

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**PONTOS NOTÁVEIS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS
DOS NÚMEROS COMPLEXOS**

Daiane Portes Neves Cantalogo



Uberlândia-MG

2022

Daiane Portes Neves Cantalogo

**PONTOS NOTÁVEIS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS
DOS NÚMEROS COMPLEXOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de concentração: Matemática

Linha de pesquisa: Geometria

Orientador(a): Ana Carla Piantella



Uberlândia-MG

2022

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C229 Cantalogo, Daiane Portes Neves, 1985-
2022 PONTOS NOTÁVEIS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DOS NÚMEROS
COMPLEXOS [recurso eletrônico] / Daiane Portes Neves
Cantalogo. - 2022.

Orientador: Ana Carla Piantella.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.88>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Matemática. I. Piantella, Ana Carla ,1978-
(Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-
graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
 Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática - Mestrado
 Profissional em Rede Nacional
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
 Telefone: (34) 3230-9452 - www.famat.ufu.br - profmat@famat.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

| | | | | | |
|------------------------------------|--|-----------------|-------|-----------------------|-------|
| Programa de Pós-Graduação em: | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU | | | | |
| Defesa de: | Dissertação de Mestrado Profissional, 10, PROFMAT | | | | |
| Data: | Dez de fevereiro de dois mil e vinte e dois | Hora de início: | 15:30 | Hora de encerramento: | 17:30 |
| Matrícula do Discente: | 11912PFT007 | | | | |
| Nome do Discente: | Daiane Portes Neves Cantalogo | | | | |
| Título do Trabalho: | Pontos notáveis: uma abordagem através dos números complexos | | | | |
| Área de concentração: | Matemática | | | | |
| Linha de pesquisa: | Geometria e Topologia | | | | |
| Projeto de Pesquisa de vinculação: | Não há | | | | |

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), assim composta pelas professoras doutoras: Michelle Fernanda Pierri Hernandez - DCM/FFCLRP/USP; Lígia Laís Fêmina - FAMAT/UFU e Ana Carla Piantella -FAMAT/UFU, orientadora da candidata.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Ana Carla Piantella, apresentou a Comissão Examinadora e a candidata agradeceu a presença de todas. Posteriormente, a presidente concedeu à Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação da Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir a senhora presidente concedeu a palavra para as examinadoras que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando a candidata:

Aprovada

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Michelle Fernanda Pierri Hernandez, Usuário Externo**, em 10/02/2022, às 17:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ligia Lais Femina, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/02/2022, às 17:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ana Carla Piantella, Professor(a) do Magistério Superior**, em 10/02/2022, às 17:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3357251** e o código CRC **7F1B63AE**.

“Os números complexos são de extrema importância para a matemática, pois eles nos auxiliam no entendimento de como é possível a existência de uma raiz quadrada de um número negativo.”
(Autor desconhecido)

Agradecimentos

À Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

À esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que tornou esta jornada possível.

À minha orientadora Profa. Dra. Ana Carla Piantella, pelo suporte neste período conturbado de pandemia, pelas suas correções, paciência e muitos incentivos.

Agradeço a todos os professores por me ensinarem e contribuírem de forma ímpar para minha formação.

Aos meus pais, João Batista e Elza, pelo amor, incentivo, apoio, cuidado e por estarem sempre ao meu lado.

Ao meu esposo Bruno Raphael por cuidar e amparar nossos filhos Matheus e Ana Clara, por dar apoio, suporte e principalmente por sua compreensão.

Aos meus sogros Fausto e Elza Aparecida pelo apoio, incentivo e cuidado.

Aos meus colegas de turma, pelas trocas de experiências e apoio que foram essenciais para que eu chegasse até aqui.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigada.

CANTALOGO, D.P.N..PONTOS NOTÁVEIS: UMA ABORDAGEM ATRAVÉS DOS NÚMEROS COMPLEXOS. 2022. 124p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

A presente dissertação tem por objetivo estudar a teoria básica dos números complexos e sua interpretação geométrica, enfatizando sua aplicação em alguns resultados sobre pontos notáveis do triângulo. Apresentaremos duas versões para a demonstração do Teorema do círculo dos nove pontos e do Teorema de Napoleão, sendo uma delas utilizando conceitos da geometria plana e, a outra, a teoria de números complexos.

Palavras-chave: Pontos notáveis, geometria, números complexos, círculo dos nove pontos, Teorema de Napoleão .

CANTALOGO, D.P.N. TRIANGLE CENTERS: AN APPROACH THROUGH COMPLEX NUMBERS.
2022. 124p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

This dissertation aims to study the basic theory of complex numbers and its geometric interpretation, emphasizing its application in some remarkable results on the centers of a triangle. We will present two versions for the proof of the nine-point circle Theorem and Napoleon Theorem, one using concepts of plane geometry and the other the theory of complex numbers.

Keywords: Centers of a triangle, geometry, complex numbers, circle of nine points, Napoleon's theorem.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Preliminares de Geometria Plana | 4 |
| 2.1 | Pontos notáveis de um triângulo | 4 |
| 2.1.1 | O Baricentro (Centróide) | 5 |
| 2.1.2 | O Circuncentro | 10 |
| 2.1.3 | O Ortocentro | 12 |
| 2.1.4 | O Incentro e os três Excentros | 14 |
| 2.2 | Ângulos Inscritos em um arco | 17 |
| 2.3 | O Teorema de Napoleão | 24 |
| 2.4 | Círculo dos Nove Pontos | 26 |
| 3 | Números Complexos | 30 |
| 3.1 | Definição de Números Complexos | 30 |
| 3.2 | Números complexos na forma algébrica | 34 |
| 3.3 | Conjugado de um número complexo | 36 |
| 3.4 | O Plano Complexo | 45 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.5 | Forma polar de um número complexo | 48 |
| 3.6 | As raízes n-ésimas da unidade | 59 |
| 4 | Aplicações dos números complexos à Geometria Plana | 63 |
| 4.1 | Semelhança de triângulos | 63 |
| 4.2 | Equação de reta | 73 |
| 4.3 | Pontos notáveis de um triângulo | 76 |
| 4.4 | O Teorema de Napoleão e Ptolomeu-Euler | 83 |
| 4.5 | O Círculo dos Nove Pontos | 94 |
| 5 | Aplicações em sala de aula | 101 |
| 5.1 | Primeira Aula | 101 |
| 5.1.1 | Pontos Notáveis de um Triângulo | 102 |
| 5.2 | Segunda Aula | 105 |
| 5.2.1 | Multiplicação entre dois números complexos | 105 |
| 5.2.2 | Raízes de $z^3 = 1$ | 106 |
| 5.2.3 | Semelhança de triângulos | 107 |
| | Referências | 110 |

Lista de Figuras

| | |
|--|----|
| 2.1 Base média do triângulo | 5 |
| 2.2 Divisão em partes iguais | 6 |
| 2.3 Extensão do segmento para divisão em partes iguais | 7 |
| 2.4 Prolongamento do segmento AG | 9 |
| 2.5 Paralelogramo $BFCG$ | 9 |
| 2.6 Mediatriz | 11 |
| 2.7 Triângulo $A'B'C'$ | 13 |
| 2.8 Paralelogramos formados | 13 |
| 2.9 Incentro | 16 |
| 2.10 Pontos concíclicos | 19 |
| 2.11 Ângulo inscrito (1) | 19 |
| 2.12 Ângulo inscrito (2) | 20 |
| 2.13 Ângulo inscrito (3) | 20 |
| 2.14 D é ponto interno da circunferência | 22 |
| 2.15 D é ponto externo da circunferência | 22 |
| 2.16 D é ponto da circunferência | 23 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.17 | Condição de conciclicidade | 23 |
| 2.18 | Ângulo no ponto O | 25 |
| 2.19 | Teorema de Napoleão | 26 |
| 2.20 | Nove pontos concíclicos | 27 |
| 2.21 | Retângulo formado (1) | 27 |
| 2.22 | Retângulo formado (2) | 28 |
| 2.23 | Retângulo formado (3) | 28 |
| 2.24 | Triângulos retângulos formados | 29 |
| 2.25 | O círculo dos nove pontos | 29 |
| 3.1 | Representação de z no Plano Complexo | 45 |
| 3.2 | Representação da soma de vetores no Plano Complexo | 46 |
| 3.3 | Representação de $z + w$ no Plano Complexo | 46 |
| 3.4 | Produto do comprimento do vetor por c | 47 |
| 3.5 | Representação do vetor $z - w$ | 47 |
| 3.6 | Representação do ponto médio do segmento $z_1 z_2$ | 48 |
| 3.7 | Forma polar de um número complexo | 49 |
| 3.8 | Imaginário Puro e Real | 50 |
| 3.9 | As raízes de w | 51 |
| 3.10 | Triângulo equilátero com vértices $(1, 0)$, w e w^2 | 51 |
| 3.11 | Representação do produto de dois números complexos | 52 |
| 3.12 | Multiplicação por i^2 | 55 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.13 | Quociente de números complexos | 56 |
| 3.14 | Triângulos semelhantes $\Delta O1z_1$ e ΔOz_2z_3 | 57 |
| 3.15 | Triângulos semelhantes ΔOz_2z_1 e $\Delta O1z_4$ | 58 |
| 3.16 | Exemplo do quociente z_1/z_2 | 58 |
| 3.17 | Raízes de $z^3 = 1$ | 62 |
| 4.1 | Orientação de triângulos | 64 |
| 4.2 | Semelhança de triângulos (com orientação oposta) | 68 |
| 4.3 | Baricentro de um triângulo | 79 |
| 4.4 | Exemplo | 83 |
| 4.5 | Pontos concíclicos (ou colineares) | 87 |
| 4.6 | Exemplo - Pentágono Regular | 90 |
| 4.7 | P é ponto médio do arco \widehat{CD} | 91 |
| 4.8 | Teorema de Clifford | 92 |
| 4.9 | Círculo dos nove pontos (1) | 94 |
| 4.10 | Círculo dos nove pontos (2) | 95 |
| 4.11 | Círculo dos nove pontos (3) | 95 |
| 4.12 | Círculo dos nove pontos (4) | 96 |
| 4.13 | Círculo dos nove pontos (5) | 97 |
| 4.14 | Círculo dos nove pontos (6) | 98 |
| 4.15 | A Reta de Euler | 99 |
| 5.1 | Baricentro | 102 |

| | |
|--|-----|
| 5.2 Circuncentro | 103 |
| 5.3 Ortocentro | 103 |
| 5.4 Produto de dois números complexos | 106 |
| 5.5 Raízes de $z^3 = 1$ | 107 |
| 5.6 Semelhança de $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3$ | 109 |

Introdução

A teoria dos números complexos representa um assunto muito importante, apesar da demora em ter sido aceita pela comunidade matemática, pois se achava algo muito estranho falar em raiz de um número negativo. Até no século XVIII as equações quadráticas que não tinham soluções reais eram evitadas pelos matemáticos, que imediatamente já consideravam tais equações como insolúveis em \mathbb{R} .

De acordo com a bibliografia [5], relacionada aos números complexos, estes surgiram nos trabalhos de Girolamo Cardano (1501 -1576), no século XVI, na sua tentativa de resolver equações cúbicas. Na mesma época, o matemático Rafael Bombelli (1526 - 1573) também na busca em resolver equações de grau inferior a quatro, se deparou com raiz quadrada de número negativo. Ele não entendia o motivo de seus cálculos darem certo usando tal raiz, mas mesmo assim continuava fazendo suas contas. Apesar de os matemáticos do século XVI perceberem que as raízes de números negativos eram úteis, seu uso estava imbuído de um certo desconforto, uma vez que não conseguiam dar um significado geométrico a esses números. Quem introduziu o número $\sqrt{-1}$ e o símbolo i foi Leonhard Euler (1707 - 1783) em seu livro "Elements of Algebra" onde escreveu:

“apesar disso, esses números se apresentam à mente; eles existem em nossa imaginação e ainda temos uma ideia suficiente deles; ... nada nos impede de fazer uso desses números imaginários e empregá-los no cálculo”. (Euler, 1765)

Após isso, Caspar Wessel (1745 - 1818) e Jean Robert Argand (1768 -1822) contribuíram com o desenvolvimento da teoria publicando trabalhos em que os números complexos são finalmente associados a pontos no plano e o significado geométrico das operações desse números foi desvendado. A aceitação

dos números complexos veio com os trabalhos do importante matemático Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), nos quais também associou os complexos com os pontos do plano e, dentre outras coisas, também os utilizou para provar resultados de Geometria Plana. Detalhes sobre toda a história dos números complexos podem ser encontrados em [5].

Historicamente, podemos ver como foi difícil e demorada a aceitação dos números complexos pela comunidade matemática. Apesar disso ter ocorrido centenas de anos atrás, existe algo em comum com a atualidade, a saber, o estranhamento dos alunos em relação à teoria dos números complexos. Sobre isso, na 55ª edição da Revista do Professor de Matemática [2], o professor José Paulo Carneiro fez um comentário muito pertinente e muito real para os dias de hoje:

“Os números complexos ocupam uma posição singular no ensino de Matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, por serem considerados como “assunto elementar” de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo taxados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis. De fato, que utilidade poderiam ter objetos cuja existência é motivada, logo no primeiro contato, pela capacidade que possuem de fornecer uma solução “imaginária” para uma equação que “sabemos” que não tem solução, como nos foi antes demonstrado várias vezes? Pois é assim que quase sempre aprendemos e ensinamos os números complexos”. (CARNEIRO, 2004)

Em geral, a forma como os números complexos são apresentados nas escolas segue a linha de que tais números surgiram (e são necessários) para encontrarmos soluções de equações quadráticas com coeficientes reais cujo discriminante é negativo. O significado geométrico por detrás dos números complexos é pouco abordado e, menos ainda é discutido a respeito das várias aplicações desses números à geometria plana.

Em busca de uma motivação para a aprendizagem de números complexos, esse trabalho tem por objetivo mostrar a importância dos números complexos e sua forte ligação com a geometria plana, apresentando resultados sobre semelhança de triângulos e resultados envolvendo pontos notáveis, tudo sob o ponto de vista da teoria dos números complexos. Um outro ponto importante que queremos abordar nesse trabalho é a questão da interdisciplinaridade. Com esse tipo de abordagem que une a geometria aos números complexos, é possível mostrar aos alunos que na Matemática os assuntos não são dissociados como parecem ser, mas podem sim estarem completamente relacionados.

Em relação ao ensino, observa-se que após uma revisão sobre pontos notáveis e sobre os conceitos básicos de números complexos, os resultados apresentados podem ser aplicados aos alunos do ensino

médio. Além disso, o professor pode utilizar de uma ferramenta computacional, como o Geogebra, por exemplo, para ajudar no entendimento e visualização do que está sendo proposto.

O trabalho é estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 apresenta-se alguns resultados da geometria plana, a saber, os pontos notáveis de um triângulo (baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro), todos eles através uma abordagem puramente geométrica. Além disso, mostra-se uma solução geométrica para o Teorema de Napoleão e o Teorema do Círculo dos Nove Pontos. No Capítulo 3 introduz-se os números complexos e a sua teoria básica, sua forma algébrica e polar, conjugado e módulo com suas propriedades, o plano complexo, produto e quociente de números complexos, a fórmula de DeMoivre e as raízes n -ésimas da unidade. No Capítulo 4, discuti-se algumas aplicações de números complexos à geometria plana. Demonstra-se os resultados apresentados no Capítulo 2 sobre os pontos notáveis do triângulo e os Teoremas de Napoleão e do Círculo de Nove Pontos sob a abordagem dos números complexos. Por fim, no Capítulo 5 apresenta-se um plano de aula com algumas aplicações dos números complexos à geometria vistas nos capítulos anteriores.

Preliminares de Geometria Plana

Neste capítulo enuncia-se conceitos e resultados preliminares de geometria plana relacionados aos pontos notáveis de um triângulo. Além disso, apresenta-se demonstrações geométricas para o Teorema do círculo dos nove pontos e para o Teorema de Napoleão. Esse capítulo é baseado nos livros [3], [4] e [6].

De início, algumas notações utilizadas ao longo do capítulo. A reta que passa pelos pontos A e B será denotada por \overleftrightarrow{AB} . O segmento com extremidade nos pontos A e B será denotado por AB e a medida do segmento AB será indicada por \overline{AB} . Simbolizado por $\triangle ABC$ o triângulo cujos vértices são os pontos A , B e C .

2.1 Pontos notáveis de um triângulo

Nesta seção apresenta-se as definições e resultados preliminares referentes aos pontos notáveis de um triângulo. O primeiro de tais pontos é o baricentro. Utilizar-se vários resultados sobre congruência e semelhança de triângulos para maiores detalhes consultar [3].

2.1.1 O Baricentro (Centróide)

Lema 2.1

Sejam D e E os pontos médios dos lados AB e AC do $\triangle ABC$. Então

$$DE \parallel BC \text{ e } \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}.$$

Demonstração: Seja F um ponto da semirreta DE , tal que $\overline{EF} = \overline{DE}$. Assim, por construção do ponto F , temos que $\overline{EF} = \overline{DE}$ e, além disso, $\widehat{DEA} = \widehat{EFC}$, por serem ângulos opostos pelo vértice. Por hipótese, tem-se que $\overline{AE} = \overline{EC}$.

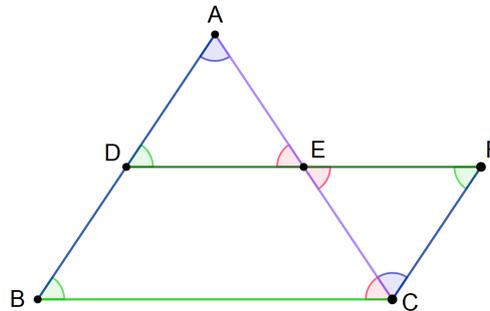


Figura 2.1: Base média do triângulo

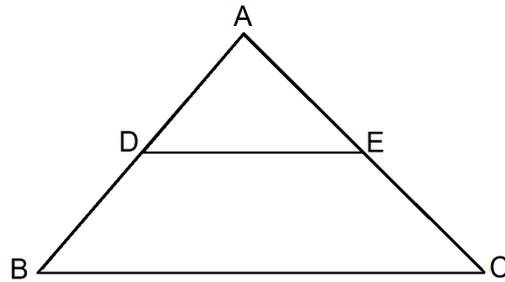
Pelo caso de congruência L.A.L ([3],pág 59), os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle CEF$ são congruentes, e denota-se por $\triangle ADE \cong \triangle CEF$. Logo, segue que $\widehat{ADE} = \widehat{CFE}$ e, além disso, são alternos internos. Sabe-se que se duas retas cortadas por uma transversal formam dois ângulos alternos internos congruentes, então as retas são paralelas. Segue daí que $DB \parallel FC$. Tem-se ainda que $\overline{DB} = \overline{DA} = \overline{FC}$, pois $\triangle ADE \cong \triangle CFE$. Portanto, o quadrilátero $DFCB$ é um paralelogramo e $\overline{BC} = \overline{DF} = \overline{DE} + \overline{EF}$. Como $\overline{EF} = \overline{DE}$ por construção, segue que $\overline{DF} = 2\overline{DE}$, o que implica que $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

■

Teorema 2.1

Sejam D e E pontos médios dos lados AB e AC , respectivamente, do $\triangle ABC$ tal que $DE \parallel BC$.

Então $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$.



A recíproca também é verdadeira.

Demonstração: Considere o caso em que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ é racional, isto é, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \equiv \frac{n}{m}$, com m e n inteiros positivos. Existe um segmento de comprimento c , tal que $\overline{AD} = mc$ e $\overline{AB} = nc$ e ainda com $m < n$, pois $\overline{AD} < \overline{AB}$.

Defina em \overleftrightarrow{AB} os pontos $P_0, P_1, \dots, P_m, \dots, P_n$, com $P_0 = A, P_m = D$ e $P_n = B$ tais que $\overline{P_i P_{i+1}} = c$, com $i = 0, 1, \dots, m, \dots, n - 1$.

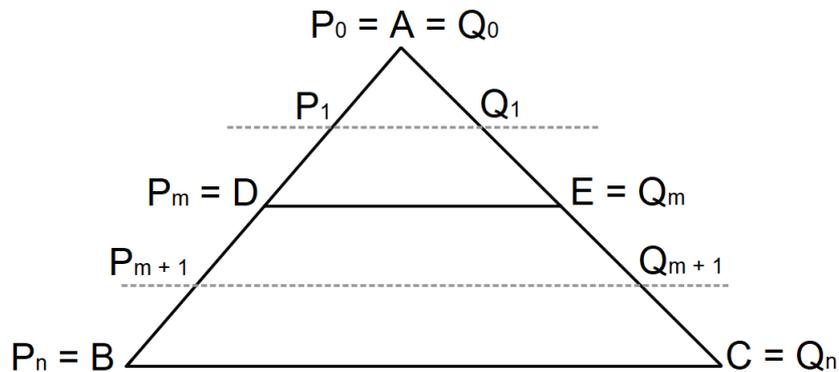


Figura 2.2: Divisão em partes iguais

Agora, traça-se as paralelas a \overleftrightarrow{BC} passando por $P_0, P_1, \dots, P_m, \dots, P_{n-1}$, de modo que essas retas cortam o segmento AC nos pontos $Q_0, Q_1, \dots, Q_m, \dots, Q_{n-1}$. Existe um número real d tal que $\overline{Q_i Q_{i+1}} = d$, com $i = 0, 1, \dots, m, \dots, n - 1$. Portanto, $\overline{AC} = nd$ e $\overline{AE} = md$. Assim tem-se

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{nd}{md} = \frac{n}{m} = \frac{nc}{mc} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}.$$

Agora, considere o caso em que $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ é irracional.

Seja m um número inteiro positivo. Defina em \overleftrightarrow{AB} os pontos $P_0 = A, P_1, \dots, P_m = D, \dots, P_n, P_{n+1}$, tais que $\overline{P_i P_{i+1}} = c, i = 0, 1, \dots, m, \dots, n$, para algum c . Daí $\overline{AD} = mc$. Ainda, $nc < \overline{AB} < (n + 1)c$.

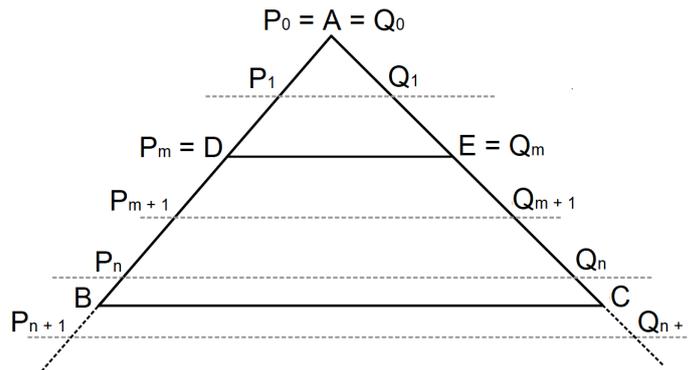


Figura 2.3: Extensão do segmento para divisão em partes iguais

Então

$$\frac{n}{m} < \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} < \frac{n + 1}{m}.$$

Traça-se as paralelas a \overleftrightarrow{BC} passando por $P_0, P_1, \dots, P_m, \dots, P_n, P_{n+1}$. Estas retas cortam o segmento AC nos pontos $Q_0 = A, Q_1, \dots, Q_{n+1}$. Existe um número real d tal que $\overline{Q_i Q_{i+1}} = d$, com $i = 0, 1, \dots, m, \dots, n$, com $Q_0 = A, \overline{AE} = md$ e $nd < \overline{AC} < (n + 1)d$. Portanto,

$$\frac{n}{m} < \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} < \frac{n + 1}{m}.$$

Obtem-se

$$\left| \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \right| < \frac{n + 1}{m} - \frac{n}{m} = \frac{1}{m}.$$

Como esta desigualdade vale para qualquer número inteiro positivo m , tem-se

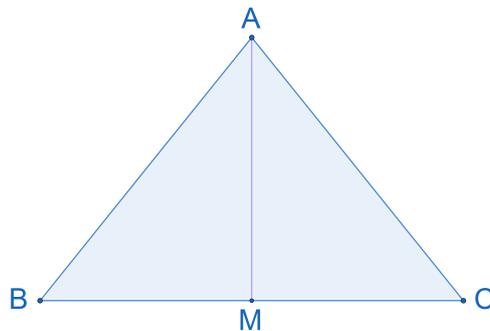
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 0 \quad \text{ou seja} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

Para provar a recíproca seja $\overleftrightarrow{BC'}$ a reta por B paralela a DE , interceptando AC em um ponto C' . Pela parte anterior, temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AE}}$. Mas por hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, o que implica que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AE}}$. Assim, $\overline{AC} = \overline{AC'}$. Como C' está na reta \overleftrightarrow{AC} , segue que $C = C'$. Logo, DE é paralelo a BC .

■

Definição 2.1

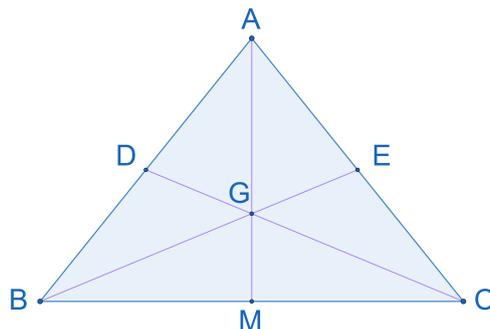
A **mediana** de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice deste triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice.



Usando conceitos geométricos, mostra-se a seguir que as medianas de um triângulo se encontram em um único ponto.

Teorema 2.2

As três medianas de um triângulo se encontram em um ponto. Esse ponto é chamado de **baricentro (ou centróide)** do triângulo.



Demonstração: Seja G a interseção das medianas BE e CD do $\triangle ABC$.

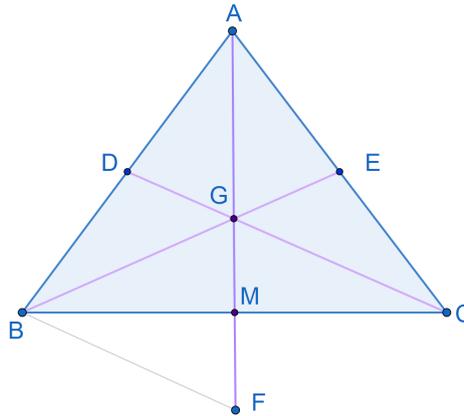


Figura 2.4: Prolongamento do segmento AG

Construa o segmento GF em \overleftrightarrow{AG} , tal que $\overline{GF} = \overline{AG}$. Assim no $\triangle ABF$ os pontos D e G são pontos médios dos lados AB e AF , respectivamente. Portanto pelo Lema 2.1, tem-se que $BF \parallel DG \parallel GC$.

Analogamente, $CF \parallel GB$.

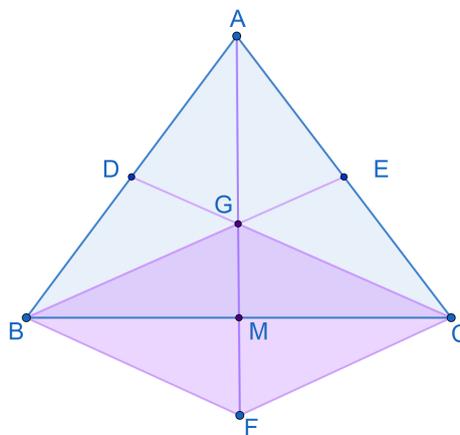


Figura 2.5: Paralelogramo $BFCG$

Portanto, o quadrilátero $BFCG$ é um paralelogramo e em todo paralelogramo as diagonais se encontram no seus pontos médios. Sendo assim, a extensão de AG passa pelo ponto M , que é o ponto médio de BC , ou seja, AM é uma mediana do triângulo $\triangle ABF$. Logo, as três medianas de um triângulo se cruzam em um ponto.

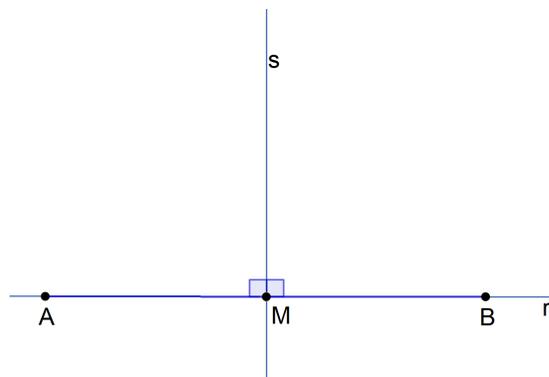
■

Observação 2.1

Uma observação importante é que da prova acima segue que $\overline{AG} = \overline{GF} = 2\overline{GM}$. Usando a mesma ideia, $\overline{CG} = \overline{FB} = 2\overline{GD}$ e $\overline{CF} = \overline{BG} = 2\overline{GE}$.

2.1.2 O Circuncentro**Definição 2.2**

Dado um segmento AB em uma reta r , chama-se de **mediatriz** do segmento AB , a reta s perpendicular à reta r que passa pelo ponto médio M de AB .



Para mostrar que as mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram em um ponto, precisa-se do seguinte lema.

Lema 2.2

Suponha que A e B sejam dois pontos fixos. Então um ponto P está na mediatriz do segmento de reta AB se, e somente se $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Demonstração: Observe a figura abaixo:

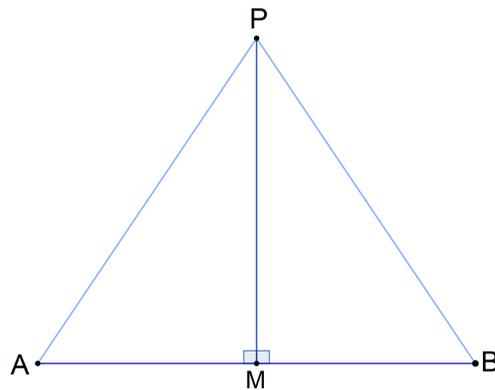


Figura 2.6: Mediatriz

Suponha inicialmente que P esteja na mediatriz do segmento AB . Trace o segmento que une os pontos P e M , sendo M o ponto médio do segmento de reta AB , como na figura 2.6. Tem-se então que os triângulos $\triangle PAM \equiv \triangle PBM$, pelo caso $L.A.L.$. De fato, \overline{PM} é lado comum, $\widehat{PMA} = \widehat{PMB} = \frac{\pi}{2}$, pois \overleftrightarrow{PM} é mediatriz de AB e ainda $\overline{AM} = \overline{MB}$, pois M é ponto médio de AB . Assim, $\overline{PA} = \overline{PB}$.

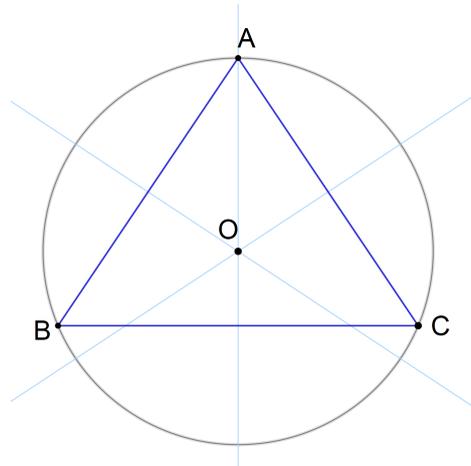
Reciprocamente, suponha agora que $\overline{PA} = \overline{PB}$, segue então que os triângulos

$\triangle PAM \equiv \triangle PBM$, pelo caso $L.L.L.$ ([3], pág 66), pois \overline{PM} é lado comum, $\overline{PA} = \overline{PB}$ e ainda $\overline{AM} = \overline{MB}$, pois M é ponto médio de AB . Assim, como ângulo \widehat{AMB} é raso, segue que $\widehat{PMA} = \widehat{PMB} = \frac{\pi}{2}$. Portanto, P está na mediatriz de AB .

■

Teorema 2.3

As três mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram em um ponto. Este ponto é denominado **circuncentro** do triângulo.



Demonstração: Seja O a interseção das mediatrizes dos lados AB e AC . Então como o ponto O está na mediatriz de AB , pela primeira parte do Lema 2.2, $\overline{BO} = \overline{AO}$.

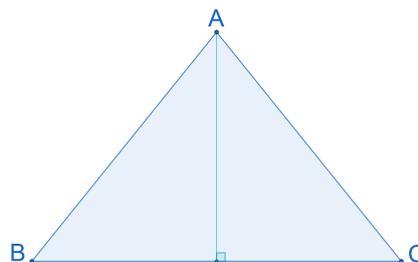
De maneira análoga, o ponto O também está na mediatriz de AC , assim $\overline{AO} = \overline{CO}$. Então $\overline{BO} = \overline{AO} = \overline{CO}$. Como $\overline{BO} = \overline{CO}$, pela segunda parte do Lema 2.2, o ponto O está na mediatriz de BC .

Note que, as distâncias do ponto O aos três vértices são iguais, assim se desenharmos um círculo de centro O e raio \overline{OA} , obtém-se um circuncírculo do triângulo $\triangle ABC$.

■

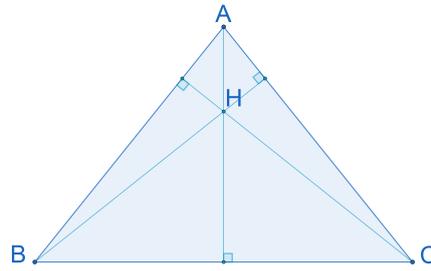
2.1.3 O Ortocentro**Definição 2.3**

Dado um triângulo $\triangle ABC$, a **altura** relativa ao vértice A é o segmento de reta que passa por A e que é perpendicular ao lado oposto BC .



Teorema 2.4

As alturas relativas de um triângulo se encontram em um ponto. Este ponto é denominado **orto-centro** do triângulo.



Demonstração:

Considere o triângulo $\triangle ABC$. Por cada um dos vértices trace a reta paralela ao lado oposto a tal vértice, obtendo assim $\triangle A'B'C'$.

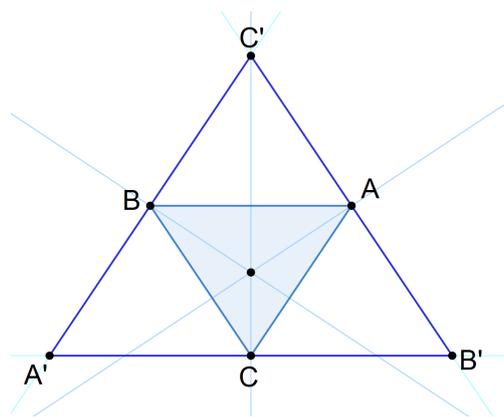


Figura 2.7: Triângulo $A'B'C'$

Então os quadriláteros $ABC'B'$ e $ACBC'$ são paralelogramos e portanto $\overline{AB'} = \overline{BC} = \overline{AC'}$.

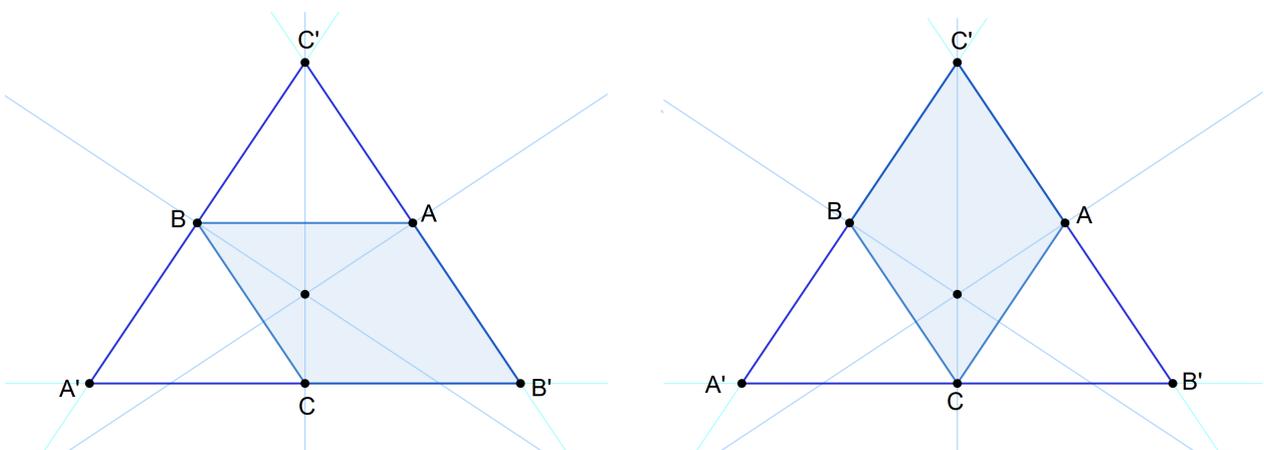


Figura 2.8: Paralelogramos formados

Como $B'C' \parallel BC$ a altura relativa ao vértice A é a mediatriz do segmento $B'C'$.

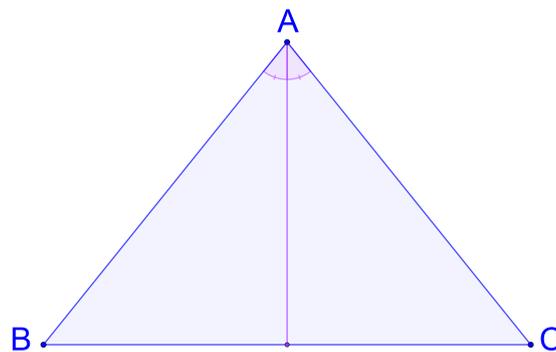
Analogamente, mostra-se que as alturas relativas aos vértices B e C do $\triangle ABC$ são as mediatrizes dos segmentos $A'C'$ e $A'B'$, respectivamente. Portanto, pelo Teorema 2.4 as mediatrizes se encontram em um ponto. Isso implica que as alturas relativas do triângulo $\triangle ABC$ se encontram em um ponto.

■

2.1.4 O Incentro e os três Excentros

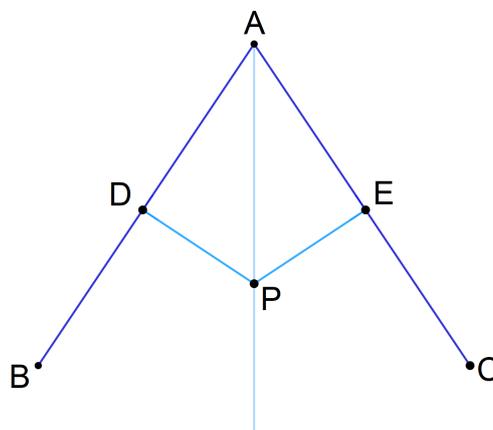
Definição 2.4

Dado um triângulo $\triangle ABC$, a **bissetriz** relativa ao vértice A é o segmento de reta que passa por A e divide o ângulo \widehat{BAC} em dois ângulos congruentes.



Lema 2.3

Seja P um ponto interior do ângulo \widehat{BAC} . Então P está na bissetriz do \widehat{BAC} se, e somente se as distâncias do ponto P aos lados AB e AC forem iguais.



Demonstração:

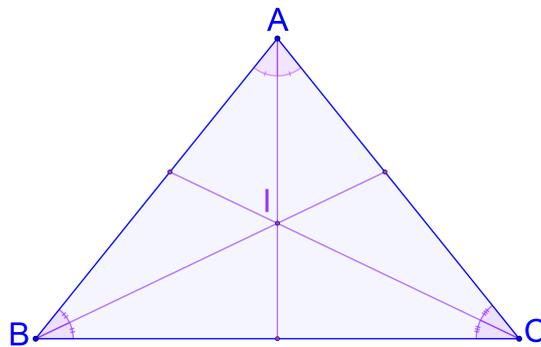
Seja P um ponto arbitrário na bissetriz do ângulo \widehat{BAC} e sejam D e E os pés das perpendiculares de P aos lados AB e AC , respectivamente. Assim, os triângulos $\triangle APD$ e $\triangle APE$ possuem dois ângulos correspondentes congruentes, pois $\widehat{DAP} = \widehat{EAP}$ (P está na bissetriz) e $\widehat{PDA} = \widehat{PEA} = \pi/2$. Além disso, tais triângulos possuem o lado AP em comum. Portanto, pelo caso $L.A.A.$ ([3], pág 68) pode-se afirmar que $\triangle APD \equiv \triangle APE$. Logo, $\overline{PD} = \overline{PE}$.

Por outro lado suponha que P é um ponto interior do ângulo \widehat{BAC} tal que $\overline{PD} = \overline{PE}$, onde D e E são os pés das perpendiculares do ponto P aos segmentos AB e AC , respectivamente. Assim, \overline{AP} é lado comum, $\overline{PD} = \overline{PE}$ e aplicando o Teorema de Pitágoras, segue que $\overline{AD} = \overline{AE}$. Logo, $\triangle APD \equiv \triangle APE$ pelo caso $L.L.L.$ Isso implica que $\widehat{DAP} = \widehat{EAP}$, ou seja, P está na bissetriz de \widehat{BAC} .

■

Teorema 2.5

As três bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se encontram em um ponto. Este ponto é denominado **incentro** do triângulo.



Demonstração: Seja I a interseção das bissetrizes dos ângulos internos nos vértices B e C do $\triangle ABC$ e sejam D, E, F os pés das perpendiculares de I aos três lados $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, respectivamente. Como I está na bissetriz do ângulo \widehat{ABC} , pela primeira parte do lema anterior, temos que $\overline{IF} = \overline{ID}$.

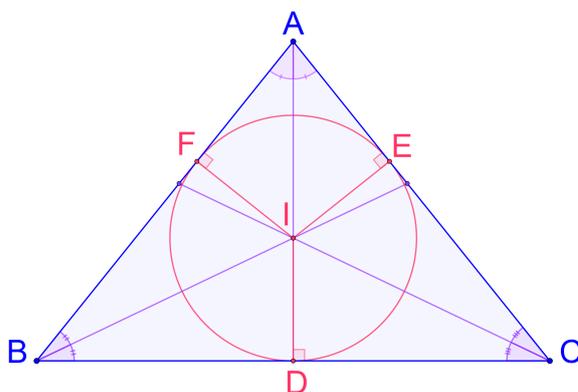


Figura 2.9: Incentro

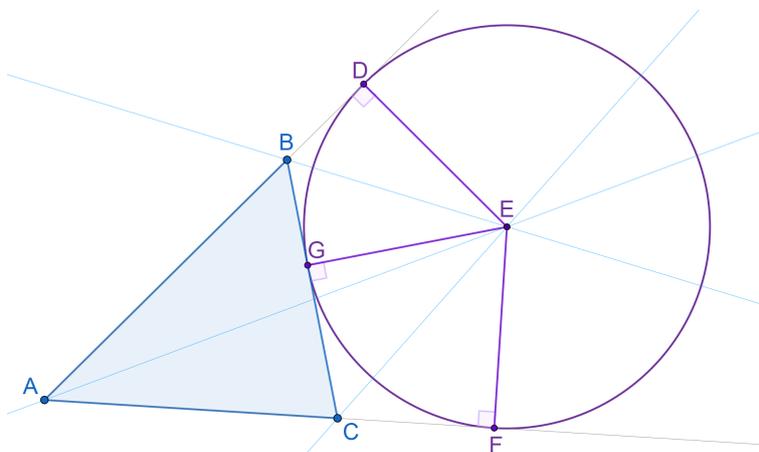
De maneira análoga, como I também está na bissetriz do ângulo \widehat{ACB} , tem-se que $\overline{ID} = \overline{IE}$. Logo, $\overline{IF} = \overline{ID} = \overline{IE}$. Como $\overline{IF} = \overline{IE}$, pela segunda parte do Lema 2.3, I também está na bissetriz do ângulo \widehat{BAC} .

■

Note que as distâncias do **incentro (I)** aos três lados de um triângulo são todas iguais. Assim, são desenhados um círculo com centro em I e usa-se a distância de I a um dos lados como sendo a medida do raio, obtém-se um círculo tangente a todos os três lados do triângulo. Este círculo é chamado de **círculo inscrito** do triângulo.

Teorema 2.6

As bissetrizes de dois ângulos externos e a do ângulo interno restante de um triângulo se encontram em um ponto. Este ponto é denominado **excentro** do triângulo e é o centro de um **círculo exinscrito** que tangencia as extensões de dois lados e o lado restante do triângulo. Um triângulo tem **três excentros** e **três círculos exincritos**.



Demonstração: Seja E a interseção das bissetrizes dos ângulos externos dos vértices B e C do triângulo $\triangle ABC$ e sejam D e F os pés das perpendiculares de E aos prolongamentos dos lados AB , AC , respectivamente, e G o pé da perpendicular ao lado BC . Como E está na bissetriz do ângulo $\widehat{D\hat{B}G}$, pela primeira parte do Lema 2.3, segue que $\overline{ED} = \overline{EG}$.

De maneira análoga, como E também está na bissetriz do $\widehat{F\hat{C}G}$, então $\overline{EG} = \overline{EF}$. Logo, $\overline{ED} = \overline{EG} = \overline{EF}$, ou seja, $\overline{ED} = \overline{EF}$. Segue do Lema 2.3 que E também está na bissetriz interna do ângulo $\widehat{B\hat{A}C}$.

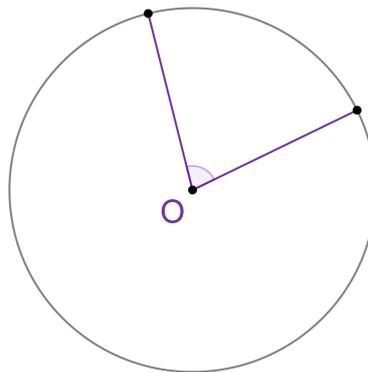
■

Chamamos de **ceviana** os segmentos que partem de um dos vértices de um triângulo e cortam a reta suporte do lado oposto a esse vértice. A mediana, altura e bissetriz de um triângulo são exemplos de cevianas.

2.2 Ângulos Inscritos em um arco

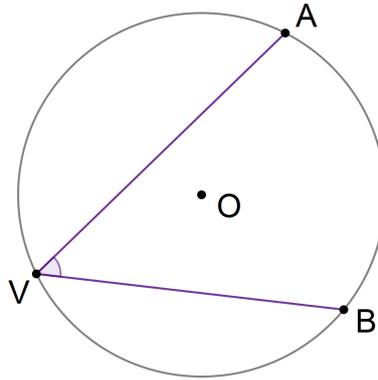
Definição 2.5

Um **ângulo central** de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

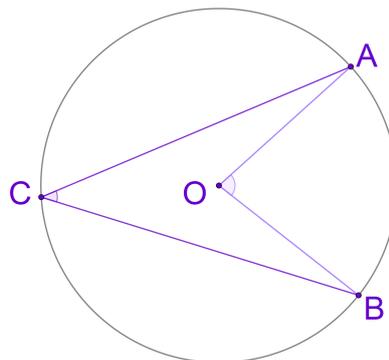


Definição 2.6

Um ângulo se denomina **inscrito** em um círculo determinado por uma circunferência C , de centro O e raio r , se seu vértice V está em C e seus lados interceptam C em dois pontos A e B distintos de V . Os pontos A e B determinam dois arcos. O arco que não contiver o vértice V é chamado **arco correspondente ao ângulo inscrito dado**. É comum também dizer que o ângulo subtende o arco \widehat{AB} .

**Lema 2.4**

A medida de um ângulo inscrito em um círculo é igual a metade da medida do ângulo central correspondente. Em particular, todos os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco têm a mesma medida.



Demonstração: Sejam A, B, C pontos de um círculo de centro O , conforme a figura abaixo. A demonstração será dividida em três casos.

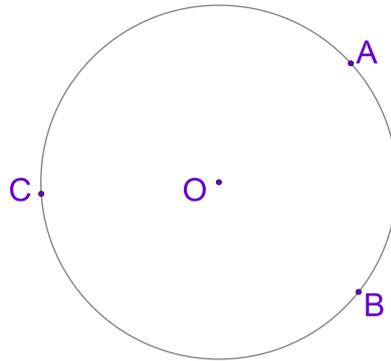


Figura 2.10: Pontos concíclicos

1º Caso: Sem perda de generalidade, suponha que o centro O esteja no segmento AC .

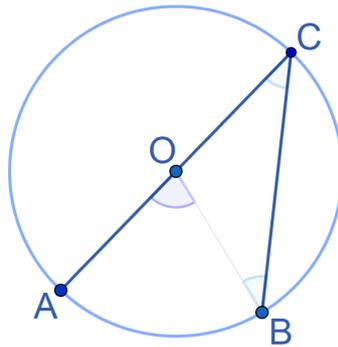


Figura 2.11: Ângulo inscrito (1)

Como o triângulo $\triangle OBC$ é um triângulo isósceles, temos que $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$ e \widehat{AOB} é um ângulo externo do triângulo $\triangle OBC$. Logo,

$$\widehat{AOC} = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 2\widehat{ACB}.$$

2º Caso: Suponha que o centro O esteja no interior do ângulo \widehat{ACB} , sendo o diâmetro o segmento CD .

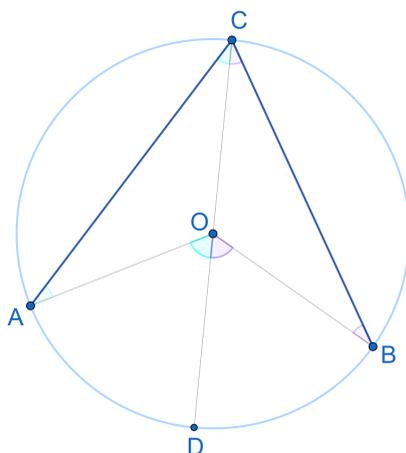


Figura 2.12: Ângulo inscrito (2)

Então pelo caso anterior,

$$\widehat{ACD} = \frac{1}{2} \widehat{AOD} \quad \text{e} \quad \widehat{DCB} = \frac{1}{2} \widehat{DOB}.$$

Assim,

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACD} + \widehat{DCB} = \frac{1}{2} \widehat{AOD} + \frac{1}{2} \widehat{DOB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

3º Caso: Suponha que o centro O esteja fora do ângulo \widehat{ACB} . Como antes, seja CD o diâmetro.

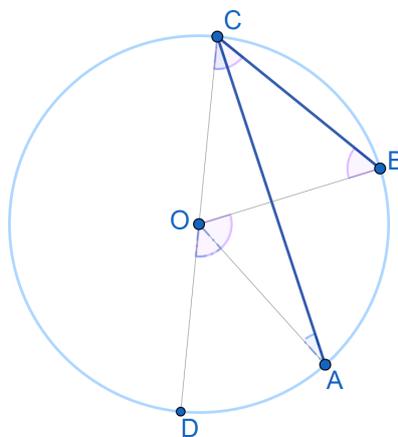


Figura 2.13: Ângulo inscrito (3)

Então pelo 1º Caso, segue que

$$\widehat{BCD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} \quad \text{e} \quad \widehat{ACD} = \frac{1}{2} \widehat{AOD}.$$

Assim,

$$\widehat{ACB} = \widehat{BCD} - \widehat{ACD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} - \frac{1}{2} \widehat{AOD} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

Isso conclui a prova do lema. ■

Precisaremos, no decorrer do trabalho, da definição e resultados sobre conciclicidade de um conjunto de pontos.

Definição 2.7

Um determinado número de pontos são concíclicos se estiverem em uma mesma circunferência.

Teorema 2.7

Suponha que os pontos C e D estão de um mesmo lado da reta \overleftrightarrow{AB} . Então os pontos A, B, C e D são concíclicos se, e somente se $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Demonstração: Suponha que os pontos A, B, C e D são concíclicos. Então do Lema 2.4 segue que $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, uma vez que os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco possuem a mesma medida.

Resta mostrar que se $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ então os pontos serão concíclicos. Construa o círculo passando pelos pontos A, B e C . Suponha agora que o ponto D esteja dentro desse círculo. Seja D' a interseção do círculo com a extensão do segmento AD .

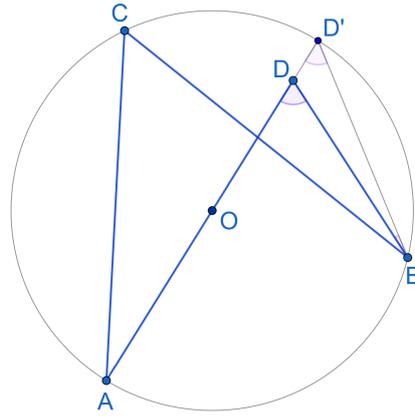


Figura 2.14: D é ponto interno da circunferência

Então

$$\widehat{ADB} = \widehat{AD'B} + \widehat{D'BD} > \widehat{AD'B} = \widehat{ACB}$$

o que contradiz a hipótese. Se o ponto D está fora do círculo, seja D' a interseção do círculo com o segmento AD .

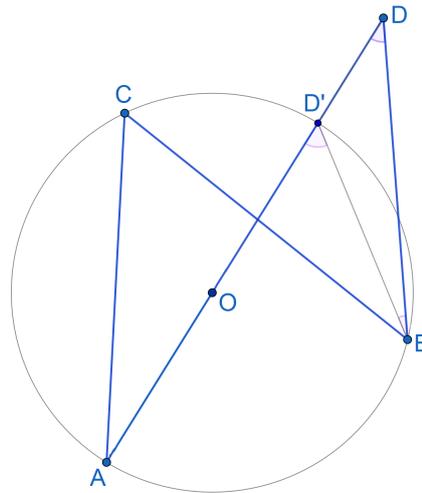


Figura 2.15: D é ponto externo da circunferência

Então

$$\widehat{ADB} < \widehat{AD'B} + \widehat{D'BD} = \widehat{AD'B} = \widehat{ACB},$$

o que também contradiz a hipótese.

Logo, o ponto D deve estar no círculo que passa pelos pontos A , B e C .

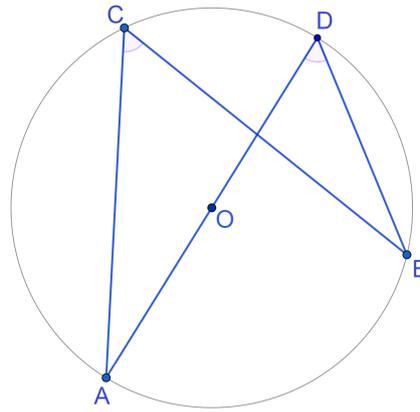


Figura 2.16: D é ponto da circunferência

■

Proposição 2.1

Suponha que C e D estão em lados opostos da reta \overleftrightarrow{AB} . Então os pontos A, B, C e D são concíclicos se, e somente se $\widehat{ACB} + \widehat{ADB} = \pi$.

Demonstração:

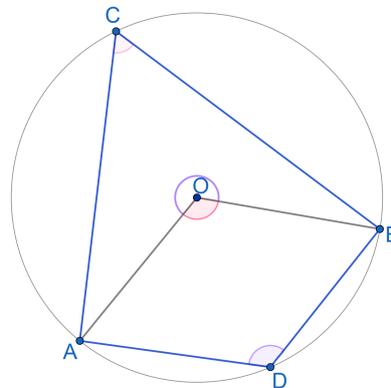


Figura 2.17: Condição de conciclicidade

Pelo Lema 2.4, a medida do ângulo inscrito \widehat{ACB} equivale à metade da medida do ângulo \widehat{AOB} , correspondente ao arco AB que passa pelo ponto D . Da mesma forma, a medida do ângulo inscrito \widehat{ADB} equivale à metade da medida do ângulo \widehat{AOB} , correspondente ao arco AB que passa pelo ponto C . Segue então que

$$\widehat{ACB} + \widehat{ADB} = \frac{1}{2} 2\pi = \pi.$$

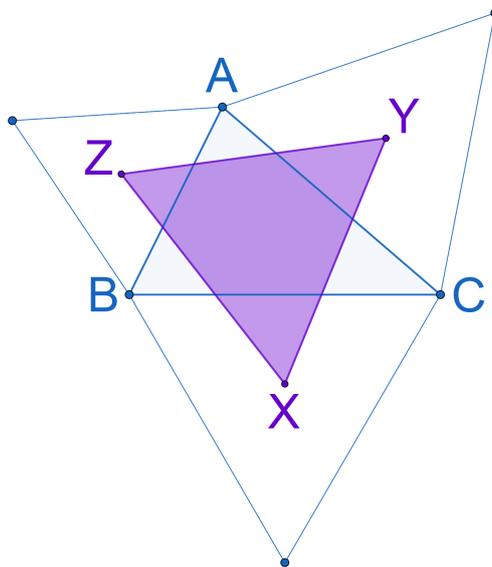
■

2.3 O Teorema de Napoleão

A seguir uma demonstração geométrica do Teorema de Napoleão que pode ser encontrada em [4]. Conforme mencionado em [6] a prova de tal teorema foi feita por Kay Hashimoto, um aluno do décimo ano da Lakeside School, Seattle, em maio de 1992. No Capítulo 4 é apresentada uma prova do Teorema de Napoleão, usando números complexos.

Teorema 2.8

Em cada lado de um triângulo arbitrário desenhe um triângulo equilátero. Então os baricentros desses três triângulos são vértices de um quarto triângulo equilátero.



Demonstração: Dado o triângulo ΔABC , sejam X, Y, Z os baricentros dos triângulos equiláteros externos aos lados BC, CA e AB , respectivamente. Considere o círculo C_1 com centro em X e passando por B e C . Da mesma forma construa o círculo C_2 com centro em Y e passando por A e C , e o círculo C_3 com centro em Z e passando por A e B . Observe que os pontos X', Y' e Z' estão nos círculos C_1, C_2 e C_3 respectivamente, devido ao fato de X, Y e Z serem baricentros de cada um dos triângulos.

Seja O o ponto de interseção dos círculos C_2 e C_3 . tal que $O \neq A$.

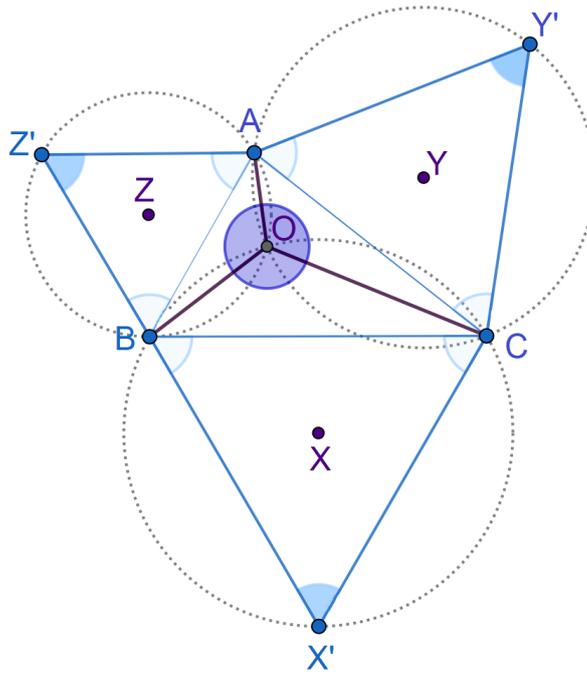


Figura 2.18: Ângulo no ponto O

Então pela Proposição 2.1, $\widehat{AOB} + \widehat{AZ'B} = \pi$ e $\widehat{AOC} + \widehat{AY'C} = \pi$. Como os triângulos externos são equiláteros, segue que $\widehat{AZ'B} = \frac{\pi}{3}$ e $\widehat{AY'C} = \frac{\pi}{3}$. Logo,

$$\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{e} \quad \widehat{AOC} = \frac{2\pi}{3}.$$

Isso implica que $\widehat{BOC} = \frac{2\pi}{3}$. Como $\widehat{BOC} + \widehat{BX'C} = \pi$, segue que os pontos B, O, C e X' são concíclicos. Logo o ponto O está no círculo C_1 . Portanto, mostrou-se que os três circuncírculos se encontram no ponto O .

A reta \overleftrightarrow{XY} é perpendicular ao segmento comum OC , pois $\overline{XO} = \overline{XC}$ e, do Lema 2.2 segue que X está na mediatriz do segmento OC . Logo, a reta \overleftrightarrow{XY} é perpendicular ao segmento OC . Da mesma forma, mostra-se que a reta \overleftrightarrow{YZ} é perpendicular ao segmento OA e que a reta \overleftrightarrow{XZ} é perpendicular ao segmento OB . Logo, como $\widehat{BOC} = \frac{2\pi}{3}$ segue que $\widehat{YXZ} = \frac{\pi}{3}$. Similarmente, verifica-se que $\widehat{XZY} = \widehat{XYZ} = \frac{\pi}{3}$. Portanto, o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero.

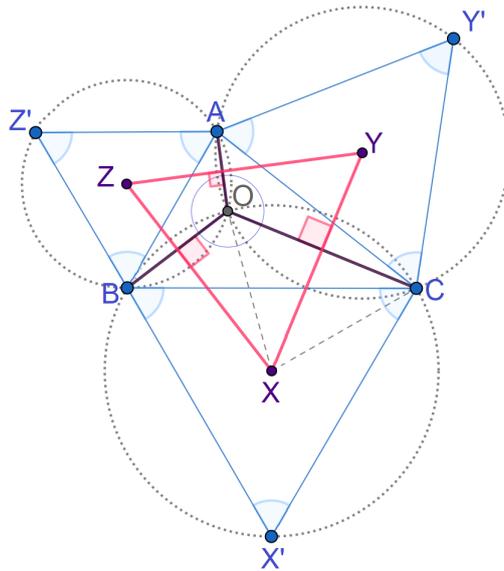


Figura 2.19: Teorema de Napoleão

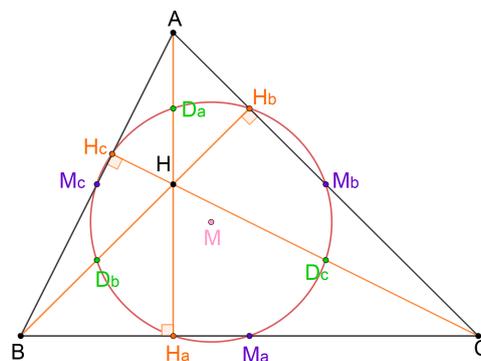
■

2.4 Círculo dos Nove Pontos

A seguir uma demonstração sob o ponto de vista geométrico de um interessante resultado da Geometria Plana, a saber, o **Círculo dos Nove Pontos**. Tal resultado recebeu esse nome devido ao fato de ser um círculo que passa por nove pontos importantes definidos a partir de um triângulo. Essa demonstração pode ser encontrada em [6].

Teorema 2.9: Círculo dos Nove Pontos

Dado um triângulo qualquer, o círculo que passa pelos pés das perpendiculares baixadas dos seus vértices sobre os lados opostos a eles, passa também pelos pontos médios dos lados, assim como pelos pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro.



Demonstração:

Considere o triângulo ΔABC .

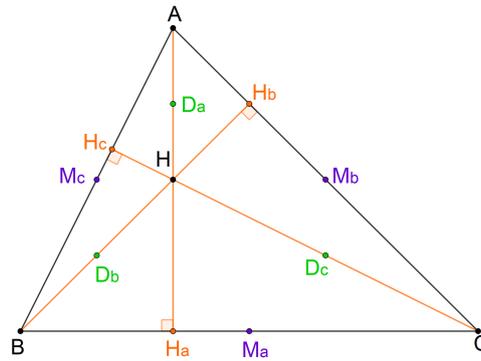


Figura 2.20: Nove pontos concíclicos

Sejam M_a, M_b e M_c os pontos médios dos lados BC, AC e AB , respectivamente. Sejam H_a, H_b e H_c os pés das alturas relativas aos lados BC, AC e AB , respectivamente. Sendo H o ortocentro do triângulo ΔABC , sejam D_a, D_b e D_c os pontos médios dos segmentos AH, BH e CH , respectivamente.

O objetivo é mostrar que esses nove pontos estão em uma mesma circunferência.

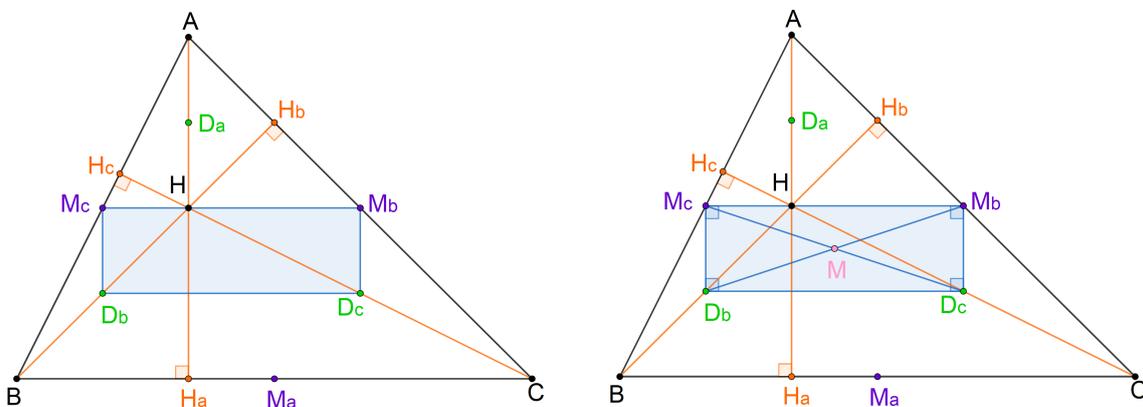


Figura 2.21: Retângulo formado (1)

Mostra-se inicialmente que o quadrilátero $D_bD_cM_bM_c$ é um retângulo. De fato, como M_b e M_c são pontos médios dos lados AB e AC do triângulo ΔABC , pelo Lema 2.1 segue que o segmento M_bM_c é paralelo ao segmento BC e $\overline{M_bM_c} = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

Ainda temos que D_b e D_c são pontos médios dos lados BH e CH do triângulo ΔHBC . Usando novamente o Lema 2.1 segue que o segmento D_bD_c é paralelo ao segmento BC e $\overline{D_bD_c} = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

Então o segmento D_bD_c é paralelo ao segmento M_bM_c e $\overline{M_bM_c} = \overline{D_bD_c}$. Assim, $M_cD_bD_cM_b$ é um paralelogramo. Considerando o triângulo $\triangle ABH$, usando o Lema 2.1 conclui-se que o segmento M_cD_b é paralelo ao segmento AH . Como AH está contido no segmento AH_a , o segmento M_cD_b é perpendicular ao segmento D_bD_c . Assim, o quadrilátero $D_bD_cM_bM_c$ é um retângulo. Com isso resulta que os segmentos M_cD_c e M_bD_b são as diagonais de um retângulo, donde segue que são congruentes e se interceptam no ponto médio M .

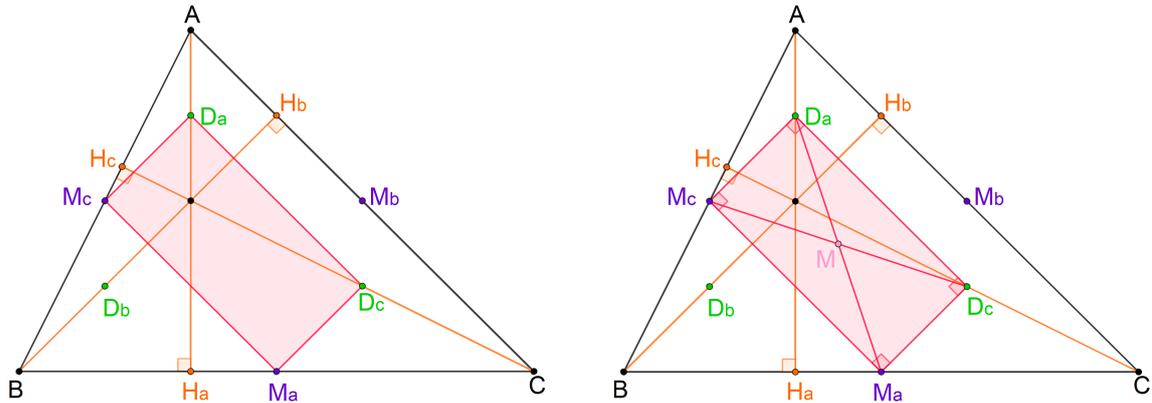


Figura 2.22: Retângulo formado (2)

De maneira análoga pode-se mostrar que $M_cM_aD_cD_a$ e $M_aM_bD_aD_b$ são retângulos.

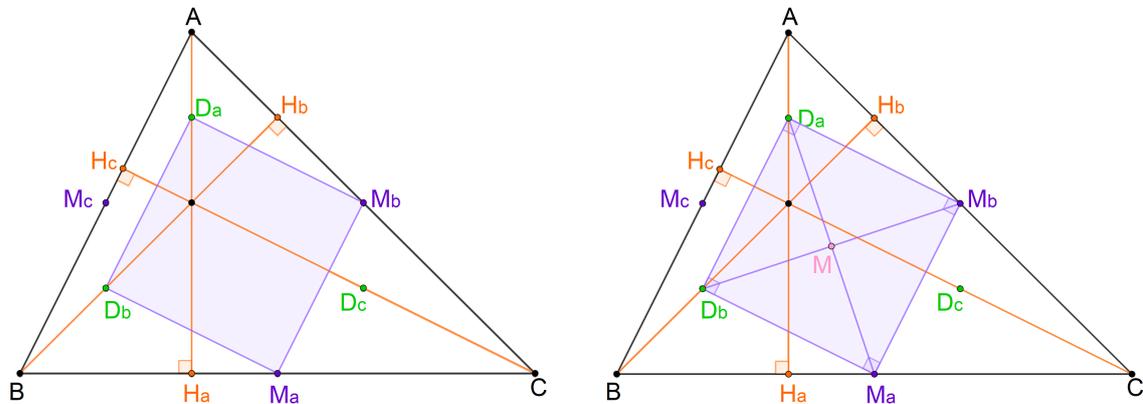


Figura 2.23: Retângulo formado (3)

Logo, suas respectivas diagonais M_cD_c e M_aD_a ; e M_aD_a e M_bD_b são congruentes e interceptam no ponto M . Note que cada par de retângulos distintos das três figuras acima possuem uma diagonal em comum. Devido a isso, as diagonais de todos os retângulos se interceptam no mesmo ponto M . Assim, $\overline{MD_a} = \overline{MM_a} = \overline{MD_b} = \overline{MM_b} = \overline{MD_c} = \overline{MM_c}$.

A circunferência procurada é justamente a circunferência C de centro M e raio igual a $\overline{MD_a}$.

Falta mostrar H_a, H_b e H_c também pertencem a essa circunferência.

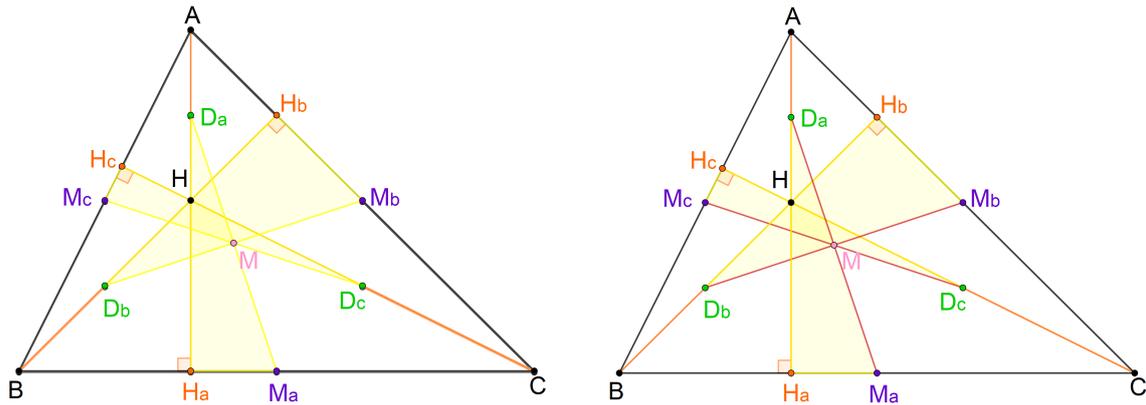


Figura 2.24: Triângulos retângulos formados

Observe que os triângulos $\Delta D_b H_b M_b, \Delta D_c H_c M_c$ e $\Delta D_a H_a M_a$ são triângulos retângulos cujas hipotenusas são, respectivamente, os segmentos $M_b D_b, M_c D_c$ e $M_a D_a$, as quais são diâmetros da circunferência C mencionada acima. Como $M_a \widehat{H_a} D_a$ é reto e $M_a D_a$ é diâmetro da circunferência C , segue que C passa pelo H_a . Da mesma forma, H_b e H_c estão em C .

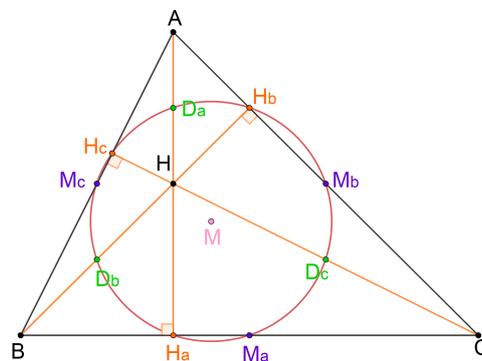


Figura 2.25: O círculo dos nove pontos

Logo, os pontos $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, D_a, D_b$ e D_c estão na circunferência C .

■

No Capítulo 4 será abordado novamente o Teorema 2.9 e apresentada uma demonstração utilizando conceitos dos números complexos.

Números Complexos

Nesse capítulo é apresentado as definições e resultados básicos dos números complexos. As referências utilizadas foram [1] e [4].

3.1 Definição de Números Complexos

Definição 3.1

Um número complexo é um par ordenado (a, b) de números reais com as seguintes propriedades:

- i. Dois números complexos (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.
- ii. A soma e o produto de dois números complexos (a, b) e (c, d) são definidos por

$$D_1 : (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$D_2 : (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

É importante destacar que a definição de igualdade para números complexos tem as seguintes propriedades:

1. *Reflexiva*: $(a, b) = (a, b)$, para todo número complexo (a, b) ;
2. *Simétrica*: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (c, d) = (a, b)$, para quaisquer números complexo (a, b) e (c, d) ;
3. *Transitiva*: $(a, b) = (c, d), (c, d) = (e, f) \Rightarrow (a, b) = (e, f)$, para quaisquer números complexo (a, b) , (c, d) e (e, f) .

Demonstração: Para mostrar a reflexividade basta ver que $a = a$ e $b = b$, portanto $(a, b) = (a, b)$. Para provar a segunda propriedade note que, por definição, $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$, mas isso é o mesmo que $c = a$ e $d = b$ (comutatividade dos reais) e, portanto, $(c, d) = (a, b)$. Por fim, de $(a, b) = (c, d)$, temos que $a = c$ e $b = d$. De $(c, d) = (e, f)$, temos $c = e$ e $d = f$. Assim, pela transitividade dos reais conclui-se que $a = e$ e $b = f$, donde segue que $(a, b) = (e, f)$.

■

O próximo passo é mostrar que o conjunto dos números complexos é um corpo. Para isso, utiliza-se o fato de que o conjunto dos números reais \mathbb{R} é um corpo, ou seja, valem as seguintes propriedades:

I → (Propriedades envolvendo a adição) Dados dois números reais arbitrários a e b , eles determinam um único terceiro número denominado soma, denotado por $a + b$, com as seguintes propriedades:

A_1 : Comutativa: $a + b = b + a$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

A_2 : Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

A_3 : Identidade Aditiva: Existe um único número real, denotado por 0 , tal que $a + 0 = 0 + a = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

A_4 : Inverso Aditivo: Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz $a + x = x + a = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Esta única solução será denotado por $-a$.

II → (Propriedades envolvendo a multiplicação) Dados dois números reais arbitrários, a e b , eles determinam um único terceiro número denominado **produto**, denotado por ab , com as seguintes propriedades:

M_1 : Comutativa: $ab = ba$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

M_2 : Associativa: $(ab)c = a(bc)$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

M_3 : Identidade Multiplicativa: Existe um único número real, denotado por 1 , tal que $a + 1 = 1 + a = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

M_4 : Inverso Multiplicativo: Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe um único $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz $ax = xa = 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Esta única solução será denotada por $\frac{1}{a}$.

III → Distributiva.

$$a(b + c) = ab + ac, \text{ para todo } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

O resultado a seguir mostra que o conjunto dos números complexos \mathbb{C} também possui essas propriedades, isto é, o conjunto \mathbb{C} é também um corpo .

Teorema 3.1

Com a adição e multiplicação definidas por (D_1) e (D_2) , o conjunto \mathbb{C} dos números complexos é um corpo.

Demonstração:

Propriedades relativas à adição:

A_1 : Comutativa: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$ para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Temos que

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b).$$

A_2 : Associativa: Sejam $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$, então: $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$.

Temos que

$$\begin{aligned} ((a, b) + (c, d)) + (e, f) &= (a + c, b + d) + (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f) = (a + (c + e), b + (d + f)) = \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f)). \end{aligned}$$

A_3 : Identidade Aditiva: Sejam $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, então existe um único par ordenado $(0, 0)$ tal que: $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$.

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b).$$

A_4 : Inverso Aditivo: Para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ existe um único $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, satisfazendo: $(a, b) + (x, y) = (0, 0)$, esta única solução é denotada por $(-a, -b)$.

$$(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0).$$

Propriedades relativa à multiplicação:

M_1 : Comutativa: $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$ para todo $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) = (ca - db, cb + da) = (c, d) \cdot (a, b).$$

M_2 : Associativa: Sejam $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$, então: $((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$

$$\begin{aligned} ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) &= (ac - bd, bc + ad) \cdot (e, f) = ((ac - bd)e - (bc + ad)f, (bc + ad)e + (ac - bd)f) = \\ &= ((ac)e - (bd)e) - (bc)f + (ad)f, (bc)e + (ad)e + (ac)f - (bd)f) = (a(ce) - b(de) - b(cf) + a(df), b(ce) + \\ &+ a(de) + a(cf) - b(df)) = (a, b)(ce - df, de + cf) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)). \end{aligned}$$

M_3 : Identidade Multiplicativa: Existe um único par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que: $(a, b) \cdot (x, y) = (a, b)$ para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay) = (a, b), \text{ onde:}$$

$$\begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2x - aby = a^2 \\ b^2x + aby = b^2 \end{cases}$$

Somando essas equações tem-se: $(a^2 + b^2)x = a^2 + b^2 \Rightarrow x = 1$. Novamente, obtém-se

$$\begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abx - b^2y = ab \\ abx + a^2y = ab \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, segue que: $(a^2 + b^2)y = 0 \Rightarrow y = 0$

$$\text{Com isso: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Daí, $(a, b) \cdot (1, 0) = (a1 - b0, b1 + a0) = (a, b)$. Portanto, o elemento neutro da multiplicação é o par ordenado $(1, 0)$.

M_4 : Inverso Multiplicativo: Para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$ existe um único $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, satisfazendo: $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$.

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay) = (1, 0), \text{ donde:}$$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + aby = 0 \end{cases}$$

Somando essas equações tem-se:

$$(a^2 + b^2)x = a \Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2}. \text{ Novamente,}$$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abx - b^2y = b \\ abx + a^2y = 0 \end{cases}$$

Logo, subtraindo a primeira da segunda equação do sistema acima, segue que:

$$(a^2 + b^2)y = -b \Rightarrow y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Com isso: } \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Daí,

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{0}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Portanto, o inverso da multiplicação é o par ordenado

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

M_5 : Lei Distributiva: Sejam $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R}^2$, então:

$$(a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f).$$

$$(a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c+e, d+f) = (a(c+e) - b(d+f), b(c+e) + a(d+f)) = ((ac+ae) - (bd+bf), (bc+be) + (ad+af)) = (ac - bd, bc + ad) + (ae - bf, be + af) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f).$$

■

3.2 Números complexos na forma algébrica

A representação de números complexos como um par ordenado dificulta manipulações algébricas com esses números. Por simplicidade, rescreve-se os números complexos de uma forma mais simples.

Para deduzir esta nova representação, considere a função f definida por

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}, \quad f(x) = (x, 0),$$

junto com as operações de adição e multiplicação definidas sobre \mathbb{R}^2 . Esta função é bijetora e, além disso,

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \quad \text{e} \quad (x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0).$$

Portanto, as operações algébricas sobre $\mathbb{R} \times \{0\}$ são similares às operações algébricas sobre \mathbb{R} . Consequentemente, não haverá confusão se identificar o par $(x, 0)$ com o número x para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, devido a bijeção da função f acima, pode-se usar a notação $(x, 0) = x$.

Agora, é válido reescrever o número complexo $z = (x, y)$ da seguinte forma

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + (0, 1)y.$$

Ao número complexo $(0, 1)$ dá-se o nome de *unidade imaginária* e o representamos pelo símbolo i , ou seja,

$$(0, 1) = i.$$

Dessa forma, pode-se reescrever o número $z = (x, y)$ como

$$z = (x, y) = x + iy.$$

Proposição 3.1

Todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser unicamente representado na forma

$$z = x + iy,$$

com x e y números reais. Além disso, segue que $i^2 = -1$.

Observe que $i^2 = -1$ segue diretamente da definição de multiplicação $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

A expressão $x + iy$ é denominada **forma algébrica ou representação algébrica** do número complexo $z = (x, y)$. Assim, podemos escrever $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Para um número complexo $\alpha = (a, b) = a + ib$ com $a, b \in \mathbb{R}$, a é chamado de **parte real** do número complexo α e é denotado por $\Re\alpha$; de maneira semelhante b é chamado de **parte imaginária** de α e é denotado por $\Im\alpha$. Assim, os números reais são números complexos cuja parte imaginária é zero. Por

outro lado, os números complexos cuja parte real é zero são chamados de **puramente imaginários**. Note que a parte real e a parte imaginária de um número complexo são reais.

Observa-se que usando a representação algébrica do número complexo $z = (x, y)$, as operações usuais de adição e multiplicação podem ser feitas da mesma forma que faz-se com números reais. Ou seja,

Adição:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Multiplicação:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

Assim, a partir de agora, pode-se utilizar a representação algébrica para realizar os cálculos com números complexos.

3.3 Conjugado de um número complexo

Definição 3.2

Para um número complexo $\alpha = (a, b) = a + ib$, o número $(a, -b) = a - ib$ é chamado de **conjugado complexo** ou o número complexo conjugado de α e é denotado por $\bar{\alpha}$.

A seguir, verifica-se algumas propriedades envolvendo o conjugado de um número complexo. São as seguintes:

i) $\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$.

$$\begin{aligned} \overline{\alpha + \beta} &= \overline{a + ib + c + id} \\ &= \overline{a + c + ib + id} \\ &= (a + c) - i(b + d) \\ &= (a - ib) + (c - id) \\ &= \bar{\alpha} + \bar{\beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha - \beta} &= \overline{a + ib - c - id} \\ &= \overline{a - c + ib - id} \\ &= (a - c) + i(b - d) \\ &= (a + ib) - (c + id) \\ &= \bar{\alpha} - \bar{\beta}. \end{aligned}$$

ii) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$.

$$\begin{aligned} \overline{\alpha \cdot \beta} &= \overline{(a + ib) \cdot (c + id)} \\ &= \overline{ac + iad + ibc + i^2bd} \\ &= \overline{ac - bd + iad + ibc} \\ &= \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} \\ &= (ac - bd) - i(ad + bc) \\ &= ac - bd - iad - ibc \\ &= ac + i^2bd - iad - ibc \\ &= ac - iad - ibc + i^2bd \\ &= a(c - id) - ib(c - id) \\ &= (a - ib) \cdot (c - id) \\ &= \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}. \end{aligned}$$

iii) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$, se $\beta \neq 0$.

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + iad - ibc - i^2bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd - ibc + iad}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + iad - ibc - i^2bd}{(c + id)(c - id)} \\ &= \frac{a(c + id) - ib(c + id)}{(c + id)(c - id)} \\ &= \frac{(a - ib)(c + id)}{(c + id)(c - id)} \\ &= \frac{(a - ib)}{(c - id)} \\ &= \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}. \end{aligned}$$

iv) $\Re\alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$.

$$\frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{a + a}{2} = \frac{2a}{2} = a = \Re\alpha.$$

$$v) \Im\alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}.$$

$$\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i} = \frac{a + ib - (a - ib)}{2i} = \frac{a + ib - a + ib}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b = \Im\alpha.$$

$$vi) \overline{\bar{\alpha}} = \alpha.$$

$$\alpha = a + ib$$

$$\bar{\alpha} = a - ib$$

$$\overline{\bar{\alpha}} = a + ib = \alpha.$$

$$vii) \overline{\alpha^{-1}} = \frac{1}{\bar{\alpha}}.$$

Como $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$, segue que $\overline{\left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\right)} = \overline{1} = 1$. Ou seja, $\bar{\alpha} \cdot \overline{\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = 1$. Logo, $\overline{\alpha^{-1}} = \frac{1}{\bar{\alpha}}$.

Observe que para qualquer número complexo $\alpha = a + ib$, o produto

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \bar{\alpha} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 - aib + iab - i^2b^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

é sempre real e não negativo.

Note que $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}}$. Isso implica que $|\alpha|^2 = \alpha \cdot \bar{\alpha}$. Tem-se então a seguinte definição:

Definição 3.3

O número $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é chamado de **módulo ou valor absoluto** do número complexo $\alpha = a + ib$.

Teorema 3.2

Dado o número complexo α , tem-se que $|\alpha| = 0$ se, e somente se, $\alpha = 0$.

Demonstração: Seja $\alpha = a + ib$. Então $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$. Assim, como $a, b \in \mathbb{R}$, temos que

$$|\alpha| = 0 \Leftrightarrow |\alpha|^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } b = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

■

Note que usa-se o fato de que a e b são números reais, pois, caso contrário, $a^2 + b^2 = 0$ não implicaria em $a = b = 0$. Por exemplo, seja $a = 1$ e $b = i$, então

$$a^2 + b^2 = 1^2 + i^2 = 1 - 1 = 0,$$

mas nem $a = 0$ e nem $b = 0$.

Algumas propriedades referentes ao módulo de um número complexo são dadas na proposição a seguir.

Proposição 3.2

As seguintes propriedades são válidas:

i) $|\Re\alpha| \leq |\alpha|$.

ii) $|\Im\alpha| \leq |\alpha|$.

iii) $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$.

iv) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$. Em particular, $|\alpha| = |-\alpha|$.

v) $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, onde $\beta \neq 0$.

Demonstração:

(i) Seja $\alpha = a + ib$. Assim, $\Re\alpha = a$ então

$$|\Re\alpha| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|.$$

(ii) Seja $\alpha = a + ib$. Assim, $\Im\alpha = b$ e

$$|\Im\alpha| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|.$$

(iii) Seja $\alpha = a + ib$. Então $\bar{\alpha} = a - ib$ e

$$|\bar{\alpha}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|.$$

(iv) Seja $\alpha = a + ib$ e $\beta = c + id$. Então

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (a + ib)(c + id) \\ &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= ac + iad + ibc - bd \\ &= ac - bd + iad + ibc \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \\ \Rightarrow |\alpha\beta| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}. \end{aligned}$$

Tem-se ainda que

$$\begin{aligned} \alpha\beta \cdot \overline{\alpha\beta} &= [(ac - bd) + i(ad + bc)][(ac - bd) - i(ad + bc)] \\ &= (ac - bd)^2 - i^2(ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2) \\ &= (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\alpha\beta| &= \sqrt{\alpha\beta \cdot \overline{\alpha\beta}} \\ &= \sqrt{(c^2 + d^2) \cdot (a^2 + b^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{(c^2 + d^2)} \\ &= |\alpha| \cdot |\beta|. \end{aligned}$$

Tomando $\beta = -1$, obtemos da parte anterior que $|\alpha| = |-\alpha|$. Observamos que também podemos mostrar a propriedade (iv) usando apenas o fato de que $|\alpha|^2 = \alpha \cdot \bar{\alpha}$.

(v) Agora

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{a + ib}{c + id} \\ &= \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} \\ &= \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2 - icd + icd - i^2d^2} \\ &= \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} &= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) \cdot \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} - i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) \\
&= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2 \\
&= \frac{(ac+bd)^2}{(c^2+d^2)^2} + \frac{(bc-ad)^2}{(c^2+d^2)^2} \\
&= \frac{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2}{(c^2+d^2)(c^2+d^2)} \\
&= \frac{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + b^2c^2}{(c^2+d^2)(c^2+d^2)} \\
&= \frac{a^2(c^2+d^2) + b^2(d^2+c^2)}{(c^2+d^2)(c^2+d^2)} \\
&= \frac{(c^2+d^2)(a^2+b^2)}{(c^2+d^2)(c^2+d^2)} \\
&= \frac{(a^2+b^2)}{(c^2+d^2)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

Portanto, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

■

Teorema 3.3

Para quaisquer números complexos α e β , tem-se que $\alpha\beta = 0$ se, e somente se, $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

Demonstração:

Pelo Teorema 3.2,

$$\begin{aligned}
\alpha\beta = 0 &\Leftrightarrow |\alpha\beta| = 0 \\
&\Leftrightarrow |\alpha| \cdot |\beta| = 0.
\end{aligned}$$

Como $|\alpha|$ e $|\beta|$ são números reais,

$$|\alpha| \cdot |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 0 \text{ ou } |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0.$$


Teorema 3.4: Desigualdade Triangular

Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Demonstração: Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + |z_2|^2. \quad (I) \end{aligned}$$

Seja $z_1 \cdot \overline{z_2} = \gamma$. Daí, $\overline{\gamma} = \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$. Logo,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 &= z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} \\ &= \frac{2}{2} \cdot (z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2) \\ &= 2 \cdot \frac{(z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2)}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{(\gamma + \overline{\gamma})}{2} \\ &= 2 \cdot \Re \gamma. \end{aligned}$$

Então, $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \cdot \Re(z_1 \cdot \overline{z_2})$. Assim, reescreve-se (I) da seguinte forma

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2 \cdot \Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2. \end{aligned}$$

Como $\Re \alpha \leq |\alpha|$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2 \cdot |z_1 \cdot \overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2 \cdot |z_1| \cdot |\overline{z_2}| + |z_2|^2. \end{aligned}$$

Mas $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Assim

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Como $|z_1 + z_2|$ e $|z_1| + |z_2|$ são não negativos, segue que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Note que $z_1 = (z_1 + z_2) + (-z_2)$. Daí, usando a desigualdade provada acima, tem-se

$$\begin{aligned} |z_1| &= |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \\ &\leq |z_1 + z_2| + |-z_2| \\ &\leq |z_1 + z_2| + |z_2|, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Trocando z_1 e z_2

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 + z_1| = |z_1 + z_2|.$$

Portanto, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

■

Uma pergunta que surge é quando a desigualdade triangular se torna uma igualdade. Se $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, está claro que a igualdade ocorre. Portanto, consideramos o caso $z_1 \cdot z_2 \neq 0$. De acordo com a demonstração acima, vê-se que a igualdade ocorre se, e somente se,

$$\Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|.$$

Note que um número complexo α satisfaz $\Re \alpha = |\alpha|$ se, e somente se, α é um número real não negativo. Portanto, a desigualdade triangular se torna igualdade se, e somente se,

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 \geq 0.$$

Supondo que $z_2 \neq 0$, dividindo os dois lados por $|z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2 > 0$, obtém-se

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} > \frac{0}{z_2 \overline{z_2}} = 0.$$

Logo, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ se, e somente se,

$$\frac{z_1}{z_2} > 0,$$

ou quando $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$. Note que $z_1/z_2 > 0$ significa que um dos números complexos é um múltiplo positivo do outro número complexo, ou seja, $z_1 = tz_2$ com t sendo um número real não-negativo.

3.4 O Plano Complexo

Na Seção 3.1 definiu-se números complexos como um par ordenado de números reais. Dessa forma, a cada número complexo $z = x + yi$ corresponde o par ordenado (x, y) do plano \mathbb{R}^2 .

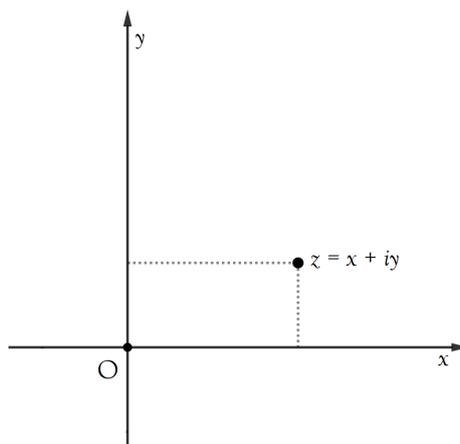


Figura 3.1: Representação de z no Plano Complexo

Observe que com a correspondência acima, um número real $x = x + i0$ corresponde ao ponto $(x, 0)$ no eixo Ox e um número puramente imaginário $iy = 0 + iy$ corresponde ao ponto $(0, y)$ no eixo Oy . Chamaremos o eixo Ox de **eixo real** e o eixo Oy de **eixo imaginário**. Um plano munido com os eixos real e imaginário é chamado de **plano complexo** ou **plano Gaussiano**.

Note que a soma de números complexos no plano complexo \mathbb{C} é exatamente a soma de vetores. Sejam $z = x + iy$ e $w = u + iv$, então

$$z + w = (x + u) + i(y + v).$$

Dessa forma, considere os números complexos como vetores, ou seja, um número complexo

$z = x + iy$ será identificado com um vetor cujo ponto inicial é a origem do sistema cartesiano e cujo ponto final é o ponto (x, y) .

Então a soma $z + w$ corresponde ao vetor diagonal do paralelogramo formado por dois vetores z e w , ou seja, a soma é o vetor cujo ponto inicial é $(0, 0)$ e o ponto final é $(x + u, y + v)$.

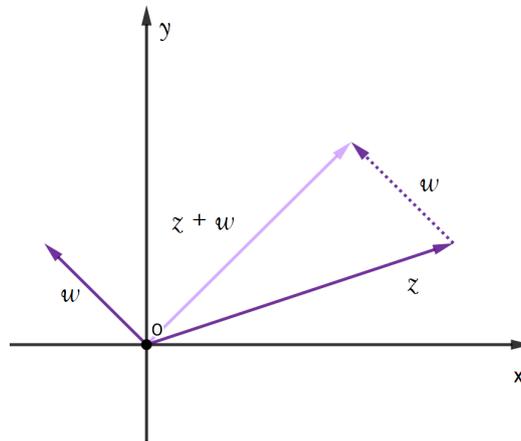


Figura 3.2: Representação da soma de vetores no Plano Complexo

Exemplo 3.1

Demonstre a soma dos vetores $z = 1 + 2i$ e $w = -4 + 3i$ no Plano Complexo.

Demonstração:

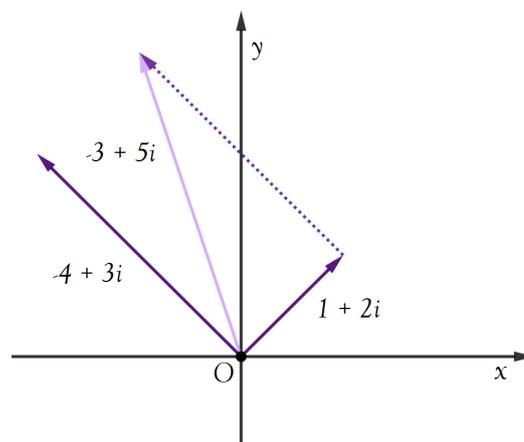


Figura 3.3: Representação de $z + w$ no Plano Complexo

■

Assim, identifica-se um número complexo com um ponto ou um vetor no plano complexo.

Considere agora um múltiplo real de um número complexo. Para $z = x + iy$ e $c \in \mathbb{R}$, então

$$cz = c(x + iy) = cx + icy.$$

Assim, no plano complexo, se $c > 0$, multiplica-se o comprimento do vetor por c , mantendo a mesma direção e sentido, se $c < 0$, multiplica-se o comprimento do vetor por $|c|$ e troca-se o sentido do vetor.

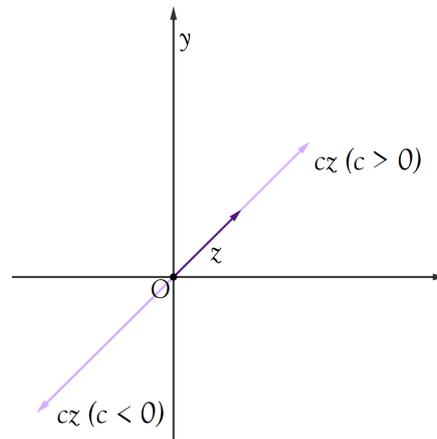


Figura 3.4: Produto do comprimento do vetor por c

Em particular, como $-w = (-1)w$, segue que $z - w = z + (-w)$, ou seja, inverte-se o sentido do vetor w para obter $-w$ e desenha-se o vetor $-w$ com ponto inicial no ponto final de z . O vetor com ponto inicial sendo o mesmo de z e o ponto final o mesmo de $-w$, representa o vetor $z - w$.

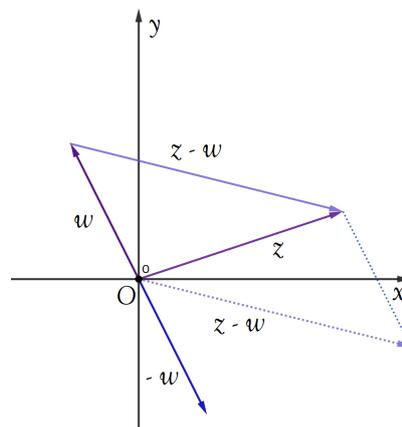


Figura 3.5: Representação do vetor $z - w$

Devido à identificação dos números complexos com pontos do plano, a partir de agora será denotado o vetor com ponto inicial em w e ponto final em z por \overrightarrow{wz} , isto é, $\overrightarrow{wz} = z - w$.

Usando as observações acima tem-se o seguinte exemplo:

Exemplo 3.2

Sejam z_1 e z_2 dois pontos no plano complexo. Então o ponto médio do segmento ligando z_1 e z_2 é dado por

$$z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

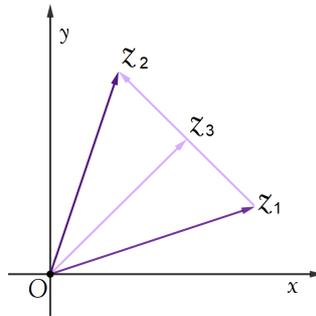


Figura 3.6: Representação do ponto médio do segmento z_1z_2

De fato, seja z_3 o ponto médio do segmento z_1z_2 . O vetor com ponto inicial em z_1 e ponto final em z_2 é dado por $\overrightarrow{z_1z_2} = z_2 - z_1$. Como o vetor $\overrightarrow{z_1z_3} = \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$ e $z_3 = z_1 + \overrightarrow{z_1z_3}$, segue que

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + \overrightarrow{z_1z_3} \\ &= z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1) \\ &= z_1 + \frac{z_2}{2} - \frac{z_1}{2} \\ &= \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2}. \end{aligned}$$

3.5 Forma polar de um número complexo

Nessa seção, apresenta-se a forma polar dos números complexos, a qual é uma ferramenta muito útil para realizar a multiplicação de números complexos. Para um ponto $P = (x, y)$, que corresponde ao número complexo $z = x + iy$ no plano cartesiano, considere o vetor \overrightarrow{OP} . Seja θ o ângulo entre \overrightarrow{OP} e o semieixo positivo Ox e $r = \overline{OP}$. Então tem-se que $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$.

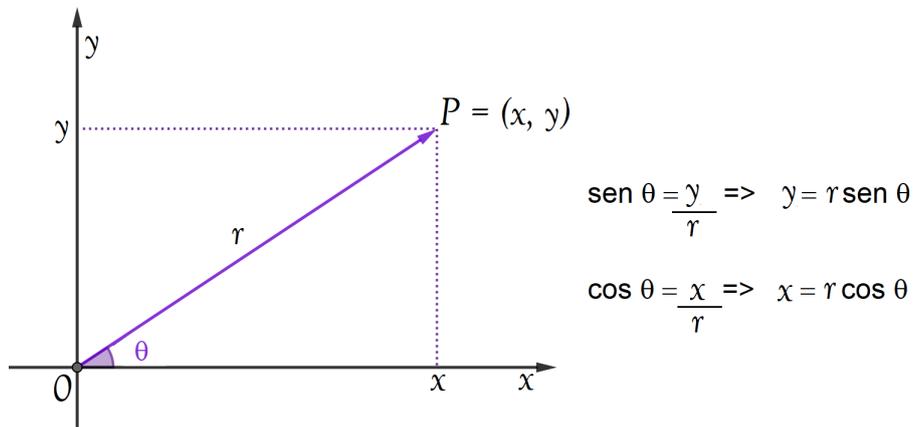


Figura 3.7: Forma polar de um número complexo

O ângulo θ é chamado de **argumento** do número complexo z . Chama-se de (r, θ) as coordenadas polares do ponto P . Observa-se que a origem é o único ponto onde $r = 0$ e que o argumento θ do ponto na origem não é definido. Além disso,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Se $z = x + iy \neq 0$, então pode-se escrever a representação polar de z como:

$$z = x + iy$$

$$z = r \cdot \text{cos } \theta + i \cdot r \cdot \text{sen } \theta$$

$$z = r \cdot (\text{cos } \theta + i \cdot \text{sen } \theta).$$

onde, $r = |z|$ e $\theta = \text{arg } z$ é o argumento de z .

Proposição 3.3

Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, tem-se que:

(i) z é real se, e somente se $\text{arg } z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) z é imaginário puro se, e somente se, $\text{arg } z = \pm \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

A figura a seguir mostra os casos citados na proposição acima.

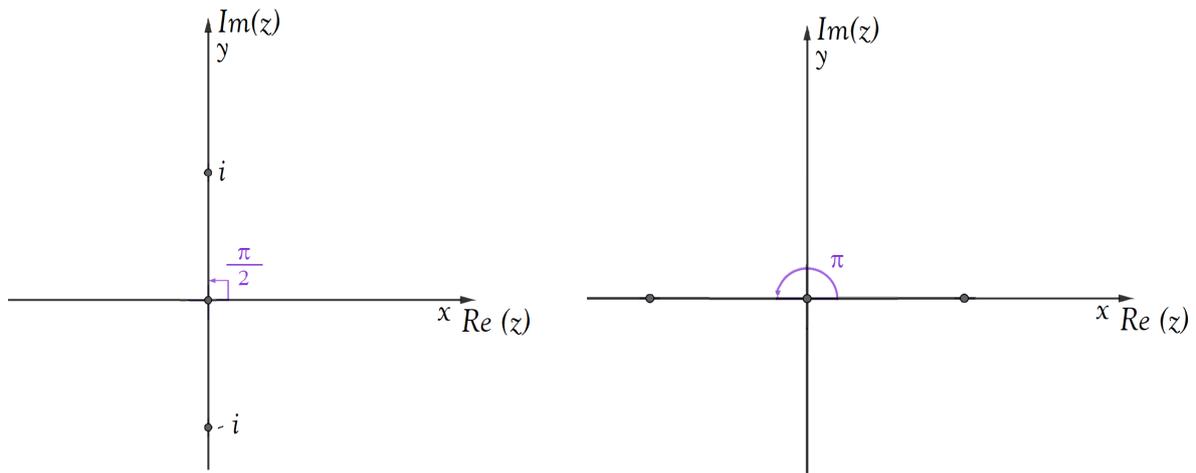


Figura 3.8: Imaginário Puro e Real

Exemplos:

1. Seja $z = -1$. Então, $|-1| = 1$ e $arg(-1) = \pi + 2n\pi = (2n + 1)\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$);
2. Seja $z = i$. Então, $|i| = 1$ e $arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$);
3. Seja $z = 1 - i$. Então, $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ e $arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$);
4. Seja $w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Então,

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

Além disso, se $\theta = arg(w)$, então

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \text{ e } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, $\theta = 2\pi/3 + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$). Veja figura abaixo.

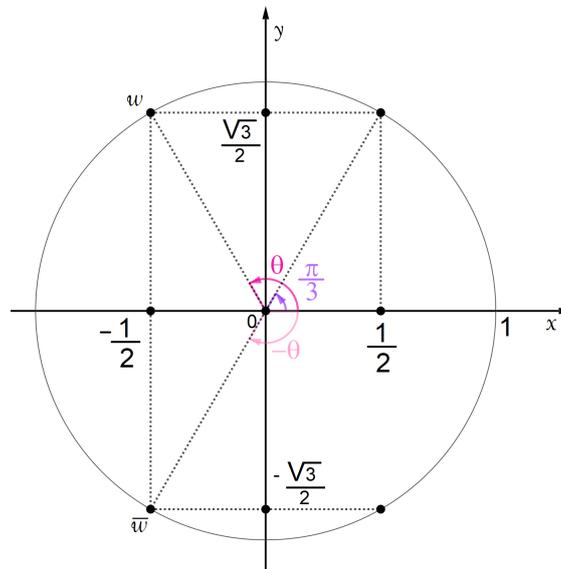


Figura 3.9: As raízes de w

Um cálculo simples revela que $w^2 = \bar{w}$, $w^2 + w + 1 = 0$ e $w^3 = 1$. Como $|w| = |w^2| = 1$, os pontos w e w^2 juntamente com o ponto $(1, 0)$ são vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário, conforme figura abaixo.

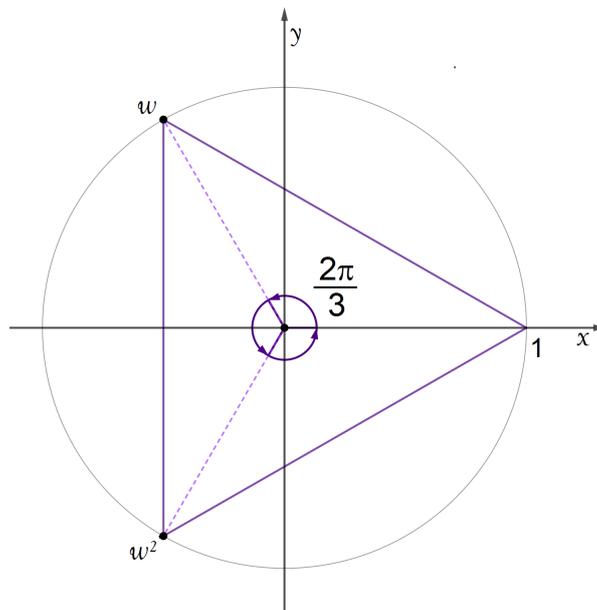


Figura 3.10: Triângulo equilátero com vértices $(1, 0)$, w e w^2

Usando a forma polar, a multiplicação de dois números complexos fica mais simples de realizar, como pode ser visto no teorema a seguir.

Teorema 3.5

Se $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2)$ então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2).$$

Dessa forma,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{e} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

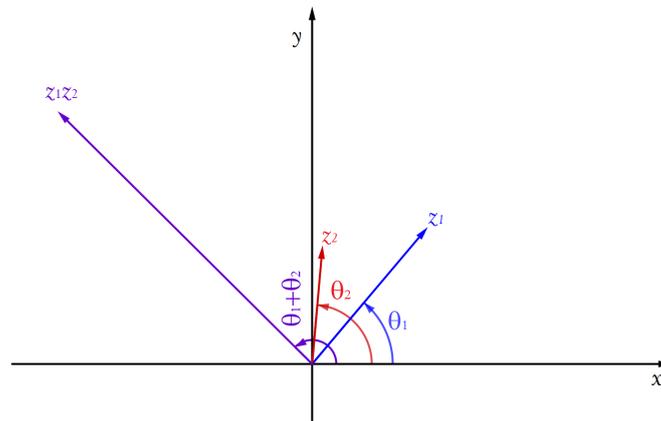


Figura 3.11: Representação do produto de dois números complexos

Demonstração:

Tem-se que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\cos\theta_1 \text{sen}\theta_2 + i\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + i^2 \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 + i\cos\theta_1 \text{sen}\theta_2 + i\text{sen}\theta_1 \cos\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
 |z_1 z_2| &= \sqrt{r_1^2 r_2^2 \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + r_1^2 r_2^2 \operatorname{sen}^2(\theta_1 + \theta_2)} \\
 &= \sqrt{r_1^2 r_2^2 [\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \operatorname{sen}^2(\theta_1 + \theta_2)]} \\
 &= \sqrt{r_1^2 r_2^2 \cdot 1} \\
 &= r_1 r_2 \\
 &= |z_1| |z_2|.
 \end{aligned}$$

Logo, da forma polar de $z_1 z_2$ temos que $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ e $\operatorname{arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \operatorname{arg}(z_1) + \operatorname{arg}(z_2)$.

Segue diretamente do teorema acima o seguinte resultado:

Corolário 3.1

Dados os números complexos z_1, z_2, \dots, z_n , tem-se que

$$|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$$

e

$$\operatorname{arg}(z_1 z_2 \dots z_n) = \operatorname{arg}(z_1) + \operatorname{arg}(z_2) + \dots + \operatorname{arg}(z_n).$$

Demonstração:

Vamos demonstrar por indução em $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Para $n = 2$ temos pelo teorema 3.5 que

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

e

$$\operatorname{arg}(z_1 z_2) = \operatorname{arg}(z_1) + \operatorname{arg}(z_2)$$

Suponha que a hipótese vale para $n = k$. Mostrar-se que o resultado vale para $n = k + 1$. Usando a hipótese de indução e que o resultado vale para segue que

$$|z_1 z_2 \dots z_k z_{k+1}| = |z_1 z_2 \dots z_k| \dots |z_{k+1}| = |z_1| |z_2| \dots |z_k| |z_{k+1}|$$

e

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_k z_{k+1}) = \arg(z_1 z_2 \dots z_k) \arg(z_{k+1}) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \dots + \arg(z_k) + \arg(z_{k+1}).$$

Assim o resultado é válido para todo $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

■

A Fórmula de De Moivre nos mostra como calcular a potência de um número complexo. Uma potência inteira de um número complexo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, é definida por

$$z^0 = 1, \quad z^1 = z, \quad z^2 = z \cdot z, \quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Corolário 3.2: De Moivre

Seja $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Disso segue que

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{e} \quad \arg(z^n) = n \arg(z).$$

Demonstração:

Os casos $n = 0, 1$ são triviais. O caso $n \geq 2$ segue diretamente do corolário 3.2 considerando $z_1 = z_2 = \dots = z_n$. Entretanto, será detalhado novamente a prova por indução em $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Assim, suponha que o resultado é válido para $n = k$. Mostra-se que vale também para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
 z^{k+1} &= z^k \cdot z \\
 &= r^k \cdot (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) \cdot [r^1 \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)] \\
 &= r^k \cdot r^1 \cdot (\cos k\theta \cdot \cos \theta + \cos k\theta \cdot i \operatorname{sen} \theta + i \operatorname{sen} k\theta \cdot \cos \theta + i^2 \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen} k\theta) \\
 &= r^{k+1} \cdot (\cos k\theta \cdot \cos \theta - \operatorname{sen} k\theta \cdot \operatorname{sen} \theta + i \operatorname{sen} k\theta \cdot \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \cdot \cos k\theta) \\
 &= r^{k+1} \cdot [\cos(k\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(k\theta + \theta)] \\
 &= r^{k+1} \cdot [\cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta].
 \end{aligned}$$

Portanto, provamos por indução que a fórmula é válida para $n \geq 0$.

Agora vamos mostrar o caso $n = -1$.

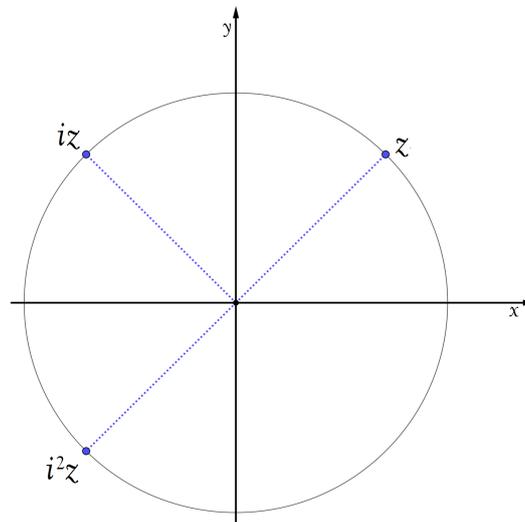


Figura 3.12: Multiplicação por i^2

$$\begin{aligned}
 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) &= \cos^2 \theta - (i \operatorname{sen} \theta)^2 \\
 &= \cos^2 \theta - i^2 \operatorname{sen}^2 \theta \\
 &= \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, obtem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} &= \frac{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} \\
 \Rightarrow \frac{(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{r} &= \frac{1}{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} \\
 \Rightarrow \frac{(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{r} &= \frac{1}{r} \cdot (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) \\
 &= \frac{1}{r} \cdot [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)].
 \end{aligned}$$

Como $\cos(-\theta) = \cos \theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} &= \frac{1}{r} \cdot [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] \\ \Rightarrow \frac{1}{z} &= \frac{1}{r} \cdot [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] \\ \Rightarrow z^{-1} &= r^{-1} \cdot [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]. \end{aligned}$$

Assim, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$ e $\operatorname{arg}(z^{-1}) = -\operatorname{arg}(z)$.

Segue imediatamente dos casos provados acima que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$z^{-n} = r^{-n} [\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)].$$

■

Corolário 3.3

Dados z_1, z_2 , com $z_2 \neq 0$, tem-se que

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{e} \quad \operatorname{arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{arg}(z_1) - \operatorname{arg}(z_2).$$

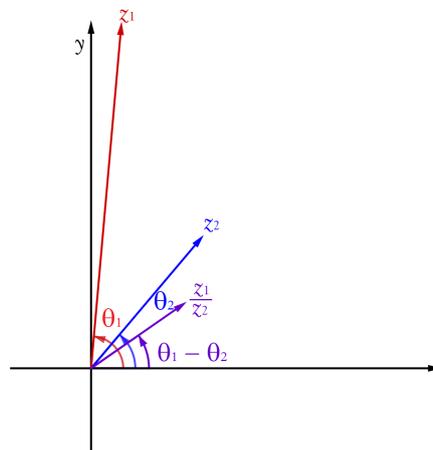


Figura 3.13: Quociente de números complexos

Os resultados anteriores mostram que, ao considerar os números complexos na sua forma polar para realizar um produto ou quociente, enxerga-se geometricamente, e muito mais facilmente, o resultado de cada operação feita. Por exemplo, multiplicar z_1 por um número complexo z_2 significa aumentar (ou reduzir) o módulo de z_1 por um fator de $|z_2|$ e rotacionar z_1 no sentido anti-horário (sentido positivo), por um ângulo de $\operatorname{arg}(z_2)$. Para entender melhor, basta olhar para o resultado do produto abaixo. Sendo

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

tem-se

$$z_3 = z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)].$$

O módulo de z_3 é $r_1 r_2$ e $\operatorname{arg}(z_3) = \theta_1 + \theta_2$.

Dados os pontos z_1 e z_2 no plano complexo, podemos construir o produto $z_3 = z_1 z_2$ geometricamente. Basta observar que os triângulos $\triangle O1z_1$ e $\triangle Oz_2z_3$ são semelhantes (com a mesma orientação).

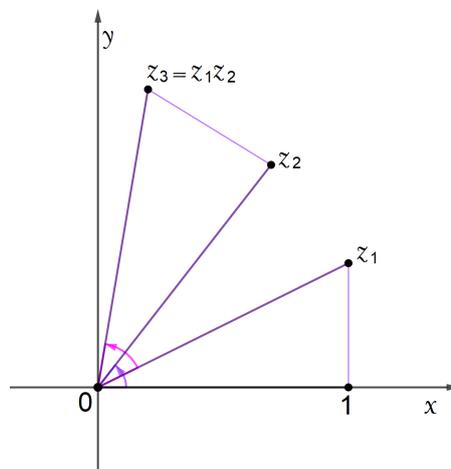


Figura 3.14: Triângulos semelhantes $\triangle O1z_1$ e $\triangle Oz_2z_3$

Observe que multiplicar por i significa rotacionar por um ângulo de $\operatorname{arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário. Observe que multiplicar um número complexo por i^2 significa rotacioná-lo duas vezes por um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário (sentido positivo), ou seja, é o mesmo que multiplicar por -1 .

Do mesmo modo que foi feito anteriormente, para construir o quociente $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$ geometricamente, basta observar que os triângulos $\triangle Oz_2z_1$ e $\triangle O1z_4$ da figura 3.15 abaixo, são semelhantes (com a mesma orientação). O módulo de z_4 é r_1/r_2 e $\operatorname{arg}(z_4) = \theta_1 - \theta_2$. Assim, ao dividir z_1 por z_2 , a rotação de z_1 é no sentido horário (sentido negativo) por um ângulo igual ao $\operatorname{arg}(z_2)$.

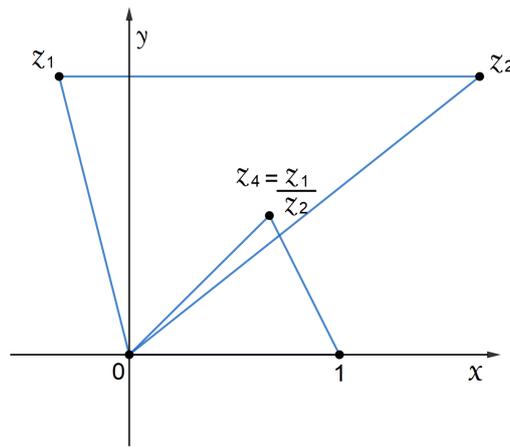


Figura 3.15: Triângulos semelhantes $\Delta O z_2 z_1$ e $\Delta O 1 z_4$

Exemplo 3.3

Construa $\frac{1}{2+i}$ geometricamente.

Seja $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$. Então, como $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2+i}$, pelo que foi visto anteriormente, os triângulos $\Delta O 1 z_1$ e $\Delta O z_2 1$ são semelhantes (com a mesma orientação). Com essa informação, constrói-se $\frac{z_1}{z_2}$ como na Figura 3.16.

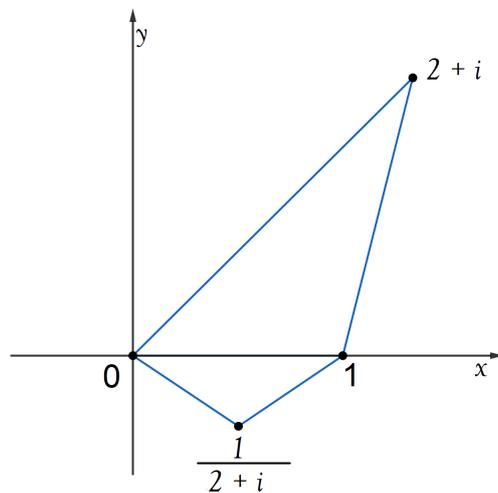


Figura 3.16: Exemplo do quociente z_1/z_2

Foi visto que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ se, e somente se,

$$\frac{z_1}{z_2} > 0,$$

ou quando $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$.

Foi apresentado que $z_1/z_2 > 0$ significa que um dos números complexos é um múltiplo positivo do outro número complexo, ou seja, $z_1 = tz_2$ com t sendo um número real não-negativo. Dessa forma, nota-se que a igualdade vale se, e somente se uma das seguintes condições da proposição a seguir valem.

Proposição 3.4

Dados os números complexos z_1 e z_2 , as seguintes afirmações são equivalentes:

- i) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
- ii) $\Re(z_1 z_2) = |z_1 \bar{z}_2|$
- iii) $z_1 \bar{z}_2$ é um número real não negativo.
- iv) $\frac{z_1}{z_2}$ é um número real positivo ou $z_1 z_2 = 0$.
- v) z_1 e z_2 possuem o mesmo argumento.
- vi) Os vetores $\vec{Oz_1}$ e $\vec{Oz_2}$ possuem o mesmo sentido.

As afirmações acima serão úteis no próximo capítulo, onde apresenta-se aplicações dos números complexos à Geometria Plana.

3.6 As raízes n-ésimas da unidade

O objetivo desta seção é encontrar todas as soluções da equação $z^n = 1$. Isto é equivalente a encontrar as raízes da equação $z^n - 1 = 0$. De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, esta equação possui exatamente n raízes. Essas raízes são chamadas de **raízes n-ésimas da unidade**.

Proposição 3.5

As soluções de $z^n = 1$ são dadas por

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demonstração: Seja $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ uma solução da equação $z^n = 1$. Pela fórmula de DeMoivre, temos que

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Como $z^n = 1$ devemos ter

$$\begin{cases} r = 1 \\ \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta = 1, \end{cases}$$

o que implica que

$$\begin{cases} \cos n\theta = 1 \\ \operatorname{sen} n\theta = 0. \end{cases}$$

Logo, $n\theta = 0 + 2k\pi = 2k\pi$, ou seja, $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Usando DeMoivre é fácil ver que

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

satisfaz a equação dada.

Note que se $k' \equiv k \pmod{n}$ então $z_{k'} = z_k$. De fato, sem perda de generalidade, suponha que $k' = k + jn$, $j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$. Então

$$\begin{aligned} z_{k'} &= \cos \frac{2k'\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k'\pi}{n} \\ &= \cos \left(\frac{2(k+jn)\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2(k+jn)\pi}{n} \right) \\ &= \cos \left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi jn}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi jn}{n} \right) \\ &= \cos \left(\frac{2k\pi}{n} + 2j\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi}{n} + 2j\pi \right) \\ &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \\ &= z_k. \end{aligned}$$

Então há no máximo n raízes distintas z_k , com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Reciprocamente, se $z_{k'} = z_k$, ou seja, se

$$\cos \frac{2k'\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k'\pi}{n} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n},$$

então

$$\frac{2k'\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi,$$

para algum $m \in \mathbb{Z}$. Isso implica que $k' \equiv k \pmod{n}$. Portanto, há exatamente n raízes

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

■

Uma observação importante é que chamando $\omega = z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$, temos que as raízes n -ésimas da unidade são dadas por

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}.$$

Isso segue diretamente da fórmula de DeMoivre. Além disso, as raízes formam os vértices de um polígono regular com n lados inscrito no círculo unitário com um dos vértices no ponto $(1, 0)$.

Exemplo 3.4

Encontre as raízes cúbicas de 1, ou seja, resolva a equação $z^3 = 1$.

Usando a Proposição 3.5, tem-se que as raízes de $z^3 = 1$ são $z_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Assim,

- $k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$;
- $k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

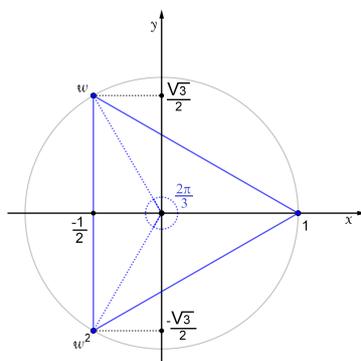


Figura 3.17: Raízes de $z^3 = 1$

Observe que z_0 , z_1 e z_2 possuem módulo igual a 1. Esses três pontos são vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário, com um vértice em 1. Note ainda que se $\omega = z_1$, então $z_2 = \omega^2 = \bar{\omega}$ e $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Será utilizado essa informação no próximo capítulo.

Aplicações dos números complexos à Geometria Plana

Nesse capítulo, mostra-se algumas aplicações dos números complexos à Geometria Plana. O objetivo é apresentar resultados envolvendo os pontos notáveis de um triângulo, em especial demonstrar o Teorema de Napoleão e o Teorema do Círculo dos Nove Pontos, mas agora usando uma abordagem através dos números complexos. Esse capítulo foi baseado na referência [4].

4.1 Semelhança de triângulos

A primeira aplicação é sobre a semelhança de dois triângulos em termos de números complexos. Será determinada uma condição necessária e suficiente para que dois triângulos sejam semelhantes.

Dados os números complexos z_1 , z_2 e z_3 , denota-se por $\Delta z_1 z_2 z_3$ o triângulo cujos vértices são z_1 , z_2 e z_3 . Quando for especificada a ordem dos vértices de um triângulo, ele será dito orientado. A orientação é positiva se os vértices são orientados no sentido anti-horário. A orientação é negativa se os vértices são orientados no sentido horário.

Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta w_1 w_2 w_3$ possuem a mesma orientação se ambos forem positivamente orientados ou ambos negativamente orientados. Os triângulos possuem orientações opostas se um deles tiver orientação positiva e o outro orientação negativa.

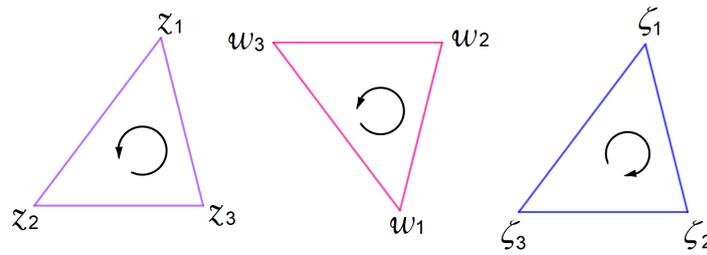


Figura 4.1: Orientação de triângulos

Definição 4.1

Sejam z_1, z_2, z_3, w_1, w_2 e w_3 números complexos. Diz-se que os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta w_1 w_2 w_3$ são semelhantes com a mesma orientação, e indica-se por

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3,$$

se o ângulo em z_k é igual aquele em $w_k, k = 1, 2, 3$, e se eles possuem a mesma orientação, ou seja, estão ambos no sentido anti-horário ou ambos no sentido horário.

Caso os triângulos possuam orientações opostas (um no sentido horário e outro no sentido anti-horário), diz-se que eles são semelhantes com orientação oposta e escreve-se

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \quad (\text{opostos}).$$

Nesse caso, tem-se ainda que o vértice z_k corresponde ao vértice $w_k, k = 1, 2, 3$.

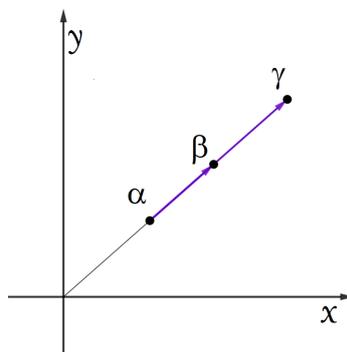
Será fixado algumas notações ao longo desse capítulo. Ainda será usado \parallel para denotar que duas retas (segmentos de retas ou vetores) são paralelas, e a notação \perp para indicar que são ortogonais. Sendo α e β números complexos, o vetor com ponto inicial em α e ponto final em β é denotado por $\vec{\alpha\beta}$. Foi visto no capítulo anterior que $\vec{\alpha\beta} = \beta - \alpha$.

Considere os números complexos distintos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned} \arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} &= \arg (\beta - \alpha) - \arg (\gamma - \alpha) \\ &= \text{ângulo orientado do vetor } \vec{\alpha\gamma} \text{ ao vetor } \vec{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Proposição 4.1

Dados os números complexos distintos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, tem-se que α, β e γ são colineares se, e somente se, $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}$.



Demonstração: A colinearidade de α, β e γ é equivalente a

$$\arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \arg(\beta - \alpha) - \arg(\gamma - \alpha) = 0 \text{ ou } \pi.$$

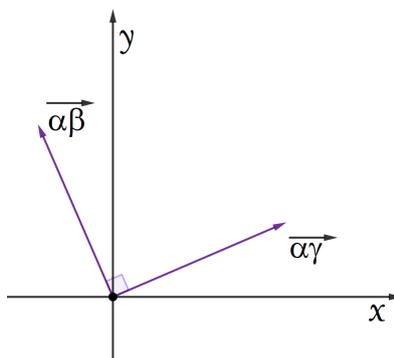
Logo, pela Proposição 3.3 isso é equivalente a $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}$.

■

Segue da Proposição 4.1 que α, β, γ são colineares $\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\overline{\beta - \alpha}}{\overline{\gamma - \alpha}}$.

Proposição 4.2

Dados os números complexos distintos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, tem-se que $\vec{\alpha\beta}$ é ortogonal a $\vec{\alpha\gamma}$ se, e somente se, $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ é puramente imaginário.



Demonstração: A ortogonalidade de $\vec{\alpha\beta}$ e $\vec{\alpha\gamma}$ é equivalente a

$$\arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \arg(\beta - \alpha) - \arg(\gamma - \alpha) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2}.$$

Logo, pela Proposição 3.3 isso é equivalente a $\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ ser puramente imaginário.

■

Assim, pode-se concluir da Proposição 4.2 que

$$\begin{aligned} \vec{\alpha\beta} \perp \vec{\alpha\gamma} &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \quad \text{é puramente imaginário} \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} + \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}} = 0. \end{aligned}$$

Os resultados acima podem ser generalizados considerando agora quatro pontos distintos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Temos que

$$\begin{aligned} \vec{\alpha\beta} \parallel \vec{\gamma\delta} &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} = \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\delta} - \bar{\gamma}}. \end{aligned}$$

Além disso, $\vec{\alpha\beta}$ e $\vec{\gamma\delta}$ possuem mesmo sentido (ou sentidos opostos) se, e somente se, $\frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma}$ é um número real positivo (ou negativo). Da mesma forma, pode-se verificar que

$$\begin{aligned} \vec{\alpha\beta} \perp \vec{\gamma\delta} &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} \quad \text{é puramente imaginário} \\ &\Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} + \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\delta} - \bar{\gamma}} = 0. \end{aligned}$$

Observação 4.1

Sejam dois números complexos z_1 e z_2 . Se $|z_1| = |z_2|$ e $\arg z_1 = \arg z_2$, então $z_1 = z_2$.

Agora, pode-se provar o primeiro teorema sobre semelhança de triângulos.

Teorema 4.1

Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3$ são semelhantes com a mesma orientação se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1}.$$

A última igualdade é equivalente a

$$\begin{vmatrix} z_1 & \omega_1 & 1 \\ z_2 & \omega_2 & 1 \\ z_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração: Dois triângulos são semelhantes se, e somente se as razões dos comprimentos de dois lados correspondentes são iguais e os ângulos correspondentes entre os lados são iguais levando-se em conta a orientação. Então,

$$\begin{aligned} \Delta z_1 z_2 z_3 &\sim \Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ \Leftrightarrow \left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| &= \left| \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} \right| \quad \text{e} \quad \arg \left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right) = \arg \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1}. \end{aligned}$$

Falta mostrar que a última igualdade é equivalente a

$$\begin{vmatrix} z_1 & \omega_1 & 1 \\ z_2 & \omega_2 & 1 \\ z_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1} &\Leftrightarrow (z_2 - z_1) \cdot (\omega_3 - \omega_1) = (z_3 - z_1) \cdot (\omega_2 - \omega_1) \\ &\Leftrightarrow z_2 \omega_3 - z_2 \omega_1 - z_1 \omega_3 + z_1 \omega_1 = z_3 \omega_2 - z_3 \omega_1 - z_1 \omega_2 + z_1 \omega_1 \\ &\Leftrightarrow z_2 \omega_3 - z_2 \omega_1 - z_1 \omega_3 - z_3 \omega_2 + z_3 \omega_1 + z_1 \omega_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \omega_1 & 1 \\ z_2 & \omega_2 & 1 \\ z_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$



Corolário 4.1

Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta w_1 w_2 w_3$ são semelhantes com orientação oposta se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}{\bar{w}_3 - \bar{w}_1}.$$

A última igualdade é equivalente a

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{w}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{w}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{w}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

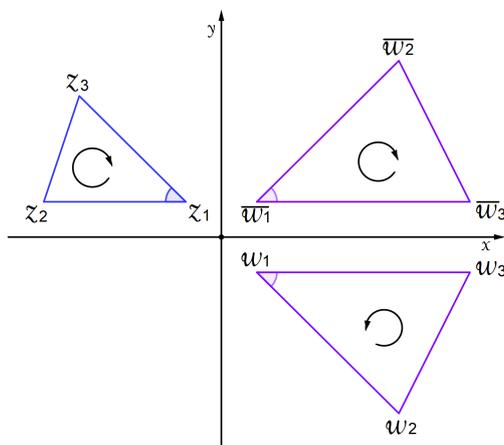


Figura 4.2: Semelhança de triângulos (com orientação oposta)

Demonstração: Temos por hipótese que os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta w_1 w_2 w_3$ são semelhantes com orientação oposta. Além disso, os triângulos $\Delta w_1 w_2 w_3$ e $\Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$ são semelhantes com orientação oposta. Então os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3$ são semelhantes com mesma orientação. Assim,

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3 \text{ (opostos)} \Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \bar{w}_1 \bar{w}_2 \bar{w}_3.$$

Logo, o resultado segue do Teorema 4.1.



Exemplo 4.1

Sejam $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 2i, w_1 = 0, w_2 = -i$ e $w_3 = -2$. Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta w_1 w_2 w_3$ são semelhantes com orientação oposta, pois

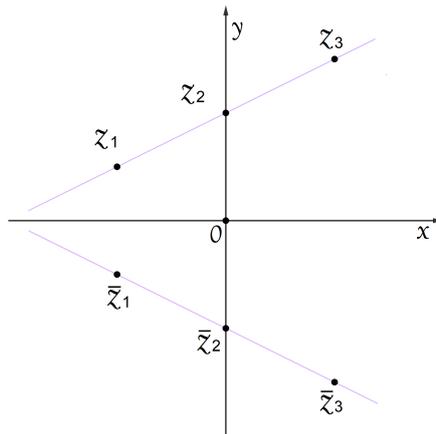
$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{1 - 0}{2i - 0} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{w_2} - \overline{w_1}}{\overline{w_3} - \overline{w_1}} = \frac{i - 0}{-2 - 0} = \frac{-i}{2}.$$

Usando o Teorema 4.1, no exemplo a seguir prova-se uma condição para que três pontos do plano complexo sejam colineares.

Exemplo 4.2

Três pontos $z_1, z_2,$ e z_3 são colineares se, e somente se $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \overline{z_1} \overline{z_2} \overline{z_3}$, o que por sua vez é

equivalente a
$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Demonstração: Como foi visto na consequência da Proposição 4.1, os pontos z_1, z_2, z_3 são colineares se, e somente se $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z_1}}{\overline{z_3} - \overline{z_1}}$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Mas, pelo Teorema 4.1 isso é equivalente a $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \overline{z_1} \overline{z_2} \overline{z_3}$

■

A proposição a seguir fornece uma maneira de descobrir se um dado triângulo é equilátero através de uma relação entre seus vértices e as raízes $1, \omega$ e ω^2 da equação $z^3 = 1$. A ideia central é verificar se o triângulo dado é semelhante ao triângulo $\Delta 1\omega\omega^2$, o qual é equilátero.

Proposição 4.3

Sejam z_1, z_2 e z_3 no plano complexo e considere as raízes $1, \omega$ e ω^2 de $z^3 = 1$ dadas no Exemplo 5.2. Então $\Delta z_1 z_2 z_3$ é equilátero se, e somente se, $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1\omega\omega^2$ ou $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1\omega^2\omega$. Ou seja, $\Delta z_1 z_2 z_3$ é equilátero se, e somente se, $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ ou $z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0$.

Demonstração: No Exemplo 5.2 viu-se que $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, o que implica que $1 = -\omega - \omega^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \omega^2 &= -\omega - 1 \\ \omega \cdot \omega^2 &= \omega \cdot (-\omega - 1) \\ \omega^3 &= -\omega^2 - \omega \\ \omega^3 &= 1 \\ \omega \cdot \omega^3 &= \omega \cdot 1 \\ \omega^4 &= \omega \end{aligned}$$

Segue que o triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ é equilátero se, e somente se, $\Delta z_1 z_2 z_3$ é semelhante ao triângulo $\Delta z_3 z_1 z_2$ com a mesma orientação. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta z_1 z_2 z_3 \text{ é equilátero} &\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z_3 z_1 z_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_2 z_3 - z_1 z_2 - z_1 z_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + (\omega^2 + \omega)z_2 z_3 + (\omega^2 + \omega)z_1 z_2 + (\omega^2 + \omega)z_1 z_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \omega^2 z_2 z_3 + \omega z_2 z_3 + \omega^2 z_1 z_2 + \omega z_1 z_2 + \omega^2 z_1 z_3 + \omega z_1 z_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1^2 + \omega^2 z_1 z_2 + \omega z_1 z_3 + \omega z_1 z_2 + \omega^3 z_2^2 + \omega^2 z_2 z_3 + \omega^2 z_1 z_3 + \omega^4 z_2 z_3 + \omega^3 z_3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) + \omega z_2(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) + \omega^2 z_3(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0 \quad \text{ou} \quad z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0. \end{aligned}$$

Logo,

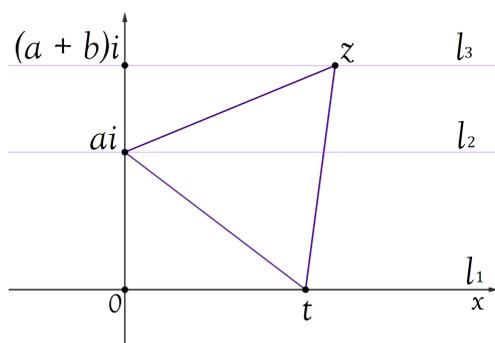
$$\begin{aligned} \Delta z_1 z_2 z_3 \text{ é equilátero} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega \omega^2 \quad \text{ou} \quad \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta 1 \omega^2 \omega. \end{aligned}$$

■

A seguir apresenta-se uma aplicação da Proposição 4.3 em um problema de cálculo de área de um triângulo.

Exemplo 4.3

Considere as retas l_1, l_2, l_3 paralelas uma a outra com l_2 entre l_1 e l_3 . A distância entre l_1 e l_2 é igual a a e entre l_2 e l_3 é igual a b . A área de um triângulo equilátero tendo um vértice em cada uma das três retas paralelas é dada por $A = \frac{\sqrt{3}}{3} (a^2 + ab + b^2)$.



Demonstração: Escolhendo as coordenadas dos vértices como na figura acima. Fixa-se um vértice em ai e move-se um outro vértice t no eixo real e, assim, tenta-se encontrar a posição do terceiro vértice z na reta l_3 . Como o triângulo acima é equilátero tem-se

$$z + ai\omega + t\omega^2 = 0 \quad (\omega^2 + \omega + 1 = 0).$$

Sabendo que $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ segue que

$$\begin{aligned}
 z &= -ai\omega - t\omega^2 \\
 \Rightarrow z &= -ai\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) - t\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\
 \Rightarrow z &= \frac{ai - ai^2\sqrt{3}}{2} + \frac{t + ti\sqrt{3}}{2} \\
 \Rightarrow z &= \frac{ai + a\sqrt{3} + t + ti\sqrt{3}}{2} \\
 \Rightarrow z &= \frac{a\sqrt{3} + t + ai + ti\sqrt{3}}{2} \\
 \Rightarrow z &= \frac{1}{2}[(a\sqrt{3} + t) + i(a + t\sqrt{3})]
 \end{aligned}$$

Como o terceiro vértice z está na reta $\Im z = a + b$, então

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(a + t\sqrt{3}) &= a + b \\
 \Rightarrow a + t\sqrt{3} &= 2a + 2b \\
 \Rightarrow t\sqrt{3} &= 2a + 2b - a \\
 \Rightarrow t &= \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b)
 \end{aligned}$$

Então para encontrar o comprimento do lado do triângulo basta calcular

$$\begin{aligned}
 |t - ai|^2 &= t^2 + (-ai)^2 \\
 &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2b)\right]^2 + a^2i^2 \\
 &= \frac{1}{3}(a + 2b)^2 + a^2 \\
 &= \frac{1}{3}(a^2 + 4ab + 4b^2) + a^2 \\
 &= \frac{a^2 + 4ab + 4b^2 + 3a^2}{3} \\
 &= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2}{3} \\
 &= \frac{4}{3}(a^2 + ab + b^2).
 \end{aligned}$$

Como a área de um triângulo equilátero de lado x é $\frac{x^2 \operatorname{sen}(\pi/3)}{2}$, a área procurada é

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} (a^2 + ab + b^2) \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{2}{3} (a^2 + ab + b^2) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

■

4.2 Equação de reta

Proposição 4.4

Dados dois pontos distintos z_1 e z_2 no plano complexo a equação da reta que passa pelos pontos z_1 e z_2 é dada por

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - \bar{z}(z_2 - z_1) + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = 0$$

Demonstração: Seja z um ponto arbitrário dessa reta. Como z , z_1 e z_2 são colineares, segue do Exemplo 4.2

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Isso implica que z satisfaz

$$\begin{aligned} (z\bar{z}_1 + z_2\bar{z} + z_1\bar{z}_2) - (z_1\bar{z} + z\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) &= 0 \\ \Rightarrow z\bar{z}_1 + z_2\bar{z} + z_1\bar{z}_2 - z_1\bar{z} - z\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 &= 0 \\ \Rightarrow z\bar{z}_1 - z\bar{z}_2 - z_1\bar{z} + z_2\bar{z} - z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 &= 0 \\ \Rightarrow z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - \bar{z}(z_2 - z_1) + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 &= 0 \end{aligned}$$

■

Proposição 4.5

Dados três pontos distintos z_1 , z_2 e z_3 no plano complexo, a equação da reta que passa por z_3 e é perpendicular à reta que passa por z_1 e z_2 é dada por

$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1).$$

Demonstração: Seja z um ponto arbitrário da reta perpendicular do enunciado. Foi visto que $\overrightarrow{zz_3}$ e $\overrightarrow{z_1z_2}$ são perpendiculares se, e somente se

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} \text{ é imaginário puro.}$$

Isso é equivalente a

$$\frac{z - z_3}{z_2 - z_1} + \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = 0.$$

Logo, z satisfaz

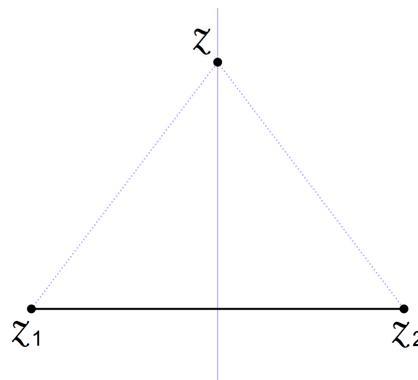
$$(z_2 - z_1)\bar{z} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)z = z_3(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}_3(z_2 - z_1).$$

■

Proposição 4.6

Dados dois pontos distintos z_1 e z_2 no plano complexo, a equação da mediatriz do segmento de reta que une z_1 e z_2 é dada por

$$z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) + |z_1|^2 - |z_2|^2 = 0.$$



Demonstração: Seja z um ponto arbitrário dessa reta. Então $\Delta z z_1 z_2 \sim \Delta z z_2 z_1$ (opostos). Assim pelo Corolário 4.1 segue que: .

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Isso implica que z satisfaz

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow z\bar{z}_2 + z_2\bar{z} + z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z} - z\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow z\bar{z}_2 - z\bar{z}_1 + z_2\bar{z} - z_1\bar{z} + z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + \bar{z}(z_2 - z_1) + |z_1|^2 - |z_2|^2 &= 0 \end{aligned}$$

■

A seguir, apresenta-se a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos z_1 e z_2 do plano complexo. Suponha que z seja um ponto qualquer da reta que passa pelos pontos z_1 e z_2 . Como z , z_1 e z_2 são colineares, segue da Proposição 4.1 que

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$z - z_2 = t(z_1 - z_2),$$

de onde segue que

$$z = (1 - t)z_1 + tz_2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que se z é um ponto do segmento ligando z_1 e z_2 , então

$$z = (1 - t)z_1 + tz_2 \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Exemplo 4.4

Sejam z_1, z_2 e z_3 pontos arbitrários do plano complexo. A equação paramétrica da mediana relativa ao lado $z_2 z_3$ do triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ é

$$z = (1 - t)z_1 + t \frac{z_2 + z_3}{2} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

De fato, como o ponto médio do segmento $z_2 z_3$ é $\frac{z_2 + z_3}{2}$, a equação paramétrica da mediana relativa ao lado $z_2 z_3$ do triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ é

$$z = (1 - t)z_1 + t \frac{z_2 + z_3}{2} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

4.3 Pontos notáveis de um triângulo

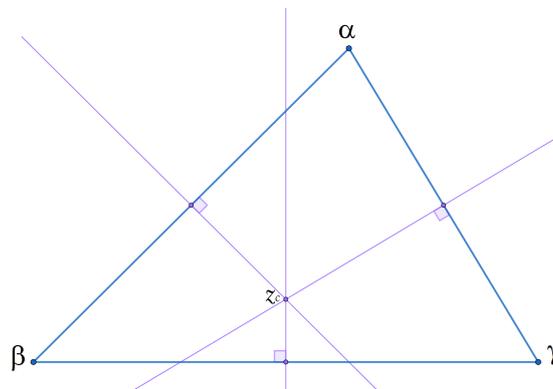
Nessa seção será calculado os pontos notáveis de um triângulo, mas agora usando a teoria dos números complexos. O resultado abaixo fornece o circuncentro de um triângulo a partir de seus vértices.

Teorema 4.2: Circuncentro

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ os vértices de um triângulo qualquer. As mediatrizes dos três lados do triângulo $\Delta \alpha \beta \gamma$ se encontram em um ponto z_c dado por

$$z_c = \frac{|\alpha|^2 (\beta - \gamma) + |\beta|^2 (\gamma - \alpha) + |\gamma|^2 (\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)}.$$

Esse ponto é o **circuncentro** do triângulo.



Demonstração: Sejam os três vértices A, B, C representado pelos três números complexos α, β, γ , respectivamente. Então segue do exemplo anterior que a equação da mediatriz do lado BC é obtida

de

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\gamma} & 1 \\ \gamma & \bar{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} z\bar{\gamma} + \gamma\bar{z} + \beta\bar{\beta} - \beta\bar{z} - z\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} &= 0 \\ \Leftrightarrow z\bar{\gamma} - z\bar{\beta} + \gamma\bar{z} - \beta\bar{z} + \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} &= 0 \\ \Leftrightarrow z(\bar{\gamma} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\gamma - \beta) + |\beta|^2 - |\gamma|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow |\beta|^2 - |\gamma|^2 = -z(\bar{\gamma} - \bar{\beta}) - \bar{z}(\gamma - \beta) \\ \Leftrightarrow |\beta|^2 - |\gamma|^2 = z(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) - \bar{z}(\beta - \gamma). \end{aligned} \quad (I)$$

Da mesma forma, para encontra-se a mediatriz referente ao lado AC , faz-se

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \alpha & \bar{\gamma} & 1 \\ \gamma & \bar{\alpha} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} z\bar{\gamma} + \gamma\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{z} - z\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} &= 0 \\ \Leftrightarrow z\bar{\gamma} - z\bar{\alpha} + \gamma\bar{z} - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} &= 0 \\ \Leftrightarrow z(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) + \bar{z}(\gamma - \alpha) + |\alpha|^2 - |\gamma|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow |\alpha|^2 - |\gamma|^2 = -z(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) - \bar{z}(\gamma - \alpha) \\ \Leftrightarrow |\alpha|^2 - |\gamma|^2 = z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\alpha - \gamma). \end{aligned} \quad (II)$$

E por fim, para encontrar a mediatriz referente ao lado AB faz-se:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \alpha & \bar{\beta} & 1 \\ \beta & \bar{\alpha} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned}
& z\bar{\beta} + \beta\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{z} - z\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 0 \\
\Leftrightarrow & z\bar{\beta} - z\bar{\alpha} + \beta\bar{z} - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 0 \\
\Leftrightarrow & z(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) + \bar{z}(\beta - \alpha) + |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 0 \\
\Leftrightarrow & |\alpha|^2 - |\beta|^2 = -z(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) - \bar{z}(\beta - \alpha) \\
\Leftrightarrow & |\alpha|^2 - |\beta|^2 = z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta). \quad (III)
\end{aligned}$$

Se somar quaisquer duas das três equações acima tem-se a terceira. Isso indica que a solução de quaisquer duas dessas equações satisfaz a terceira automaticamente, ou seja, a interseção de quaisquer duas dessas mediatrizes está na mediatriz restante. Resolvendo o sistema de equações que consiste em duas equações quaisquer das três, obtém-se o circuncentro.

Isolando \bar{z} em (II),

$$\begin{aligned}
|\alpha|^2 - |\gamma|^2 &= z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\alpha - \gamma) \\
\Rightarrow z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{z}(\alpha - \gamma) &= |\alpha|^2 - |\gamma|^2 \\
\Rightarrow \bar{z}(\alpha - \gamma) &= |\alpha|^2 - |\gamma|^2 - z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) \\
\Rightarrow \bar{z} &= \frac{|\alpha|^2 - |\gamma|^2 - z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma})}{(\alpha - \gamma)}.
\end{aligned}$$

Substituindo \bar{z} obtido acima em (III) segue que

$$\begin{aligned}
z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{z}(\alpha - \beta) &= |\alpha|^2 - |\beta|^2 \\
z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \frac{|\alpha|^2 - |\gamma|^2 - z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma})}{(\alpha - \gamma)}(\alpha - \beta) &= |\alpha|^2 - |\beta|^2 \\
\frac{z(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\alpha - \gamma) + [|\alpha|^2 - |\gamma|^2 - z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma})](\alpha - \beta)}{(\alpha - \gamma)} &= \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\alpha - \gamma)}{(\alpha - \gamma)} \\
z(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\alpha - \gamma) - z(\bar{\alpha} - \bar{\gamma})(\alpha - \beta) + |\alpha|^2(\alpha - \beta) - |\gamma|^2(\alpha - \beta) &= (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(\alpha - \gamma) \\
z[(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\alpha - \gamma) - (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})(\alpha - \beta)] &= |\alpha|^2(\alpha - \gamma) - |\beta|^2(\alpha - \gamma) - |\alpha|^2(\alpha - \beta) + |\gamma|^2(\alpha - \beta).
\end{aligned}$$

Isolando z tem-se

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{|\alpha|^2(\alpha - \gamma) - |\beta|^2(\alpha - \gamma) - |\alpha|^2(\alpha - \beta) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)}{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\alpha - \gamma) - (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})(\alpha - \beta)} \\
 &= \frac{|\alpha|^2\alpha - |\alpha|^2\gamma - |\beta|^2\alpha + |\beta|^2\gamma - |\alpha|^2\alpha + |\alpha|^2\beta + |\gamma|^2\alpha - |\gamma|^2\beta}{\bar{\alpha}\alpha - \bar{\alpha}\gamma - \bar{\beta}\alpha + \bar{\beta}\gamma - (\bar{\alpha}\alpha - \bar{\alpha}\beta - \bar{\gamma}\alpha + \bar{\gamma}\beta)} \\
 &= \frac{-|\alpha|^2\gamma - |\beta|^2\alpha + |\beta|^2\gamma + |\alpha|^2\beta + |\gamma|^2\alpha - |\gamma|^2\beta}{\bar{\alpha}\alpha - \bar{\alpha}\gamma - \bar{\beta}\alpha + \bar{\beta}\gamma - \bar{\alpha}\alpha + \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\alpha - \bar{\gamma}\beta} \\
 &= \frac{|\alpha|^2\beta - |\alpha|^2\gamma + |\beta|^2\gamma - |\beta|^2\alpha + |\gamma|^2\alpha - |\gamma|^2\beta}{-\bar{\alpha}\gamma - \bar{\beta}\alpha + \bar{\beta}\gamma + \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\alpha - \bar{\gamma}\beta} \\
 &= \frac{|\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}\beta - \bar{\alpha}\gamma + \bar{\beta}\gamma - \bar{\beta}\alpha + \bar{\gamma}\alpha - \bar{\gamma}\beta} \\
 &= \frac{|\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)}.
 \end{aligned}$$

■

Foi visto no Exemplo 4.4 que a equação paramétrica da mediana relativa ao vértice z_1 do triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ é dada por

$$z = (1 - t)z_1 + t \frac{z_2 + z_3}{2} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Assim, para obter o baricentro do triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$, basta encontrar o ponto que divide a mediana na razão 2 para 1 internamente. Esse ponto é obtido substituindo $t = \frac{2}{3}$ na expressão acima. Fazendo isso obtém-se

$$\begin{aligned}
 z &= \left(1 - \frac{2}{3}\right)z_1 + \frac{2}{3} \frac{(z_2 + z_3)}{2} \\
 \Rightarrow z &= \frac{1}{3}z_1 + \frac{1}{3}(z_2 + z_3) \\
 \Rightarrow z &= \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)
 \end{aligned}$$

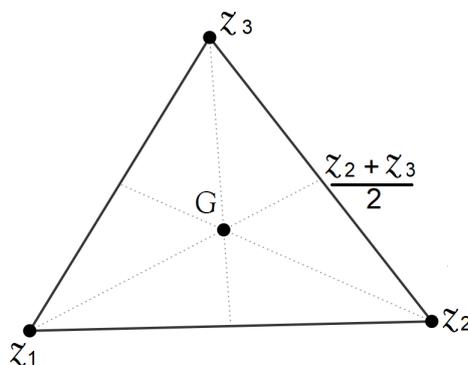


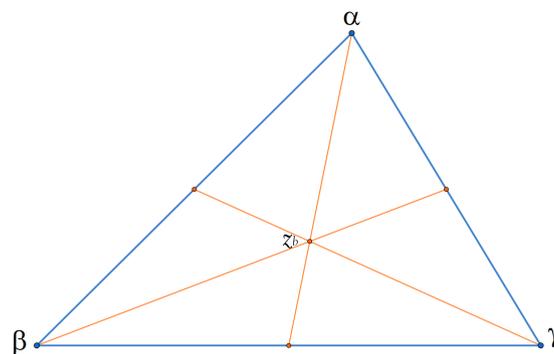
Figura 4.3: Baricentro de um triângulo

Como essa expressão é simétrica com relação a z_1 , z_2 e z_3 , esse ponto também pertence às medianas relativas aos outros dois lados restantes do triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$. Com isso, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 4.7

As três medianas de um triângulo qualquer $\Delta\alpha\beta\gamma$ se encontram em um único ponto, o qual é chamado de **baricentro** ou **centróide** do triângulo e é dado por

$$z_b = \frac{1}{3} (\alpha + \beta + \gamma).$$

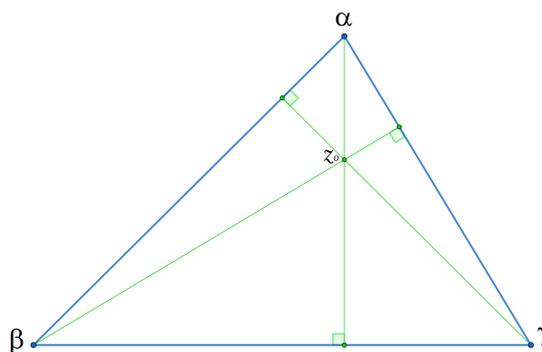


O próximo resultado fornece uma expressão para o ortocentro de um triângulo em função de seus vértices.

Proposição 4.8

As três alturas de um triângulo qualquer $\Delta\alpha\beta\gamma$ se encontram em um único ponto, o qual é chamado de **ortocentro** e é dado por

$$z_o = \alpha + \beta + \gamma.$$



Demonstração: Da Proposição 4.5 tem-se que a equação da reta suporte da altura relativa ao vértice α , que é perpendicular ao lado $\beta\gamma$, é dada por

$$(\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma).$$

Da mesma forma, obtém-se as equações das retas suporte das alturas relativas aos vértices β e γ . Assim, temos um sistema com as três equações

$$\begin{cases} (\beta - \gamma)\bar{z} + (\bar{\beta} - \bar{\gamma})z = \alpha(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) + \bar{\alpha}(\beta - \gamma) \\ (\alpha - \gamma)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\gamma})z = \beta(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}) + \bar{\beta}(\alpha - \gamma) \\ (\alpha - \beta)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z = \gamma(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + \bar{\gamma}(\beta - \gamma) \end{cases}$$

No sistema acima, qualquer uma das três equações é combinação linear das outras duas. Sendo assim, o ponto de interseção de duas delas também satisfaz a terceira equação restante. Isso significa que existe um ponto de interseção das três alturas. Falta encontrar quem é esse ponto. Para isso, suponha, sem perda de generalidade, que o triângulo está inscrito no círculo unitário com centro na origem. Então $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. Disso, segue que

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \quad \bar{\beta} = \frac{1}{\beta} \quad \text{e} \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{\gamma}.$$

Substituindo as igualdades acima nas duas últimas equações do sistema segue que

$$\bar{z} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{z}{\beta\gamma} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{z}{\alpha\beta}.$$

Assim,

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{z}{\beta\gamma} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{z}{\alpha\beta},$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} \beta\gamma - \alpha^2 + z\alpha &= \beta\alpha - \gamma^2 + z\gamma \\ \Leftrightarrow z\alpha - z\gamma &= \alpha^2 - \gamma^2 + \alpha\beta - \beta\gamma \\ \Leftrightarrow (\alpha - \gamma)z &= (\alpha + \gamma)(\alpha - \gamma) + \beta(\alpha - \gamma) \\ \Leftrightarrow z &= \alpha + \beta + \gamma. \end{aligned}$$

A seguir, um exemplo do cálculo do circuncentro, baricentro e ortocentro de um triângulo usando os seus vértices.

■

Exemplo 4.5

Considere o triângulo cujos vértices são $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Temos que $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$.

Assim, o circuncentro é dado por:

$$z_c = \frac{(\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) + (\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)} = 0.$$

Logo, o circuncentro está na origem do plano complexo.

O baricentro é dado por

$$\begin{aligned} z_b &= \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3}(1 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Finalmente, o ortocentro é

$$z_o = (\alpha + \beta + \gamma) = 1 - \sqrt{2}.$$

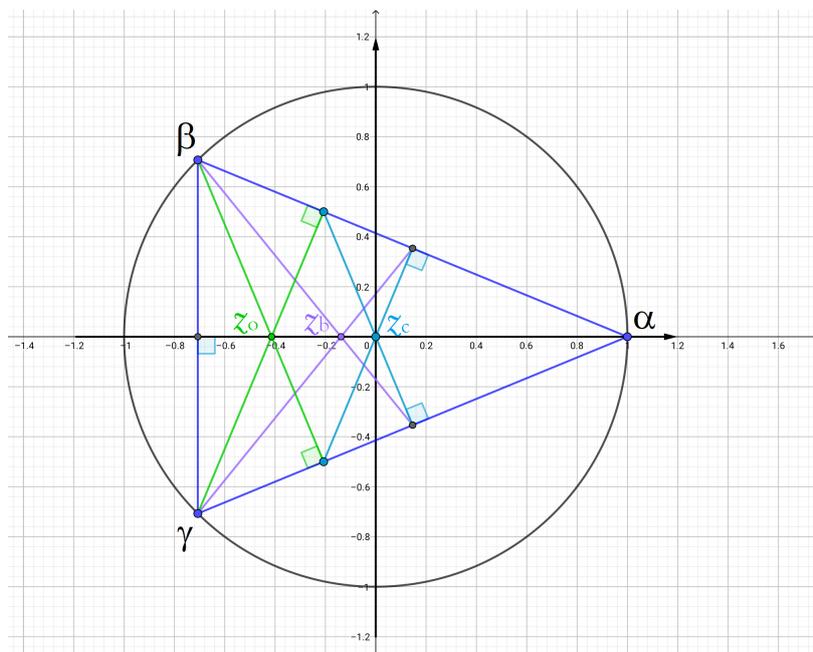


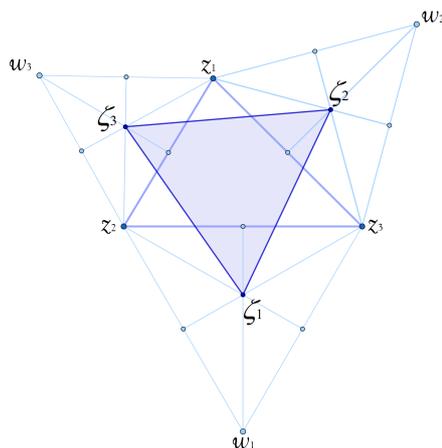
Figura 4.4: Exemplo

4.4 O Teorema de Napoleão e Ptolomeu-Euler

A seguir, será vista a demonstração do Teorema de Napoleão usando a teoria dos números complexos. Apesar da demonstração desse teorema usando apenas conceitos geométricos não ser complicada, a prova abaixo é bem mais simples e de fácil entendimento. Uma vez explicada a condição de semelhança de triângulos e a condição para que um triângulo seja equilátero usando números complexos, essa demonstração é acessível e pode ser trabalhada com os alunos do Ensino Médio, como aplicação da teoria de números complexos.

Teorema 4.3: Teorema de Napoleão

Em cada lado de um triângulo arbitrário, desenhe um triângulo equilátero exterior. Então os bari-centros desses três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero.



Demonstração: Sejam $\Delta z_1 z_2 z_3$ o triângulo dado e $\Delta \omega_1 z_3 z_2$, $\Delta z_3 \omega_2 z_1$, $\Delta z_2 z_1 \omega_3$ triângulos equiláteros com mesma orientação do triângulo $\Delta 1 \omega \omega^2$, onde $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Sejam $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ os baricentros dos triângulos equiláteros $\Delta \omega_1 z_3 z_2$, $\Delta z_3 \omega_2 z_1$, $\Delta z_2 z_1 \omega_3$, respectivamente. Usando a Proposição 4.3 tem-se que

$$\omega_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 = 0$$

$$z_3 + \omega \omega_2 + \omega^2 z_1 = 0$$

$$z_2 + \omega z_1 + \omega^2 \omega_3 = 0$$

Para provar que $\Delta \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ é equilátero, será mostrado que $\zeta_1 + \omega \zeta_2 + \omega^2 \zeta_3 = 0$. Sabe-se que o baricentro do triângulo $\Delta z_1 z_2 z_3$ é dado por

$$z_b = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3 &= \frac{1}{3} \cdot (\omega_1 + z_3 + z_2) + \frac{\omega}{3} \cdot (z_3 + \omega_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3} \cdot (z_2 + z_1 + \omega_3) \\
&= \frac{1}{3} \cdot [(\omega_1 + z_3 + z_2) + \omega(z_3 + \omega_2 + z_1) + \omega^2(z_2 + z_1 + \omega_3)] \\
&= \frac{1}{3} \cdot [\omega_1 + z_3 + z_2 + \omega z_3 + \omega\omega_2 + \omega z_1 + \omega^2 z_2 + \omega^2 z_1 + \omega^2 \omega_3] \\
&= \frac{1}{3} \cdot [(\omega_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega\omega_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 \omega_3)] \\
&= \frac{1}{3} \cdot (0 + 0 + 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3 = 0$ e usando novamente a Proposição 4.3 segue que $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ é equilátero. ■

Também podemos provar o Teorema de Napoleão através da demonstração alternativa abaixo.

Demonstração: (Demonstração alternativa para o Teorema de Napoleão)

Como $\Delta\zeta_1 z_3 z_2 \sim \Delta 01\omega$, tem-se que

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 & 0 & 1 \\ z_3 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo,

$$\zeta_1 + \omega z_3 - z_2 - \omega\zeta_1 = 0 \Rightarrow \zeta_1(1 - \omega) = z_2 - \omega z_3 \Rightarrow \zeta_1 = \frac{z_2 - \omega z_3}{1 - \omega}.$$

Do mesmo modo, para ζ_2 e ζ_3 obtém-se

$$\zeta_2 = \frac{z_3 - \omega z_1}{1 - \omega} \quad \text{e} \quad \zeta_3 = \frac{z_1 - \omega z_2}{1 - \omega}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 + \omega\zeta_2 + \omega^2\zeta_3 &= \frac{z_2 - \omega z_3}{1 - \omega} + \omega \left(\frac{z_3 - \omega z_1}{1 - \omega} \right) + \omega^2 \frac{z_1 - \omega z_2}{1 - \omega} \\
 &= \frac{1}{1 - \omega} \cdot [(z_2 - \omega z_3) + \omega(z_3 - \omega z_1) + \omega^2(z_1 - \omega z_2)] \\
 &= \frac{1}{1 - \omega} \cdot [(z_2 + \omega z_3 + \omega^2 z_1) - (z_2 + \omega z_3 + \omega^2 z_1)] \\
 &= \frac{1}{1 - \omega} \cdot (0 - 0) = 0.
 \end{aligned}$$

Logo, $\Delta\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ é equilátero. ■

Sejam α, β, γ e δ números complexos. É fácil verificar que a seguinte igualdade é verdadeira

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \delta).$$

Assim, usando a desigualdade triangular, encontra-se

$$|\alpha - \gamma| |\beta - \delta| = |(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| \leq |\alpha - \beta| |\gamma - \delta| + |\alpha - \delta| |\beta - \gamma|. (*)$$

O objetivo é determinar quando a desigualdade acima se torna uma igualdade. Foi visto na demonstração do Teorema 3.4 que a igualdade ocorre em $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ se, e somente se $\frac{z_1}{z_2}$ é um número real positivo (com $z_1 \cdot z_2 \neq 0$).

Logo, voltando na desigualdade (*), queremos determinar uma condição que garanta que $\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)}$ seja um número real positivo. Mas,

$$\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha - \delta)} \Big/ \frac{(\gamma - \beta)}{(\gamma - \delta)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arg} \left(\frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha - \delta)} \Big/ \frac{(\gamma - \beta)}{(\gamma - \delta)} \right) = \operatorname{arg} \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \right) - \operatorname{arg} \left(\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta} \right) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arg} \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \right) + \operatorname{arg} \left(\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta} \right) \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Pela Proposição 2.1 segue que α, β, γ e δ são concíclicos, ou seja, estão no mesmo círculo (ou reta) e α e γ estão em lados opostos da corda formada por β e δ .

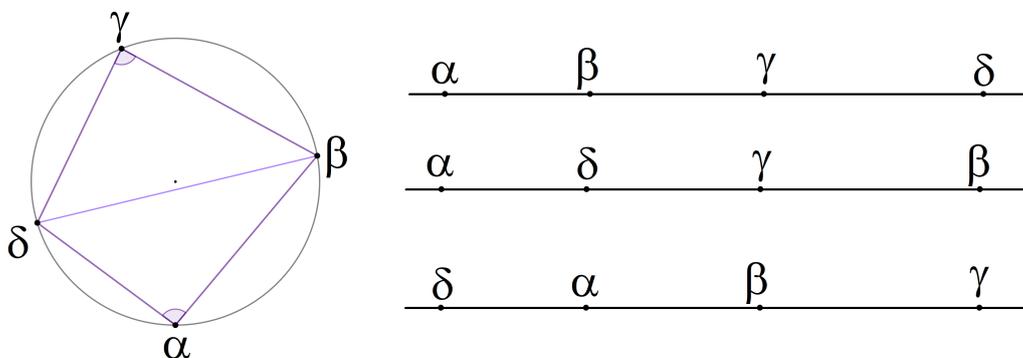


Figura 4.5: Pontos concíclicos (ou colineares)

Como a distância entre os pontos α e β no plano complexo é dada por $|\alpha - \beta|$, voltando na desigualdade

$$|\alpha - \gamma| |\beta - \delta| \leq |\alpha - \beta| |\gamma - \delta| + |\alpha - \delta| |\beta - \gamma|$$

e associando α, β, γ e δ aos pontos A, B, C e D no plano, segue o seguinte teorema:

Teorema 4.4: Ptolomeu-Euler

Dados quaisquer quatro pontos A, B, C e D no plano, tem-se que

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

A igualdade se verifica se, e somente se, os quatro pontos forem concíclicos (ou colineares) e estiverem em ordem alfabética (no sentido horário ou anti-horário).

O resultado acima afirma que um quadrilátero é inscrito em um círculo se, e somente se, o produto das medidas de suas diagonais for igual à soma dos produtos das medidas dos pares de lados opostos. O nome do teorema se deve ao fato da igualdade ter sido descoberta por Ptolomeu e o caso geral por Euler muito tempo depois.

Definição 4.2

A expressão $(\alpha, \beta; \gamma, \delta) := \left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \right) / \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta} \right)$ é chamada de **razão cruzada** dos quatro pontos α, β, γ e δ .

A razão cruzada também pode ser escrita da seguinte forma:

$$(\alpha, \beta; \gamma, \delta) = \left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \delta} \right) / \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta - \delta} \right) = \left(\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \right) / \left(\frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} \right).$$

Utilizando a Definição 4.2 e as observações acima, obtém-se o seguinte resultado:

Corolário 4.2

Quatro pontos α, β, γ e δ são concíclicos (ou colineares) se, e somente se, $(\alpha, \beta; \gamma, \delta) \in \mathbb{R}$.

O caso em que pontos são colineares é considerado como um caso particular de concíclicos.

Exemplo 4.6

Os pontos $1, i, -1$ e $-i$ são concíclicos. De fato, pois a razão cruzada é dada por

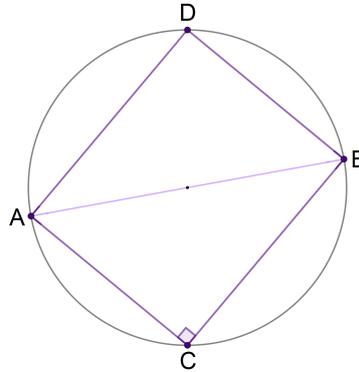
$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right) / \left(\frac{i+1}{i+i} \right) = \left(\frac{2}{1+i} \right) \cdot \left(\frac{2i}{i+1} \right) = \frac{4i}{1+2i+i^2} = \frac{4i}{1+2i-1} = \frac{4i}{2i} = 2 \in \mathbb{R}.$$

O Teorema de Ptolomeu se torna o Teorema de Pitágoras no caso em que o quadrilátero inscrito é um retângulo.

Corolário 4.3: Pitágoras

Em um triângulo retângulo $\triangle ABC$, sendo em C o ângulo reto tem-se que

$$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$$



Demonstração: Seja D um ponto do plano tal que o quadrilátero $ACBD$ seja retângulo. Como a soma dos ângulos opostos é π , segue da Proposição 2.1 que os pontos A, B, C e D são concíclicos. Então pelo Teorema 4.4, encontra-se

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

Como $ACBD$ é retângulo, segue que $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$. Assim,

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BC} &= \overline{AB} \cdot \overline{AB} \\ \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2. \end{aligned}$$

■

A seguir, segue uma aplicação do Teorema de Ptolomeu-Euler.

Exemplo 4.7

Seja $ABCDE$ um pentágono regular de lado l inscrito em um círculo de raio r , P o ponto médio do \widehat{CD} e d o comprimento de uma diagonal. Então

$$dl + l^2 = d^2 \quad \text{e} \quad 2xd = 2rl,$$

onde x é o comprimento do lado de um decágono regular inscrito em um círculo de raio r . Além disso, se $\varphi := \frac{r}{x} = \frac{d}{l}$ então φ satisfaz $\varphi^2 = \varphi + 1$.

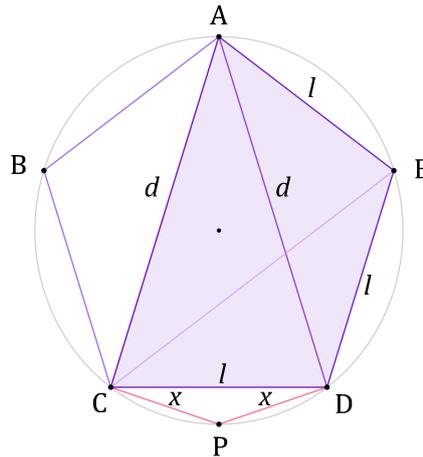


Figura 4.6: Exemplo - Pentágono Regular

Demonstração:

Aplicando o Teorema de Ptolomeu-Euler aos quadriláteros $ACDE$ e $ACPD$. De acordo com a Figura 4.6, tem-se que

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{DE} + \overline{AE} \cdot \overline{CD} &= \overline{AD} \cdot \overline{CE} \\ \Rightarrow d \cdot l + l \cdot l &= d \cdot d \\ \Rightarrow \frac{dl}{l^2} + \frac{l^2}{l^2} &= \frac{d^2}{l^2} \\ \Rightarrow \frac{d}{l} + 1 &= \frac{d^2}{l^2}. \end{aligned}$$

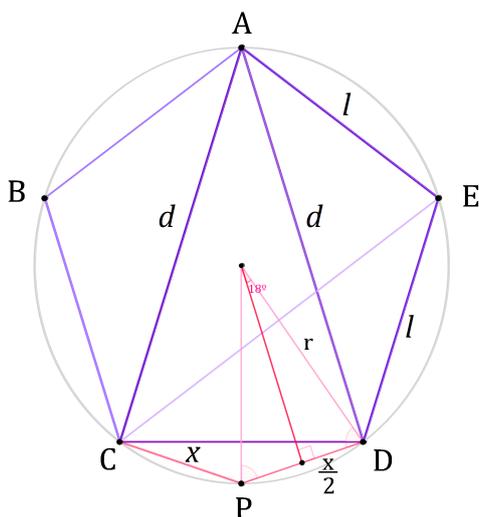


Figura 4.7: P é ponto médio do arco \widehat{CD}

Agora, de acordo com a figura 4.7, segue que

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{PD} + \overline{AD} \cdot \overline{CP} &= \overline{AP} \cdot \overline{CD} \\ \Rightarrow d \cdot x + d \cdot x &= 2r \cdot l \\ \Rightarrow 2dx &= 2rl \\ \Rightarrow dx &= rl \\ \Rightarrow \frac{d}{l} &= \frac{r}{x} \end{aligned}$$

Sendo $\varphi = \frac{r}{x} = \frac{d}{l}$ e como $\frac{d}{l} + 1 = \frac{d^2}{l^2}$ segue que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

■

Observamos que φ , a razão do raio r com o lado x do decágono regular inscrito, é a conhecida razão áurea $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

De fato,

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{x/2}{r} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{r}$$

Sabendo que $\text{sen } 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}-1}{4} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{r} \\ \Rightarrow \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} &= \frac{x}{r} \\ \Rightarrow \frac{r}{x} &= \frac{2}{(\sqrt{5}-1)} \\ \Rightarrow \frac{r}{x} &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} \\ \Rightarrow \varphi = \frac{r}{x} &= \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}. \end{aligned}$$

Um resultado interessante em que o Corolário 4.2 foi fundamental, é o Teorema de Clifford

Teorema 4.5: Clifford

Suponha que há quatro círculos C_1, C_2, C_3, C_4 em um plano, com C_1 e C_2 se intersectando em z_1 e w_1 , C_2 e C_3 se intersectando em z_2 e w_2 , C_3 e C_4 se intersectando em z_3 e w_3 e C_1 e C_4 se intersectando em z_4 e w_4 . Então os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 são concíclicos se, e somente se, w_1, w_2, w_3 e w_4 são concíclicos.

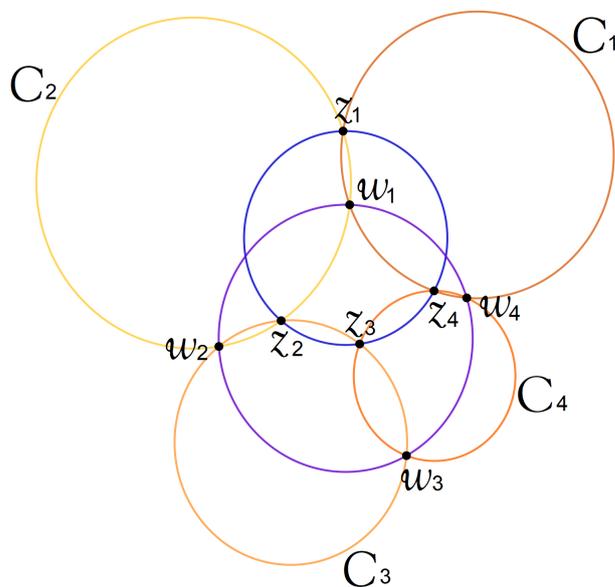


Figura 4.8: Teorema de Clifford

Demonstração: Por hipótese, as seguintes quatro razões cruzadas são números reais

$$\begin{aligned} (z_1, w_2; z_2, w_1) &= \frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} \Big/ \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1}, \\ (z_2, w_3; z_3, w_2) &= \frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} \Big/ \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2}, \\ (z_3, w_4; z_4, w_3) &= \frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} \Big/ \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3}, \\ (z_4, w_1; z_1, w_4) &= \frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} \Big/ \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\frac{(z_1, w_2; z_2, w_1)}{(z_2, w_3; z_3, w_2)} \cdot \frac{(z_3, w_4; z_4, w_3)}{(z_4, w_1; z_1, w_4)} = \\ &= \frac{\frac{z_1 - z_2}{w_2 - z_2} \Big/ \frac{z_1 - w_1}{w_2 - w_1}}{\frac{z_2 - z_3}{w_3 - z_3} \Big/ \frac{z_2 - w_2}{w_3 - w_2}} \cdot \frac{\frac{z_3 - z_4}{w_4 - z_4} \Big/ \frac{z_3 - w_3}{w_4 - w_3}}{\frac{z_4 - z_1}{w_1 - z_1} \Big/ \frac{z_4 - w_4}{w_1 - w_4}} \\ &= \frac{(z_1 - z_2)(w_2 - w_1)(z_3 - z_4)(w_4 - w_3)}{(w_2 - z_2)(z_1 - w_1)(w_4 - z_4)(z_3 - w_3)} \\ &= \frac{(z_2 - z_3)(w_3 - w_2)(z_4 - z_1)(w_1 - w_4)}{(w_3 - z_3)(z_2 - w_2)(w_1 - z_1)(z_4 - w_4)} \\ &= \frac{(z_1 - z_2)(w_2 - w_1)(z_3 - z_4)(w_4 - w_3)(w_3 - z_3)(z_2 - w_2)(w_1 - z_1)(z_4 - w_4)}{(w_2 - z_2)(z_1 - w_1)(w_4 - z_4)(z_3 - w_3)(w_3 - z_3)(z_2 - w_2)(w_1 - z_1)(z_4 - w_4)} \\ &= \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)}{(z_3 - z_2)(z_1 - z_4)(w_3 - w_2)(w_1 - w_4)} \\ &= \left[\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \Big/ \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{w_1 - w_2}{w_3 - w_2} \Big/ \frac{w_1 - w_4}{w_3 - w_4} \right) \right] \\ &= (z_1, z_3; z_2, z_4) \cdot (w_1, w_3; w_2, w_4) \end{aligned}$$

é um número real. Então, $(z_1, z_3; z_2, z_4)$ é real se, e somente se $(w_1, w_3; w_2, w_4)$ é real. Isso significa que os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 são concíclicos se, e somente se, w_1, w_2, w_3 e w_4 são concíclicos.

■

Dize-se que n retas em um plano estão em posição geral se não houver duas delas paralelas e se não houver três delas se encontrando em um único ponto.

Chama-se a interseção de duas retas na posição geral de **ponto de Clifford**. Se três retas estiverem em posição geral, obtém-se três pontos de Clifford, onde cada ponto é a interseção de cada par dessas retas. O círculo que passa por esses três pontos é chamado de **círculo de Clifford das três retas**. Esse círculo é circunscrito ao triângulo formado pelas três retas.

4.5 O Círculo dos Nove Pontos

Nesta seção, apresenta-se uma demonstração do Teorema do Círculo dos Nove Pontos utilizando a teoria dos números complexos. Tal prova é algo interessante para trabalhar com os alunos do Ensino Médio, mostrando a importância dos números complexos na demonstração de um resultado tão interessante da geometria.

Primeiramente, dado um triângulo ΔABC , escolhe-se o circuncentro O como sendo origem do plano complexo e sejam α, β e γ os números complexos representando os vértices A, B, C , respectivamente. Sem perda de generalidade, vamos supor que o círculo circunscrito ao triângulo possui raio 1, ou seja, $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$. Da Proposição 4.8, segue que $\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ é o ortocentro do triângulo ΔABC . Associa-se σ ao ortocentro do triângulo.

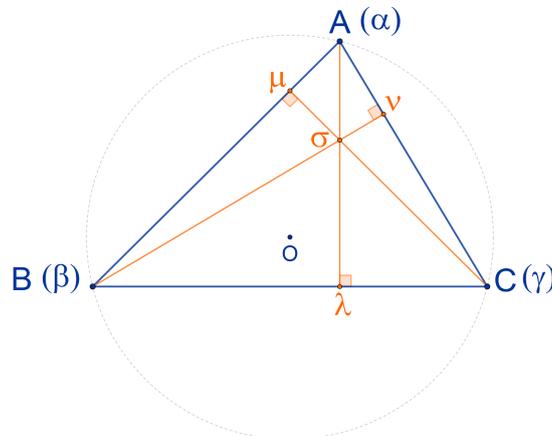


Figura 4.9: Círculo dos nove pontos (1)

Sendo o circuncentro O a origem do plano complexo, então $\frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ é o ponto médio do segmento de reta unindo o circuncentro O e o ortocentro σ . Seja D o ponto médio D do lado BC . Então o número complexo associado a D é $\frac{\beta + \gamma}{2}$. Assim, a distância de $\frac{\sigma}{2}$ a D é calculada da seguinte forma:

$$\left| \frac{\beta + \gamma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\beta + \gamma - \sigma}{2} \right| = \left| \frac{-\alpha}{2} \right| = \frac{|\alpha|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Da mesma forma, calcula-se as distâncias de $\frac{\sigma}{2}$ até o ponto médio E do lado AC e até o ponto médio F do lado AB . Essas distâncias também são iguais a $\frac{1}{2}$, pois

$$\left| \frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \frac{|\beta|}{2} = \frac{1}{2}$$

e

$$\left| \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \frac{|\gamma|}{2} = \frac{1}{2}.$$

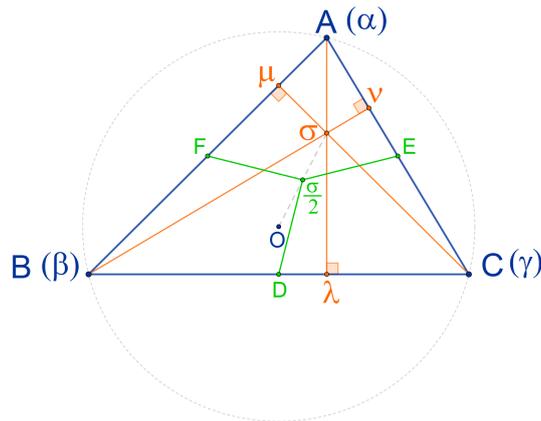


Figura 4.10: Círculo dos nove pontos (2)

Além disso, a distância de $\frac{\sigma}{2}$ ao ponto médio do segmento ligando o ortocentro σ e o vértice A é

$$\left| \frac{\alpha + \sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha + \sigma - \sigma}{2} \right| = \left| \frac{\alpha}{2} \right| = \frac{|\alpha|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Do mesmo modo, as distâncias de $\frac{\sigma}{2}$ ao ponto médio do segmento BH e ao ponto médio do segmento CH também são iguais a $\frac{1}{2}$.

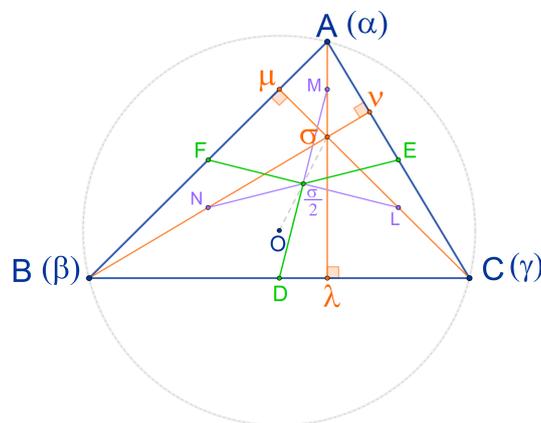


Figura 4.11: Círculo dos nove pontos (3)

$$1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha \cdot \alpha'} = 0 \Rightarrow \frac{\beta\gamma}{\alpha \cdot \alpha'} = -1 \Rightarrow \beta\gamma = -\alpha \cdot \alpha' \Rightarrow \alpha' = -\frac{\beta\gamma}{\alpha}.$$

Segue que $|\alpha'| = 1$ e $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha'} = -1$. Então

$$\arg\left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha'}\right) = \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \arg\left(\frac{\gamma}{\alpha'}\right) = \pi,$$

o que implica que $\overrightarrow{\alpha\alpha'} \perp \overrightarrow{\beta\gamma}$. Então α' é o ponto onde a altura relativa ao vértice A ao lado BC encontra o círculo circunscrito novamente. As distâncias do vértice B a α' e σ são

$$\left|\beta + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha\beta + \beta\gamma}{\alpha}\right| = \left|\frac{\beta}{\alpha}(\alpha + \gamma)\right| = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| |\alpha + \gamma| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} \cdot |\alpha + \gamma| = |\alpha + \gamma|,$$

e

$$|\sigma - \beta| = |\alpha + \beta + \gamma - \beta| = |\alpha + \gamma|,$$

respectivamente. Então o triângulo $\Delta\beta\alpha'\sigma$ é um triângulo isósceles e λ é o ponto médio de $\sigma\alpha'$. Daí,

$$\lambda = \frac{1}{2}(\sigma + \alpha') = \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right).$$

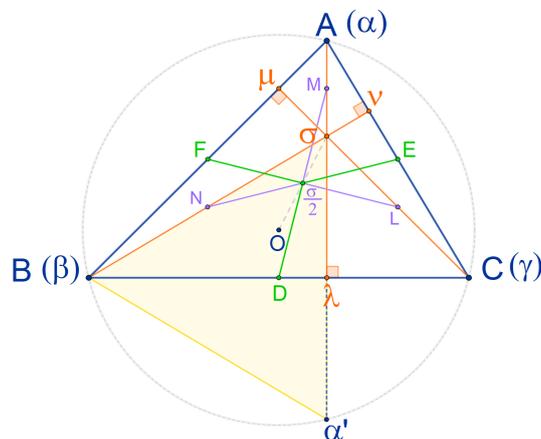


Figura 4.13: Círculo dos nove pontos (5)

A distância de $\frac{\sigma}{2}$ a λ é dada por

$$\left|\lambda - \frac{\sigma}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) - \frac{\sigma}{2}\right| = \left|\frac{\sigma - \frac{\beta\gamma}{\alpha} - \sigma}{2}\right| = \left|-\frac{\beta\gamma}{\alpha} \cdot \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\alpha'}{2}\right| = \frac{|\alpha'|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Do mesmo modo, as distâncias de $\frac{\sigma}{2}$ aos outros dois pés das perpendiculares aos lados AC e AB também são $\frac{1}{2}$. Desses cálculos, obtém-se que as distâncias de $\frac{\sigma}{2}$ aos pontos médios dos lados do triângulo, aos pontos médios dos segmentos que unem o ortocentro aos vértices do triângulo (pontos L, M e N) e aos pés das alturas são iguais a $\frac{1}{2}$. Logo, esses nove pontos estão no círculo de centro $\frac{\sigma}{2}$ e raio $\frac{1}{2}$.

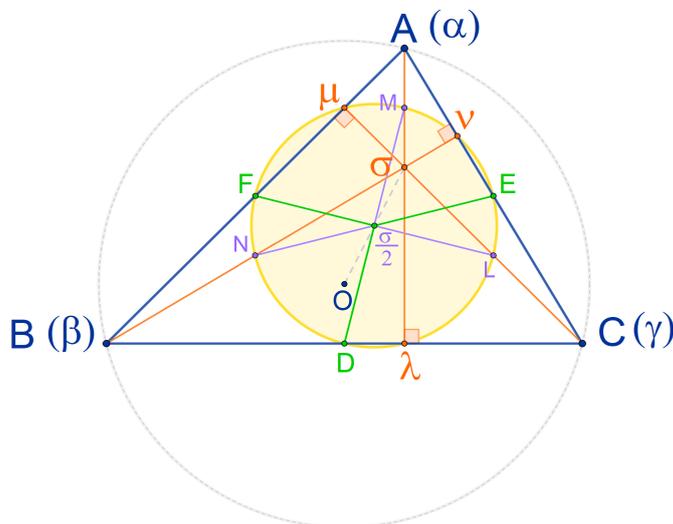


Figura 4.14: Círculo dos nove pontos (6)

O que foi feito acima nada mais é do que a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 4.6: Círculo dos Nove Pontos

Dado um triângulo qualquer, considere os seguintes pontos:

- (i) os pés das três perpendiculares dos vértices aos lados opostos;
- (ii) os pontos médios dos três lados;
- (iii) os pontos médios dos segmentos unindo o ortocentro aos três vértices.

Os nove pontos citados acima estão todos no círculo, cujo centro é o ponto médio do segmento que une o ortocentro ao circuncentro, e cujo raio é a metade do raio do círculo circunscrito.

O ortocentro, circuncentro, baricentro e o centro do círculo dos nove pontos estão sobre uma mesma reta. Essa reta é conhecida como **Reta de Euler** do triângulo.

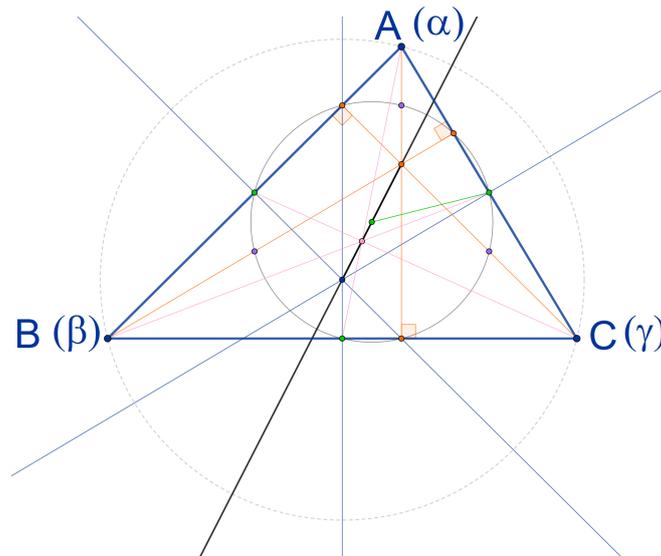


Figura 4.15: A Reta de Euler

Sejam z_1, z_2 e z_3 três pontos arbitrários no círculo unitário $|z| = 1$. Foi visto que o circuncentro, baricentro, o centro do círculo dos nove pontos e o ortocentro do $\Delta z_1 z_2 z_3$ são dados, respectivamente, por

$$O, \quad \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3), \quad \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3), \quad (z_1 + z_2 + z_3)$$

e o raio do círculo dos nove pontos é $\frac{1}{2}$.

Considere quatro pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 no círculo unitário. Apenas a título de informação, pode-se definir o círculo dos nove pontos do quadrilátero $z_1 z_2 z_3 z_4$ da seguinte maneira.

Primeiramente, escolha três desses quatro pontos de cada vez. Então obtém-se quatro triângulos inscritos no círculo unitário. O centro do círculo de nove pontos do triângulo $\Delta z_2 z_3 z_4$ é

$$T_1 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3 + z_4).$$

Da mesma forma, centro do círculo de nove pontos dos triângulos $\Delta z_1 z_3 z_4$, $\Delta z_1 z_2 z_4$ e $\Delta z_1 z_2 z_3$ são, respectivamente,

$$T_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3 + z_4), \quad T_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_4) \quad \text{e} \quad T_4 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Tem-se também que os raios desses círculos são iguais a $\frac{1}{2}$. Considere o ponto $T = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 +$

z_4). Logo,

$$\begin{aligned} |T - T_1| &= \left| \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) - \frac{1}{2}(z_2 + z_3 + z_4) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \cdot z_1 \right| = \frac{1}{2} \cdot |z_1| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \\ |T - T_2| &= \left| \frac{1}{2} \cdot z_2 \right| = \frac{1}{2} \cdot |z_2| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \\ |T - T_3| &= \left| \frac{1}{2} \cdot z_3 \right| = \frac{1}{2} \cdot |z_3| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \\ |T - T_4| &= \left| \frac{1}{2} \cdot z_4 \right| = \frac{1}{2} \cdot |z_4| = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto, o ponto $T = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$ está nos círculos dos nove pontos dos triângulos $\Delta z_2 z_3 z_4$, $\Delta z_1 z_3 z_4$, $\Delta z_1 z_2 z_4$ e $\Delta z_1 z_2 z_3$.

Note que os centros dos quatro círculos dos nove pontos pertencem ao círculo com centro em T e raio $\frac{1}{2}$. A esse círculo é dado o nome de **círculo dos nove pontos do quadrilátero** $z_1 z_2 z_3 z_4$.

Aplicações em sala de aula

Neste capítulo, utilizaremos os conceitos, definições e teoremas estudados anteriormente no planejamento de uma aula para alunos do ensino médio, com o auxílio do software GeoGebra. O GeoGebra será utilizado para fins de demonstração geométrica dos conceitos sobre pontos notáveis, semelhança de triângulos e números complexos. Vale ressaltar que as aulas sugeridas abaixo deverão ser realizadas assim que o professor finalizar o conteúdo de números complexos. O objetivo das aulas é mostrar aos alunos algumas aplicações dos números complexos na geometria, de forma a fazê-los pensar a respeito da interdisciplinaridade que existe entre os temas da Matemática.

5.1 Primeira Aula

Na primeira aula deve-se:

1. revisar os conceitos de pontos notáveis de um triângulo, fazendo a construção desses pontos usando o software GeoGebra;
2. mostrar as fórmulas para o cálculo dos pontos notáveis de um triângulo usando os números complexos e
3. propor aos alunos um exemplo numérico utilizando os números complexos no cálculo dos pontos notáveis.

5.1.1 Pontos Notáveis de um Triângulo

Nesse tópico, deve-se revisar os conceitos de mediana, mediatriz, altura e bissetriz e, em seguida, revisar os teoremas referentes ao baricentro, circuncentro e ortocentro. Pode-se utilizar as definições, teoremas e fórmulas apresentadas anteriormente nesse trabalho.

Para a construção usando o GeoGebra, deve-se acessar o site <https://www.geogebra.org/calculator>.

Utilizando as ferramentas do Geogebra, calcule os pontos notáveis passo a passo com os alunos.

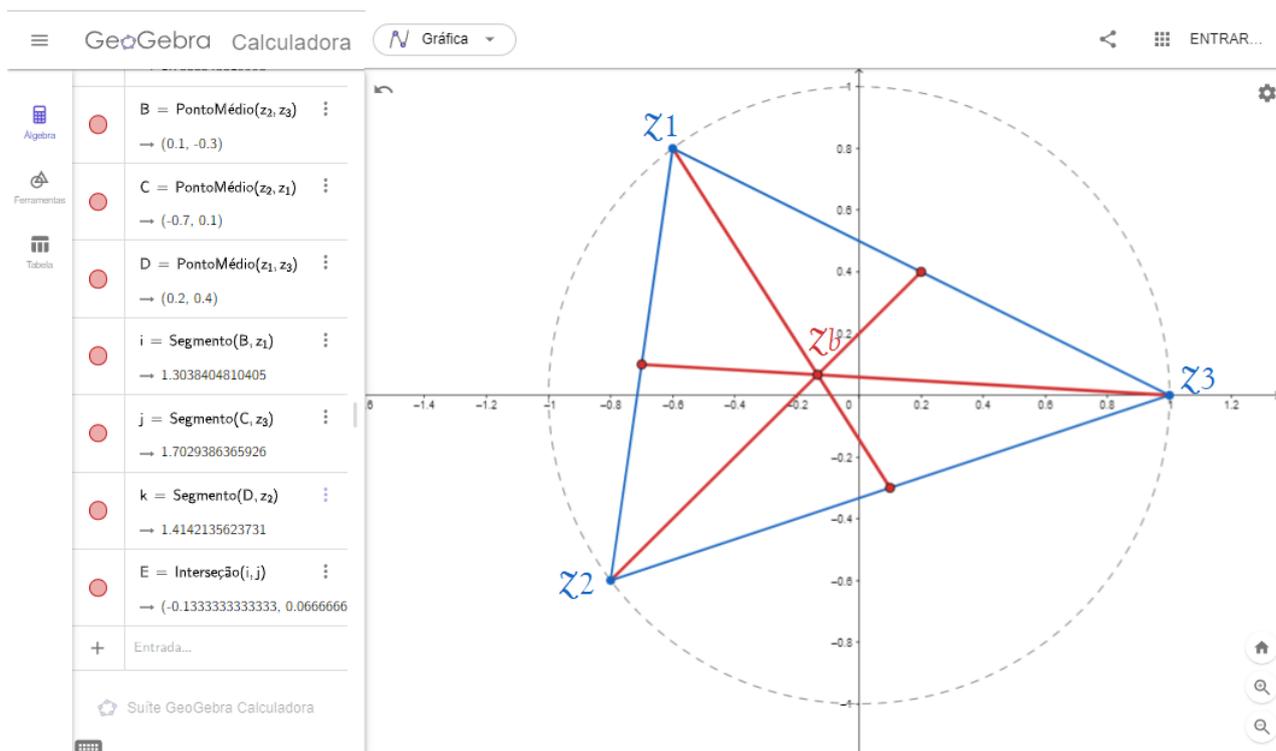


Figura 5.1: Baricentro

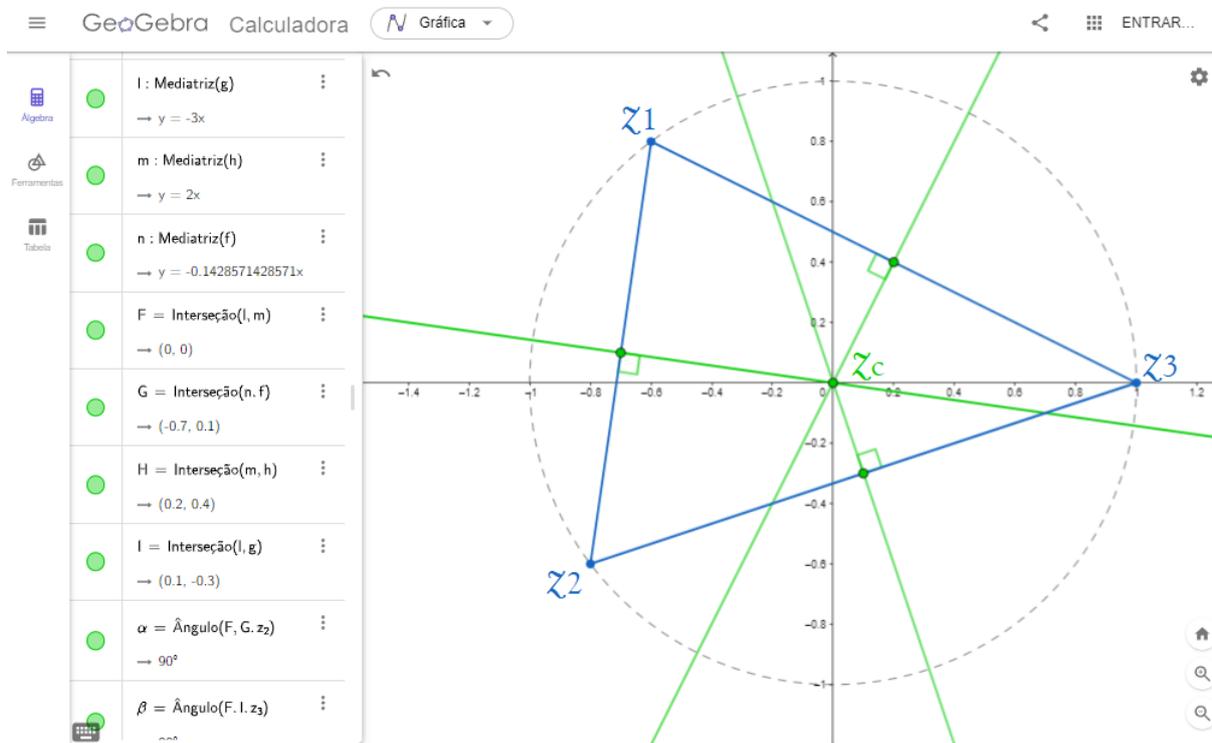


Figura 5.2: Circuncentro

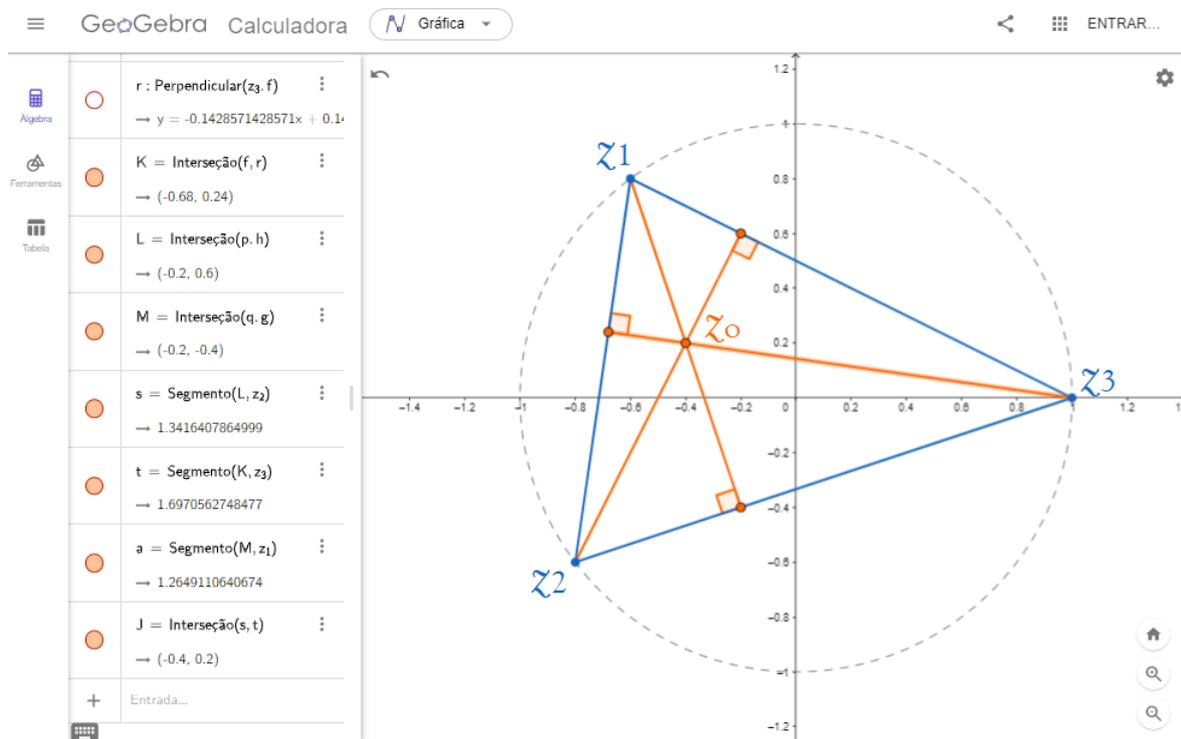


Figura 5.3: Ortocentro

Antes de apresentar as aplicações dos números complexos na geometria plana é importante ter discutido sobre o plano complexo com os alunos, fazendo-se a associação de um número complexo com um ponto no plano.

Agora, apresente as fórmulas para o cálculo dos pontos notáveis através dos números complexos. Considerando $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ e o triângulo cujos vértices são α, β e γ os pontos notáveis são calculados da seguinte forma:

Baricentro: $z_b = \frac{1}{3} (\alpha + \beta + \gamma).$

Circuncentro: $z_c = \frac{|\alpha|^2 (\beta - \gamma) + |\beta|^2 (\gamma - \alpha) + |\gamma|^2 (\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)}.$

Ortocentro: $z_o = \alpha + \beta + \gamma.$

Em seguida, proponha um exemplo usando os números complexos para o cálculo dos pontos notáveis de um triângulo.

Exemplo 5.1

Considere o triângulo cujos vértices são $\alpha = \frac{-3}{5} + \frac{4}{5}i$, $\beta = \frac{-4}{5} - \frac{3}{5}i$ e $\gamma = 1$. Encontre o baricentro, o circuncentro e o ortocentro desse triângulo.

Baricentro:

$$\begin{aligned} z_b &= \frac{1}{3} (\alpha + \beta + \gamma) \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{5} + i\frac{4}{5} - \frac{4}{5} - i\frac{3}{5} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{5} + i\frac{1}{5} \right) \\ &= -\frac{2}{15} + i\frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Circuncentro:

$$\begin{aligned} z_c &= \frac{|\alpha|^2 (\beta - \gamma) + |\beta|^2 (\gamma - \alpha) + |\gamma|^2 (\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)} \\ &= \frac{|1|^2 \left(-\frac{4}{5} - i\frac{3}{5} - 1 \right) + |1|^2 \left(1 + \frac{3}{5} - i\frac{4}{5} \right) + |1|^2 \left(-\frac{3}{5} + i\frac{4}{5} - \frac{4}{5} + i\frac{3}{5} \right)}{\left(\frac{-3}{5} + i\frac{4}{5} \right) \left(-\frac{4}{5} - i\frac{3}{5} - 1 \right) + \left(-\frac{4}{5} + i\frac{3}{5} \right) \left(1 - \frac{3}{5} - i\frac{4}{5} \right) + (1) \left(-\frac{3}{5} + i\frac{4}{5} - \frac{4}{5} + i\frac{3}{5} \right)} \end{aligned}$$

$$z_c = \frac{\frac{-9}{5} - i\frac{3}{5} + \frac{8}{5} - i\frac{4}{5} + \frac{1}{5} + i\frac{7}{5}}{\left(-\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5} - i\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}\right)\left(\frac{8}{5} - i\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5} + i\frac{7}{5}} = 0.$$

Ortocentro:

$$\begin{aligned} z_0 &= \alpha + \beta + \gamma \\ &= \left(-\frac{3}{5} + i\frac{4}{5} - \frac{4}{5} - i\frac{3}{5} + 1\right) \\ &= \left(-\frac{2}{5} + i\frac{1}{5}\right). \end{aligned}$$

5.2 Segunda Aula

Na segunda aula deve-se:

1. revisar a fórmula da multiplicação entre dois números complexos usando a forma polar de um número complexo;
2. encontrar as raízes de $z^3 = 1$ e esboçar o triângulo equilátero formado por elas usando o GeoGebra e
3. definir semelhança de triângulos com mesma orientação e orientação oposta.

5.2.1 Multiplicação entre dois números complexos

O primeiro passo é revisar como fica a multiplicação de dois números complexos e explicar o seu significado. Assim, apresenta-se o Teorema 3.5 visto no Capítulo 3:

Se $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2)$ então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2).$$

Dessa forma,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{e} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Explica-se aqui que para chegar ao resultado basta multiplicar os módulos de z_1 e z_2 e o novo argumento será a soma dos argumentos de z_1 e z_2 . Então nesse ponto utiliza-se o Geogebra para esboçar o número complexo resultante.

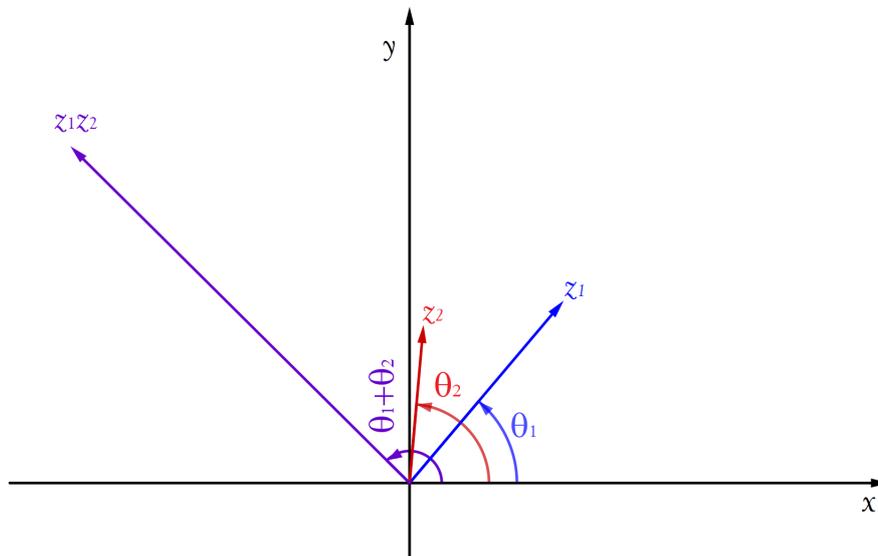


Figura 5.4: Produto de dois números complexos

5.2.2 Raízes de $z^3 = 1$

Nessa parte da aula faz-se uma revisão das raízes de $z^3 = 1$ e, usando o Geogebra, mostra-se que elas formam um triângulo equilátero.

Exemplo 5.2

Encontre as raízes da equação $z^3 = 1$.

Foi visto que as raízes de $z^3 = 1$ são $z_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Assim,

- $k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$;
- $k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $k = 2 \Rightarrow z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

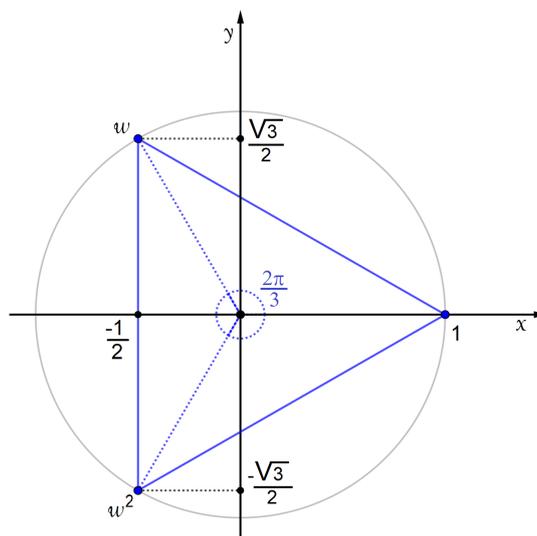


Figura 5.5: Raízes de $z^3 = 1$

5.2.3 Semelhança de triângulos

Nessa etapa deve-se apresentar os conceitos de orientação e semelhança de triângulos. Após isso, discutir as condições para que dois triângulos sejam semelhantes utilizando o Teorema 4.1 e o Corolário 4.1.

Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3$ podem ser semelhantes com a mesma orientação ou com orientações opostas.

Semelhança com mesma orientação: Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3$ são semelhantes com a mesma orientação se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3 - \omega_1}.$$

A última igualdade é equivalente a

$$\begin{vmatrix} z_1 & \omega_1 & 1 \\ z_2 & \omega_2 & 1 \\ z_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Semelhança com orientação oposta: Os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta \omega_1 \omega_2 \omega_3$ são semelhantes com orientação oposta se, e somente se,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1}.$$

A última igualdade é equivalente a

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{\omega}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{\omega}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{\omega}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Feito isso, pode-se propor um exemplo para fixar tais resultados.

Exemplo 5.3

Dados $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = 2i, \omega_1 = 0, \omega_2 = -i$ e $\omega_3 = -2$, verifique se os triângulos $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ e $\Delta_{\omega_1 \omega_2 \omega_3}$ são semelhantes com mesma orientação ou com orientação oposta.

Calculando o determinante,

$$\begin{vmatrix} z_1 & \omega_1 & 1 \\ z_2 & \omega_2 & 1 \\ z_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 1 \\ 2i & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 2) - (0 + 0 + 2) = -2 - 2 = -4 \neq 0.$$

Logo, os triângulos não são semelhantes com a mesma orientação. Agora,

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{\omega}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{\omega}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{\omega}_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \\ 2i & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 2) - (0 + 0 - 2) = -2 + 2 = 0.$$

Portanto os triângulos $\Delta_{z_1 z_2 z_3}$ e $\Delta_{\omega_1 \omega_2 \omega_3}$ são semelhantes com orientação oposta.

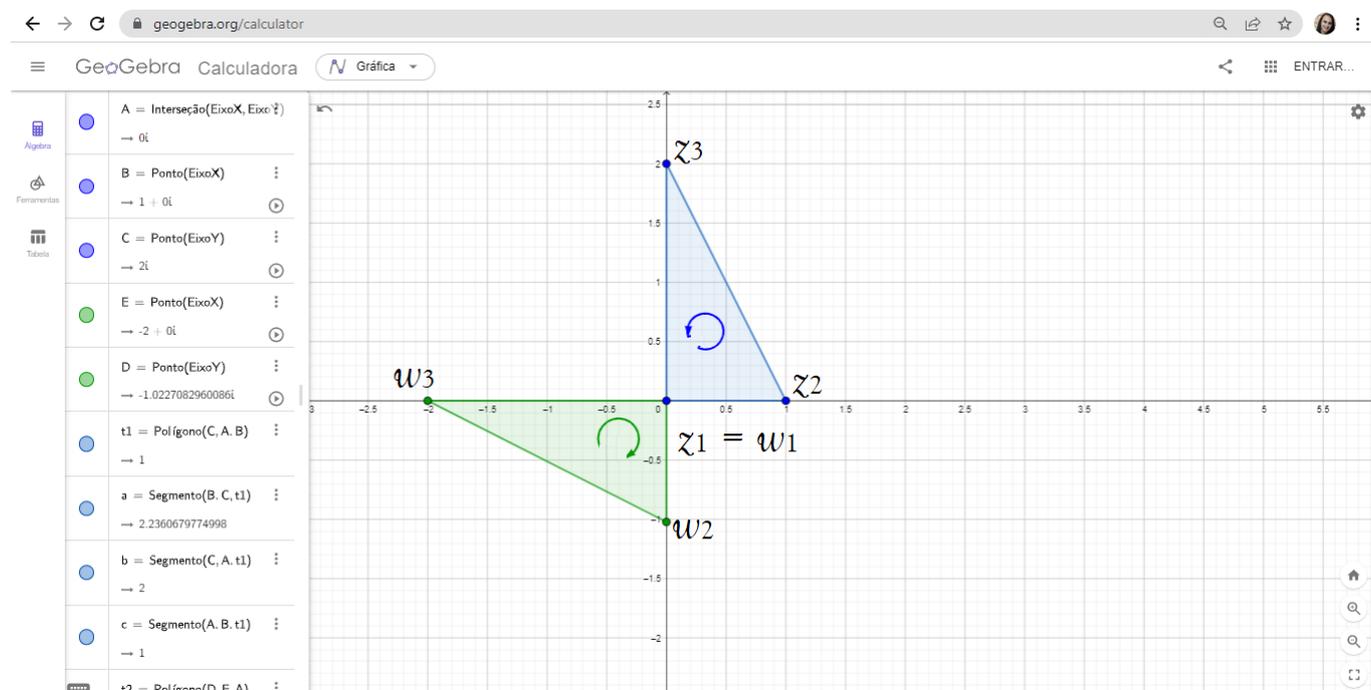


Figura 5.6: Semelhança de $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta w_1 w_2 w_3$

Além do que foi discutido nessas duas aulas, podem ser apresentados também aos alunos os outros resultados do trabalho. Por exemplo, fazer uma aula sobre como verificar se um dado triângulo é equilátero utilizando a Proposição 4.3, como também introduzir a razão cruzada e o Corolário 4.2 para determinar se quatro pontos são concíclicos.

Referências Bibliográficas

- [1] Andreescu, T. e Andrica, D.: *Complex Numbers from A to Z*. Boston: Birkhäuser, 2006.
- [2] Carneiro, J. P.: *A geometria e o ensino dos números complexos*. Revista do Professor de Matemática, 2004.
- [3] Gerônimo, J. R. e Franco, V. S.: *Geometria Plana e Espacial: um estudo axiomático*. Editora da Universidade Estadual de Maringá, 2ª ed., 2010.
- [4] Hahn, L. S.: *Complex Numbers and Geometry*. The Mathematical Association of America (Incorporated), 1ª ed., 1994.
- [5] Nahin, P. J.: *An imaginary tale: the story of $\sqrt{-1}$* . Princeton: Princeton University Press, 1998.
- [6] Rezende, E. Q. F. e Queiroz, M. L. B.: *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Editora Unicamp, 2ª ed., 2008.