com Boyer e Merzbach (2012), Euclides foi o autor do texto de matemática (**Os Elementos**) mais bem sucedido de todos os tempos e segundo Roque (2012) esta obra é composta dos seguintes livros:

Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema "de Pitágoras".

Livro II: contém a chamada "álgebra geométrica", trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.

Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.

Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.

Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.

Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.

Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.

Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares (ROQUE, 2012, p. 143).

O livro V dos Elementos de Euclides trata da teoria das proporções de Eudoxo, como já vimos, não atribuindo valores às grandezas geométricas. No livro VI, segundo Boyer e Merzbach (2012, p.95), Euclides explorou a "demonstração de teoremas relativos a razões e proporções que aparacem em triângulos, paralelogramos e outros polígonos que são semelhantes". A base sólida para as proporções, dada no livro V, permitia Euclides fazer um uso livre do conceito de semelhança entre figuras planas.

No livro VII trata-se da teoria dos números inteiros, entretanto, de acordo com Roque (2012):

> Um traço particular dos Elementos é que as grandezas são tratadas enquanto tais e jamais são associadas a números (ao contrário, nos livros sobre números, eles são tratados como segmentos de reta). Se tivermos duas grandezas incomensuráveis, não poderemos expressar a razão entre elas como uma razão entre números. Logo, as definições de proporção pela igualdade de razões entre números não podem ser aceitáveis em todos os casos. Daí a necessidade de uma definição geral de proporção que valha para grandezas quaisquer, como a do livro V (ROQUE, 2012, p. 131).

Diante do exposto, podemos concluir que a teoria das proporções na Grécia era aplicada na aritmética ou na teoria dos números, aqui se referindo aos números naturais, e na geometria, na qual podiam ser incluídos os segmentos incomensuráveis.

Na China, segundo Boyer e Merzbach (2012), o mais importante livro de matemática chinês, foi o *Jiuzhang suanchu* ou *Nove Capítulos sobre a arte matemática*. É uma síntese do conhecimento matemático chinês antigo, composto por 246 problemas sobre: agricultura, impostos, engenharia e solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos. Entretanto, são dadas regras de resolução, mas não há demonstrações no sentido grego. A seguir temos uma breve indicação do conteúdo de cada um dos nove capítulos:

1. Porcentagem e proporção.
2. Regra de sociedade e regra de três.
3. Determinação de lados de figuras, incluindo cálculos de raízes quadradas e cúbicas.
4. Volumes.
5. Problemas de movimento e ligas.
6. A regra de falsa posição.
7. Sistemas de equações lineares e procedimentos matriciais.
8. Triângulos retângulos pitagóricos (EVES, 2011, p. 244).

Segundo Eves (2011), provavelmente os chineses foram os primeiros a utilizar a regra de três. Ela era enunciada mecanicamente sem nenhuma prova, e seus elos com as proporções só foram reconhecidos no fim do século XIV.

No entanto, a regra de três, conforme Eves (2011), chegou à Índia, onde Brahmagupta (598-668 d.C.) e Bhāskara (1114-1185 d.C.) utilizaram essa mesma nomenclatura e durante séculos a regra mereceu a mais alta importância da parte dos mercadores.

De acordo Eves (2011, p. 263), Brahmagupta assim enunciava a regra:

> Na regra de três, os nomes dos termos são Argumento, Fruto e Requisito. O primeiro e último termos devem ser semelhantes. Requisito multiplicado por Fruto e dividido por Argumento é o Produto.

Um exemplo é dado por Bhaskara, conforme Eves (2011, p. 243): **"Se dois palas e meio de açafrão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas?"**

A solução é apresentada da seguinte maneira: Neste caso $\frac{3}{7}$ e $\frac{9}{1}$, possuem a mesma denominação (niskas), logo são o argumento e o requisito e $\frac{5}{2}$ é o fruto. Assim, a resposta, ou produto, é dada por:

$$\underbrace{\frac{9}{1}}_{\text{requisito}} \times \underbrace{\frac{5}{2}}_{\text{fruto}} \times \underbrace{\frac{7}{3}}_{\text{inverso do argumento}} = \underbrace{52\frac{1}{2}}_{\text{produto}}$$

Na Europa, Fibonacci, ou Leonardo de Pisa (1175-1250), publicou em 1202 sua obra mais famosa, *Liber abaci (livro de ábaco)* que, segundo Roque (2012), trata de aritmética e álgebra. Afirma ainda este autor que o método da falsa posição era usado por Fibonacci para a resolução de equações lineares e quadráticas e que a regra de três aparece ilustrada por um problema: **"Um certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores?"** Eves (2011, p. 316).

No século XIV, conforme Boyer e Merzbach (2012), houve uma ampliação da visão de proporcionalidade, graças a dois físicos, Bradwardine (1290-1349) e Nicole de Oresme (1323-1382), já que a teoria das proporções de Euclides havia sido aplicada a questões científicas.

Bradwardine (1290-1349), filósofo, teólogo e matemático inglês, escreveu o *Tractatus de proportionibus*. Ele verificou, tal como outros estudiosos antes dele, que não era correta a forma apresentada por Aristóteles para lei de movimento, $V = \frac{K.F}{R}$, onde a velocidade era proporcional à força (F) e inversamente proporcional à resistência (R), e K uma constante de proporcionalidade não nula. Em seu tratado, Bradwardine utiliza uma teoria generalizada de proporções e defende que, para dobrar a velocidade, a razão F/R deveria ser elevada ao quadrado. De mogo geral, segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 186), "para multiplicar por n a velocidade, deve-se tomar a *n-ésima* potência da razão F/R".

Nicole de Oresme (1323?–1382), sábio parisiense que se tornou bispo de Lisieux, escreveu por volta de 1360 a obra *De Proportionibus proportionum*, onde "generalizou a teoria das proporções de Bradwardine de modo a incluir qualquer potência de expoente racional e deu regras para combinar proporções que são equivalentes às nossas leis sobre expoentes, agora expressas por $x^m.x^n = x^{m+n}$ e $(x^m)^n = x^{mn}$"Boyer e Merzbach (2012, p. 187). Além disso, Oresme sugeriu também o uso de notações especiais, em sua obra *Algorismus proportionum*, como

p	1
1	2

para representar a "proporção um e um meio".

Johann Müller (1436-1476), adotou o nome de Regiomontanus (forma latina de "rei da montanha"), conforme Boyer e Merzbach (2012), escreveu por volta do ano 1464 a obra *De triangulis*, com noções fundamentais de grandezas e razões, muitas com forte influência das obras de Euclides.

Segundo Eves (2011), a obra *De triangulis* é dividida em cinco livros: os dois primeiros dedicados à trigonometria plana e os outros três à trigonometria esférica. Onde, inicialmente as únicas funções trigonométricas empregadas são o seno e cosseno. Somente mais tarde, Regiomontanus calculou uma tábua de tangentes.

Em 1494, foi divulgada a primeira edição impressa da *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, concluída em 1487, era mais conhecida por *Sūma*. Escrita pelo frade franciscano Luca Pacioli (1445-1509), segundo Eves (2011), era um compilado livre de muitas fontes e pretendia ser um sumário da aritmética, da álgebra, da geometria euclidiana e contabilidade. Além disso, Eves (2011) afirma em relação a *Sūma* que:

> A parte aritmética da Sūma começa com algoritmos para as operações fundamentais e para a extração de raiz quadrada. A abordagem é bastante completa, contendo, por exemplo, nada menos que oito esquemas para se efetuar a multiplicação. A aritmética mercantil é focalizada extensamente e ilustrada com vários problemas; há um tratamento relevante da escrituração mercantil de partidas dobradas. A regra de falsa posição é discutida e aplicada (EVES, 2011, p. 298).

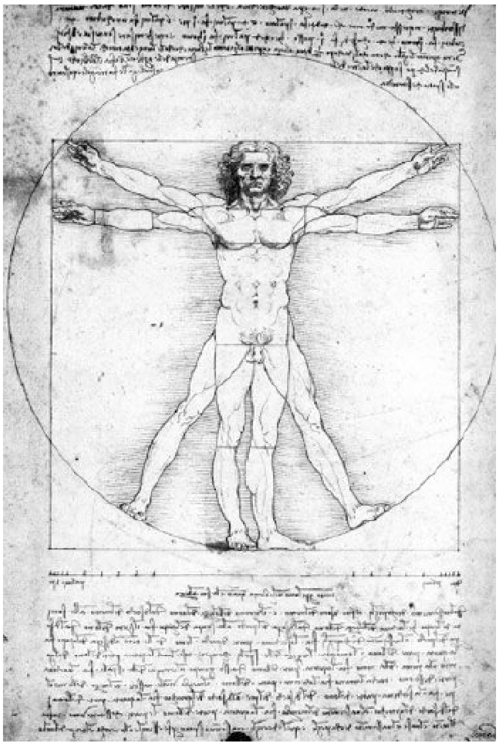
Entretanto, conforme Boyer e Merzbach (2012), a obra sobre geometria na *Summa* não é significativa. Posteriormente, em 1509, Pacioli fez mais duas tentativas no campo da geometria. Uma delas, a obra *De divina proportione*, conta com ilustrações dos sólidos regulares e a razão que mais tarde veio a ser chamada de *"a secção áurea"*, desenhadas por Leonardo da Vinci durante o tempo em que recebeu lições de matemática de Pacioli.

O Homem vitruviano (Figura 49), conforme Roque (2012), foi pintado por Leonardo da Vinci em 1490, baseando-se na obra do arquiteto romano Vitrúvio, do século I a.C., que já tentara encaixar as proporções do corpo humano dentro da figura de um quadrado e um círculo, mas seus desenhos haviam ficado imperfeitos. Leonardo pintou esse encaixe dentro dos padrões matemáticos esperados, ou seja, seguindo proporções harmônicas do corpo humano.

Outros matemáticos, como Stifel (1486-1567), Tartaglia (1500-1557) e Cardamo (1501-1576), segundo Eves (2011) e Roque (2012) tratam do cálculo com números racionais e irracionais, abordam a teoria das equações, proporções e discutem a regra de três.

De acordo com Eves (2011, p. 352), "dois importantes astrônomos contribuíram notavelmente para a matemática perto do início do século XVII: o italiano Galileu Galilei e o alemão Johann Kepler."

Figura 49 – *Homem vitruviano* de Leonardo da Vinci



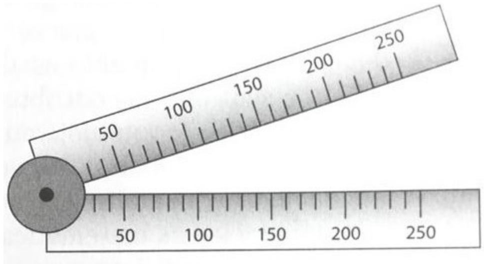
Fonte: (ROQUE, 2012, p. 259)

Em 1597 Galileu Galilei, que segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 224), "tinha tido a intenção de se graduar em medicina, mas seu gosto pelas obras de Euclides e Arquimedes levou-o a tornar-se professor de matemática", criou um instrumento chamado por ele de "compasso geométrico e militar". Boyer e Merzbach (2012) o descreve e dá um exemplo de uma das possíveis aplicações:

> O compasso de Galileu consistia de dois braços unidos como os de um compasso comum atual, mas cada um dos braços marcado com escalas graduadas de vários tipos. A Figura 50 mostra uma versão reduzida com apenas uma escala aritmética, as graduações simples, equidistantes, até 250. [...] Se, por exemplo, quisermos dividir um dado segmento de reta em cinco partes iguais, abre-se um compasso comum ao comprimento do segmento. Depois abre-se o compasso geométrico de modo que a distância entre as pontas do compasso comum cubra a distância entre duas marcas, uma em cada braço do compasso geométrico, que sejam múltiplos inteiros simples de cinco – digamos, o número 200 em cada braço. Então, mantendo fixa a abertura do compasso geométrico e colocando as pontas do outro compasso na marca 40 em cada braço, a distância entre as pontas do compasso comum será a quinta parte do comprimento do segmento de reta original (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 225).

Além disso, conforme Eves (2011), Galileu estabeleceu a lei segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda, e que se traduz na fórmula $s = \dfrac{gt^2}{2}$.

Figura 50 – Compasso Geométrico de Galileu



Fonte: (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 225)

Johannes Kepler, conforme Boyer e Merzbach (2012), interessava-se por aplicações à astronomia, principalmente em relação às órbitas elípticas. Em 1609, ele anunciou em suas duas primeiras leis de astronomia e no ano de 1619 a terceira. Para Eves (2011, p. 357), "essas leis são marcos fundamentais da história da astronomia e da matemática. Pois, num esforço para justificá-las, Isaac Newton foi levado a criar a mecânica celeste moderna". Essas leis são:

> I. Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos.
>
> II. O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
>
> III. O quadrado do tempo para que um planeta complete sua revolução orbital é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita (EVES, 2011, p. 357).

Para Eves (2011), o século XVII foi um dos mais importante na história da matemática.

> Perto do início do século, Napier revelou sua invenção dos logaritmos, Harriot e Oughtred contribuíram para a notação e a codificação da álgebra, Galileu fundou a ciência da dinâmica e Kepler anunciou suas leis do movimento planetário. Mais tarde, Desargues e Pascal inauguraram um novo campo da geometria pura, Descartes lançou a geometria analítica moderna, Fermat estabeleceu os fundamentos da teoria dos números moderna e Huygens deu contribuições de monta à teoria das probabilidades e a outros campos. E então, perto do final do século, na esteira preparada por vários matemáticos do próprio século, Newton e Leibniz contribuíram memoravelmente com a criação de cálculo. Podemos ver então que muitos campos novos e vastos se abriram para a pesquisa matemática durante o século XVII (EVES, 2011, p. 340).

A contribuição de Descartes (1596-1650) à geometria analítica aparece em La Geometrie, de 1637. Eves (2011) afirma que a primeira parte deste estudo trata dos princípios da geometria algébrica e revela um avanço em relação aos gregos:

> Para os gregos, uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo. Os gregos não iam além disso. Para Descartes, por outro lado, x^2 não sugeria uma área, antes porém o quarto termo da proporção $1 : x = x : x^2$, suscetível de ser representado por um segmento de reta fácil de construir quando se conhece x. (EVES, 2011, p. 384)

Este método, que utiliza a ideia de proporções na construção de segmentos, permite representar qualquer potência de uma variável, ou produtos de variáveis, por meio de um segmento de reta. Eves (2011) dá como exemplo a relação $y = x^2$, onde, a cada valor de x é possível construir o y correspondente como quarto termo da proporção.

O grande gênio holandês Christiaan Huygens, conforme Boyer e Merzbach (2012), demonstrou em 1673 na obra *Horologium oscillatorium*, entre outras coisas, o fato agora familiar de que num movimento circular uniforme a intensidade da força centrífuga é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade linear e inversamente proporcional ao raio do círculo.

Em 1726, segundo Boyer e Merzbach (2012), na terceira edição da sua obra *Principia*, Newton generaliza, esclarece e combina as ideias de Galileu sobre movimento, as leis de Kepler da astronomia e a lei de Huygens da força centrípeta no movimento circular, formulando assim as suas próprias leis de movimento, onde segundo ele:

> Duas partículas quaisquer no universo, sejam dois planetas ou dois grãos de mostarda, se atraem mutuamente com uma força que varia de modo inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 276).

A criação do cálculo algébrico simbólico e do cálculo infinitesimal, por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) no século XVII, de acordo com Eves (2011), acentua a discussão sobre grandezas incomensuráveis e números irracionais, que se dá em torno da leitura e interpretação do Livro V dos Elementos de Euclides, ou seja, da teoria das proporções de Eudoxo. Ainda segundo Eves (2011), somente no final do século XIX, com o trabalho de Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano (1858-1932), tal questão foi solucionada. Sendo assim, conforme Roque (2012):

> Hoje dizemos que duas grandezas A e B são comensuráveis se a razão entre elas pode ser expressa por um número racional, pois isso significa que existe uma terceira grandeza C que cabe em A e B um número inteiro de vezes. Caso contrário, se a razão entre as grandezas não puder ser expressa por um número racional, dizemos que são incomensuráveis (ROQUE, 2012, p. 84).

Além disso, a criação do cálculo possibilitou a descrição matemática de diversos fenômenos físicos, naturais e sociais. Vejamos alguns exemplos:

Lei de Esfriamento de Newton: segundo a empírica lei de esfriamento de Newton, a taxa de esfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente.

Supondo que $T(t)$ representa a temperatura de um corpo no instante t e que a temperatura do meio ambiente seja constante, igual a T_m. Se $\frac{dT}{dt}$ representa a taxa de variação da temperatura do corpo, então a lei de esfriamento de Newton pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - T_m) \; ou \; \frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \tag{E.1}$$

Crescimento Populacional: espera-se que quanto maior for a população atual, maior ela será no futuro. Logo, é plausível diz que a taxa de crescimento de uma população P seja proporcional a população presente naquele instante. Assim, o modelo para crescimento populacional é dado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{E.2}$$

em que k é uma constante de proporcionalidade positiva.

Meia-Vida: de acordo com a física é uma medida de estabilidade de uma substância radioativa. Em outras palavra a meia-vida é simplesmente o tempo gasto para que metade dos átomos de uma quantidade inicial A_0 se desintegre. Logo, o modelo matemático para meia-vida de um dado elemento radiativo é

$$\frac{dA}{dt} = kA \tag{E.3}$$

dada a quantidade remanescente $A(t)$ no instante t.

Por fim, dado o exposto nesta breve investigação histórica da teoria das proporções, podemos destacar a grande importância do seu estudo e compreensão dos seus conceitos, desde tempos antigos até a atualidade, na solução de problemas algébricos, aritméticos, geométricos e comerciais.

Identificamos, neste estudo, algumas tarefas relacionadas à proporção: divisão em partes proporcionais, resolução de equações lineares, problemas típicos de regra de três, [etc]. Quanto às técnicas, identificamos a utilização de semelhança de triângulos na divisão e construção de segmentos, por meio do compasso de Galileu, regra de três e a falsa posição.

Assim, este estudo histórico nos proporcionou vislumbrar diferentes aspectos sobre proporção, bem como a construção do seu conceito.

APÊNDICE F

O Ensino-Aprendizagem da Proporcionalidade nos Documentos Oficiais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), explicitam que o conhecimento matemático é um bem necessário para todos os educandos, em razão da sua grande aplicação na sociedade contemporânea e por suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. Além disso, destacam a importância do aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, enfatizando a sua participação crítica no processo de construção do conhecimento.

Em relação ao Ensino Fundamental, Brasil (2017) explicita que, ele deve ter como finalidade o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a elaboração e a solução de problemas em uma diversidade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. De acordo com os Brasil (1998, p. 47), o ensino de Matemática para o ensino fundamental tem como principais objetivos levar o aluno a:

- identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta;
- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático;
- selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;

- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções;
- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Assim, para isso, o professor deve organizar seu trabalho, empregando diferentes estratégias, de modo que os alunos desenvolvam a própria capacidade para construir conhecimentos matemáticos e interagir de forma cooperativa com seus pares. Portanto, espera-se que neste ciclo, o ensino de Matemática vise o desenvolvimento:

> Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade (BRASIL, 1998, p. 65).

Dentre as estratégias de trabalho sugeridas pelos PCN, temos: motivação através de situações-problema do dia a dia; História da Matemática; Resolução de Problemas e Tecnologias da Informação.

> O fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Assim, é desejável explorar no terceiro ciclo problemas que levem os alunos a fazer predições por meio de questões que envolvam aspectos qualitativos e quantitativos (O número encontrado deveria ser maior ou menor? Quanto maior? Essa resposta faz sentido?) (BRASIL, 1998, p. 67).

Ainda nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais salientam a importância da exploração histórica no ensino de proporcionalidade, como ponto de partida para o seu estudo.

> As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da ideia de proporcionalidade e um campo fértil para uma abordagem histórica (BRASIL, 1998, p. 52).

Essas estratégias obviamente, buscam romper com o ensino tradicional da Matemática, pautado na transmissão oral de conteúdos por meio de aulas expositivas e exercícios repetitivos, os quais têm recebido inúmeras críticas ao longo dos anos. Segundo Libâneo (2006) este é o tipo de ensino presente na maior parte de nossas escolas, uma forma limitada e empobrecida, onde a participação do aluno é menosprezada. O autor destaca que o ensino precisa ir além disso e deve:

> Compreender ações conjuntas do professor e dos alunos pelas quais estes são estimulados a assimilar, consciente e ativamente, os conteúdos e os métodos de assimilá-los com suas forças intelectuais próprias, bem como aplicá-los, de forma independente e criativa, nas várias situações escolares e na vida prática (LIBÂNEO, 2006, p. 78).

Como procedimentos para ensino de proporcionalidade Brasil (1998, p. 87) traz as seguintes sugestões:

- Identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e a representando no plano cartesiano.
- Resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.

Dessa forma, os PCN afirmam que o estudo de diferentes grandezas, de sua utilização no contexto social e de problemas históricos ligados a elas geralmente desperta o interesse dos alunos.

Vale a pena destacar que, ao analisarmos os documentos oficiais, podemos vislumbrar a existência de uma preocupação constante dos PCN e da BNCC em relação a verificação da dependência entre os conteúdos estudados, de forma a demonstrar para o aluno que os conceitos expostos não estão isolados, mas sim interligados. No que se refere a proporcionalidade, é indicado mostrar as conexões deste conceito com diferentes estratégias, entre elas a abordagem histórica e exemplos de aplicações no dia a dia. A partir daí serão tratadas diferentes grandezas (comprimento, massa, tempo, capacidade, temperatura etc.), observadas com frequência em nosso cotiano, incluindo as que são determinadas pela razão ou produto de duas outras (velocidade, energia elétrica, densidade demográfica etc.).

O estudo da proporcionalidade entre grandezas e medidas é um articulador entre diversos conteúdos matemáticos, por proporcionar um vasto campo de problemas que permitem consolidar e ampliar a noção de número e possibilitar a aplicação de noções geométricas. É importante que os alunos percebam essas conexões. Desse modo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a presença e relevância dos conceitos de proporcionalidade no estudo de outros conteúdos:

> A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc (BRASIL, 2017, p. 268).

Outras referências à proporcionalidade aparecem em diferentes contextos nos PCN Brasil (1998):

- O estudo detalhado das grandes questões do Meio Ambiente poluição, desmatamento, limites para uso dos recursos naturais, sustentabilidade, desperdício, camada de ozônio pressupõe que o aluno tenha construído determinados conceitos matemáticos (áreas, volumes, proporcionalidade etc.) (p.31).
- É importante que os alunos percebam essas conexões. A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções (p.84).
- Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais os contraexemplos (p.84).
- Além disso, é uma atividade que leva o aluno a observar as relações entre tamanhos e aproximar-se da noção de proporcionalidade, o que permitirá, num momento posterior, a utilização das escalas na construção de maquetes (p.123).

Sendo assim, diante da sua grande importância histórica, da sua vasta aplicação e das dificuldades na sua compreensão e valorização, por parte dos alunos, este trabalho vem para tentar minimizar estes problemas, de forma à auxiliar aqueles que têm dificuldades e estimular ainda mais os que conseguem vislumbrar o sentido prático e teórico do estudo de proporcionalidade em suas vidas. Observando as habilidades a serem desenvolvidas, de acordo com Brasil (2017), conforme mostra o Quadro 6.

Quadro 6 – Habilidades a serem desenvolvidas no estudo de proporções no 7º ano do ensino fundamental

Habilidades	
Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.	(EF07MA07)
Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	(EF07MA08)
Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.	(EF07MA09)
Compare e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.	(EF07MA10)
Compreender e utilizar a multiplicação e as divisões de números racionais, em relação entre elas e suas propriedades operatórias.	(EF07MA11)
Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.	(EF07MA12)
Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando da ideia de incógnita.	(EF07MA13)
Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.	(EF07MA17)

Fonte: (BRASIL, 2017)