

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO - UFTM



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT



Dissertação de Mestrado

Modelagem Matemática: Uma proposta de simulação do modelo *SIR* para os casos de COVID-19 no município de Franca-SP e uma proposta de ambientação no ensino fundamental

Johnny Luís Mércuri

Uberaba - Minas Gerais

Agosto de 2021

Modelagem Matemática: Uma proposta de simulação do modelo *SIR* para os casos de COVID-19 no município de Franca-SP e uma proposta de ambientação no ensino fundamental

Johnny Luís Mércuri

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoni

Uberaba - Minas Gerais

Agosto de 2021

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do
Triângulo Mineiro**

M529m Mércuri, Johnny Luís
Modelagem matemática: uma proposta de simulação do modelo SIR
para os casos de COVID-19 no município de Franca-SP e uma proposta de
ambientação no ensino fundamental / Johnny Luís Mércuri. -- 2021.
92 f. : il., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
-- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2021
Orientador: Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni

1. Matemática - Modelagem. 2. Equações diferenciais. 3. Modelo
compartimental. 4. Métodos epidemiológicos. I. Ottoboni, Rafael Rodrigo.
II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51::616-036.22

JOHNNY LUÍS MERCURI

Modelagem Matemática: Uma proposta de simulação do modelo SIR para os casos de COVID-19 no município de Franca-SP e uma proposta de ambientação no ensino fundamental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Uberaba, 27 de agosto de 2021

Banca Examinadora:

Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni – Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Bruno Nunes de Souza
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Me. Ananda Kainne Oliveira Domenegueti
Centro Universitário Municipal de Franca



Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL RODRIGO OTTOBONI, Professor do Magistério Superior**, em 31/08/2021, às 12:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021](#).



Documento assinado eletronicamente por **BRUNO NUNES DE SOUZA, Professor do Magistério Superior**, em 01/09/2021, às 14:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021](#).



Documento assinado eletronicamente por **ANANDA KAINNE OLIVEIRA DOMENEGUETI, Usuário Externo**, em 01/09/2021, às 16:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#) e no art. 34 da [Portaria Reitoria/UFTM nº 87, de 17 de agosto de 2021](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0589705** e o código CRC **3E7E85B1**.

*A Deus, que tem me sustentado até aqui.
Aos meus pais, José Carlos e Sandra, por
todo apoio e incentivo.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me concedido sabedoria para concluir mais essa etapa da minha vida. Sem Ele, eu jamais conseguiria.

A toda minha família, principalmente aos meus pais José Carlos Mércuri e Sandra Márcia Ferreira Mércuri e minha avó Betriz Polli Ferreira pelos conselhos e motivação nos estudos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni pela sua paciência e dedicação nos momentos de dúvida, tornando assim mais próximo esse sonho de concluir o mestrado.

A todos os docentes do PROFMAT da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, que foram fundamentais para minha formação.

Aos meus professores de graduação do Uni-FACEF, Silvia, Lucinda, Antônio Carlos e Adriana, que sempre me incentivaram a dar continuidade aos meus estudos.

Aos meus amigos de turma PROFMAT dos anos de 2017 e 2019, especialmente ao Gustavo, Guilherme, Jorge, e Beto companheiros de carona, como esquecer do "panha a manga ai" e varias outras conversas tanto em relação aos estudos quanto da vida.

A Maria Elis (futura, grande profissional na área da saúde) pelo incentivo, motivação e ajuda nas dúvidas relacionadas a área da saúde.

A minha querida sobrinha Maria Clara (in memoriam) e a meu avó Divino Ferreira (in memoriam), cuja presença foi essencial na minha vida.

E a todos que fizeram parte dessa etapa, que me incentivaram e torceram por mim, o meu muito obrigado.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”

Isaac Newton

Resumo

A matemática possui várias vertentes e, neste trabalho, apresentou-se um estudo sobre a modelagem matemática e algumas de suas aplicações. A modelagem matemática busca descrever um determinado fenômeno observado, possibilitando realizar previsões usando algumas ferramentas. Buscou-se analisar a distribuição do número de casos acumulados de pessoas infectadas pelo vírus SARS-CoV-2 no município de Franca, localizada no interior de São Paulo e, com base nessa análise, levantou-se alguns questionamentos. Para respondê-los foram realizadas algumas simulações do modelo compartimental *SIR* usando o *software* que foi desenvolvido em linguagem PYTHON. No contexto da educação, elaborou-se uma atividade envolvendo a modelagem para descrever o crescimento do broto de feijão e apresentou-se um relato da aplicação dessa atividade em uma sala do sexto ano do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Equações Diferenciais, Modelo Compartimental *SIR*.

Abstract

Mathematics has several strands and, in this work, a study on mathematical modeling and some of its applications is presented. Mathematical modeling seeks to describe a particular observed phenomenon, making it possible to make predictions using some tools. We sought to analyze the distribution of the number of accumulated cases of people infected by the SARS-CoV-2 virus in the city of Franca, located in the interior of São Paulo and, based on this analysis, some questions were raised. To answer them, some simulations of the compartment model *SIR* were carried out using the software that was developed in PYTHON language. In the context of education, an activity involving modeling was developed to describe the growth of bean sprouts and a report on the application of this activity in a room of the sixth year of elementary school was presented.

Keywords: Mathematical Modeling, Differential Equations, SIR Compartment Model.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico $\alpha = \beta$	20
Figura 2 – Gráfico $\alpha > \beta$	20
Figura 3 – Gráfico $\alpha < \beta$	21
Figura 4 – Gráficos da equação 2.17, com $T = 5730$	23
Figura 5 – Gráfico da equação 2.35, com $k > 0$ e $r > 0$	26
Figura 6 – Gráfico da equação 2.35, com $k > 0$ e $r < 0$	27
Figura 7 – Distribuição da densidade demográfica de São Paulo referente a tabela 4.	28
Figura 8 – Simulação para a densidade demográfica de São Paulo usado $r = 0,539$	30
Figura 9 – Simulação para a densidade demográfica de São Paulo variando r	30
Figura 10 – Modelo SIS (suscetíveis - infectados - suscetíveis)	32
Figura 11 – Modelo SIR (suscetíveis - infectados - recuperados)	33
Figura 12 – Modelo SEIR (suscetíveis - expostos - infectados - recuperados).....	33
Figura 13 – Modelo SIS (suscetíveis - infectados - suscetíveis).....	34
Figura 14 – Representação gráfica do modelo SIS.....	35
Figura 15 – Modelo SIR (suscetíveis - infectados - recuperados)	36
Figura 16 – Representação gráfica do modelo SIR	37
Figura 17 – Modelo SEIR (suscetíveis - expostos - infectados - recuperados).....	38
Figura 18 – Representação gráfica do modelo SEIR.....	38
Figura 19 – 1º bloco de códigos	53
Figura 20 – 2º bloco de códigos	53
Figura 21 – 3º bloco de códigos	53
Figura 22 – 4º bloco de códigos	54
Figura 23 – 5º bloco de códigos	54
Figura 24 – 6º bloco de códigos	55
Figura 25 – 7º bloco de códigos	55

Figura 26 – 8º bloco de códigos	56
Figura 27 – 9º bloco de códigos	56
Figura 28 – Simulação com $\beta = 0.02$, $\gamma = 0.03$ e $bnds = ((0, 0.007), (0, 0.002))$	57
Figura 29 – Preparando a importação de dados	58
Figura 30 – Preparando a importação de dados	59
Figura 31 – Preparando a importação de dados	59
Figura 32 – Distribuição dos casos acumulados	60
Figura 33 – Distribuição dos casos acumulados	60
Figura 34 – Simulação do 1º dia até o 148º dia	61
Figura 35 – Simulação do 1º dia até o 148º dia	61

Lista de tabelas

Tabela 1 – Mortes por cólera em duas áreas de Londres abastecidas por duas companhias de água, entre 8 de julho a 26 de agosto de 1854.....	17
Tabela 2 – Radioisótopos mais utilizados.....	21
Tabela 3 – Massa de Carbono-14 ao decorrer do tempo	23
Tabela 4 – Densidade demográfica do estado de São Paulo	27
Tabela 5 – Situação dos casos de SARS-CoV-2 em Franca.....	39
Tabela 6 – Resultados das simulações, analisando por período.....	62
Tabela 7 – Tamanho dos brotos no período de 12 dias.....	70

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA NA EPIDEMIOLOGIA E OS MODELOS DE MALTHUS E VERHULST	17
2.1	Modelo de crescimento populacional de Malthus	18
2.2	Um problema envolvendo o modelo de Malthus	21
2.3	Modelo de Verhulst	24
2.4	Aplicação do modelo de Verhulst para a densidade demográfica do estado de São Paulo.....	27
3	ALGUNS MODELOS EPIDEMIOLOGICOS PADRÃO	32
3.1	Modelo <i>SIS</i>	34
3.2	Modelo <i>SIR</i>	36
3.3	Modelo <i>SEIR</i>	37
3.4	Uma aplicação do modelo <i>SIR</i> para o número de casos de SARS-CoV-2 na cidade de Franca.....	39
3.4.1	Organização dos dados coletados	39
3.4.2	Material	52
3.4.3	Método	57
3.4.4	Análise e resultados	60
3.4.5	Conclusão dos resultados	63
4	UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE EM SALA DE AULA ENVOLVENDO MODELAGEM	65
4.1	As características internas e a germinação do feijão	66
4.2	Desenvolvimento da atividade	68
4.3	Preparativos para o plantio do feijão	68
4.4	Relato dos resultados da atividade aplicada em sala de aula	73

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
6	REFERÊNCIAS	79
A	APÊNDICE	82
A.1	Modelo <i>SIS</i>	82
A.2	Modelo <i>SIR</i>	84
B	APÊNDICE	86
B.1	Solução de uma EDO linear de Primeira Ordem	86
B.1.1	Solução de uma EDO linear de Primeira Ordem, quando $p(t) = 0$	87
B.1.2	Solução de uma EDO linear de Primeira Ordem, quando $p(t) \neq 0$	88
B.1.3	Solução de uma EDO linear de Primeira Ordem, caso tenha um valor inicial (PVI)	90
B.2	Solução de uma EDO Separável de Primeira Ordem	91

1 INTRODUÇÃO

A modelagem é um ramo da matemática que busca descrever fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos por meio de uma análise quantitativa dos dados obtidos e, assim, construir modelos matemáticos que possam descrever tais fenômenos, o que torna possível a sua predição com uma condição razoavelmente aceitável. Vários modelos desenvolvidos se destacam, como, por exemplo, os modelos de crescimento populacional, sendo os mais famosos entre eles os desenvolvidos por Malthus, Verhulst e os modelos epidemiológicos. Esse último é considerado prático e extremamente importante para o combate de surtos, endemias, epidemias e pandemias, algo que vem se tornando cada vez mais comum e presente em nossas vidas.

A humanidade já passou por vários casos de epidemias e pandemias, fatores que mudaram todo o contexto histórico e cultural de muitas civilizações pelo mundo a fora. A peste negra, que ocorreu no século XIV, foi uma das mais marcantes e chegou a exterminar um quarto da população Europeia existente na época em apenas quatro anos. A varíola, no século XVI, foi uma das doenças responsáveis por dizimar os Astecas no México e os Incas no Peru. Na primeira guerra mundial cerca de 9 milhões de pessoas foram vítimas da gripe espanhola, que se alastrou por todo o globo durante o período de 1918 e 1919. Entre as pandemias mais recentes, têm-se como exemplo o vírus da Influenza A, o H1N1 e atualmente (no final de 2019) o SARS-CoV-2, que se espalhou rapidamente pelos países e continentes pela sua alta taxa de contágio.

Nesse contexto, a epidemiologia matemática tem por objetivo o estudo de modelos matemáticos que possam descrever o comportamento de uma determinada doença em uma população suscetível, auxiliando governos e órgãos de saúde no remanejamento de insumos e na elaboração de estratégias necessárias para minimizar ou até mesmo erradicar a sua disseminação.

Os modelos epidemiológicos se baseiam na divisão da população estudada em compartimentos. Assim, a dinâmica compartimental é regida pela migração dos indivíduos entre esses compartimentos preestabelecidos, devido a uma determinada taxa de propagação da doença e uma taxa de recuperação, dependendo do modelo. Podem ser modelos complexos e com mais compartimentos como, por exemplo, o modelo *SEIR* (Suscetíveis, Expostos, Infectados e Recuperados), uma variação do modelo *SIR* (Suscetíveis, Infectados e Recuperados) adicionando o compartimento *E* ou até mais simples como o *SIS* (Suscetíveis, Infectados e Suscetíveis). Cada modelo é eficaz em uma determinada situação, dependendo assim da hipótese assumida para modelar o comportamento de uma determinada doença em uma população suscetível.

O modelo *SIS* se baseia na dinâmica onde uma determinada doença é sempre presente

na população, pois os indivíduos infectados se recuperam e se tornam suscetíveis novamente, o modelo SIR tem a característica de os indivíduos infectados não retornarem ao grupo de suscetíveis passando para o compartimento R , que chamamos de recuperados, devido a alguns fatores como a recuperação, imunização ou até mesmo a morte dos indivíduos infectados. O modelo $SEIR$ possui as mesmas características que o modelo SIR , com a diferença do acréscimo do compartimento E chamado de expostos, representando os indivíduos expostos a uma determinada doença.

Portanto, o produto final da dissertação do mestrado profissional em matemática (PROFMAT) será a modelagem de alguns períodos com o número de casos confirmados acumulados do SARS-CoV-2 no município de Franca, aplicando o modelo compartimental SIR . Além disso, foi feito o desenvolvimento de uma atividade envolvendo a modelagem matemática, aplicada com os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental e o seu relato.

A proposta da atividade se baseia na interdisciplinaridade apontada pelo Currículo Paulista no ensino de matemática segundo [2], pois o trabalho interdisciplinar proporciona a conexão entre as áreas de conhecimento, fomentando a partir de questões e problemas complexos o espírito investigativo por meio do levantamento de hipóteses e o uso de ferramentas matemáticas para fundamentá-las.

No capítulo 2 foi apresentado um fato histórico sobre John Snow, médico inglês considerado o pai da epidemiologia moderna. Em 1854, ele se deparou com um surto de cólera que havia se alastrado sobre a cidade de Londres na Inglaterra segundo [4]. Foi comentado sobre o papel que a matemática tem na epidemiologia como ferramenta de análise dos dados e obtenção de modelos para descrever o comportamento de uma determinada doença no decorrer do tempo.

Foi abordado o modelo de Malthus, por ser amplamente utilizado para descrever o crescimento de uma determinada população em condições iniciais, mostrou-se uma aplicação desse modelo em um problema proposto pelo exame nacional de qualificação do PROFMAT. Apresentou-se o modelo de Verhulst, amplamente utilizado nas áreas da física, química e biológica, servindo como ferramenta para modelar certos fenômenos e uma aplicação desse modelo para observar a densidade demográfica do estado de São Paulo .

No capítulo 3 foi mencionado alguns modelos matemáticos básicos da epidemiologia, sendo eles os modelos SIS , SIR e o $SEIR$, explicitando suas representações compartimentais, como se caracteriza a dinâmica dos indivíduos entre os compartimentos, estabelecendo os parâmetros da taxa de infecção (β), a taxa de recuperação (γ) e a taxa de isolamento (σ), sendo que esse último está presente somente no modelo $SEIR$, com os seus respectivos sistemas de equações de diferenciais, a representação gráfica para cada modelo, a taxa de reprodutibilidade basal conhecido por R_0 e, por fim, realizou-se algumas simulações modelando o número de casos acumulados de pessoas infectadas pela pandemia do vírus $SARS - CoV - 2$, causador da doença $COVID - 19$, em Franca. As simulações foram realizadas utilizando o *software* desenvolvido em linguagem $PYTHON$ com os dados

disponibilizados no boletim epidemiológico da cidade.

No capítulo 4 como produto desta dissertação no contexto do PROFMAT, serão apresentados os resultados de uma atividade aplicada em uma sala do sexto ano em que o autor ministra aulas de matemática. O objetivo principal da atividade é trabalhar a alto reflexão e a indução de conjecturas através da análise empírica e a correlação dessa análise com os dados experimentais coletados pelos alunos. Para isso, os alunos plantaram um broto de feijão no algodão, realizaram anotações com as medidas diárias sobre o seu crescimento, organizaram os dados em uma tabela e plotaram no plano cartesiano os dados coletados, proporcionando algumas conjecturas e hipóteses sobre o crescimento do broto em um determinado período de tempo.

2 A importância da matemática na epidemiologia e os modelos de Malthus e Verhulst

Segundo [4] na página 01, a epidemiologia originou-se das observações de Hipócrates feitas há mais de 2000 anos, na qual dizia que os fatores ambientais influenciam na ocorrência das doenças. Portanto, fatores externos ao convívio humano interferem diretamente na saúde pública, desde locais com pouca salubridade, como banheiros públicos (devido ao grande fluxo de pessoas pelo local) ou até mesmo em sua própria casa, local que se considera seguro, mas que também podem influenciar na ocorrência das doenças.

Em 1954, a população de Londres passava por um surto de cólera. As autoridades da época acreditavam que o principal causador do surto eram os odores fétidos expelidos pelos corpos em decomposição de pessoas mortas pela doença e pelas condições insalubres em que a população se encontrava na época. O médico inglês John Snow (1813- 1858) resolveu investigar o causador desse surto. Ele acreditava que a transmissão era em decorrência da contaminação da água e começa a utilizar métodos e ferramentas matemáticas para fundamentar a sua hipótese.

No levantamento realizado, segundo [4]:

John Snow identificou o local de moradia de cada pessoa que morreu por cólera em Londres entre 1848-49 e 1853-54 e notou uma evidente associação entre a origem da água utilizada para beber e as mortes ocorridas. A partir disso, Snow comparou o número de óbitos por cólera em áreas abastecidas por diferentes companhias (Tabela 1) e verificou que a taxa de mortes foi mais alta entre as pessoas que consumiam água fornecida pela companhia Southwark. [4] página 2.

Tabela 1 – Mortes por cólera em duas áreas de Londres abastecidas por duas companhias de água, entre 8 de julho a 26 de agosto de 1854

Companhia abastecedora de água	População em 1851	Número de mortes por cólera	Taxa de mortalidade por cólera (por 1000 Hab.)
Southwark	167.654	844	5.0
Lambeth	19.133	18	0.9

Fonte: Epidemiologia Básica 2ª Edição; página 2.

Assim, por meio da pesquisa realizada, John Snow conseguiu comprovar sua hipótese de que a água era o meio de transmissão da cólera na cidade Londres. Seu trabalho teve um impacto direto sobre a importância das políticas públicas de saúde, segundo [4], que são essenciais, principalmente nos centros urbanos devido à decorrente proximidade entre as pessoas, o que proporciona condições ideais para a proliferação de doenças contagiosas.

A epidemiologia tem se tornado uma área cada vez mais importante nos dias atuais, pelo aparecimento de novas doenças e até mesmo a volta de algumas já erradicadas, como, por exemplo, o sarampo. A matemática tem sua contribuição nessa área e recebe o nome de epidemiologia matemática. Seu objetivo é proporcionar modelos matemáticos que forneçam informações cruciais para serem utilizadas no combate e prevenção de doenças que assolam uma determinada população, servindo como ferramenta de auxílio para governos e órgãos de saúde na tomada de decisões e no remanejamento de insumos para o combate e prevenção dessas doenças.

Segundo [5] na página 23, a epidemiologia matemática fundamenta-se a partir de hipóteses matemáticas que quantifiquem alguns aspectos do fenômeno biológico da interação hospedeiro-parasita. Portanto, obter dados sobre a dispersão de uma determinada doença em uma população suscetível é de extrema importância, pois auxilia na obtenção de modelos que descrevam o comportamento de dispersão dessa doença. Assim, a epidemiologia matemática tem dupla finalidade, que é descrever o fenômeno observado e estudar os efeitos de um mecanismo de intervenção usando ferramentas matemáticas para tal, de acordo com [4] página 23.

No que tange as ferramentas matemáticas utilizadas para modelagem, as duas mais difundidas são: o modelo de crescimento populacional de Malthus e o modelo logístico de Verhulst. A seguir apresentamos essas duas ferramentas, uma análise sobre o comportamento gráfico e uma aplicação para cada modelo.

2.1 Modelo de crescimento populacional de Malthus

Thomas Robert Malthus (1766 – 1834) nasceu na cidade de Dorbing na Inglaterra e foi economista e sociólogo. Uma das suas principais contribuições para a matemática foi o desenvolvimento de um modelo de crescimento populacional, popularmente conhecido como Modelo de Malthus, apresentado em 1798 segundo [6]. Malthus afirmava que o tamanho da população sempre excederia o estoque de recursos, podendo futuramente não haver quantidade ideal para suprir as necessidades da população, principalmente em relação à questão de alimentos, sendo esse argumento uma das principais motivações para o seu estudo desenvolvido.

O modelo proposto por Malthus se baseia na solução de uma EDO de primeira ordem (Apêndice B), onde a variação de uma população $P(t)$, no decorrer do tempo t é proporcional à uma constante que é obtida pela diferença entre α e β . As seguintes variáveis que compõem o modelo são:

- $P(t)$ população no instante t .
- t tempo.
- α taxa de natalidade da população estudada

- β taxa de mortalidade da população estudada

Portanto, segundo Malthus a variação da população no decorrer do tempo é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta) \cdot P(t) \quad (2.1)$$

Um parâmetro importante a ser analisado é a diferença entre a taxa de natalidade representada por α e a taxa de mortalidade representada por β . Se $(\alpha - \beta) > 0$, temos que o número de indivíduos que nascem é maior que o número de indivíduos que morrem, assim a variação da população no decorrer do tempo apresenta um crescimento exponencial. Se $(\alpha - \beta) < 0$, temos que o número de indivíduos que nascem é menor que o número de indivíduos que morrem, assim a variação da população no decorrer do tempo apresenta um decrescimento, chegando a tal ponto em que a população será extinta. Se $(\alpha - \beta) = 0$, a variação da população no tempo é constante, pois a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade são iguais.

A equação 2.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta) \quad (2.2)$$

De acordo com [19] página 25, a equação 2.2 é uma EDO separável de primeira ordem. Assim, para obter sua solução basta separar os termos e resolver integrando ambos os lados, obtendo:

$$\int \frac{1}{P(t)} \cdot dP = (\alpha - \beta) \cdot \int dt \quad (2.3)$$

$$\ln |P(t)| + C_1 = (\alpha - \beta) \cdot (t + C_2) \quad (2.4)$$

$$\ln |P(t)| = (\alpha - \beta) \cdot t + C_3 \quad (2.5)$$

Onde C_3 é uma constante. Aplicando exponencial de ambos os lados obtemos:

$$e^{\ln |P(t)|} = e^{(\alpha - \beta)t + C_3} \quad (2.6)$$

$$P(t) = \pm e^{(\alpha - \beta)t + C_3} \quad (2.7)$$

$$P(t) = \pm e^{(\alpha - \beta)t} e^{C_3} \quad (2.8)$$

Tomando, $C = \pm e^{C_3}$:

$$P(t) = C \cdot e^{(\alpha-\beta)t} \quad (2.9)$$

Aplicando a condição inicial:

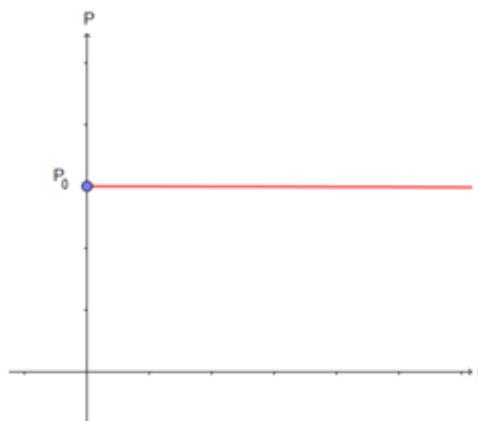
$$P(0) = C \cdot e^{(\alpha-\beta) \cdot 0} = C \quad (2.10)$$

Têm-se:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{(\alpha-\beta)t} \quad (2.11)$$

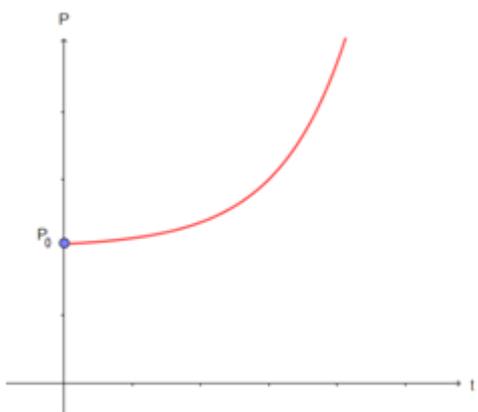
Assim, $P(t)$ representa a quantidade da população no instante t , onde P_0 é a população inicial. Em uma análise gráfica é possível observar de forma explícita o comportamento do modelo, tendo assim três situações possíveis, sendo:

Figura 1 – Gráfico $\alpha = \beta$

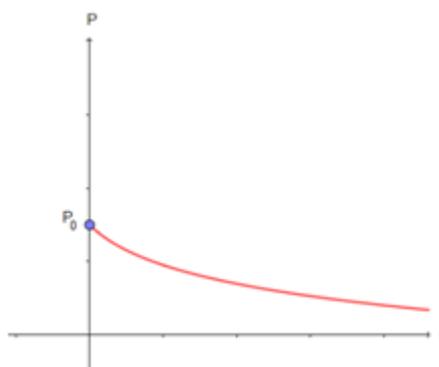


Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

Figura 2 – Gráfico $\alpha > \beta$



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

Figura 3 – Gráfico $\alpha < \beta$ 

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

No caso em que $\alpha > \beta$ há uma tendência de crescimento rápido, pois a taxa de natalidade é maior que a taxa de mortalidade, resultando em um rápido crescimento populacional. Com $\alpha < \beta$ a taxa de mortalidade é maior que a taxa de natalidade, tendendo a uma possível extinção da população.

2.2 Um problema envolvendo o modelo de Malthus

O modelo exponencial possui várias aplicações, como, por exemplo, na economia, física, biologia e vários outros ramos. Foi feita a resolução de uma questão (adaptada) retirada do exame nacional de qualificação do PROFMAT da prova 2018.1, envolvendo a aplicação do modelo exponencial. Outras questões do exame de qualificação podem ser encontradas no site [16] na aba rotina acadêmica e exame de qualificação. A seguir, apresentamos o enunciado da questão com alguns comentários adicionais.

Isótopos radioativos de um elemento químico estão sujeitos a um processo de decaimento radioativo. Com o passar do tempo, uma amostra de tais isótopos vai se desintegrando, isto é, emitindo radiação e se transformando em uma amostra de átomos mais estáveis.

Abaixo, há a tabela com os radioisótopos mais utilizados:

Tabela 2 – Radioisótopos mais utilizados

Isótopo-pai	Isótopo-filho	Meia-vida (anos)	Materiais datados
Urânio (U-238)	Chumbo (Pb-206)	$4,5 \cdot 10^9$	Zircão
Urânio (U-235)	Chumbo (Pb-207)	$0,7 \cdot 10^9$	Zircão
Potássio (K-40)	Árgon (Ar-40)	$1,4 \cdot 10^9$	Biotita, moscovita, rochas vulcânicas
Carbono-14 (C-14)	Azoto (N-14)	5730	Conchas, calcários, materiais orgânicos

Fonte: Tabela retirada de [22].

De acordo com a tabela 2, para determinar a datação de um determinado material analisou-se o decaimento de um isótopo específico, presente nesse material. O carbono-14, por exemplo, possui meia-vida de 5730 anos é utilizado para realizar a datação do calcário.

Sabe-se que o decaimento de um determinado isótopo é do tipo exponencial. A equação a seguir denota a massa $m(t)$, de determinado isótopo radioativo no instante t :

$$m(t) = m_0 \cdot b^t \tag{2.12}$$

Para algum $0 < b < 1$, sendo $m_0 > 0$, a massa inicial. A meia vida deste determinado isótopo, denotada por $T_{meia-vida^I}$, onde I representa um isótopo específico, é o tempo necessário para que a massa m_0 se reduza para metade de seu valor inicial.

(a) Determine b em função de $T_{meia-vida^I}$.

Como $T_{meia-vida^I}$ é o tempo necessário para que a massa inicial m_0 da amostra de um determinado isótopo radioativo decaia para a metade, temos:

$$m(T_{meia-vida^I}) = \frac{m_0}{2} \tag{2.13}$$

Aplicando 2.13 em 2.12:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 \cdot b^{T_{meia-vida^I}} \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{2} = b^{T_{meia-vida^I}} \tag{2.15}$$

Elevando de ambos os lados a equação 2.15 por $\frac{1}{T_{meia-vida^I}}$, obtêm-se:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T_{meia-vida^I}}} = b \tag{2.16}$$

b em função de $T_{meia-vida^I}$ é dado pela equação 2.16, substituindo o valor de b encontrado na equação 2.12, temos:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{meia-vida^I}}} \tag{2.17}$$

Portanto, a equação 2.17 expressa a massa m de isótopos radioativos em um determinado material no decorrer do tempo t , na qual $T_{meia-vida^I}$ é o tempo de meia vida de um determinado isótopo radioativo.

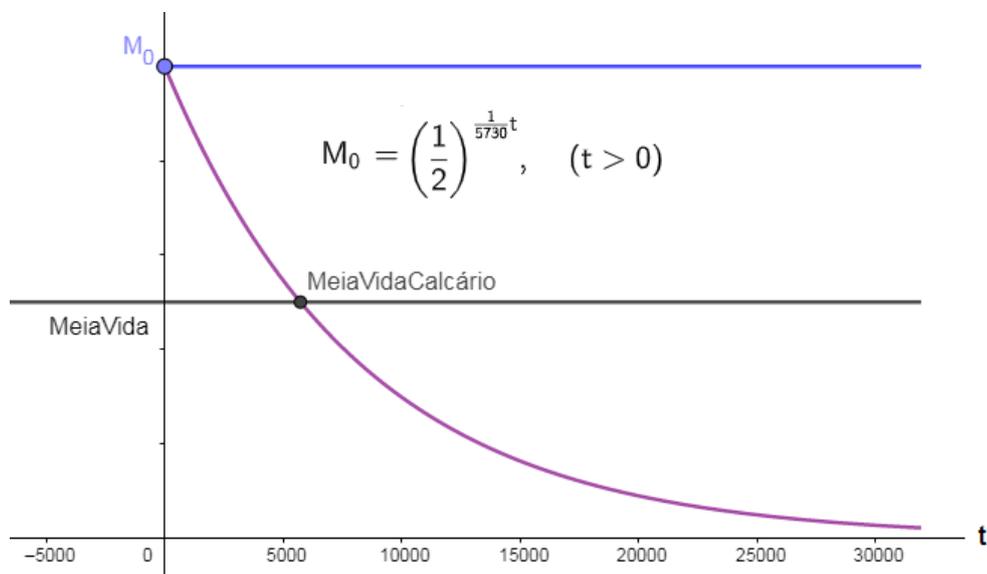
Para uma melhor visualização sobre o que a equação 2.17 proporciona, apresentamos uma tabela com algumas variações do parâmetro t da equação 2.17, assumindo o $T_{meia-vida^I}$ do Carbono-14 e uma representação gráfica desse decaimento ao decorrer do tempo.

Tabela 3 – Massa de Carbono-14 ao decorrer do tempo

Tempo t	$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$
0	$m(t) = m_0$
500	$m(t) \approx 0,94 \cdot m_0$
1000	$m(t) \approx 0,88 \cdot m_0$
1500	$m(t) \approx 0,83 \cdot m_0$
2000	$m(t) \approx 0,78 \cdot m_0$
5730	$m(t) = 0,5 \cdot m_0$
10.000	$m(t) \approx 0,29 \cdot m_0$
20.000	$m(t) \approx 0,08 \cdot m_0$
30.000	$m(t) \approx 0,02 \cdot m_0$
40.000	$m(t) \approx 0,007 \cdot m_0$
50.000	$m(t) \approx 0,002 \cdot m_0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4 – Gráficos da equação 2.17, com $T = 5730$



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

(b) Determine, em função de $T_{meia-vida}$, o tempo necessário para que m_0 se reduza a um terço de seu valor inicial.

Deseja-se obter em função de $T_{meia-vida}$ o tempo necessário para que m se reduza a $\frac{1}{3}$

da massa inicial, então:

$$m(t) = \frac{1}{3} \cdot m_0 \quad (2.18)$$

Aplicando a equação 2.17 do item *a*) na equação 2.18:

$$m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{meia-vida^I}}} = \frac{1}{3} \cdot m_0 \quad (2.19)$$

Como $m_0 > 0$, pode-se dividir ambos os lados por m_0 :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{meia-vida^I}}} = \frac{1}{3} \quad (2.20)$$

Aplicando a propriedade de logaritmo, $\log_b(a)^c = c \cdot \log_b a$:

$$\frac{t}{T_{meia-vida^I}} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{3}\right) \quad (2.21)$$

Aplicando, $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$:

$$t = T_{meia-vida^I} \cdot \log_2 3 \quad (2.22)$$

O tempo necessário para que um determinado isótopo decaia para um terço de sua massa inicial é dado por 2.22, na qual $T_{meia-vida^I}$ é o tempo de meia-vida desse determinado isótopo.

2.3 Modelo de Verhulst

Pierre François Verhulst (1804 - 1849) nasceu na cidade de Bruxelas na Bélgica, era matemático e doutor na área de teoria dos números na Universidade de Gante. De acordo com [6], Verhulst introduziu a equação de crescimento logístico, na qual a população cresce até um limite máximo sustentável, ou seja, ela tende a se estabilizar após um determinado tempo. Esse modelo apresenta um valor limitante que pode ser representado por vários fatores, como o ambiental, econômico e social. Portanto, segundo Verhulst a variação de uma determinada população no tempo pode ser expressa pela EDO de primeira ordem (Apêndice B):

$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P(t) \cdot \left(\frac{L - P(t)}{L}\right) \quad (2.23)$$

A equação 2.23 pode ser resolvida, por se tratar de uma equação diferencial separável. Abaixo há os passos adotados para a resolução da equação.

Separando os termos em comum e integrar de ambos os lados, obtemos:

$$\int \frac{L}{P(t) \cdot (L - P(t))} \cdot dP = \int r \cdot dt \quad (2.24)$$

Aplicando a decomposição em frações parciais na equação 2.24, no termo a esquerda da igualdade:

$$\int \frac{1}{P(t)} \cdot dP + \int \frac{1}{L - P(t)} \cdot dP = \int \frac{L}{P(t) \cdot (L - P(t))} \cdot dt \quad (2.25)$$

Substituindo em 2.24 o resultado de 2.25, e resolvendo as integrais:

$$\ln|P(t)| + c_1 - \ln|L - P(t)| + c_2 = r \cdot t + c_3 \quad (2.26)$$

Substituindo $c_3 - c_1 - c_2$ por c_4 , de forma a simplificar, obtemos:

$$\ln|P(t)| - \ln|L - P(t)| = r \cdot t + c_4 \quad (2.27)$$

Aplicando a propriedade logarítmica, $\log_b(a) - \log_b(c) = \log_b\left(\frac{a}{c}\right)$ em 2.27:

$$\ln \left| \frac{P(t)}{L - P(t)} \right| = r \cdot t + c_4 \quad (2.28)$$

Aplicando a constante de Euler de ambos os lados em 2.28:

$$\left| \frac{P(t)}{L - P(t)} \right| = e^{r \cdot t + c_4} \quad (2.29)$$

Pela definição de módulo temos a expressão a seguir:

$$\frac{P(t)}{L - P(t)} =_{\pm} e^{r \cdot t + c_4} \quad (2.30)$$

Tomando, $_{\pm} e^{c_4} = k$:

$$\frac{P(t)}{L - P(t)} = k \cdot e^{r \cdot t} \quad (2.31)$$

$$P(t) = (L - P(t))k \cdot e^{r \cdot t} \quad (2.32)$$

$$P(t) + P(t) \cdot k \cdot e^{r \cdot t} = L \cdot k \cdot e^{r \cdot t} \quad (2.33)$$

$$P(t) = \frac{L \cdot k \cdot e^{r \cdot t}}{1 + k \cdot e^{r \cdot t}} \quad (2.34)$$

Concluindo que:

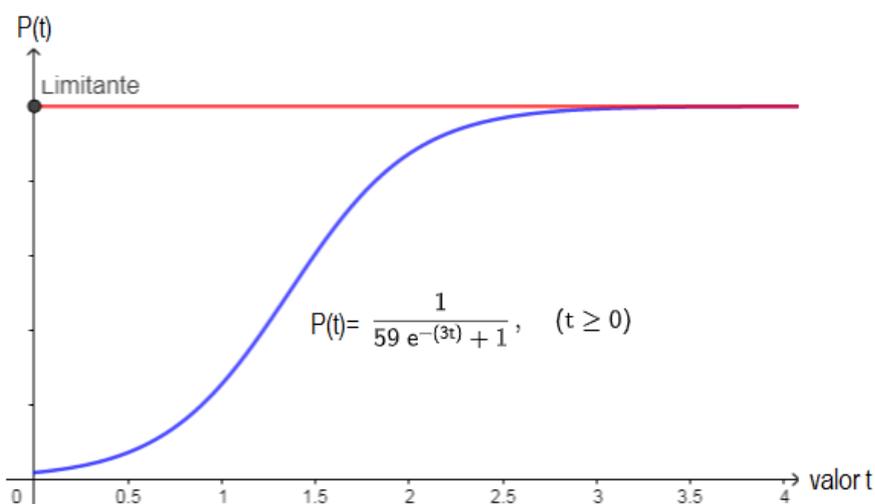
$$P(t) = \frac{L}{1 + k \cdot e^{-r \cdot t}} \tag{2.35}$$

Logo, a equação 2.35 pode ser utilizada para modelar o crescimento de uma determinada população no tempo, desde que se estabeleçam os parâmetros L , k e r .

Em seguida foi mostrado duas situações mais usuais para equação 2.35, sendo a primeira quando $r > 0$ com os valores de L e k quaisquer e a segunda quando $r < 0$ com os valores de L e k quaisquer.

1º Caso: $r > 0$, com $k = 59$ e $L = 1$.

Figura 5 – Gráfico da equação 2.35, com $k > 0$ e $r > 0$

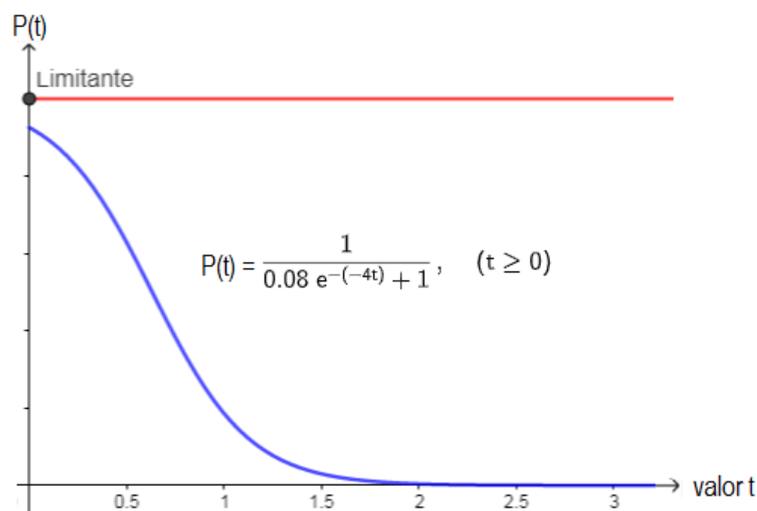


Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12], aplicado $k = 59$ e $r = 3$.

A figura 5, representa o comportamento da equação 2.35 no decorrer do tempo t , para os valores de k e r específicos. Um parâmetro importante a se destacar é o valor de r na equação, pois é ele quem dita se a taxa de variação da população no tempo tende a crescer ou a decrescer. Para os valores de $r > 0$ o número de nascimento é maior que o número de mortes, o que acarreta no crescimento da população $P(t)$. Assim, quanto maior for o valor de r mais acelerada é a taxa de crescimento da população. Com o passar do tempo essa taxa de crescimento começa a desacelerar, devido a algum fator limitante que é quantificado por L e conforme o tempo t aumenta a população tende a se estabilizar próximo ao limitante L , como representado na figura 5.

2º Caso: $r < 0$, com $k = 0,08$ e $L = 1$.

Figura 6 – Gráfico da equação 2.35, com $k > 0$ e $r < 0$



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12], aplicado $k = 0,08$ e $r = -4$.

A figura 6, representa o comportamento da equação 2.35 no decorrer do tempo t , para os valores de k e r específicos. Para os valores de $r < 0$, o número de mortes é maior que o número de nascimentos, caracterizando um decrescimento gradativo da população. Assim, conforme t aumenta a tendência da população é chegar a zero, como mostra a figura 6.

Abaixo, há um *link* disponível para acesso ao *site* do *GeoGebra*, nele é possível verificar de forma mais dinâmica esse comportamento da equação 2.35 modificando seus parâmetros. Para ter acesso a o *site* [\(Clique aqui\)](#).

2.4 Aplicação do modelo de Verhulst para a densidade demográfica do estado de São Paulo

Foi feita uma aplicação do modelo de Verhulst, com o objetivo de obter uma possível previsão da densidade demográfica para o estado de São Paulo. Os dados coletados para a modelagem foram obtidos de [7], com acesso realizado no dia 14 de maio de 2020. O *site*, disponibiliza a densidade demográfica nos anos de 1872, 1890, 1900, 1920, 1940, 1950, 1960, 1970, 1991, 2000, e 2010. Para o ano de 2019, o *site* fornece uma previsão da densidade demográfica. Na tabela 4 contêm os dados coletados de [7].

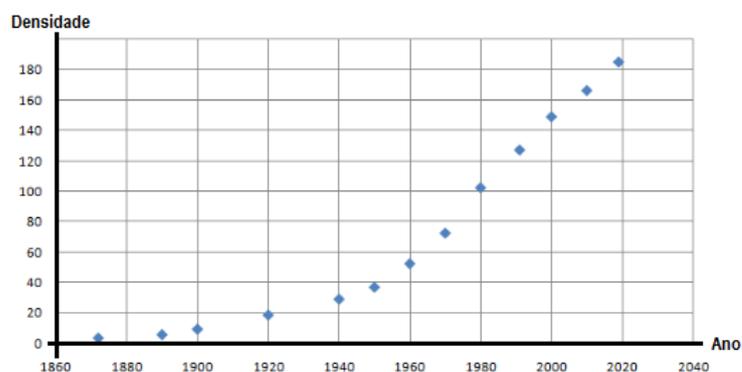
Tabela 4 – Densidade demográfica do estado de São Paulo

Ano da coleta	Densidade demográfica (hab/Km ²)
1872	3,37
1890	5,58
1900	9,20
1920	18,50
1940	28,93
1950	36,81
1960	52,28
1970	72,36
1980	102,25
1991	127,11
2000	148,96
2010	166,25
2019	184,99

Fonte: Tabela modificada pelo autor, referente aos dados retirados de [7].

Para uma melhor visualização da distribuição dos dados, os valores foram transportados para um gráfico, obtendo a figura 7.

Figura 7 – Distribuição da densidade demográfica de São Paulo referente a tabela 4



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software* Excel 2007, dados referentes a tabela 4.

Para realizar a modelagem do crescimento demográfico do estado, aplicamos o modelo de Verhulst, expresso pela equação:

$$P(t) = \frac{L}{1 + k \cdot e^{-r \cdot t}} \quad (2.36)$$

$P(t)$ representa a densidade demográfica no decorrer do tempo t , L é a capacidade suporte e r é a taxa de variação do crescimento demográfico. A seguir explicitou-se quais critérios foram adotados para determinar o valor de r .

Para determinar r na equação 2.38, foi adotado o valor de $L = 250$. Depois calculamos a diferença entre todos os anos da tabela 4. Em seguida foi calculada a média entre elas, resultando no valor 12,25, que será adotado para t . Utilizou-se a mesma ideia para obter o valor de t , mas agora aplicada para calcular o valor de $P(t)$, calculando a diferença entre as densidades da tabela 4. Depois, realizamos o cálculo da média dessas diferenças, obtendo 15,135. Como 15,135 é a média das diferenças das densidades e a densidade de 2019, segundo a tabela 4, é de 184,99. Foi adotado para $P(t)$ o arredondamento da densidade de 2019 para 185, somado com o 15,135 ficando, $P(t) = 200,135$. Aplicando os valores definidos na equação 2.38, obteve-se:

$$P(t) = \frac{250}{1 + 185 \cdot e^{-12,25 \cdot r}} = 200,135 \quad (2.37)$$

Onde:

$$\frac{250}{200,135} - 1 = 185 \cdot e^{-12,25 \cdot r} \quad (2.38)$$

$$1,249 - 1 = 185 \cdot e^{-12,25 \cdot r} \quad (2.39)$$

$$e^{-12,25 \cdot r} = \frac{0,249}{185} \quad (2.40)$$

Aplicando a propriedade logarítmica de ambos os lados:

$$-12,25 \cdot r = \ln \left(\frac{0,249}{185} \right) \quad (2.41)$$

$$r = -\frac{\ln \left(\frac{0,249}{185} \right)}{12,25} = \frac{6,610}{12,25} \quad (2.42)$$

Assim:

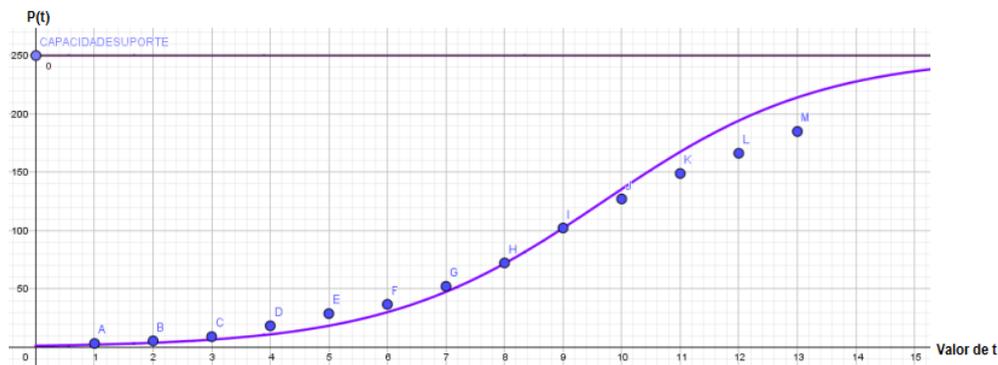
$$r \approx 0,539 \quad (2.43)$$

Tomando $r = 0,539$, $P(t)$ pode ser representado pela função:

$$P(t) = \frac{250}{1 + 185 \cdot e^{-0,539 \cdot t}} \quad (2.44)$$

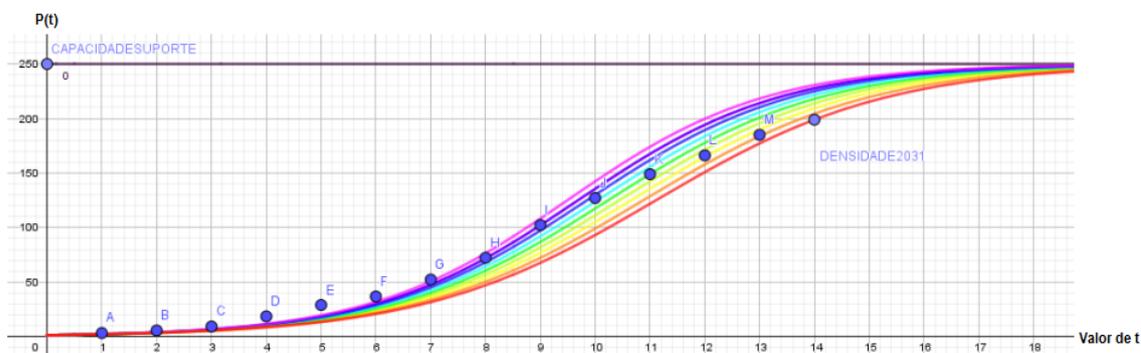
Com $t \geq 0$ real e $k = 185$, a figura 8, representa a função $P(t)$ de acordo com os parâmetros assumidos.

Figura 8 – Simulação para a densidade demográfica de São Paulo usado $r = 0,539$



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

Figura 9 – Simulação para a densidade demográfica de São Paulo variando r



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

Ao observar $0,47 \leq k \leq 0,55$, obtemos aproximações razoáveis para a previsão da densidade demográfica, tomando $k = \{0,47; 0,48; 0,49; 0,50; 0,51; 0,52; 0,53; 0,54; 0,55\}$, resultando nas curvas apresentadas na figura 9.

Tendo para $r = 0,47$ a curva em vermelho e para $r = 0,55$ a curva em rosa, utilizamos a média dos anos para obter a curva e os anos foram igualmente espaçados no eixo horizontal. Note que a partir de 1980 (no ponto I do gráfico 9) visualmente há uma desaceleração no crescimento demográfico, apresentando uma forte tendência de que em 2031, aproximadamente, a densidade demográfica do estado esteja na curva $r = 0,47$. Ao aplicar $D(t)$ com $k = 0,47$ e $t = 14$ onde representa aproximadamente o ano de 2031, temos:

$$D(14) = \frac{250}{1 + 185.e^{-0,47.14}} \tag{2.45}$$

$$D(14) = 198,93 \tag{2.46}$$

Logo, uma possível previsão para a densidade demográfica para o estado de São Paulo para 2031 aplicando o modelo de Verhulst é de 198,93 habitantes por km^2 de acordo ao modelo apresentado.

3 Alguns modelos epidemiológicos padrão

A modelagem matemática para surtos, endemias, epidemias e pandemias tem um papel fundamental para a epidemiologia, pois possibilita uma melhor compreensão sobre a propagação de uma determinada doença em uma população suscetível. Existem vários modelos matemáticos que podem ser utilizados para descrever o comportamento de propagação de algumas doenças, com uma razoável precisão. Por exemplo, nos momentos iniciais da pandemia da *COVID-19*, o número de casos acumulados de pessoas infectadas pode ser descrito pelo modelo de crescimento populacional de Malthus. Em maio de 2020, passado 44 dias após o primeiro registro, o Brasil vivenciou um cenário epidemiológico com crescimento acelerado e exponencial de casos, segundo [21].

Após um determinado tempo, a taxa de contágio tende a desacelerar, onde o número de pessoas suscetíveis ao vírus diminui, caracterizando um possível fim de disseminação do vírus na população. Esse comportamento de crescimento exponencial nos momentos iniciais e depois a presença da desaceleração na taxa de crescimento, são características do modelo logístico proposto por Verhulst.

Além dessas duas ferramentas matemáticas mencionadas, que podem ser utilizadas para obter modelos de predição, há também os modelos compartimentais, amplamente utilizados na epidemiologia. Nos modelos compartimentais, um grupo populacional suscetível a uma determinada doença é dividida em compartimentos (ou classes), na qual cada compartimento expõe o estado em que os indivíduos da população se encontram.

Alguns dos principais modelos padrões existentes são:

Figura 10 – Modelo *SIS* (suscetíveis – infectados - suscetíveis)



Fonte: Elaborado pelo autor.

O modelo *SIS*, representado na figura 10, contém três compartimentos, onde dois deles são iguais, o *S* representa a quantidade de indivíduos suscetíveis a uma doença e o compartimento *I*, que expressa a quantidade de indivíduos infectados. A seta, representa o deslocamento dos indivíduos para o respectivo compartimento. Neste modelo, o indivíduo infectado que se recupera pode se tornar novamente suscetível a uma doença, apresentando uma característica de não imunidade dos indivíduos. Sendo assim, mais apropriado para representar doenças causadas por agentes bacterianos, segundo [17] página 9.

Figura 11 – Modelo *SIR* (suscetíveis – infectados - recuperados)

Fonte: Elaborado pelo autor.

O modelo *SIR*, representado na figura 11, possui três compartimentos, o *S* que representa os indivíduos suscetíveis, o *I* que representa os indivíduos infectados e o *R* que representa os indivíduos recuperados. O compartimento *R*, que recebe o nome de recuperados, não quer dizer exatamente que os indivíduos que saíram do compartimento *I* estão recuperados, mas sim, que esses indivíduos não podem se tornar novamente infectados.

Os indivíduos recuperados não se tornam suscetíveis novamente, como apresentado no modelo *SIS*, pois o fluxo de indivíduos que chegam no compartimento *R* se mantém nele. Esse modelo apresenta uma característica de imunização da população, sendo bastante utilizado para modelar doenças infecciosas, como, por exemplo, a rubéola, a varicela e sarampo, segundo [17].

Figura 12 – Modelo *SEIR* (suscetíveis – expostos – infectados - recuperados)

Fonte: Elaborado pelo autor.

O modelo *SEIR*, representado na figura 12, tem uma pequena variação em relação ao modelo *SIR*, na qual é adicionado um novo compartimento chamado de expostos, representado por *E*. Esse compartimento adicional representa os indivíduos que são expostos a uma determinada doença. O modelo é bastante utilizado nas situações em que o distanciamento social influencia diretamente na dinâmica de propagação de uma doença na população.

Existem vários outros modelos compartimentais e cada um representa um cenário diferente de propagação na dinâmica epidêmica, basta adicionar outros compartimentos, conforme a necessidade para uma representação mais fiel da disseminação de uma doença na população.

A dinâmica que rege o fluxo de indivíduos em cada compartimento é representada por um sistemas de equações diferenciais. Apresentou-se os sistemas de equações diferenciais dos modelos compartimentais *SIS*, *SIR*, *SEIR*, solução gráfica de cada modelo e o fator R_0 , chamado de razão de reprodutividade basal, segundo [1] página 35, sendo um parâmetro extremamente importante para determinar o potencial de propagação da doença.

Por fim, apresentamos algumas simulações realizadas do modelo compartimental *SIR*, para responder as perguntas levantadas em relação o número de casos acumulados de pessoas infectadas pelo vírus SARS-CoV-2 no município de Franca.

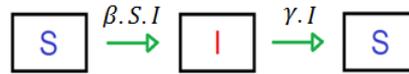
3.1 Modelo *SIS*

Uma característica desse modelo é a não imunidade dos indivíduos recuperados, acarretando na presença constante da doença na população. Para simplificar o modelo, consideramos que a população é totalmente homogênea em características físicas e ambientais; também não foram considerados os óbitos e os nascimentos. Para a população total representada por N , assumimos que $N = S(t) + I(t)$, para algum N fixo.

A taxa de variação dos indivíduos do compartimento S para I , depende do número de encontros entre os indivíduos suscetíveis e os infectados, essa taxa é representada por β . A taxa de variação dos indivíduos do compartimento I para S , depende da taxa de recuperação dos indivíduos infectados, essa taxa é representada por γ .

O modelo compartimental *SIS*, com seus respectivos parâmetros que regem o fluxo de indivíduos entre seus compartimentos é representado por:

Figura 13 – Modelo *SIR* (suscetíveis – infectados - suscetíveis)



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com o modelo, a equação diferencial que descreve a variação dos indivíduos do compartimento dos suscetíveis para o compartimento dos infectados é representada por:

$$\frac{dS}{dt} = \gamma \cdot I - \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} \quad (3.1)$$

A equação diferencial que descreve a variação do indivíduos do compartimento dos infectados para o compartimento dos suscetíveis é:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - \gamma \cdot I \quad (3.2)$$

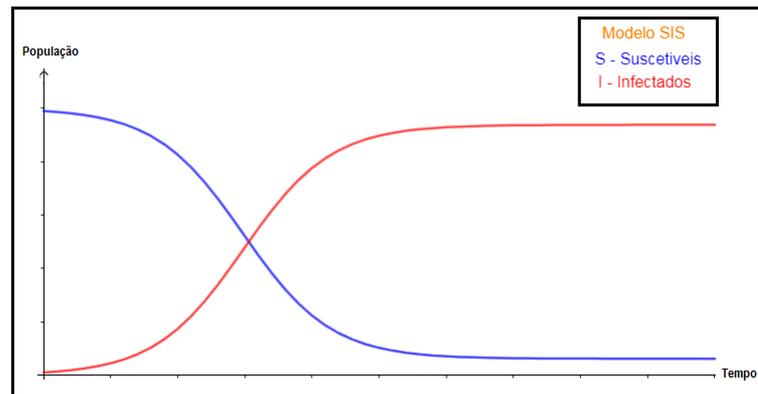
Assim, o modelo compartimental *SIS* é representado pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \gamma \cdot I - \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - \gamma \cdot I \end{cases} \quad (3.3)$$

Realizou-se a solução gráfica do sistema de equações diferenciais 3.3. Para gerar o gráfico, seguimos os passos apresentados no apêndice A, adotou-se $N = 1$ e um valor aleatório para β e γ , apenas para fins representativos.

Para uma melhor visualização gráfica do modelo *SIS* por meio da modificação dos parâmetros β e γ , [\(Clique aqui\)](#).

Figura 14 – Representação gráfica do modelo *SIS*



Fonte: Elaborado pelo autor usando o software on-line *GeoGebra*, disponível em [12].

A figura 14, proporciona visualmente como se comporta a dinâmica entre os compartimentos com o passar do tempo. Assim, conforme o número de infectados (curva em vermelho) aumenta, o número de suscetíveis (curva em azul) diminui. A velocidade com que os suscetíveis se infectam, em momentos iniciais da transmissão pode ser calculada através do coeficiente de reprodutibilidade basal.

Segundo [5] página 26, a razão de reprodutibilidade basal geralmente definida por R_0 , no caso de doenças infecciosas, é o número de casos secundários que um caso primário é capaz de produzir em uma população totalmente suscetível. Se $R_0 < 1$, a doença tende a se extinguir na população suscetível, se $R_0 > 1$ a doença tende a permanecer presente na população suscetível. Quanto maior for o valor de R_0 , mais grave será a disseminação da doença na população. A razão de reprodutibilidade basal é representada pela equação:

$$R_0 = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N \cdot \gamma \cdot I} \quad (3.4)$$

Assumindo o cálculo do R_0 no instante inicia de transmissão, podemos considerar aproximadamente todos os indivíduos suscetíveis, que são representados por S , serem representados por N . A razão de reprodutibilidade basal no modelo *SIS*, pode ser expresso por:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \quad (3.5)$$

Portanto, através da equação 3.5 é possível determinar a velocidade de crescimento ou decrescimento da doença, bastando para isso obter os valores dos parâmetros β , que representa a taxa de transmissibilidade, e γ , que representa a taxa de recuperação.

3.2 Modelo SIR

O modelo é dividido em três compartimentos, o S que representa os indivíduos suscetíveis, o I que representa os indivíduos infectados e o R que representa os indivíduos recuperados. Para a população total representada por N , assume-se que $N = S(t) + I(t) + R(t)$, para algum N fixo.

A taxa de variação dos indivíduos do compartimento S para I , depende do número de encontros entre os indivíduos suscetíveis e os infectados, essa taxa é representada por β . A taxa de variação dos indivíduos do compartimento I para R , depende da taxa de recuperação dos indivíduos infectado, essa taxa é representada por γ .

O modelo compartimental SIR , com seus respectivos parâmetros que regem o fluxo de indivíduos entre seus compartimentos é representado a seguir:

Figura 15 – Modelo SIR (suscetíveis – infectados - recuperados)



Fonte: Elaborado pelo autor.

No modelo SIR , representado na figura 15, não há uma reinserção dos indivíduos recuperados no compartimento de suscetíveis, apresentando uma característica de imunidade da população ao passarem para o compartimento dos recuperados. Como a quantidade de indivíduos suscetíveis diminui em relação ao tempo, a variação de pessoas suscetíveis é representada pela equação diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} \quad (3.6)$$

A quantidade de indivíduos infectados, dependem da entrada dos indivíduos que saíram do compartimento S para o compartimento I , e a saída dos indivíduos do compartimento I para o compartimento R . A variação dos indivíduos do compartimento I , é dada por:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - \gamma \cdot I \quad (3.7)$$

A quantidade de indivíduos recuperados depende da quantidade de indivíduos que saíram do compartimento dos infectados. A variação dos indivíduos recuperados é dada por:

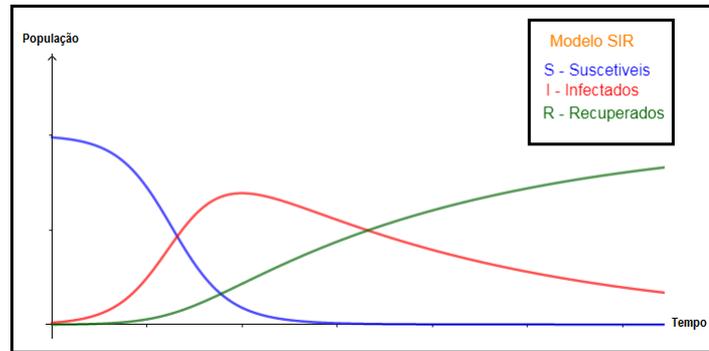
$$\frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I \quad (3.8)$$

O modelo compartimental SIR é representado pelo sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - \gamma \cdot I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Foi feita e apresentada a solução gráfica do sistema de equações diferenciais 3.9. Para gerar o gráfico, foram seguidos os passos do apêndice A. Assumiu-se $N = 1$ e um valor aleatório para β e γ , apenas para fins de representação. Para uma melhor visualização gráfica do modelo SIR , por meio da modificação dos parâmetros β e γ , [\(Clique aqui\)](#).

Figura 16 – Representação gráfica do modelo SIR



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

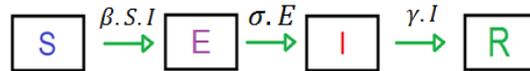
A figura 16 proporciona visualmente como se comporta a dinâmica entre os compartimentos. Conforme o número de infectados (curva em vermelho) aumenta, o número de suscetíveis (curva em azul) diminui. Com o passar do tempo, a medida que o número de suscetíveis diminui, conseqüentemente o número de infectados é cada vez menor, pois os indivíduos infectados que se recuperaram (curva em verde) não retornam para o compartimento dos suscetíveis, ocasionando em algum momento o fim da transmissão na população. A velocidade com que os suscetíveis se infectam, em momentos iniciais da transmissão pode ser calculada através do coeficiente de reprodutibilidade basal representado pela equação 3.5.

3.3 Modelo $SEIR$

O modelo compartimental $SEIR$ é uma variação do modelo SIR , ao adicionar um compartimento E , entre o compartimento dos suscetíveis e os infectados. Segundo [15], esse compartimento representa os indivíduos expostos aos infectados, tendo assim, um

período latente σ para descrever o fluxo de indivíduos entre os compartimento E e I . Abaixo, foi exposto o modelo compartimental $SEIR$ com seus respectivos parâmetros e o sistema de equações que o descreve.

Figura 17 – Modelo $SEIR$ (suscetíveis – - expostos - infectados - recuperados)



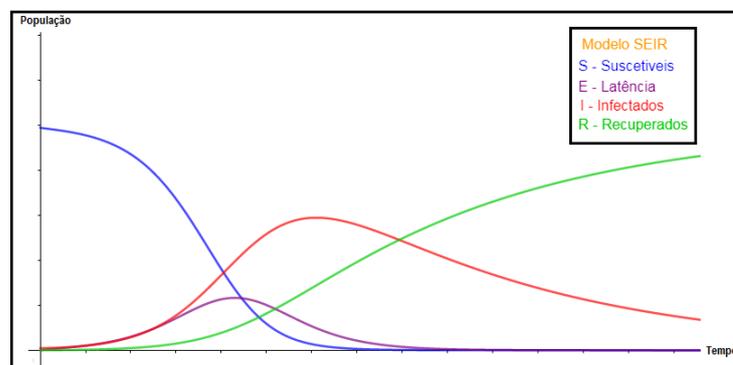
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os sistemas de equações diferenciais que descrevem o modelo $SEIR$ é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - \sigma \cdot E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma \cdot E - \gamma \cdot I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Foi feita a solução gráfica do sistema de equações diferenciais 3.10. Para gerar o gráfico, seguimos os passos apresentados no apêndice A. Adotou-se $N = 1$ e um valor aleatório para β , σ e γ , para a sua representação. Para uma melhor visualização gráfica do modelo $SEIR$ por meio da modificação dos parâmetros, [\(clique aqui\)](#).

Figura 18 – Representação gráfica do modelo $SEIR$



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

A figura 18 proporciona visualmente como se comporta a dinâmica entre os compartimentos. Conforme o número de expostos (curva em roxo) aumenta, o número de suscetíveis (curva em azul) diminui. Com o passar do tempo, a medida que o número de suscetíveis diminui, conseqüentemente o número de expostos é cada vez menor, pois os indivíduos expostos que se infectam (curva em vermelho) não retornam para o compartimento dos suscetíveis. Conforme o número de infectados (curva em vermelho) aumenta, o número de expostos (curva em roxo) diminui. Com o passar do tempo, a medida que o número de expostos diminui, conseqüentemente o número de infectados é cada vez menor, pois os indivíduos infectados que se recuperaram (curva em verde) não retornam para o compartimento dos suscetíveis, ocasionando em algum momento o fim da transmissão na população. A velocidade com que os suscetíveis se infectam, em momentos iniciais da transmissão pode ser calculada através do coeficiente de reprodutibilidade basal representado pela equação 3.5.

3.4 Uma aplicação do modelo SIR para o número de casos de $SARS - CoV - 2$ na cidade de Franca

Nesta seção abordamos algumas simulações aplicando o modelo compartimental SIR para o número de casos acumulados de pessoas infectadas pelo vírus SARS-CoV-2 no município de Franca - SP no período de 18 de março de 2020 (1º dia em que foi registrado o primeiro caso de infecção confirmada no Boletim Epidemiológico) a 20 de junho de 2021, com o propósito de responder as seguintes perguntas: "Qual seria o número de casos acumulados de pessoas infectadas pelo vírus SARS-CoV-2 no município de Franca - SP caso não houvesse uma desaceleração na taxa de transmissão, nos seguintes períodos: do 1º ao 148º dia, do 1º ao 337º dia e do 1º ao 437º dia?" e se "Houve redução no número total de casos quando comparado os períodos simulados do 1º ao 148º dia em relação a simulação do 1º ao 451º dia?".

3.4.1 Organização dos dados coletados

Organizamos em forma de tabela os dados coletados em [14] no período de 18/03/20 até 20/06/21. Nos dias 21/04/20, 17/08/20 e 06/03/21 os arquivos disponíveis se encontravam corrompidos, então representamos os dados desse período por (-).

Tabela 5 – Situação dos casos de $SARS - COV - 2$ em Franca

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
18/03/20	0	0	0

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
20/03/20	0	0	0
23/03/20	0	0	0
24/03/20	0	0	0
27/03/20	1	0	0
30/03/20	1	0	0
31/03/20	2	0	0
01/04/20	2	0	0
02/04/20	3	0	0
03/04/20	3	0	0
04/04/20	4	0	0
05/04/20	4	0	0
06/04/20	4	0	0
07/04/20	5	0	0
08/04/20	5	0	0
09/04/20	5	0	0
10/04/20	6	0	0
11/04/20	6	0	0
12/04/20	7	0	0
13/04/20	7	1	0
14/04/20	7	1	0
15/04/20	8	1	0
16/04/20	8	1	0
17/04/20	10	1	0
18/04/20	10	1	0
19/04/20	10	1	0
21/04/20	-	-	-
20/04/20	10	1	0
22/04/20	10	1	7
23/04/20	11	1	7
24/04/20	12	1	7
25/04/20	13	2	7
26/04/20	13	2	7
27/04/20	20	2	7
28/04/20	29	2	8
29/04/20	36	2	8
30/04/20	38	2	8

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
01/05/20	41	2	8
02/05/20	42	2	8
03/05/20	43	2	8
04/05/20	45	2	8
05/05/20	46	2	14
06/05/20	50	2	14
07/05/20	55	2	14
08/05/20	59	2	14
09/05/20	59	3	14
10/05/20	62	3	14
11/05/20	67	3	18
12/05/20	69	3	18
13/05/20	70	3	21
14/05/20	70	3	21
15/05/20	72	3	21
16/05/20	73	3	28
17/05/20	74	3	28
18/05/20	80	3	28
19/05/20	81	3	32
20/05/20	87	3	33
21/05/20	87	3	36
22/05/20	90	3	40
23/05/20	93	3	40
24/05/20	94	3	40
25/05/20	95	3	40
26/05/20	99	3	42
27/05/20	103	3	47
28/05/20	112	3	47
29/05/20	119	3	57
30/05/20	124	3	57
31/05/20	125	3	57
01/06/20	132	3	58
02/06/20	136	4	64
03/06/20	139	4	64
04/06/20	140	5	69
05/06/20	141	5	74

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
06/06/20	144	5	74
07/06/20	144	5	74
08/06/20	151	6	78
09/06/20	151	6	81
10/06/20	154	7	83
11/06/20	156	7	83
12/06/20	164	7	83
13/06/20	170	9	83
14/06/20	173	9	83
15/06/20	177	9	92
16/06/20	181	9	93
17/06/20	193	9	93
18/06/20	199	9	102
19/06/20	221	7	103
20/06/20	235	7	103
21/06/20	240	7	103
22/06/20	256	7	111
23/06/20	265	7	111
24/06/20	280	7	120
25/06/20	299	8	122
26/06/20	334	8	128
27/06/20	347	8	128
28/06/20	355	8	128
29/06/20	363	8	128
30/06/20	371	8	138
01/07/20	388	9	138
02/07/20	427	10	153
03/07/20	458	10	153
04/07/20	469	10	153
05/07/20	482	12	153
06/07/20	499	12	173
07/07/20	517	12	182
08/07/20	548	12	202
09/07/20	556	12	202
10/07/20	590	14	212
11/07/20	598	14	212

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
12/07/20	607	14	212
13/07/20	635	15	235
14/07/20	660	16	235
15/07/20	692	16	269
16/07/20	746	16	269
17/07/20	777	17	282
18/07/20	790	18	282
19/07/20	810	18	282
20/07/20	843	18	282
21/07/20	880	20	309
22/07/20	922	23	314
23/07/20	985	23	323
24/07/20	1008	24	331
25/07/20	1071	25	331
26/07/20	1079	26	331
27/07/20	1112	28	350
28/07/20	1148	30	350
29/07/20	1200	31	363
30/07/20	1268	33	368
31/07/20	1268	33	368
31/07/20	1314	34	379
01/08/20	1332	35	379
02/08/20	1405	36	379
03/08/20	1465	37	392
04/08/20	1512	41	412
05/08/20	1615	42	412
06/08/20	1775	42	446
07/08/20	1853	42	462
08/08/20	1937	46	462
09/08/20	1947	46	462
10/08/20	2071	50	463
11/08/20	2129	50	474
12/08/20	2275	53	503
13/08/20	2342	53	531
14/08/20	2516	54	552

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
15/08/20	2698	54	552
16/08/20	2701	54	552
17/08/20	-	-	-
18/08/20	2958	57	574
19/08/20	3042	59	598
20/08/20	3166	62	614
21/08/20	3221	62	645
22/08/20	3257	63	645
23/08/20	3268	65	645
24/08/20	3325	67	668
25/08/20	3405	68	702
26/08/20	3493	70	726
27/08/20	3566	71	753
28/08/20	3641	73	773
29/08/20	3710	75	773
30/08/20	3724	77	773
31/08/20	3787	80	781
01/09/20	3862	82	790
02/09/20	3919	84	806
03/09/20	4004	84	827
04/09/20	4068	85	849
05/09/20	4090	86	849
06/09/20	4141	87	849
07/09/20	4159	89	849
08/09/20	4247	93	876
09/09/20	4339	97	910
10/09/20	4438	100	938
11/09/20	4510	103	1076
12/09/20	4557	104	1076
13/09/20	4570	106	1076
14/09/20	4611	107	1117
15/09/20	4649	109	1172
16/09/20	4743	112	1310
17/09/20	4927	113	1404
18/09/20	5072	114	1526
19/09/20	5121	117	1526

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
20/09/20	5129	117	1526
21/09/20	5219	117	1565
22/09/20	5328	117	1597
23/09/20	5464	118	1655
24/09/20	5547	120	1688
25/09/20	5708	122	1722
26/09/20	5778	126	1722
27/09/20	5806	128	1722
28/09/20	5896	132	1753
29/09/20	6077	137	1827
30/09/20	6156	139	1853
01/10/20	6324	142	1886
02/10/20	6421	143	2005
03/10/20	6446	149	2005
04/10/20	6446	149	2005
05/10/20	6555	153	2074
06/10/20	6667	155	2179
07/10/20	6702	156	2307
08/10/20	6801	157	2390
09/10/20	6898	160	2576
10/10/20	6947	161	2576
11/10/20	6955	162	2576
12/10/20	6956	163	2576
13/10/20	6988	163	2659
14/10/20	7083	164	2728
15/10/20	7126	167	2752
16/10/20	7172	168	2861
17/10/20	7204	169	2940
18/10/20	7228	170	2945
19/10/20	7250	172	3010
20/10/20	7369	173	3088
21/10/20	7429	173	3183
22/10/20	7519	175	3265
23/10/20	7630	179	3344
24/10/20	7657	181	3344
25/10/20	7667	181	3344

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
26/10/20	7703	181	3390
27/10/20	7781	181	3473
28/10/20	7821	182	3585
29/10/20	7974	183	3657
30/10/20	7994	185	3657
31/10/20	8075	185	3657
01/11/20	8079	186	3657
02/11/20	8085	188	3657
03/11/20	8131	189	3773
04/11/20	8146	190	3909
05/11/20	8209	192	4019
06/11/20	8250	192	4070
07/11/20	8331	193	4070
08/11/20	8334	193	4070
09/11/20	8379	194	4181
10/11/20	8386	195	4286
11/11/20	8435	195	4425
12/11/20	8463	195	4557
13/11/20	8500	195	4714
14/11/20	8514	196	4714
15/11/20	8516	196	4714
16/11/20	8545	197	4897
17/11/20	8622	197	5063
18/11/20	8645	197	5143
19/11/20	8663	200	5347
20/11/20	8685	200	5347
21/11/20	8694	203	5347
22/11/20	8694	203	5347
23/11/20	8729	206	5523
24/11/20	8755	206	5645
25/11/20	8808	206	5735
26/11/20	8822	208	5825
27/11/20	8863	208	5927
28/11/20	8886	208	5927
29/11/20	8908	208	5927
30/11/20	8918	208	6068

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
01/12/20	8956	208	6129
02/12/20	8995	208	6282
03/12/20	9016	209	6529
04/12/20	9058	209	6716
05/12/20	9058	210	6716
06/12/20	9061	211	6716
07/12/20	9083	211	6716
08/12/20	9139	211	6716
09/12/20	9159	211	6850
10/12/20	9210	211	6900
11/12/20	9257	214	6950
12/12/20	9257	214	6950
13/12/20	9257	214	6950
14/12/20	9291	214	7037
15/12/20	9343	215	7100
16/12/20	9387	216	7138
17/12/20	9401	216	7199
18/12/20	9486	216	7293
19/12/20	9521	216	7293
20/12/20	9574	217	7293
21/12/20	9627	217	7357
22/12/20	9711	217	7400
23/12/20	9779	217	7439
24/12/20	9867	217	7439
25/12/20	9913	217	7439
26/12/20	9963	218	7439
27/12/20	9990	218	7439
28/12/20	10124	218	7567
29/12/20	10252	220	7684
30/12/20	10331	220	7765
31/12/20	10410	221	7765
01/01/21	10481	221	7765
02/01/21	10500	221	7765
03/01/21	10535	221	7765
04/01/21	10733	224	7855
05/01/21	10890	225	7943

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
06/01/21	11114	226	8000
07/01/21	11310	227	8047
08/01/21	11478	229	8130
09/01/21	11606	229	8130
10/01/21	11679	229	8130
11/01/21	11776	229	8257
12/01/21	12018	230	8334
13/01/21	12359	234	8444
14/01/21	12800	235	8668
15/01/21	13097	237	8728
16/01/21	13184	237	8728
17/01/21	13257	238	8728
18/01/21	13408	238	8902
19/01/21	13740	241	9177
20/01/21	14095	245	9367
21/01/21	14267	249	9538
22/01/21	14509	251	9638
23/01/21	14631	255	9638
24/01/21	14707	259	9638
25/01/21	14811	260	9763
26/01/21	15065	262	9826
27/01/21	15245	262	9827
28/01/21	15466	263	9827
29/01/21	15617	266	9880
30/01/21	15678	266	9880
31/01/21	15717	268	9880
01/02/21	15899	274	9883
02/02/21	16093	280	9933
03/02/21	16259	282	10205
04/02/21	16453	283	10447
05/02/21	16521	284	10683
06/02/21	16627	285	10683
07/02/21	16682	290	10683
08/02/21	16800	290	10836
09/02/21	17031	300	11152
10/02/21	17121	301	11614

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
11/02/21	17220	301	12179
12/02/21	17346	302	12300
13/02/21	17386	304	12300
14/02/21	17410	305	12300
15/02/21	17554	308	12400
16/02/21	17707	311	12604
17/02/21	17960	313	13002
18/02/21	18087	314	13538
19/02/21	18243	315	14050
20/02/21	18322	315	14053
21/02/21	18394	316	14053
22/02/21	18608	317	14504
23/02/21	18702	325	15038
24/02/21	18957	328	15410
25/02/21	19187	329	15546
26/02/21	19269	331	16185
27/02/21	19360	335	16185
28/02/21	19466	336	16185
01/03/21	19513	338	16471
02/03/21	19573	343	16615
03/03/21	19624	349	17037
04/03/21	19709	359	17207
05/03/21	19817	365	17253
06/03/21	-	-	-
07/03/21	19920	365	17253
08/03/21	20030	370	17395
09/03/21	20148	372	17612
10/03/21	20304	376	17815
11/03/21	20398	383	18019
12/03/21	20486	385	18300
13/03/21	20608	385	18300
14/03/21	20627	387	18300
16/03/21	20741	391	18698
17/03/21	20848	393	19028
18/03/21	21013	395	19121
19/03/21	21072	401	19522

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
20/03/21	21130	405	19522
21/03/21	21174	405	19522
22/03/21	21245	407	19653
23/03/21	21345	411	19839
24/03/21	21407	414	19869
25/03/21	21532	418	20004
26/03/21	21679	419	20149
27/03/21	21732	422	20149
28/03/21	21818	422	20149
29/03/21	21925	424	20221
30/03/21	22030	428	20446
31/03/21	22141	433	20606
01/04/21	22254	434	20828
02/04/21	22371	434	20828
03/04/21	22403	436	20828
04/04/21	22417	437	20828
05/04/21	22463	443	21011
06/04/21	22562	447	21205
07/04/21	22705	448	21356
08/04/21	22857	450	21605
09/04/21	22957	456	21782
10/04/21	23058	460	21782
11/04/21	23064	460	21782
12/04/21	23133	464	21953
13/04/21	23229	466	22055
14/04/21	23344	470	22161
15/04/21	23412	472	22244
16/04/21	23487	477	22346
17/04/21	23547	479	22350
18/04/21	23604	479	22354
19/04/21	23706	480	22460
20/04/21	23809	480	22569
21/04/21	23907	481	22569
22/04/21	23992	481	22700
23/04/21	24100	484	22842
24/04/21	24161	487	22842

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
25/04/21	24198	490	22842
26/04/21	24291	490	23003
27/04/21	24406	492	23132
28/04/21	24488	496	23257
29/04/21	24613	498	23257
30/04/21	24809	499	23348
01/05/21	24861	500	23348
02/05/21	24896	502	23348
03/05/21	25045	508	23600
04/05/21	25110	514	23776
05/05/21	25153	515	23915
06/05/21	25411	517	23938
07/05/21	25548	518	24028
08/05/21	25611	519	24028
09/05/21	25696	520	24028
10/05/21	25739	525	24138
11/05/21	25908	532	24228
12/05/21	26208	536	24350
13/05/21	26518	539	24454
14/05/21	26677	543	24518
15/05/21	26800	544	24518
16/05/21	26873	546	24518
17/05/21	27051	555	24621
18/05/21	27330	558	24724
19/05/21	27599	567	24830
20/05/21	27915	574	24931
21/05/21	28054	582	24938
22/05/21	28157	586	24938
23/05/21	28245	590	24938
24/05/21	28359	607	24938
25/05/21	28506	618	24938
26/05/21	28876	623	24989
27/05/21	29131	638	25035
28/05/21	29476	656	25101
29/05/21	29582	665	25101

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

Dia	Casos Confirmados acumulados	Óbitos acumulados	Recuperados acumulados
30/05/21	29653	669	25101
31/05/21	29884	685	25157
01/06/21	30217	693	25245
02/06/21	30522	696	25316
03/06/21	30725	697	25316
04/06/21	31122	704	25316
05/06/21	31447	708	25316
06/06/21	31597	714	25316
07/06/21	31733	731	25371
08/06/21	31976	738	25430
09/06/21	32247	747	25430
10/06/21	32527	753	25430
11/06/21	32709	762	25430
12/06/21	32906	763	25430
13/06/21	32999	763	25430
14/06/21	33249	775	25430
15/06/21	33418	782	25430
16/06/21	33706	790	25430
17/06/21	33929	795	25458
18/06/21	34176	802	25694
19/06/21	34253	803	25712
20/06/21	34303	807	25712

Fonte: Boletim epidemiológico disponibilizado por [14].

3.4.2 Material

De forma a responder as perguntas levantadas, desenvolvemos um *software* em linguagem *PYTHON* usando o *site* disponível em [20]. As simulações foram realizadas aplicando o modelo compartimental *SIR*. A seguir, apresentamos os passos utilizados para o desenvolvimento do *software* com suas respectivas linhas de código.

Importamos a biblioteca de comandos, *numpy* para ser trabalhada de forma matemática os dados importados. A biblioteca *matplotlib* é utilizada para plotar os resultados da simulação de forma gráfica e a mesma *scipy.optimize* foi utilizada para otimizar os resultados. A última biblioteca mencionada realiza a comparação entre o modelo simulado de casos confirmados e os dados reais, retornando o melhor parâmetro entre o β e γ iniciais utilizados para a simulação.

Figura 19 – 1º bloco de códigos

```
[1] import numpy as np
    from matplotlib import pyplot as plt
    from scipy.optimize import minimize
```

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [20].

Após importar as bibliotecas, foram introduzidas algumas variáveis que são essenciais para o *software* rodar.

Figura 20 – 2º bloco de códigos

```
[2] dt = 0.1
    D = 800
    N_t = int((D*24)/dt)
```

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [20].

Na figura 19, dt é o ajuste para os pontos do eixo x quando for gerado o gráfico, D representa quantos dias se pretende simular e N_t é o numero total de pontos que o modelo vai apresentar.

Figura 21 – 3º bloco de códigos

```
[3] t = np.linspace(0, D, N_t + 1)
    S = np.zeros(N_t + 1)
    I = np.zeros(N_t + 1)
    R = np.zeros(N_t + 1)
    I_cal = np.zeros(N_t + 1)
```

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [20].

Na figura 21, o bloco de códigos especifica as matrizes do programa, local onde foram armazenados os dados utilizados para resolver de forma numérica o sistema de equações diferenciais. O comando *np.linspace*, define o intervalo de espaçamento dos valores no eixo x quando o gráfico for gerado, o comando *np.zero* aplicado nas variáveis S, I, R, I_{cal} cria matrizes com dimensão N_t , na qual todos os valores das matrizes são iguais a zero.

No 4º e 5º bloco de códigos, representado pelas figuras 22 e 23 respectivamente, há as condições iniciais do problema e o sistema de equações diferenciais do modelo *SIR*.

Figura 22 – 4º bloco de códigos

```
[4] S[0] = 355901.
     I[0] = 1
     R[0] = 0
     P = S[0] + I[0] + R[0]

     I_cal[0] = I[0] + R[0]
```

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [20].

No 4º bloco, $S[0]$, $I[0]$ e $R[0]$ são as matrizes com os dados iniciais, P é a população total no instante inicial. Como mencionado no início do capítulo, aqui estamos assumindo a população suscetível como fixa, portanto não estamos considerando os nascimentos nem as mortes causadas por outros fatores.

Há uma importante sutileza no parâmetro I_cal , os dados disponibilizados por [14] sobre o número de casos acumulados de pessoas infectadas não exclui as mortes e nem os recuperados, então para ajustar os dados no simulador o parâmetro I_cal representa os infectados acumulados projetados mais os recuperados acumulados projetados do modelo simulado.

Figura 23 – 5º bloco de códigos

```
[5] def eq_sys(beta, gamma):

     global S,I,R, I_cal, N_t

     for n in range (N_t):

         S[n+1] = S[n] - beta*I[n]*S[n]*dt/P
         I[n+1] = I[n] + beta*I[n]*S[n]*dt/P - gamma*I[n]*dt
         R[n+1] = R[n] + gamma*I[n]*dt

         I_cal[n+1] = I[n+1] + R[n+1]
```

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [20].

No 5º bloco representado pela figura 23, há a definição que proporciona a resolução do modelo compartimental SIR de forma numérica. O parâmetro $I_cal[n + 1]$ é a soma

das projeções de infectados e recuperados e isso é importante, pois é através dele que representamos o modelo simulado.

Figura 24 – 6° bloco de códigos

```
[10] data_exp = np.loadtxt("data_covid_franca_22do05.txt")
      I_exp = data_exp[:,1]
      t_exp = data_exp[:,0]
      D_exp = np.size(t_exp)
```

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [20].

Na figura 24, no bloco criado para importar os dados para o *software*, o comando *np.loadtxt* lê os dados importados em formato *txt*. Após a importação dos dados cada um é realocado em uma posição específica para cada matriz, onde *I_exp* é a matriz dos dados coletados, *t_exp* é a matriz temporal, que nesse caso são os dias e *D_exp* é o comando para contar o tamanho da matriz de acordo com a quantidade de dados importados.

Até esse ponto, o *software* está quase pronto para realizar as simulações. Já foi preparado o ambiente de importação dos dados reais coletados, as definições, o sistema de equações diferenciais do modelo *SIR* e a resolução do modelo de forma numérica.

A seguir, apresentamos o bloco para o cálculo do erro.

Figura 25 – 7° bloco de códigos

```
[12] def fob(w):

      beta, gamma = w
      erro = 0

      eq_sys(beta, gamma)

      for i in range(D_exp):

          erro = erro + abs(I_exp[i]- I_cal[int(i*24/dt)])

      print(erro, beta, gamma)
      return erro
```

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [20].

Na figura 25, os códigos desse bloco servem para comparar cada resultado real com os valores simulados, dessa forma o *software* nos retorna o erro dos dados reais em relação aos dados simulados.

Figura 26 – 8° bloco de códigos

```
w = [0.00385, 0.0036]

bnds = ((0,0.009),(0,0.0087))

minimize(fob, w, bounds = bnds)
```

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [20].

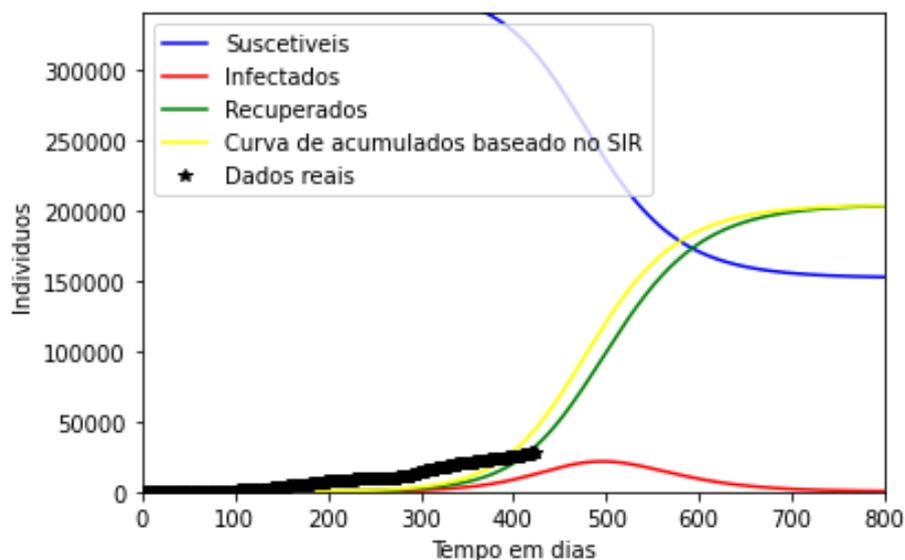
Na figura 26, há o bloco para as limitações do teste. w representa a estimativa inicial de chute da simulação, na qual $\beta = 0.00385$ e $\gamma = 0.0036$. A variável $bnds$, que utiliza o comando *bounds* do *PYTHON*, tem por objetivo aplicar um limite inferior e superior para as variáveis β e γ estabelecidas em w . Dessa forma, é evitado que o programa fique iterando os valores sem chegar em um erro mínimo. O comando *minimize* atribui as limitações de $bnds$ para os parâmetros β e γ colocadas anteriormente. Assim, esse comando busca minimizar o erro entre os dados importados no programa e os dados gerados pela simulação.

Figura 27 – 9° bloco de códigos

```
plt.plot(t,S, label='Susctiveis', color = 'blue')
plt.plot(t,I,label='Infectados', color = 'red')
plt.plot(t,R,label='Recuperados', color = 'green')
plt.plot(t,I_cal, label='Curva de acumulados baseado no SIR', color = 'yellow')
plt.plot(t_exp, I_exp, '*',label='Dados reais', color = 'black')
plt.xlabel("Tempo em dias")
plt.ylabel("Individuos")
plt.legend(loc = 'upper left')
plt.xlim(0,500)
plt.ylim(0,34000)
```

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [26].

Na figura 27, apresentamos o bloco de códigos necessários para gerar graficamente os resultados do modelo e os intervalos de plotagem no eixo x e y .

Figura 28 – Simulação com $\beta = 0.02$, $\gamma = 0.03$ e $bnds = ((0, 0.007), (0, 0.002))$ 

Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line* disponível em [20].

Por fim, a figura 28 a seguir, foi obtida após rodarmos o *software* depois de ter especificado todos os parâmetros necessários. Para a simulação, foram utilizados $\beta = 0.02$, $\gamma = 0.003$ e $bnds = ((0, 0.007)(0, 0.002))$.

O *software* desenvolvido para as simulações do modelo *SIR* nos proporciona 4 curvas, sendo as de cor azul, verde, vermelha e amarela. As curvas em azul, verde e vermelha são as curvas do modelo compartimental *SIR*, geradas de acordo os parâmetros inseridos no programa, a curva em amarelo é a curva que foi adicionada ao modelo, pois os dados reais que serão utilizados para as simulações não excluem os indivíduos que saem do compartimento *I* e vão para o *R*, sendo então necessário esse ajuste para obter a curva de infectados acumulados quando gerarmos os modelos.

3.4.3 Método

Para responder as perguntas levantadas, realizamos simulações utilizando o modelo compartimental *SIR*. A base de dados utilizada para as simulações foram os dados da tabela 5, retirados do boletim epidemiológico da cidade de Franca, disponibilizado por [14]. A seguir apresentamos os passos, parâmetros e constantes utilizadas para realizar as simulações.

Foram observados os boletins epidemiológicos do dia 18/03/2020 até 20/06/2021 e coletado a quantidade de casos confirmados acumulados, dos óbitos acumulados, dos recuperados acumulados, descritos na tabela 5. No período de coleta, verificamos que nos dias 17/08/2021 e 06/03/2021 os arquivos disponibilizados encontravam-se corrompidos e

no dia 21/04/2020 não apresentava o arquivo para consulta. Para contornar essa situação, representamos os dados desses dias por (–) na tabela 5.

Após organizar os dados, foi feita a ambientação do *software* que desenvolvemos para realizar as simulações. O objetivo do *software* é resolver de forma numérica o sistema de equações diferenciais do modelo compartimental *SIR*.

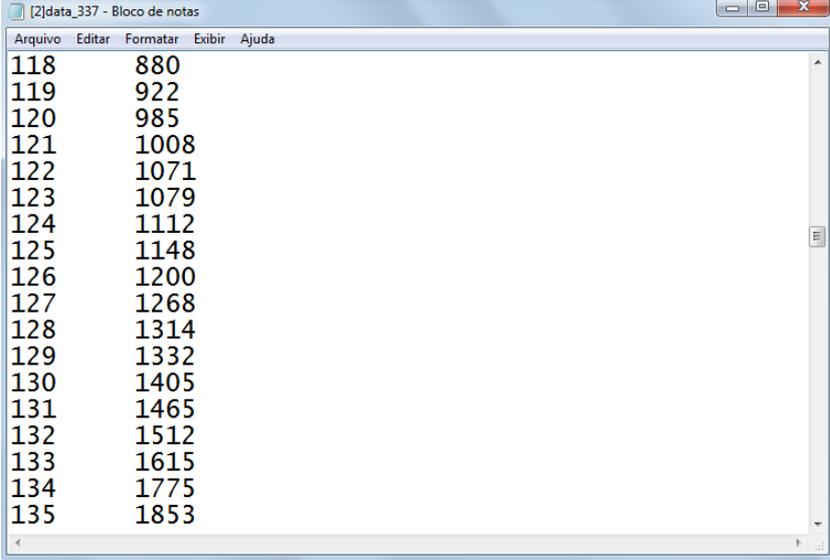
O primeiro passo, antes de rodar o *software*, é definir as principais constantes, sendo elas: $S[0]$, $I[0]$, $R[0]$, $bnds$ e w . As outras constantes não devem ser modificadas, pois são necessárias para que o programa rode normalmente sem alterações.

Para a simulação, tomamos $S[0] = 355901$ que é a população estimada da cidade segundo [7], $I[0] = 1$ que é a quantidade inicial de pessoas infectadas, $R[0] = 0$, $w = [0.005, 0.002]$ e $bnds = ((0, 0.01)(0, 0.01))$.

Definido as constantes e os parâmetros $\beta = 0.005$ e $\gamma = 0.002$, foi feita a importação dos dados da tabela 5. O *software* precisa ser alimentado com dados em formato *txt*, então digitamos os dados dos casos confirmados acumulados da tabela 5 separados em 4 bloco de notas, onde cada bloco tem a quantidade de dados específico para cada período, sendo do 1º dia coletado até o 148º dia, do 1º dia até o 337º, do 1º dia até o 437º dia e do 1º dia até o 451º dia.

Cada bloco de notas recebeu um nome específico por período a ser modelado, sendo: [1]data_148, [2]data_337, [3]data_437 e [4]data_451. Em relação aos dados, nas datas que estão especificadas por (–) na tabela 5, foi assumido o valor dos casos acumulados do dia anterior para essas datas.

Figura 29 – Preparando a importação de dados

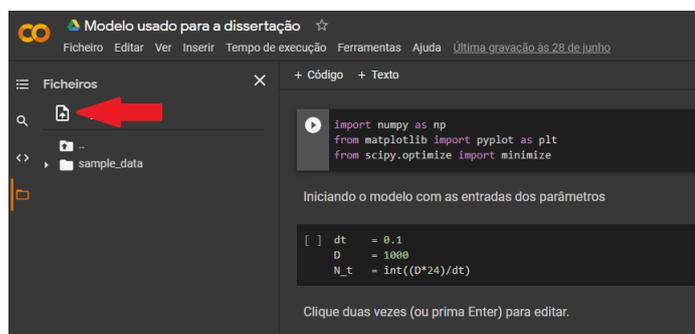


Arquivo	Editar	Formatar	Exibir	Ajuda
118	880			
119	922			
120	985			
121	1008			
122	1071			
123	1079			
124	1112			
125	1148			
126	1200			
127	1268			
128	1314			
129	1332			
130	1405			
131	1465			
132	1512			
133	1615			
134	1775			
135	1853			

Fonte: Elaborado pelo autor usando o bloco de notas do sistema operacional *Windows* 2010.

A figura 29 representa uma parte do bloco de notas [2]data_337 em aberto, na qual a coluna da esquerda representa os dias e a coluna da direita o número de casos confirmados acumulados, por exemplo, passado 120 dias após o primeiro caso confirmado houve 985 casos confirmados acumulados.

Figura 30 – Preparando a importação de dados

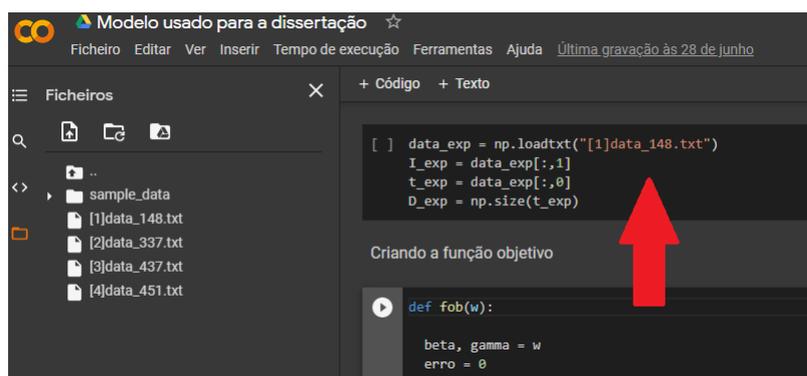


Fonte: Elaborado pelo autor, imagem do *software* desenvolvido.

Após ser preparado todo o ambiente do *software*, falta apenas importar os dados organizados em bloco de notas para o sistema e realizar as simulações. Na figura 30 há o ícone responsável em importar os dados do bloco de notas para o *software*.

Ao clicar no ícone especificado pela seta vermelha na figura 30, uma janela é aberta e nela deve-se especificar qual arquivo se quer importar. Foram importados todos os bloco de notas, [1]data_148, [2]data_337, [3]data_437 e [4]data_451.

Figura 31 – Preparando a importação de dados



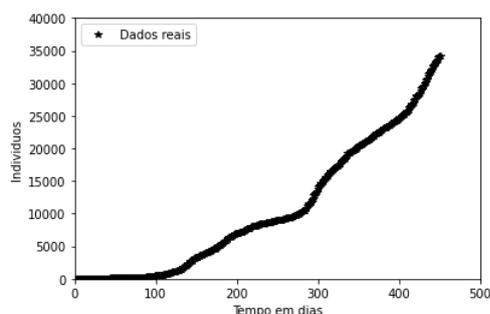
Fonte: Elaborado pelo autor, imagem do *software* desenvolvido.

Após a importação, foi implementado um período de cada vez na variável *data_exp*, pois o *software* desenvolvido gera somente uma simulação. Como exemplo, na figura 31 há a inserção do bloco de notas [1]data_148.txt. Preparado todo o ambiente, rodamos o *software* a fim de realizar as simulações para todos o 4 períodos, com os parâmetros β e γ estabelecidos. A seguir, apresentamos a análise e os resultados obtidos pelas simulações.

3.4.4 Análise e resultados

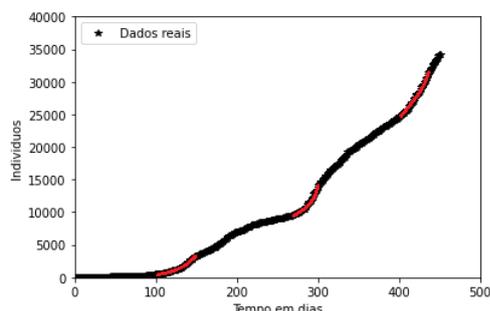
Abaixo, há a representação gráfica da distribuição dos casos confirmados acumulados de pessoas infectadas pelo vírus SARS-CoV-2 no município de Franca de acordo com os dados extraídos da tabela 5.

Figura 32 – Distribuição dos casos acumulados



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software* desenvolvido em 3.4.2.

Figura 33 – Distribuição dos casos acumulados



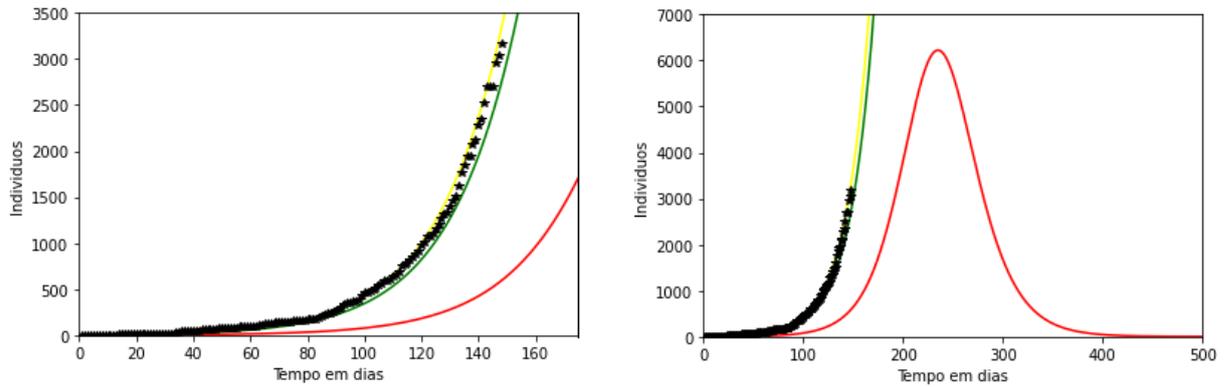
Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software* desenvolvido em 3.4.2.

Ao ser observada a distribuição do número de casos confirmados acumulados dia após dia, verificamos que existem momentos em que o comportamento do número de casos se altera bruscamente e que em alguns períodos a distribuição de casos aparenta se comportar de forma exponencial, como destacado em vermelho na figura 33.

Esses 3 períodos vão do 100^o até o 148^o dia, do 285^o até o 337^o dia e do 401^o até o 437^o dia. Após o 148^o, 337^o e 437^o dia, verificamos uma desaceleração no número de casos, podendo ser reflexo das medidas restritivas mais enérgicas tomadas pelo órgãos públicos responsáveis ao combate da pandemia no município.

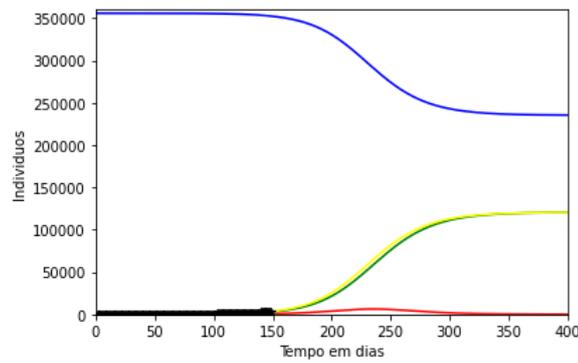
A seguir, expomos as simulações geradas pelo *software* desenvolvido, na qual os resultados foram apresentados com algumas variações de escala. Para as simulações foram utilizados os dados da tabela 5 e tomou-se os parâmetros $\beta = 0.005$, $\gamma = 0.002$ e $bnds = ((0, 0.01), (0, 0.01))$.

Figura 34 – Simulação do 1º dia até o 148º dia



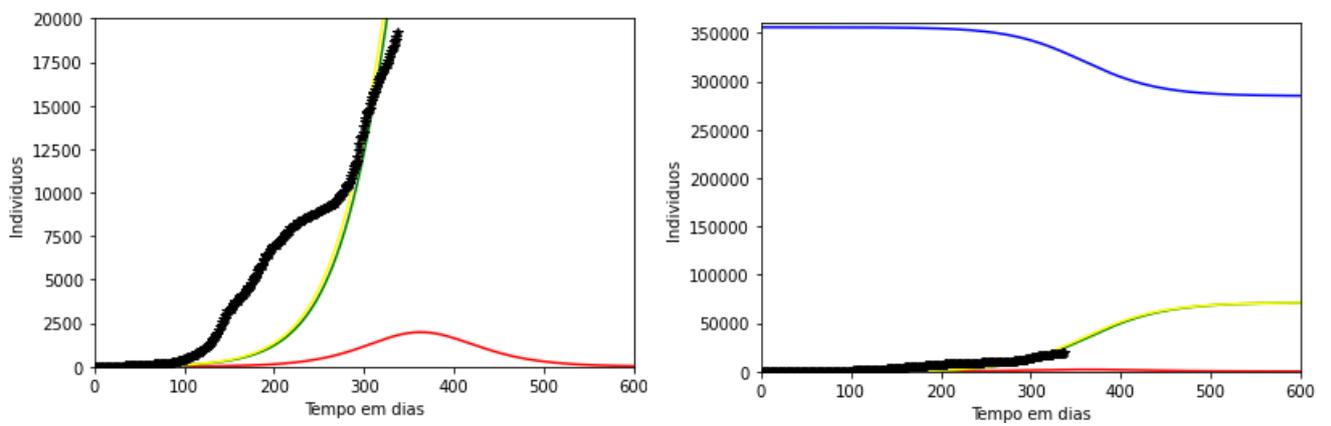
Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software* desenvolvido em 3.4.2.

Figura 35 – Simulação do 1º dia até o 148º dia



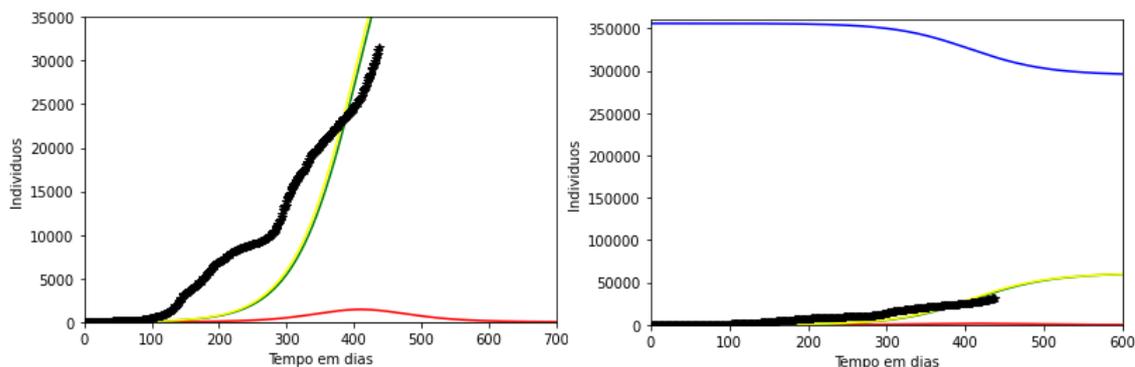
Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software* desenvolvido em 3.4.2.

Figura 36 – Simulação do 1º dia até o 337º dia



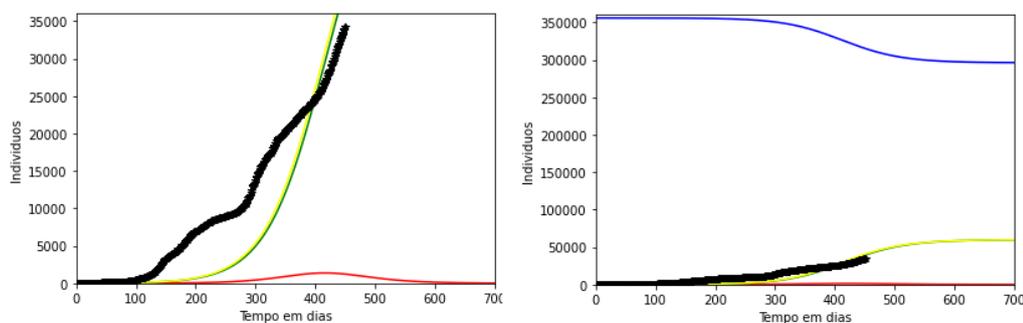
Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software* desenvolvido em 3.4.2.

Figura 37 – Simulação do 1º dia até o 437º dia



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software* desenvolvido em 3.4.2.

Figura 38 – Simulação do 1º dia até o 451º dia



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software* desenvolvido em 3.4.2.

Nas simulações obtidas os pontos na cor preta representam os dados reais importados para o programa até o dia específico, de acordo com cada período. As curvas na cor azul representam a quantidade de pessoas suscetíveis. As curvas em vermelho representam o número de pessoas infectadas no dia. As curvas em verde representam as pessoas recuperados e as curvas em amarelo são as simulações projetadas para o número acumulado de pessoas infectados pelo SARS-CoV-2 no município.

Foi notado que o sistema utilizado para as simulações é consideravelmente eficaz nos momentos iniciais do surto de SARS-CoV-2 no município de Franca. O erro apresentado pelo *software* no período do 1º dia até o 148º dia foi de 3.201. Esse valor é razoável, visto que estamos tratando de uma simulação para uma população bastante dinâmica, acima de 355 mil habitantes e que qualquer mudança no comportamento de vida da mesma acarreta em uma influência direta nos resultados simulados.

Para as simulações dos outros períodos obtemos erros maiores, sendo 762.814 para a simulação do 1º ao 337º dia, 1.745.869 para a simulação do 1º ao 437º dia e 1.845.617 do 1º ao 451º dia. Esses valores de erro são consideravelmente altos em comparação com o erro da simulação do primeiro período.

Tabela 6 – Resultados das simulações, analisando por período

Período do 1º dia até	Momento do pico	Quantidade de pessoas infectadas no momento do pico	Duração da pandemia	Total de pessoas infectadas em toda epidemia
148º dia	15/11/2020 no 235º dia	6.250	450	121.000
337º dia	25/03/2021 no 365º dia	1.990	700	71.400
437º dia	09/05/2021 no 410º dia	1.440	845	61.000
451º dia	14/05/2021 no 415º dia	1.380	860	60.000

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na tabela 6, há os períodos que foram realizadas as simulações com as respectivas informações coletadas, o dia em que ocorreria o pico da pandemia, a quantidade de pessoas infectadas no dia do pico, a previsão de duração da pandemia e o total de pessoas infectadas durante todo período pandêmico.

3.4.5 Conclusão dos resultados

Após as simulações realizadas, obtivemos a seguinte resposta para a primeira pergunta levantada: "Qual seria o número de casos acumulados de pessoas infectadas pelo vírus SARS-CoV-2 no município de Franca - SP caso não houvesse uma desaceleração na taxa de transmissão, nos seguintes períodos: do 1º ao 148º dia, do 1º ao 337º dia e do 1º ao 437º dia?". Com base nos resultados, concluímos que se não houvesse uma desaceleração na taxa de transmissão nos períodos do 1º ao 148º dia, do 1º ao 337º dia e do 1º ao 437º dia, o total de pessoas infectadas pelo vírus SARS-CoV-2 no município seria de 121.000, 71.400 e 61.000 respectivamente, de acordo com as simulações geradas com base nos parâmetros utilizados. Obtemos também uma previsão de pico da COVID-19 e o número de pessoas infectadas nesse dia para cada período simulado, sendo 6.250 pessoas infectadas no dia 15/11/2020 para a simulação do 1º ao 148º dia, 1.990 pessoas infectadas no dia 25/03/2021 para a simulação do 1º ao 337º dia e 1.440 pessoas infectadas no dia 09/05/2021 para a simulação do 1º ao 437º dia.

Foi verificado que o *software* teve uma certa eficiência na simulação em um curto espaço de tempo, visto que o erro obtido do 1º ao 148º dia é bem menor em relação as simulações dos outros períodos. Portanto, o *software* pode ser uma boa ferramenta para simulações em fase inicial de algum novo surto no município.

Para a segunda pergunta, que era se "Houve redução no número total de casos quando comparado os períodos simulados do 1º ao 148º dia em relação a simulação do 1º ao 451º dia?", concluímos que o número de casos confirmados acumulados de pessoas infectadas pelo SARS-CoV-2 no período do 1º ao 148º dia em relação ao período do 1º ao 451º dia, verificamos que há uma projeção de redução de 50,41%, aproximadamente. Esse resultado

pode ser justificado pelas medidas restritivas adotadas pelos órgãos públicos responsáveis pelo combate da pandemia, o que reforça a importância do distanciamento social e que é defendido por [21], além de outras medidas, como, por exemplo, a vacinação, o uso de máscara, da higienização das mãos, do uso de álcool 70%, a suspensão de aulas presenciais e a limitação de atendimento nos estabelecimentos comerciais influenciam diretamente na redução de casos.

4 Uma proposta de atividade em sala de aula envolvendo modelagem

Em muitas aulas de matemática os alunos se veem restritos apenas em copiar as atividades propostas e a decorar fórmulas matemáticas, reflexos de um ensino engessado e ultrapassado do modelo de educação tradicional. O raciocínio lógico, crítico e reflexivo são competências essenciais para o aprendizado do aluno e fundamentais para compreender e atuarem no mundo, segundo [3] página 267. Assim, com o objetivo de contribuir para o ensino de matemática, fomentando as competências contempladas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), neste capítulo foi apresentado a ambientação e o relato de uma atividade envolvendo a modelagem matemática. A atividade foi aplicada em uma sala do sexto ano do Ensino Fundamental em que o autor ministra aulas de matemática.

A atividade desenvolvida visa aproximar o conteúdo matemático com a realidade dos alunos, pois, grande parte da economia da região, gira em torno da agricultura e é uma prática comum na comunidade. A partir deste contexto, emergiu a motivação para trabalhar a modelagem matemática do crescimento do broto de feijão com os alunos.

O desenvolvimento da atividade foi dividida em 4 etapas, sendo elas: o plantio do feijão no algodão, a coleta e a organização dos dados em forma de tabela, a plotagem dos dados coletados no plano cartesiano e a modelagem da função que melhor aproxima os dados coletados.

Para obter a função do modelo, utilizamos o *software Excel* versão 2007. A maioria dos alunos não sabem ou nunca tiveram contato com o programa e devido a pandemia da COVID-19 as aulas estão sendo ministradas de forma remota. Portanto, após a coleta de dados realizada pelos alunos foi marcado um dia de aula para realizarmos uma vídeo chamada via *Google Meet*. Na vídeo chamada conversamos sobre o que acharam da atividade e foi pedido para os alunos ligarem os pontos do plano de forma a se obter uma possível curva para descrever o crescimento do broto. Em seguida, foi selecionado de forma aleatória os dados coletados por 3 alunos, aplicamos no *Excel* e apresentamos os resultados gerados para a sala. Após essa simulação, foram levantadas as seguintes perguntas: "Ao observar a distribuição dos dados no plano cartesiano vocês acham que poderíamos realizar alguma previsão de crescimento do broto caso o seu cotilédone não esteja totalmente seco?" e se "Ao ligarmos os pontos podemos obter uma curva que pode descrever o crescimento do broto? Qual dessas curvas mais se parece com a curva dos seus dados?".

Essa atividade buscou contemplar algumas das competências apontadas pela BNCC, como o desenvolvimento do raciocínio lógico, o espírito investigativo, a argumentação do aluno e a assimilação entre os conhecimentos matemáticos aplicados ao dia a dia.

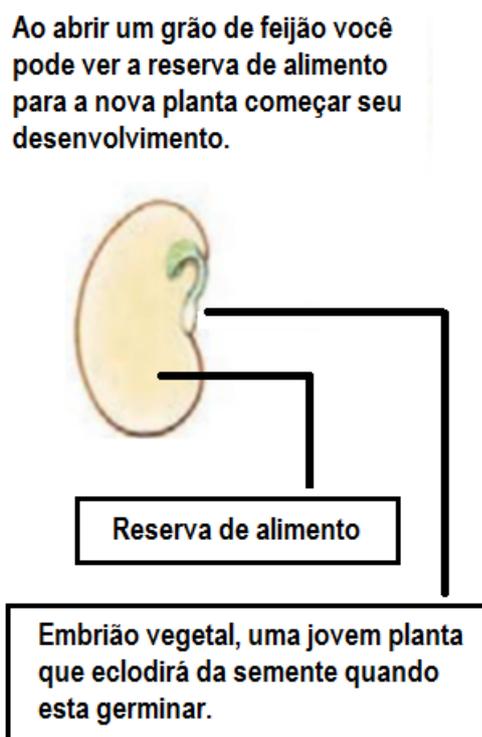
4.1 As características internas e a germinação do feijão

Para fundamentar a atividade trabalhada com os alunos, é necessário compreender a estrutura interna do broto de feijão, de acordo com o apresentado em [18] na página 33.

Ao abrir ao meio um feijão, é possível observar que sua estrutura interna é dividida em duas partes: o embrião, responsável pelo crescimento do broto e a reserva de alimento, que é responsável pela fonte de nutrientes essenciais para o crescimento do embrião.

Caso o feijão seja exposto a condições adequadas de umidade e temperatura, o embrião começa a se desenvolver e esse processo é chamado de germinação. A sua reserva de alimentos dura somente alguns dias, segundo [18] página 33, assim ao seu término o broto precisa buscar nutrientes em outro lugar. Por esse motivo, deve ser replantado na terra, que irá proporcionar as condições necessárias para o seu desenvolvimento. Abaixo há uma representação artística da estrutura interna do feijão a imagem foi retirada de [18] página 33.

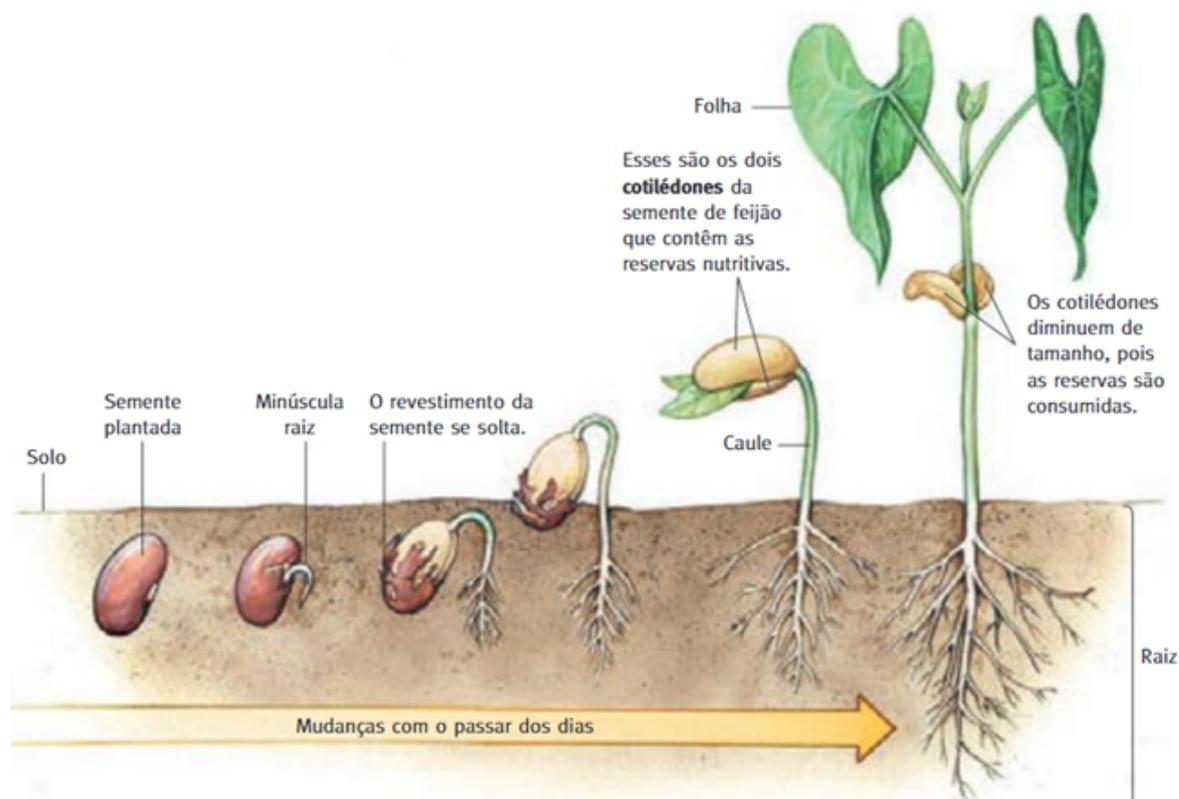
Figura 39 – Estrutura interna do feijão



Fonte: Imagem adaptada de [18], página 33.

Como mencionado anteriormente, o feijão possui uma reserva limitada de nutrientes para a sua germinação, portanto, possui um determinado crescimento específico devido a sua limitação de nutrientes. A sua germinação pode ser dividida em estágios, como mostra a figura a seguir.

Figura 40 – Estágios da germinação do feijão usando sua reserva interna de nutrientes



Fonte: Imagem retirada de [18], página 33.

A figura 40, divide o crescimento do broto em 6 estágios, sendo os principais: o momento de crescimento da raiz (2º estágio), o momento em que os dois cotilédones começam a se abrir, surgindo assim pequenas folhas (5º estágio) e o momento onde os cotilédones diminuem de tamanho e secam (6º estágio). No último estágio, as reservas iniciais do broto foram totalmente consumidas, pois para que ele continue o seu desenvolvimento é preciso replantá-lo na terra, tendo por meio dela a disposição dos nutrientes necessários.

A atividade tem como objetivo os alunos modelarem o crescimento de um broto de feijão. Para isso, eles precisam plantar um broto de feijão, acompanhar o seu crescimento diário, trabalhar a coleta de dados em forma de tabela com o auxílio de uma régua para realizar as medições do crescimento do broto, transportar os dados coletados para um gráfico a fim de facilitar a compreensão da curva que melhor descreva o crescimento do broto, elaborar um relatório diário sobre as mudanças do crescimento e responder as perguntas levantadas em aula.

4.2 Desenvolvimento da atividade

Devido a pandemia da COVID-19, desde março de 2020 foram implementadas as aulas de forma remota em todo o estado de São Paulo, portanto, para o desenvolvimento da atividade foram elaboradas algumas adaptações para que a mesma possa ser aplicada de forma remota aos alunos.

Segundo a BNCC, temos que a área da matemática:

[...] por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas.[3] página 265

Tomando por base o que a BNCC nos traz, a atividade proposta visa a reflexão e indução de conjecturas por meio da análise empírica e a correlação dessa análise com os dados experimentais coletados pelo aluno, dados esses que serão expostos de forma organizada em tabelas e gráficos, proporcionando a formulação de hipóteses.

4.3 Preparativos para o plantio do feijão

Para o plantio do feijão, utilizaremos a forma apresentada por [18] página 32 de forma adaptada. A atividade foi realizada inteiramente *on-line*, porém nem todos os alunos tinham acesso a *internet*, computadores ou celulares. Para auxiliar esses alunos com a atividade do plantio do broto, foi apresentado pelo autor um resumo dos resultados do plantio realizado pelo mesmo, de forma a auxiliá-los na finalização da atividade. Eles tinham acesso a esse material retirando de forma impressa na escola, mas o autor não teve contato com o material produzido por eles e, conseqüentemente, aos seus resultados. Portanto, os resultados apresentados foram somente dos alunos que participaram pelo *Google Meet*. A seguir temos os itens necessários que foram apresentados para os alunos para que possam realizar a atividade.

- 1 copo ou recipiente para o plantio
- 3 feijões
- 1 régua
- Algodão
- Água
- Papel para a elaboração da tabela e o gráfico
- Lápis e canetas

Após apresentarmos a lista de itens para a atividade, introduzimos as orientações para o plantio dos feijões no algodão.

1º Passo

Colocar o algodão dentro do copo, sem pressioná-lo conforme a figura a seguir.

Figura 41 – Plantando feijão, dia 0



Fonte: Imagem elaborado pelo autor.

2º Passo

Após acomodar o algodão no recipiente, deve-se colocar 4 feijões. Os feijões devem ser colocados de forma que não fiquem muito próximos um ao outro, tendo assim um espaçamento considerável entre eles para não correr o risco de as raízes dos brotos se entrelaçarem. Depois do espaçamento dos feijões jogamos um pouco de água, conforme a figura a seguir.

Figura 42 – Plantando feijão, dia 0



Fonte: Elaborado pelo autor.

3º Passo

Acomodados os feijões e regado o algodão, deve-se colocar uma camada fina de algodão por cima e colocar um pouco de água para deixar essa camada úmida, como mostra a figura a seguir.

Figura 43 – Plantando feijão, dia 0



Fonte: Elaborado pelo autor.

4º Passo

Para finalizar, é preciso deixar o recipiente em um local arejado e que em algum momento do dia bata luz solar. Todos os dias e sempre que necessário o recipiente deve ser regado com água.

Terminada a etapa de plantio, passamos para a coleta de dados. Todos os dias foram realizadas medições do broto e os dados foram colocados em uma tabela. Após o segundo dia, os feijões começaram a apresentar a sua minúscula raiz, portanto, visto que o recipiente utilizado era pequeno, os feijões foram replantados em outros quatro recipientes (cada feijão em um) e eles receberam uma numeração representada por P1, P2, P3 e P4, para que os alunos tivessem as anotações corretas do crescimento de cada feijão específico. Na tabela 7, foi apresentado os resultados obtidos da coleta realizada no período de 12 dias.

Tabela 7 – Tamanho dos brotos no período de 12 dias

Dia	Tamanho de P1 em cm	Tamanho de P2 em cm	Tamanho de P3 em cm	Tamanho de P4 em cm
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	0,5	0,4	0	1
3	1,5	1	0,5	1,5
4	1,5	1	0,7	2
5	1,5	1,5	1	3
6	1,5	1,5	1	3
7	2,0	2	1	3,5
8	2,0	2,5	1	5
9	2,5	3	1	7
10	2,5	4,5	2	9
11	2,5	5,5	3,5	13
12	2,5	7	3,5	13

Fonte: Dados de crescimento dos brotos, elaborado pelo autor.

A seguir, foi exposto o acompanhamento fotográfico de alguns dias do crescimento dos brotos em relação aos dias tabelados.

Figura 44 – Plantando feijão, dias 2 e 3

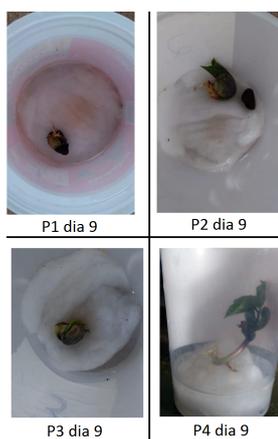


Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir do segundo dia começamos a observar a germinação do embrião em alguns potes. O feijão do *P3* não apresentou desenvolvimento e uma possível hipótese levantada para o ocorrido pode ser as condições climáticas que antecederam no dia 2, pois segundo [18] as condições climáticas influenciam diretamente no desenvolvimento do broto, podendo ser esse o motivo de o feijão do *P3* não ter se desenvolvido. Realizando uma análise visual do crescimento dos brotos no terceiro dia, podemos supor que os brotos dos potes *P1* e *P4* serão os que vão se desenvolver mais rápido, de acordo com o experimento.

A seguir, temos o desenvolvimento dos brotos após 9 dias de plantio no algodão.

Figura 45 – Plantando feijão, dia 9

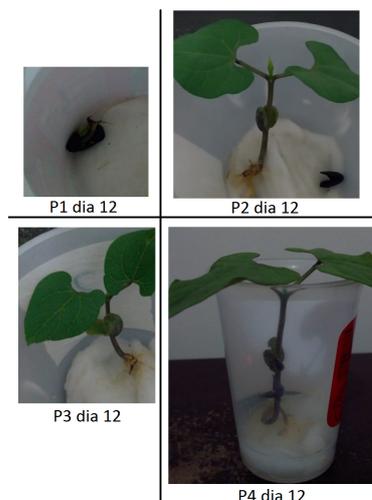


Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 45, vemos claramente que o broto do *P4* está se desenvolvendo bem, já os outros apresentam um desenvolvimento mais lento. Deve-se ressaltar que todos os potes foram colocados no mesmo local e receberam a mesma quantidade de água.

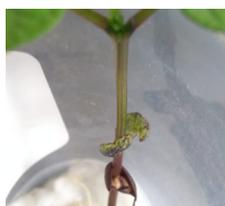
A seguir, apresentamos as fotos dos potes *P1*, *P2*, *P3* e *P4* no 12º dia.

Figura 46 – Plantando feijão, dia 12



Fonte: Elaborado pelo autor.

Notamos que no 11^o e 12^o dia os brotos *P4* e *P1* não se desenvolveram, já os outros dois brotos se desenvolveram significativamente. O fato de o broto *P4* não se desenvolver é um reflexo de suas reservas iniciais de alimento terem se esgotando. Apresentamos na figura 47, como se encontravam os cotilédones de *P4*.

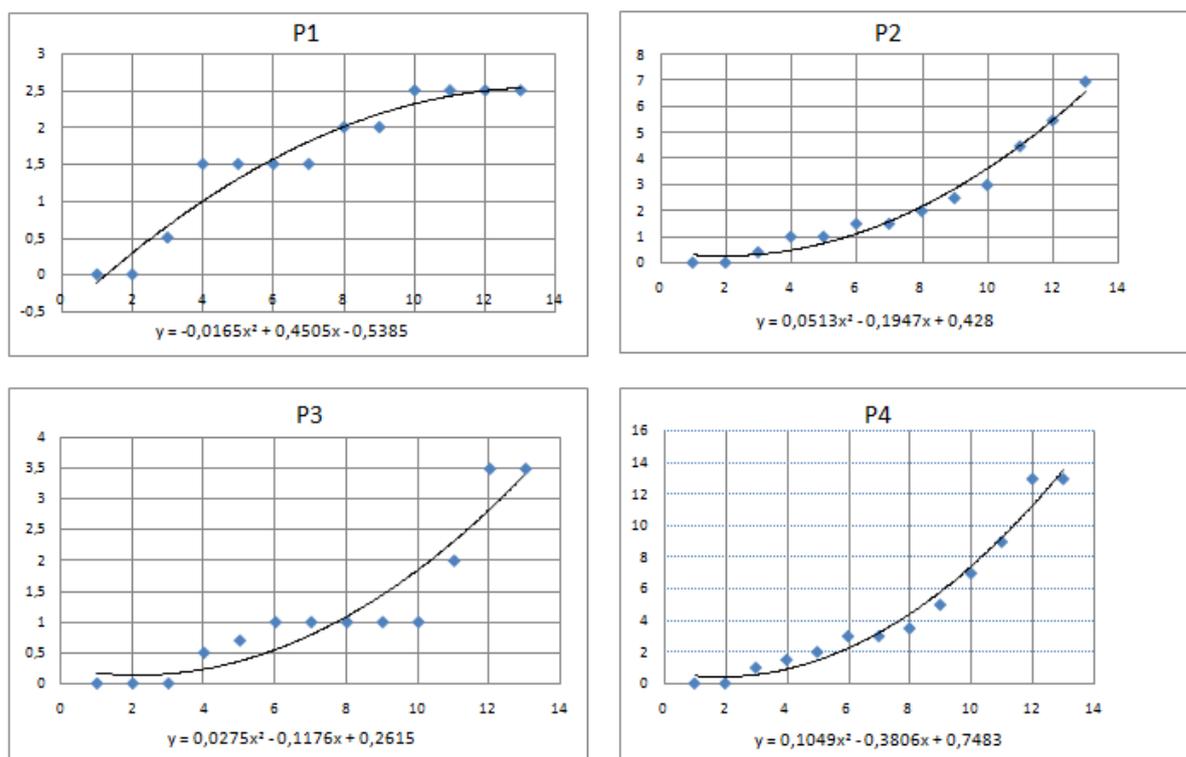
Figura 47 – Cotilédones de *P4*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como as reservas de alimento iniciais do broto de *P4* são limitadas, pode-se prever que nos próximos dias seu crescimento será bastante afetado, chegando a tal ponto onde se manterá em um tamanho estável. O ideal a se fazer para que ele continue a se desenvolver é replantá-lo em um local com terra. Para essa atividade não será necessário replantá-lo, pois o objetivo do trabalho é somente analisar o crescimento do broto até o esgotamento de suas reservas iniciais.

Em posse dos dados coletados, foi possível simular o crescimento do broto usando o *software Excel 2017*, sendo feita somente pelo autor. Na simulação realizada obteve-se curvas que descreveram o seu possível crescimento no período de 12 dias. O *Excel* possui uma função chamada linha de tendência e por meio dela pode-se gerar uma linha de tendência dos dados apresentados. Abaixo há os resultados quando usamos essa função.

Figura 48 – Modelagem do crescimento dos brotos



Fonte: Elaborado pelo autor, usando o *software Excel*.

De acordo com os dados coletados, uma função polinomial descreve bem a distribuição dos dados no tempo. Observa-se ainda que *P2*, *P3* e *P4* seguem uma possível tendência de crescimento, mas o broto *P1* segue uma tendência de estabilidade. Anteriormente, havia sido analisado o broto *P4* e vimos que as suas cotilédones estavam bem secas, característica de quase ou total esgotamento de suas reservas iniciais de alimento. Assim, de acordo com os dados coletados e a análise gráfica e visual do experimento podemos concluir que uma função polinomial representa significativamente o crescimento do broto de feijão, podendo ela ser utilizada para modelar o crescimento de brotos com uma certa confiabilidade.

A seguir, há o relato do autor sobre os resultados da atividade de modelagem matemática aplicada em sala de aula.

4.4 Relato dos resultados da atividade aplicada em sala de aula

Os alunos demonstraram que ficaram bastante animados com a atividade proposta, por ser algo diferente do que estão habituados e começaram a refletir os motivos de como broto conseguiria nascer no algodão, sendo que no dia a dia eles veem as plantas germinarem na terra. A partir desse levantamento, foi aberta uma roda de conversa sobre o que influencia diretamente no desenvolvimento do broto. Foi explicado para eles que o feijão possui

reservas iniciais de alimento e essas reservas são suficientes para que ele se desenvolva, bastando somente água e luz solar. Ressaltou-se que no passar dos dias os cotilédones do broto começam a secar, isso se deve ao consumo das reservas iniciais de alimento que são disponibilizadas por eles para que o broto se desenvolva, portanto se quisermos que o broto continue seu desenvolvimento devemos replantá-lo na terra, local esse que irá disponibilizar os nutrientes necessários para continuar seu desenvolvimento.

No primeiro dia da atividade os alunos relataram que não apresentaram dificuldade em relação ao plantio do broto. Eles plantaram 4 feijões em cada pote diferente e numeraram de 1 até 4. Foi feito o acompanhamento virtual do plantio dos feijões e verificou-se que seguiram corretamente os passos e compreenderam bem quais são os fatores que influenciam diretamente no desenvolvimento dos feijões.

Alguns alunos não possuíam algodão em casa, devido a fatores econômicos, pois grande parte deles pertencem a famílias com baixa renda. Então para contornar essa situação foi proposto que utilizassem algo que consiga reter a água e eles mesmos tiveram a ideia de utilizar o papel higiênico, algo bastante engenhoso e criativo. No mesmo dia após o plantio, foi montado com os alunos uma tabela para a coleta de dados e o modelo é igual a tabela 7 apresentada anteriormente. Em posse da tabela, os alunos ficaram de coletar os dados do crescimento dos feijões durante um período de 12 dias.

Passado 5 dias após o plantio, alguns alunos começaram a ver os resultados e comentaram em aula a sua experiência de como estão realizando a coleta de dados, onde deixaram os feijões e como os regaram. Para alguns alunos os feijões não começaram a se desenvolver e para outros eles tiveram um desenvolvimento bastante considerável. Aproveitando essa oportunidade da discrepância de resultados, foi aberta uma discussão em aula de qual seriam os motivos de alguns feijões não germinarem, levando em consideração o relato de plantio apresentado por cada aluno. Buscando nesse levantamento contemplar o que a BNCC nos trás de que.

[...] ao valorizar as situações lúdicas de aprendizagem, aponta para a necessária articulação com as experiências vivenciadas na Educação Infantil. Tal articulação precisa prever tanto a progressiva sistematização dessas experiências quanto o desenvolvimento, pelos alunos, de novas formas de relação com o mundo, novas possibilidades de ler e formular hipóteses sobre os fenômenos, de testá-las, de refutá-las, de elaborar conclusões, em uma atitude ativa na construção de conhecimentos. [2] página 57

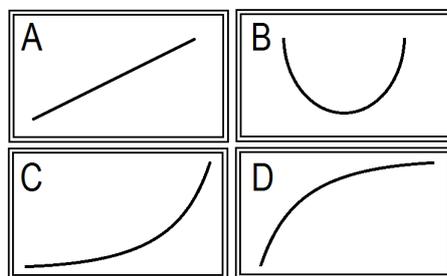
Assim, os alunos puderam levantar hipóteses da proposta apresentada e conseguiram tirar conclusões por meio das observações apresentadas pelos outros colegas. Essa experiência foi bastante proveitosa, pois os alunos discutiram bastante entre eles sobre as hipóteses que eles mesmos levantaram e chegaram em um consentimento unânime sobre os brotos não germinarem. Segundo os alunos, isso ocorreu pela falta de água, pois em alguns dias os feijões que não germinaram não foram regados, visto que a água é um

dos principais fatores que influenciam o desenvolvimento da planta, lembrando que no momento da troca de ideias, da formulação de hipóteses e da conclusão levantada pelos alunos, o autor se manteve imparcial e não interferiu nos momentos da discussão, tornando os próprios alunos protagonistas de seu aprendizado, algo também defendido pela BNCC.

No decorrer dos outros dias os feijões que não tinham germinado começaram a germinar e a atividade pode fluir normalmente através da coleta de dados. A sala possui 2 aulas semanais ministradas via plataforma *Google Meet*, em todo o período desde o início do plantio até os 12 dias estabelecidos para a atividade, sempre foi mantido o diálogo e o questionamento com os alunos sobre os resultados obtidos. Um fato vivenciado e exposto em aula por 3 alunos no décimo primeiro dia intrigou os colegas de sala, pois relataram que os cotilédones de alguns brotos secaram e, até mesmo de um dos alunos, além dela secar se desprende do caule. Nesse dia os alunos ficaram bastante eufóricos e questionaram se o broto iria morrer ou se fizeram algo de errado. Nesse momento fiz a intervenção perguntando para os alunos, qual era a principal função do cotilédone e eles rapidamente formularam a hipótese de que o cotilédone secou pois as reservas se esgotaram, a conversa foi fluindo naturalmente entre os alunos e assim eles mesmos chegaram a uma conclusão com base no conhecimento adquirido nos dias iniciais da atividade.

No último dia da atividade, foi trabalhada a construção do plano cartesiano e para isso foram utilizados os materiais escolares disponíveis. No eixo das ordenadas, foi preciso realizar uma mudança de escala para que a distribuição dos dados ficasse de forma mais harmoniosa. Nesse momento alguns alunos sentiram dificuldade, mas após algumas explicações e apresentação de exemplos todos conseguiram. Em posse do plano cartesiano os alunos começaram a transportar os dados para o mesmo e ficaram livres para pintar o plano e os pontos, tornando assim a atividade mais atrativa e lúdica. Após todos os alunos terminarem de montar o plano e adicionar os dados, foram levantadas as duas perguntas no começo do capítulo.

Figura 49 – Modelo de curvas apresentadas aos alunos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os alunos em posse das curvas apresentadas na figura 49, a tabela de coleta de dados e os pontos do plano, chegou-se ao ápice da atividade que é responder as perguntas levantadas e induzir os alunos levantarem hipóteses e tirar conclusões sobre o crescimento

do broto. Em relação a primeira pergunta todos os alunos concluíram que sim, poderiam chegar a uma possível previsão do crescimento do broto e a justificativa comum entre todos foi que olhando os dados coletados poderíamos fazer esse tipo de conclusão há um padrão no crescimento.

Na segunda pergunta levantada houve uma pequena divergência nas respostas, cerca de 75 % dos gráficos gerados pelos alunos, usando os dados coletados, foram do tipo *C*, 15 % do tipo *D* e 10 % do tipo *A*. Na justificativa os alunos responderam de forma unânime que a curva apresentada melhor descreve o crescimento, pois ao ligar os pontos quase todos eles estão na curva obtida.

Para finalização da atividade, foi pego os dados apresentados por 3 alunos e realizamos nossa própria simulação utilizando o *Excel* e apresentamos em aula, a fim de ilustrar a atividade desenvolvida. Os alunos gostaram bastante do *software* como ferramenta e eles mesmos começaram a perguntar se poderiam utilizar esse recurso para descrever o crescimento do pé de café, algo já esperado pois grande parte da economia da cidade gira em torno das plantações de café. Conversamos nesse momento sobre a ideia exposta e foi proposto que poderíamos realizar essa atividade futuramente.

Ao realizarmos uma análise geral da atividade proposta em sala de aula, desde a orientação do plantio, a coleta, a organização dos dados do crescimento do broto, a elaboração do plano cartesiano, a formulação de hipóteses e as conclusões obtidas pelos alunos, foi possível verificar que os alunos alcançaram com maestria o objetivo almejado que é o de estimular o estudo de modelagem matemática através de uma experiência real, podendo assim reforçar a importância da matemática no dia a dia e que ela não é apenas uma disciplina de decorar equações e fórmulas, mas sim uma ferramenta extremamente útil e que pode ser utilizada no dia a dia.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho abordamos uma breve introdução sobre a importância da matemática na epidemiologia e os modelos desenvolvidos por Malthus e Verhulst, utilizados até hoje devido a sua eficácia. Foram introduzidos alguns dos modelos epidemiológicos padrões existentes, *SIS*, *SIR* e *SEIR*, abordamos a dinâmica entre os compartimentos, o sistema de equações diferenciais que rege cada um e apresentamos o coeficiente de reprodução basal, mais conhecido por R_0 , sendo um parâmetro de extrema importância para determinar se uma doença, em situações iniciais, presente em uma população suscetível está se erradicando, mantendo-se estável ou se ela continua se propagando.

Após o embasamento teórico, realizou-se uma observação da distribuição do número de casos acumulados de infecção pelo vírus SARS-CoV-2 no município de Franca. Após a análise, foi possível verificar que em alguns períodos, caso não houvesse uma desaceleração na taxa de crescimento dos casos confirmados, o número de casos iria crescer de forma exponencial.

Para responder as perguntas levantadas, decidimos aplicar o modelo compartimental *SIR* para modelar as previsões do número de casos confirmados nos períodos desejados. As simulações foram realizadas com o *software* desenvolvido em linguagem PYTHON, buscando resolver o sistema de equações diferenciais do modelo *SIR* de forma numérica, onde os parâmetros utilizados para as simulações foram $\beta = 0.005$ e $\gamma = 0.002$.

Após rodar o *software* obtemos os seguintes resultados: nos períodos do 1º ao 148º dia, do 1º ao 337º dia e do 1º ao 437º dia o total de pessoas infectadas pelo vírus SARS-CoV-2 no município de Franca seria de 121.000, 71.400 e 61.000 respectivamente, caso continuassem a crescer de forma exponencial o número de casos. Se comparar o modelo projetado do 1º ao 148º dia, com o modelo projetado do 1º ao 451º dia, verificou-se que a diferença de indivíduos infectados em todo o período da pandemia seria de 61.000, tendo assim uma redução de 50,41% no número de casos, o que reforça a importância do distanciamento social e o impacto das medidas restritivas na transmissão do vírus SARS-CoV-2 no município.

Também, foi possível verificar que o *software* teve um bom desempenho ao modelar o número de casos em um curto espaço de tempo, apresentando um erro consideravelmente baixo, sendo uma boa ferramenta para modelar a dispersão de novos surtos no município.

Por fim, como proposta no contexto do PROFMAT, foi elaborada e aplicada uma atividade de modelagem matemática utilizando o crescimento do broto de feijão, apresentando o relato dessa atividade aplicada em sala de aula. A atividade foi aplicada em uma sala do sexto ano do Ensino Fundamental em que o autor ministra aulas de matemática. Mediante a aplicação da atividade, concluiu-se que a modelagem matemática é uma ferramenta

bastante eficaz para auxiliar no ensino e aprendizagem nas escolas, além de seu caráter motivacional, pois os alunos veem na prática a utilização da matemática. Ela também é uma ferramenta para o desenvolvimento crítico e reflexivo dos alunos na conjectura e teste de hipóteses, tornando assim a matemática uma disciplina mais atrativa e refletindo diretamente na melhora do aprendizado.

6 Referências

- [1] JUNIOR, D. S. A. **Um Estudo Sobre Epidemiologia Matemática: A Doença de Chagas**. 2002. 115 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada)-Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306496/1/AlmeidaJunior_DilbertodaSilva_M.pdf. Acesso em: 01/04/2020.
- [2] ESCOLA DE FORMAÇÃO. **Currículo Paulista**. Disponível em: http://www.escoladeformacao.sp.gov.br/portais/Portals/84/docs/pdf/curriculo_paulista_26_07_2019.pdf. Acesso em: 14/04/2020.
- [3] EDUCAÇÃO É A BASE. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14/04/2020.
- [4] BONITA, R.; BEAGLEHOLE, R.; KJELLSTROM, T. **Epidemiologia Básica**. 2. ed. 2010. 230 f. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/964545/mod_resource/content/1/Bointa%20-%20epidemiologia%20basica.pdf. Acesso em: 10/08/2020.
- [5] YANG, H. M. **Epidemiologia matemática: estudo dos efeitos da vacinação em doenças de transmissão direta**. Editora Unicamp, 2001. 239 f. Campinas.
- [6] Tavoni, R.; Oliveira, R. Z. G. **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais**. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v02n02a09-os-modelos-de-crescimento-populacional.pdf>. Acesso em: 10/03/2020.
- [7] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **IBGE**. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/sp/franca.html?>. Acesso em: 14/05/2020.
- [8] DADOS SOBRE O ESTADO DE SÃO PAULO. **Wikipédia: a enciclopédia livre**. Disponível: [https://pt.wikipedia.org/wiki/S~ao_Paulo_\(estado\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/S~ao_Paulo_(estado)). Acesso em: 14/05/2020.
- [9] COELHO, F. C. **Entendendo o modelo SIR**. 2020. 8.43 min. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rNFoMqI36g8>. Acesso em: 20/10/2020.

- [10] COELHO, F. C. **Entendendo o R0 e O Limiar Epidêmico**. 2020. 14.25 min. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=G5T9sB.z2Xo>. Acesso em: 23/10/2020.
- [11] COELHO, F. C. **As Limitações do Modelo SIR**. 2020. 11.23 min. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1f7F6l2UZow>. Acesso em: 23/10/2020.
- [12] GEOGEBRA. **Aplicativos matemáticos**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 25/05/2020.
- [13] MEDEIROS, E. F. **Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível**. 2016. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática)- Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/7236/2016-2%20-%20Elisa%20Medeiros.pdf?sequence=1>. Acesso em: 28/05/2020.
- [14] BOLETIM EPEDEMIOLÓGICO DE FRANCA. **Prefeitura municipal de Franca**. Disponível em: <https://www.franca.sp.gov.br/administracao-municipal/administracao-diret-saude/informacoes-covid-19>. Acessado em: 18/03/2020; último acesso em: 20/06/2021.
- [15] FRANCÊS, C. R. L. et al. **COVID-19: Um novo modelo SEIR para países em desenvolvimento – estudo de caso para a Região Metropolitana de Belém**. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1sBFBcHqidOPwUUdpeXknZrJ5gSp83qpS/view>. Acesso em 08/06/2020.
- [16] PROFMAT. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**. Disponível em: <https://www.profmato-sbm.org.br/>. Acesso em: 10/06/2020.
- [17] ROCHA, D. I. C. **Modelos Matemáticos Aplicados á Epidemiologia**. 2012. 124 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Quantitativos em Economia e Gestão)- Faculdade de Economia da Universidade do Porto. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/63680/2/ModelosMatematicosAplicadosaepidemiologia100485006DianaRochaMQEG.pdf>. Acesso em: 20/10/2020.
- [18] CANTO, E. L; Canto, L. C. **Ciências Naturais aprendendo com o cotidiano 6º ano**. Editora Moderna. 2018. 300 f. Disponível em: <https://pnld.moderna.com.br/ciencias/ciencias-naturais-aprendendo-com-o-cotidiano/>. Acesso em: 15/02/2020.

- [19] SANTOS, R. J. **Tópicos de Equações Diferenciais**. 2011. 710 f. Disponível em: <http://mtm.ufsc.br/~krause/topeqdif.pdf>. Acesso em: 12/01/2021.
- [20] Google. **Welcome To Colaboratory**. Disponível em: <https://colab.research.google.com/>. Acesso em: 10/02/2021.
- [21] MINISTÉRIO DA SAÚDE. **Conselho Nacional de Saúde**. Disponível em: <http://conselho.saude.gov.br/recomendacoes-cns/1163-recomendac-a-o-n-036-de-11-de-maio-de-2020>. Acesso em: 13/05/2021.
- [22] DATAÇÃO RADIOMÉTRICA. **Wikipédia: a enciclopédia livre**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Data%C3%A7%C3%A3o_radiom%C3%A9trica. Acesso em: 20/09/2021.

A Apêndice

No apêndice A, serão apresentados os passos usados para a construção das curvas dos modelos *SIS* e *SIR*, do capítulo 3. Todos os gráficos foram gerados no site [12].

A.1 Modelo *SIS*

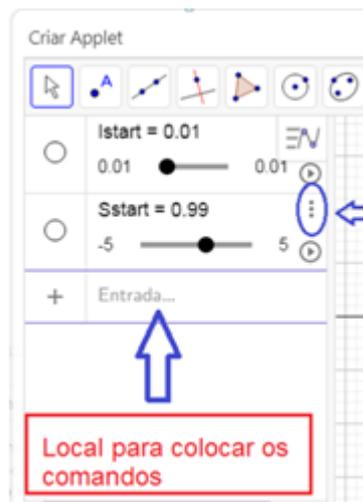
Em 3.1, o modelo *SIS* é expresso pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \gamma \cdot I - \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - \gamma \cdot I \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Assumimos o valor 1 para o parâmetro N no sistema de equações A.1. O modelo depende de uma condição inicial de infectados, inseridos na população suscetível.

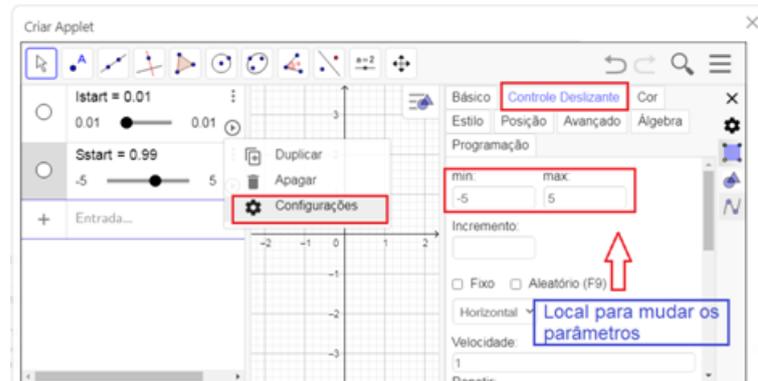
Iniciamos aplicando os parâmetros I e S , chamados de I_{start} e S_{start} (comandos necessários para criar o controle deslizante), descrito na figura 50, atribuindo os valores $I_{start} = 0.01$, $S_{start} = 0.99$ (o *GeoGebra* não lê a vírgula, para valores decimais no *software* deve-se usar o ponto).

Figura 50 – Passos para o gráfico do modelo *SIS* no *GeoGebra*



Fonte: Elaborado pelo autor.

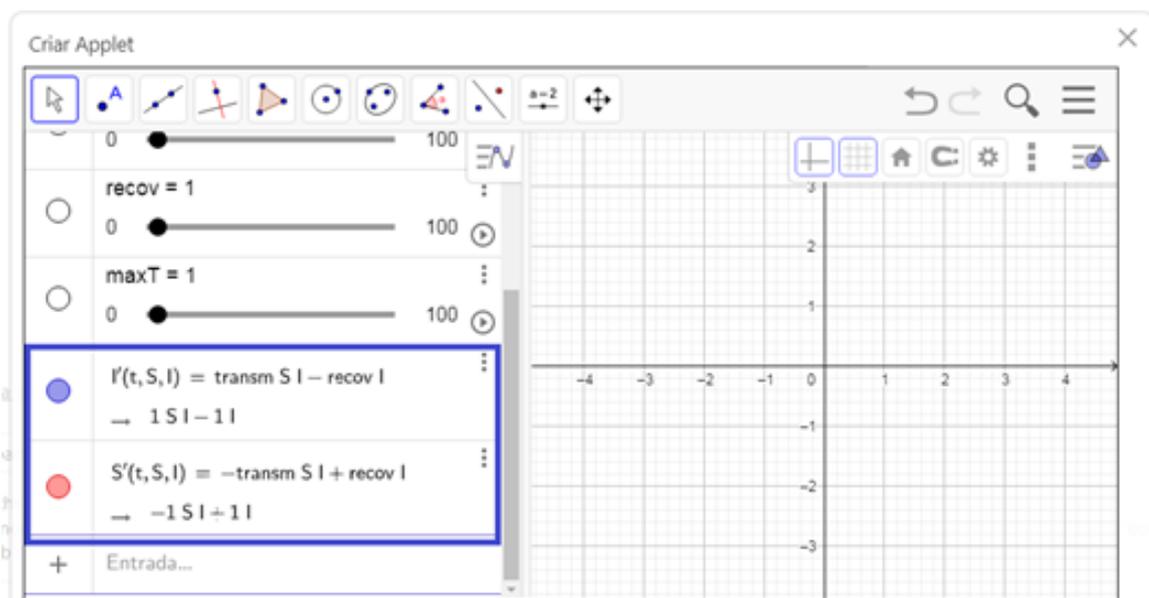
Para modificar o intervalo do controle deslizante, basta clicar nas configurações do parâmetro, que são disponíveis ao clicar nos três pontinhos, destacado pelo círculo azul na figura 50.

Figura 51 – Passos para o gráfico do modelo *SIS* no *GeoGebra*

Fonte: Elaborado pelo autor.

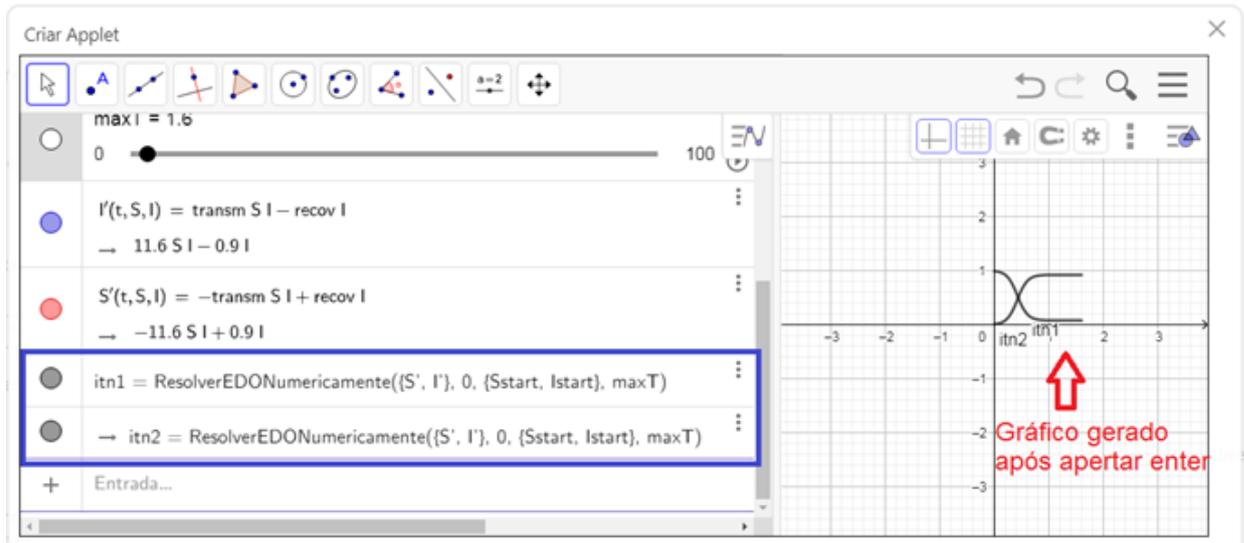
Na figura 51, está destacado o local para modificar o intervalo do controle deslizante. Outros parâmetros com controle deslizante foram adicionados, por serem necessários para descrever a taxa de infecção, a taxa de recuperação e o domínio do gráfico. São eles: $transm$, $recov$ e $MaxT$, respectivamente.

Ao definir os controles deslizantes, partimos para definir as equações do sistemas A.1. Os comandos utilizados estão expressos na figura 52, destacados no quadro em azul.

Figura 52 – Passos para o gráfico do modelo *SIS* no *GeoGebra*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Montado as equações que representam o modelo compartimental *SIS*, é necessário definir o comando que irá resolver de forma numérica as equações apresentadas na figura 52.

Figura 53 – Passos para o gráfico do modelo *SIS* no *GeoGebra*

Fonte: Elaborado pelo autor.

A função “*ResolverEDONumericamente*” é usada para resolver de forma numérica as equações do sistema A.1. Essa função, possui quatro entradas e todas são separadas por vírgula, sendo elas:

1º Lista de derivadas: Definidas anteriormente S' e I' .

2º Abcissa inicial: Introduzimos o valor zero, pois consideramos valores positivos da abscissa.

3º Lista de ordenadas iniciais: Inserimos a partir de que valor das ordenadas será gerado os gráficos, sendo eles a partir de $Istart$ e $Sstart$, definidos anteriormente.

4º Abcissa final: Definimos a abscissa final representada por $maxT$, servindo para determinar o domínio da equação.

Definido todos os parâmetros, o *GeoGebra* automaticamente fornece o gráfico do sistema de equações diferenciais do modelo *SIS*.

A.2 Modelo *SIR*

Apresentado em 3.2, o modelo *SIR* é expresso pelo sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - \gamma \cdot I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma \cdot I \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Basta incrementar o parâmetro R ao modelo já desenvolvido SIS , temos que:

1º Adicionar o valor inicial de recuperados $R_{start}=0$.

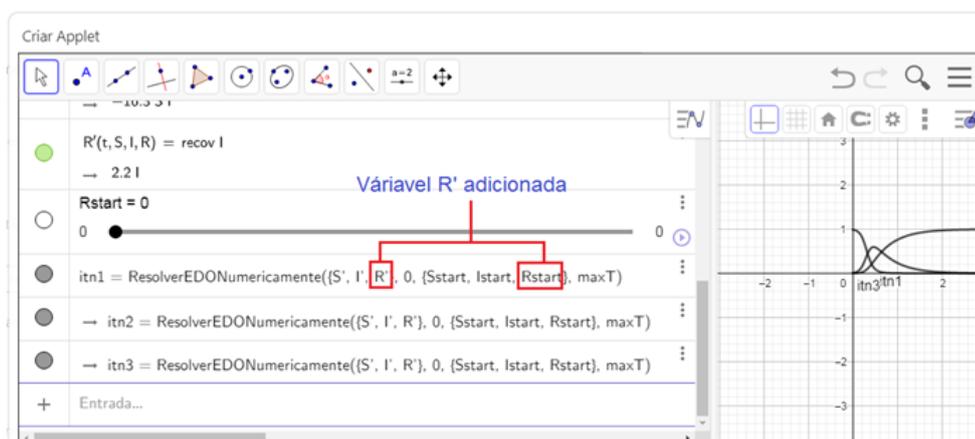
2º Adicionar o parâmetro R nas derivadas S' e I' .

3º Adicionar a equação $R'(t, S, I, R) = recov * I$.

4º Modificar as derivadas conforme o modelo SIR .

Por último, realizar as modificações dos comandos que resolvem de forma numérica as equações. Os comandos devem ficar como o descrito na a figura 54, abaixo.

Figura 54 – Passos para o gráfico do modelo SIR no *GeoGebra*



Fonte: Elaborado pelo autor.

B Apêndice

No apêndice B, foi abordado o método de resolução de uma EDO linear de primeira ordem, que são conceitos essenciais para a compreensão e aplicação dos modelos de Malthus e Verhulst.

O conceito de cálculo diferencial e integral está intimamente ligado com as equações diferenciais. Vários matemáticos e físicos da época, como Isaac Newton (1642 -1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) e os irmãos Jakob Bernoulli (1654 – 1705) e Johann Bernoulli (1667 – 1748), contribuíram significativamente para o desenvolvimento das equações diferenciais no século XVIII. A motivação para o estudo das equações diferenciais na época é devido ao leque de aplicações, por exemplo, na física, astronomia, matemática e vários outros ramos da ciência, segundo [13].

Toda equação diferencial linear de primeira ordem, pode ser escrita da forma:

$$p(t, x) \cdot \frac{dy}{dt} + q(t, x) \cdot y = g(t, x) \quad (\text{B.1})$$

Onde $y = y(t)$ e $p(t, x) \neq 0$

A equação acima, pode ser resolvida em alguns casos, são eles:

- i*– Quando é uma EDO Linear de Primeira Ordem
- ii*–Quando é uma EDO de Bernoulli de Primeira Ordem
- iii*–Quando é uma EDO Separável de Primeira Ordem
- iv*–Quando é uma EDO Homogênea de Primeira Ordem
- v*–Quando é uma EDO Exata de Primeira Ordem
- vi*–Quando é uma EDO Quase Exata de Primeira Ordem

O objetivo deste apêndice é apresentar as soluções da EDO linear de primeira ordem e da EDO separável. Foi abordado somente esses casos por serem necessários para a compreensão dos modelos de crescimento populacional mencionados.

B.1 Solução de uma EDO linear de Primeira Ordem

Segundo [19] página 10, a solução geral de uma EDO de ordem n , em um determinado intervalo I é a família de soluções $y(t)$ no intervalo I , e que a solução particular pode ser obtida da solução geral.

Introduzimos o conceito da solução geral de uma EDO de primeira ordem, ao observar os casos em que $p(t) = 0$ e $p(t) \neq 0$. Alguns exemplos foram apresentados de como

determinar a solução geral e a solução particular, conhecida como PVI (problema do valor inicial).

Segundo [19] página 14, as EDOs de primeira ordem podem ser escritas como:

$$\frac{dy}{dt} + p(t) \cdot y = q(t) \quad (\text{B.2})$$

B.1.1 Solução de uma EDO linear de Primeira Ordem, quando $p(t) = 0$

Caso $p(t) = 0$, temos que a EDO de primeira ordem fica da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dt} = q(t) \quad (\text{B.3})$$

Assim, para resolver a equação basta multiplicar ambos os lados por dt e depois integrar de ambos os lados. Obtendo a solução geral:

$$y(t) = \int q(t) \cdot dt + C \quad (\text{B.4})$$

Exemplo retirado de [19], página 14:

Determine a solução geral da equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \text{sen}(2t) \quad (\text{B.5})$$

A solução geral é dada pela primitiva de $f(t) = \text{sen}(2t)$. Assim, para determinar a solução geral basta multiplicar ambos os lados da equação por dt , obtendo:

$$\frac{dy}{dt} \cdot dt = \text{sen}(2t) \cdot dt \quad (\text{B.6})$$

Como y está em função de t , é possível integrar de ambos os lados, resultando em:

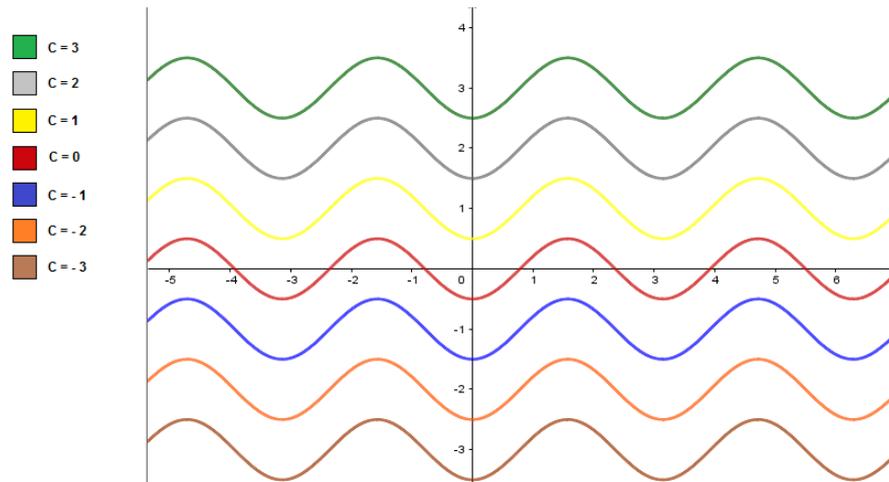
$$y(t) = \int \text{sen}(2t) \cdot dt + C \quad (\text{B.7})$$

$$y(t) = -\frac{\cos(2t)}{2} + C \quad (\text{B.8})$$

A equação B.8 é a solução geral de B.5, na qual C é uma constante arbitrária. Portanto, B.8 proporciona uma família de soluções conforme variamos o valor de C .

Na figura 55 foram apresentadas algumas soluções da equação B.8, variando a constante C .

Figura 55 – Algumas soluções da equação B.8, variando o parâmetro C



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

B.1.2 Solução de uma EDO linear de Primeira Ordem, quando $p(t) \neq 0$

De acordo com [19] página 16, para determinar a solução geral de B.2, quando $p(t) \neq 0$, é preciso definir uma função auxiliar $\mu(t)$.

E segundo [19], a função auxiliar é dada por:

$$\mu(t) = e^{\int p(t) \cdot dt} \tag{B.9}$$

Exemplo retirado de [19] página 18, de como solucionar uma EDO de primeira ordem, quando $p(t) \neq 0$:

Determinar a solução geral da equação diferencial:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t} \cdot y = t \tag{B.10}$$

$p(t) \neq 0$, então não se pode organizar de imediato a equação e integrar de ambos os lados, como foi feito para resolver a equação B.5, antes é preciso determinar o fator integrante, representado pela equação B.9.

Como $p(t) = \frac{2}{t}$, o fator integrante é dado pela equação a seguir:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} \cdot dt} \tag{B.11}$$

$$\mu(t) = e^{2 \cdot \text{Ln}|t|} \tag{B.12}$$

$$\mu(t) = e^{\text{Ln}(t^2)} \tag{B.13}$$

$$\mu(t) = t^2 \quad (\text{B.14})$$

Determinado o fator integrante, e multiplicando de ambos os lados a equação, B.10 por B.14:

$$t^2 \cdot \frac{dy}{dt} + 2 \cdot t \cdot y = t^3 \quad (\text{B.15})$$

O termo à esquerda da equação B.15 é a derivada de $t^2 y(t)$, então reescrevemos B.15, da seguinte forma:

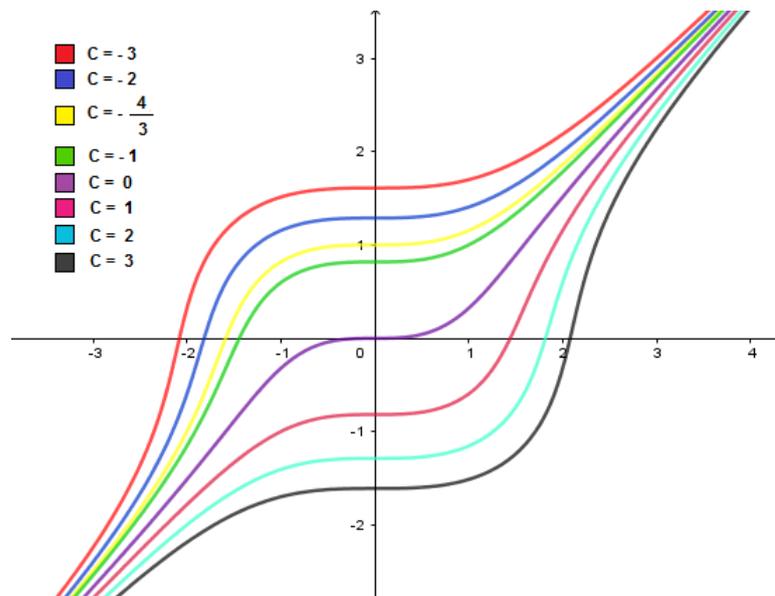
$$\frac{d}{dt} \cdot (t^2 \cdot y(t)) = t^3 \quad (\text{B.16})$$

A equação B.16, remete ao caso de resolver uma EDO de primeira ordem, quando $p(t) = 0$, recaindo no caso apresentado em B.1.1. Para determinar a solução geral, basta integrar de ambos de B.16, resultando:

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{C}{t^2} \quad (\text{B.17})$$

A solução geral de B.10 é a equação B.17. Veja na figura 56, algumas soluções conforme a variação do valor de C da equação B.19.

Figura 56 – Algumas soluções da equação B.17, variando C



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

B.1.3 Solução de uma EDO linear de Primeira Ordem, caso tenha um valor inicial (PVI)

O problema do valor inicial, mais conhecido como PVI, busca determinar a solução geral de uma EDO, conhecendo alguns valores iniciais do problema.

Exemplo retirado de [19], página 21. O problema proposto tem por objetivo determinar a solução da equação B.10, dado o PVI, $y(2) = 3$. Assim, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + \frac{2}{t} \cdot y = t \\ y(2) = 3 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

A solução geral da equação B.10 é dada pela equação B.17, apresentado no exemplo anterior. Falta ainda determinar o valor de C , o que se obtém aplicando o valor inicial $y(2) = 3$, na solução geral, resultando:

$$y(2) = \frac{(2)^2}{4} + \frac{C}{(2)^2} \quad (\text{B.19})$$

Onde:

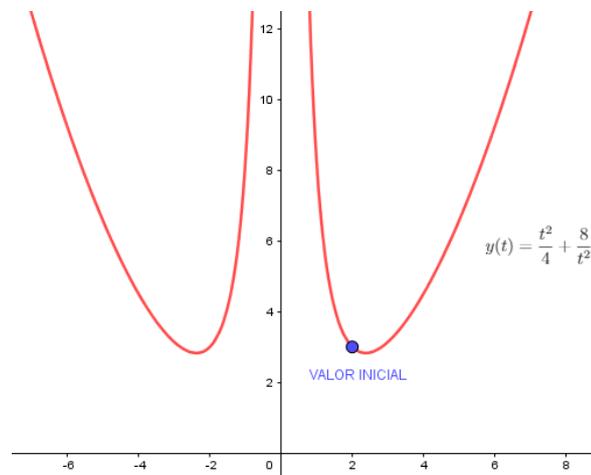
$$C = 8 \quad (\text{B.20})$$

Portanto, a solução geral do PVI é dada por:

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{8}{t^2} \quad (\text{B.21})$$

Abaixo, a representação da curva que descreve a equação B.21.

Figura 57 – Algumas possíveis soluções da EDO variando o parâmetro C



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].

B.2 Solução de uma EDO Separável de Primeira Ordem

De acordo com [19] página 25, uma EDO é separável quando pode ser escrita da seguinte forma:

$$g(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f(x) \quad (\text{B.22})$$

Seja:

$$h(y) = \int g(y) \cdot dy \quad (\text{B.23})$$

Derivando B.23, de ambos os lados em função de y , obtemos:

$$\frac{dh}{dy} = g(y) \quad (\text{B.24})$$

Substituindo B.24, na equação B.22:

$$\frac{dh}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f(x) \quad (\text{B.25})$$

Temos que:

$$\frac{d}{dx} h(y(x)) = \frac{dh}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{B.26})$$

Então, pode-se reescrever B.25 da seguinte forma:

$$\frac{d}{dx} \cdot h(y(x)) = f(x) \quad (\text{B.27})$$

A equação B.27, é do mesmo tipo que a equação B.3, onde $Y(x) = h(y(x))$. Assim, para determinar a solução geral de B.27, basta integrar de ambos os lados, obtendo a solução implícita:

$$h(y(x)) = \int f(x) \cdot dx + C \quad (\text{B.28})$$

Outra forma de obter a solução geral de B.22, seria integrar de ambos os lados em função de x . Bastando apenas resolver as integrais:

$$\int g(y) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + C \quad (\text{B.29})$$

A equação B.29, pode ser escrita da forma:

$$\int g(y) \cdot y' \cdot dx = \int f(x) \cdot dx + C \quad (\text{B.30})$$

Substituindo $y' \cdot dx$ por dy , temos:

$$\int g(y) \cdot dy = \int f(x) \cdot dx + C \quad (\text{B.31})$$

Resultando em uma situação onde é possível determinar a solução geral da equação B.22.

Resolução de uma EDO linear separável de primeira ordem e a representação gráfica com alguns valores da constante C .

Seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \quad (\text{B.32})$$

Reescrevendo B.32, obtemos:

$$x^2 - (1 - y^2) \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad (\text{B.33})$$

A equação B.33, é uma EDO separável. Para determinar a sua solução geral, basta integrar em função de x de ambos os lados da igualdade, obtendo:

$$\int x^2 \cdot dx - \int (1 - y^2) \cdot dy = C_1 \quad (\text{B.34})$$

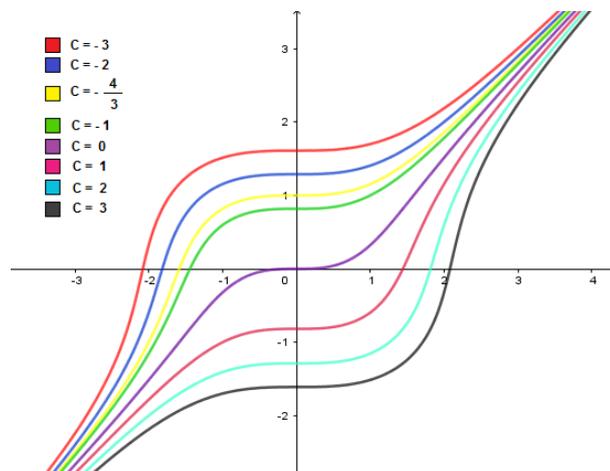
$$\frac{x^3}{3} + C_2 - y + C_3 - \frac{y^3}{3} + C_4 = C_1 \quad (\text{B.35})$$

Atribuindo, $C = C_1 - (C_2 + C_3 + C_4)$ em B.35, temos:

$$\frac{x^3}{3} - y - \frac{y^3}{3} = C \quad (\text{B.36})$$

Portanto, B.36 é uma solução geral de B.32. Foram elaboradas algumas curvas de B.36, ao variarmos C .

Figura 58 – Algumas soluções da equação B.36, variando o parâmetro C



Fonte: Elaborado pelo autor usando o *software on-line GeoGebra*, disponível em [12].