Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Contexto histórico e socioeconômico do surgimento dos números complexos

José Rubens Neris Júnior
Mestrado Profissional em Matemática: Profmat/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

janeiro de 2022

Contexto histórico e socioeconômico do surgimento dos números complexos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por José Rubens Neris Júnior e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 28 de janeiro de 2022.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Vinícius Machado Pereira dos Santos
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – Profmat, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

N446c Neris Jr, José Rubens.
Contexto histórico e socioeconômico do surgimento dos números complexos / José Rubens Neris Jr. -- 2022
x, 37 f. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2022.
Inclui bibliografia.

1. Renascentismo. 2. Comércio no mediterrâneo. 3. Queda de Constantinopla. 4. Matemáticos Italianos. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título**:** Contexto histórico e socioeconômico do surgimento dos números complexos

Autor: mestrando José Rubens Neris Júnior

Dissertação defendida e aprovada em 28 de janeiro de 2022.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Doutor Aldi Nestor de Souza** (Presidente Banca/orientador)
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
2. **Doutor Vinicius Machado Pereira dos Santos** (Membro Interno)
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso
3. **Doutor Junior Cesar Alves Soares** (Membro Externo)
Instituição: Unemat - campus Barra do Bugres

Cuiabá, 28/01/2022.

Documento assinado eletronicamente por **Junior Cesar Alves Soares**, **Usuário Externo**, em 28/01/2022, às 17:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **ALDI NESTOR DE SOUZA**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 28/01/2022, às 19:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **VINICIUS MACHADO PEREIRA DOS SANTOS**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 31/01/2022, às 16:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4338199** e o código CRC **F140ABEE**.

Referência: Processo nº 23108.003750/2022-54 SEI nº 4338199

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial a minha esposa, pelo companheirismo e pela compreensão.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço principalmente a Deus pela força e perseverança.

Aos meus pais e meus irmãos pelo apoio e compreensão.

A minha esposa Leila por me apoiar, incentivar e por estar sempre junto comigo.

A todos os colegas do mestrado pelo companheirismo.

A todos os professores que já passaram pela minha vida, pela sua dedicação e empenho, especialmente a meu orientador Professor Dr. Aldi Nestor de Souza, pela orientação deste trabalho.

"O período de maior ganho em conhecimento e experiência é o período mais difícil da vida de alguém".

Dalai Lama.

Resumo

É possível afirmar que as evoluções matemáticas, em especial o conjunto dos números complexos, iniciaram na Itália Renascentista dos séculos XV e XVI devido aos fatores econômicos e sociais favorecidos pela: a queda de Constantinopla, ocasionando a fuga de grandes mentes do oriente para a Itália; junção do conhecimento matemático ocidental com a matemática oriental; e o apoio de grande famílias burguesas (*mecenas*) a empreitadas de cunho artístico e científico. Nessa ótica, o objetivo dessa pesquisa é analisar como se deu a evolução do método científico matemático até o desenvolvimento dos números complexos durante a Itália Renascentista dos séculos XV e XVI, até o período da revolução industrial dos séculos XVIII e XIX. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica mediante revisão de literatura com consulta em teses, publicações, artigos e livros. Por fim, foi analisado a relação entre o documento oficial do ensino (BNCC - Base Nacional Comum Curricular) com o estudo dos números complexos e suas aplicações.

Palavras chave: Renascentismo. Comércio no mediterrâneo. Queda de Constantinopla. Matemáticos italianos.

Abstract

It is possible to state that the mathematical evolutions, especially the complex numbers, started in Italian Renaissance in the 15th and 16th centuries due to economic and social factors favored by: the fall of Constantinople, causing the flight of great minds from the East to Italy; junction of western mathematical knowledge with eastern mathematics; and the support of large bourgeois families (patrons) for artistic and scientific undertakings. From this perspective, the objective of this research is to analyze how the evolution of the scientific mathematical method until the development of complex numbers during Italian Renaissance of the 15th and 16th centuries, until the period of the industrial revolution of the 18th and 19th centuries. The methodology used was bibliographic research through literature review with consultation in theses, publications, articles and books. Finally, the relationship between the official teaching document (BNCC - Common National Curriculum Base) with the study of complex numbers and their applications was analyzed.

Keywords: Renaissance. Commerce in the Mediterranean. Fall of Constantinople. Italian Mathematicians.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A história da matemática tem capítulos interessantes durante os séculos, com avanços econômicos, políticos e sociais notáveis que fizeram com que grandes nações perdurassem suas conquistas por muitos anos.

Nesta dissertação será abordada a evolução matemática na Itália Renascentista dos séculos XV e XVI, que precedeu a formalização dos números complexos nos séculos XVIII e XIX, detalhando o processo socioeconômico que a região atravessava naquele momento histórico. Esses acontecimentos foram papeis preponderante para que aquela região tornasse o berço de várias evoluções matemáticas, dentre elas o desenvolvimento dos números complexos.

Durante toda a minha vida acadêmica e profissional, os números complexos sempre foi o conteúdo que me trouxe maior atenção. A princípio achava-o sem fundamento algum, talvez da forma que me foi apresentado na graduação ou talvez por não dar-lhe a atenção merecida. A medida que fui me debruçando mais sobre o assunto percebi que tinha algo que poderia ser melhor explorado por alunos e professores. Após uma palestra de apenas 30 minutos do Prof. Doutor Vinicius Souza Bittencourt, na Universidade Federal de Rondonópolis por volta de 2017, na qual abordou uma outra forma de contemplar o conjunto dos números complexos, algo que nunca tinha visto antes. Naquele exato momento, mesmo sem entendendo muito que foi apresentado, confesso, foi o que motivou o tema de minha dissertação.

No entanto, durante o levantamento bibliográfico para a formação dessa dissertação, uma dúvida persistia: Em qual base está fundamentada os números complexos em documentos oficiais? Qual a influência do meio social no desenvolvimento de novos métodos para resolução de problemas? Assim, o foco da pesquisa foi alterado por diversas vezes e por fim enveredou-se por um caminho.

O objetivo dessa pesquisa é analisar como se deu a evolução do método científico matemático até o desenvolvimento dos números complexos durante a Itália Renascentista dos séculos XV e XVI, até o período da revolução industrial dos séculos XVIII e XIX.

De modo a atender os objetivos, a metodologia do estudo se caracteriza como pesquisa bibliográfica, pois é um estudo elaborado a partir de material já publicado, constituído principalmente de livros, artigos científicos, monografias, dissertações, teses, entre outros; com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto com o assunto da pesquisa, conforme Prodanov (2013).

A revisão de literatura foi fundamentada em produções científicas disponíveis, como periódicos, artigos, livros, teses, dissertações, entre outros; de modo a fundamentar conceitos importantes do estudo.

Por fim, a presente dissertação está estruturada em três capítulos, além desta introdução e das considerações finais. O primeiro aborda o papel histórico da evolução humana e matemática na Itália Renascentista do Século XV e XVII e no período da Revolução Industrial dos séculos XVIII e XIX. Em seguida, o capítulo 2, mostra algumas aplicações dos números complexos. Por fim, o terceiro capítulo traz a uma análise do documento oficial BNCC (Base Nacional Comum Curricular), que direciona o planejamento educacional das escolas públicas e privadas, e o sua contribuição com estudo dos números complexos.

Capítulo 1

Números complexos e história

Neste capítulo apresentaremos alguns fatos históricos econômicos e sociais que aconteceram na Europa do século XV, XVI, XVII e XIX que contribuíram para que o desenvolvimento das equações cúbica e quárticas, e posteriormente os números complexos tenham ocorridos na Europa Renascentista e não em outro lugar..

1.1 Fim da idade média.

Como aponta Huberman (1986), as cidades Italianas de Veneza, Gênova e Pisa, no período da alta idade média, serão nossa pista para justificarmos porque o desenvolvimento dos números complexos, ou resolução da equação cúbica, começou nessa região.

> Veneza apresentava uma localização ideal para a época, pois o bom comércio era o do oriente, tendo o Mediterrâneo como saída. Uma vista d´olhos no mapa será o suficiente para mostrar porque Veneza e outras cidades italianas se tornaram centros comerciais tão importantes. (Huberman, 1986, p.26).

Fundamentalmente nos atemos ao comércio de especiarias com o oriente, que coloca os italianos, particularmente os da região do comércio, em contato com os árabes, que primeiro se debruçaram e desenvolveram técnicas de resolução da equação polinomial cúbica, conforme aponta Magalhães Filho (1975).

Em meados do século XV, mais precisamente com o fim da idade média, que se deu com a queda de Constantinopla pelo Império Turco-Otomano, conforme atesta Ruciman (2001), ocorreram grandes transformações socioeconômicas na Europa Ocidental, dentre uma dessas, o começo do fim do feudalismo - modelo econômico que perdurou por mais de mil anos baseada no consumo individual, comércio baseado pela troca e isolamento do mundo exterior. Isso resultou na ascensão dos burgueses na sociedade impulsionando as atividades econômicas, o processo migratório das pessoas do campo para as grandes cidades e a disseminação de feiras pela Europa Ocidental.

As descobertas científicas não estavam mais atrelados aos dogmas da igreja católica. As contestações por parte de filósofos e cientistas eram permitidas no novo mundo.

Há quem defenda que a queda de Constantinopla foi o início da globalização.

Com acontecimentos de várias guerras na Europa Ocidental, em especial a guerra dos 100 anos, entre franceses e ingleses, as transações comerciais começara a ser migradas da forma terrestre para o marítima. Este comércio, gradativamente, foi se expandindo do mediterrâneo ao atlântico e ao mar do norte, contornando a península ibérica. Graças a essa expansão marítima as rotas para o novo mundo foram descobertas pelos europeus.

As guerras trouxeram várias mortes, mas nenhuma outra trouxe mais desgraça a época do que a peste negra. Esta epidemia, advinda de embarcações genovesas que faziam comércio com a Ásia, se alastrou rapidamente, devido as péssimas condições de higiene por toda a Europa, causando milhões de mortes. A epidemia não fez distinção de classe social; morreram pobres, ricos, intelectuais, ignorantes, servos e senhores. Como a contaminação se dava principalmente pelas grandes rotas comerciais, foram dizimados vários povoados.

Para Magalhães Filho (1975) a grande perda humana causada pela peste negra, interligadas às péssimas condições da agricultura provocaram a escassez de alimentos, trazendo assim um novo problema a Europa: a fome. A queda na produção trouxe altos prejuízos aos comerciantes que tiveram seus lucros reduzidos a níveis muito baixos. O que sucedeu no aumento da especulação dos produtos. Todos esses fatores foram combustíveis que abalaram a Europa no século XV. Levantes armados se espalharam por toda a Europa. Normalmente estes levantes eram sufocados cruelmente pelo poder real ou pelos nobres, que possuíam exércitos particulares. Mesmo assim esses conflitos tiveram como resultado uma maior participação nas corporações e o afrouxamento nas relações servis.

Existia ainda o problema da expansão do império turco contra o continente europeu. Esta expansão fez com que o fluxo de mercadorias pela rota da seda fosse interrompido, pois os turcos haviam dominado todo o oriente. Foi, assim, necessário, aos europeus, descobrir outro caminho para o comércio com a índia e o oriente.

Mesmo com a dominação turca das principais rotas comerciais que ligavam o ocidente com o oriente, não foi um impeditivo aos europeus que continuassem com o fluxo de mercadorias. Porém, os custos das mercadorias chegaram a preços exorbitantes. Com o fim da peste negra, houve um aumento populacional, o que acarretou diretamente com o problema da alimentação para a população, visto que havia falta de produtos agrícolas.

Veneza, cidade italiana, junto com os árabes, era o berço que dominava as principais rotas de navegação do mediterrâneo e monopolizava o comércio e a maior parte do fornecimento de mercadorias.

A navegação de longo alcance, realizada pelo oceano atlântico, exigia técnicas mais avançadas do que a realizada no mediterrâneo; era desafiadora, devido a extrema adversidade exigida pelo oceano.

Viu-se, então, na necessidade do aprimoramento técnico de navegação, atrelada a criação de instrumentos que auxiliava na navegação, como:

- A invenção da Bússola;
- A invenção da prensa móvel, que auxiliou na confecção de cartas de navegação;
- Descoberta da pólvora.

As descobertas realizadas ajudaram e muito no comércio marítimo, porém tropeçava em um grande problema: os altos custos financeiros. A burguesia começou a financiar as expedições marítimas, solucionando assim o problema, mas em troca de futuros benefícios.

Nem só de dinheiro se faz uma expansão marítima, mas sim de altos conhecimentos matemáticos e científicos. O ambiente envolvido pela expansão marítima e comercial foi um dos pilares que fizeram com que a matemática e as demais ciências tivessem a maior expansão em todos os tempos da história. Esta expansão, iniciada nos meados do século XV, fez com que o continente europeu chegasse no início do século XIX à revolução industrial como potência mundial.

1.2 A renascença.

Nenhum outro lugar da Europa foi mais valorizado com a expansão marítima do que a Itália, rota essencial para o com o mediterrâneo. Aliada a esse fato, houve a chegada de grandes sábio Bizantinos vindos de Constantinopla após sua queda. Este movimento tinha como base as seguintes concepções:

- O desenvolvimento artístico, científico e cultural.
- Renascimento da antiguidade clássica greco-romana.
- Análise crítica da história passada por meio de uma precisa percepção da história.

Esse movimento estendeu-se por toda a Europa, em especial, pela França, Inglaterra e Alemanha. Séculos a frente, a evolução da matemática terá papel principal nesses países.

Os pontos fortes do renascentismo:

- o interesse pelo estudo do direito romano;
- rejeição ao misticismo medieval;
- multiplicação das universidades, as quais haviam rompido com a igreja e seu domínio sobre a construção do conhecimento;
- apoio de ricos mercadores aos descobrimentos científicos, artísticos e culturais, como os mecenas;
- e a queda de Constantinopla, fazendo com que sábios bizantinos fugissem para a Itália, trazendo de volta os escritos gregos com a influência oriental.

Na idade média o acúmulo de riqueza estava sobre os poderes dos nobres. Porém na idade moderna o acúmulo de riqueza passou a ser muito valorizado. A burguesia lutava por uma ascensão social e econômica. Segue então um novo segmento econômico: os profissionais liberais e assalariados.

O grupo social denominado *mecenas* é constituído por burgueses, nobres e até mesmo o alto clero. Tinha por objetivo financiar, o campo da ciência e arte, com o propósito de receber prestígio político e econômico. Os mecenas seriam, num paralelo com os tempos atuais, os financiadores privados de pesquisas científica ou artística.

A possibilidade de leigos cursarem a universidade levou muitos burgueses a terem acesso à educação. Houve uma preocupação maior com o ser humano, menor com a metafísica. As atenções voltaram-se para as questões cotidianas e da sociedade.

1.2.1 Renascença da matemática.

A queda de Constantinopla, o último resquício do império romano no oriente, em 1453, fez com que a Europa recebesse muitos refugiados, em especial na Itália. Dentre esses refugiados haviam muitos intelectuais que trouxeram consigo trabalhos científicos gregos, que agora estavam acrescido das influências orientais. Não existia nenhum lugar melhor no planeta para que o desenvolvimento científico viesse a existir, conforme Magalhães Filho (1975).

Outro fator extremamente importante para a difusão dos conhecimentos matemáticos foi a invenção da imprensa de tipos móveis. A circulação das informações foi aprimorada, o que resultou na disseminação dos conhecimentos de forma rápida e mais barata.

O desenvolvimento dos conceitos matemáticos: aritmética, álgebra e trigonometria, estava centrado, em sua maioria, nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga. Estas eram cidades mercantis em desenvolvimento, propiciando um campo fértil para a expansão matemática.

As realizações matemáticas no século XVI constituiam-se da: expansão da álgebra simbólica, padronização do cálculo com numerais indo-arábicos, uso comum de frações decimais, resolução de equações cúbica e quárticas por meios algébricos, aprimoramento da trigonometria e progressão da teoria das equações. Estava preparado o campo para a grande expansão que viria a ocorrer a partir do século XVII até o século XIX.

Talvez valha a pena se debruçar mais sobre esse período na Itália. A historiografia matemática é farta em elencar anedotas, intrigas, brigas pessoais, e traições de pessoas envolvidas no trato das cúbicas. O que parece relevante para nós, nesse caso, é a Itália em que eles viviam. Cardano, Tartaglia, del Ferro, Rafael Bombelli, Luca de Pacioli; todos viviam na vizinhança de Veneza e Gênova, as principais cidades comerciais do País e centro do comércio europeu. Era por essas cidades que se dava o comércio com o oriente, através de Constantinopla, até 1453, quando esta foi tomada pelos turcos. Toda essa rapaziada da Itália é contemporânea do momento em que novas rotas comerciais, dessa vez pelo atlântico, se impuseram sobre a Europa em geral e sobre Gênova e Veneza em particular.

Em 1494, o professor de Leonardo Da Vinci, Luca de Paciolipublicou a *Summa de Arithmetica geometria proportioni*, um resumo completo de toda a matemática conhecida na Itália renascentista. Nesse livro havia uma seção sobre as equações cúbicas. Essas equações hoje escrevemos na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. O livro concluía que a solução para essa equação seria impossível. Muitas civilizações vinham procurando a solução para essa equação por mais de 4.000 anos: babilônios, gregos, persas, chineses, egípcios e hindus; estes acabaram de não conseguir resolvê-las.

Como aponta Boyer (2019), na Itália, do início do século XVI, antes da frenética briga entre Tartaglia e Cardano, vale fazer uma referência ao grande matemática Scipione del Ferro, nascido no dia 06 de fevereiro de 1465 e falecendo no dia 05 de novembro de 1526, na cidade de Bolonha, Itália. Pouco se sabe da história desse notável matemático, que ocupou-se da maior parte de seu tempo dentro da Universidade de Bolonha. O começo do enredo da frenética disputa que envolveu a matemática na Itália da época se deu na descoberta, por volta de 1510, de uma forma geral, e confiável, para resolução de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$ - equação cúbica reduzida (que não tem o termo x^2). Del Ferro havia descoberto uma fórmula matemática que derrotara grandes matemáticos que por milênios o tentaram. O que fez del Ferro? Nada, não contou a ninguém.

O motivo que fez com que ele não divulgasse a descoberta a Itália e ao mundo foi o medo. Ser um matemático, no século XV e XVI, não era uma tarefa fácil. Existia na época duelos intelectuais matemáticos. Ao ganhador, o prestígio, a vaga como professor, ou a renovação de contrato com as universidades italianas e os apoios financeiro dos *mecenas*. Assim, com o medo de perder seu prestígio, guardou sua arma valiosa. O medo fez com que guardasse por mais de duas décadas, vindo a revelar já em seu leito de morte a seu aluno Antonio Maria Fiore, conforme atesta Durán (2001).

Vislumbrado por notoriedade, Antonio Maria Fiore, se viu na oportunidade perfeita. Em 1535, desafiou uma mente que começava a se destacar na época: Nicolo Fontana, conhecido por Tartaglia. Nasceu por volta de 1500, em Brescia, cidade italiana que passou por mãos venezianas e francesas no período entre 1509 e 1513, e faleceu em 13 de dezembro de 1557, na cidade de Veneza Garbi (2009).Aqui faremos uma breve pausa na história e voltemos mais precisamente a 1512 na cidade de Brescia. Nessa cidade e praticamente em toda a Itália, se via em grandes disputas territoriais, resultado de invasões francesas e espanholas. Em uma das várias guerras que aconteciam na Itália, como conta a bela obra de Maquiavel, o menino Nicolo se viu órfão e com grande ferimento nos lábios, que gerou defeito em sua fala, rendendo o apelido de Tartaglia, que significa gago. Como não dispunha de recursos para comprar livros, papel, pena e tinta, Tartaglia dirigia-se substituindo a pena e a tinta por carvão e o papel pelas lápides. Devido ao seu grande amor pela educação conseguiu desacorrentar-se da pobreza, estudando incansavelmente chegou ao destaque da época em: matemática, mecânica, artilharia e agrimensura .

Voltando a 1535, mais precisamente a Fiore e ao desafio proposto a Tartaglia. O desafio proposto por Fiore continha 30 problemas, todos envolvendo resolução de equações do terceiro grau, reduzida, na forma $ax^3 + b^x = c$. Já o desafio de Tartaglia a Fiore continha problemas matemáticos de varios tipos. Neste mesmo ano Tartaglia foi pioneiro na aplicação da matemática à artilharia bélica. Aqui vale ressaltar que o ambiente beligerante vivido na região do velho continente contribuiu e muito para que o surgimento não tenha sido feito em outro lugar, a não ser neste. Como pode-se notar a única arma de Fiore era a resolução das equações de terceiro grau. Isso, sem dúvida, era uma grande arma, visto que na época ninguém além de Fiore e Della Nave conheciam a receita para resolvê-las. Tartaglia, percebeu naquele momento que Pacioli estava errado. Com a lista que continha em suas mãos, trabalhou incansavelmente na forma de deduzir uma fórmula para resolver os 30 problemas dados por Fiore. No dia do duelo Tartaglia apresentou as resoluções dos 30 problemas enunciados, humilhou Fiore e de quebra deduziu a fórmula de Scipione del Ferro. Se tornando assim o segundo homem do mundo a deduzir tal fórmula.

Logo a notícia do duelo chegou a Milão e consequentemente ao excêntrico médico-matemático Cardano, que ficou extremamente curioso, visto que estava escrevendo a *Pratica Arithmeticae Generalis*, que continha ensinamentos sobre Álgebra, Geometria e Aritmética. Ao saber que Tartaglia continha o método para resolver as equações de terceiro grau escreveu a este uma série de cartas que alternava entre elogios e ataques agressivos; além das cartas, tentou fazer vários convites com o intuito de colocar suas mãos na fórmula de Tartaglia. Com a promessa de apresentar aos seus admiráveis mecenas, Cardano consegue atrair Tartaglia a Milão e em 25 de março de 1539, depois de muitas insistências e com a promessa de não publicar a descoberta antes de Tartaglia, Cardano recebe a prova de que tanto desejava.

Cardano, como o mesmo gostava de se denominar, debochado, espião, solitário, desonesto, violento, traidor, invejoso e portador de total desprezo pela religião, nasceu em Pavia, em 1501 e faleceu em Roma, em 1576. Sua vida foi marcada por contrastes e extremos. Foi autor do Liber de *Ludo Aleae* (Ao lançar um dado: livro dos jogos de azar), onde introduziu a ideia de probabilidade, utilizada até hoje. Sua maior obra foi *Ars Magna*, publicada em Nuremberg, na Alemanha, em 1945.

Em 1525, ele recebeu seu diploma de médico pela Universidade de Pádua, logo apresentou seu pedido para ingressar na Associação Médica de Milão, sendo rejeitado por três vezes, pela mera desculpa de ser filho ilegítimo. Decide então mudar para pequena cidade de Sacco, a poucos quilômetros de Pádua, e prática medicina.

Em 1531, casou-se com Lucia Bandarini e, um ano depois, se mudaram para Gallarate. Em 1533, com problemas econômicos o levou a vender as joias e os móveis de sua esposa. Na tentativa de desesperada para refazer sua fortuna, se mudaram para Milão e acabaram caindo em miséria, sendo forçados a entrar em um asilo de caridade. No entanto, uma reviravolta surpreendente permitiu que saíssem daquela terrível situação, quando a Fundação Piatti, em Milão, lhe concedeu a posição de professor de matemática que seu pai já teve.

Cardano ficou fascinado e imediatamente começou a estudar o algoritmo de Tartaglia. Porém, tem um objetivo mais ambicioso, uma solução para equação cúbica completa, $ax^3+bx^2+cx+d=0$, que incluía o termo x^2. Gloriosamente consegue encontrar a forma de resolução.

Em 1542, Cardano e seu discípulo Ferrari em visita a Bolonha conseguiu com Della Nave a permissão de estudar os manuscritos de Ferro, e lá encontraram a solução da equação do terceiro grau da forma $x^3+px+q=0$. Como todos poderiam imaginar Cardano quebrou o juramento feito a Tartaglia. Em 1545 publicou o livro ?Ars Magna?, que continha a forma de resolução passada por Tartaglia, a esse não mencionado o mérito.

Vamos conhecer a fórmula que gerou tanta polêmica.

Podemos escrever de forma geral as equações do terceiro grau da forma:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{1.1}$$

Se multiplicarmos os dois lados da equação (1.1) por $\dfrac{1}{a}$. Ela é equivalente a

$$\frac{1}{a}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=\frac{1}{a}\cdot 0$$

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

Logo, basta considerar na equação o coeficiente de x^3 igual a 1. Assim trabalharemos a equação (1.1) na forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.2}$$

Substituindo $x = y - \dfrac{a}{3}$ em (1.2), tem-se:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 - 3y^2\left(\frac{a}{3}\right) + 3y\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + ay^2 - 2y\left(\frac{a^2}{3}\right) + \left(\frac{a^3}{9}\right) + by - \left(\frac{a}{3}\right)b + c = 0$$

$$y^3 + \left[\cancel{ay^2 - 3y^2\left(\frac{a}{3}\right)}\right] + \left[by + 3y\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2y\left(\frac{a^2}{3}\right)\right] + \left[-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9}\right] - \left(\frac{ab}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + \left[by + y\left(\frac{a^2}{3}\right) - 2y\left(\frac{a^2}{3}\right)\right] + \frac{2a^3}{27} - \left(\frac{ab}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + \left(by - \frac{a^2y}{3}\right) + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0 \tag{1.3}$$

Note que a equação (1.3) o coeficiente do termo y^2 é igual a zero. Portanto basta estudar a equação na forma:

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1.4}$$

Para resolver a equação acima, escreveremos $x = u + v$. Substituindo.

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (3u^2v + 3uv^2) + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$$

Isto é:

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$$

Logo, resolução da equação, sendo $x = u + v$ sua raiz, são tais que:

I) $u^3 + v^3 = -q$

II) $u \cdot v = -\dfrac{p}{3}$

Elevando ao cubo nos dois lados da igualdade de (II), temos.

I) $u^3 + v^3 = -q$

II) $u^3 \cdot v^3 = -\dfrac{p^3}{27}$

Observe que temos a soma e o produto de u^3 e v^3. Para tal utilizaremos como base teórica a soma e produtos das raízes de uma equação de segundo grau. Que nos direcionará a encontrar as raízes para equação (1.4). Escrevendo da seguinte maneira.

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27}$$

Utilizando o método de resolução de equações de segundo grau.

$$w = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4 \cdot \left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2}$$

$$w = \frac{1}{2}\left(-q \pm \sqrt{q^2 - 4 \cdot \left(-\frac{p^3}{27}\right)}\right)$$

$$w = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Assim as duas raízes são:

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Consequentemente, aplicando raiz cúbica nos dois lados da igualdade, temos:

$$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Portanto a raiz da equação (1.4), é:

$$u + v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Da mesma forma que estudamos o sinal de delta (Δ) nas equação do 2º grau. Vamos destacar nas equações do terceiro grau o radicando:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

- Se, $D > 0$, então a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.
- Se, $D = 0$, uma raiz real dupla e uma raiz real simples.
- Se, $D < 0$, três raízes reais simples distintas.

Este último item é o aspecto paradoxal da fórmula de Ferro, Tartaglia e Cardano. Quando $D < 0$, a fórmula exprime $x = u + v$ a soma das raízes cúbicas de números complexos ($a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$), cuja parte imaginária é diferente de zero. Ao tentar resolver eliminar as raízes para encontrar as soluções recai-se em outra equação de terceiro grau.

A batalha travada por Tartaglia e Cardano rendeu grandes frutos décadas depois. Assim como aconteceu com os gregos, que se depararam com a insuficiência dos números racionais, Rafael Bombelli percebeu a insuficiência dos números reais no trato das equações algébricas. Assim, Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico e grande algebrista, nascido na cidade de Bolonha, Itália, em 1530, foi quem teve a grande honra de dar os primeiros passos nos números complexos. Suas principais contribuições matemáticas são as publicações de 5 volumes sobre a matemática algébrica. Em uma dessas publicações, em 1572, no livro *L'algebra parte maggiore dell'arithmetica*, sua ideia foi demonstrar que os números da $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ podem ser representados das formas $a+\sqrt{-b}$ e $a-\sqrt{-b}$, respectivamente.

Ele foi o primeiro a inserir a regra para trabalhar com $\sqrt{-1}$:

$$\begin{gathered}
(\sqrt{-1})\cdot(\sqrt{-1}) = -1 \\
(-\sqrt{-1})\cdot(\sqrt{-1}) = 1 \\
(-\sqrt{-1})\cdot(-\sqrt{-1}) = -1 \\
\pm 1\cdot\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-1} \\
\pm 1\cdot(-\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}
\end{gathered}$$

Ele supôs que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b} \tag{1.5}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b} \tag{1.6}$$

Para determinar os valores de a e b, elevaremos as equações (1.5) e (1.6) ao cubo nos dois lados da igualdade, resultam, respectivamente, em:

$$a^3-3ab+(3a^2-b)\sqrt{-b} = 2+\sqrt{-121} \tag{1.7}$$

$$a^3-3ab-(3a^2-b)\sqrt{-b} = 2-\sqrt{-121} \tag{1.8}$$

Somando a equação (1.7) com a equação (1.8), temos $2a^3-6ab=4$, ou seja:

$$a^3-3ab = 2 \tag{1.9}$$

Agora, multiplicando as equações (1.5) e (1.6):

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\right) = \left(a+\sqrt{-b}\right)\cdot\left(a-\sqrt{-b}\right) \quad &\Leftrightarrow\\
\sqrt[3]{4+121} = a^2+b \quad &\Leftrightarrow\\
\sqrt[3]{125} = a^2+b \quad &\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$5 = a^2 + b \tag{1.10}$$

Da equação (1.10) segue que, $b = 5 - a^2$. Substituindo na em (1.9) obtemos

$$a^3 - 3a(5-a^2) = 2 \Rightarrow a^3 - 15a + 3a^3 = 2 \Rightarrow 4a^3 - 15a - 2 = 0 \Rightarrow$$

Considerando os divisores de 2, é fácil ver que 2 é a raiz dessa equação acima. As outras raízes não são racionais, por esse motivo não nos preocuparemos com as demais raízes.

E com $a = 2$ temos que

$$b = 5 - a^2 = 5 - 4 = 1$$

Logo,

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = \left(2+\sqrt{-121}\right) \text{ e } \left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = \left(2-\sqrt{-121}\right)$$

Como a relação é surpreendente, vamos verificar a primeira igualdade:

$$
\begin{aligned}
\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 &= \left(2+\sqrt{-1}\right)^2\left(2+\sqrt{-1}\right) = \left(4+4\sqrt{-1}+\sqrt{-1}\sqrt{-1}\right)\left(2+\sqrt{-1}\right)\\
&= \left(3+4\sqrt{-1}\right)\left(2+\sqrt{-1}\right) = \left(6+3\sqrt{-1}+8\sqrt{-1}+4(-1)\right)\\
&= 2+11\sqrt{-1} = 2+\sqrt{-11^2} = 2+\sqrt{-121}.
\end{aligned}
$$

Concluindo-se que a raiz $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ da equação $x^3-15x-4=0$ é na verdade

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right) = 4$$

Foi ele o responsável pelo criação da regra $m + n\sqrt{-1}$

Segundo o autor Garbi (2009) Bombelli lançava nesse momento uma grande base para o desenvolvimento da **Teoria dos Números Complexo**.

1.2.1.1 Resolução problema 1

Abaixo alguns exemplos de resolução de equações do 3º grau retirados do livro de Leonard Euler, escrito em 1770.

Problema 1: Encontrar as raízes da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Temos que:

- $p = -6$
- $q = -9$

Utilizando a fórmula clássica de Tartaglia para a resolução da equação acima:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Substituindo os valores de p e q.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4}} - 8} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4}} - 8}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81-32}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81-32}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

Note que na resolução $D = \dfrac{49}{4}$ encaixa no item de resolução $D > 0$. Logo existe uma solução real simples e duas soluções complexas conjugadas uma em relação a outra.

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$x = 2 + 1$

$x = 3.$

Logo, a fórmula nos dá a raiz $x = 3$. Para encontrar as outras duas raízes aqui utilizaremos dois métodos: O método de Descartes e o dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Como $x = 3$ é a solução da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$, podemos escreve equação da seguinte forma.

$x^3 - 6x - 9 = Q(x) \cdot (x - 3)$, onde $Q(x)$ é um polinômio de grau 2 $(ax^2 + bx + c)$.

Assim,

$x^3 - 6x - 9 = (ax^2 + bx + c) \cdot (x - 3)$

$x^3 - 6x - 9 = ax^3 - 3ax^2 + bx^2 - 3bx + cx - 3c$

Associando os termos semelhantes.

$x^3 - 6x - 9 = ax^3 + (-3a + b)x^2 + (-3b + c)x - 3c$

Utilizando a identidade polinomial.

$$\begin{cases} x^3 & = & ax^3 \\ 0x^2 & = & (-3a + b) \\ -6x & = & (-3b + c)x \\ -9 & = & -3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & = & a \\ 0 & = & (-3a + b) \\ -6 & = & (-3b + c) \\ 3 & = & c \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 3 \\ c & = & 3 \end{cases}$$

Logo,

$Q(x) = x^2 + 3x + 3$

Utilizando a fórmula de resolução para encontrar as raízes de $Q(x)$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}, \text{ tomando } i = \sqrt{-1}.$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}$$

Assim, as soluções de $x^3 - 6x - 9 = 0$ são:

$$S = \{3, \frac{-3 - \sqrt{3} \cdot i}{2}, \frac{-3 + \sqrt{3} \cdot i}{2}\}$$

1.2.1.2 Resolução problema 2

Problema 2: Encontre as raízes da equação $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Utilizando o método de resolução de Tartaglia. Temos:

- $p = -3$
- $q = -2$

Substituindo em:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-2)}{2} + \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-2)}{2} - \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{27}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{27}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - 1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - 1}}$$

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{0}}$$

Note que na resolução $D = 0$ encaixa no item de resolução $D = 0$. Logo existe três soluções reais. Sendo uma raiz real simples e duas raízes reais duplas.

$$x = \sqrt[3]{1 + 0} + \sqrt[3]{1 - 0}$$

$x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}$

$x = 1 + 1$

$x = 2$

Logo, a fórmula nos dá a raiz $x = 2$. Para encontrar as outras duas raízes aqui utilizaremos a divisão de polinômios. Como $x = 2$ é a raiz do polinômio $x^3 - 3x - 2$, podemos afirma que o polinômio é divisível por $x - 2$. Segue que:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 0x^2 - 3x - 2 & \underline{\;x - 2\;} \\
\underline{-x^3 + 2x^2} & x^2 + 2x + 1 \\
\qquad 2x^2 - 3x - 2 & \\
\quad \underline{-2x^2 + 4x} & \\
\qquad\qquad x - 2 & \\
\qquad\quad \underline{-x + 2} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Podemos assim concluir pela divisão acima que:

$x^3 - 3x - 2 = (x^2 + 2x + 1)(x - 2)$

Como $x^2 + 2x + 1$ é um trinômio quadrado perfeito. Temos que:

$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)$

$x^3 - 3x - 2 = (x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

Assim, as soluções de $x^3 - 3x - 2 = 0$ são:

$S = \{-1, 2\}$

1.2.1.3 Resolução problema 3

Problema 3: Entre as raízes da equação $x^3 - 6x - 4 = 0$.

Utilizando o método de resolução de Tartaglia. Temos:

- $p = -6$
- $q = -4$

Substituindo em:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{216}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$$

Note que na resolução $D = -4$ encaixa no item de resolução $D < 0$. Logo existe três soluções reais. Sendo as três raízes reais simples.

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}$$

Substituindo $\sqrt{-1}$ por i.

$$x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$$

Note que temos a subtração de duas raízes cúbicas de número complexo. Para resolve-lâ basta utilizar a segunda fórmula de Moivre que consiste em encontrar as raízes de um número complexo em sua forma trigonométrica.

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \text{onde } k = \{0, 1, ..., n-1\}$$

Neste caso,

- $n = 3$
- k varia de 0 à 2.

As formas trigonométricas de $z_1 = 2 + 2i$ e $z_2 = 2 - 2i$, são respectivamente, $z_1 = \sqrt{8}(cos(\pi/4) + i \cdot sen(\pi/4))$ e $z_2 = \sqrt{8}(cos(\pi/4) - i \cdot sen(\pi/4))$.

Caculando as raízes de z_1.

Para $k = 0$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left[cos\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right) + i\cdot sin\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right)\right]$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt{2}\,[cos(\pi/12) + i\cdot sin(\pi/12)]$$

Para $k = 1$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left[cos\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right) + i\cdot sin\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right)\right]$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt{2}\,[cos(9\pi/12) + i\cdot sin(9\pi/12)]$$

Para $k = 2$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left[cos\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right) + i\cdot sin\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right)\right]$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt{2}\,[cos(17\pi/12) + i\cdot sin(17\pi/12)]$$

Calculando as raízes de z_2.

Para $k = 0$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left[cos\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right) - i\cdot sin\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right)\right]$$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt{2}\,[cos(\pi/12) - i\cdot sin(\pi/12)]$$

Para $k = 1$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left[cos\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right) - i\cdot sin\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right)\right]$$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt{2}\,[cos(9\pi/12) - i\cdot sin(9\pi/12)]$$

Para $k = 2$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left[cos\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right) - i\cdot sin\left(\frac{\pi/4 + 2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right)\right]$$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt{2}\,[cos(17\pi/12) - i\cdot sin(17\pi/12)]$$

Substituindo as raízes cúbicas encontradas acima em.

$$x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$$

Para $k = 0$

$x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$

$x = \sqrt{2}\,[cos(\pi/12) + i \cdot sin(\pi/12)] + \sqrt{2}\,[cos(\pi/12) - i \cdot sin(\pi/12)]$

$x = \sqrt{2} \cdot cos(\pi/12) + \sqrt{2} \cdot i \cdot sin(\pi/12) + \sqrt{2} \cdot cos(\pi/12) - \sqrt{2} \cdot i \cdot sin(\pi/12)$

$x = 2\sqrt{2} \cdot cos(\pi/12)$

$x = 2\sqrt{2} \cdot cos(\pi/12)$

$x = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$x = 1 + \sqrt{3}$

Para $k = 1$

$x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$

$x = \sqrt{2}\,[cos(9\pi/12) + i \cdot sin(9\pi/12)] + \sqrt{2}\,[cos(9\pi/12) - i \cdot sin(9\pi/12)]$

$x = \sqrt{2} \cdot cos(9\pi/12) + \sqrt{2} \cdot i \cdot sin(9\pi/12) + \sqrt{2} \cdot cos(9\pi/12) - \sqrt{2} \cdot i \cdot sin(9\pi/12)$

$x = 2\sqrt{2} \cdot cos(9\pi/12)$

$x = 2\sqrt{2} \cdot cos(9\pi/12)$

$x = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$x = 1 - \sqrt{3}$

Para $k = 2$

$x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$

$x = \sqrt{2}\,[cos(17\pi/12) + i \cdot sin(17\pi/12)] + \sqrt{2}\,[cos(17\pi/12) - i \cdot sin(17\pi/12)]$

$x = \sqrt{2} \cdot cos(17\pi/12) + \sqrt{2} \cdot i \cdot sin(17\pi/12) + \sqrt{2} \cdot cos(17\pi/12) - \sqrt{2} \cdot i \cdot sin(17\pi/12)$

$x = 2\sqrt{2} \cdot cos(17\pi/12)$

$x = 2\sqrt{2} \cdot cos(17\pi/12)$

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x = -2$$

Assim, as soluções de $x^3 - 6x - 4 = 0$ são:

$$S = \{-2, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}\}$$

1.3 A matemática na revolução industrial do século XVIII

Esse ponto da história, talvez, seja o principal para que três séculos depois dos italianos, Gauss, Argand e Hamilton, entrassem em ação. Depois de andar nas mãos dos italianos, que lhe encararam como possibilidade e suporte na resolução da equação polinomial cúbica, segundo nos contam Boyer (2019), o latente e futuro conjunto de números ganhou estatura em outra parte da Europa, nas mãos de Argand e Gauss.

No caso presente, os dos números complexos, convém destacar que, assim como nas diversas outras áreas do conhecimento, foi desenvolvida a serviço da produção capitalista. Os números complexos foram absorvidos pela classe revolucionária, na altura histórica do século XIX.

Argand e Gauss nasceram já no calor da revolução industrial. Carl Friedrich Gauss, nasceu em Braunschweing, na Alemanha, em 30 de abril de 1777 e faleceu 23 de fevereiro de 1855, na cidade de Gottingen, na Alemanha. O frenesi das máquinas que mudariam drasticamente o sistema produtivo e selavam de vez a ordem capitalista lhes serviu de berço. O cálculo diferencial e integral, instrumento fundamental para esse sistema produtivo estava estabelecido.

Robert Argand, nasceu em 18 de julho de 1768, em Genebra, Suíça e faleceu no dia 13 de agosto de 1822, em Paris, França. Era um contador e guarda-livros em Paris, que tinha a matemática como um hobby. Pouco se sabe sobre sua origem e de sua educação. Note que ser livreiro provavelmente foi um elemento fundamental para Argand ter acesso aos livros, às novidades dos livros, às descobertas da ciência, e mesmo sendo um matemático amador, ter as condições de contribuir com a formalização do plano complexo. Por falar em plano, René Descartes nasceu um século antes de Argand e de

Gauss. É atribuído a ele o tratamento das funções no plano cartesiano, gráfico etc. A interpretação gráfica que se é estudada nas escolas brasileiras do ensino médio é atribuída a Argand e Gauss. Este plano é conhecido como Plano de Argand-Gauss. Coube a Argand a interpretação de i como uma rotação de 90°. O conceito vetorial proposto por Argand, e posteriormente por Gauss, contribuiu para o avanço iniciado pelos Italianos no começo do século XVI. A evolução geométrica viria mais a frente com o irlandês Hamilton. O seu melhor trabalho, porém com pequenas falhas, tinha sido o Teorema Fundamental da Álgebra, obra publicada em 1806, no jornal Gergonne. Provavelmente Argand tenha sido o primeiro a indicar o teorema em que os coeficientes do polinômio são números complexos, que mais a frente viria a ser escrito por Gauss, conforme atesta Abido (2012).

Carl Friedrich Gauss fez grande contribuição no campo da matemática e física. Se mudou para Gottingen em 1807, ocupando o cargo de professor de Astronomia, onde aos 30 anos, assumiu o cargo de diretor do Observatório de Göttingen, onde trabalhou durante 47 anos, fican do nessa cidade até a sua morte.

Suas contribuições científica, segundo Rosa (2012), são: a lei da Reciprocidade Quadrática, formulação da Lei dos Resíduos Quadráticos, Álgebra linear, integração numérica, séries infinitas, equações diferenciais, seções cônicas, funções hipergeométricas, Geometria diferencial, Geometria não euclidiana, Teoria potencial, Análise vetorial, Probabilidades e Estatística (curva de Gauss, distribuição de Gauss). Foram igualmente notáveis as contribuições de Gauss à Astronomia, Geodésia, Óptica, Mecânica, Eletricidade e Magnetismo. Quanto à Astronomia (foi diretor, de 1807 a 1855, do Observatório da Universidade de Göttingen), desenvolveu o método dos mínimos quadrados (1801) para o cálculo da órbita do asteroide Ceres; escreveu, em 1809, Theoria motus corporum coelestium, sobre Mecânica Celeste, na qual tratou, entre outros temas, de equações diferenciais, seções cônicas e órbitas elípticas.

O conceito de função, que deu um caráter de movimento, instrumento que estabelece uma relação entre duas grandezas, imprescindível ao modo de produção capitalista, também estava presente. Em particular, a busca pelos zeros de uma função, ou de um teorema que desce conta dos zeros de uma função, ou do instrumento que indicasse quando o gráfico de uma função tocava o eixo das abscissas era a ordem do dia.

Umas das contribuições mais notáveis de Gauss na matemática pura está contida em sua tese de doutorado na Universidade de *Helmstädt*. Essa tese é considerada como a maior tese de doutorado de todos os tempos. Extraordinários matemáticos da história haviam tentado, porém sem sucesso, a demostração do *Teorema Fundamental da Álgebr*a (uma Equação polinomial, com coeficientes complexos e de grau maior que zero, tem pelo menos uma raiz complexa), dentre eles: Newton, Euler, D'Alembert, Laplace e Lagrange. O ambiente inserido por Gauss, no começo do século XIX, parece indiscutivelmente propício ao surgimento de algo como o ?Teorema Fundamental da Álgebra?, que assegura que uma função polinomial com coeficientes complexos, de grau n, tem, contadas com multiplicidade, exatamente n zeros (raízes).

Foi esse o contexto que, de certa forma, obrigou que alguém desse conta desse teorema, o que coube a Gauss, fazê-lo. Mas se não fosse Gauss, tudo indica que seria outra pessoa.

Veja que o enunciado do teorema exige que os coeficientes do polinômio sejam complexos, o que exigiu antes de tudo, um melhor tratamento desses números e foi aí, talvez, que Gauss se valeu dos italianos que o precederam e junto com o livreiro Argand.

Conforme Iezzi (2012), ainda falta um ponto muito importante a ser estudado no números complexos: as operações algébricas. Como se pode operar matematicamente $a + bi$, sendo essas duas parcelas entes distintos entre si. Hamilton entra então nesse contexto tomando essa tarefa para si.

William Rowan Hamilton, nasceu em Dublim, Irlanda, em 4 de agosto de 1805; morreu na mesma cidade onde nasceu, no dia 2 de setembro de 1865 . Foi uma criança prodígio; aos três anos de idade lia perfeitamente inglês e aprendeu os rudimentos da aritmética. Aos quatro aprendeu geografia, aos cinco sabia latim e hebraico e até os dez anos de idade aprendeu italiano, francês, árabe, sânscrito, persa, caldeu e várias línguas orientais. Aos doze interessou-se por matemática. Estudou então a *Algebra Universalis* de Newton e, antes dos dezessete, estudou a monumental *Mecanique Céleste de Laplace* na qual descobriu um erro e publicou a correção correspondente, conforme Rosa (2012).

O matemático irlandês foi professor de Astronomia da Universidade de Dublin, Astrônomo Real da Irlanda (aos 22 anos) e Diretor do Observatório de Dunsink; estudou a teoria óptica (*A Theory of Systems of Rays*), escreveu sobre equações de 5° grau e soluções numéricas de equações diferenciais, e contribuiu para a Teoria das matrizes, com o Teorema, a Equação e o Polinômio de Cayley-Hamilton.

Sua mais famosa descoberta foi a dos quaterniões, uma generalização de números complexos com a propriedade de que a lei comutativa a eles não se aplica. Numa comunicação à Academia Irlandesa, em 1833, Hamilton apresentou um artigo em que a Álgebra dos números complexos, da forma $a + bi$ era enfocada como uma Álgebra de pares ordenados de números reais, ou seja, da forma (a, b), que se operava da seguinte forma:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

O que finalmente deu uma explicação lógica para o símbolo $\sqrt{-1}$. Onde:

Tomando um número complexo da forma particular $0 + i$, onde sua forma de par ordenado é escrita da forma $i = (0, 1)$. Operando:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Durante algum tempo, meditou sobre as Álgebras de ternos e quádruplos de números reais, mas encontrava dificuldades de definir a multiplicação de maneira a preservar as leis usuais dessa operação. Em 1843, num momento de intuição, ocorreu-lhe que deveria sacrificar essas leis, o que significou a criação da primeira Álgebra não comutativa. Nasciam assim os quatérnios $a + bi + cj + dk$, em que:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik$$

> Em 1853, publicou *Lectures on Quaternions*, mas seu *Elements of Quaternions* é póstumo (1866). A parte mais conhecida do Cálculo dos quaterniões é a da Teoria dos vetores, que incorporava uma parte da Teoria da extensão, de Grassmann. A grande importância dos quaterniões na História da Matemática reside, como escreveu o já citado Howard Eves, no fato de que sua criação libertou a Álgebra de suas amarras com a Aritmética dos números reais, abrindo, assim, as comportas da Álgebra abstrata. (Rosa, 2012, p.26).

Capítulo 2

Aplicações dos números complexos.

A importância do conjunto dos números complexos não se limita ao estudo das equações algébricas, mas estende-se a outros tópicos da Matemática, com aplicações em outras Ciências.

2.1 Estudo dos números complexo nas equações algébricas.

A forma mais estudada dos números complexos no ensino médio é a sua aplicação nos polinômios.

Chama-se equação polinomial ou equação algébrica escrita da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0, \text{ onde } a_n \neq 0$$

Onde:

- $a_i \in \mathbb{C}$, com $i \in \mathbb{N}$, chamaremos de coeficiente.
- x^n, chamaremos de parte literal ou incógnita da equação.
- n é o grau da equação.

Dado um número complexo α, chamaremos de raiz se,

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0 = 0,$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, segue:

Toda equação polinomial de grau n (n ≥ 1) possui n raízes complexas.

Como consequência do teorema acima é possível decompor o polinômios em n fatores de polinômios de 1º grau.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

onde:

x_1, x_2, ... , x_n são as raízes de $p(x)$.

Por consequência, se $z = a + bi \in \mathbb{C}$ é raíz de $p(x)$, então o conjugado desse número, $\overline{z} = a - bi$ também será raiz de $p(x)$.

2.2 Representação matricial e vetorial no plano dos complexos.

Representando vetores na forma matricial, podemos relacionar as operações com números complexos com transformações no plano e operações com matrizes.

Dado um número complexo $z = a + bi$, podemos representa-lo na forma matricial $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ que representa um vetor cuja sua origem são as coordenadas $(0, 0)$ e a sua extremidade (a, b).

a) Reflexão em torno do eixo x.

Matriz de reflexão: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$A \cdot z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \overline{z}$.

A figura 2.1 mostra a representação geométrica da reflexão em torno do eixo x dada pela operação matricial acima.

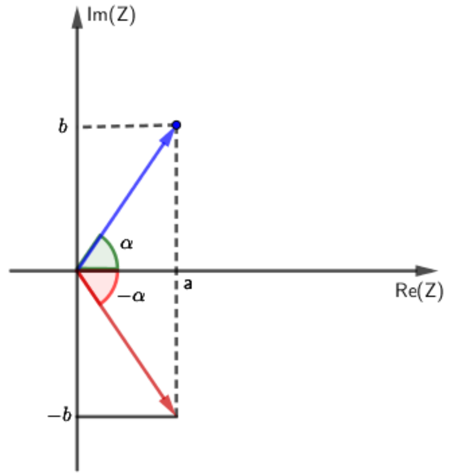


Figura 2.1: Reflexão em torno do eixo x.

b) Homotetia de fator $|c|$

Matriz homotetia: $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

$B \cdot z = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix} = z \cdot c$, onde $c \in \mathbb{R}$.

A figura 2.2 mostra a representação geométrica da operação matricial acima.

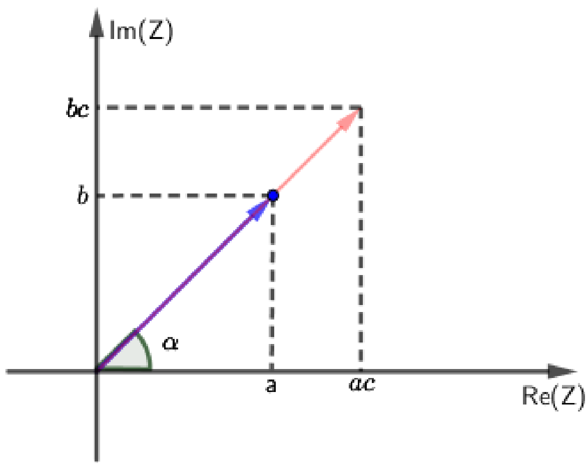


Figura 2.2: Reflexão em torno do eixo x.

c) Rotação de ângulo θ_1 positivo.

Matriz de rotação: $C = \begin{pmatrix} cos\theta_1 & -sen\theta_1 \\ sen\theta_1 & cos\theta_1 \end{pmatrix}$.

$$C \cdot z = \begin{pmatrix} cos\theta_1 & -sen\theta_1 \\ sen\theta_1 & cos\theta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} acos\theta_1 - bsen\theta_1 \\ asen\theta_1 + bcos\theta_1 \end{pmatrix} = z \cdot w,$$

onde $w = (cos\theta_1, sen\theta_1)$.

A figura 2.3 mostra a representação geométrica da rotação de centro na origem e de ângulo θ.

Figura 2.3: Rotação de centro na origem e de ângulo θ.

2.3 Engenharia elétrica e os números complexos.

Os circuitos elétricos trabalham com a sua tensão com tensões V em formas de correntes contínuas ou alternadas. Em diversos dispositivos elétricos, a forma de onda da corrente elétrica depende da onda de tensão que são aplicadas, além da natureza de cada uma delas.

O sinal de corrente contínuo (CC - corrente contínua) tem sempre a mesma polaridade e intensidade. Um exemplo de geradores de corrente contínua são as pilhas e baterias. A Figura 2.4 mostra o aspecto físico, o símbolo e a curva da tensão deste tipo de gerador, em função do tempo.

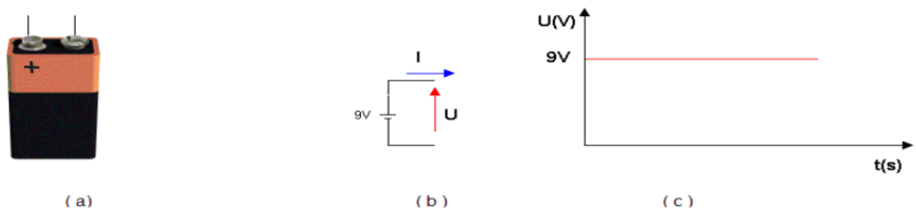
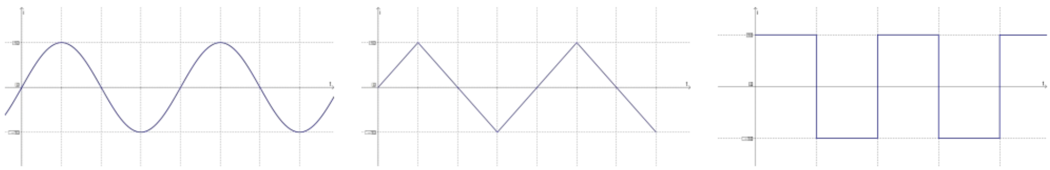


Figura 2.4: Gerador de tensão contínua - (a) Aspecto físico (b) Símbolo e (c) Gráfico da tensão em função do tempo
Fonte: http://http://www.eletronica24h.net.br/aulaca001.html

A transmissão de energia elétrica das usinas geradoras até os centros residenciais e comerciais é a forma da corrente alternada (CA), sendo está a forma mais eficaz de transmissão de energia elétrica por longas distâncias, pois pode ser transformada em alta tensão e depois convertida para tensões menores. O sinal alternado varia de polaridade e valor ao longo do tempo. De acordo com a variação, têm-se diferentes tipos de corrente alternada: senoidal, quadrada, triangular, etc (Figura 2.5).



(a) Onda senoidal (b) Onda triangular (c) Onda quadrada

Figura 2.5: Exemplos de corrente alternada

Dentre as corretes alternadas vista acima a mais importante é a senoidal. A energia gerada nas usinas e a maioria dos equipamentos usam tensão e corrente alternadas senoidais. Uma tensão senoidal pode ser representada graficamente por uma senóide (Figura 2.6) cuja amplitude corresponde à amplitude máxima (positiva ou negativa) que a tensão senoidal pode atingir (tensão de pico V_p). O ângulo ϕ do sinal é chamado de ângulo de fase (ϕ_0 é o ângulo de fase inicial). A frequência ou velocidade angular ω, corresponde à variação de ϕ no tempo ($\omega = \dfrac{\phi}{t}$).

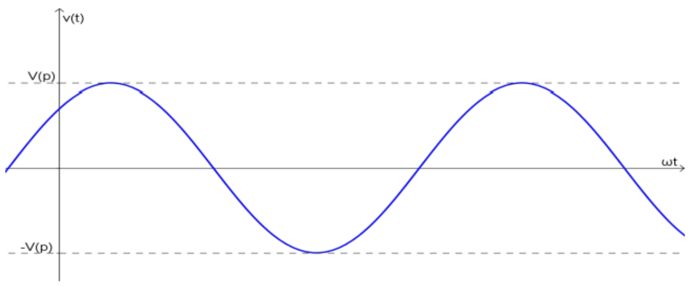


Figura 2.6: Onda senoidal

Este gráfico pode ser descrito pelas equações

$$v(t) = v_p \cdot sen(\omega t + \phi_0) \text{ ou } v(\phi) = V_p \cdot sen\phi$$

Outra representação gráfica é por meio de um fasor ou vetor girante, cujo módulo é igual a tensão de pico V_p e gira no sentido anti-horário com velocidade angular ω. Este tipo de representação é chamado de diagrama fasorial, conforme Figura 2.7.

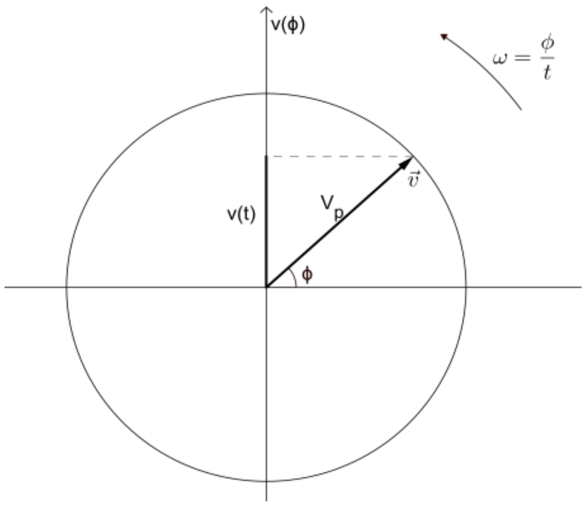


Figura 2.7: Diagrama de fase de um sinal senoidal

A projeção vertical de $\vec{v}$ corresponde à tensão senoidal.

Também podemos representar um sinal senoidal por um número complexo. A amplitude e a fase inicial correspondem ao módulo e ao argumento, respectivamente. Em eletricidade, a unidade imaginária é representada pela letra j, para não confundir com a corrente elétrica. Além disso, o complexo $z = a+bi$ ou $z = \rho(cos\phi+isen\phi)$ é representado por $z = a + jb$ ou mais comumente, $z = \rho|\underline{\phi}$.

Desta forma, a tensão, escrita na forma complexa, relativa a $v(t)$ é dada por:

$$v = V_p|\underline{\phi_0} \text{ ou } v = V_0 \cdot cos\phi_0 + jV_p \cdot sen\phi_0$$

Segundo Albuquerque (1989) a representação na forma complexa é mais simples que a trigonométrica por informar apenas a amplitude e a fase inicial, no entanto, facilita as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de vários sinais. Outras grandezas físicas relacionadas ao estudo das correntes alternadas também são representadas por números complexos.

Capítulo 3

Documento oficial de ensino e os números complexos

Neste capítulo abordaremos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento homologado pelo então ministro da educação Mendonça Filho, em 2018. Tem por objeto o ensino aprendizado visando a garantia do direito a aprendizagem essenciais ao estudante, reconhecendo sempre que as necessidades dos estudantes são diferentes.

Nele também abordaremos o entrave entre a BNCC do ensino médio e o que ela representa juntamente com o posicionamento frente ao estudo do conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$.

3.1 A base nacional comum curricular e os números complexos.

A BNCC é um documento a ser utilizado como base para o planejamento de escolas públicas e privadas. Ela Define formas de tornar o ensino igualitário para todos os níveis socioeconômico.

> Com a homologação da BNCC, as redes de ensino e escolas particulares terão diante de si a tarefa de construir currículos, com base nas aprendizagens essenciais estabelecidas na BNCC, passando, assim, do plano normativo propositivo para o plano da ação e da gestão curricular que envolve todo o conjunto de decisões e ações definidoras do currículo e de sua dinâmica.(MEC, 2018, p.16).

Para o ensino médio, a BNCC foi construída com o intuito de

> contribuir para a integração dos conhecimentos, entendida como condição para a atribuição de sentidos aos conceitos e conteúdos estudados nas escolas.(MEC, 2018, p.469).

A parte que compete aos números complexos na BNCC não está clara, como podemos imaginar. Em nenhuma momento é citado os números complexos e suas forma de abordagem.

Os únicos pontos que possa ter uma ligação entre números complexos e BNCC são:

- Competência 1 - Habilidade EM13MAT105: Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.

- Competência 3 e habilidade EM13MAT305: Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Em nenhum momento é citado o estudo dos números complexos em sua forma algébrica, ou o estudo das raízes não reais de um polinômio, ou das formas que podem ser introduzidos . Mas a pergunta que fica é: Como eu irei introduzir o estudo a esse novo conjunto? Qual a melhor forma de apresentar esse tópico? Quais áreas podem anexar a esse estudo para que auxilie na compreensão utilizando a interdisciplinaridade? (visto que este é um dos maiores pilares da BNCC). Não tem nada que oriente neste âmbito!

O temido e cruel conjunto dos números complexos não entrou no radar dos especialistas na hora da criação da BNCC.

Considerações finais

O objetivo do presente estudo foi verificar as evoluções científicas históricas na Itália Renascentista dos séculos XV e XVI e posteriormente nos meados do século XVIII e inicio do século XIX. Mediante a revisão de literatura sobre o tema, constatou-se que o desenvolvimento dos números complexos teve naquela região por causa dos fatores analisados: localização geográfica no mediterrâneo, possibilitando fluxo de pessoas e comércio; a queda de Constantinopla, ocasionando a fuga de grandes mentes do oriente para a Itália; junção do conhecimento matemático ocidental com a matemática orienta/arábica/grega; e o apoio de grande famílias burguesas (*mecenas*) a quaisquer empreitas de cunho artístico ou científico.

O estabelecimento dos números complexos enquanto conjunto numérico foi um processo histórico de levou cerca de 300 anos (de del Ferro a Hamilton) e que acompanhou o desenvolvimento da Álgebra. Foi necessário romper com o conceito de número atrelado a ideia de grandeza e ao uso da geometria na resolução de equações. Os números complexos se mostraram úteis não apenas para resolvê-las, mas, hoje se aplicam em diversos ramos da Matemática e fora dela. No entanto, a relevância do seu estudo no Ensino Médio é questionado. Documentos oficiais que orientam a elaboração do currículo de Matemática tratam esse tópico de forma superficial , não sendo, portanto, um conteúdo indispensável. Além disso, o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), um dos instrumentos de avaliações para o acesso à universidades públicas, não trazem em suas matrizes o conjunto dos números complexos.

Nesse sentido, as condições vividas primeiramente na Itália do século XV e XVI e posteriormente pelos demais países da Europa Ocidental contribuiu para que o desenvolvimento matemático dos números complexos se desse nessas regiões e não em outro lugar.

Referências Bibliográficas

Abido, A. S. (2012). A interpretação geométrica dos números imaginários segundo Jean Robert Argand.

Albuquerque, R. O. (1989). *Análise de circuitos em corrente alternada*. Saraiva Educação SA.

Boyer, C. B. (2019). *História da matemática*. Editora Blucher, S.Paulo.

Durán, A. J. (2001). *El Legado de las Matemáticas: De Euclides a Newton: Los Genios a través de sus libros*. Editorial Universidad de Sevilla-Secretariado de Publicaciones, Sevilla.

Garbi, G. G. (2009). *O romance das equações algébricas*. Editora Livraria da Física, S.Paulo.

Huberman, L. (1986). *História da riqueza do homem*. LTC, Rio de Janeiro.

Iezzi, G. (2012). *Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 6*. Editora Atual, São Paulo.

Magalhães Filho, F. B. B. (1975). *Hitória Econômica*. Sugestões Literárias, São Paulo.

MEC (2018). Base Nacional Comum Curricular. Disponível em `http://http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf`.

Prodanov, C. C. (2013). *Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico-2ª Edição*. Editora Feevale.

Rosa, C. A. P. (2012). *História da ciência*. 2ª Edição: FUNAG. Volume I. Brasilia.

Ruciman, S. (2001). *The Fall of Constantinople 1453*. Cambridge Universiy Press, Cambridge.