

**Universidade Federal de Uberlândia**

**Faculdade de Matemática**

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E  
COMPASSO E OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA  
MATEMÁTICA GREGA**

**Henderson Pires Victor**



**Uberlândia-MG**

**2022**

**Henderson Pires Victor**

**CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E  
COMPASSO E OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA  
MATEMÁTICA GREGA**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção de título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de concentração:** Matemática

**Linha de pesquisa:** Geometria e Topologia

**Orientador(a):** Prof<sup>a</sup> . Dr<sup>a</sup> . Marisa de Souza Costa

**Coorientador(a):** Prof. Dr. Fábio José Bertoloto



**Uberlândia-MG**

**2022**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

V642 2022	<p>Victor, Henderson Pires, 1983- Construções geométricas com régua e compasso e os três problemas clássicos da matemática grega [recurso eletrônico] / Henderson Pires Victor. - 2022.</p> <p>Orientadora: Marisa de Souza Costa. Coorientador: Fábio José Bertoloto. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática. Modo de acesso: Internet. Disponível em: <a href="http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.21">http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.21</a> Inclui bibliografia. Inclui ilustrações.</p> <p>1. Matemática. I. Costa, Marisa de Souza, 1984-, (Orient.). II. Bertoloto, Fábio José, 1980-, (Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 51</p>
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091



### ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT UFU				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional, 9, PROFMAT				
Data:	trinta e um de janeiro de dois mil e vinte e dois	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	11912PFT011				
Nome do Discente:	Henderson Pires Victor				
Título do Trabalho:	Construções geométricas com régua e compasso e os três problemas clássicos da matemática grega				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria e Topologia				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Não há				

Reuniu-se em web conferência pela plataforma Google Meet a Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), assim composta pelas professoras doutoras: Regina Litz Lamblém - UEMS; Ana Carla Piantella- FAMAT/UFU e Marisa de Souza Costa -FAMAT/UFU, orientadora do candidato.

Iniciando os trabalhos a presidente da mesa, Dra. Marisa de Souza Costa, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato agradeceu a presença de todas. Posteriormente, a presidente concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir a senhora presidente concedeu a palavra para as examinadoras que passaram a arguir o candidato. Ultimeada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Ana Carla Piantella, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/01/2022, às 15:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Regina Litz Lamblém, Usuário Externo**, em 31/01/2022, às 15:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Marisa de Souza Costa, Professor(a) do Magistério Superior**, em 31/01/2022, às 16:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://www.sei.ufu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3310942** e o código CRC **8CC5B7BC**.

---

*“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.” - Johannes Kepler*

## Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar, pois sem Ele nada seria possível.

Aos meus pais *Francisco Victor Pereira* e *Maria José Pires*, que me fizeram ser quem eu sou e souberam entender os momentos em que precisei me ausentar para me dedicar à realização deste, assim como minhas irmãs *Iarine Pires Victor* e *Thainne Pires Victor*.

A minha esposa *Mariana Gonçalves Mendes*, que sempre me deu força e amparo em todos os dias dessa longa caminhada. Deu-me suporte, escutou-me sempre que necessário e teve compreensão em todos os momentos. Enfim, foi sempre meu porto seguro.

A todos os professores do Profmat-UFU, que sempre fizeram o melhor e tornaram possível percorrer essa trilha. Em especial à minha orientadora *Marisa de Souza Costa*, por toda a paciência, horas e horas de disponibilidade para ler, reler, dar sugestões e fazer apontamentos sempre pertinentes, o que permitiu a realização deste trabalho. Agradecimentos especiais também ao *Fábio José Bertoloto*, que aceitou no meio da caminhada ser o co-orientador, contribuindo e muito com suas dicas, sugestões, esclarecimento e ideias. Ao professor *Alessandro Alves Santana*, por toda a receptividade e disponibilidade em me ensinar tudo de  $\LaTeX$  para que esse trabalho pudesse ter essa identidade e que, além disso, abriu-me a visão para outras coisas com as quais não tivera o mínimo contato anteriormente. A vocês três, meu muito obrigado! Palavras não são suficientes para expressar a gratidão que sinto por ter tido vocês como meus mentores.

Agradecimentos especiais também a todos os meus colegas dessa primeira turma do Profmat da UFU. Vocês foram essenciais e, se não fosse a união (que é a marca desse grupo), tenho certeza de que não teríamos chegado tão longe.

Aos meus amigos *Edson Marques*, *Natalia Gonçalves*, *Larissa de Pádua* e *Fernando Oliveira*, que sempre me disseram que eu deveria fazer esse curso de mestrado, sempre me encorajaram, dizendo que eu era capaz, mesmo quando eu dizia o contrário. Obrigado por me incentivarem e, com isso, fizeram-me ver que, felizmente, eu estava errado.

A todos os meus colegas docentes do ITV, que, de uma forma ou de outra, apoiaram-me e torceram para que isso fosse possível. Em especial ao professor *Brunno Borges*, companheiro de

caminhada, que nunca negou ajuda na realização dessa dissertação sempre que solicitei. Agradecimentos especiais à *Cristiane Maciel*, à *Lucimar Teodoro* e à *Silaine Borges*, que me motivaram a fazer o curso e que, sem dúvida alguma, foram responsáveis para que isso fosse possível. Não menos importante, agradeço também à *Lídia Maria*, pois o profissional que sou hoje tem tudo a ver com as dicas e ajuda por ela dadas no início da minha caminhada. E, por fim, obrigado também à professora *Tatiane Maciel*, por ter sido sempre um exemplo de profissional e de ser humano e que topou, sem hesitar por um segundo, ser a revisora desta dissertação.

A todos vocês, meu MUITO OBRIGADO!!!



**VICTOR, H. P. .CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E COMPASSO E OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA. 2022. 120p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.**

## **Resumo**

As construções geométricas com régua e compasso são excelentes ferramentas para desenvolver nos estudantes de ensino fundamental e médio, tanto a criatividade quanto habilidades artísticas, além da consequente visão geométrica, tão necessárias para resolver situações-problema do nosso cotidiano. Entretanto, nos últimos anos, tais construções não receberam a devida importância e destaque nos materiais didáticos. Pensando nisso, trazemos, neste trabalho, a proposta de atender tanto a estudantes do ensino fundamental 2 e médio quanto a professores que lecionam para esses segmentos, apresentando de forma simples e direta diversas construções que são importantes para o desenvolvimento do estudante dentro da Geometria. Um dos elementos motivadores deste trabalho é justamente tentar sanar essa lacuna dentro do ambiente educacional: a construção com régua e compasso. Para isso, diversas figuras foram apresentadas trazendo um passo a passo de suas construções, que vão desde conceitos básicos da geometria até algumas atividades que estimulam a criatividade. Logo, é um trabalho que visa mostrar a estudantes como a construção geométrica é feita e, ao mesmo tempo, apresentar justificativas para as construções. Para os professores, há um capítulo mais aprofundado, trazendo uma sustentação para a teoria baseada em conceitos algébricos. Com o uso de tais ferramentas, é apresentada e comprovada a insolubilidade dos três problemas clássicos da matemática grega que, durante séculos, intrigou os matemáticos. Tais problemas são: a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo de  $60^\circ$ . Para finalizar, apresentamos uma proposta de trabalho para ser desenvolvida em sala de aula que mostra como algumas figuras conhecidas podem ser construídas, utilizando apenas a régua não graduada e o compasso.

**Palavras-chave:** Construções Geométricas, Régua e Compasso, Números Construtíveis, Duplicação do Cubo, Quadratura do Círculo, Trissecção do Ângulo.

**VICTOR, H. P. *GEOMETRIC CONSTRUCTIONS USING RULER AND COMPASS AND THE THREE CLASSIC PROBLEMS FROM GREEK MATHEMATICS*. 2022. 120p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.**

## **Abstract**

Geometric constructions with ruler and compass are excellent tools to develop in elementary and high school students, both creativity and artistic skills, and the consequent geometric vision, so necessary to solve problem situations in our daily lives. However, in recent years, such constructions have not received the proper importance and emphasis in teaching materials. Thinking about this, we bring in this work the proposal to serve both students in elementary and high school as well as teachers who teach these segments, presenting in a simple and direct way several constructions that are important for student development within the Geometry. One of the motivating elements of this work is precisely to try to fill this gap in the educational environment: the construction with ruler and compass. To this end, several figures were presented, bringing a step-by-step from its constructions, ranging from basic geometric concepts to some activities that stimulate the creativity. Thus, it is a work that aims to show students how geometric construction is done and, at the same time, presenting justifications for the constructions. For teachers, there is a chapter further developed, bringing a support for theory based on algebraic concepts. With the use of such tools, the insolubility of the three classical problems of Greek mathematics that for centuries intrigued mathematicians is presented and proven. Such problems are: the doubling of cube, the squaring of circle, and the  $60^\circ$  angle trisection. Finally, we present a working proposal to be developed in the classroom that shows how some well-known figures can be constructed using only the ruler and compass.

**Keywords:** Geometric Constructions, Ruler and Compass, Constructible Numbers, Doubling the Cube, Squaring the Circle, Angle Trisection.

---

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Construções elementares com régua e compasso</b>	<b>4</b>
2.1	Congruência de triângulos . . . . .	5
2.2	Lugares geométricos . . . . .	8
2.2.1	Circunferência . . . . .	8
2.2.2	Mediatriz . . . . .	9
2.2.3	Bissetriz . . . . .	11
2.2.4	Arco capaz . . . . .	12
2.3	Algumas construções geométricas elementares . . . . .	13
2.3.1	Transporte de segmento para uma reta . . . . .	14
2.3.2	Adição de segmentos . . . . .	14
2.3.3	Multiplicação de segmentos por um número natural . . . . .	15
2.3.4	Transporte de um ângulo . . . . .	16
2.3.5	Construção de uma reta perpendicular . . . . .	17
2.3.6	Construção de uma reta paralela . . . . .	19
2.3.7	Divisão de um segmento em partes iguais . . . . .	20
2.4	Construções de triângulos . . . . .	21
2.4.1	Construção de um triângulo equilátero . . . . .	21
2.4.2	Construção de triângulo conhecendo dois lados e um ângulo . . . . .	22
2.4.3	Construção de triângulo conhecendo um lado e dois ângulos . . . . .	23

2.4.4	Construção de um triângulo sendo conhecidos os 3 lados . . . . .	25
2.5	Pontos notáveis de um triângulo . . . . .	26
2.5.1	Medianas e baricentro . . . . .	26
2.5.2	Bissetrizes e incentro . . . . .	28
2.5.3	Alturas e ortocentro . . . . .	29
2.5.4	Mediatrizes e circuncentro . . . . .	30
2.5.5	Segmentos e pontos notáveis em um triângulo isósceles . . . . .	31
2.5.6	Segmentos e pontos notáveis em um triângulo equilátero . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Polígonos regulares</b>	<b>34</b>
3.1	Triângulo equilátero . . . . .	34
3.2	Quadrado . . . . .	36
3.3	Hexágono . . . . .	38
3.4	Pentágono . . . . .	39
3.5	Processo geral de Rinaldini . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Os números construtíveis e os três problemas clássicos</b>	<b>44</b>
4.1	Anéis e corpos . . . . .	45
4.2	Noções básicas de álgebra linear . . . . .	53
4.3	Polinômios em uma variável . . . . .	57
4.4	Extensões algébricas dos racionais . . . . .	63
4.5	Os números construtíveis . . . . .	68
4.6	Os três problemas clássicos gregos . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Proposta de trabalho</b>	<b>88</b>
5.1	Atividades para o 6º ano . . . . .	88
5.1.1	Construção da rosa dos ventos . . . . .	89
5.1.2	Construção do símbolo Yin-Yang . . . . .	90
5.1.3	Construção da Estrela de Davi . . . . .	91

5.2	Atividades para o 7º ano . . . . .	91
5.2.1	Construção de uma mandala . . . . .	92
5.2.2	Construção da Flor da vida . . . . .	93
5.3	Atividades para o 8º ano . . . . .	93
5.3.1	Construção do quebra-cabeça relativo ao Teorema de Pitágoras . . . . .	94
5.3.2	Construção da logomarca da Mercedes-Benz . . . . .	95
5.4	Atividades para o 9º ano . . . . .	95
5.4.1	Construção do retângulo de ouro . . . . .	96
5.4.2	Construção da espiral de ouro . . . . .	96
5.4.3	Construção da espiral de Arquimedes . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>98</b>
<b>A</b>	<b>Raízes do polinômio <math>p(x) = x^3 - 2</math></b>	<b>100</b>
	<b>Referências</b>	<b>103</b>

---

# Lista de Figuras

---

2.1	Elementos congruentes em triângulos. . . . .	6
2.2	Caso de congruência LAL. . . . .	6
2.3	Caso de congruência ALA. . . . .	7
2.4	Caso de congruência LLL. . . . .	7
2.5	Construção de lugar geométrico: circunferência. . . . .	8
2.6	Elementos de uma circunferência. . . . .	9
2.7	Construção de lugar geométrico: mediatriz. . . . .	10
2.8	Localização do centro de uma circunferência. . . . .	11
2.9	Construção de lugar geométrico: bissetriz. . . . .	12
2.10	Construção de lugar geométrico: arco capaz. . . . .	13
2.11	Transporte de segmentos para uma reta. . . . .	14
2.12	Adição de segmentos. . . . .	15
2.13	Produto de segmentos. . . . .	16
2.14	Transporte de ângulos. . . . .	17
2.15	Construção de uma perpendicular por um ponto pertencente à reta. . . . .	18
2.16	Construção de uma perpendicular por um ponto fora da reta. . . . .	19
2.17	Construção de uma reta paralela. . . . .	19
2.18	Divisão de um segmento em partes iguais. . . . .	20
2.19	Construção de um triângulo equilátero. . . . .	21
2.20	Construção de triângulo do caso LAL. . . . .	22

2.21	Caso de congruência LAL. . . . .	23
2.22	Construção de triângulo do caso ALA. . . . .	24
2.23	Caso de congruência ALA. . . . .	24
2.24	Construção de triângulo do caso LLL. . . . .	25
2.25	Caso de congruência LLL. . . . .	26
2.26	Baricentro com 2 medianas. . . . .	27
2.27	Baricentro com 3 medianas. . . . .	27
2.28	Baricentro na razão 2:1. . . . .	27
2.29	Baricentro e triângulos com mesma área. . . . .	27
2.30	Duas bissetrizes e o respectivo incentro. . . . .	28
2.31	Três bissetrizes e o respectivo incentro. . . . .	28
2.32	Incentro como centro da circunferência inscrita. . . . .	28
2.33	Indicação de que o incentro é sempre equidistante aos lados de um triângulo. . . . .	28
2.34	Ortocentro e duas alturas relacionadas. . . . .	29
2.35	Ortocentro e três alturas relacionadas. . . . .	29
2.36	Ortocentro coincidente com o vértice. . . . .	30
2.37	Ortocentro fora do triângulo. . . . .	30
2.38	Circuncentro e duas mediatrizes relacionadas. . . . .	31
2.39	Circuncentro e três mediatrizes relacionadas. . . . .	31
2.40	$C$ é o centro da circunferência circunscrita. . . . .	31
2.41	Indicação de que $C$ é equidistante aos vértices do triângulo. . . . .	31
2.42	Cevianas e mediatrizes em um triângulo isósceles. . . . .	32
2.43	Pontos notáveis em um triângulo isósceles. . . . .	32
2.44	Pontos notáveis em um triângulo equilátero. . . . .	33
3.1	Construção do triângulo equilátero inscrito na circunferência. . . . .	35
3.2	Medidas de ângulos de triângulos. . . . .	35
3.3	Medidas de ângulos de triângulos. . . . .	35

3.4	Construção do hexágono inscrito na circunferência. . . . .	36
3.5	Construção do dodecágono inscrito na circunferência. . . . .	36
3.6	Construção do quadrado inscrito na circunferência. . . . .	37
3.7	Construção do octógono inscrito na circunferência. . . . .	37
3.8	Construção do polígono de 16 lados inscrito na circunferência. . . . .	37
3.9	Construção do hexágono inscrito na circunferência. . . . .	38
3.10	Hexágono regular com 6 triângulos equiláteros. . . . .	39
3.11	Construção do pentágono inscrito na circunferência. . . . .	40
3.12	Construção do decágono inscrito na circunferência. . . . .	41
3.13	Construção do icoságono inscrito na circunferência. . . . .	41
3.14	Dodecágono pelo método de Rinaldini. . . . .	43
3.15	Eneágono pelo método de Rinaldini. . . . .	43
4.1	Pontos construtíveis de $\mathcal{P}_0$ . . . . .	69
4.2	Q como interseção entre as retas $r$ e $s$ . . . . .	70
4.3	Q como interseção entre $r$ e $C_1$ . . . . .	71
4.4	Q como interseção entre $C_1$ e $C_2$ . . . . .	71
4.5	Construção de ponto médio e perpendiculares. . . . .	72
4.6	Caso 1: $\overline{AX} = \overline{B'C''}$ , com $X$ entre $M$ e $C''$ . . . . .	73
4.7	Caso 2: $\overline{AX} = \overline{B'C''}$ , com $X = M = N$ . . . . .	73
4.8	Caso 1: $\overline{AX} = \overline{B'C''}$ , com $X$ entre $B'$ e $M$ . . . . .	73
4.9	Construção de pontos com coordenadas inteiras. . . . .	75
4.10	Construção de um paralelogramo dados três de seus vértices. . . . .	76
4.11	Coordenadas construtíveis. . . . .	77
4.12	Pontos construtíveis a partir de suas coordenadas. . . . .	78
4.13	Construção do segmento de medida $\alpha\beta$ . . . . .	79
4.14	Construção do segmento de medida $\frac{1}{\alpha}$ . . . . .	80
4.15	Construção de um ângulo $\theta$ . . . . .	85



4.16	Trisseccção do ângulo $\pi/3$ com régua graduada. . . . .	86
5.1	Construção da rosa dos ventos em 4 etapas. . . . .	89
5.2	Construção do símbolo Yin-Yang em 4 etapas. . . . .	90
5.3	Construção da Estrela de Davi em 4 etapas. . . . .	91
5.4	Construção de mandalas em 4 etapas. . . . .	92
5.5	Construção da Flor da vida em 4 etapas. . . . .	93
5.6	Representação geométrica do Teorema de Pitágoras pelo método de Perigal em 4 etapas. . . . .	94
5.7	Construção da logomarca da Mercedes em 4 etapas. . . . .	95
5.8	Construção do retângulo de ouro em 4 etapas. . . . .	96
5.9	Construção da espiral de ouro em 4 etapas. . . . .	96
5.10	Construção da espiral de Arquimedes em 4 etapas. . . . .	97

**Todas as figuras aqui listadas foram feitas pelo próprio autor via *GeoGebra*.**

## Introdução

---

A história da Matemática mostra-nos que a Geometria sempre foi uma fonte de curiosidade por parte da humanidade. Além disso, a Geometria foi muito utilizada com o propósito de resolver problemas, principalmente em função de ainda não haver uma álgebra bem desenvolvida. Uma importante ferramenta utilizada na antiguidade com esse propósito foi a construção, utilizando apenas uma régua (não graduada) e compasso.

Apesar de as construções com régua e compasso serem comumente chamadas de construções euclidianas, é interessante perceber que os nomes *régua* e *compasso* não aparecem na mais importante obra de Matemática: *Elementos* sob a autoria de *Euclides*. Tal obra é comumente tratada, de forma errônea, como puramente de Geometria, porém apenas uma parte de seus treze livros é que trata exclusivamente de Geometria. O certo é dizer que praticamente toda a Geometria, a qual temos acesso e utilizamos a todo momento, está englobada na obra, mas que a obra é muito mais do que isso. Para um maior detalhamento sobre a obra *Elementos* e sobre o próprio *Euclides*, é interessante ler [3, Capítulo 7] e [9, Capítulo 5].

Em *Elementos*, Euclides faz uso das expressões construir um segmento, prolongar um segmento e construir uma circunferência sem nunca mencionar o nome de tais instrumentos. Entretanto, as regras estipuladas por Euclides permitem-nos verificar que os instrumentos a que ele se refere são realmente a régua (não graduada) e o compasso. Além disso, é possível perceber que sua utilização se restringe a:

- (i) Régua: só pode ser usada para, dados dois pontos  $A$  e  $B$ , construir um segmento, tão longo quanto se queira, que contenha aqueles dois pontos.
- (ii) Compasso: só pode ser usado para, dados dois pontos  $A$  e  $B$ , construir a circunferência de centro  $A$  e que passa por  $B$ .

As limitações impostas para a utilização da régua e do compasso tornaram três problemas gregos famosos por não apresentarem solução com o uso dos instrumentos euclidianos. Tais problemas, conhecidos por “quadratura do círculo”, “duplicação do cubo” e “trisseção do ângulo”, ficaram sem solução por muitos séculos e, somente após alguns trabalhos mais avançados sobre Extensões Algébricas, foi possível a comprovação de sua insolubilidade (ver [10], [12] e [18]).

Nos últimos anos, o tema “Construções com régua e compasso” foi esquecido por muitos professores e coleções de livros didáticos, mas, na mais recente reformulação do ensino básico (fundamental 2 - anos finais) do Brasil, foi dada uma ênfase no contexto histórico da Matemática, com uma atenção especial a esse tipo de construção durante as aulas. A BNCC, que pode ser acessada em [4], é o documento que norteia os assuntos a serem trabalhados nessas séries. Nele, são apresentadas algumas habilidades diretamente relacionadas à utilização desses materiais, conforme descrição a seguir:

- (i) (EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
- (ii) (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .
- (iii) (EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
- (iv) (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

E é com foco no resgate dessa ferramenta tão importante que esta obra foi pensada. Sabemos que a Geometria, em geral, é negligenciada no nosso sistema de ensino, principalmente a construção com régua e compasso. Mas qual a razão disso? Dentre diversos motivos, a partir da conversa com alguns professores, está um fato assustador: a falta de habilidade para manusear tais instrumentos, além da incapacidade de compreender todas as singularidades que tais construções carregam embutidas em si. Daí, temos nosso grande dilema: como ensinar o aluno a trabalhar com régua e compasso quando nem mesmo o professor a compreende perfeitamente? Mais importante ainda: como fazer com que o aluno aprenda a gostar da Geometria, quando apenas lhes são passadas fórmulas, teoremas e definições como que por mágica?

A sequência abordada neste trabalho procura dar um encadeamento lógico para a compreensão

e constatação da sutileza que essas construções carregam, procurando ser um referencial para todo o público: desde um aluno do fundamental 2 até um professor que se proponha a compreender as técnicas de construção no intuito de desenvolver uma geometria mais dinâmica e não apenas baseada em conceitos. Para atingir tais objetivos, a obra foi elaborada buscando explicitar diversas construções, além daquelas que estão descritas nas habilidades da BNCC, apresentando diversas outras situações em que o uso da régua e do compasso pode tornar o assunto mais interessante e com sentido para o aluno. Assim, no decorrer desta obra, diversos temas são abordados em cada um dos capítulos, dentre os quais se destacam:

*Capítulo 2:* congruências de triângulos, lugares geométricos importantes, algumas construções elementares com régua e compasso, pontos notáveis de um triângulo;

*Capítulo 3:* construção de polígonos regulares e inscrição de polígonos em uma circunferência;

*Capítulo 4:* noções, definições e propriedades importantes sobre álgebra, espaços vetoriais e polinômios, números construtíveis com régua e compasso e os três problemas clássicos gregos;

*Capítulo 5:* sugestões de atividades diversas, envolvendo os conceitos aprendidos sobre as construções com régua e compasso.

Durante a construção de grande parte das figuras com régua e compasso, é apresentado um passo a passo da construção seguido da figura correspondente, com algumas considerações pertinentes acerca daquela construção. As figuras foram todas feitas no *Geogebra*, mas o passo a passo é descrito de modo a levar o aluno a utilizar a régua e o compasso reais.

# Construções elementares com régua e compasso

---

As construções geométricas com régua não graduada e compasso, conhecidos como instrumentos euclidianos, surgiram na Grécia antiga, por volta do século V a.C. e eram utilizadas para resolver problemas teóricos e práticos. Muitas dessas construções foram apresentadas na mais bem sucedida obra sobre Matemática da antiguidade, chamada “Os Elementos” de Euclides. A referência [2] traz uma tradução da obra de Euclides para o português.

Algumas construções podem ser facilmente trabalhadas com os alunos do ensino fundamental e médio. Tais construções, quando trabalhadas corretamente, evitam que o aluno fique com um conhecimento raso acerca de conceitos importantes na geometria. Além disso, faz com que os alunos sejam questionadores e interessem-se por procurar situações no cotidiano que os instiguem quanto à possibilidade de reproduzir uma figura, imagem ou logomarca que visualizaram, utilizando apenas a régua (não graduada) e o compasso.

É importante pensarmos que, enquanto ferramentas novas, a simples utilização de um compasso por parte dos alunos apresenta um relativo desafio em alguns casos. Para muitos alunos, enquanto estão traçando as circunferências (e até mesmo alguns arcos), o compasso fica “abrindo” ou “fechando” durante o manuseio por pura falta de prática. Assim, é preciso conscientizá-los de que apenas com a prática poderão, verdadeiramente, dominar essa técnica de construção.

Além disso, com relação à régua, devemos desvincular a ideia de que a graduação é necessária para efetuarmos construções geométricas. É importante frisar que, cronologicamente, a régua surgiu muito antes que o sistema métrico. Então, a utilização da régua deve ser pensada apenas como um instrumento meramente utilizado para ligar dois pontos quaisquer. No que tange ao compasso, essa

ferramenta é utilizada com o propósito de construir arcos e circunferências e, a partir dessas figuras, diversas outras podem ser construídas.

Este capítulo é dedicado a apresentar construções geométricas simples que podem ser realizadas apenas com régua não graduada e compasso, de uma maneira que poderia ser facilmente utilizada para nortear o tema nas aulas de Geometria dos ensinos fundamental e médio. Assim, neste capítulo, iremos mostrar como fazer com que os alunos sejam capazes de construir diversas figuras, desafiando-os a conseguirem fazer o mesmo e, em alguns casos, extrapolar os limites dessas construções.

A fim de esclarecermos as notações que aqui serão utilizadas, faz-se necessário um comentário: no que segue, as noções de segmento de reta e de ângulo são baseadas na referência [16]. Assim, dados dois pontos sobre uma reta  $r$ , o segmento de reta  $AB$  é a porção da reta  $r$  situada de  $A$  a  $B$  e  $\overline{AB}$  denota o comprimento de tal segmento. Da mesma forma, dadas, no plano, duas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , um ângulo de vértice  $O$  e lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ . Denotaremos tal ângulo por  $\angle AOB$  ao passo que  $\widehat{AOB}$  será utilizado para indicar a medida do ângulo formado no vértice  $O$ .

Para podermos entender algumas construções que serão feitas a partir de agora, é importante recordar algumas definições e axiomas que serão muito úteis para justificar alguns passos das construções apresentadas neste capítulo.

## 2.1 Congruência de triângulos

Dizemos que dois triângulos são *congruentes* se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro. Tal conceito é muito importante, pois é uma ferramenta bastante útil em diversos problemas de geometria.

Nesta seção, apresentamos os três principais casos de congruência de triângulos que servirão de justificativa para algumas construções que faremos a seguir. Uma análise mais detalhada desse assunto pode ser obtida em [7, 16].

### Definição 2.1

Um triângulo é congruente (símbolo  $\equiv$ ) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

- (i) seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- (ii) seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

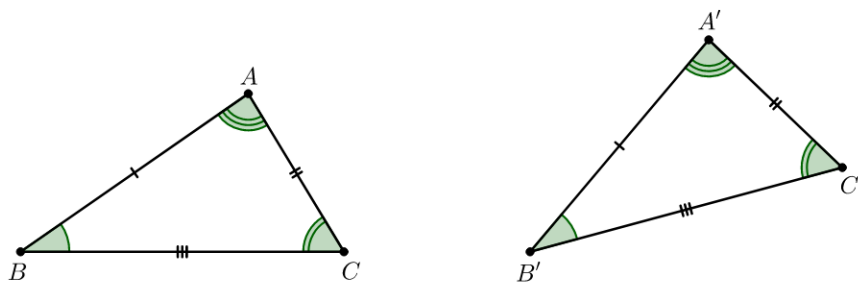


Figura 2.1: Elementos congruentes em triângulos.

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \iff \left( \begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{A}' \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \quad \text{e} \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \quad \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \end{array} \right)$$

A definição de congruência de triângulos oferece todas as condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Essas condições envolvendo seis congruências, sendo elas três entre lados e três entre ângulos como ilustrado na imagem e no esquema acima, são totais. As “condições mínimas” para que dois triângulos sejam congruentes são chamadas casos ou critérios de congruência e serão apresentados a seguir.

Dentre os casos de congruência conhecidos, listaremos apenas três deles (LAL, ALA e LLL), visto que os outros (LAA<sub>o</sub> e cateto-hipotenusa) não serão necessários nesse momento.

**Axioma 2.1: 1º caso: LAL**

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então eles são congruentes.

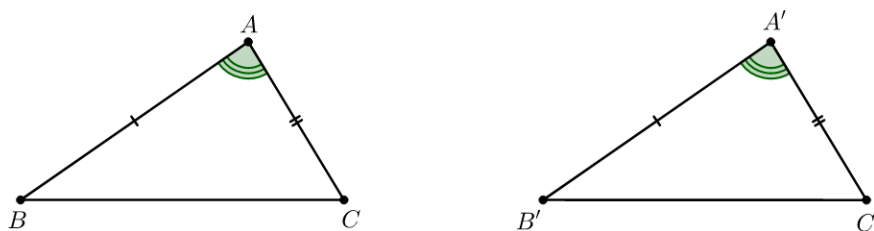


Figura 2.2: Caso de congruência LAL.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{LAL}} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \implies \left\{ \begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{array} \right.$$

**Axioma 2.2: 2º caso: ALA**

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.

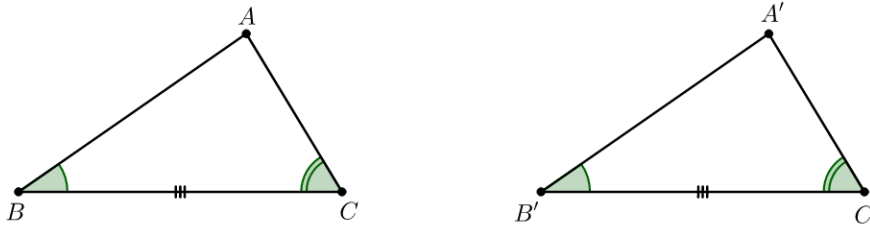


Figura 2.3: Caso de congruência ALA.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ALA}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \implies \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right.$$

**Axioma 2.3: 3º caso: LLL**

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.

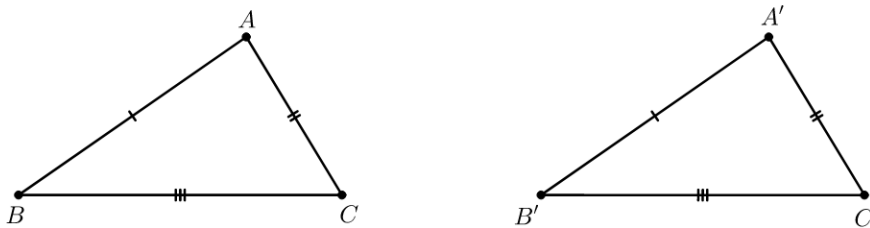


Figura 2.4: Caso de congruência LLL.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{LLL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \implies \left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{C'} \end{array} \right.$$



## 2.2 Lugares geométricos

**Definição 2.2:** [16, Definição 3.1, p. 72]

Dada uma propriedade  $\mathcal{P}$  relativa a pontos do plano, o *lugar geométrico* dos pontos que possuem a propriedade  $\mathcal{P}$  é o subconjunto  $\mathcal{L}$  do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

- (i) Todo ponto de  $\mathcal{L}$  possui a propriedade  $\mathcal{P}$ .
- (ii) Todo ponto do plano que possui a propriedade  $\mathcal{P}$  pertence a  $\mathcal{L}$ .

Em resumo, o lugar geométrico é apenas um conjunto de pontos e, como todo conjunto, possui uma propriedade comum a todos esses pontos ali pertencentes, ou seja, o lugar geométrico é constituído exatamente pelos pontos do plano que possuem a propriedade  $\mathcal{P}$ , nem mais nem menos. Se um ponto possui tal propriedade, ele pertence ao lugar geométrico; caso contrário, não pertence.

Será de grande valia conhecermos os seguintes lugares geométricos:

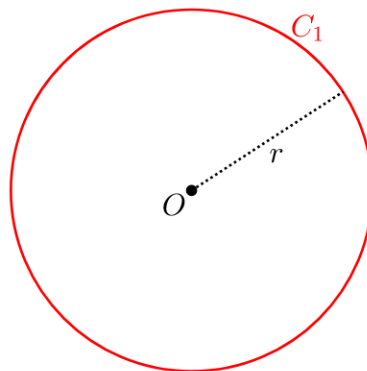
### 2.2.1 Circunferência

Dados um ponto  $O$  e um segmento de medida  $r$ , o lugar geométrico dos pontos que distam  $r$  do ponto  $O$  é denominado *circunferência*. Além disso, o ponto  $O$  é o centro da circunferência e  $r$  é o raio da circunferência.

Para construir uma circunferência, basta seguir o passo a passo citado a seguir:

$P_1 \rightarrow$  Fixamos a abertura do compasso de modo que sua medida seja igual a  $r$ .

$P_2 \rightarrow$  Posicionamos a ponta seca do compasso no ponto  $O$  e traçamos a circunferência  $C_1$  desejada.



**Figura 2.5:** Construção de lugar geométrico: circunferência.

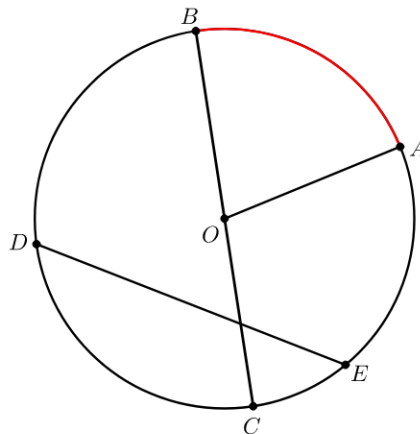
**Observação 2.1**

A construção de uma circunferência divide o plano em duas regiões distintas: a região interna e a região externa. A região interna é formada pelo conjunto de pontos tal que sua distância ao centro  $O$  é menor que  $r$ . Já a região externa é formada pelo conjunto de pontos tal que sua distância ao centro  $O$  é maior que  $r$ .

**Elementos da circunferência**

É importante verificarmos que, ao construir uma circunferência, surgem imediatamente diversos elementos que possuem uma importância muito grande dentro da geometria. Dentre esses elementos, podemos destacar: raio, diâmetro, corda e arco, além do próprio centro.

Veja, na figura de centro  $O$  abaixo, um exemplo de raio representado por  $OA$ , um diâmetro representado pelo segmento de reta  $BC$ , uma corda representada pelo segmento de reta  $DE$  e um arco, destacado em vermelho, com extremidades em  $A$  e  $B$ .



**Figura 2.6:** Elementos de uma circunferência.

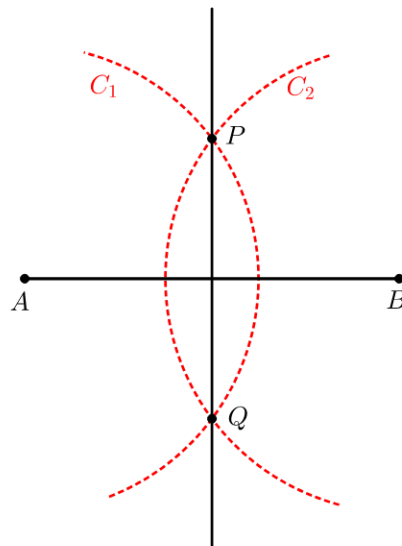
**2.2.2 Mediatrix**

Por definição, a mediatrix de um segmento  $AB$  é a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio. É possível provar que a mediatrix de um segmento  $AB$  é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam das extremidades de  $AB$ . A demonstração desse fato pode ser encontrada em [16, Proposição 3.5, p. 73].

Para construir a mediatrix de um segmento  $AB$ , basta seguir o passo a passo citado a seguir:

$P_1 \rightarrow$  Com uma abertura do compasso de medida maior que  $\frac{AB}{2}$ , traçamos dois arcos de circunferência  $C_1$  e  $C_2$  com mesmo raio, centrados, respectivamente, em  $A$  e  $B$ .

$P_2 \rightarrow$  Marcamos  $P$  e  $Q$  nas interseções dos arcos  $C_1$  e  $C_2$  e traçamos a reta  $\overleftrightarrow{PQ}$ .



**Figura 2.7:** Construção de lugar geométrico: mediatriz.

Comentários sobre a construção: Como  $P$  e  $Q$  são obtidos na interseção dos arcos  $C_1$  e  $C_2$  de mesmo raio, temos que  $P$  está à mesma distância dos centros  $A$  e  $B$ . O mesmo vale para o ponto  $Q$ . Note que, por construção, o quadrilátero  $APBQ$  é um losango. Portanto, suas diagonais  $AB$  e  $PQ$  são perpendiculares e se encontram no ponto médio de tais segmentos, como pode ser visto em [16, Proposição 2.45, p. 66]. Além disso, a construção baseia-se no fato de que, por pertencerem à mediatriz de  $AB$ ,  $P$  e  $Q$  devem ser equidistantes das extremidades  $A$  e  $B$  do segmento, assim como qualquer ponto que pertença à mediatriz de  $AB$ .

**Observação 2.2**

Vamos descrever agora um método simples e elegante para obter o centro de uma circunferência qualquer. A priori, apenas uma circunferência nos é fornecida.

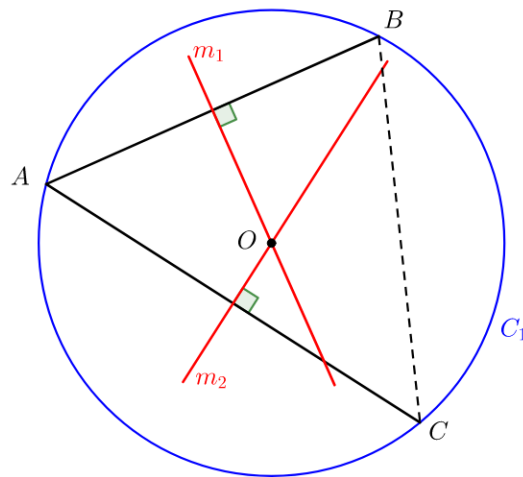
Para obter a localização desse centro, basta seguir os passos listados:

$P_1 \rightarrow$  Traçamos uma corda  $AB$  na circunferência  $C_1$  e, em seguida, traçamos a sua mediatriz  $m_1$ .

$P_2 \rightarrow$  Traçamos, na mesma circunferência, uma segunda corda  $AC$  não paralela à primeira e sua mediatriz  $m_2$ .

$P_3 \rightarrow$  As duas mediatrizes encontram-se no centro  $O$  procurado.

É interessante observar que, no passo a passo acima descrito, as cordas  $AB$  e  $AC$  possuem o vértice  $A$  em comum, mas essa não é uma condição necessária. Na prática, poderiam ter sido tomadas duas cordas quaisquer, desde que essas não fossem paralelas entre si, que, da mesma forma, teríamos determinado o mesmo centro  $O$  para a circunferência  $C_1$ .



**Figura 2.8:** Localização do centro de uma circunferência.

Comentários sobre a construção: Por definição, cada uma das cordas possui suas extremidades dadas por pontos da circunferência. Assim, temos que os segmentos  $AB$  e  $AC$ , além de cordas, são dois lados de um triângulo inscrito. Ligando os vértices  $B$  e  $C$ , temos o terceiro lado desse triângulo. Dessa forma, qualquer ponto tomado sobre a mediatriz  $m_1$  é equidistante aos vértices  $A$  e  $B$ , assim como qualquer ponto tomado sobre a mediatriz  $m_2$  é equidistante aos vértices  $A$  e  $C$ . Como consequência disso, temos que o ponto  $O$  obtido na interseção entre  $m_1$  e  $m_2$  é equidistante, simultaneamente dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Logo, tal ponto é centro da circunferência  $C_1$  (que no decorrer desta obra virá a ser chamado circuncentro), visto que é resultante do encontro das mediatrizes de um triângulo. Uma demonstração para tal fato pode ser acessada em [16, Proposição 3.9, p. 79].

### 2.2.3 Bissetriz

Dado um ângulo  $\angle AOB$ , a bissetriz de  $\angle AOB$  é a semirreta  $\overrightarrow{OC}$  que o divide em dois ângulos iguais. Tal semirreta também pode ser vista como o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  do ângulo  $\angle AOB$  (ver [16, Proposição 3.6, p. 74]).

Para construir uma bissetriz de um ângulo  $\angle AOB$ , basta seguir o passo a passo citado a seguir:

- $P_1 \rightarrow$  Com centro no vértice  $O$  do ângulo e uma abertura qualquer, traçamos um arco de circunferência  $C_1$  que intercepta os lados do ângulo em dois pontos  $P$  e  $Q$ .
- $P_2 \rightarrow$  Traçamos dois arcos de circunferência  $C_2$  e  $C_3$  com o mesmo raio  $s$ , tal que um deles seja centrado em  $P$  e o outro em  $Q$ , de modo que haja uma interseção entre esses arcos.
- $P_3 \rightarrow$  Marcamos o ponto  $X$  resultante da interseção dos arcos  $C_2$  e  $C_3$  e traçamos a semirreta  $\overrightarrow{OX}$ .

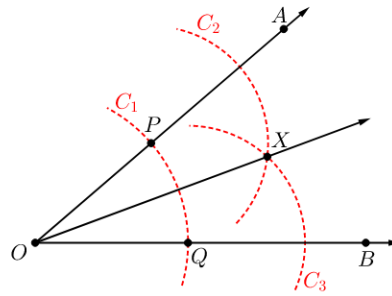


Figura 2.9: Construção de lugar geométrico: bissetriz.

Comentários sobre a construção: Analisando os triângulos  $\triangle OPX$  e  $\triangle OQX$  na figura acima, concluímos que ambos são congruentes a partir da seguinte correspondência:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OP} = \overline{OQ} = r \\ \overline{PX} = \overline{QX} = s \\ \overline{OX} = \overline{OX} \end{array} \right\} \stackrel{LLL}{\implies} \triangle OPX \equiv \triangle OQX.$$

Desta forma, temos que  $\widehat{POX} = \widehat{QOX}$ , ou seja,  $\overrightarrow{OX}$  divide o ângulo  $\angle AOB$  em dois ângulos iguais.

### 2.2.4 Arco capaz

Dado um segmento de reta  $AB$  e um ângulo  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ , definimos o *arco capaz* de  $\alpha$  em relação a  $AB$  como o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano sob os quais se vê o segmento  $AB$  segundo o ângulo  $\alpha$ , ou seja,  $\widehat{APB} = \alpha$ .

Para construir um arco capaz conforme a descrição acima, basta seguir o passo a passo abaixo:

- $P_1 \rightarrow$  Transportamos o ângulo  $\widehat{XOY} = \alpha$  para o segmento  $AB$ , tal que  $O$  coincida com  $A$  e  $Y \in AB$  (ver Seção 2.3.4).
- $P_2 \rightarrow$  Por  $A$ , traçamos uma perpendicular  $r$  ao segmento  $AX$ .
- $P_3 \rightarrow$  Construimos a mediatriz  $s$  do segmento  $AB$  e marcamos o ponto  $M$  na interseção entre as retas  $s$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  e o ponto  $N$  na interseção entre as retas  $s$  e  $r$ .
- $P_4 \rightarrow$  Com centro em  $N$ , traçamos um arco de circunferência  $C_1$  com extremidades em  $A$  e  $B$ . Qualquer ponto tomado sobre esse arco “vê” o segmento  $AB$  sob o ângulo  $\alpha$  desejado.

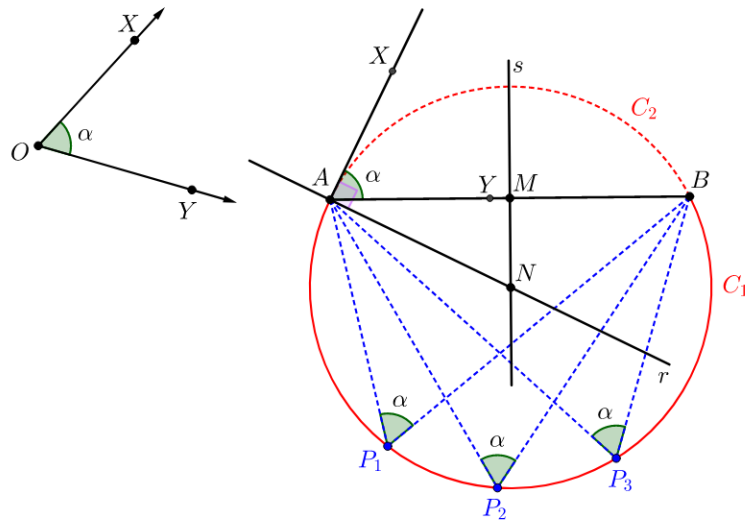


Figura 2.10: Construção de lugar geométrico: arco capaz.

Comentários sobre a construção: Ao fazermos o transporte do ângulo e traçarmos a perpendicular ao lado  $AX$  passando por  $A$ , obtivemos um ângulo reto em  $X\hat{A}N$ . Com isso, temos:

$$X\hat{A}N = X\hat{A}M + M\hat{A}N \Rightarrow 90^\circ = \alpha + M\hat{A}N \Rightarrow M\hat{A}N = 90^\circ - \alpha.$$

Observando o triângulo  $\triangle AMN$ , temos:  $A\hat{M}N = 90^\circ$  e  $M\hat{A}N = 90^\circ - \alpha$ , o que acarreta em  $A\hat{N}M = \alpha$ . Se construirmos o triângulo  $\triangle BMN$ , veremos que ele é congruente ao triângulo  $\triangle AMN$  (justificado, por exemplo, pelos casos  $LAL$  ou  $LLL$ ), o que nos leva a concluir, dos fatos de  $MN$  ser lado comum e de  $B\hat{M}N = 90^\circ$ , que  $M\hat{B}N = 90^\circ - \alpha$  e que  $B\hat{N}M = \alpha$ .

Desta forma, temos  $A\hat{N}B = 2\alpha$ , ou seja,  $\angle A\hat{N}B$  é um ângulo central que “olha” para o arco  $C_2$  (tracejado em vermelho), fazendo com que tal arco também possua uma medida, em graus, igual a  $2\alpha$ , visto que a medida do ângulo central é igual à medida do arco correspondente.

Logo, tomando qualquer ponto  $P_i$  sobre  $C_1$ , teremos que  $A\hat{P}_iB$  estará “olhando” para o arco  $C_2$ . Como  $P_i$  é um ângulo inscrito, sua medida é igual à metade da medida do arco correspondente, como pode ser visto em [7, p. 164], o que acarreta em  $A\hat{P}_iB = \alpha$ , para todo  $P_i \in C_1$ .

### 2.3 Algumas construções geométricas elementares

Nesta seção, faremos algumas construções, utilizando de forma bem simples a régua e o compasso. Assim, a ideia de construir pontos, retas, semirretas e segmentos de retas será assumida como algo primitivo.

### 2.3.1 Transporte de segmento para uma reta

Dada uma reta  $r$  e dois pontos fora dela, consideremos o problema de determinar os pontos  $A'$  e  $B'$  sobre a reta  $r$  tais que  $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ . Tal problema é conhecido como transporte de segmento.

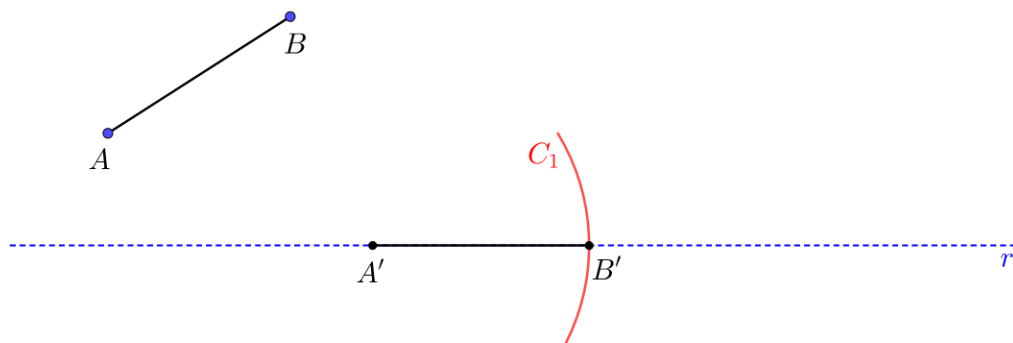
Para fazermos esse transporte, basta acompanhar os passos descritos a seguir:

$P_1 \rightarrow$  Marcamos um ponto  $A'$  qualquer sobre a reta  $r$ .

$P_2 \rightarrow$  Posicionamos a ponta seca do compasso no ponto  $A$  e a outra ponta sobre  $B$  de modo que tenhamos uma abertura igual a  $\overline{AB}$ .

$P_3 \rightarrow$  Agora, posicionamos a ponta seca do compasso sobre o ponto  $A' \in r$ . Com a outra ponta, traçamos um pequeno arco de circunferência  $C_1$ , interceptando a reta  $r$  em um ponto.

$P_4 \rightarrow$  Marcamos o ponto  $B'$  na interseção entre  $C_1$  e  $r$ . Traçamos o segmento  $A'B'$ .



**Figura 2.11:** Transporte de segmentos para uma reta.

Comentários sobre a construção: Por construção,  $A' \in r$ . A abertura do compasso utilizada no segmento  $AB$  é a mesma para construir o arco  $C_1$ . Logo, qualquer ponto desse arco está a uma distância de  $A'$  igual à medida do segmento  $AB$ . Tomando o ponto  $B'$  na interseção de  $C_1$  com  $r$ , temos que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ , com  $A'B' \subset r$ .

No decorrer deste capítulo, iremos usar a expressão *transporte de segmento* para nos referir ao procedimento descrito acima.

### 2.3.2 Adição de segmentos

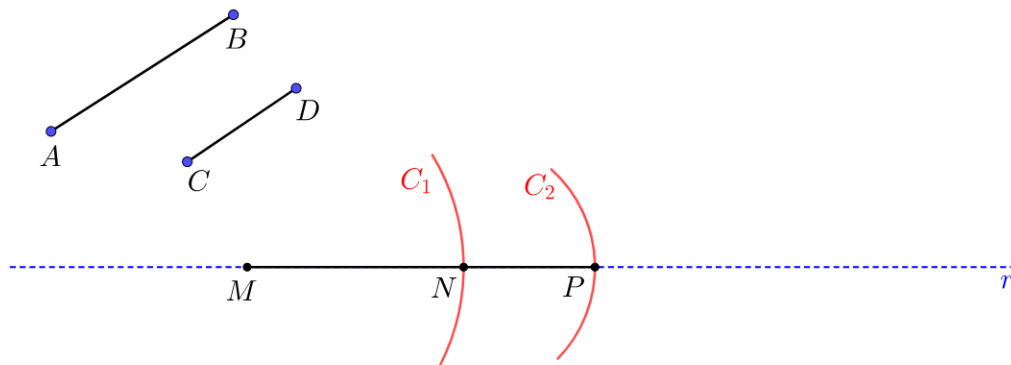
Dados os pontos  $A, B, C$  e  $D$  no plano, vamos determinar dois pontos  $M$  e  $P$ , tais que  $\overline{MP} = \overline{AB} + \overline{CD}$ .

Para fazermos essa construção, que denominamos “adição de segmentos”, vamos usar a ideia do transporte de segmentos visto na Seção 2.3.1. Para obtermos tal resultado, procedemos de acordo com os passos listados a seguir:

$P_1 \rightarrow$  Traçamos uma reta  $r$  qualquer com o auxílio de uma régua e marcamos um ponto  $M$  tal que  $M \in r$ .

$P_2 \rightarrow$  Marcamos o ponto  $N \in r$  à direita de  $M$  (conforme figura abaixo) tal que  $\overline{AB} = \overline{MN}$ .

$P_3 \rightarrow$  Com uma abertura do compasso igual a  $\overline{CD}$  e a ponta seca do compasso no ponto  $N$ , marcamos o ponto  $P \in r$  à direita de  $N$  (conforme figura abaixo), tal que  $\overline{CD} = \overline{NP}$ .



**Figura 2.12:** Adição de segmentos.

Comentários sobre a construção: Por construção, sabemos que  $\overline{MN} = \overline{AB}$ . Pelo mesmo motivo, sabemos que  $\overline{NP} = \overline{CD}$ . Assim, vemos que  $N$  é uma extremidade comum aos dois segmentos  $MN$  e  $NP$  que, por sua vez, são consecutivos e adjacentes. Logo, o segmento  $\overline{MP}$  tem seu comprimento expresso por

$$\overline{MP} = \overline{MN} + \overline{NP} = \overline{AB} + \overline{CD}.$$

### 2.3.3 Multiplicação de segmentos por um número natural

Dado um segmento  $AB$ , vamos construir um segmento cujo comprimento seja igual ao triplo de  $AB$ .

Para fazermos essa construção, é interessante lembrarmos que o triplo de  $AB$  pode ser entendido como  $3 \cdot \overline{AB} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB}$ . Para efetuá-la, seguimos basicamente o que fora feito na construção anterior.

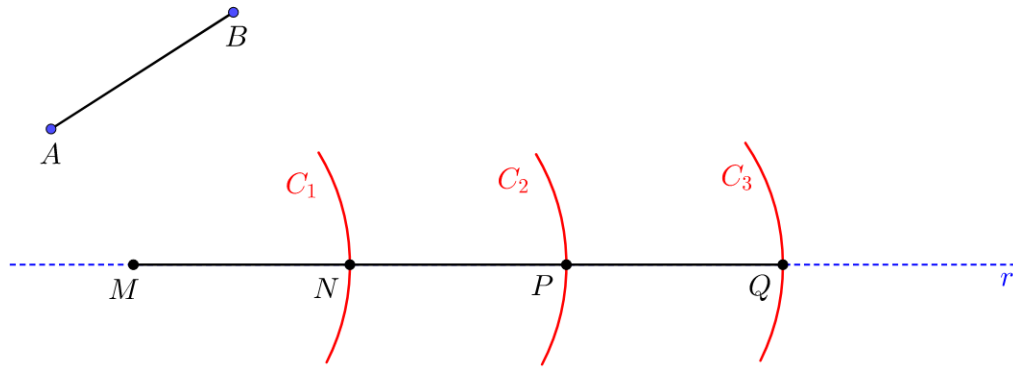
$P_1 \rightarrow$  Traçamos uma reta  $r$  qualquer com o auxílio de uma régua e marcamos um ponto  $M \in r$ .

$P_2 \rightarrow$  Transportamos o segmento  $\overline{AB}$ , obtendo assim um ponto  $N \in r$  à direita de  $M$  e, consequentemente, um segmento tal que  $\overline{AB} = \overline{MN}$ .

$P_3 \rightarrow$  Marcamos um ponto  $P \in r$  à direita de  $N$  tal que  $\overline{NP} = \overline{AB}$ .

$P_4 \rightarrow$  Repetimos o passo anterior, obtendo assim um ponto, digamos  $Q \in r$  à direita de  $P$ , de modo que  $\overline{PQ} = \overline{AB}$ .





**Figura 2.13:** Produto de segmentos.

Comentários sobre a construção: Por construção, sabemos que  $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{PQ} = \overline{AB}$ . Como os segmentos  $MN$ ,  $NP$  e  $PQ$  são consecutivos e adjacentes, o segmento  $MQ$  tem seu comprimento expresso por

$$\overline{MQ} = \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB} = 3 \cdot \overline{AB}.$$

**Observação 2.3**

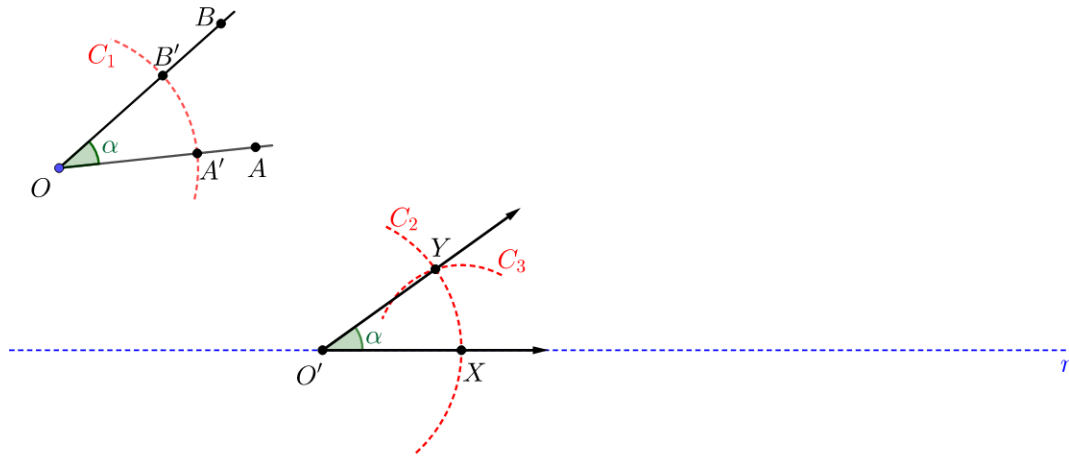
É importante frisar que, de maneira análoga ao que fora feito para o triplo de  $AB$ , poderíamos obter o segmento de medida  $n \cdot AB$  para qualquer valor  $n \in \mathbb{N}$ .

**2.3.4 Transporte de um ângulo**

Dado o ângulo  $\angle AOB$  de medida  $\alpha$ , uma reta  $r$  e  $O' \in r$ , consideremos o problema de determinar pontos  $X \in r$  e  $Y$  no plano, tais que  $\widehat{XO'Y} = \widehat{AOB} = \alpha$ .

Para obter a construção desejada, basta seguirmos o passo a passo:

- $P_1 \rightarrow$  Traçamos um arco  $C_1$  de raio qualquer centrado no vértice  $O$  de modo que esse arco intercepte os dois lados do ângulo  $\widehat{AOB}$ .
- $P_2 \rightarrow$  Denominamos por  $A'$  e  $B'$  os dois pontos de interseção entre  $C_1$  e os lados do ângulo.
- $P_3 \rightarrow$  Traçamos agora um arco  $C_2$  com mesmo raio de  $C_1$ , porém centrado em  $O' \in r$  e marcamos um ponto  $X$  na interseção desse arco com a reta  $r$ .
- $P_4 \rightarrow$  Fixamos a abertura do compasso de modo que esta tenha um comprimento igual a  $\overline{A'B'}$ .
- $P_5 \rightarrow$  Com centro em  $X$ , traçamos um arco  $C_3$  que intercepte  $C_2$ .
- $P_6 \rightarrow$  Marcamos o ponto  $Y$  na interseção de  $C_2$  com  $C_3$ .
- $P_7 \rightarrow$  Traçamos a semirreta  $\overrightarrow{O'Y}$ , obtendo assim o ângulo  $\angle XO'Y$  tal que  $\widehat{XO'Y} = \widehat{A'O'B'} = \widehat{AOB} = \alpha$ .



**Figura 2.14:** Transporte de ângulos.

Comentários sobre a construção: Pela construção, os triângulos  $\triangle A'OB'$  e  $\triangle XO'Y$  são congruentes (por exemplo, pelo caso  $LAL$ ) e, portanto,  $X\hat{O}'Y = A'\hat{O}B' = A\hat{O}B$ .

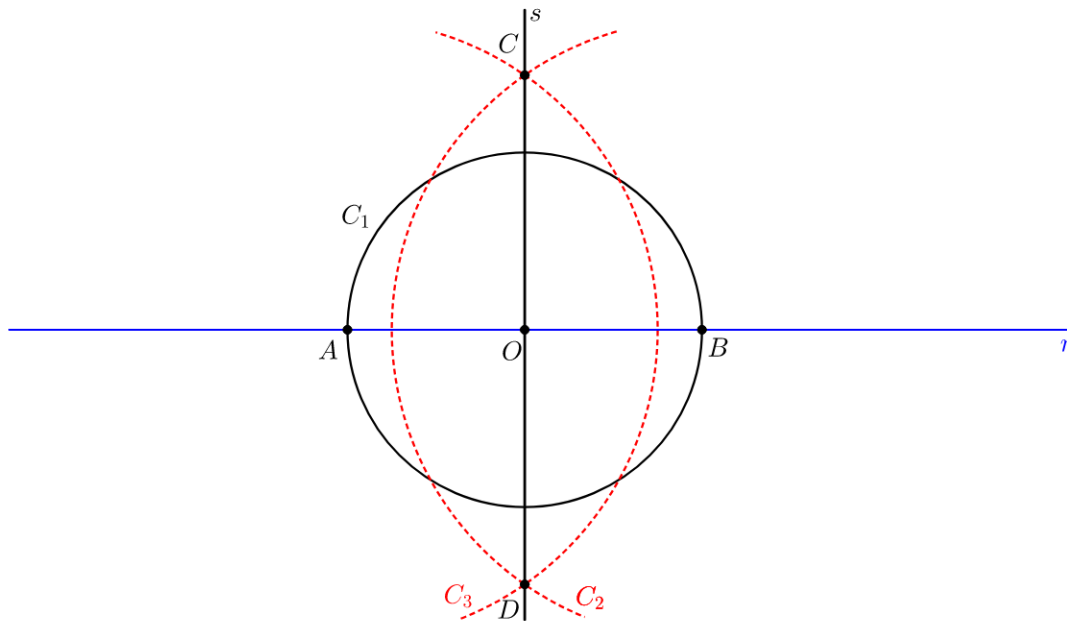
### 2.3.5 Construção de uma reta perpendicular

#### i) Perpendicular a uma reta dada passando por um de seus pontos

Dada uma reta  $r$  e um ponto  $O \in r$ , queremos traçar uma reta  $s$  perpendicular à reta  $r$  e passando pelo ponto  $O$ .

Para obter a construção desejada, basta seguir os passos listados a seguir:

- $P_1 \rightarrow$  Com centro em  $O$ , construímos uma circunferência  $C_1$  de raio  $r_1$  qualquer, tal que  $C_1$  intercepte  $r$  em dois pontos  $A$  e  $B$ .
- $P_2 \rightarrow$  Com centro em  $A$  e raio maior que  $r_1$ , traçamos um arco de circunferência  $C_2$ .
- $P_3 \rightarrow$  Agora, com centro em  $B$ , traçamos um novo arco de circunferência  $C_3$  com o mesmo raio do passo anterior.
- $P_4 \rightarrow$  Marcamos os pontos  $C$  e  $D$  nas interseções entre  $C_2$  e  $C_3$ .
- $P_5 \rightarrow$  Traçamos a reta  $s$  que passa por  $C$  e  $D$ .



**Figura 2.15:** Construção de uma perpendicular por um ponto pertencente à reta.

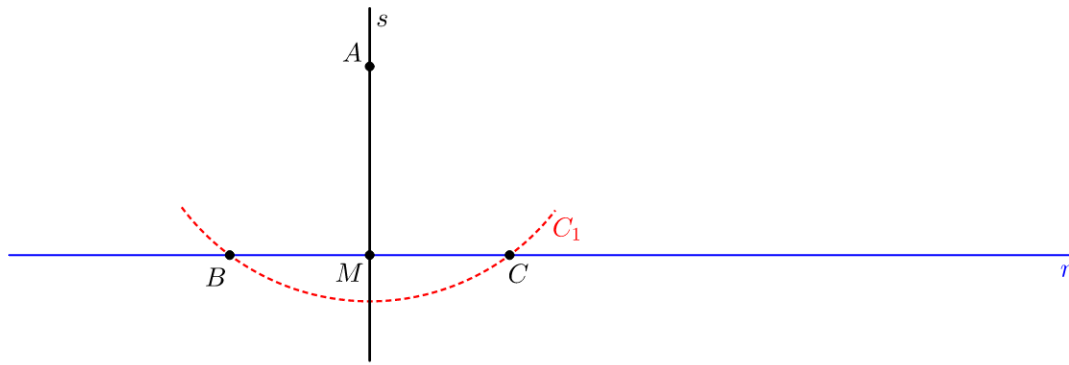
*Comentários sobre a construção:* Da forma como foi construído, temos que o quadrilátero  $ACBD$  é um losango e, portanto, as diagonais  $AB$  e  $CD$  são perpendiculares.

**ii) Perpendicular a uma reta dada passando por um ponto fora dela**

Veremos agora como construir uma reta perpendicular  $s$  à reta  $r$  passando por um ponto  $A \notin r$ .

Para obter a construção desejada, basta seguir os passos listados a seguir:

- $P_1 \rightarrow$  Com centro no ponto  $A$ , construímos uma circunferência  $C_1$  de raio  $r_1$  qualquer, tal que  $C_1$  intercepte  $r$  em dois pontos  $B$  e  $C$ .
- $P_2 \rightarrow$  Marcamos os pontos  $B$  e  $C$  nas interseções entre  $C_1$  e  $r$ .
- $P_3 \rightarrow$  Marcamos o ponto médio  $M$  do segmento  $BC$  (que pode ser obtido por meio da construção da mediatriz de  $BC$ ).
- $P_4 \rightarrow$  Traçamos a reta que passa por  $A$  e  $M$ . Essa é a reta  $s$  que almejamos.



**Figura 2.16:** Construção de uma perpendicular por um ponto fora da reta.

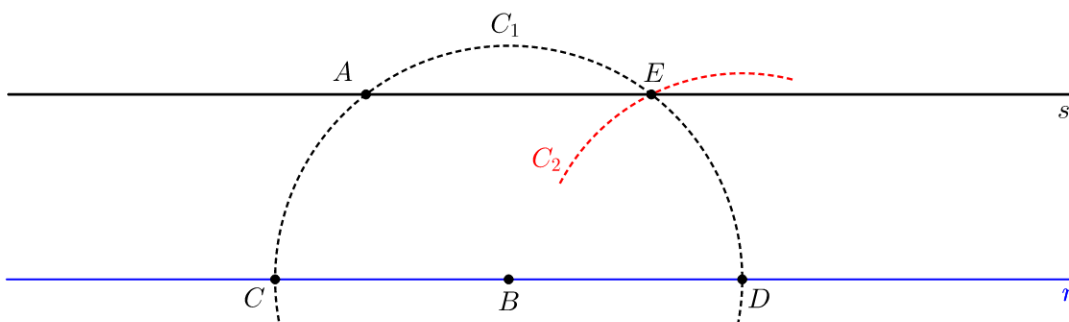
Comentários sobre a construção: Por construção, temos que os triângulos  $ABM$  e  $ACM$  são congruentes com  $\angle AMB \equiv \angle AMC$  e  $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ . Disto, segue que  $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$ .

### 2.3.6 Construção de uma reta paralela

Sejam  $r$  uma reta dada e um ponto  $A \notin r$ . Veremos agora como construir uma reta  $s$  paralela à reta  $r$  passando por  $A$ .

Para obter a construção desejada, basta seguir os passos listados a seguir:

- $P_1 \rightarrow$  Marcamos um ponto  $B$  sobre a reta  $r$  tal que  $B$  não esteja localizado na interseção entre a reta  $r$  e a sua perpendicular passando por  $A$ .
- $P_2 \rightarrow$  Com centro em  $B$ , construímos um arco de circunferência  $C_1$  com raio  $\overline{AB}$  e marcamos os pontos  $C$  e  $D$  na interseção de  $C_1$  com a reta  $r$ .
- $P_3 \rightarrow$  Fazemos uma abertura do compasso igual a  $\overline{AC}$  e, com centro em  $D$ , construímos um arco  $C_2$  tal que a interseção entre  $C_1$  e  $C_2$  resulte no ponto  $E$ .
- $P_4 \rightarrow$  Traçamos a reta que passa por  $A$  e  $E$ . Essa é a reta  $s$  que almejamos.



**Figura 2.17:** Construção de uma reta paralela.

Comentários sobre a construção: Da forma como a figura fora construída, temos que os segmentos  $BA$ ,  $BC$ ,  $BE$  e  $BD$  são todos congruentes, visto que são raios da mesma circunferência. Assim, os

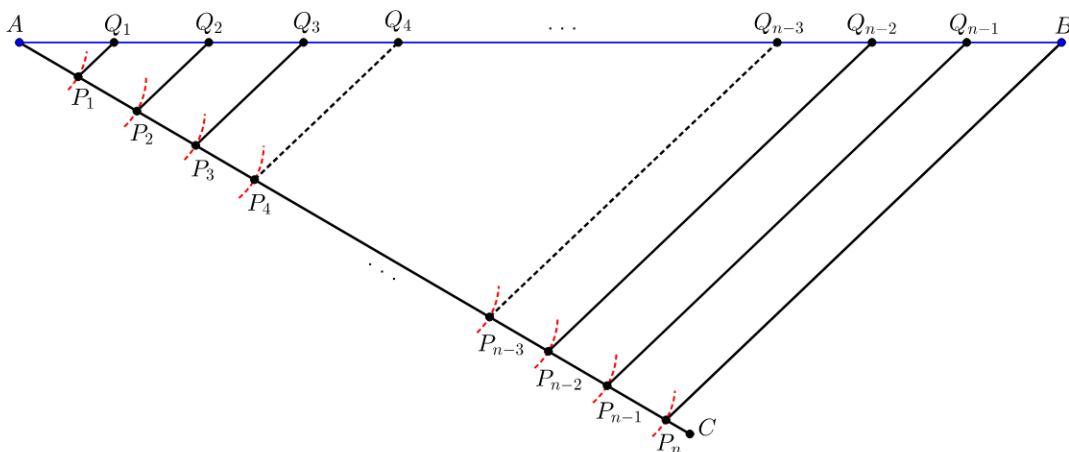
triângulos isósceles  $\triangle ABC$  e  $\triangle EBD$  são congruentes pelo caso  $LLL$  e, com isso, as alturas relativas aos vértices  $A$  e  $E$  são congruentes. Dessa forma, temos que as retas  $r$  e  $s$  são paralelas.

### 2.3.7 Divisão de um segmento em partes iguais

Partindo de um segmento  $\overline{AB}$ , queremos encontrar uma maneira de dividi-lo em  $n$  partes iguais.

Para obter a construção desejada, basta seguir os passos listados a seguir:

- $P_1 \rightarrow$  Traçamos uma semirreta partindo de um dos vértices do segmento  $AB$  (por exemplo, o vértice  $A$ ), tal que essa semirreta seja concorrente à reta suporte do segmento  $AB$ .
- $P_2 \rightarrow$  Com centro em  $A$ , traçamos um arco de raio  $r$  que intercepte a semirreta recém construída em um ponto  $P_i$ .
- $P_3 \rightarrow$  Agora, construímos um novo arco com mesmo raio  $r$ , porém centrado em  $P_i$ , tal que esse arco intercepte a mesma semirreta em um ponto  $P_{i+1}$ .
- $P_4 \rightarrow$  Repetimos esse procedimento até obtermos o ponto  $P_n$ , onde  $n$  representa em quantas partes desejamos dividir o segmento  $AB$ .
- $P_5 \rightarrow$  Traçamos o segmento  $BP_n$ .
- $P_6 \rightarrow$  Em seguida, traçamos retas paralelas à  $BP_n$ , passando pelos pontos  $P_i$ , obtendo assim os pontos  $Q_i$  sobre o segmento  $AB$  que o dividirão em  $n$  partes como desejamos.



**Figura 2.18:** Divisão de um segmento em partes iguais.

Comentários sobre a construção: Ao traçarmos as paralelas  $\overleftrightarrow{P_i Q_i}$ , subdividimos o segmento  $AB$  em segmentos proporcionais aos segmentos da semirreta  $\overrightarrow{AC}$  que, por sua vez, eram todos congruentes entre si.

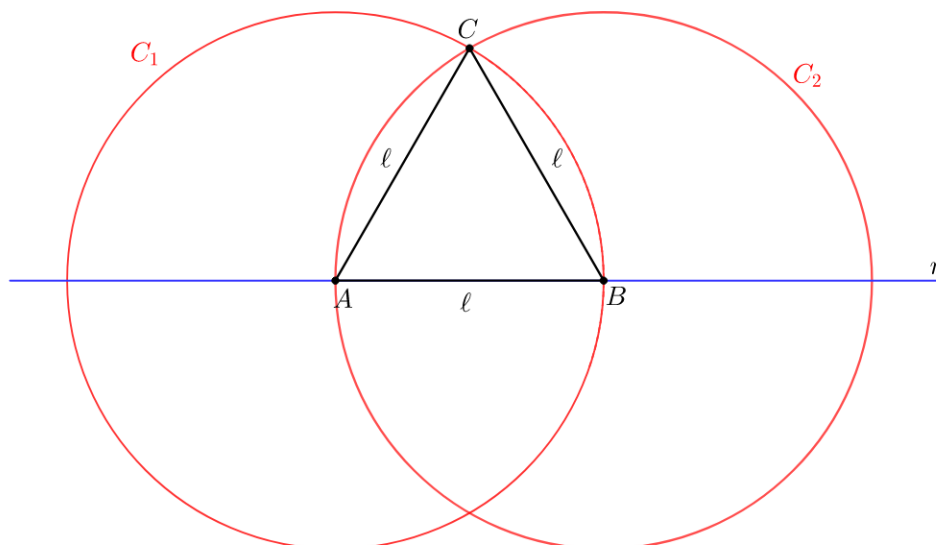
## 2.4 Construções de triângulos

Nesta seção, trabalharemos a simples construção de triângulos a partir de alguns elementos (lados e ângulos) fornecidos. As justificativas para que tais construções levem-nos a triângulos únicos, a menos de uma posição no plano, encontram-se nos axiomas de congruência da Seção 2.1.

### 2.4.1 Construção de um triângulo equilátero

Vejam agora como utilizar apenas régua e compasso para construir um triângulo equilátero  $\triangle ABC$  qualquer com lados de medida  $\ell$ . Para isso, devemos seguir os passos listados logo abaixo:

- $P_1 \rightarrow$  Marcamos um ponto  $A$  em qualquer lugar do plano para indicar onde estará localizado um dos vértices do triângulo que desejamos construir.
- $P_2 \rightarrow$  Fazemos com o compasso uma abertura de medida  $\ell$  e, com centro em  $A$ , traçamos a circunferência  $C_1$  que, assim, terá o raio  $\ell$  desejado.
- $P_3 \rightarrow$  Marcamos sobre a circunferência  $C_1$  um outro ponto  $B$ , que será o segundo vértice do triângulo.
- $P_4 \rightarrow$  Sem mexer na abertura do compasso utilizada anteriormente, traçamos uma circunferência  $C_2$  centrada em  $B$ , que terá raio  $\ell$  assim como a circunferência  $C_1$ .
- $P_5 \rightarrow$  Marcamos os pontos na interseção dessas duas circunferências. Nomeamos um deles como  $C$ , que será o terceiro vértice do triângulo.
- $P_6 \rightarrow$  Com a régua, ligamos os três vértices para obter o triângulo desejado.



**Figura 2.19:** Construção de um triângulo equilátero.

Comentários sobre a construção: As duas circunferências foram construídas com o mesmo raio  $\ell$ . Como o ponto  $B$  foi tomado aleatoriamente sobre a circunferência  $C_1$ , temos que  $\overline{AB} = \ell$ . Já o ponto  $C$  foi tomado na interseção das circunferências  $C_1$  e  $C_2$  que foram construídas centradas em  $A$  e  $B$ . Logo, os segmentos  $AC$  e  $BC$  são raios das respectivas circunferências. Assim,  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \ell$ .

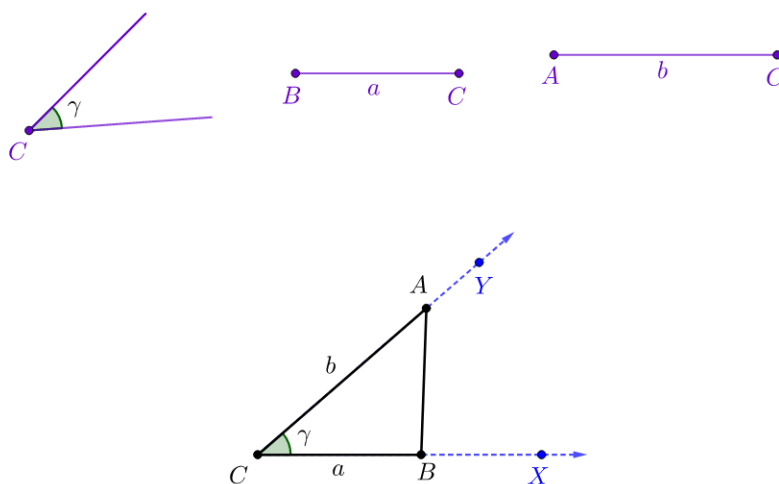
**Observação 2.4**

É importante observar que havia dois lugares possíveis para tomarmos o ponto  $C$ . Na figura 2.19, tomamos tal ponto no semiplano superior determinado por  $r$ , que é a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ . Porém, poderíamos ter escolhido o semiplano inferior que, ainda assim, teríamos o triângulo desejado.

**2.4.2 Construção de triângulo conhecendo dois lados e um ângulo**

Vamos construir um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, onde são conhecidos  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\hat{C} = \gamma$ . Para obtê-lo, basta seguir os passos listados a seguir:

- $P_1 \rightarrow$  Marcamos um ponto  $C$  em qualquer lugar do plano para indicar onde estará localizado o vértice  $C$  do triângulo que desejamos construir e, em seguida, traçamos uma semirreta  $\overrightarrow{CX}$ .
- $P_2 \rightarrow$  Fazemos o transporte do ângulo de medida  $\gamma$  para a semirreta  $\overrightarrow{CX}$ , com vértice em  $C$ , obtendo assim uma nova semirreta  $\overrightarrow{CY}$ .
- $P_3 \rightarrow$  Fazemos o transporte do segmento  $\overline{BC} = a$  para a semirreta  $\overrightarrow{CX}$ , determinando assim a localização do vértice  $B$  do triângulo.
- $P_4 \rightarrow$  Fazemos também o transporte do segmento  $\overline{AC} = b$  para a semirreta  $\overrightarrow{CY}$ , determinando assim a localização do vértice  $A$  do triângulo.
- $P_5 \rightarrow$  Por fim, construímos o segmento  $AB$  para obter o triângulo desejado.



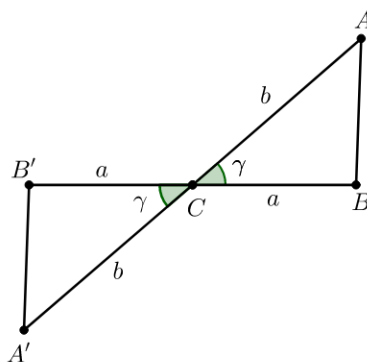
**Figura 2.20:** Construção de triângulo do caso LAL.

Comentários sobre a construção: Essa construção é autoexplicativa, visto que todos os passos da construção utilizaram apenas o transporte de segmentos e de ângulos vistos, respectivamente em 2.3.1 e 2.3.4.

**Observação 2.5**

A partir da construção acima, vimos que o ponto  $C$  poderia ser tomado em qualquer lugar do plano. Além disso, quando construímos a semirreta  $\overrightarrow{CX}$ , poderíamos tê-la tomado também em qualquer direção, uma vez que de um ponto podemos traçar infinitas semirretas. Os triângulos assim construídos são todos congruentes, o que pode ser verificado pelo Axioma 2.1.

A Figura 2.21 mostra-nos uma situação em que dois triângulos congruentes foram construídos, tomando como referência inicial as posições do ponto  $B$  e  $B'$  em relação ao ponto inicial  $C$ , sendo o primeiro deles tomado à direita de  $C$  e o segundo à esquerda.



**Figura 2.21:** Caso de congruência LAL.

**2.4.3 Construção de triângulo conhecendo um lado e dois ângulos**

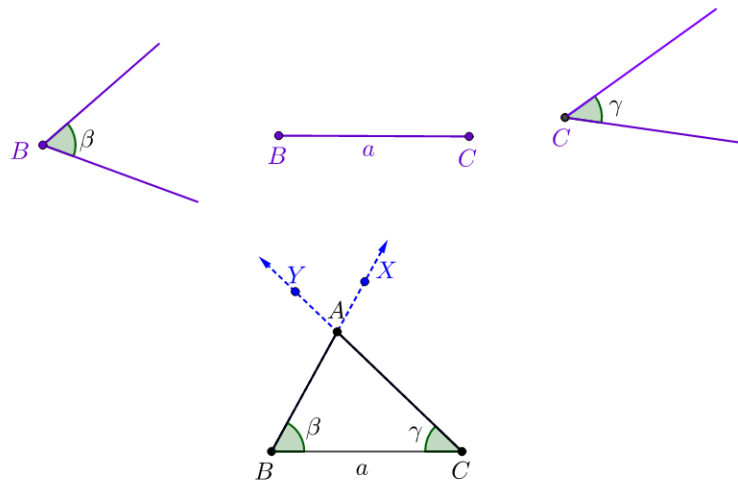
Vamos construir um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, onde são conhecidos  $\overline{BC} = a$ ,  $\widehat{B} = \beta$  e  $\widehat{C} = \gamma$ , em que  $\beta + \gamma < 180^\circ$ . Para obtê-lo, basta seguir os passos listados a seguir:

- $P_1 \rightarrow$  Marcamos um ponto  $B$  em qualquer lugar do plano para indicar onde estará localizado o vértice  $B$  do triângulo que será uma das extremidades do segmento conhecido relativo ao triângulo que desejamos construir.
- $P_2 \rightarrow$  Fazemos o transporte do segmento  $\overline{BC} = a$  e marcamos a outra extremidade desse segmento como  $C$ .
- $P_3 \rightarrow$  Fazemos o transporte do ângulo  $\widehat{B} = \beta$  para o vértice  $B$  do segmento obtido anteriormente e traçamos a semirreta  $\overrightarrow{BX}$ .
- $P_4 \rightarrow$  Fazemos o transporte do ângulo  $\widehat{C} = \gamma$  para o vértice  $C$  de modo que os ângulos  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  estejam localizados no mesmo semiplano determinado pela reta suporte do segmento  $BC$ . Em seguida, traçamos a semirreta  $\overrightarrow{CY}$ .



$P_5 \rightarrow$  Marcamos o ponto  $A$  na interseção entre  $\overrightarrow{BX}$  e  $\overrightarrow{CY}$ . Tal ponto será o terceiro vértice do triângulo que almejamos construir.

$P_6 \rightarrow$  Por fim, construímos os segmentos  $AB$  e  $AC$  para obter o triângulo desejado.

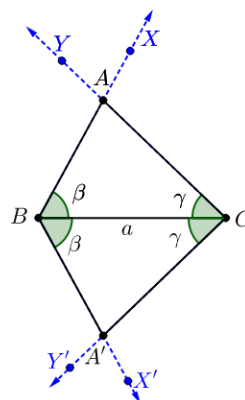


**Figura 2.22:** Construção de triângulo do caso ALA.

Comentários sobre a construção: Todos os passos da construção utilizaram apenas o transporte de segmentos e de ângulos vistos, respectivamente em 2.3.1 e 2.3.4. Além disso, a existência do ponto  $A$  é garantida por Barbosa [1, Corolário 5.5, p. 75].

**Observação 2.6**

A partir da construção acima, vimos que o segmento  $BC$  poderia ser tomado em qualquer lugar e direção do plano. Independentemente da escolha da localização do segmento  $BC$ , os triângulos construídos seguindo os passos acima são todos congruentes pelo Axioma 2.2. A Figura 2.23 mostra-nos uma situação em que dois triângulos congruentes foram construídos, tomando como referência inicial o segmento  $\overline{BC}$ , de modo que, em um dos triângulos, o ponto  $A$  fora tomado no semiplano superior em relação a  $BC$  e o ponto  $A'$  no semiplano inferior.

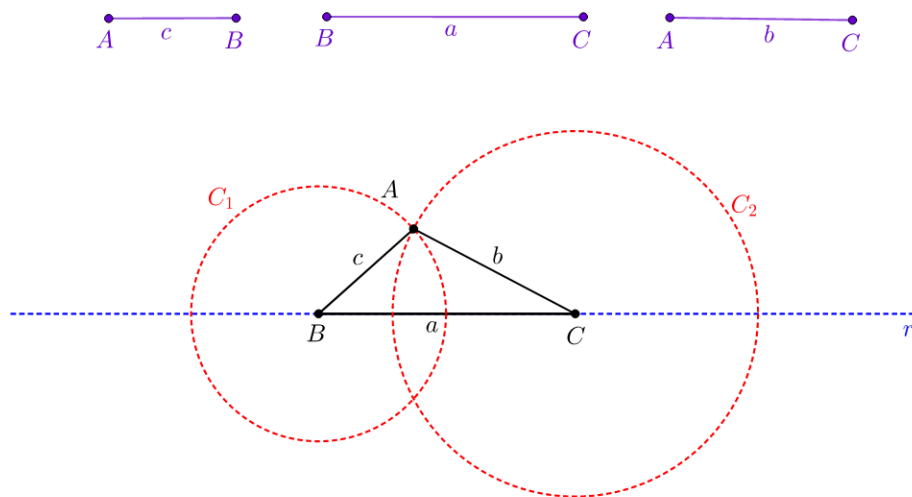


**Figura 2.23:** Caso de congruência ALA.

### 2.4.4 Construção de um triângulo sendo conhecidos os 3 lados

Vamos construir um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, onde são conhecidos  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$ . Para obtê-lo, basta seguir os passos listados a seguir:

- $P_1 \rightarrow$  Traçamos uma reta  $r$  e marcamos sobre ela um ponto qualquer para determinar a localização do vértice  $B$  do triângulo.
- $P_2 \rightarrow$  Fazemos o transporte do segmento  $\overline{BC} = a$  para essa reta  $r$ , obtendo assim a localização do vértice  $C$ .
- $P_3 \rightarrow$  Construimos uma circunferência  $C_1$  centrada em  $B$  com raio igual a  $\overline{AB}$  e uma circunferência  $C_2$  centrada em  $C$  com raio igual a  $\overline{AC}$ .
- $P_4 \rightarrow$  Na interseção entre  $C_1$  e  $C_2$ , marcamos o ponto  $A$  que será o terceiro vértice do triângulo desejado.
- $P_5 \rightarrow$  Para finalizar, traçamos os segmentos  $\overline{AB} = c$  e  $\overline{AC} = b$ , obtendo assim o triângulo desejado.



**Figura 2.24:** Construção de triângulo do caso LLL.

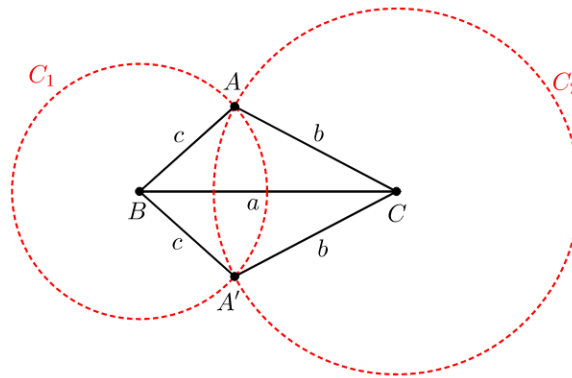
Comentários sobre a construção: Novamente, a construção é autoexplicativa, uma vez que todos os passos da construção utilizaram apenas o transporte de segmentos, visto em 2.3.1 e construção de circunferências sendo conhecidos o centro e o raio.

#### Observação 2.7

Semelhante aos casos anteriores, a construção do triângulo pedido não depende do ponto de partida, o que é garantido pelo Axioma 2.3. Outro ponto importante a ser notado é que tal construção só é possível se as medidas  $a, b$  e  $c$  satisfazem a Desigualdade Triangular (ver [1, Teorema 5.11, p. 81]).

A Figura 2.25 revela-nos uma situação em que dois triângulos idênticos foram construídos, to-

mando como referência inicial o segmento  $\overline{BC}$ , seguidos dos pontos  $A$  e  $A'$  tomados nas duas interseções das circunferências  $C_1$  e  $C_2$ .



**Figura 2.25:** Caso de congruência LLL.

## 2.5 Pontos notáveis de um triângulo

Os segmentos que partem de um dos vértices de um triângulo e cortam a reta suporte do lado oposto a esse vértice são chamados de *cevianas*. São exemplos de cevianas a mediana, a altura e a bissetriz relativas a algum dos vértices do triângulo.

Veremos, nesta seção, que as bissetrizes de um triângulo concorrem em um único ponto. Isso também acontece com as medianas, alturas e mediatrizes associadas ao triângulo. Tais pontos especiais são chamados de pontos notáveis de um triângulo. Além disso, mostraremos como obter os pontos notáveis de um triângulo, utilizando apenas régua e compasso.

### 2.5.1 Medianas e baricentro

#### Definição 2.3

Damos o nome *mediana* à ceviana que parte de algum vértice de um triângulo e atinge o lado oposto a esse vértice em seu ponto médio.

#### Proposição 2.1

Em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto  $G$ . Além disso, esse ponto divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2 : 1.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [16, Proposição 2.37, p. 59].

O ponto de encontro das medianas de um triângulo recebe o nome de *baricentro*, sendo também referenciado como o centro de massa do triângulo ou centro de gravidade. O baricentro sempre se localiza na região delimitada pelos lados do triângulo considerado.

Para determinarmos o baricentro de um triângulo  $\triangle ABC$ , basta executarmos os seguintes passos:

$P_1 \rightarrow$  Escolhemos um dos vértices do triângulo e traçamos uma das medianas ligando esse vértice ao ponto médio  $M_i$  do lado oposto.

$P_2 \rightarrow$  Escolhemos outro vértice do triângulo e repetimos o procedimento do passo anterior.

$P_3 \rightarrow$  Marcamos a interseção entre as duas medianas. Esse ponto é o baricentro do triângulo.

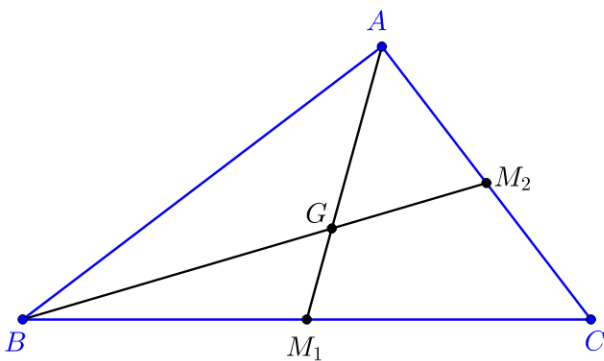


Figura 2.26: Baricentro com 2 medianas.

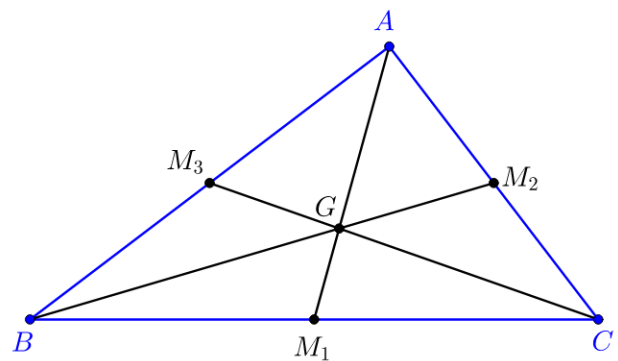


Figura 2.27: Baricentro com 3 medianas.

Comentários sobre a construção: Ao traçarmos as três medianas, podemos perceber algumas propriedades relativas a esses elementos:

- (i) O baricentro divide a mediana em dois segmentos na razão 2:1, onde o antecedente representa a distância entre o vértice do triângulo e o baricentro e o conseqüente representa a distância entre o baricentro e o ponto médio do lado oposto, conforme podemos perceber na Figura 2.28.
- (ii) As medianas dividem o triângulo original em seis novos triângulos de mesma área, conforme podemos perceber na Figura 2.29, sendo que, aqui, os números apresentados relacionam-se a uma figura aleatória desenhada no software *GeoGebra*. Tal resultado pode ser comprovado em [17].

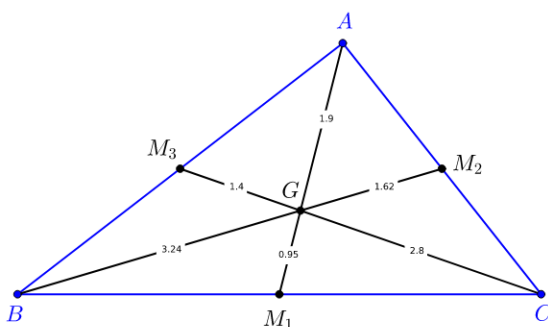


Figura 2.28: Exemplo ilustrativo em que o baricentro G divide as medianas em segmentos na razão 2:1.

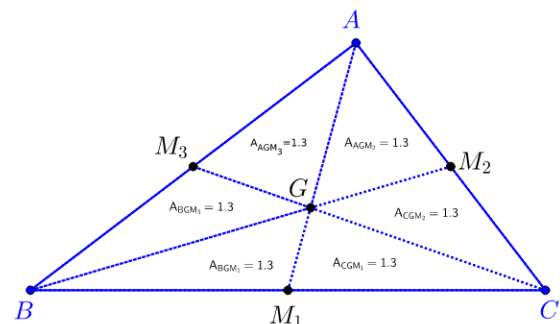


Figura 2.29: Exemplo ilustrativo em que as medianas dividem o triângulo  $\triangle ABC$  em seis triângulos de mesma área, com vértice no baricentro.

### 2.5.2 Bissetrizes e incentro

Como vimos na Seção 2.2.3, a bissetriz pode ser vista como a semirreta com origem no vértice do ângulo, dividindo-o em dois ângulos congruentes. A proposição seguinte fornece um importante resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [16, Proposição 3.14, p. 82].

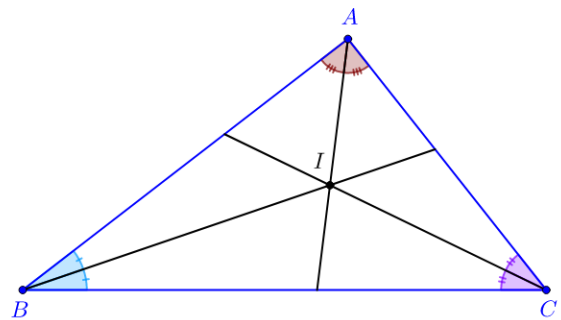
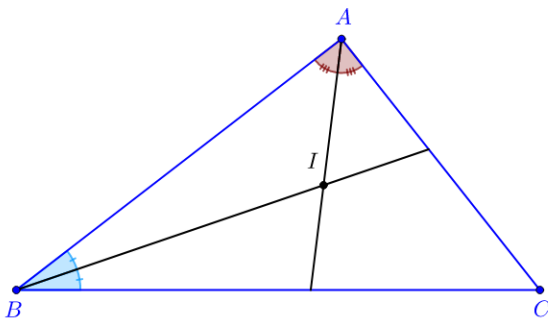
**Proposição 2.2**

As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto.

O ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo recebe o nome de *incentro*, comumente representado pela letra *I*. O incentro coincide com o centro da circunferência inscrita no triângulo e, por isso, sempre se localiza na região delimitada pelos lados do triângulo considerado.

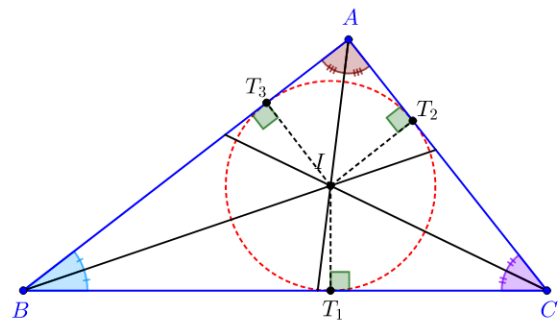
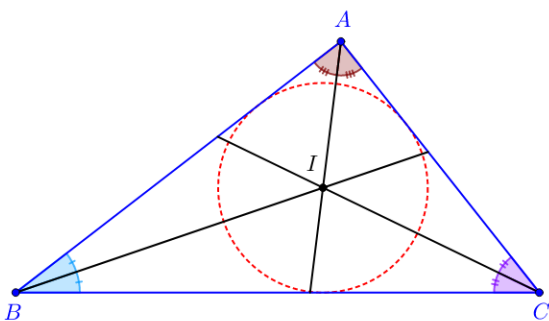
Para determinarmos o incentro de um triângulo  $\triangle ABC$ , basta executarmos os seguintes passos:

- $P_1 \rightarrow$  Escolhemos um dos vértices do triângulo e traçamos uma das bissetrizes.
- $P_2 \rightarrow$  Escolhemos outro vértice do triângulo e repetimos o procedimento do passo anterior.
- $P_3 \rightarrow$  Marcamos a interseção entre as duas bissetrizes. Esse ponto é o incentro do triângulo.



**Figura 2.30:** Duas bissetrizes e o respectivo incentro. **Figura 2.31:** Três bissetrizes e o respectivo incentro.

Comentários sobre a construção: Segue da definição de bissetriz que o incentro é equidistante aos lados do triângulo, conforme ilustrado na Figura 2.33. Consequentemente, o incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, como nos indica a Figura 2.32.



**Figura 2.32:** Incentro como centro da circunferência inscrita.

**Figura 2.33:** Indicação de que o incentro é sempre equidistante aos lados de um triângulo.

### 2.5.3 Alturas e ortocentro

#### Definição 2.4

A ceviana que passa por um dos vértices do triângulo e é perpendicular à reta suporte do lado oposto a esse vértice é chamada de *altura* do triângulo.

#### Proposição 2.3

Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [16, Proposição 3.11, p. 80].

O ponto de encontro das alturas de um triângulo recebe o nome de *ortocentro*, comumente representado pela letra  $O$ . O ortocentro, ao contrário do baricentro e do incentro, pode estar localizado dentro ou fora do triângulo.

Para determinarmos o ortocentro de um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, basta executarmos os seguintes passos:

$P_1 \rightarrow$  Escolhemos um dos vértices do triângulo e traçamos uma das alturas.

$P_2 \rightarrow$  Escolhemos outro vértice do triângulo e repetimos o procedimento do passo anterior.

$P_3 \rightarrow$  Marcamos a interseção entre as duas alturas. Esse ponto encontrado é o ortocentro do triângulo.

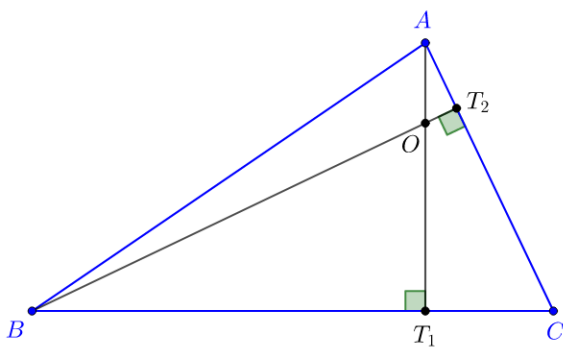


Figura 2.34: Ortocentro e duas alturas relacionadas.

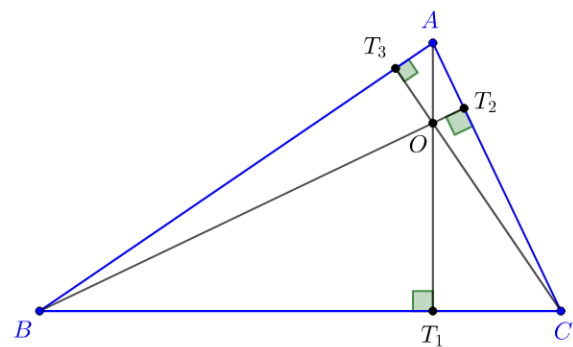


Figura 2.35: Ortocentro e três alturas relacionadas.

Comentários sobre a construção: Os triângulos das figuras 2.34 e 2.35 são acutângulos e, por isso, o ortocentro encontra-se em seu interior. Porém, temos ainda as seguintes situações:

- (i) O ortocentro está localizado no vértice associado ao ângulo reto quando o triângulo for retângulo, como nos indica a Figura 2.36, em que o ortocentro  $O$  coincide com o vértice  $A$ . Observe que  $AT_1$  é a altura relativa ao lado  $BC$  enquanto que as outras alturas coincidem com os lados  $AB$  e  $AC$  do triângulo.

(ii) O ortocentro está localizado no exterior do triângulo quando este for obtusângulo, como nos indica a Figura 2.37, onde  $AT_1$  é a altura relativa ao lado  $BC$ ,  $BT_2$  é a altura relativa ao lado  $AC$  e  $CT_3$  é a altura relativa ao lado  $AB$ . O prolongamento dessas alturas (destacados no tracejado em vermelho) dá-nos a posição do ortocentro.

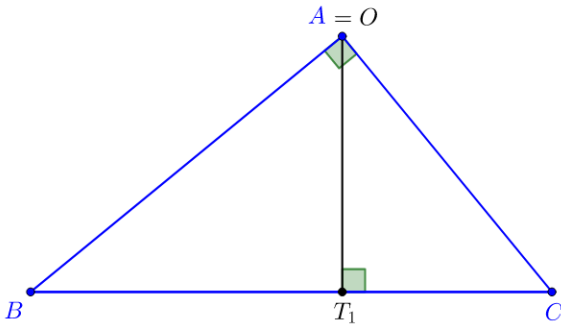


Figura 2.36: Ortocentro coincidente com o vértice.

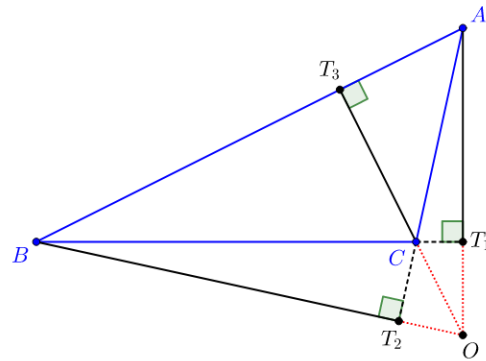


Figura 2.37: Ortocentro fora do triângulo.

### 2.5.4 Mediatrizes e circuncentro

O ponto notável de um triângulo apresentado nesta seção tem destaque por ser o centro da circunferência que circunscreve o triângulo. Para obtê-lo, basta traçarmos as mediatrizes, como foi visto em 2.2.2, dos lados do triângulo.

#### Proposição 2.4

Em todo triângulo, as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [16, Proposição 3.9, p. 79].

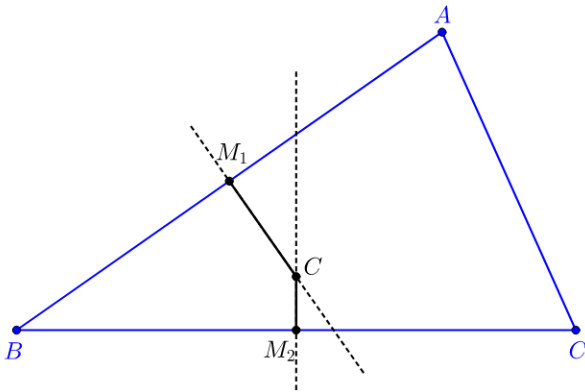
O ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo recebe o nome de *circuncentro*, comumente representado pela letra  $C$ . O circuncentro, assim como o ortocentro, pode estar localizado dentro ou fora do triângulo.

Para determinarmos o circuncentro de um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, basta executarmos os seguintes passos:

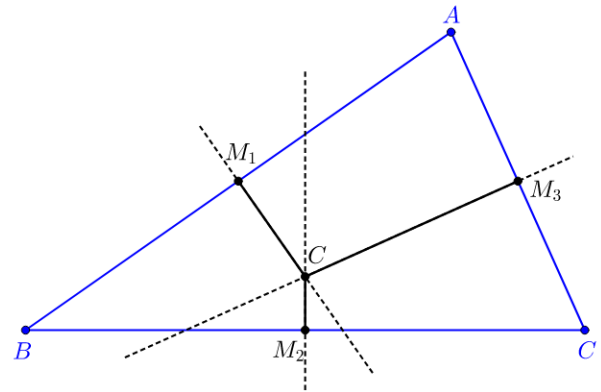
$P_1 \rightarrow$  Escolhemos um dos lados do triângulo e traçamos sua mediatriz.

$P_2 \rightarrow$  Escolhemos outro lado do triângulo e repetimos o procedimento do passo anterior.

$P_3 \rightarrow$  Marcamos a interseção entre as duas mediatrizes. Esse ponto é o circuncentro do triângulo.

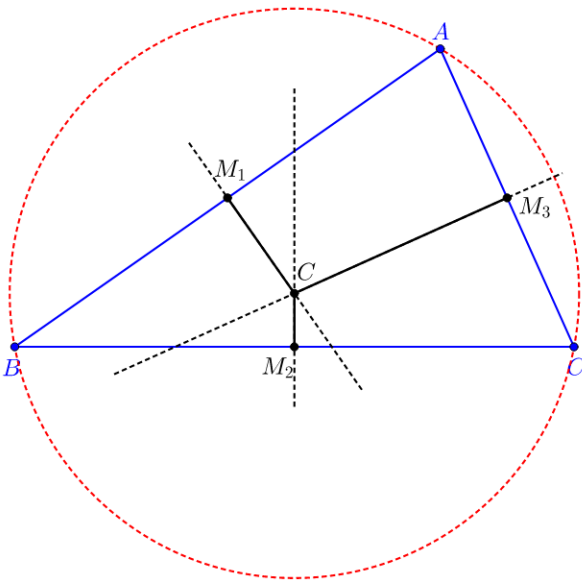


**Figura 2.38:** Circuncentro e duas mediatrizes relacionadas.

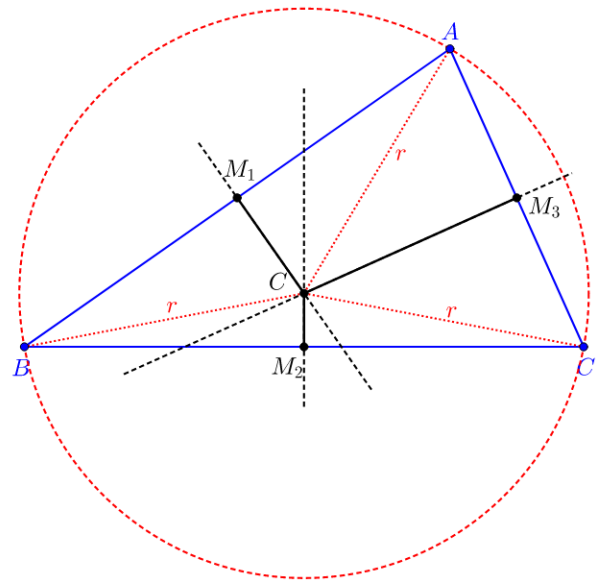


**Figura 2.39:** Circuncentro e três mediatrizes relacionadas.

*Comentários sobre a construção:* Segue da definição de mediatriz que o circuncentro é equidistante aos vértices do triângulo, conforme ilustrado na Figura 2.41. Como consequência desse fato, segue que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, como ilustrado na Figura 2.40.



**Figura 2.40:**  $C$  é o centro da circunferência circunscrita.



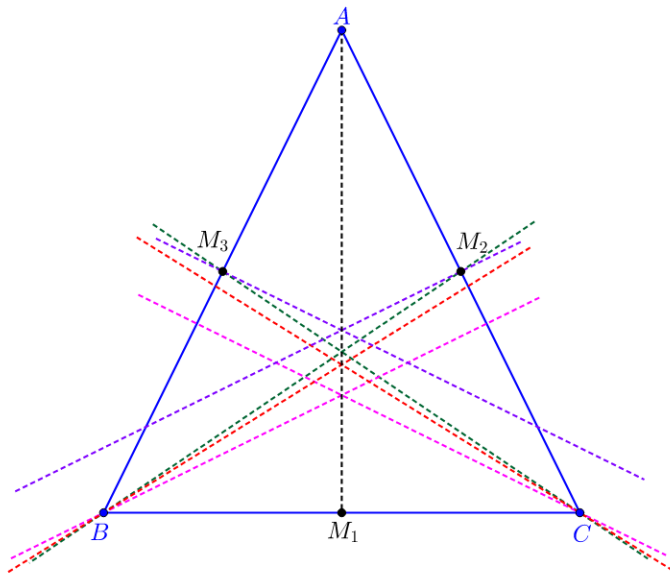
**Figura 2.41:** Indicação de que  $C$  é equidistante aos vértices do triângulo.

### 2.5.5 Segmentos e pontos notáveis em um triângulo isósceles

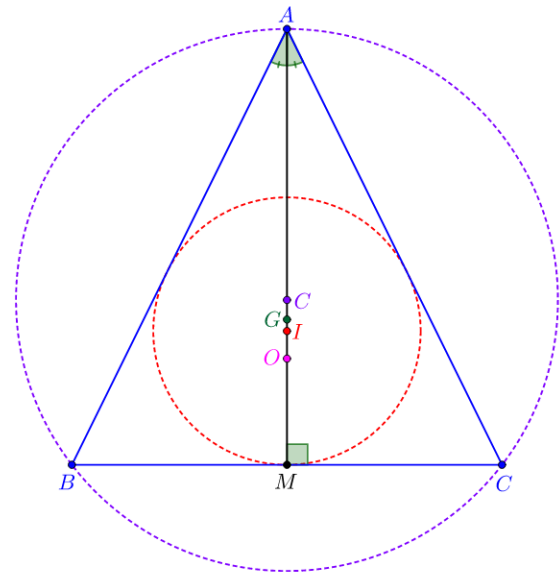
Em um triângulo isósceles, é interessante observar que, na construção dos segmentos e dos pontos notáveis, ocorrerão os seguintes fatos:

- (i) A mediana, a bissetriz, a altura e a mediatriz em relação à base são coincidentes e estão representadas pelo segmento  $AM_1$  na Figura 2.42 e  $AM$  na Figura 2.43.
- (ii) O baricentro ( $G$ ), o incentro ( $I$ ), o ortocentro ( $O$ ) e o circuncentro ( $C$ ) serão colineares, mas não coincidentes, conforme pode ser visto novamente na Figura 2.43.





**Figura 2.42:** Cevianas e mediatrizes em um triângulo isósceles.



**Figura 2.43:** Pontos notáveis em um triângulo isósceles.

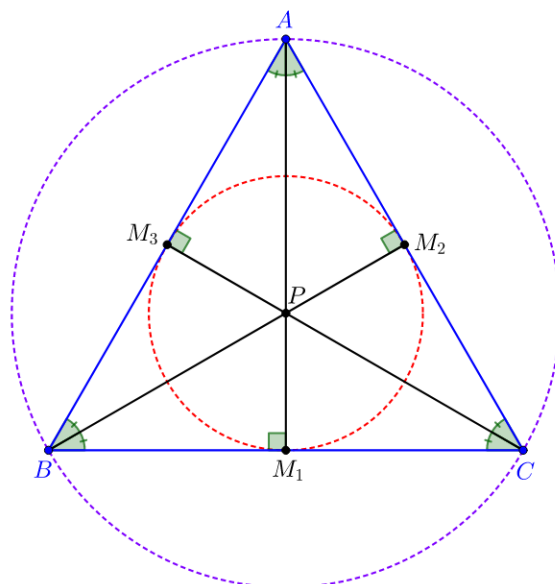
**Observação 2.8**

Na Figura 2.42, as linhas tracejadas em vermelho são as outras bissetrizes do triângulo; em verde, as outras alturas; em rosa, as outras medianas e, em roxo, as outras mediatrizes, lembrando que a linha tracejada em preto é, simultaneamente, bissetriz, altura, mediana e mediatriz do triângulo relativamente à base.

**2.5.6 Segmentos e pontos notáveis em um triângulo equilátero**

Em um triângulo equilátero, é interessante observar que, na construção dos segmentos e dos pontos notáveis, ocorrerão os seguintes fatos:

- (i) Todo segmento que for mediana, também será, ao mesmo tempo, bissetriz, altura e mediatriz, como pode ser visto na Figura 2.44.
- (ii) O baricentro ( $G$ ), o incentro ( $I$ ), o ortocentro ( $O$ ) e o circuncentro ( $C$ ) são coincidentes como pode ser visto na Figura 2.44.



**Figura 2.44:** Pontos notáveis em um triângulo equilátero.

**Observação 2.9**

Na Figura 2.44,  $AM_1$  é altura e mediana relativa ao vértice  $A$  e está, tanto sobre a semirreta que é bissetriz do ângulo formado nesse vértice, quanto sobre a reta que é mediatriz relativa ao lado oposto a esse vértice. Isso também vale para  $BM_2$  e  $CM_3$ . Já o ponto  $P$  é, ao mesmo tempo, baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro do triângulo.

## Polígonos regulares

---

Dizemos que um polígono é *regular* quando todos os seus lados possuem a mesma medida (equilátero) e todos os seus ângulos internos são congruentes (equiângulo).

Uma maneira de construir um polígono regular de  $n$  lados é dividindo uma circunferência de centro  $O$  em  $n$  arcos de mesmo tamanho, visto que todo polígono regular é inscritível (ver [16, Proposição 5.17, p. 200]). Entretanto, tal procedimento nem sempre é possível de ser realizado, utilizando-se apenas régua e compasso.

Neste capítulo, mostraremos que alguns polígonos regulares podem ser construídos de uma forma relativamente simples, como o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono. Além disso, apresentamos um método, creditado ao matemático Carlo Rinaldini, para construir qualquer polígono regular, de maneira aproximada.

Somente no Capítulo 4, com base na teoria dos números construtíveis, veremos quais polígonos regulares podem ser construídos com régua e compasso.

### 3.1 Triângulo equilátero

Dada uma circunferência  $C$  de raio  $r$ , podemos inscrever um triângulo equilátero, executando os seguintes passos:

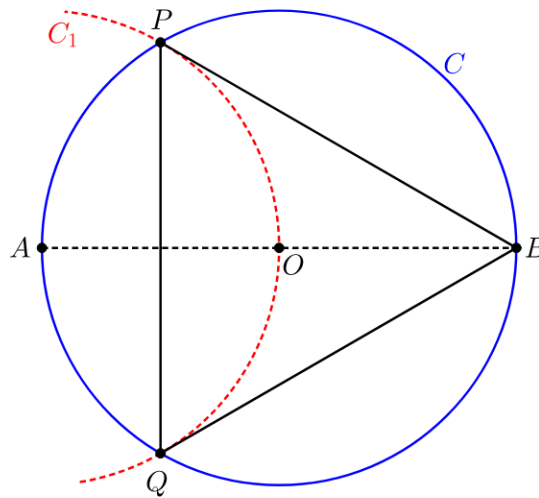
$P_1 \rightarrow$  Localizamos o centro  $O$  da circunferência caso esse não tenha sido fornecido.

$P_2 \rightarrow$  Traçamos um diâmetro na circunferência  $C$  e nomeamos as extremidades desse diâmetro como  $A$  e  $B$ .

$P_3 \rightarrow$  Com a ponta seca do compasso no ponto  $A$ , traçamos um arco de circunferência  $C_1$  com mesmo

raio de  $C$  tal que esse arco intercepte  $C$  em dois pontos  $P$  e  $Q$ .

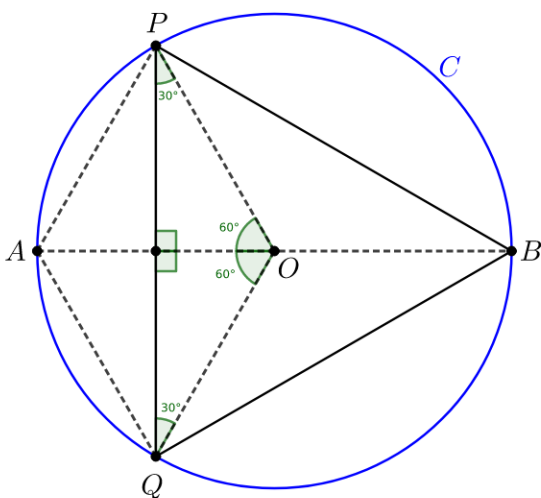
$P_4 \rightarrow$  Traçamos os segmentos  $PB$ ,  $BQ$  e  $QP$ . Desta forma, o triângulo  $\triangle PBQ$  obtido é equilátero e está inscrito na circunferência  $C$ .



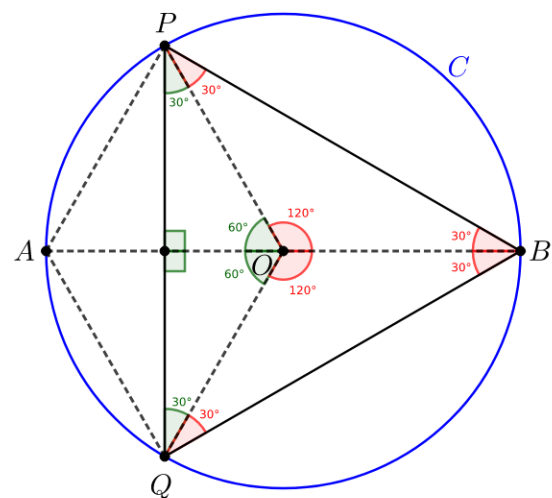
**Figura 3.1:** Construção do triângulo equilátero inscrito na circunferência.

Comentários sobre a construção:

Veja que, nessa construção,  $C_1$  e  $C$  possuem o mesmo raio  $r$ . Assim,  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP} = \overline{OQ} = r$  e, com isso, temos que os triângulos  $AOP$  e  $AOQ$  são equiláteros. A partir disso, concluímos que  $PQ$  é mediatriz de  $OA$  e bissetriz de  $A\hat{P}O$  e de  $A\hat{Q}O$ , o que nos permite concluir as medidas dos ângulos apresentadas na Figura 3.2. Os ângulos  $B\hat{O}P$  e  $Q\hat{O}B$  são suplementares, respectivamente aos ângulos  $A\hat{O}P$  e  $A\hat{O}Q$  e, por isso, medem  $120^\circ$  cada. Como os triângulos  $OBP$  e  $OBQ$  são isósceles, temos que os ângulos da base são congruentes e, portanto,  $O\hat{B}P = O\hat{P}B = 30^\circ$ . Assim,  $Q\hat{P}B = P\hat{B}Q = B\hat{Q}P = 60^\circ$  e, conseqüentemente,  $BPQ$  é um triângulo equilátero.



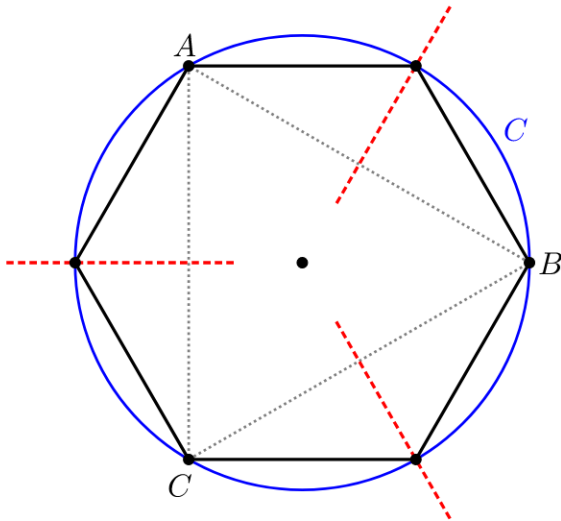
**Figura 3.2:** Medidas de ângulos de triângulos.



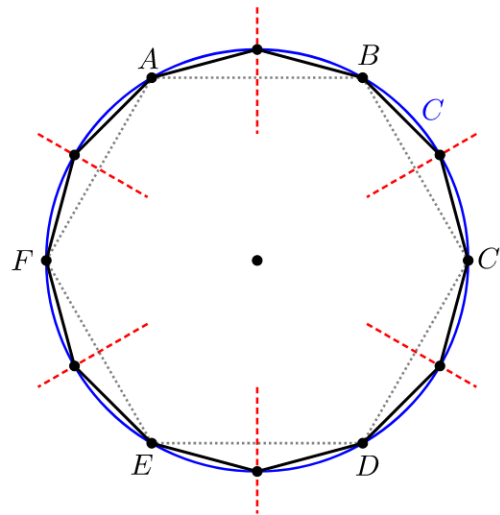
**Figura 3.3:** Medidas de ângulos de triângulos.

**Observação 3.1**

Considere  $\triangle ABC$  um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência  $C$ . Traçando as mediatrizes dos lados do triângulo e marcando os pontos de interseção de tais retas com a circunferência  $C$ , obtemos outros três pontos que dividem os arcos determinados por  $A$ ,  $B$  e  $C$  ao meio. Dessa forma, os seis pontos marcados determinam um hexágono regular (Figura 3.4). Analogamente, podemos construir um dodecágono a partir de um hexágono regular (Figura 3.5). De maneira geral, se  $A_1A_2 \dots A_n$  for um polígono regular de  $n$  lados inscrito na circunferência, podemos utilizar a ideia descrita acima para construir um polígono regular de  $2n$  lados.



**Figura 3.4:** Construção do hexágono inscrito na circunferência.

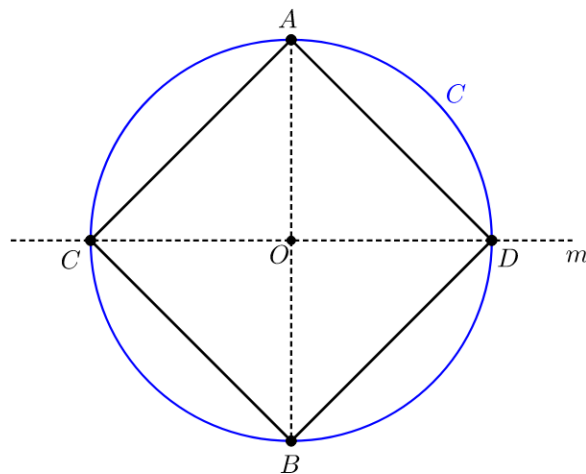


**Figura 3.5:** Construção do dodecágono inscrito na circunferência.

### 3.2 Quadrado

Dada uma circunferência  $C$  de raio  $r$ , podemos inscrever um quadrado em  $C$ , executando os passos a seguir:

- $P_1 \rightarrow$  Localizamos o centro  $O$  da circunferência caso esse não tenha sido fornecido.
- $P_2 \rightarrow$  Traçamos um diâmetro nessa circunferência e nomeamos suas extremidades como  $A$  e  $B$ .
- $P_3 \rightarrow$  Traçamos a mediatriz  $m$  desse diâmetro e marcamos os pontos  $C$  e  $D$  na interseção de  $m$  com a circunferência  $C$ , obtendo assim outro diâmetro dessa circunferência.
- $P_4 \rightarrow$  Traçamos os segmentos  $AC$ ,  $CB$ ,  $BD$  e  $DA$  para obter o quadrado desejado.

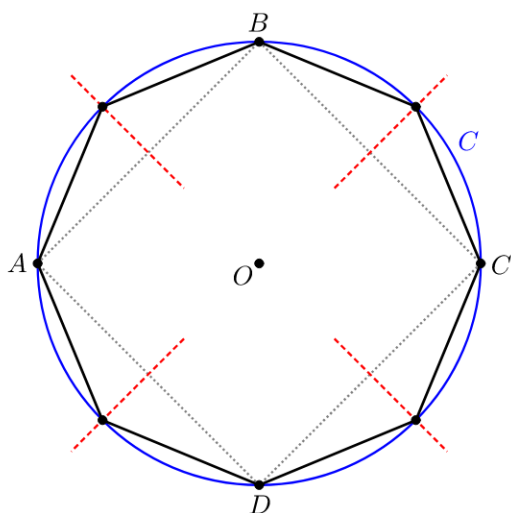


**Figura 3.6:** Construção do quadrado inscrito na circunferência.

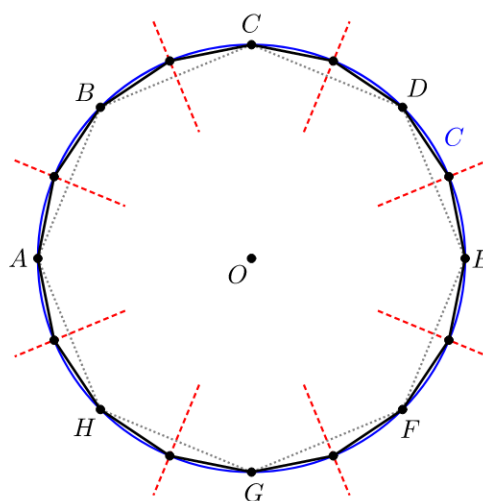
Comentários sobre a construção: Observe que, ao construirmos a mediatriz  $m$ , surgiram quatro triângulos retângulos isósceles na Figura 3.6, congruentes com  $\widehat{AOC} = \widehat{AOD} = \widehat{COB} = \widehat{BOD} = 90^\circ$  e, assim, temos que os ângulos da base de tais triângulos são todos congruentes, medindo  $45^\circ$  cada. Consequentemente,  $ACBD$  é um quadrado.

**Observação 3.2**

De modo similar ao que fizemos para o triângulo, podemos construir um octógono regular a partir das mediatrizes dos lados do quadrado, como pode ser visto na Figura 3.7 e, a partir desse, construir um polígono de 16 lados como pode ser visto na Figura 3.8.



**Figura 3.7:** Construção do octógono inscrito na circunferência.



**Figura 3.8:** Construção do polígono de 16 lados inscrito na circunferência.

### 3.3 Hexágono

Durante as etapas de construção do triângulo, vimos que é possível obtermos um hexágono. Porém, a construção que será abordada aqui mostra-nos como obter o hexágono, sem antes construir o triângulo equilátero. Assim, dada uma circunferência  $C$  de raio  $r$ , podemos inscrever um hexágono regular, executando os seguintes passos:

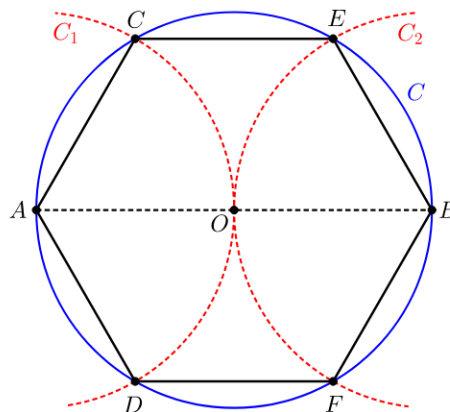
$P_1 \rightarrow$  Localizamos o centro  $O$  da circunferência caso esse não tenha sido fornecido.

$P_2 \rightarrow$  Traçamos um diâmetro nessa circunferência e nomeamos suas extremidades como  $A$  e  $B$ .

$P_3 \rightarrow$  Com a ponta seca em cada uma das extremidades desse diâmetro, traçamos dois arcos de circunferência  $C_1$  e  $C_2$  com mesmo raio de  $C$ , tal que um deles esteja centrado em  $A$  e o outro esteja centrado em  $B$ .

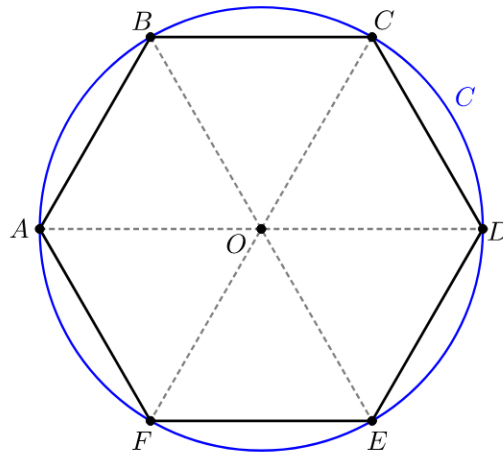
$P_4 \rightarrow$  Marcamos os pontos de interseção entre os arcos  $C_1$  e  $C_2$  com a circunferência  $C$ , obtendo assim quatro novos pontos.

$P_5 \rightarrow$  Unindo os pontos consecutivos marcados em  $C$ , obtemos os seis lados de um hexágono regular.



**Figura 3.9:** Construção do hexágono inscrito na circunferência.

*Comentários sobre a construção:* Veja que, nessa construção,  $C$ ,  $C_1$  e  $C_2$  possuem o mesmo raio  $r$  e, portanto,  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BE} = \overline{BF} = r$ . Assim, os triângulos  $AOC$ ,  $AOD$ ,  $BOE$  e  $BOF$  na Figura 3.9 são todos equiláteros. Segue que  $\widehat{COE} = \widehat{DOF} = 60^\circ$  e, como os triângulos  $COE$  e  $DOF$  são isósceles, concluímos que seus respectivos ângulos da base medem  $60^\circ$  cada, de forma que são também equiláteros de lado  $r$ . Consequentemente, o hexágono  $ABCDEF$ , apresentado na Figura 3.10, é regular.



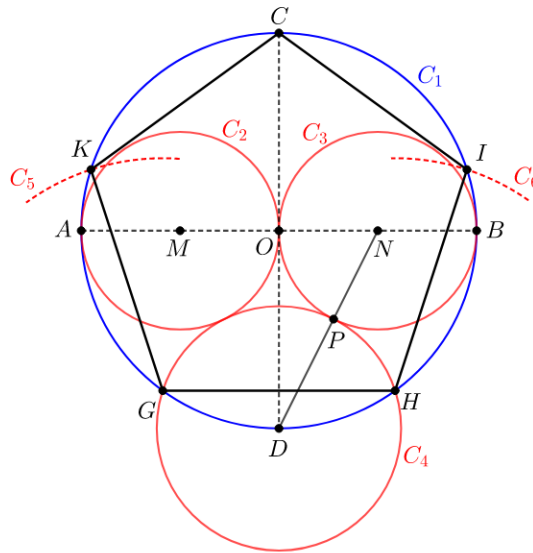
**Figura 3.10:** Hexágono regular com 6 triângulos equiláteros.

### 3.4 Pentágono

Dada uma circunferência  $C_1$  de raio  $r$ , podemos inscrever um pentágono regular em  $C_1$ , executando os seguintes passos:

- $P_1 \rightarrow$  Localizamos o centro  $O$  da circunferência  $C_1$ , caso esse não tenha sido dado.
- $P_2 \rightarrow$  Construimos dois diâmetros  $AB$  e  $CD$  em  $C_1$  tais que eles sejam perpendiculares.
- $P_3 \rightarrow$  Tomamos um dos diâmetros (por exemplo  $AB$ ) e marcamos  $M$  e  $N$  como os pontos médios dos segmentos  $AO$  e  $OB$ , respectivamente.
- $P_4 \rightarrow$  Construimos a circunferência  $C_2$  centrada em  $M$  com raio  $\overline{OM}$  e a circunferência  $C_3$  centrada em  $N$  com raio  $\overline{ON}$ .
- $P_5 \rightarrow$  Construimos um segmento de reta, ligando uma das extremidades do diâmetro  $CD$  (por exemplo  $D$ ) ao ponto  $M$  ou ao ponto  $N$ .
- $P_6 \rightarrow$  Marcamos o ponto  $P$  na interseção desse segmento com uma das circunferências recém-construídas.
- $P_7 \rightarrow$  Com centro em  $D$  e raio  $\overline{PD}$ , construimos uma circunferência  $C_4$ .
- $P_8 \rightarrow$  Marcamos os pontos  $G$  e  $H$  oriundos da interseção entre  $C_4$  e  $C_1$  e construimos o segmento  $GH$ , que será um dos lados do pentágono.
- $P_9 \rightarrow$  Com centros em  $G$  e  $H$ , traçamos duas circunferências  $C_5$  e  $C_6$  de raios iguais a  $\overline{GH}$ , marcando os pontos  $I$  e  $K$ , obtidos, respectivamente, nas interseções de  $C_5$  e  $C_6$  com  $C_1$ . O polígono convexo determinado por  $G, H, I, K$  e o ponto  $C$  é o polígono desejado.





**Figura 3.11:** Construção do pentágono inscrito na circunferência.

Comentários sobre a construção: O desenvolvimento a seguir (que também pode ser encontrado em [14]) utiliza o Teorema de Pitágoras e a definição de seno de um ângulo que podem ser encontradas em qualquer livro de Matemática básica, para justificar o fato de  $\overline{GH}$ , na Figura 3.11, ser a medida do lado do pentágono. Assim, consideramos, sem perda de generalidade,  $C_1$  como uma circunferência de raio 1. Tomando o triângulo  $\triangle DON$  e aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{DN}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{ON}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Daí

$$\overline{DN} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

O segmento  $NP$  é raio da circunferência  $C_3$  e, com isso, mede  $\frac{1}{2}$ . Assim,

$$\overline{PD} = \overline{DN} - \overline{NP} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Observe agora que  $PD$  e  $DH$  são raios da circunferência  $C_4$  e, tomando o triângulo  $\triangle CDH$  retângulo em  $H$ , visto que  $\widehat{DHC}$  é um ângulo inscrito e  $CD$  é um diâmetro da circunferência, concluímos que

$$\text{sen}(\widehat{DCH}) = \frac{\overline{DH}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

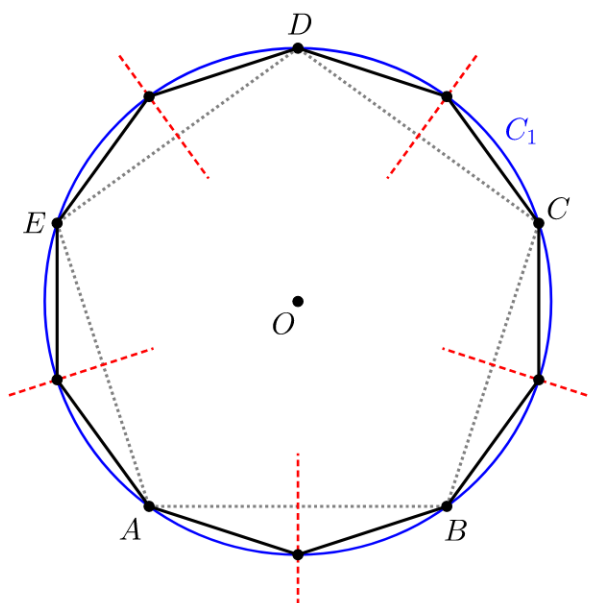
O ângulo que possui o seno valendo  $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$  é o ângulo de  $18^\circ$ , o que nos permite concluir que  $\widehat{DCH} = 18^\circ$ . Uma análise similar permite-nos concluir que  $\widehat{DCG} = 18^\circ$  e, assim, o ângulo inscrito

$\widehat{GCH} = 36^\circ$ , de tal modo que o ângulo central  $\widehat{GOH} = 72^\circ$ , que é o ângulo central do pentágono.

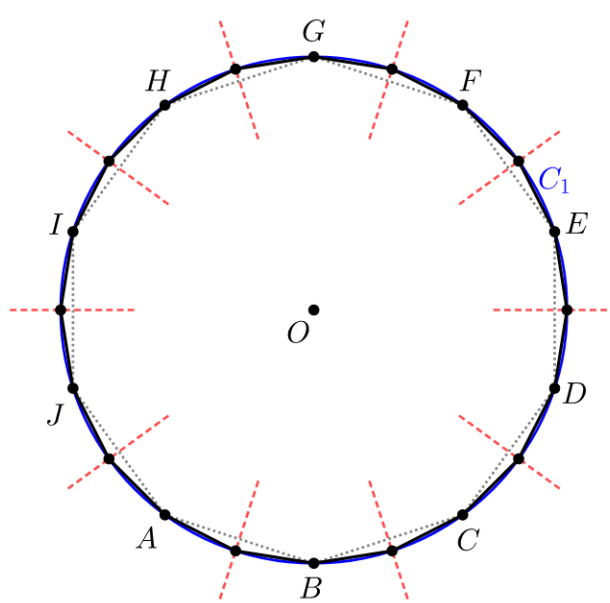
Agora, é fácil ver que os triângulos  $\triangle KOG$ ,  $\triangle GOH$  e  $\triangle HOI$  são congruentes. Da mesma forma, temos  $\triangle KOC \equiv \triangle COI$ . Analisando os ângulos centrais, vemos que  $\widehat{KOC} = \frac{1}{2}(360^\circ - 3 \cdot 72^\circ)$ , isto é  $\widehat{KOC} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$ . Desta forma, podemos concluir que o pentágono  $CKGHI$  é regular.

**Observação 3.3**

De modo similar ao que fizemos para os polígonos anteriores, podemos construir o decágono a partir das mediatrizes dos lados do pentágono, como pode ser visto na Figura 3.12 e, a partir desse, construir um icoságono como pode ser visto na Figura 3.13.



**Figura 3.12:** Construção do decágono inscrito na circunferência.



**Figura 3.13:** Construção do icoságono inscrito na circunferência.

### 3.5 Processo geral de Rinaldini

O processo geral de Rinaldini é um dos processos de desenho geométrico que dividem a circunferência em um número  $n$  de partes iguais, com a utilização da régua e do compasso, creditado ao matemático italiano Carlo Rinaldini (1615 - 1698). O problema da divisão da circunferência confunde-se com o da construção de polígonos regulares, uma vez que essa divisão da circunferência acaba propiciando a construção de polígonos. O processo de Rinaldini é utilizado para a construção aproximada de polígonos regulares com um número qualquer de lados. Para saber mais sobre esse processo, ver [8].

A elegância desse processo consiste no fato de que a construção dos polígonos divide-se em apenas dois casos: polígonos com número par de lados ou polígonos com número ímpar de lados.

Basicamente, o método por ele apresentado consiste em executar o seguinte passo a passo (quando o número de lados do polígono for par):

$P_1$  → Localizamos o centro  $O$  da circunferência  $C_1$ , caso esse não tenha sido dado.

$P_2$  → Traçamos o diâmetro da circunferência dada e nomeamos suas extremidades como  $A$  e  $B$ .

$P_3$  → Partindo do ponto  $A$ , dividimos esse diâmetro em partes iguais, utilizando o que fora feito na Seção 2.3.7 em uma quantidade de segmentos igual à metade do número de lados do polígono que deseja construir.

$P_4$  → Com uma abertura do compasso igual à medida do diâmetro  $AB$ , traçamos dois arcos de circunferência:  $C_1$  centrado em  $A$  e  $C_2$  centrado em  $B$ .

$P_5$  → Marcamos os pontos auxiliares  $P$  e  $Q$  nas interseções entre os arcos  $C_1$  e  $C_2$ .

$P_6$  → Traçamos retas que passem pelo ponto  $P$  e pelos pontos de divisão do diâmetro, obtendo os pontos  $P_i$  na interseção entre essas retas e a semicircunferência localizada no semiplano oposto ao ponto  $P$  em relação ao diâmetro.

$P_7$  → Repetimos o procedimento anterior, apenas trocando o ponto  $P$ , pelo ponto  $Q$ , obtendo assim os pontos  $Q_i$  na outra semicircunferência.

$P_8$  → Por fim, ligamos consecutivamente os pontos  $A$ ,  $P_i$ ,  $B$  e  $Q_i$ , obtendo assim o polígono almejado.

#### Observação 3.4

Caso o polígono a ser construído tenha um número  $n$  ímpar de lados, basta fazer as seguintes alterações:

(i) Para o passo  $P_3$ : se  $n = 2k + 1$  com  $k \in \mathbb{Z}$ , dividimos o diâmetro  $AB$ , partindo de  $A$ , em  $k$  segmentos iguais e um segmento com a metade do comprimento dos anteriores. Tal procedimento pode ser realizado baseado no passo a passo da Seção 2.3.7 em que, nesse caso, tomamos sobre a reta auxiliar  $k + 1$  segmentos de mesmo comprimento e marcamos o ponto médio do  $(k + 1)$ -ésimo segmento.

(ii) Para o passo  $P_8$ , ao ligarmos os pontos formando o polígono, o ponto  $B$  deve ser ignorado.

Nas Figuras 3.14 e 3.15 a seguir, apresentamos exemplos de construções realizadas a partir do método de Rinaldini.

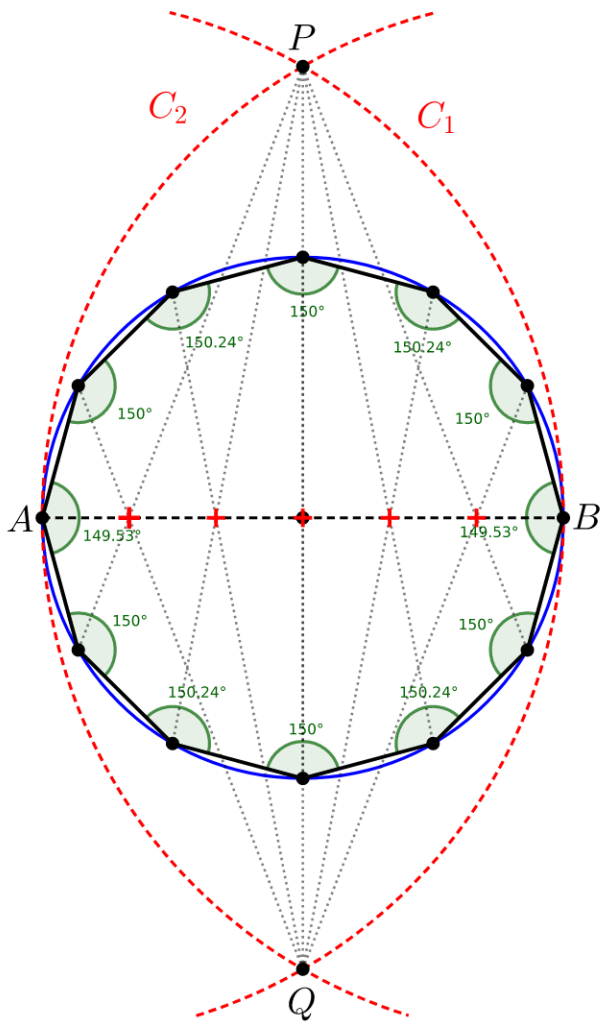


Figura 3.14: Dodecágono pelo método de Rinaldini.

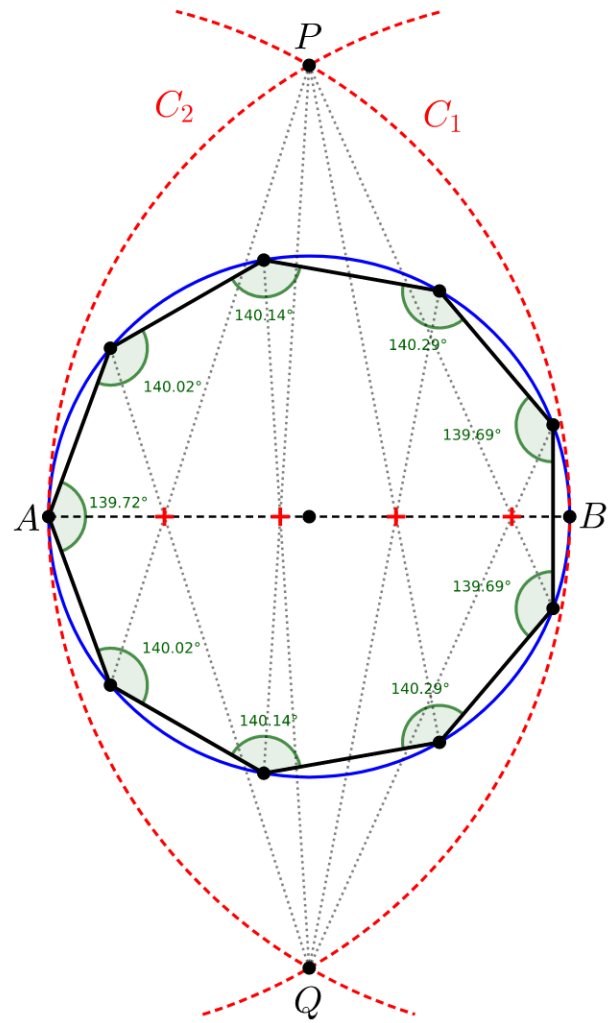


Figura 3.15: Eneágono pelo método de Rinaldini.

# Os números construtíveis e os três problemas clássicos

---

Os instrumentos euclidianos eram extremamente importantes para resolver problemas de construção, mas isso não implica dizer que eles eram suficientes em todas as situações. Isso fica claro a partir do momento em que surgem três problemas clássicos gregos que se tornaram muito famosos com o passar dos séculos. São eles:

- (i) Duplicação do cubo: consiste em construir a aresta de um cubo cujo volume é igual ao dobro do volume de um cubo dado. Em outras palavras, construir com régua e compasso, um segmento cuja medida corresponda a  $\sqrt[3]{2}$ .
- (ii) Quadratura do círculo: equivale a construir um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado. Em outras palavras, construir com régua e compasso, um segmento cuja medida corresponda a  $\sqrt{\pi}$ .
- (iii) Trissecção do ângulo: significa dividir um ângulo qualquer em três partes iguais. Em outras palavras, se  $\cos 3\alpha$  é um número construtível, utilizar apenas régua e compasso para construir o número  $\cos \alpha$ .

Um aprofundamento na história por trás destes três problemas pode ser encontrado em [6, pp. 20 a 23], em que cada um dos três problemas é destrinchado com um contexto histórico para explicar suas origens. Tal material pode servir de base para que o professor faça uma contextualização dos três problemas clássicos da matemática grega e possa mostrar aos alunos que nem todos os problemas de construção podem ser resolvidos apenas com régua e compasso.

E justamente a busca por soluções para esses problemas serviu de motivação para o desenvol-

vimento de diversos conceitos matemáticos, tais como o conceito de números construtíveis. Durante muitos séculos, os problemas clássicos ficaram sem solução, mas a descoberta de que as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas estão bem definidas dentro do conjunto dos números chamados construtíveis fez com que as técnicas de construção com régua e compasso fossem relacionadas com teorias algébricas modernas, tais como a teoria de extensão de corpos deixada por Evariste Galois (1811 - 1832). A partir de então, foi possível dar uma resposta aos três famosos problemas gregos.

Neste capítulo, iremos dar a fundamentação algébrica necessária para a prova da impossibilidade de se resolver os três problemas clássicos apenas com régua e compasso. Por fim, analisaremos o problema da caracterização dos polígonos regulares construtíveis. Observamos que a teoria por trás de tais provas faz parte de uma área da Matemática mais avançada e que os alunos dos ensinos fundamental e médio não possuem base suficiente para sua compreensão, já que tal conteúdo é apresentado apenas no ensino superior. Entretanto, salientamos que o Capítulo 5 apresenta conteúdos que são indicados tanto para alunos quanto para professores.

## 4.1 Anéis e corpos

Neste momento, iremos recordar algumas estruturas algébricas e sua posterior utilização irá comprovar a insolubilidade dos três problemas gregos clássicos.

### Definição 4.1

Dizemos que um conjunto não vazio  $A$  é fechado em relação a uma operação  $*$  quando  $a * b$  pertence ao conjunto  $A$ , para todo  $a, b \in A$ .

Consideremos um conjunto  $A$  fechado com relação às duas operações a seguir:  $+$  (denominada adição) e  $\cdot$  (denominada produto). Assim,

$$\begin{array}{l} + : A \times A \rightarrow A \\ (a, b) \mapsto a + b \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \cdot : A \times A \rightarrow A \\ (a, b) \mapsto a \cdot b \end{array} .$$

### Definição 4.2

Se um conjunto  $A$  for fechado em relação às operações de adição ( $+$ ) e produto ( $\cdot$ ), chamamos a terna  $(A, +, \cdot)$  um *anel* quando as seis propriedades a seguir forem verdadeiras, quaisquer que sejam  $a, b, c \in A$ :

(A1) Associatividade da adição:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

(A2) Existência de elemento neutro para a adição: Existe um elemento neutro  $0 \in A$  para a adição, tal que qualquer que seja  $a \in A$ ,  $a + 0 = 0 + a = a$ .

(A3) Existência de inverso aditivo ou simétrico: Para todo  $x \in A$ , existe um único  $y \in A$ , tal que  $x + y = y + x = 0$ . Em geral, utilizamos a notação  $-x$  para o elemento inverso aditivo de  $x$ .

(A4) Comutatividade da adição:  $a + b = b + a$ .

(A5) Associatividade do produto:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .

(A6) Distributividade à esquerda e à direita:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ;  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ .

Analisando as propriedades até aqui apresentadas, podemos verificar que um *anel* será a definição dada a um conjunto não-vazio munido das operações de adição e produto, onde são válidas as propriedades associativas da adição e do produto, a comutatividade da adição, o elemento inverso aditivo (ou elemento oposto) e a distributividade.

Algumas outras propriedades devem ser levadas em consideração, pois sua validade nos levará à definição de novas estruturas algébricas.

#### Definição 4.3

Denominamos *anel com unidade* a todo anel  $(A, +, \cdot)$  que satisfaz à propriedade:

(A7) Existência do elemento neutro para o produto: Para todo  $x \in A$ , existe um único  $1 \in A$ ,  $1 \neq 0$ , tal que  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ .

#### Definição 4.4

Denominamos *anel comutativo* a todo anel  $(A, +, \cdot)$  que satisfaz à propriedade:

(A8) Comutatividade do produto: Quaisquer que sejam  $x, y \in A$ ,  $x \cdot y = y \cdot x$ .

#### Observação 4.1

É importante ressaltar que, nas propriedades acima, vimos a existência do elemento neutro da adição e do elemento inverso aditivo (ou simétrico). A fim de complementar as propriedades acima, é importante verificar também a unicidade de cada um deles.

(i) *O elemento neutro da adição é único*: Suponhamos que  $\alpha$  e  $\alpha'$  sejam elementos neutros da

adição. Se tomarmos qualquer elemento  $x \in A$ , temos

$$x + \alpha = x = \alpha + x, \quad (4.1a)$$

$$x + \alpha' = x = \alpha' + x. \quad (4.1b)$$

Da equação (4.1b), sabemos que  $x + \alpha' = x$ , para todo  $x \in A$ . Em particular, se  $x = \alpha$ , temos

$$\alpha + \alpha' = \alpha. \quad (4.2)$$

Por outro lado, segue de (4.1a), que  $\alpha + \alpha' = \alpha'$  e, portanto,  $\alpha' = \alpha$ .

(ii) *O elemento inverso aditivo para cada  $x \in A$  é único:* Suponhamos que  $\beta$  e  $\beta'$  sejam elementos inversos aditivos do elemento  $x \in A$ . Assim,

$$x + \beta = 0 = \beta + x, \quad (4.3a)$$

$$x + \beta' = 0 = \beta' + x. \quad (4.3b)$$

Segue de (4.3a), (4.3b) e de (A1) que

$$\beta = \beta + 0 = \beta + (x + \beta') = (\beta + x) + \beta' = 0 + \beta' = \beta',$$

ou seja,  $\beta = \beta'$ .

Para finalizar, apresentamos duas novas definições que serão muito importantes neste trabalho.

#### Definição 4.5

Um anel comutativo com unidade é denominado *domínio de integridade* se satisfaz ainda a *lei do anulamento*, ou seja, a propriedade:

(A9) Quaisquer que sejam  $x, y \in A$ ,  $x \cdot y = 0$  implica  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

#### Observação 4.2

Alguns textos matemáticos mais avançados costumam utilizar a expressão *não possui divisores de zero* para indicar a lei do anulamento.



**Definição 4.6**

Seja  $(A, +, \cdot)$  um domínio de integridade satisfazendo a propriedade:

(A10) Existência de inverso multiplicativo: Qualquer que seja  $x \in A, x \neq 0$ , existe um  $y \in A$ , denotado por  $x^{-1}$ , tal que  $x \cdot y = y \cdot x = 1$ .

Nestas condições, dizemos que  $(A, +, \cdot)$  é um *corpo*.

**Observação 4.3**

Novamente, é importante ressaltar que, nas propriedades acima, foram listadas a existência do elemento neutro do produto e do elemento inverso multiplicativo e que, assim como para a adição, a existência deles é única. A prova dessa afirmação é análoga àquela feita na Observação 4.1.

**Exemplo 4.1**

Dentre os conjuntos numéricos mais conhecidos, o conjunto  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$  dos números racionais,  $\mathbb{R}$  dos reais e  $\mathbb{C}$  dos complexos são exemplos de corpos.

**Exemplo 4.2**

Seja  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$  munido das operações adição  $+$  e produto  $\cdot$  assim definidas:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = [(a + c) + (b + d)\sqrt{2}],$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = [(ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}].$$

Tal configuração qualifica o conjunto  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  como um corpo.

Mostremos que  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$  é um corpo.

Para demonstrar tal fato, devemos verificar a validade de todas as propriedades de corpo anteriormente descritas. Para isso, consideremos  $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$ ,  $y = a_2 + b_2\sqrt{2}$  e  $z = a_3 + b_3\sqrt{2}$ .

(A1) Associatividade da adição:

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= [(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2})] + (a_3 + b_3\sqrt{2}) \\ &= [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}] + (a_3 + b_3\sqrt{2}) \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)\sqrt{2} \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3))\sqrt{2} \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\sqrt{2}] \\ &= x + (y + z). \end{aligned}$$

(A2) Elemento neutro da adição: Existe  $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  tal que

$$\begin{aligned}x + 0 &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) \\ &= (a_1 + 0) + (b_1 + 0)\sqrt{2} \\ &= a_1 + b_1\sqrt{2} \\ &= x.\end{aligned}$$

(A3) Inverso aditivo ou simétrico: Dado  $x' = -a_1 - b_1\sqrt{2}$ , temos

$$\begin{aligned}x + x' &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (-a_1 - b_1\sqrt{2}) \\ &= (a_1 + (-a_1)) + ((b_1 + (-b_1))\sqrt{2}) \\ &= 0 + 0\sqrt{2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

ou seja,  $x' = -x$ . Portanto, todo  $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  possui inverso aditivo.

(A4) Comutatividade da adição:

$$\begin{aligned}x + y &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) \\ &= [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}] \\ &= [(a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\sqrt{2}] \\ &= (a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2}) \\ &= y + x.\end{aligned}$$

(A5) Associatividade do produto:

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= [(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2})] \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2}) \\ &= [(a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2)\sqrt{2}] \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2}) \\ &= [(a_1a_2 + 2b_1b_2)a_3 + 2b_3(a_2b_1 + a_1b_2)] + [(a_1a_2 + 2b_1b_2)b_3 + a_3(a_2b_1 + a_1b_2)]\sqrt{2} \\ &= (a_1a_2a_3 + 2b_1b_2a_3 + 2a_2b_1b_3 + 2a_1b_2b_3) + (a_1a_2b_3 + 2b_1b_2b_3 + b_1a_2a_3 + b_2a_1a_3)\sqrt{2} \\ &= [a_1(a_2a_3 + 2b_2b_3) + 2b_1(b_2a_3 + a_2b_3)] + [a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 + 2b_2b_3)]\sqrt{2} \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2a_3 + 2b_2b_3) + (b_2a_3 + a_2b_3)\sqrt{2}] \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2 + b_2\sqrt{2}) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2})] \\ &= x \cdot (y \cdot z).\end{aligned}$$

(A6) Distributividade:

$$\begin{aligned}
 (x + y) \cdot z &= [(a_1 + b_1 \sqrt{2}) + (a_2 + b_2 \sqrt{2})] \cdot (a_3 + b_3 \sqrt{2}) \\
 &= [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \sqrt{2}] \cdot (a_3 + b_3 \sqrt{2}) \\
 &= [(a_1 + a_2) \cdot a_3 + 2b_3 \cdot (b_1 + b_2)] + [(a_1 + a_2) \cdot b_3 + (b_1 + b_2) a_3] \sqrt{2} \\
 &= [a_1 a_3 + a_2 a_3 + 2b_1 b_3 + 2b_2 b_3] + [a_1 b_3 + a_2 b_3 + b_1 a_3 + b_2 a_3] \sqrt{2} \\
 &= [(a_1 a_3 + 2b_1 b_3) + (a_1 b_3 + b_1 a_3) \sqrt{2}] + [(a_2 a_3 + 2b_2 b_3) + (a_2 b_3 + b_2 a_3) \sqrt{2}] \\
 &= (a_1 + b_1 \sqrt{2}) \cdot (a_3 + b_3 \sqrt{2}) + (a_2 + b_2 \sqrt{2}) \cdot (a_3 + b_3 \sqrt{2}) \\
 &= x \cdot z + y \cdot z.
 \end{aligned}$$

(A7) Elemento neutro do produto: Existe  $1 = 1 + 0 \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  tal que

$$\begin{aligned}
 x \cdot 1 &= (a_1 + b_1 \sqrt{2}) \cdot (1 + 0 \sqrt{2}) \\
 &= [(a_1 \cdot 1 + 2b_1 \cdot 0) + (b_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 0) \sqrt{2}] \\
 &= a_1 + b_1 \sqrt{2} \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

(A8) Comutatividade do produto:

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= (a_1 + b_1 \sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2 \sqrt{2}) \\
 &= (a_1 a_2 + 2b_1 b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2) \sqrt{2} \\
 &= (a_2 a_1 + 2b_2 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \sqrt{2} \\
 &= (a_2 + b_2 \sqrt{2}) \cdot (a_1 + b_1 \sqrt{2}) \\
 &= y \cdot x.
 \end{aligned}$$

(A9) Lei do anulamento do produto: Se existirem  $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  tais que  $x \cdot y = 0$ , então,  $x = 0$  ou  $y = 0$ .

De fato, suponha, sem perda de generalidade,  $x = a_1 + b_1 \sqrt{2}$  não nulo. Assim,  $a_1 \neq 0$  ou  $b_1 \neq 0$ .

Com isso,

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= (a_1 + b_1 \sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2 \sqrt{2}) \\
 &= (a_1 a_2 + 2b_2 \cdot b_1) + (a_1 b_2 + a_2 \cdot b_1) \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Por hipótese, sabemos que  $x \cdot y = 0$ . Logo,

$$\begin{cases} a_1 a_2 + 2b_1 b_2 = 0 \\ b_1 a_2 + a_1 b_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como o sistema acima é homogêneo, sabemos que  $(a_2, b_2) = (0, 0)$  é uma de suas soluções. E, caso o determinante da matriz formada pelos coeficientes seja diferente de zero, teremos que essa será a única solução para o sistema. Calculando o determinante, teremos

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - 2b_1^2.$$

Logo, o determinante será igual a zero se  $a_1^2 = 2b_1^2$ . Daí, concluímos que

$$a_1 = \pm \sqrt{2b_1^2} = \pm b_1 \sqrt{2}.$$

Porém,  $a_1, b_1$  são números racionais, de modo que  $a_1$  não pode ser escrito como o produto de  $b_1$  por  $\sqrt{2}$ , pois isso faria de  $a_1$  um número irracional. Logo, concluímos que a única solução para o sistema é  $(a_2, b_2) = (0, 0)$ , o que acarreta em  $y = a_2 + b_2 \sqrt{2} = 0$ .

(A10) Inverso multiplicativo: Primeiro, precisamos definir quem seria esse inverso multiplicativo. Dado  $x = a + b\sqrt{2}$ , não nulo, queremos obter  $w = c + d\sqrt{2}$ , tal que  $x \cdot w = 1$ . Temos os seguintes casos:

- Caso  $b = 0$ , o resultado é imediato, visto que assim  $x = a$  é um número racional.
- Se  $b \neq 0$ , temos

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = 1 \implies (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2} = 1.$$

Com isso,

$$\begin{cases} ac + 2bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases}.$$

Devemos encontrar os valores para  $c$  e  $d$  que satisfazem esse sistema. Assim, da segunda equação do sistema acima, podemos isolar o  $c$ , obtendo  $c = -\frac{ad}{b}$ , com  $b \neq 0$ . Substituindo o valor de  $c$  na primeira equação do sistema, teremos

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot \left(-\frac{ad}{b}\right) + 2bd \\ &= -\frac{a^2d}{b} + 2bd \\ &= d \cdot \left(\frac{-a^2 + 2b^2}{b}\right). \end{aligned}$$

Disto, segue que  $d = \frac{b}{-a^2 + 2b^2} = -\frac{b}{a^2 - 2b^2}$ . Substituindo esse valor de  $d$  no valor de  $c$  anteriormente obtido, temos que

$$c = -\frac{ad}{b} = -a \cdot \left(-\frac{b}{a^2 - 2b^2}\right) \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{a^2 - 2b^2}.$$

Por fim, concluímos que

$$w = (c + d\sqrt{2}) = \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}\right) + \left(-\frac{b}{a^2 - 2b^2}\right)\sqrt{2} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}.$$

Com isso, se  $\tilde{x} = \frac{a_1 - b_1 \sqrt{2}}{a_1^2 - 2b_1^2}$ , temos que

$$\begin{aligned} x \cdot \tilde{x} &= (a_1 + b_1 \sqrt{2}) \cdot \frac{a_1 - b_1 \sqrt{2}}{a_1^2 - 2b_1^2} \\ &= \left[ \left( \frac{a_1^2}{a_1^2 - 2b_1^2} - \frac{2b_1^2}{a_1^2 - 2b_1^2} \right) + \left( \frac{a_1 b_1 \sqrt{2}}{a_1^2 - 2b_1^2} - \frac{a_1 b_1 \sqrt{2}}{a_1^2 - 2b_1^2} \right) \right] \\ &= \frac{a_1^2 - 2b_1^2}{a_1^2 - 2b_1^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De maneira análoga,  $\tilde{x} \cdot x = 1$ . Portanto,  $\tilde{x} = x^{-1}$ . ■

Os subconjuntos de um anel que possuem as propriedades de anéis e estão contidos em anéis, recebem a denominação de *subanéis*. Observação análoga é válida para corpos e subcorpos. As definições formais para esses subconjuntos são apresentadas a seguir.

#### Definição 4.7

Seja  $(A, +, \cdot)$  um anel e  $B$  um subconjunto não vazio de  $A$ . Suponhamos que  $B$  seja fechado para as operações  $+$  e  $\cdot$  de  $A$ , isto é,

- (i) quaisquer que sejam  $x, y \in B$ , temos  $x + y \in B$ ;
- (ii) quaisquer que sejam  $x, y \in B$ , temos  $x \cdot y \in B$ .

Dessa forma, podemos também considerar a soma e o produto como operações em  $B$ . Se  $(B, +, \cdot)$  for um anel com as operações de  $A$ , dizemos que  $B$  é um *subanel* de  $A$ .

Vimos que para classificar um conjunto como anel é necessário verificar as seis propriedades anteriormente apresentadas na Definição 4.2. Para verificar se um subconjunto de um anel é um subanel, não é necessário todo esse trabalho. A proposição a seguir fornece-nos o que é necessário analisar.

#### Proposição 4.1

Seja  $(A, +, \cdot)$  um anel e seja  $B$  um subconjunto de  $A$ . Então,  $B$  é um subanel de  $A$  se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) o elemento neutro de  $A$  para a adição pertence a  $B$ , ou seja,  $0 \in B$ ;
- (ii) quaisquer que sejam  $x, y \in B$ , teremos  $x - y \in B$ ;
- (iii) quaisquer que sejam  $x, y \in B$ , teremos  $x \cdot y \in B$ .

**Demonstração.** ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese, temos que  $B$  é um subanel de  $A$ . Logo,  $B$  é fechado com relação às operações soma e produto e, portanto, para cada  $x, y \in B$ ,  $x - y = x + (-y) \in B$  e  $x \cdot y \in B$ .

Além disso, se  $0'$  denota o elemento neutro aditivo de  $B$ , então  $0' = b + (-b) = 0$ , para todo  $b \in B$ . Assim, o elemento neutro de  $B$  é o mesmo elemento neutro de  $A$ .

( $\Leftarrow$ ) Por hipótese,  $B$  é um subconjunto de  $A$  e as propriedades (i), (ii) e (iii) estão satisfeitas. Assim, sabemos que  $B$  é não vazio, já que de (i), o elemento neutro de  $B$  é o mesmo elemento neutro de  $A$ .

Além disso, se  $x \in B$ , então  $-x = 0 - x \in B$ , e utilizando (ii), teremos que quaisquer que sejam  $x, y \in B$ ,  $x + y = x - (-y) \in B$ , ou seja,  $B$  é fechado para a adição.

O item (iii) fornece diretamente que  $B$  é fechado para o produto. As demais propriedades seguem do fato de  $B$  estar contido no anel  $A$ . ■

#### Definição 4.8

Seja  $(A, +, \cdot)$  um corpo e  $B$  um subanel não vazio de  $A$ , munido da propriedade do elemento inverso, ou seja, qualquer que seja  $x \in B$ , tem-se  $x^{-1} \in B$ . Nessas condições, dizemos que a terna  $(B, +, \cdot)$  é um *subcorpo* do conjunto  $A$ .

#### Exemplo 4.3

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  é um subcorpo de  $\mathbb{R}$  que, por sua vez, é subcorpo de  $\mathbb{C}$ .

## 4.2 Noções básicas de álgebra linear

Nesta seção, vamos recordar noções básicas de álgebra linear que serão importantes para darmos continuidade ao nosso trabalho, tais como alguns conceitos e resultados importantes sobre espaços vetoriais, base e dimensão.

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo qualquer e seja  $\mathcal{V}$  um conjunto não vazio onde está definida uma operação, denominada adição, e representada por  $(+)$ . Além disso, suponhamos que está definida também uma operação de multiplicação de elementos de  $\mathbb{K}$  por elementos de  $\mathcal{V}$  de modo que

$$\begin{aligned} + : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} & \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \\ (u, v) &\mapsto u + v & (\lambda, v) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

Para simplificar, denotamos o elemento  $\lambda \cdot v$  por  $\lambda v$ .

**Definição 4.9**

Um conjunto  $\mathcal{V}$  munido dessas operações é um *espaço vetorial sobre o corpo*  $\mathbb{K}$  se para todo  $u, v, w \in \mathcal{V}$  e  $\lambda, \gamma \in \mathbb{K}$ , as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (E1) Associatividade da adição:  $(u + v) + w = u + (v + w)$ .
- (E2) Existência de elemento neutro para a adição: existe um elemento neutro  $0 \in \mathcal{V}$  para a adição, tal que qualquer que seja  $u \in \mathcal{V}$ ,  $u + 0 = 0 + u = u$ .
- (E3) Existência de inverso aditivo ou simétrico: para todo  $u \in \mathcal{V}$ , existe um único  $v \in \mathcal{V}$ , denotado por  $v = -u$ , tal que  $u + v = v + u = 0$ .
- (E4) Comutatividade da adição:  $u + v = v + u$ .
- (E5)  $1v = v$ , onde 1 é a unidade do corpo  $\mathbb{K}$ .
- (E6)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ ;  $(\gamma + \lambda)u = \gamma u + \lambda u$ .
- (E7)  $\lambda(\gamma v) = \gamma(\lambda v) = (\gamma\lambda)v$ .

**Exemplo 4.4**

- (i) O conjunto dos vetores do espaço  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .
- (ii) O conjunto  $\mathcal{V} = P_n$ , dos polinômios de grau menor ou igual a  $n$  com coeficientes reais (incluindo o zero), munido das operações de soma de polinômios e multiplicações por escalares reais é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

No que segue, a notação  $\mathbb{K}$  será utilizada para representar um corpo, enquanto que a notação  $\mathcal{V}$  será utilizada para representar um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

**Definição 4.10**

Um subconjunto não vazio  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{V}$  é denominado *subespaço vetorial* de  $\mathcal{V}$  se as seguintes condições estão satisfeitas:

- (i) Dados  $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$ , temos  $w_1 + w_2 \in \mathcal{W}$ .
- (ii) Dados  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $w \in \mathcal{W}$ , temos  $\lambda w \in \mathcal{W}$ .

**Exemplo 4.5**

- (i) O subconjunto  $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^2$ . Geometricamente,  $\mathcal{S}$  é o conjunto dos pontos do plano sobre o eixo das abscissas.
- (ii)  $\mathcal{W} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u = \alpha(1, 1, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^3$ .

As condições acima mostram-nos que as operações do espaço vetorial  $\mathcal{V}$  induzem as operações em  $\mathcal{W}$ , o que faz com que  $\mathcal{W}$  seja um espaço vetorial em função dessas operações.

**Definição 4.11**

Sejam  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ . Se a equação vetorial  $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ , é satisfeita apenas quando  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , dizemos que  $v_1, \dots, v_n$  são *linearmente independentes (L.I.)* ou que o conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é *linearmente independente*. Caso contrário, dizemos que  $v_1, \dots, v_n$  são *linearmente dependentes (L.D.)* ou que o conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é *linearmente dependente*.

Para o que segue, denotamos por  $\mathbb{K}^n$  o espaço  $\underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n\text{-vezes}}$ .

**Exemplo 4.6**

Os vetores  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 1, 0)$  e  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$  são L.I. em  $\mathbb{K}^n$ .

**Proposição 4.2**

Se  $u_1, u_2, \dots, u_r \in \mathcal{V}$ , então  $\mathcal{W} = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, r \right\}$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{V}$ .

**Demonstração.** É claro que  $\mathcal{W} \neq \emptyset$ , pois, por exemplo,  $u_1, \dots, u_r \in \mathcal{W}$ .

Dados  $u = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i$  e  $v = \sum_{i=1}^r \gamma_i u_i$  elementos de  $\mathcal{W}$ , é fato que

(i)  $u + v = \sum_{i=1}^r \beta_i u_i \in \mathcal{W}$ , com  $\beta_i = \lambda_i + \gamma_i \in \mathbb{K}$ .

(ii) Para  $l \in \mathbb{K}$ ,  $lu = \sum_{i=1}^r \delta_i u_i \in \mathcal{W}$ , com  $\delta_i = l\lambda_i$ .

De (i) e (ii), segue que  $\mathcal{W}$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$ . ■



**Definição 4.12**

O subespaço  $\mathcal{W}$  da proposição anterior é chamado *subespaço gerado pelos vetores*  $u_1, \dots, u_{r-1}, u_r$  e é denotado por  $\langle u_1, \dots, u_r \rangle$ .

**Definição 4.13**

Se um conjunto (ordenado) de vetores  $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$  for L.I. e  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{V}$ , dizemos que  $v_1, \dots, v_n$  é uma base de  $\mathcal{V}$ .

**Exemplo 4.7**

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de  $\mathbb{K}^n$ .

**Teorema 4.1**

- (i) Todo espaço vetorial  $\mathcal{V}$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  possui uma base.
- (ii) Se um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  possui uma base com  $n$  elementos, então toda base de  $\mathcal{V}$  possui  $n$  elementos.

As demonstrações dos itens (i) e (ii) desse teorema podem ser encontradas, respectivamente, em [5, Teorema 2.3.10, p.54] e [5, Corolário 2.3.5, p.52].

Se um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  possui uma base com  $n$  elementos, chamamos esse número  $n$  de *dimensão de  $\mathcal{V}$  sobre  $\mathbb{K}$*  e denotamos por  $[\mathcal{V} : \mathbb{K}] = n$ .

**Exemplo 4.8**

$\mathbb{C}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão 2, pois  $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$  é uma base desse espaço. Assim,  $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ .

### 4.3 Polinômios em uma variável

#### Definição 4.14

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo qualquer. Definimos *polinômio sobre  $\mathbb{K}$  em uma variável  $x$*  a expressão formal

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots,$$

onde  $a_i \in \mathbb{K}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  e, além disso, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_j = 0$  para todo  $j \geq n$ .

#### Observação 4.4

- (i) Dizemos que dois polinômios  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots$  e  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m + \dots$  sobre  $\mathbb{K}$  são *iguais* se, e somente se,  $a_i = b_i$ , qualquer que seja  $i \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Se  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ , onde  $a_i = 0$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ , chamamos esse polinômio de *polinômio identicamente nulo sobre  $\mathbb{K}$*  e denotamos  $p(x) = 0$ .
- (iii) Se  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots$ , onde  $a_0 = a \in \mathbb{K}$  e  $a_i = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots$ , então  $p(x)$  será chamado *polinômio constante*.

Denotamos por  $\mathbb{K}[x]$  o conjunto de todos os polinômios na variável  $x$  com coeficientes em  $\mathbb{K}$ .

Se  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  é tal que  $a_n \neq 0$  e  $a_j = 0$  para todo  $j > n$ , dizemos que  $p(x)$  possui grau  $n$  e denotamos  $\partial(p(x)) = n$ . Para simplificar, representamos esses polinômios na forma  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ .

Dizemos que um polinômio  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$  é *mônico* quando  $a_m = 1$ .

O grau de um polinômio pode ser visto como uma função do conjunto de todos os polinômios não identicamente nulos, cujos coeficientes se anulam a partir de um certo índice, sobre o conjunto  $\mathbb{N}$ , isto é,

$$\begin{aligned} \partial: \mathbb{K}[x] - \{0\} &\rightarrow \mathbb{N} \\ p(x) &\mapsto \partial(p(x)) \end{aligned}$$

#### Observação 4.5

O polinômio identicamente nulo não possui grau definido, pois não existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n \neq 0$ .

Dados  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots$  e  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$  dois

elementos de  $\mathbb{K}[x]$ , definimos a adição e o produto em  $\mathbb{K}[x]$  por

$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_r x^r + \dots,$$

onde  $c_i = (a_i + b_i) \in \mathbb{K}$  e

$$p(x) \cdot q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_r x^r + \dots,$$

onde  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

As definições acima são decorrentes da propriedade de multiplicação de potências com a mesma base ( $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ ) e da propriedade distributiva. Além disso, ficam convencionadas também as regras  $x^0 = 1$  e  $x^1 = x$ .

Dessas definições, podemos inferir que a função  $\partial$  possui as seguintes propriedades:

- (i)  $\partial(f(x) + g(x)) \leq \max\{\partial f(x), \partial g(x)\}$ , quaisquer que sejam os polinômios não nulos  $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ , tais que  $f(x) + g(x) \neq 0$ .
- (ii)  $\partial(f(x) \cdot g(x)) = \partial f(x) + \partial g(x)$ , quaisquer que sejam os polinômios não nulos  $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ .

#### Observação 4.6

O conjunto  $\mathbb{K}[x]$  munido das operações adição e produto acima definidas é um domínio de integridade. Entretanto,  $\mathbb{K}[x]$  não tem estrutura de corpo, pois nem todos os seus elementos possuem inverso multiplicativo.

De fato, suponha que um polinômio  $p(x) \neq 0$  possui um inverso multiplicativo em  $\mathbb{K}[x]$ , ou seja, existe um outro polinômio  $q(x) \neq 0$  em  $\mathbb{K}[x]$  de modo que  $p(x) \cdot q(x) = 1$ . Pela propriedade (ii), sabemos que essa igualdade só estará satisfeita se  $p(x)$  (e, conseqüentemente,  $q(x)$ ) forem polinômios constantes. Com isso, concluímos que apenas os polinômios constantes não nulos possuem inverso multiplicativo em  $\mathbb{K}[x]$ .

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $\mathbb{K}[x]$  o domínio de integridade dos polinômios sobre  $\mathbb{K}$  na variável  $x$ . O teorema a seguir traz um importante resultado da teoria de polinômios.

#### Teorema 4.2: Algoritmo da divisão

Sejam  $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ , com  $g(x) \neq 0$ . Então, existem únicos  $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$  tais que

$$f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x), \quad (4.4)$$

onde  $r(x) \equiv 0$  ou  $\partial r(x) < \partial g(x)$ .

**Demonstração.** Sejam  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  e  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ , com  $\partial g(x) = m$ . Devemos provar a existência e a unicidade dos polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$  que satisfazem a Equação (4.4).

Provemos inicialmente a existência.

Se  $f(x) \equiv 0$ , teremos que  $q(x) \equiv r(x) \equiv 0$ , pois, por hipótese,  $g(x) \neq 0$ .

Suponhamos então  $f(x) \neq 0$ . Assim, temos que o grau de  $f$  é  $n$ . Consideremos os seguintes casos:

- (i) Se  $n < m$ , basta tomarmos  $q(x) = 0$  e  $r(x) = f(x)$  que temos o resultado esperado.
- (ii) Se  $n \geq m$ , consideremos  $f_1(x)$  um polinômio tal que

$$f(x) = a_nb_m^{-1}x^{n-m} \cdot g(x) + f_1(x).$$

Dessa forma, temos que  $\partial f_1 < \partial f$ .

Para concluir a prova da existência dos polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$  satisfazendo a equação (4.4), usaremos indução sobre  $\partial f = n$ .

Se  $n = 0$ , teremos  $m = 0$ , pois  $n \geq m$ . Daí:  $f(x) = a_0 \neq 0$ ,  $g(x) = b_0 \neq 0$  e  $f(x) = a_0b_0^{-1} \cdot g(x)$ . Basta tomarmos  $q(x) = a_0b_0^{-1}$  e  $r(x) \equiv 0$ .

Suponhamos, por hipótese de indução, que (4.4) seja verdadeiro sempre que  $\partial f \leq n-1$  e provemos que o resultado também é válido para  $\partial f = n$ .

Pela igualdade  $f_1(x) = f(x) - a_nb_m^{-1}x^{n-m} \cdot g(x)$  e, como  $\partial f_1(x) < \partial f(x) = n$ , temos, pela hipótese de indução, que existem  $q_1(x), r_1(x)$  tais que  $f_1(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x)$ , com  $r_1(x) \equiv 0$  ou  $\partial r_1(x) < \partial g(x)$ .

Daí, segue imediatamente que  $f(x) = (q_1(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m})g(x) + r_1(x)$ . Tomando  $q(x) = q_1(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}$  e  $r_1(x) = r(x)$ , fica provada a existência dos polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$  tais que  $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ , com  $r(x) \equiv 0$  ou  $\partial r(x) < \partial g(x)$ .

Por fim, provemos agora a unicidade.

Sejam  $q_1(x), q_2(x), r_1(x)$  e  $r_2(x)$  tais que:  $f(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x) = q_2(x) \cdot g(x) + r_2(x)$ , onde  $r_i(x) \equiv 0$  ou  $\partial r_i(x) < \partial g(x), i = 1, 2$ .

Daí, temos que  $(q_1(x) - q_2(x)) \cdot g(x) = r_2(x) - r_1(x)$ . Porém, se  $q_1(x) \neq q_2(x)$ , então o grau do polinômio do lado esquerdo da última igualdade é maior ou igual ao grau de  $g(x)$ , enquanto que o grau de  $(r_2(x) - r_1(x))$  é menor que o grau de  $g(x)$ , o que acarreta uma contradição.

Logo,  $q_1(x) = q_2(x)$  e, daí, temos  $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = f(x) - q_2(x)g(x) = r_2(x)$ , como queríamos demonstrar. ■

**Exemplo 4.9**

Dados  $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 7x - 5$  e  $g(x) = x^2 + 3$ , vamos determinar  $q(x)$  e  $r(x)$  que satisfaçam o algoritmo da divisão.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 7x - 5 \quad | \quad x^2 + 3 \\
 \underline{- 2x^4 \qquad - 6x^2} \qquad \qquad \qquad | \\
 2x^3 - 17x^2 + 7x \qquad \qquad \qquad \qquad | \\
 \underline{- 2x^3 \qquad - 6x} \qquad \qquad \qquad \qquad | \\
 - 17x^2 + x - 5 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad | \\
 \underline{17x^2 \qquad + 51} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad | \\
 x + 46
 \end{array}$$

Portanto, tomando  $q(x) = 2x^2 + 2x - 17$  e  $r(x) = x + 46$ , temos que  $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$ .

**Definição 4.15**

Se  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  é um polinômio não nulo em  $\mathbb{K}[x]$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$  é tal que  $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0 \in \mathbb{K}$ , dizemos que  $\alpha$  é uma raiz de  $f(x)$  em  $\mathbb{K}$ .

**Proposição 4.3**

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e seja  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  um polinômio não nulo em  $\mathbb{K}[x]$  de grau  $n$ . O número de raízes de  $f(x)$  em  $\mathbb{K}$  é, no máximo, igual a  $\partial f(x) = n$ .

**Demonstração.** Usamos para a prova da proposição uma indução sobre  $\partial f$ .

Se  $n = 0$ ,  $f$  não possui raízes em  $\mathbb{K}[x]$  e, nesse caso, não há nada o que demonstrar.

Suponha por hipótese de indução que  $p(x)$  possui, no máximo,  $n - 1$  raízes em  $\mathbb{K}$ , para todo  $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ , tal que  $\partial p = n - 1$ .

Consideremos  $f \in \mathbb{K}[x]$  de grau  $n$ . Temos duas situações:

- (i) Se  $f$  não possui raízes em  $\mathbb{K}$ , o resultado é imediato.
- (ii) Se  $f$  possui pelo menos uma raiz  $\alpha \in \mathbb{K}$ , então, pelo algoritmo da divisão, existem  $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ , tais que

$$f(x) = q(x) \cdot (x - \alpha) + r(x),$$

em que  $r(x) \equiv 0$  ou  $\partial r(x) < \partial g(x) = 1$ , sendo  $g(x) = x - \alpha$ .

Assim,  $r(x) = b_0$  é um polinômio constante de modo que  $f(x) = q(x) \cdot (x - \alpha) + b_0$ . Como  $f(\alpha) = 0$ ,

segue que  $0 = 0 + b_0$ , ou seja,  $r(x) \equiv 0$  e

$$f(x) = q(x) \cdot (x - \alpha),$$

onde  $\partial q(x) = n - 1$ .

Como  $\mathbb{K}$  é um corpo, sabemos que ele não admite divisores de zero. Daí, se  $\beta \in \mathbb{K}$  é uma raiz qualquer de  $f$ , então

$$f(\beta) = (\beta - \alpha) \cdot q(\beta) = 0,$$

que ocorre se  $\beta = \alpha$  ou  $\beta$  é também uma raiz de  $q(x) \in \mathbb{K}[x]$ . Assim, as raízes de  $f$  são  $\alpha$  e as raízes de  $q(x)$ .

Como  $\partial q(x) = n - 1$ , segue da hipótese de indução que  $q(x)$  possui no máximo  $n - 1$  raízes e, portanto,  $f$  possui no máximo  $n$  raízes em  $\mathbb{K}$ . ■

A definição abaixo fornece um importante conceito que será muito utilizado no decorrer deste capítulo.

#### Definição 4.16

Sejam  $\mathcal{L}$  e  $\mathbb{K}$  corpos. Se  $\mathbb{K} \subset \mathcal{L}$ , dizemos que  $\mathcal{L}$  é uma *extensão* de  $\mathbb{K}$ .

No decorrer do texto, usaremos a notação  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  para uma extensão de  $\mathbb{K}$ .

#### Exemplo 4.10

$\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$  é uma extensão de  $\mathbb{R}$ .

#### Corolário 4.1

Seja  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$  um polinômio não nulo de grau  $n$  em  $\mathbb{K}[x]$ . Então,  $f(x)$  possui no máximo  $n$  raízes em qualquer extensão  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{K}$ .

**Demonstração.** Temos que  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ . Como  $\mathbb{K} \subset \mathcal{L}$ , então  $f(x) \in \mathcal{L}[x]$ . Para concluirmos o que queremos, basta utilizarmos o resultado obtido na Proposição 4.3, aplicando-o para o corpo  $\mathcal{L}$ . ■

De certo modo, esse último resultado nos diz que, na extensão de um corpo  $\mathbb{K}$ , podemos conseguir mais raízes de um dado polinômio do que o próprio  $\mathbb{K}$  contém, mas esse número de raízes está sempre limitado ao grau desse polinômio.

**Exemplo 4.11**

O polinômio dado por  $p(x) = x^3 - 2$  não possui raízes em  $\mathbb{Q}$ . Porém, se considerarmos o mesmo polinômio em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ , teremos, respectivamente, uma raiz ( $\sqrt[3]{2}$ ) e três raízes  $\left(\sqrt[3]{2}, \frac{-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\sqrt{3}i}{2} \text{ e } \frac{-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}\sqrt{3}i}{2}\right)$ . As raízes em  $\mathbb{C}$  podem ser obtidas utilizando-se, por exemplo, as relações de Girard. Ver apêndice A.

**Definição 4.17**

Seja  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$  um polinômio de grau  $n \geq 1$ . Dizemos que  $f(x)$  é *irredutível sobre  $\mathbb{K}$*  se a fatoração  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  como um produto de polinômios em  $\mathbb{K}[x]$ , ( $g, h \in \mathbb{K}[x]$ ), só for possível para  $g(x) \equiv a$  ou  $h(x) \equiv b$ , com  $a, b \in \mathbb{K}$ .

**Exemplo 4.12**

- (i) O polinômio  $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  é irredutível em  $\mathbb{Q}[x]$ , porém é redutível em  $\mathbb{R}[x]$ , pois  $p(x) = x^2 - 2 = (x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})$ , com  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ .
- (ii) O polinômio  $p(x) = x^2 + 2 \in \mathbb{R}[x]$  é irredutível em  $\mathbb{R}[x]$ , todavia é redutível em  $\mathbb{C}[x]$ , pois  $p(x) = x^2 + 2 = (x + \sqrt{2}i) \cdot (x - \sqrt{2}i)$ , com  $\sqrt{2}i \in \mathbb{C}$ .

Para finalizar essa seção, são enunciadas, sem demonstração, as duas proposições a seguir. A referência [19] apresenta tais demonstrações.

**Proposição 4.4: [19, Proposição 2.6.1, p. 30]**

Seja  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  tal que  $f(x)$  é irredutível sobre  $\mathbb{Z}$ . Então,  $f(x)$  é irredutível sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Proposição 4.5: Critério de Eisenstein [19, Teorema 2.6.1, p. 30]**

Seja  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  um polinômio em  $\mathbb{Z}[x]$ . Suponhamos que exista um inteiro primo  $p$  tal que:

- (i)  $p \nmid a_n$ ;  
(ii)  $p \mid a_0, a_1, a_{n-1}$ ;  
(iii)  $p^2 \nmid a_0$ .

Então,  $f(x)$  é irredutível sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Exemplo 4.13**

Seja  $p$  um número primo qualquer e seja  $p(x) = x^n - p$  um polinômio de grau  $n \geq 1$  sobre  $\mathbb{Q}$ . Como o próprio número  $p$  se aplica no critério de Eisenstein, temos que  $p(x)$  é irredutível sobre  $\mathbb{Q}$ .

**4.4 Extensões algébricas dos racionais**

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  uma extensão de  $\mathbb{K}$ .

**Definição 4.18**

- (i) Dizemos que  $\alpha \in \mathcal{L}$  é *algébrico* em  $\mathbb{K}$  se existir  $f(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$ , tal que  $f(\alpha) = 0$ . Se isso não acontecer, dizemos que  $\alpha$  é *transcendente* em  $\mathbb{K}$ .
- (ii) Se para todo  $\alpha \in \mathcal{L} \supset \mathbb{K}$ , concluirmos que  $\alpha$  é algébrico em  $\mathbb{K}$ , então  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  é chamada *extensão algébrica*.

**Observação 4.7**

Se  $\alpha \in \mathbb{K}$ , dizemos que  $\alpha$  é *algébrico* em  $\mathbb{K}$ , pois é raiz de  $p(x) = x - \alpha \in \mathbb{K}[x]$ .

**Exemplo 4.14**

- (i)  $\sqrt{2}$  é algébrico em  $\mathbb{Q}$ , já que é raiz do polinômio  $f(x) = x^2 - 2$ .
- (ii)  $\pi$  é transcendente em  $\mathbb{Q}$ , uma vez que não existe  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  tal que  $\pi$  seja raiz de  $f(x)$ .

**Definição 4.19**

Seja  $\alpha \in \mathcal{L}$  algébrico sobre  $\mathbb{K}$ . Chamamos de *polinômio irredutível* de  $\alpha$  sobre  $\mathbb{K}$ , denotado por  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{K})$ , o polinômio mônico em  $\mathbb{K}[x]$ , de menor grau que possui  $\alpha$  como raiz.

**Exemplo 4.15**

$$p(x) = x^2 - 2 = \text{irr}(\sqrt{2}, \mathbb{Q}).$$



**Observação 4.8**

O polinômio  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{K})$  é o único polinômio mônico irreduzível em  $\mathbb{K}[x]$  tal que  $p(\alpha) = 0$ . De fato, seja  $p(x) = \text{irr}(\alpha, \mathbb{K})$ . Primeiramente, note que  $p(x)$  é irreduzível, pois, caso contrário, existiria um polinômio mônico de grau menor do que  $\partial(p(x))$  que possuiria  $\alpha$  como raiz.

Suponha que  $q(x)$  seja um polinômio mônico irreduzível tal que  $q(\alpha) = 0$ . Utilizando o Algoritmo da Divisão, temos

$$q(x) = s(x) \cdot p(x) + r(x), \quad (4.5)$$

onde  $r(x) \equiv 0$  ou  $\partial(r(x)) < \partial(p(x))$ .

Como  $q(\alpha) = p(\alpha) = 0$ , segue que  $r(\alpha) = 0$ . Logo, não podemos ter  $\partial(r(x)) < \partial(p(x))$ , caso contrário,  $p(x)$  não seria o polinômio  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{K})$ . Portanto, devemos ter  $r(x) \equiv 0$ . A equação (4.5) fornece, então,  $q(x) = s(x) \cdot p(x)$ .

Como, por hipótese,  $q(x)$  é um polinômio irreduzível mônico, segue que  $s(x) \equiv 1$  e, portanto,  $q(x) = p(x)$ , o que prova que o polinômio  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{K})$  é o único polinômio mônico irreduzível que possui  $\alpha$  como raiz.

**Definição 4.20**

Dado  $\alpha \in \mathcal{L} \supset \mathbb{K}$ , consideremos  $\mathbb{K}[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f \in \mathbb{K}[x]\}$ .

A proposição a seguir fornece uma caracterização para os elementos de  $\mathbb{K}[\alpha]$ , quando  $\alpha$  é algébrico sobre  $\mathbb{K}$ .

**Proposição 4.6**

Seja  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$ ,  $\alpha \in \mathcal{L}$  algébrico sobre  $\mathbb{K}$ . Se o grau do polinômio  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{K})$  é igual a  $n$ , então

- (i) para todo  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ , existe uma única forma de expressar  $f(\alpha)$  dada por  $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ , onde  $a_i \in \mathbb{K}$ .
- (ii)  $\mathbb{K}[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 0, \dots, n-1\}$  é um subcorpo de  $\mathcal{L}$  que contém  $\mathbb{K}$ .

**Demonstração.** Tomando  $p(x) = \text{irr}(\alpha, \mathbb{K})$ , temos, por hipótese, que o grau de  $p(x)$  é igual a  $n$ .

- (i) Existência: Por hipótese, temos que  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ . Assim, pelo algoritmo da divisão, existem  $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ , tais que  $f(x) = q(x) \cdot p(x) + r(x)$ , onde  $r(x) = 0$  ou  $\partial r(x) < \partial p(x)$ . Assim,  $r(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ , onde  $a_i \in \mathbb{K}, i = 0, 1, \dots, n-1$ . Com isso, temos

$$f(\alpha) = q(\alpha) \cdot p(\alpha) + r(\alpha) \quad \text{e} \quad p(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = r(\alpha),$$

ou seja,  $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ .

Unicidade: Para demonstrar a unicidade, devemos perceber que se

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{n-1}\alpha^{n-1},$$

onde  $a_i, b_i \in \mathbb{K}$  e  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , então o polinômio  $q(x) \in \mathbb{K}[x]$  dado por

$$q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1}$$

é tal que  $q(\alpha) = 0$  e  $\partial q(x) < n = \partial(\text{irr}(\alpha, \mathbb{K}))$ . Logo,  $q(x) = 0$  e, com isso, temos que  $a_i = b_i$ , para todo  $i \in 1, \dots, n-1$ .

- (ii) A igualdade  $\mathbb{K}[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{K}, i = 0, \dots, n-1\}$  segue do item (i). Tomando  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$  e  $a_0$  um elemento qualquer de  $\mathbb{K}$ , podemos observar que  $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[\alpha]$ . Além disso,  $\mathbb{K}[\alpha] \subset \mathcal{L}$  segue do fato de  $\mathcal{L}$  ser um corpo e de  $\alpha \in \mathcal{L}$ . A demonstração de que  $\mathbb{K}[\alpha]$  é um subcorpo de  $\mathcal{L}$  pode ser encontrada em [11, Corolário 1, p. 89]. ■

#### Exemplo 4.16

Segue da proposição anterior que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ . Dessa forma,  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  coincide com o corpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  apresentado no Exemplo 4.2.

#### Observação 4.9

Em geral, dado  $p$  um número primo e definidas as operações de adição e produto em  $\mathbb{Q}[\sqrt{p}] = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  como no exemplo anterior, temos que a terna  $(\mathbb{Q}[\sqrt{p}], +, \cdot)$  é um corpo.

#### Exemplo 4.17

Vamos mostrar que  $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ .

De fato,

$$\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{f(\sqrt[3]{2}) \mid f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}.$$

Note que  $\text{irr}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = x^3 - 2$ . Se  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , existem  $q(x), r(x) \in \mathbb{Q}[x]$  tais que  $f(x) = q(x) \cdot (x^3 - 2) + r(x)$ , em que  $r(x) = a + bx + cx^2$ , com  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Com isso, temos que  $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ .

**Observação 4.10**

Sejam  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  uma extensão de corpos e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$   $n$  números em  $\mathcal{L}$  distintos, não pertencentes a  $\mathbb{K}$ . Consideremos

$$\mathcal{K}_0 = \mathbb{K} \subset \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_0[\alpha_1] \subset \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1[\alpha_2] \subset \dots \subset \mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n-1}[\alpha_n].$$

$\mathcal{K}_n$  é o menor subcorpo de  $\mathcal{L}$  contendo  $\mathbb{K}$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , e será denotado nesse texto por  $\mathbb{K}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ . Note que qualquer que seja a ordem em que pegamos os números  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , ainda assim, esse processo nos levaria a  $\mathcal{K}_n$ . Quando  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  são as  $n$  raízes de um polinômio  $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ ,  $\mathcal{K}_n$  é chamado de *corpo de decomposição* de  $f(x)$  e é denotado por  $\mathcal{K}_n = \text{Gal}(f, \mathbb{K})$ .

**Observação 4.11**

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  uma extensão de  $\mathbb{K}$ . Se  $\alpha \in \mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  é um elemento algébrico sobre  $\mathbb{K}$  tal que o grau de  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{K})$  é igual a  $n$ , então  $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$  é uma base do espaço vetorial  $\mathbb{K}[\alpha]$  sobre  $\mathbb{K}$  e  $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] = n < \infty$ .

De fato, seja  $\alpha \in \mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  algébrico sobre  $\mathbb{K}$  tal que grau de  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{K}) = n$ . De acordo com a proposição 4.6, temos que todo elemento de  $\mathbb{K}[\alpha]$  pode ser escrito como combinação linear sobre  $\mathbb{K}$  de  $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$  de modo único. Desta forma,  $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$  é uma base de  $\mathbb{K}[\alpha]$  sobre  $\mathbb{K}$  e, em consequência disso, temos que  $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] = n$ .

**Definição 4.21**

O número  $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] = n$  é chamado de grau da extensão  $\mathbb{K}[\alpha] \supset \mathbb{K}$ .

**Definição 4.22**

Considere  $\mathbb{K}$  um corpo qualquer. Uma extensão  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  é considerada *finita* se  $[\mathcal{L} : \mathbb{K}] = n < \infty$ . Caso contrário,  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  é *infinita*.

**Proposição 4.7**

Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  uma extensão de  $\mathbb{K}$ . Se  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  é finita, então  $\mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  é algébrica.

**Demonstração.** Seja  $[\mathcal{L} : \mathbb{K}] = m < \infty$  e  $\alpha \in \mathcal{L} \supset \mathbb{K}$ . Sendo  $\mathbb{K}[\alpha]$  um subespaço de  $\mathcal{L}$ , segue imediatamente que  $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] \leq m < \infty$ . Se  $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] = n$ , então  $1, \alpha, \dots, \alpha^n$  são linearmente dependentes, pois  $n$  é o número máximo de elementos linearmente independentes e, portanto, existem escalares

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  não todos nulos, tais que

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0.$$

Logo, considerando  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  em  $\mathbb{K}[x]$ , temos  $f(\alpha) = 0$  e isso nos diz que  $\alpha$  é algébrico sobre  $\mathbb{K}$ . ■

#### Corolário 4.2

Seja  $\alpha \in \mathcal{L} \supset \mathbb{K}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $\alpha$  é algébrico sobre  $\mathbb{K}$ .
- (ii)  $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] < \infty$ .
- (iii)  $\mathbb{K}[\alpha]$  é uma extensão algébrica de  $\mathbb{K}$ .

**Demonstração.** A implicação (i)  $\implies$  (ii) segue diretamente da Observação 4.11. A Proposição 4.7 garante que (ii)  $\implies$  (iii). Finalmente, como  $\alpha \in \mathbb{K}[\alpha]$ , então (iii)  $\implies$  (ii) é imediata. ■

#### Proposição 4.8

Sejam  $\mathcal{M} \supset \mathcal{L} \supset \mathbb{K}$  corpos tais que  $[\mathcal{M} : \mathcal{L}]$  e  $[\mathcal{L} : \mathbb{K}]$  são finitos. Então,  $[\mathcal{M} : \mathbb{K}]$  é finito e, além disso,

$$[\mathcal{M} : \mathbb{K}] = [\mathcal{M} : \mathcal{L}] \cdot [\mathcal{L} : \mathbb{K}].$$

**Demonstração.** Sejam  $B = \{v_1, \dots, v_r\}$  e  $C = \{u_1, \dots, u_s\}$  bases de  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathcal{L}$  e de  $\mathcal{L}$  sobre  $\mathbb{K}$ , respectivamente. Assim, basta provar que  $D = \{v_i \cdot u_j \mid i = 1, \dots, r \text{ e } j = 1, \dots, s\}$  é uma base de  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathbb{K}$  para chegarmos ao resultado desejado.

Inicialmente, vamos provar que  $D$  é um conjunto L.I. em  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathbb{K}$ . Assim, se

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{K}, \text{ com } 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \text{ e } \sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i u_j = 0,$$

temos que essa última equação pode ser reescrita da forma

$$(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \dots + \alpha_{1s}u_s)v_1 + \dots + (\alpha_{r1}u_1 + \alpha_{r2}u_2 + \dots + \alpha_{rs}u_s)v_r = 0.$$

Como os vetores  $u_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , estão em  $\mathcal{L}$ , segue pela independência linear dos  $v_i$  em  $\mathcal{M}$  sobre

$\mathcal{L}$  que:

$$\begin{cases} \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_1 + \cdots + \alpha_{1s}u_s = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{r1}u_1 + \alpha_{r2}u_2 + \cdots + \alpha_{rs}u_s = 0 \end{cases}$$

Como os  $\alpha_{ij}$  estão em  $\mathbb{K}$ , segue pela independência linear dos  $u_j$  em  $\mathcal{L}$  sobre  $\mathbb{K}$  que cada  $\alpha_{ij} = 0$ , com  $1 \leq i \leq r$  e  $1 \leq j \leq s$ . Dessa forma,  $D$  é um conjunto L.I. de  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathbb{K}$ .

Resta provar agora que  $D$  é um conjunto gerador de  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathbb{K}$ . Assim, seja  $y \in \mathcal{M}$ .

Sendo  $v_1, \dots, v_r$  uma base de  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathcal{L}$ , existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathcal{L}$  tais que

$$y = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r.$$

Sendo cada  $\lambda_i \in \mathcal{L}$  e  $u_1, u_2, \dots, u_s$  uma base de  $\mathcal{L}$  sobre  $\mathbb{K}$ , existem  $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ , com  $1 \leq i \leq r$  e  $1 \leq j \leq s$  tais que

$$\lambda_i = \alpha_{i1}u_1 + \alpha_{i2}u_2 + \cdots + \alpha_{is}u_s.$$

Daí, temos que

$$y = \sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i u_j \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq s.$$

■

## 4.5 Os números construtíveis

Seja  $\mathcal{P}$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$ , contendo pelo menos dois pontos distintos. Dizemos que uma reta  $r$  de  $\mathbb{R}^2$  é *uma reta* em  $\mathcal{P}$  se  $r$  contém dois pontos distintos de  $\mathcal{P}$  e dizemos que uma circunferência  $c$  em  $\mathbb{R}^2$  é *uma circunferência* em  $\mathcal{P}$  se o centro de  $c$  pertence a  $\mathcal{P}$  e um ponto de  $\mathcal{P}$  pertence a  $c$ .

As operações enumeradas a seguir são chamadas operações elementares em  $\mathcal{P}$ :

- (i) interseção de duas retas em  $\mathcal{P}$ ;
- (ii) interseção de uma reta em  $\mathcal{P}$  e uma circunferência em  $\mathcal{P}$ ;
- (iii) interseção de duas circunferências em  $\mathcal{P}$ .

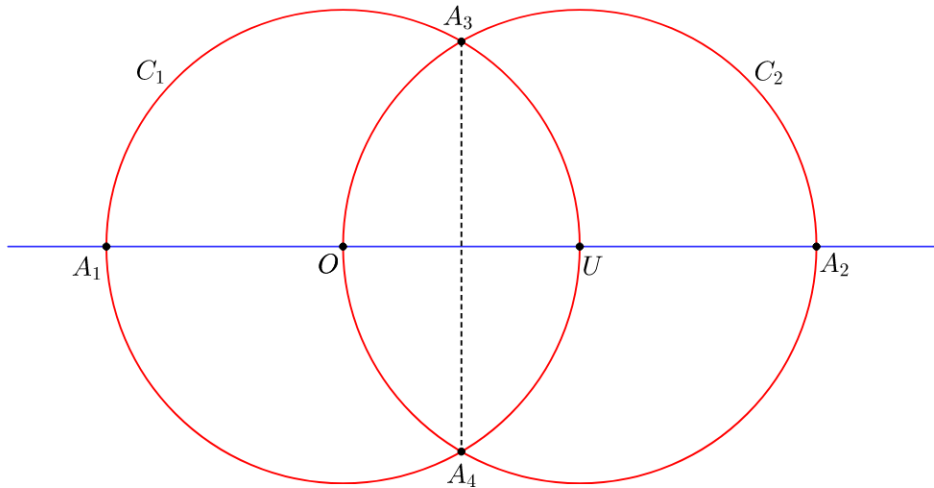
### Definição 4.23

Um ponto  $A \in \mathbb{R}^2$  é dito *construtível a partir de  $\mathcal{P}$*  se for possível determinar  $A$ , usando uma dessas operações elementares em  $\mathcal{P}$  recém enumeradas. O subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  formado pelos pontos construtíveis a partir de  $\mathcal{P}$  é denotado por  $\langle \mathcal{P} \rangle$ .

**Exemplo 4.18**

Se  $\mathcal{P}_0 = \{O, U\}$ , onde  $O = (0, 0)$  e  $U = (1, 0)$ , então  $\langle \mathcal{P}_0 \rangle = \{O, U, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ , de modo que  $A_1 = (-1, 0)$ ,  $A_2 = (2, 0)$ ,  $A_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  e  $A_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

A Figura 4.1, representada logo a seguir, ilustra os seis pontos destacados no Exemplo 4.18.



**Figura 4.1:** Pontos construtíveis de  $\mathcal{P}_0$ .

Para construirmos a figura 4.1, utilizamos apenas construções de retas e circunferências, bem como as operações elementares entre elas, seguindo os passos listados a seguir:

$P_1 \rightarrow$  Traçamos uma reta que irá conter os pontos  $O = (0, 0)$  e  $U = (1, 0)$ .

$P_2 \rightarrow$  Traçamos uma circunferência  $C_1$  de centro  $O$  passando pelo ponto  $U$ . A interseção dessa circunferência com a reta  $\overleftrightarrow{OU}$  resulta no ponto  $A_1$ .

$P_3 \rightarrow$  Agora, traçamos uma circunferência  $C_2$  de centro  $U$  passando pelo ponto  $O$ . A interseção dessa circunferência com a reta  $\overleftrightarrow{OU}$  resulta no ponto  $A_2$ .

$P_4 \rightarrow$  A interseção das circunferências  $C_1$  e  $C_2$  resulta nos pontos  $A_3$  e  $A_4$  citados no exemplo.

Comentários sobre a construção: veja que, da forma como a figura fora construída, as duas circunferências satisfazem à condição necessária para sua construção: o centro e um de seus pontos pertencem ao conjunto  $\mathcal{P}_0$ .

Além disso, o ponto  $A_1$  e o ponto  $U = (1, 0)$  são extremidades do diâmetro da circunferência de centro  $O = (0, 0)$ . Logo, as coordenadas de  $A_1$  são dadas por  $(-1, 0)$ . De maneira similar, ponto  $A_2$  e o ponto  $O = (0, 0)$  são extremidades do diâmetro da circunferência de centro  $U = (1, 0)$ . Logo, as coordenadas de  $A_2$  são dadas por  $(2, 0)$ .

Por fim, a operação elementar, envolvendo a interseção das circunferências  $C_1$  e  $C_2$  gerou os pontos  $A_3$  e  $A_4$  e, conseqüentemente, o segmento  $A_3A_4$ . Analisando o triângulo  $\triangle OUA_3$ , percebemos que o mesmo é equilátero de lado  $\ell = 1$ . Logo, sua altura  $h$  é dada por  $\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Além disso, sabemos que o segmento que liga os pontos  $A_3$  e  $A_4$  é mediatriz do segmento  $OU$ , de modo que ela cruza a reta  $\overleftrightarrow{OU}$  no ponto de coordenadas  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Logo, temos  $A_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ . Podemos concluir que  $A_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ , a partir de uma análise similar no triângulo  $\triangle OUA_4$ .

**Observação 4.12**

Podemos notar que os elementos de um conjunto  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$  são sempre construtíveis a partir de  $\mathcal{P}$ , ou seja,  $\mathcal{P} \subset \langle \mathcal{P} \rangle$ . De fato, dados dois pontos  $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ , basta considerarmos a circunferência com centro em  $P_1$  passando por  $P_2$  e a circunferência com centro em  $P_2$  passando por  $P_1$ . Verificando as interseções destas circunferências com a reta  $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ , concluímos que os pontos  $P_1$  e  $P_2$  também são construtíveis a partir de  $\mathcal{P}$ .

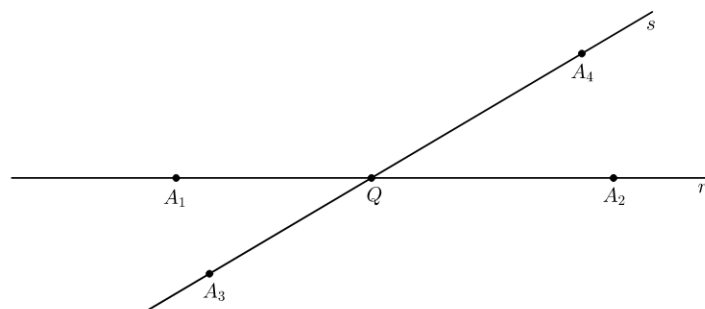
De agora em diante, vamos sempre considerar:  $O = (0, 0)$  e  $U = (1, 0)$ . E, além disso, seja  $\mathcal{P}_0 = \{O, U\}$ ,  $\mathcal{P}_1 = \langle \mathcal{P}_0 \rangle$ ,  $\mathcal{P}_2 = \langle \mathcal{P}_1 \rangle$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{P}_{n+1} = \langle \mathcal{P}_n \rangle$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dessa forma, temos que

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_3 \subset \dots \subset \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1} \subset \dots \subset \mathbb{R}^2.$$

**Observação 4.13**

Seja  $\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ . Vemos que  $\mathcal{P}_\infty$  é um conjunto infinito, pois cada  $Q_n = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}$  é um subconjunto não vazio do  $\mathbb{R}^2$ .

Observamos que  $\langle \mathcal{P}_\infty \rangle = \mathcal{P}_\infty$ . De fato, seja  $Q \in \langle \mathcal{P}_\infty \rangle$ . O ponto  $Q$  é determinado por uma das operações elementares em  $\mathcal{P}_\infty$ . Suponha  $Q = r \cap s$ , onde  $r$  e  $s$  são retas em  $\mathcal{P}_\infty$ .

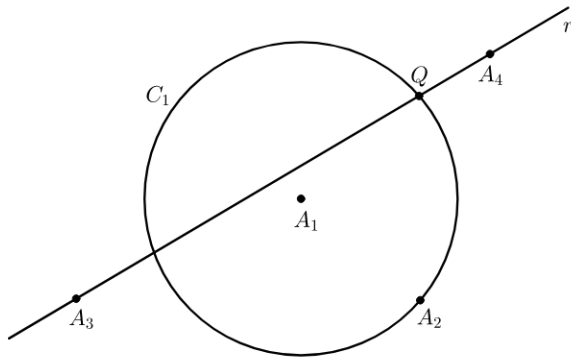


**Figura 4.2:** Q como interseção entre as retas  $r$  e  $s$ .

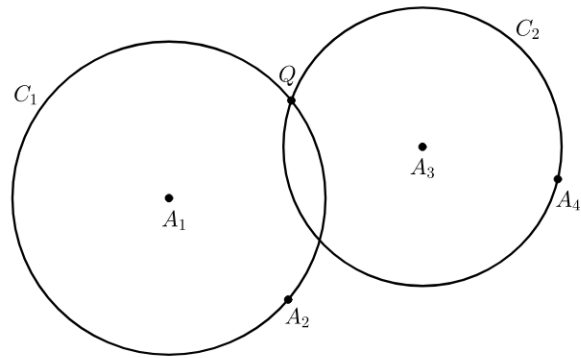
Logo, existem  $A_i \in \mathcal{P}_\infty$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , tais que  $r = \overleftrightarrow{A_1A_2}$  e  $s = \overleftrightarrow{A_3A_4}$ . Assim,  $A_i \in \mathcal{P}_{j_i}$  para algum  $j_i \in \mathbb{N}$ . Dessa forma, existe  $j_0 = \max\{j_1, j_2, j_3, j_4\} \in \mathbb{N}$ , tal que  $\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \subset \mathcal{P}_{j_0}$  de modo que  $r$  e  $s$  são retas em  $\mathcal{P}_{j_0}$ . Portanto,  $Q \in \mathcal{P}_{j_0} \subset \mathcal{P}_\infty$ , o que prova que  $\langle \mathcal{P}_\infty \rangle \subset \mathcal{P}_\infty$ . Como claramente

$\mathcal{P}_\infty \subset \langle \mathcal{P}_\infty \rangle$ , segue que  $\mathcal{P}_\infty = \langle \mathcal{P}_\infty \rangle$ .

Os casos em que  $Q$  é um ponto na interseção entre uma reta e uma circunferência ou entre duas circunferências representados, respectivamente pelas Figuras 4.3 e 4.4, são provados de maneira análoga.



**Figura 4.3:**  $Q$  como interseção entre  $r$  e  $C_1$ .



**Figura 4.4:**  $Q$  como interseção entre  $C_1$  e  $C_2$ .

#### Definição 4.24

- (i) Os pontos do plano que pertencem a  $\mathcal{P}_\infty$  são chamados de *pontos construtíveis*.
- (ii) As retas em  $\mathcal{P}_\infty$ , ou seja, contendo dois pontos construtíveis, são chamadas de *retas construtíveis*.
- (iii) Um número real  $a$  é dito construtível se  $(a, 0) \in \mathcal{P}_\infty$ .

#### Proposição 4.9

- (i) Se  $A$  e  $B$  são dois pontos construtíveis distintos, então o ponto médio  $M$  do segmento  $AB$  também é construtível e as retas perpendiculares a  $\overleftrightarrow{AB}$  passando pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $M$  também são construtíveis.
- (ii) Sejam  $A$  um ponto construtível e  $r$  uma reta construtível tais que  $A \in r$ . Se  $B$  e  $C$  são dois outros pontos construtíveis, então existe um ponto construtível  $X \in r$  tal que os segmentos  $AX$  e  $BC$  possuem o mesmo comprimento.

#### Demonstração.

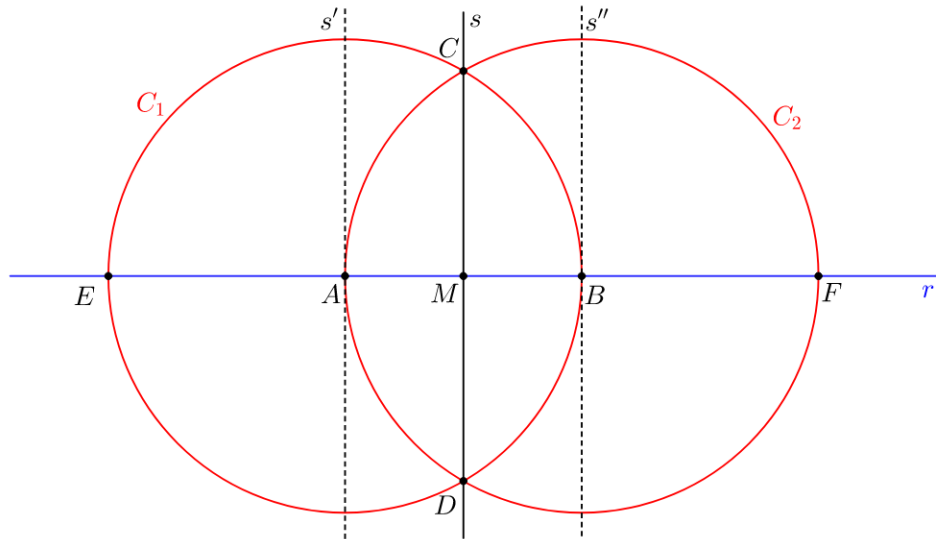
- (i) Por hipótese, temos que os pontos  $A$  e  $B$  são construtíveis. A partir disso, basta construirmos o ponto médio de  $AB$ , executando os seguintes passos:

$P_1 \rightarrow$  Traçamos uma reta  $r$  que irá conter os pontos  $A$  e  $B$  e, em seguida, traçamos duas circunferências:  $C_1$  centrada em  $A$  e passando por  $B$  e  $C_2$  centrada em  $B$  e passando por  $A$ .



$P_2 \rightarrow$  A interseção dessas circunferências com a reta  $r$  resulta nos pontos  $E$  e  $F$  que são construtíveis e as interseções das duas circunferências resultam nos pontos construtíveis  $C$  e  $D$ , conforme visto na Figura 4.5.

$P_3 \rightarrow$  A interseção da reta  $s$ , que passa pelos pontos  $C$  e  $D$ , com a reta  $r$  resulta no ponto  $M$  que é o ponto médio do segmento  $AB$ .



**Figura 4.5:** Construção de ponto médio e perpendiculares.

Comentários sobre a construção: Note que  $M$  é construtível, pois é resultado da interseção de duas retas construtíveis. Assim, devemos mostrar que  $M$  é ponto médio de  $AB$ . Veja que os triângulos  $\triangle ACD$  e  $\triangle BCD$  são congruentes pelo caso  $LLL$  e, portanto,  $\widehat{ACM} = \widehat{BCM}$ . Observando agora os triângulos  $\triangle ACM$  e  $\triangle BCM$ , vemos que ambos são congruentes pelo caso  $LAL$  e, assim,  $\widehat{AMC} = \widehat{BMC}$ , bem como  $\overline{AM} = \overline{BM}$ .

Observamos, ainda, que  $\widehat{AMC} = \widehat{BMC} = 90^\circ$  e, portanto,  $s$  é perpendicular a  $AB$  passando por  $M$ . Como  $A$  e  $B$  são, respectivamente, pontos médios dos segmentos  $EB$  e  $AF$ , conclui-se, de modo análogo, que as perpendiculares a  $r$  passando por esses pontos são também construtíveis.

(ii) Por hipótese, temos que  $A$  e  $r$  são construtíveis de modo que  $A \in r$ . Além disso,  $B$  e  $C$  também são outros pontos construtíveis.

No caso em que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são todos pertencentes a  $r$ , a construção parte diretamente do Passo  $P_4$  listado a seguir. Se não for o caso, começamos por  $P_1$  como abaixo:

$P_1 \rightarrow$  Traçamos uma reta auxiliar  $s$  que contenha os pontos  $A$  e  $B$  e um arco de circunferência  $C_1$  com centro em  $B$  passando por  $C$ .

$P_2 \rightarrow$  Na interseção de  $C_1$  com  $s$ , marcamos um ponto  $C'$  de modo que  $\overline{BC} = \overline{BC'}$ .

$P_3 \rightarrow$  Agora, tracemos um arco de circunferência  $C_2$ , centrada em  $A$  e passando por  $B$  e marquemos o ponto  $B'$  na interseção dessa circunferência com a reta  $r$ . Tracemos também uma

circunferência  $C_3$ , igualmente centrada em  $A$ , porém passando por  $C'$  e, na interseção dessa circunferência com a reta  $r$ , marquemos o ponto  $C''$ . Desta forma,  $\overline{AB} = \overline{AB'}$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C''}$ .

$P_4 \rightarrow$  Construímos o ponto médio  $M$  do segmento  $B'C''$  e, em seguida, construímos uma nova circunferência  $C_4$ , centrada em  $B'$ , passando por  $A$  e marcamos um ponto  $N$  na interseção desse círculo com a reta  $r$ , de modo que  $\overline{AB'} = \overline{B'N}$ . Há três situações possíveis:

- $M$ , que é o ponto médio de  $B'C''$ , coincide com  $N$ , interseção de  $C_4$  com  $r$ . Considere  $X = M$  e a construção está finalizada, como pode ser visto na Figura 4.7.
- $M$  está entre  $N$  e  $C''$ : Construa uma circunferência  $C_5$  de centro  $M$  passando por  $N$  e, na interseção desse círculo com a reta  $r$ , marque o ponto  $X$  procurado, como pode ser visto na Figura 4.6.
- $N$  está entre  $M$  e  $C''$ : Construa a circunferência  $C_5$  de forma análoga à situação anterior, como pode ser visto na Figura 4.8.

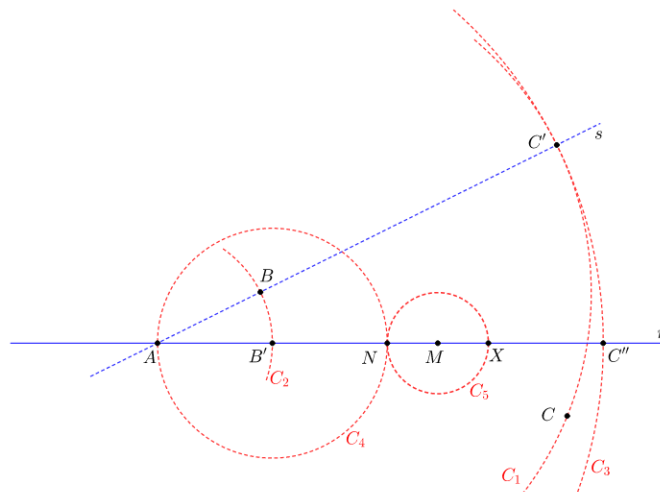


Figura 4.6: Caso 1:  $\overline{AX} = \overline{B'C''}$ , com  $X$  entre  $M$  e  $C''$ .

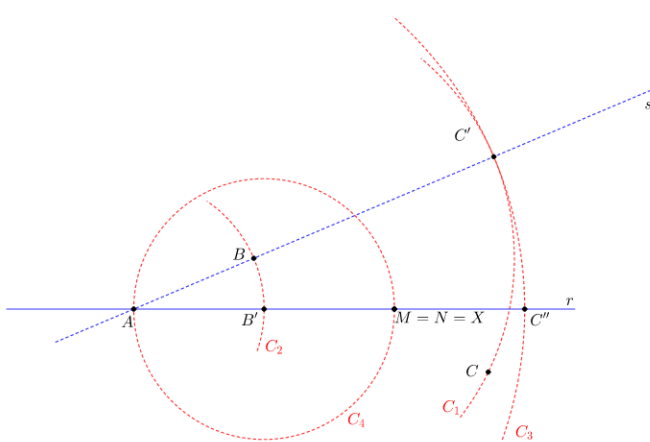


Figura 4.7: Caso 2:  $\overline{AX} = \overline{B'C''}$ , com  $X = M = N$ .

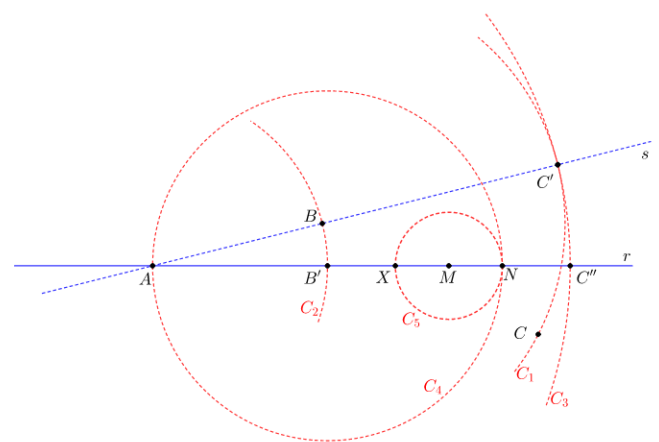


Figura 4.8: Caso 1:  $\overline{AX} = \overline{B'C''}$ , com  $X$  entre  $B'$  e  $M$ .

Comentários sobre a construção: Da forma como iniciamos a construção, tomamos os pontos  $B$  e  $C$  de uma maneira genérica, de modo que inicialmente não tínhamos  $A$ ,  $B$  e  $C$  colineares. As

construções dos círculos  $C_2$  e  $C_3$  geraram os pontos  $B'$  e  $C''$  que, juntamente com o ponto  $A$ , pertencem à reta  $r$ , ou seja, são colineares. Isso ocorreu ao finalizarmos a construção indicada no Passo  $P_3$ . Temos três situações distintas que devem ser analisadas no Passo  $P_4$ :

- $M$ , que é o ponto médio de  $B'C''$ , coincide com  $N$ :

$$(a) \overline{AX} = \overline{AB'} + \overline{B'N} + \overline{NM} + \overline{MX}$$

$$(b) \overline{BC} = \overline{B'C''} = \overline{B'N} + \overline{NM} + \overline{MX} + \overline{XC''}.$$

Analisando as igualdades acima, basta provar que  $\overline{AB'} = \overline{XC''}$ . Sabemos que  $M$  é ponto médio de  $B'C''$ , o que acarreta em

$$\overline{B'N} + \overline{NM} = \overline{MX} + \overline{XC''} \Rightarrow \overline{B'N} = \overline{XC''}.$$

A última igualdade é válida, pois  $M$  é centro da circunferência  $C_5$ , de modo que  $\overline{NM} = \overline{MX}$ . Por fim,  $\overline{B'N} = \overline{AB'}$ , visto que ambos são raios da circunferência  $C_4$ . Com isso, confirmamos que  $\overline{AB'} = \overline{XC''}$ .

- $M$  está entre  $N$  e  $C''$ :

$$(a) \overline{AX} = \overline{B'N} + \overline{B'N} + \overline{NM} + \overline{MX}$$

$$(b) \overline{BC} = \overline{B'C''} = \overline{B'N} + \overline{NM} + \overline{MX} + \overline{XC''}.$$

Como  $\overline{B'N} = \overline{AB'}$ , analisando as igualdades acima, basta provar que  $\overline{AB'} = \overline{XC''}$ . Sabemos que  $M$  é o ponto médio do segmento  $\overline{B'C''}$ , o que indica que

$$\overline{B'N} + \overline{NM} = \overline{MX} + \overline{XC''} \Rightarrow \overline{B'N} = \overline{XC''}.$$

Como  $\overline{B'N} = \overline{AB'}$ , temos  $\overline{AB'} = \overline{XC''}$  e, assim, obtemos o resultado esperado.

- $N$  está entre  $M$  e  $C''$ :

$$(a) \overline{AX} = \overline{AB'} + \overline{B'X}$$

$$(b) \overline{BC} = \overline{B'C''} = \overline{B'X} + \overline{XM} + \overline{MN} + \overline{NC''}.$$

Como  $\overline{AB'} = \overline{B'X} + \overline{XM} + \overline{MN}$ , analisando as igualdades acima, basta provar que  $\overline{B'X} = \overline{NC''}$ . Sabemos que  $M$  é ponto médio de  $B'C''$ . Logo

$$\overline{B'X} + \overline{XM} = \overline{MN} + \overline{NC''} \Rightarrow \overline{B'X} = \overline{NC''}.$$

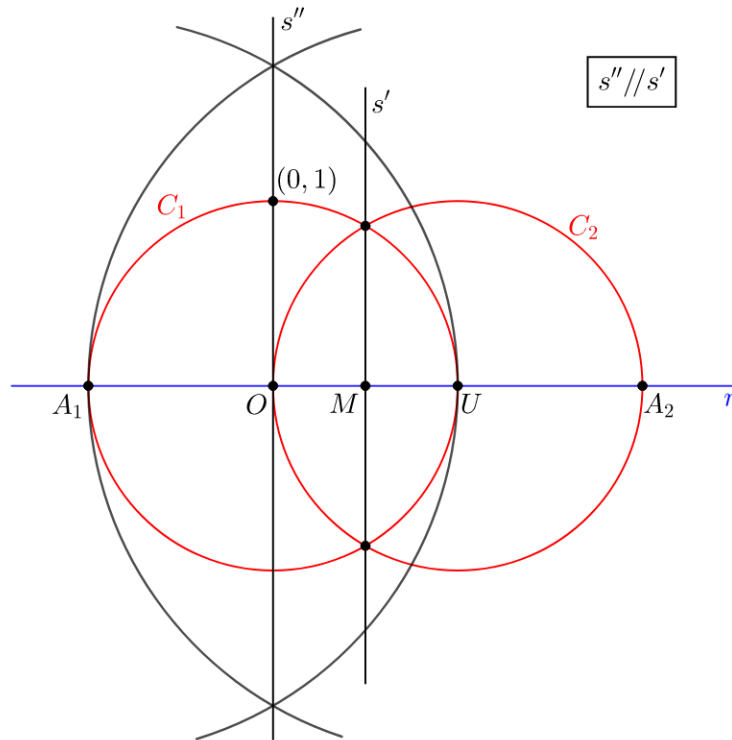
A última igualdade se verifica, pois  $M$  é centro da circunferência  $C_5$ , de modo que  $\overline{XM} = \overline{MN}$  e, assim, obtemos o resultado que desejávamos. ■

**Proposição 4.10**

Para todo  $a, b \in \mathbb{Z}$ , o ponto  $P = (a, b)$  é construtível.

**Demonstração.**

Seguindo os passos do Exemplo 4.1 recursivamente, é possível provar que  $(a, 0) \in \mathcal{P}_\infty$ , para todo  $a \in \mathbb{Z}$ . Segue da Proposição 4.9 que a reta  $s''$  (perpendicular à  $\overleftrightarrow{OU}$  passando por  $O$ ) é construtível. Portanto, o ponto  $(0, 1)$  é construtível.



**Figura 4.9:** Construção de pontos com coordenadas inteiras.

De fato,  $(0, 1)$  é a interseção de  $C_1$  e  $s''$ . Como consequência, temos que todos os pontos da forma  $(0, a)$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ , são construtíveis. Se  $t'$  é a reta perpendicular à reta  $r$  passando por  $(a, 0)$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  e  $t''$  é a reta perpendicular à reta  $s''$ , passando por  $(0, b)$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ , então  $\{(a, b)\} = t' \cap t''$ . Portanto,  $(a, b) \in \mathcal{P}_\infty$ , para todo  $a, b \in \mathbb{Z}$ . ■

**Proposição 4.11**

- (i) Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos construtíveis não alinhados. Então, existe um ponto  $D$  construtível tal que  $A, B, C$  e  $D$  formam um paralelogramo. Em particular, a reta passando por  $C$  e paralela ao segmento  $AB$  é construtível.
- (ii) Um ponto  $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  é construtível se, e somente se, as suas coordenadas  $a, b \in \mathbb{R}$  são números construtíveis.

**Demonstração.**

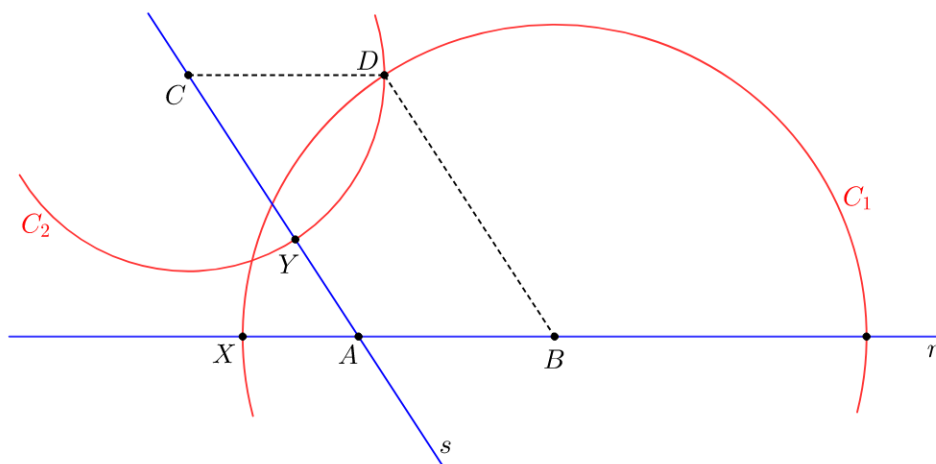
(i) Por hipótese, temos que  $A$  e  $B$  e  $C$  são três pontos construtíveis. Assim, o ponto  $D$  pode ser obtido seguindo os passos listados a seguir:

$P_1 \rightarrow$  Traçamos a reta suporte  $r$  que passa pelos pontos construtíveis  $A$  e  $B$ . Como  $A$ ,  $B$  e  $C$  não estão alinhados, temos que  $C$  não pertence à reta  $r$ . Tracemos, portanto, a reta  $s$  passando por  $A$  e  $C$ .

$P_2 \rightarrow$  Com abertura do compasso igual a  $\overline{AC}$ , traçamos um arco de circunferência  $C_1$  centrado em  $B$  e, em uma das interseções desse arco com a reta  $r$ , marcamos o ponto  $X$ .

$P_3 \rightarrow$  De modo similar ao que foi feito no item anterior, definimos a abertura do compasso de modo que sua medida seja igual a  $\overline{AB}$ . Com essa abertura, traçamos um arco de circunferência  $C_2$  centrado em  $C$  e, em uma das interseções desse arco com a reta  $s$ , marcamos o ponto  $Y$ .

$P_4 \rightarrow$  Marcamos a interseção entre as circunferências  $C_1$  e  $C_2$ . A interseção dessas duas circunferências fornece-nos dois pontos construtíveis, de modo que o ponto  $D$  procurado é aquele localizado no mesmo semiplano que contém o ponto  $B$  em relação à reta suporte  $s$ .



**Figura 4.10:** Construção de um paralelogramo dados três de seus vértices.

Comentários sobre a construção: é importante observarmos que a construção das retas concorrentes  $r$  e  $s$  são possíveis pois são construídas a partir de três pontos construtíveis não alinhados. Além disso, a existência dos pontos construtíveis  $X$  e  $Y$  é garantida pelo caso (ii) da Proposição 4.9. Como  $ABDC$  é um quadrilátero tal que  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e  $\overline{AC} = \overline{BD}$ , temos que  $ABDC$  é um paralelogramo.

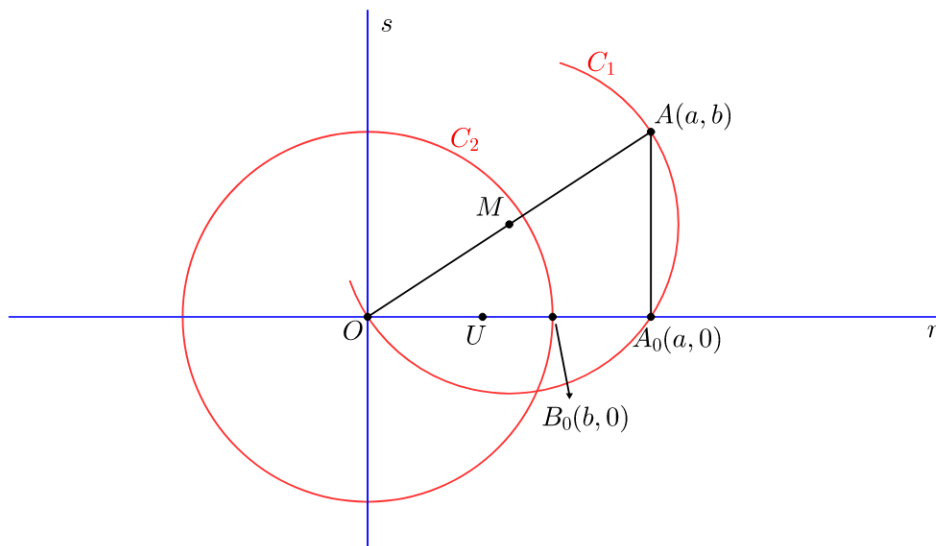
(ii) ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese,  $A = (a, b)$  é um ponto construtível. Devemos mostrar que os pontos  $A_0 = (a, 0)$  e  $B_0 = (b, 0)$  são também construtíveis. Para a sua construção, basta seguirmos os passos:

$P_1 \rightarrow$  Traçamos a reta  $r$  passando pelos pontos  $O$  e  $U$ .

$P_2 \rightarrow$  Traçamos o segmento  $\overline{OA}$  e marcamos o ponto médio  $M$  desse segmento.

$P_3 \rightarrow$  Marcamos o ponto  $X = (x, 0)$  sobre a reta  $r$ , tal que  $\overline{OX} = \overline{AA_0}$ .

$P_4 \rightarrow$  Se  $x = b$ , temos que  $B_0 = X$ . Se  $x = -b$ , traçamos a circunferência  $C_2$  com centro em  $O$  passando por  $X$  e marcamos o ponto  $B_0$  sobre a reta  $r$  do lado oposto de  $X$  em relação ao ponto  $O$ , na interseção de  $C_2$  com a reta  $r$ .



**Figura 4.11:** Coordenadas construtíveis.

Comentários sobre a construção: Utilizando geometria elementar, sabemos que o segmento  $AA_0$  é perpendicular a  $r$  e, por isso,  $A_0 = (a, 0)$ . Portanto, o número  $a$  é construtível. Além disso, os pontos  $B_0 = (b, 0)$  e  $B_1 = (-b, 0)$  podem ser marcados sobre a reta  $r$ , em função do resultado obtido no item (ii) da Proposição 4.9, de modo que  $\overline{AA_0} = \overline{OB_0} = \overline{OB_1}$ . Portanto,  $b$  é construtível.

(ii) ( $\Leftarrow$ ) Por hipótese,  $a$  e  $b$  são construtíveis. Com isso,  $(a, 0)$  e  $(b, 0) \in \mathcal{P}_\infty$ . É fácil ver que a reta que passa por  $O$  e por  $U = (0, 1)$  é construtível. Assim, basta executar os seguintes passos:

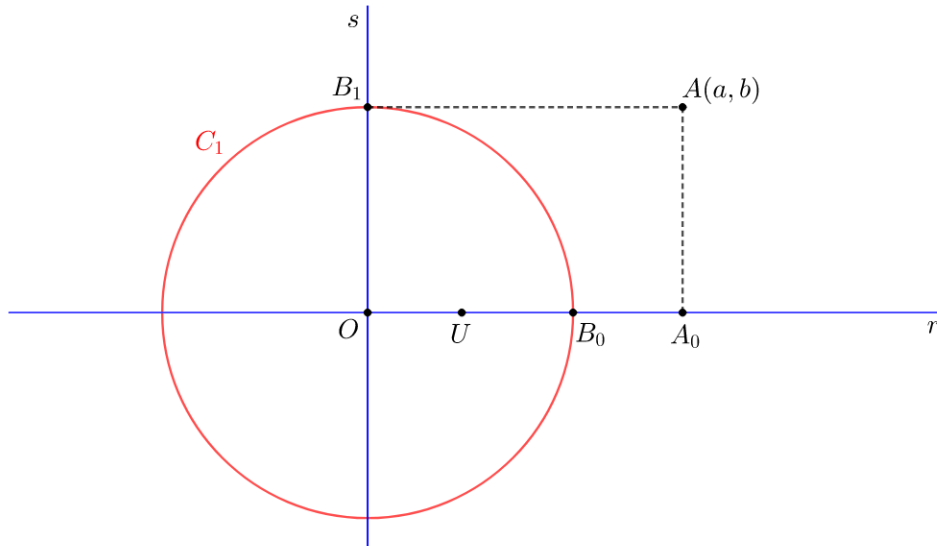
$P_1 \rightarrow$  Construimos a reta  $r$  que passa por  $O$  e  $U$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $U$  esteja entre  $O$  e  $A_0 = (a, 0)$  e  $B_0$  entre  $U$  e  $A_0$  e, sobre  $r$ , marque tais pontos.

$P_2 \rightarrow$  Construimos a reta  $s$  perpendicular a  $r$ , passando por  $O$ .

$P_3 \rightarrow$  Construimos a circunferência  $C_1$  com centro em  $O$  e raio  $\overline{OB_0}$ . Marcamos o ponto  $B_1$  na interseção entre  $C_1$  e  $s$ .

$P_4 \rightarrow$  Construimos uma reta perpendicular à reta  $r$ , passando por  $A_0$  e outra, perpendicular à reta  $s$ , passando por  $B_1$ .

$P_5 \rightarrow$  Na interseção dessas duas perpendiculares, marcamos o ponto  $A$  de coordenadas  $(a, b)$ .



**Figura 4.12:** Pontos construtíveis a partir de suas coordenadas.

*Comentários sobre a construção:* Utilizando o item (ii) da Proposição 4.9, podemos construir  $(0, b)$  a partir de  $(b, 0)$ . Além disso, a construção das perpendiculares indicadas no passo  $P_4$  está garantida pelo item (i) da Proposição 4.9, tornando possível a construção de  $(a, b)$  a partir de  $(a, 0)$  e  $(0, b)$ . ■

#### Observação 4.14

De acordo com o que fora provado na Proposição 4.11, temos que os números construtíveis são exatamente as coordenadas dos pontos construtíveis e vice-versa.

## 4.6 Os três problemas clássicos gregos

Mostraremos, a seguir, que o conjunto dos números reais construtíveis tem estrutura algébrica de corpo. Além disso, mostraremos que os números racionais são construtíveis. Esse resultado possibilita um estudo de tal conjunto de números sob o ponto de vista da teoria de “Extensões Algébricas” e é fundamental para a prova da insolubilidade dos três problemas clássicos gregos.

#### Teorema 4.3

$\mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ é construtível}\}$  é um subcorpo de  $\mathbb{R}$  contendo  $\mathbb{Q}$ .

#### Demonstração.

Para provarmos esse teorema, faz-se necessário dividir a prova em duas partes: inicialmente, provaremos que  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  é um subcorpo de  $\mathbb{R}$  e, em seguida, que  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ .

Para provarmos a primeira parte, é necessário mostrarmos que

$$(i) \alpha, \beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \beta - \alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}.$$

$$(ii) \alpha, \beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}.$$

$$(iii) 0 \neq \alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}.$$

Para a prova dos itens (i), (ii) e (iii), consideremos  $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ ,  $A = (\alpha, 0)$  e  $B = (\beta, 0)$ . Primeiramente, observemos que se um ponto  $C = (\gamma, 0)$  é construtível, é possível verificar facilmente que  $C' = (-\gamma, 0)$  também o é. Logo,  $\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  se, e somente se,  $-\gamma \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ . Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir  $\beta > \alpha > 0$ , para a prova do item (i). Utilizando o item (ii) da Proposição 4.9, segue imediatamente que podemos construir  $X$  à direita de  $O$  sobre a reta  $\overleftrightarrow{OU}$  de modo que  $\overline{OX} = \overline{AB}$ . Com isso, teremos  $X = (\beta - \alpha, 0)$  o que confirma a validade de (i).

Para demonstrar a validade dos outros dois itens, é importante observarmos que existem retas construtíveis contendo  $O$  além das retas  $\overleftrightarrow{OU}$  e  $\overleftrightarrow{OT}$ , onde  $T = (0, 1)$ .

Para provarmos o item (ii), consideremos a construção representada na Figura 4.13, cujos passos são listados a seguir:

$P_1 \rightarrow$  Traçamos uma reta  $r$  por  $O = (0, 0)$  e  $U = (1, 0)$  e, por  $O$ , traçamos uma reta  $s$  perpendicular a  $r$ .

$P_2 \rightarrow$  Traçamos um arco de circunferência  $C_1$  de centro  $O$  passando pelo ponto  $U$ .

$P_3 \rightarrow$  Marcamos os pontos  $A$  e  $B$  sobre a reta  $r$  e, em seguida, traçamos um arco de circunferência  $C_2$  de centro  $O$  e raio igual a  $\overline{OA}$ .

$P_4 \rightarrow$  Traçamos uma reta construtível  $t$  passando por  $O$  e marcamos o ponto  $A_1$  na intersecção entre  $t$  e  $C_2$  e, em seguida, construímos o segmento  $UA_1$ .

$P_5 \rightarrow$  Traçamos uma paralela ao segmento  $UA_1$  passando por  $B$  e marcamos  $B_1$  na intersecção entre essa reta e a reta  $t$ .

$P_6 \rightarrow$  Por fim, traçamos um arco de circunferência  $C_3$  centrado em  $O$  passando por  $B_1$ . Esse segmento  $OB_1$  tem comprimento  $\alpha\beta$  como queríamos.

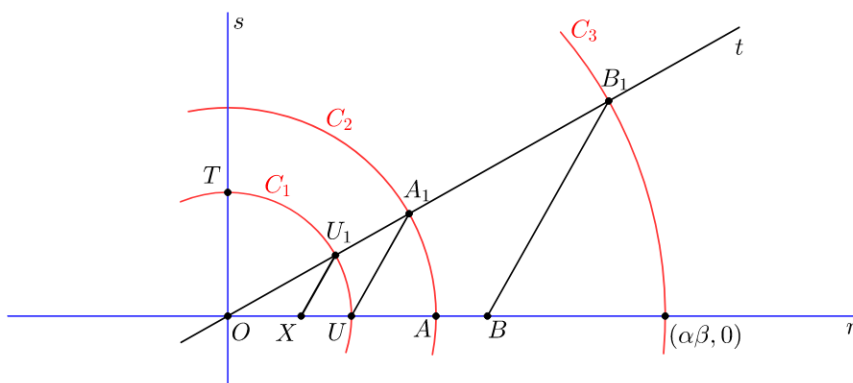


Figura 4.13: Construção do segmento de medida  $\alpha\beta$ .

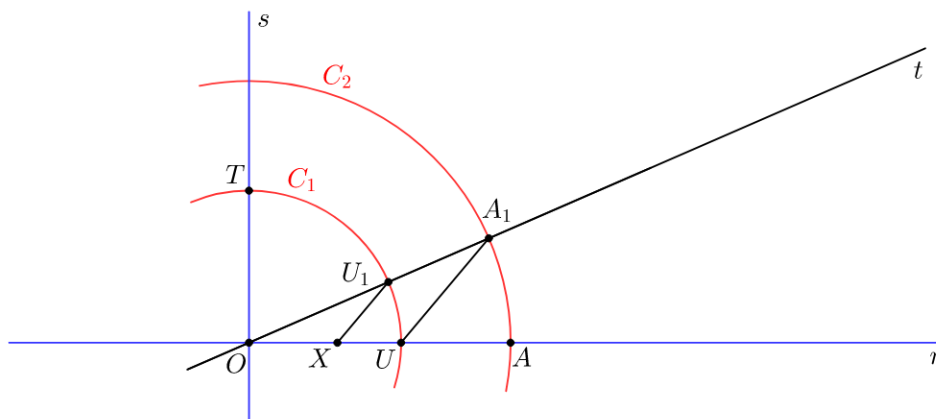


Comentários sobre a construção: veja que, da forma como a figura fora construída,  $\overline{OA} = \overline{OA_1} = \alpha$ , já que ambos são raios de  $C_2$ . Além disso, como  $UA_1 \parallel BB_1$ , temos um caso de semelhança envolvendo os triângulos  $OUA_1$  e  $OBB_1$ . Assim,

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB_1}} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{\beta}{\overline{OB_1}} \Rightarrow \overline{OB_1} = \alpha\beta.$$

Para provarmos o item (iii), consideremos a construção representada na Figura 4.14, cujos passos são listados abaixo:

- $P_1 \rightarrow$  Traçamos uma reta  $r$  passando por  $O = (0, 0)$  e  $U = (1, 0)$  e, por  $O$ , traçamos uma perpendicular  $s$ .
- $P_2 \rightarrow$  Traçamos um arco de circunferência  $C_1$  de raio  $\overline{OU}$  e, na interseção com  $s$ , marcamos o ponto  $T = (0, 1)$ .
- $P_3 \rightarrow$  Marcamos o ponto  $A$  sobre a reta  $r$  e, em seguida, traçamos um arco de circunferência  $C_2$  de centro  $O$  e raio igual a  $\overline{OA}$ .
- $P_4 \rightarrow$  Traçamos uma reta construtível  $t$  passando por  $O$  e marcamos os pontos  $A_1$  na intersecção entre  $C_2$  e  $t$  e  $U_1$  na intersecção entre  $C_1$  e  $t$ .
- $P_5 \rightarrow$  Em seguida, construímos o segmento  $UA_1$  e, por  $U_1$ , construímos uma paralela a  $UA_1$  intersectando o segmento  $OU$  em um ponto  $X$ .
- $P_6 \rightarrow$  O segmento  $OX$  obtido possui o comprimento que desejávamos construir.



**Figura 4.14:** Construção do segmento de medida  $\frac{1}{\alpha}$ .

Comentários sobre a construção: veja que, da forma como a figura fora construída,  $\overline{OA} = \overline{OA_1} = \alpha$ , já que são raios da mesma circunferência  $C_2$ . Da mesma forma,  $\overline{OU} = \overline{OU_1} = 1$ , pois são raios da circunferência  $C_1$ . Além disso, como  $UA_1 \parallel XU_1$ , temos um caso de semelhança envolvendo os

triângulos  $\triangle OUA_1$  e  $\triangle OXU_1$ . Assim,

$$\frac{\overline{OU}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OU_1}} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{\overline{OX}}{1} \Rightarrow \overline{OX} = \frac{1}{\alpha}.$$

Com isso, fica provado que  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  é um subcorpo de  $\mathbb{R}$ . Para provar que  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ , note que se  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ,  $b \neq 0$ , temos  $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ . Agora, sabendo que  $\mathbb{Z} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  e como vimos que, para todo  $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  é possível construir  $\frac{1}{\alpha}$ , temos que  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ , o que conclui nossa demonstração. ■

#### Observação 4.15

Se  $A = (u, v) \in \mathcal{P}_n$ , dizemos que  $u$  e  $v$  são as coordenadas de  $\mathcal{P}_n$  e denotaremos por  $\mathcal{A}_n$  o conjunto de todas as coordenadas de  $\mathcal{P}_n$ . Sabemos pelo item (ii) da Proposição 4.11 que  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ , qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ .

Seja  $\mathcal{K}_0 = \mathbb{Q}, \mathcal{K}_1 = \mathbb{Q}[\mathcal{A}_1], \dots, \mathcal{K}_n = \mathbb{Q}[\mathcal{A}_n], \dots$ . Como  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n \subset \dots \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  e  $\mathbb{Q} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ , temos

$$\mathbb{Q} = \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \dots \subset \mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1} \subset \dots \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}.$$

Observe também que se  $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ , então  $(\alpha, 0) \in \mathcal{P}_n$  para algum  $n$ . Com isso,  $\alpha \in \mathcal{A}_n$ , para algum  $n$ . Portanto,  $\alpha \in \mathcal{K}_n$  e, conseqüentemente,

$$\mathcal{K}_{\infty} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}.$$

Essa interpretação para  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  será levada em consideração para provarmos o Teorema 4.4.

#### Observação 4.16

Dado um sistema de coordenadas cartesianas  $xOy$  no plano, sabemos que é possível expressar qualquer ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  em termos de suas coordenadas. A seguir, analisaremos algebricamente a construtibilidade de tais pontos a partir das operações elementares que os determinam.

Note que determinar o ponto de interseção entre duas retas  $r$  e  $s$ , com  $r = \overleftrightarrow{A_1B_1}$  e  $s = \overleftrightarrow{A_2B_2}$ , equivale a resolver um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

em que seus coeficientes podem ser obtidos a partir de operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre as coordenadas dos pontos que as determinam. Além disso, se

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ , obtemos

$$x = \frac{-c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ e } y = \frac{-a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Dessa forma, se os coeficientes  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  e  $c_2$  pertencem a um corpo  $F$ , podemos observar que  $x$  e  $y$  satisfazendo o sistema acima também pertencem a  $F$ .

Por outro lado, se  $P = (x, y)$  for um dos pontos de interseção de uma reta  $r$  e uma circunferência  $C$ , então  $x$  e  $y$  devem ser solução de um sistema do tipo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = \gamma \\ ax + by = c \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \text{ e } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

com  $A = a^2 + b^2$ ,  $B = 2ac + \alpha b^2$  e  $C = c^2 - \beta bc + \gamma$ .

Supondo que  $F$  seja um corpo que contém os coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ , temos que  $x$  e  $y$  são da forma  $p + q\sqrt{t}$ , onde  $p, q$  e  $t$  pertencem a  $F$ . Dessa forma, se  $t$  não é um quadrado em  $F$ , temos que as coordenadas  $x$  e  $y$  de  $P$  estão na extensão  $F[\sqrt{t}]$ .

Por último, temos o caso em que  $P = (x, y)$  é dado pela interseção de duas circunferências, onde ambas possuem centros e passam por centros expressos por coordenadas que estão em um corpo  $F$ . Isso quer dizer que  $x$  e  $y$  satisfazem um sistema do tipo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ x^2 + y^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases},$$

onde  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  pertencem a  $F$ . Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos o sistema equivalente

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y = (\gamma_1 - \gamma_2) \end{cases},$$

em que, novamente, as soluções são pontos cujas coordenadas são da forma  $p + q\sqrt{t}$ , com  $p, q$  e  $t$  pertencem a  $F$ . Como visto anteriormente, se  $t$  não é um quadrado em  $F$ , as coordenadas  $x$  e  $y$  de  $P$  estão na extensão  $F[\sqrt{t}]$ .

Para mais detalhes, ver [10].

Esta análise é fundamental para a prova do Teorema 4.4, apresentado a seguir.

**Teorema 4.4**

$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  é uma extensão algébrica dos racionais tal que, para todo  $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  temos que o grau  $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$  é uma potência de base 2.

**Demonstração.** Devemos mostrar que, para todo  $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ , temos  $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 2^r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$ .

Seja  $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ . Como  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha \in \mathcal{K}_n = \mathbb{Q}[\mathcal{A}_n]$ .

Pela Proposição 4.8, sabemos que  $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}]$  divide  $[\mathcal{K}_n : \mathbb{Q}]$ . Assim, basta mostrarmos que  $[\mathcal{K}_n : \mathbb{Q}] = 2^s$ , para algum  $s \in \mathbb{N}$ . Vamos mostrar esse fato usando indução sobre  $n$ .

Se  $n = 0$ , temos  $\mathcal{K}_0 = \mathbb{Q}$  e o teorema é válido. Se partíssemos de  $n = 1$ , o teorema também seria válido, pois  $\mathcal{K}_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ .

Vamos então supor que  $[\mathcal{K}_i : \mathbb{Q}]$  é potência de 2, para todo  $0 \leq i \leq n - 1$  e vamos provar que  $[\mathcal{K}_n : \mathbb{Q}]$  é potência de 2.

Como  $\mathcal{K}_{n-1} \subset \mathcal{K}_n$  e  $[\mathcal{K}_n : \mathbb{Q}] = [\mathcal{K}_n : \mathcal{K}_{n-1}] \cdot [\mathcal{K}_{n-1} : \mathbb{Q}]$  basta provarmos que  $[\mathcal{K}_n : \mathcal{K}_{n-1}]$  é uma potência de 2.

Seja  $\mathcal{L} = \mathcal{K}_n$  e  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{K}_{n-1}$ . Sabemos que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0[\mathcal{A}_n]$ . Se  $\mathcal{A}_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ , temos então que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$ .

Se denotarmos  $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0[\alpha_1] \subset \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1[\alpha_2] \subset \dots \subset \mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i-1}[\alpha_i] \subset \dots \subset \mathcal{L}_k = \mathcal{L}$ , basta provarmos que  $[\mathcal{L}_i : \mathcal{L}_{i-1}]$  é uma potência de 2.

Vamos provar que  $[\mathcal{L}_i : \mathcal{L}_{i-1}] = 1$  ou  $[\mathcal{L}_i : \mathcal{L}_{i-1}] = 2$ , com  $1 \leq i \leq k$ ,  $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i-1}[\alpha_i]$ . Como  $\alpha_i \in \mathcal{A}_n$ , existe  $\beta_i \in \mathcal{A}_n$  tal que  $A_i = (\alpha_i, \beta_i)$  ou  $B_i = (\beta_i, \alpha_i) \in \mathcal{P}_n$ . Sem perda de generalidade, vamos analisar o primeiro caso, ou seja, supor que  $A_i = (\alpha_i, \beta_i) \in \mathcal{P}_n$ .

Como  $\mathcal{P}_n = \langle \mathcal{P}_{n-1} \rangle$ , temos que  $A_i = (\alpha_i, \beta_i)$  é obtido por uma das três operações elementares em  $\mathcal{P}_{n-1}$ . Segue da Observação 4.16 que  $\alpha_i$  terá que satisfazer uma equação com coeficientes sobre o corpo  $\mathcal{K}_{n-1}$  de grau menor ou igual a dois sendo de grau um quando tratarmos da interseção de duas retas.

Como  $\mathcal{K}_{n-1} = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_{i-1}$ , com  $1 \leq i \leq k$ , concluímos que  $\alpha_i$  é raiz de um polinômio de primeiro ou segundo grau sobre o corpo  $\mathcal{L}_{i-1}$  e, assim,  $[\mathcal{L}_i : \mathcal{L}_{i-1}] = 1$  ou 2, o que garante que o grau da extensão  $\mathcal{K}_n \supset \mathcal{K}_{n-1}$  é uma potência de base 2. Logo,  $[\mathcal{K}_n : \mathbb{Q}]$  é potência de 2, como queríamos provar. Para concluir a prova, note que segue do que acabamos de provar que as extensões  $\mathbb{Q}[\alpha] \supset \mathbb{Q}$  são finitas e, portanto, algébricas, para todo  $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ . Disto, segue que  $\alpha$  é algébrico sobre  $\mathbb{Q}$  para todo  $\alpha \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ , ou seja,  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  é uma extensão algébrica de  $\mathbb{Q}$ . ■

**Proposição 4.12**

- (i) Se  $n \geq 3$  é um número ímpar e  $p \geq 2$  é um número primo, então  $\sqrt[n]{p}$  não é construtível.
- (ii)  $u = \cos \frac{\pi}{9}$  não é construtível.

**Demonstração.**

- (i) Se  $\alpha = \sqrt[n]{p}$ , com  $n \geq 3$  e  $p \geq 2$  primo, então  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^n - p$ , que é um polinômio irredutível (basta aplicar o Critério de Eisenstein). Portanto,  $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = n$ , com  $n$  ímpar e segue do Teorema 4.4 que  $\alpha$  não é construtível.
- (ii) Veja que se  $\theta = \frac{\pi}{9}$ , então  $3\theta = \frac{\pi}{3}$ . Além disso, sabemos que

$$\cos(3\theta) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3 \cdot \cos\theta.$$

Igualando o segundo membro das duas equações acima, temos

$$4\cos^3\theta - 3 \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 8\cos^3\theta - 6 \cdot \cos\theta - 1 = 0.$$

Assim,  $u = \cos \frac{\pi}{9}$  é raiz do polinômio  $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$ . Como  $p(x)$  é irredutível sobre  $\mathbb{Q}$ , segue que  $[\mathbb{Q}[u] : \mathbb{Q}] = 3$  e, portanto, segue do Teorema 4.4 que  $u$  não é construtível.

**Teorema 4.5**

Não existe  $\alpha \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  tal que o volume do cubo de aresta  $\alpha$  seja o dobro do volume do cubo de aresta 1.

**Demonstração.**

Seja  $\alpha$  a medida da aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo de aresta 1. Assim,  $\alpha^3 = 2$ , ou seja,  $\alpha$  é a raiz do polinômio  $p(x) = x^3 - 2$ . Como, pelo Critério de Eisenstein,  $p(x)$  é irredutível, segue que  $\text{irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^3 - 2$  e  $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 3$ . Por fim, utilizando o Teorema 4.4, temos que  $\alpha$  não é construtível. ■

**Teorema 4.6**

Não existe  $\alpha \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  tal que a área do quadrado de lado  $\alpha$  seja igual à área do círculo de raio 1.

**Demonstração.**

Seja  $\alpha$  a medida do lado de um quadrado cuja área é igual à área do círculo de raio 1. Como um círculo de raio 1 possui uma área igual a  $\pi$ , temos  $\alpha^2 = \pi$ . Caso  $\alpha \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ , teríamos  $\pi = \alpha \cdot \alpha \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ , pois  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  é corpo.

Consequentemente, pelo Teorema 4.4,  $\pi$  seria algébrico em  $\mathbb{Q}$ . Portanto,  $\alpha \notin \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ . ■

A seguir, trataremos do último dentre os três famosos problemas gregos: a trisseção do ângulo. Tal problema consiste em construir um ângulo cuja medida seja um terço da medida de um ângulo dado. O conceito de ângulos construtíveis está diretamente relacionado ao conceito de números construtíveis, como pode ser observado na definição abaixo.

#### Definição 4.25

Dizemos que um ângulo  $\theta$  é construtível se  $\cos \theta$  (ou  $\sin \theta$ ) for construtível.

Como exemplo, temos que o ângulo  $\theta = 60^\circ$  é construtível, pois  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  é construtível.

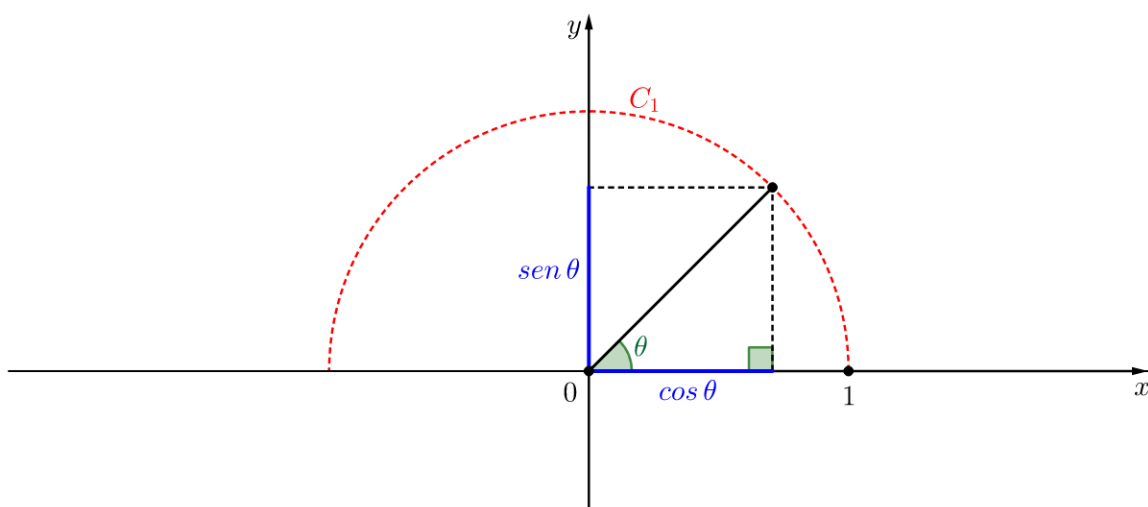


Figura 4.15: Construção de um ângulo  $\theta$ .

Veremos que não é possível trissectar um ângulo genérico qualquer. O teorema a seguir garante que o ângulo  $\frac{\pi}{3}$  não pode ser trissectado e que, portanto, nem todo ângulo pode ser trissectado usando apenas régua e compasso.

#### Teorema 4.7

É impossível, com o uso apenas de régua não graduada e compasso, trissectar o ângulo  $\frac{\pi}{3}$ .

#### Demonstração.

Sejam  $\theta = \pi/9$  e  $u = \cos \theta$ . Note que, se  $\theta$  fosse construtível, então  $u = \cos \theta$  também deveria ser construtível. Entretanto, pelo resultado apresentado no item (ii) da Proposição 4.12, vemos que  $u$  não é construtível. Portanto,  $\theta$  não é construtível. ■

**Observação 4.17**

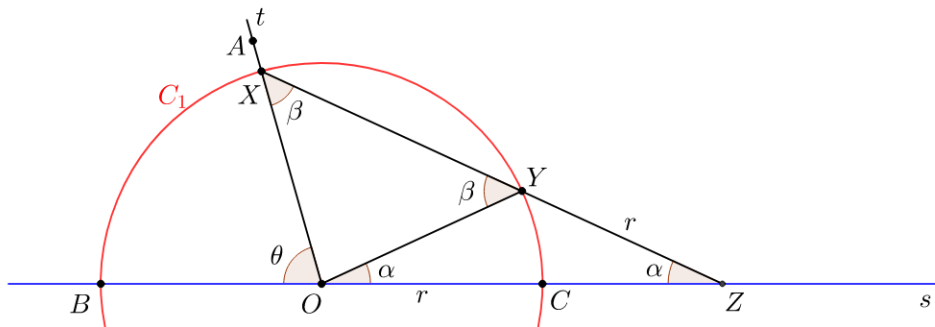
É importante destacar o fato de a régua considerada no Teorema 4.7 ser não graduada.

A seguir, apresentamos uma forma de obter a trisseção do ângulo, utilizando régua graduada e compasso. Consideremos  $r$  e  $s$  duas retas concorrentes no ponto  $O$  e os pontos  $A \in t$  e  $B \in s$ , tais que  $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ . Para efetuar a trisseção do ângulo  $\angle AOB$ , seguimos os seguintes passos:

$P_1 \rightarrow$  Traçamos duas retas  $s$  e  $t$  concorrentes em  $O$  e marcamos os pontos  $A \in t$  e  $B \in s$ , tal que  $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$ .

$P_2 \rightarrow$  Traçamos uma circunferência  $C_1$  de centro  $O$  e raio  $\overline{OB} = r$  e, na interseção entre  $t$  e  $C_1$ , marcamos o ponto  $X$ . Marcamos também o ponto  $C$  na interseção entre  $C_1$  e  $s$ .

$P_3 \rightarrow$  Mantemos uma das extremidades da régua em  $X$  e, deslizando-a (girando) convenientemente, marcamos os pontos colineares  $Y \in C_1$  e  $Z \in s$  tal que  $\overline{YZ} = \overline{OC} = r$ .



**Figura 4.16:** Trisseção do ângulo  $\pi/3$  com régua graduada.

Comentários sobre a construção: Seja  $P \in s$  à direita de  $C$  e  $Y_p \in C_1$  dado na interseção de  $\overrightarrow{XP}$  com a circunferência  $C_1$ . Note que a medida do segmento  $Y_pP$  é mínima quando  $P$  e  $C$  são coincidentes (neste caso  $Y_pP = 0$ ). Além disso, quanto mais afastado  $P$  estiver de  $C$ , maior deve ser  $\overline{Y_pP}$ , de forma que  $Y_pP \rightarrow +\infty$ , quando  $P \rightarrow +\infty$ . Por continuidade, podemos tomar  $P$  de forma que  $Y_pP = r$ . Denotando tal ponto por  $Z$  e  $Y_p$  simplesmente por  $Y$ , temos  $\overline{YZ} = \overline{OC} = r$ . Considerando agora o triângulo  $\triangle YOZ$ , notamos que o mesmo é isósceles de base  $OZ$ , visto que  $\overline{OY} = \overline{YZ} = r$ . Com isso, podemos dizer que  $\widehat{YOZ} = \widehat{ZOY} = \alpha$ . Considerando agora o triângulo  $XOY$ , podemos concluir que  $\widehat{OXY} = \widehat{OYX} = \beta$ . Podemos fazer uso da geometria elementar e aplicando o resultado do Teorema do Ângulo Externo no triângulo  $XOZ$ , concluímos que  $\theta = \alpha + \beta$ . Aplicando o mesmo resultado no triângulo  $\triangle YOZ$ , concluímos que  $\beta = 2\alpha$  e, daí,  $\theta = 3\alpha$ , ou seja,  $\alpha = \frac{\theta}{3}$ . Como o ângulo  $\theta$  é o próprio  $\pi/3$ , o resultado desejado está provado.

Para finalizarmos essa seção, apresentamos um resultado sobre polígonos regulares.

Um polígono é dito *construtível* se todos os seus vértices são pontos construtíveis de  $\mathbb{R}^2$ . Logo, um polígono regular de  $n$  lados é construtível se, e somente se, o ponto  $A_n = \left( \cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n} \right)$  é um ponto construtível do  $\mathbb{R}^2$ .

Assim, temos o resultado indicado pelo teorema a seguir:

**Teorema 4.8: [11, Proposição 8, p. 116]**

- (i) Todo polígono regular de  $n = 2^r$ ,  $r > 1$ , lados é construtível.
- (ii) Se um polígono regular de  $n$  lados é construtível, então o polígono regular de  $2n$  lados também é construtível.
- (iii) Se  $p \geq 3$  é um número primo e um polígono regular de  $p$  lados é construtível, então existe  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $p = 2^{2^s} + 1$ .

**Demonstração.**

Os itens (i) e (ii) são consequência do fato que

- (a) o quadrado é um polígono construtível;
- (b) é possível bissectar um ângulo, utilizando apenas régua e compasso.

Já para a afirmação do item (iii), como  $\left( \cos \frac{2\pi}{p}, \sin \frac{2\pi}{p} \right)$  é construtível, segue pelo Teorema 4.4 que  $[\mathbb{Q}[\alpha, \beta] : \mathbb{Q}] = 2^m$ , em que  $\alpha = \cos \frac{2\pi}{p}$  e  $\beta = \sin \frac{2\pi}{p}$ .

Agora, se  $i = \sqrt{-1}$ , temos que  $[\mathbb{Q}[\alpha, \beta, i] : \mathbb{Q}] = 2^{m+1}$ , em que  $\mathbb{Q}[\alpha, \beta, i] \subset \mathbb{C}$ .

Tomando  $\zeta = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p} = \alpha + i\beta \in \mathbb{Q}[\alpha, \beta, i]$ , temos que  $\mathbb{Q}[\zeta] \subset \mathbb{Q}[\alpha, \beta, i]$  e  $[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}] = 2^r$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$ .

Como  $\zeta$  é uma das raízes de  $q(x) = x^p - 1$ ,  $\zeta \neq 1$  e como  $q(x) = (x - 1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)$ , segue que  $\zeta$  é raiz do polinômio  $s(x) = (x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)$ . Como  $s(x)$  é mônico e irredutível em  $\mathbb{Q}$ , segue que  $s(x) = \text{irr}[\zeta, \mathbb{Q}]$ .

Como  $[\mathbb{Q}[\zeta] : \mathbb{Q}] = 2^r$  e  $\partial(\text{irr}[\zeta, \mathbb{Q}]) = p - 1$ , segue que  $p - 1 = 2^r$ , isto é,  $p = 2^r + 1$ .

O que precisamos mostrar agora é que  $r = 2^s$  para algum  $s \in \mathbb{N}$ . Se  $t$  é um fator ímpar de  $r$ , com  $t > 1$ , temos  $r = t \cdot v$ . Daí, segue que  $p = 2^r + 1 = (2^v)^t + 1$ , tal que  $t$  é ímpar maior que 1 e, dessa forma, teríamos

$$p = (2^v + 1)((2^v)^{t-1} - (2^v)^{t-2} + (2^v)^{t-3} - \dots \pm 1),$$

o que contradiz o fato de  $p$  ser primo. Com isso, chegamos ao resultado desejado. ■



# Proposta de trabalho

---

Trazemos agora algumas sugestões de construções com régua e compasso para serem trabalhadas em sala de aula no ensino fundamental. Tal proposta engloba algumas construções selecionadas de acordo com o ano letivo, mas isso não deve ser tratado como exclusivo de tal ano. Além disso, algumas dessas construções estão diretamente relacionadas a outros componentes curriculares, como Geografia, Artes e Ensino Religioso.

Essas atividades abordam situações que não foram diretamente tratadas nos capítulos anteriores, mas que podem servir de inspiração para fomentar justamente o interesse em aprender a manipular a régua e o compasso, além do desafio de conseguir construir as figuras propostas.

Para tentar atingir tal objetivo, as construções deste capítulo não irão trazer o passo a passo tão característico dos capítulos anteriores, mas sim a construção em 4 etapas, fazendo com que o aluno analise a figura em momentos distintos e procure relacioná-las às construções apresentadas, principalmente, nos capítulos 2 e 3.

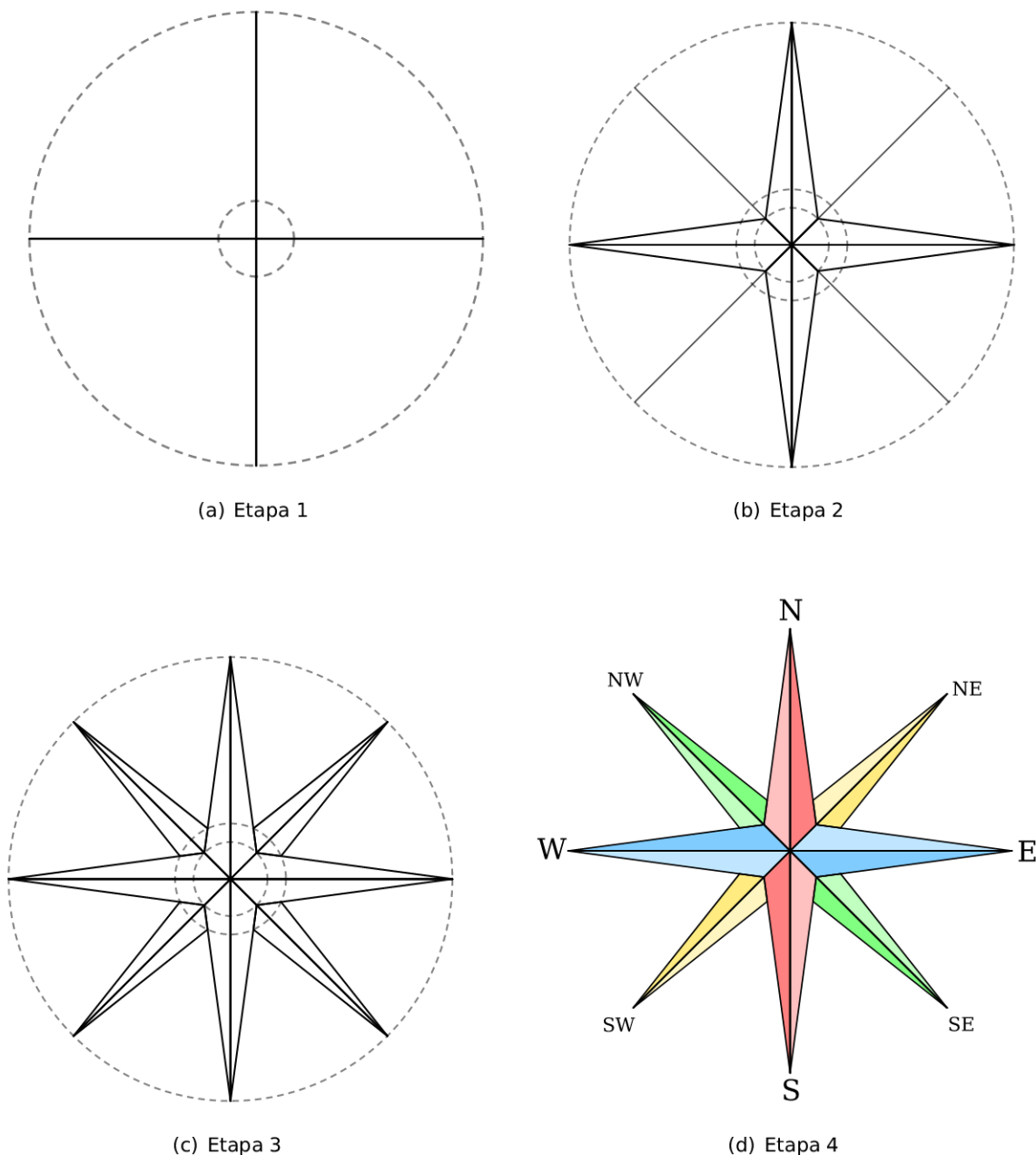
### 5.1 Atividades para o 6º ano

Uma das vantagens em abordar as construções com régua e compasso já no início do ensino fundamental 2 é fazer com que os alunos tenham familiaridade em manipular os instrumentos de desenho, especialmente o compasso.

A primeira atividade proposta tem relação com o componente curricular Geografia. Nesta série, os alunos trabalham muito com mapas e a consequente orientação por meio da “rosa dos ventos”, cuja construção envolve o uso de régua e compasso.

### 5.1.1 Construção da rosa dos ventos

Para realizar a construção dessa figura, já serão inseridos para os alunos as ideias relativas a diâmetro de um círculo, construção de perpendiculares, além de bissetrizes. A seguir, são apresentadas quatro etapas dessa construção, sendo que a última já apresenta a figura devidamente construída. As linhas tracejadas durante a construção indicam construções que serão apagadas.



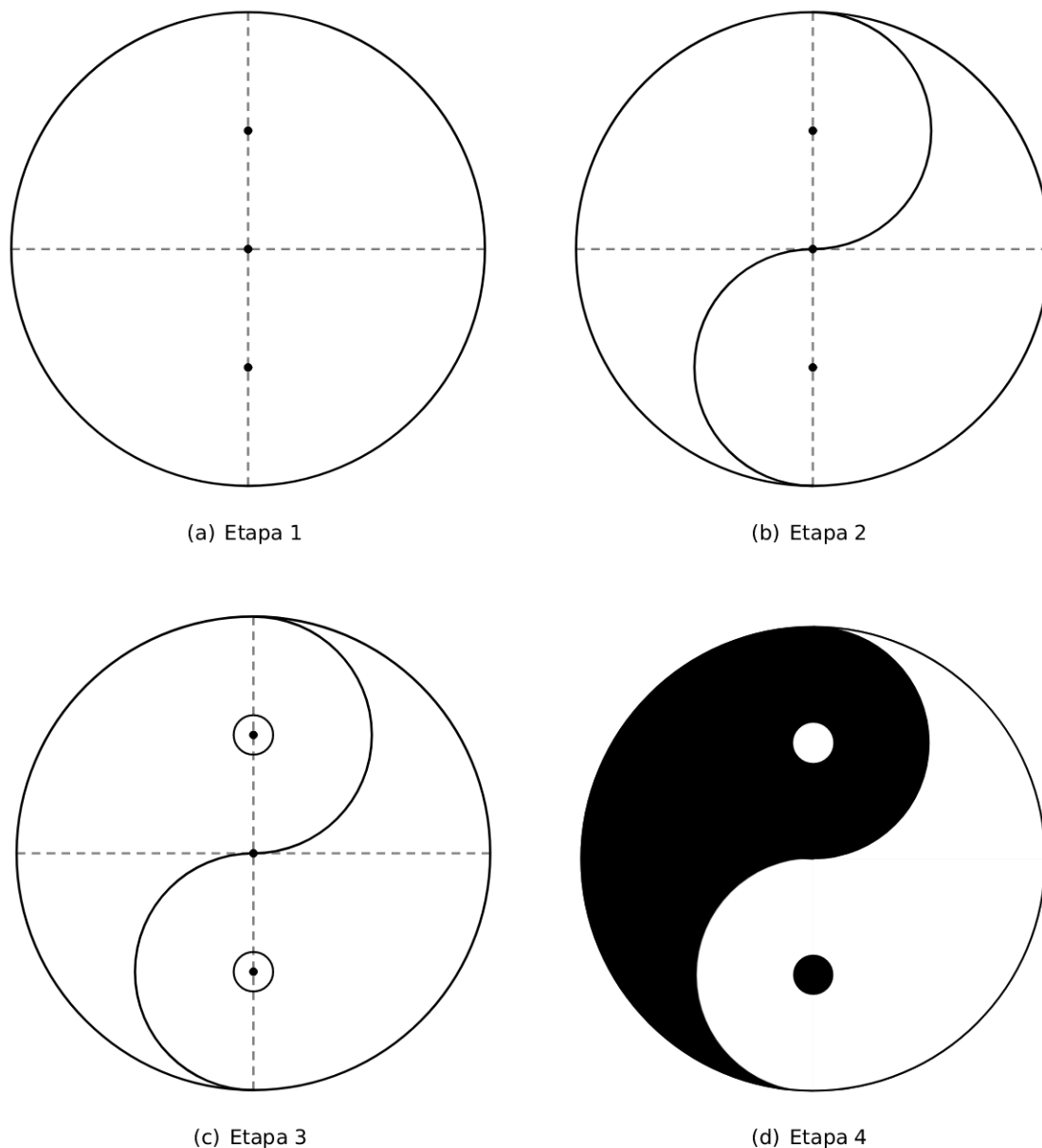
**Figura 5.1:** Construção da rosa dos ventos em 4 etapas.

As duas próximas figuras estão relacionadas com o componente curricular Ensino Religioso que, nesta série em questão, trabalha com os símbolos. Sendo assim, é pertinente trabalhar com os alunos a construção de alguns desses símbolos. Como exemplo, são apresentadas as construções do símbolo Yin-Yang e da Estrela de Davi. Para cada uma das figuras, são apresentadas algumas etapas relativas a

cada construção, sendo que a última já apresenta a figura devidamente construída. As linhas tracejadas durante a construção indicam construções que serão apagadas.

### 5.1.2 Construção do símbolo Yin-Yang

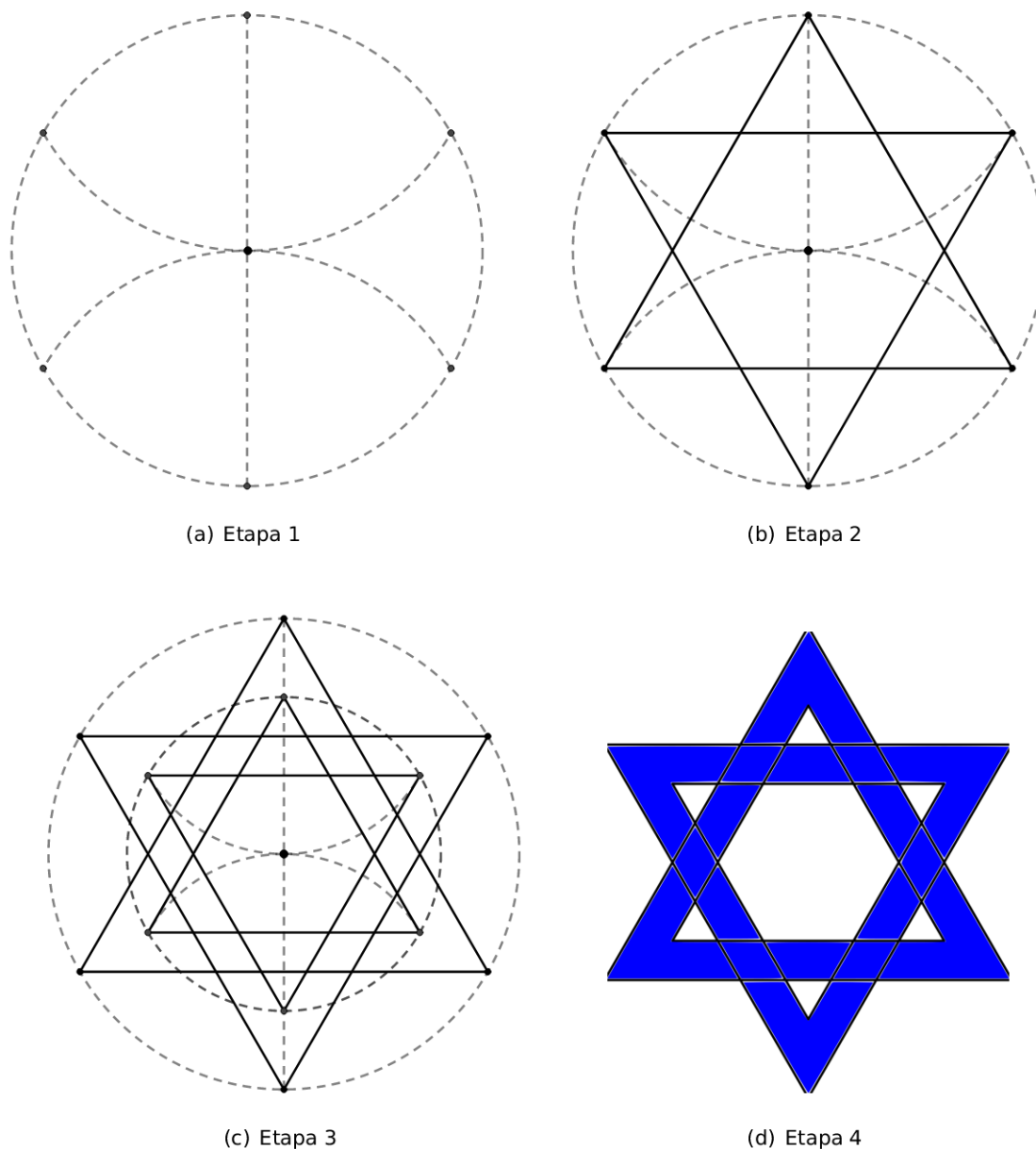
Para realizar a construção do símbolo do Yin-Yang, além da construção de circunferências, são necessárias as ideias de construção de retas perpendiculares e da construção do ponto médio de um segmento.



**Figura 5.2:** Construção do símbolo Yin-Yang em 4 etapas.

### 5.1.3 Construção da Estrela de Davi

Para realizar a construção da Estrela de Davi, além da construção de circunferências e de arcos, são necessárias as ideias de construção de triângulos equiláteros.



**Figura 5.3:** Construção da Estrela de Davi em 4 etapas.

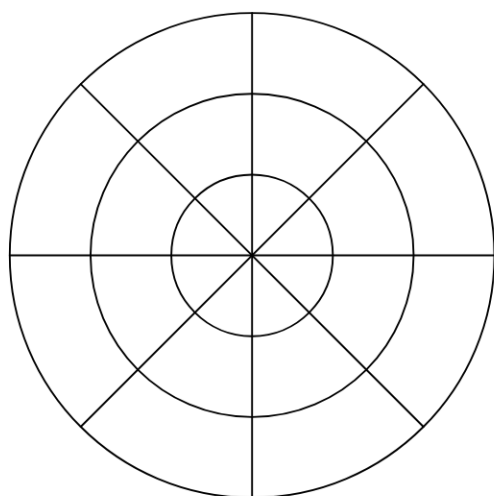
## 5.2 Atividades para o 7º ano

Nesta série, é interessante que o aluno continue a desenvolver suas habilidades no manuseio do compasso e para isso algumas atividades podem ser desenvolvidas, como a criação de mandalas, além de algumas atividades interdisciplinares com o componente curricular Ensino Religioso. A seguir, é apresentada, em quatro etapas, a construção de uma mandala de forma relativamente simples. Trabalhar

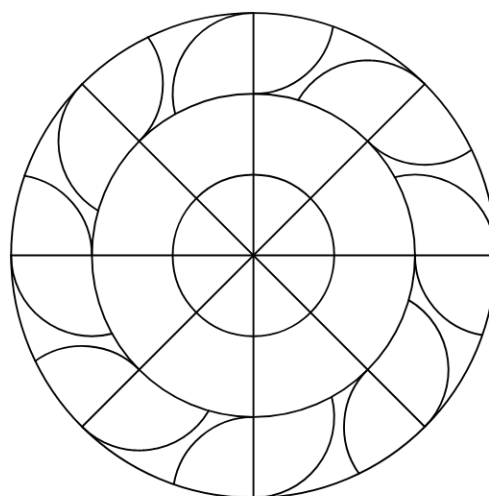
esse tipo de atividade aguça a curiosidade do aluno e estimula a criatividade, visto que é possível perceber a infinidade de mandalas que podem ser construídas, utilizando apenas elementos tão simples quanto círculos e diâmetros.

### 5.2.1 Construção de uma mandala

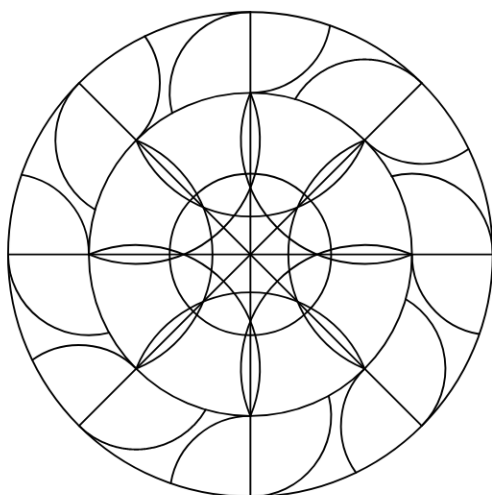
A criação de mandalas trabalha muito a criatividade por parte dos alunos. Geralmente, há uma utilização mais livre por parte dos instrumentos, tentando obter simetria na figura final. No exemplo fornecido pela figura a seguir, é esperado que o aluno saiba construir perpendiculares, bissetrizes, circunferências concêntricas e arcos congruentes.



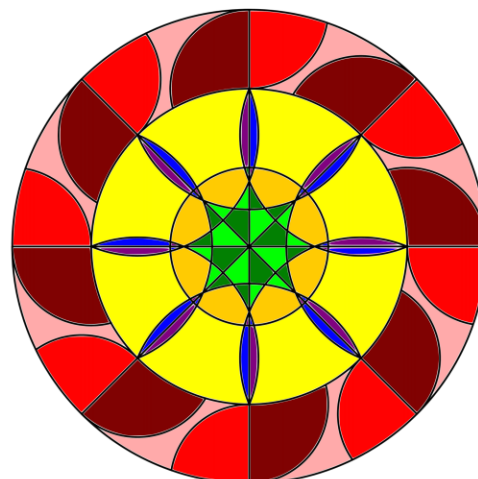
(a) Etapa 1



(b) Etapa 2



(c) Etapa 3

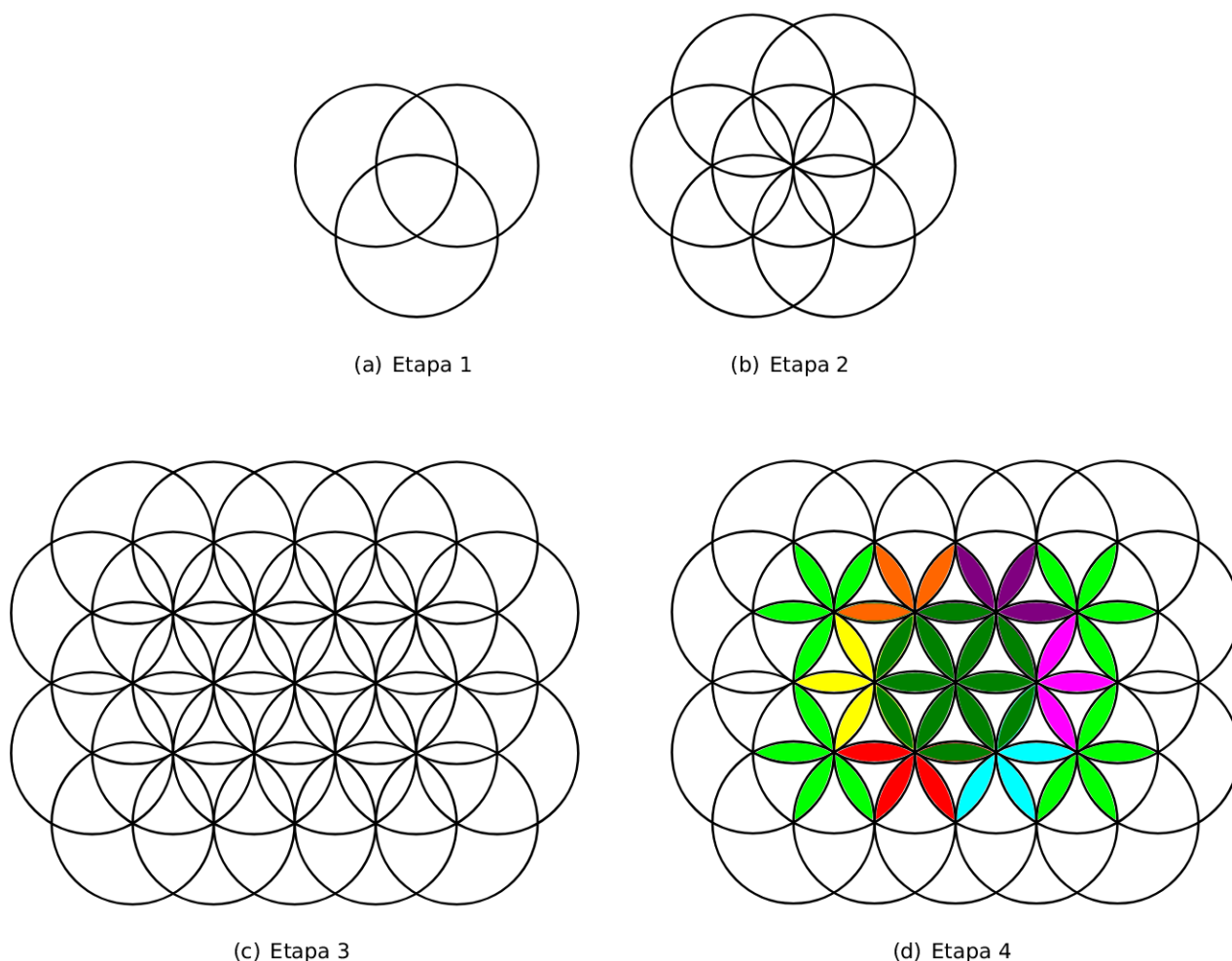


(d) Etapa 4

**Figura 5.4:** Construção de mandalas em 4 etapas.

### 5.2.2 Construção da Flor da vida

Para realizar a construção dessa figura é esperado que o aluno saiba utilizar convenientemente as interseções entre duas circunferências para traçar circunferências congruentes.



**Figura 5.5:** Construção da Flor da vida em 4 etapas.

### 5.3 Atividades para o 8º ano

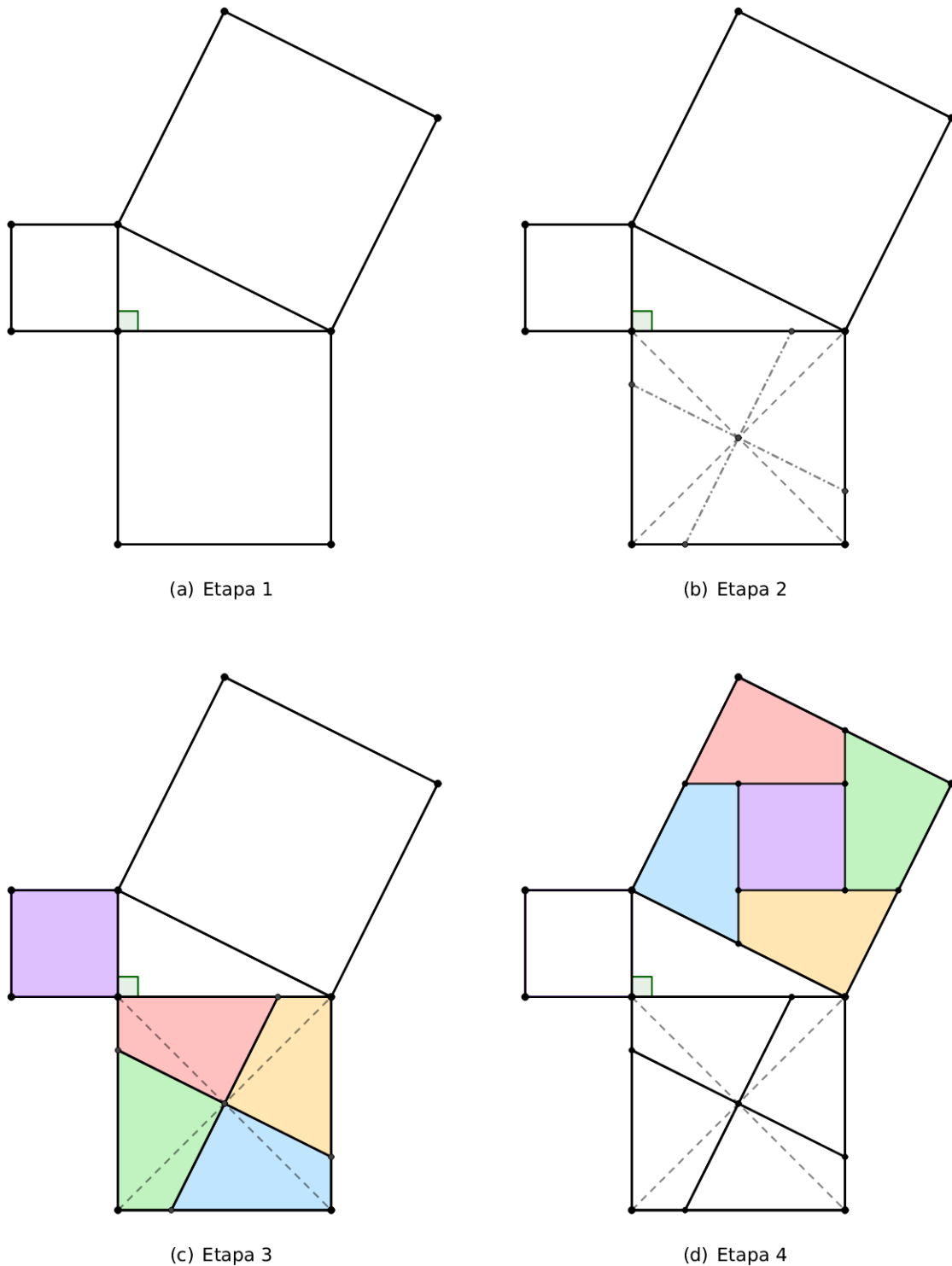
Uma atividade interessante a ser trabalhada nesta série refere-se à construção de um triângulo retângulo qualquer e de quadrados a partir dos lados desse triângulo, visando à interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras e sua relação envolvendo a área desses quadrados.

Utilizando o método de Perigal, podemos dividir o quadrado formado sobre um de seus catetos em quatro partes de modo que essas, em conjunto com o quadrado formado sobre o outro cateto, podem ser realocados cobrindo perfeitamente a superfície da área do quadrado construído a partir da hipotenusa.

Para um maior aprofundamento sobre esse método e a vida de Perigal, sugerimos ver a referência [15].

### 5.3.1 Construção do quebra-cabeça relativo ao Teorema de Pitágoras

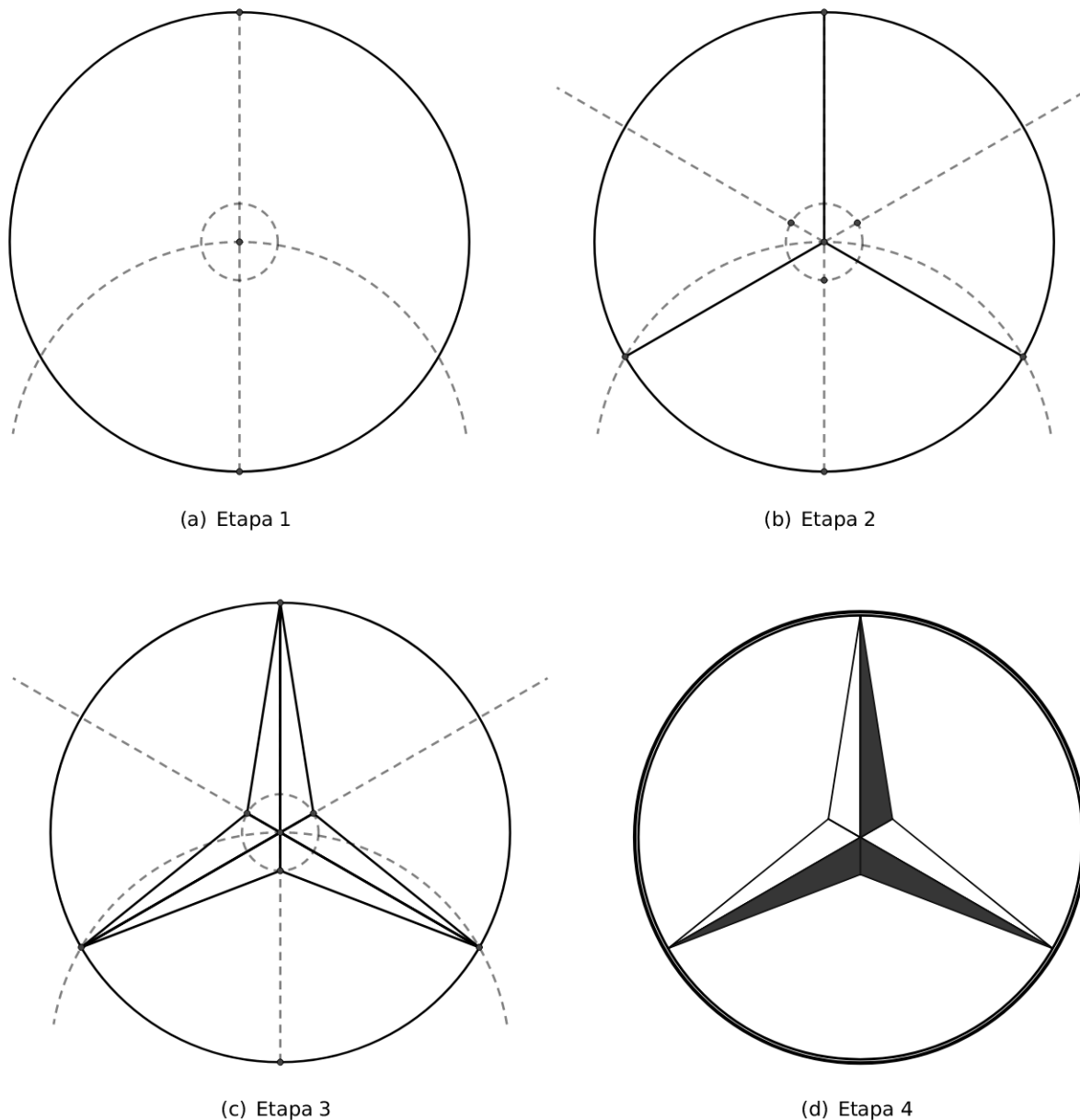
Para confeccionar essa figura é necessário que o aluno perceba a construção das diagonais do quadrado para localizar o seu centro e, passando por ele, construa duas retas perpendiculares, de modo que essas sejam paralelas aos lados do quadrado formado sobre a hipotenusa.



**Figura 5.6:** Representação geométrica do Teorema de Pitágoras pelo método de Perigal em 4 etapas.

### 5.3.2 Construção da logomarca da Mercedes-Benz

Para construir essa figura é necessário que o aluno saiba a ideia de inscrever um triângulo equilátero em uma circunferência, além do conhecimento sobre circunferências concêntricas e do traçado de bissetrizes.



**Figura 5.7:** Construção da logomarca da Mercedes em 4 etapas.

## 5.4 Atividades para o 9º ano

As atividades aqui propostas estão relacionadas ao retângulo de ouro e às espirais matemáticas de ouro e de Arquimedes. Assim como em situações anteriores, as linhas tracejadas durante a construção indicam imagens que serão apagadas.



### 5.4.1 Construção do retângulo de ouro

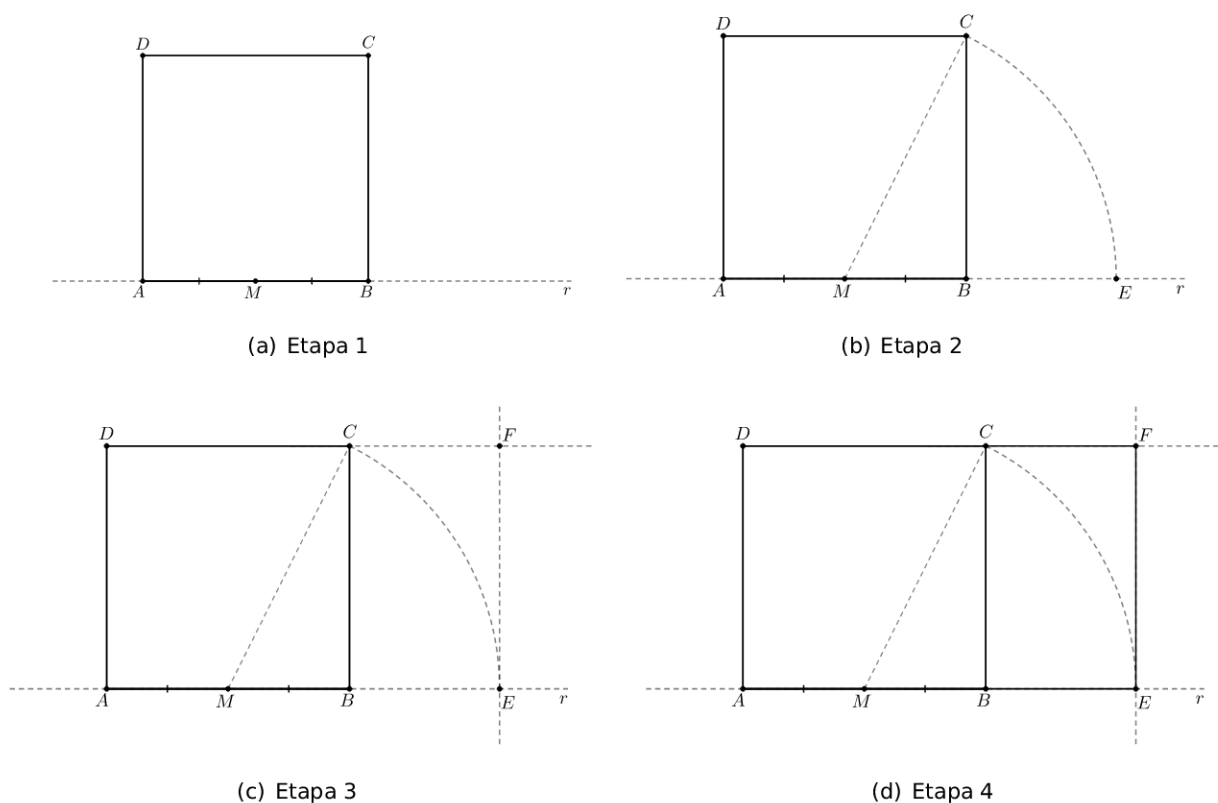


Figura 5.8: Construção do retângulo de ouro em 4 etapas.

### 5.4.2 Construção da espiral de ouro

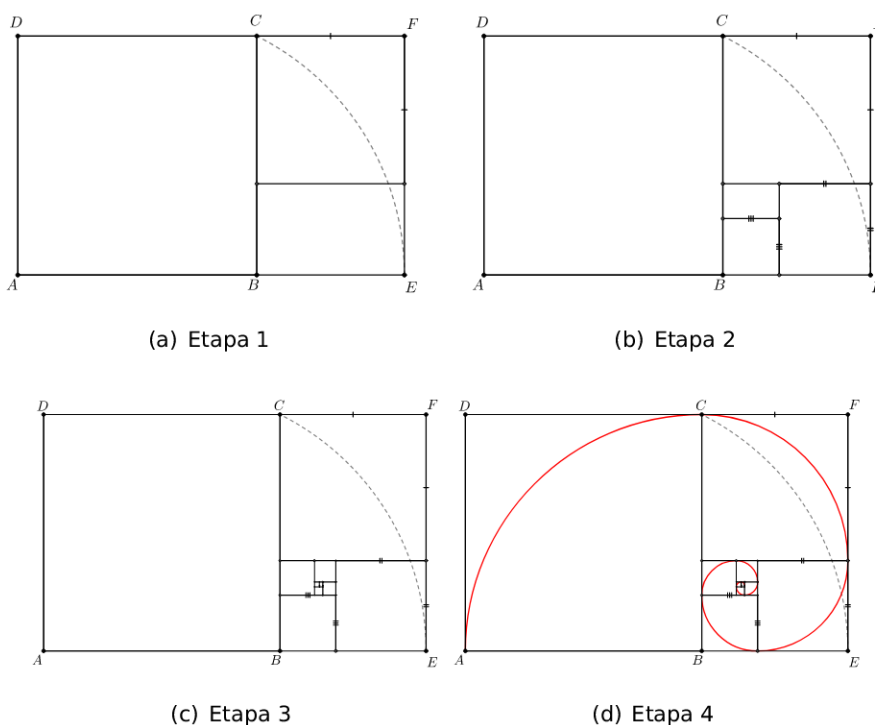


Figura 5.9: Construção da espiral de ouro em 4 etapas.

## 5.4.3 Construção da espiral de Arquimedes

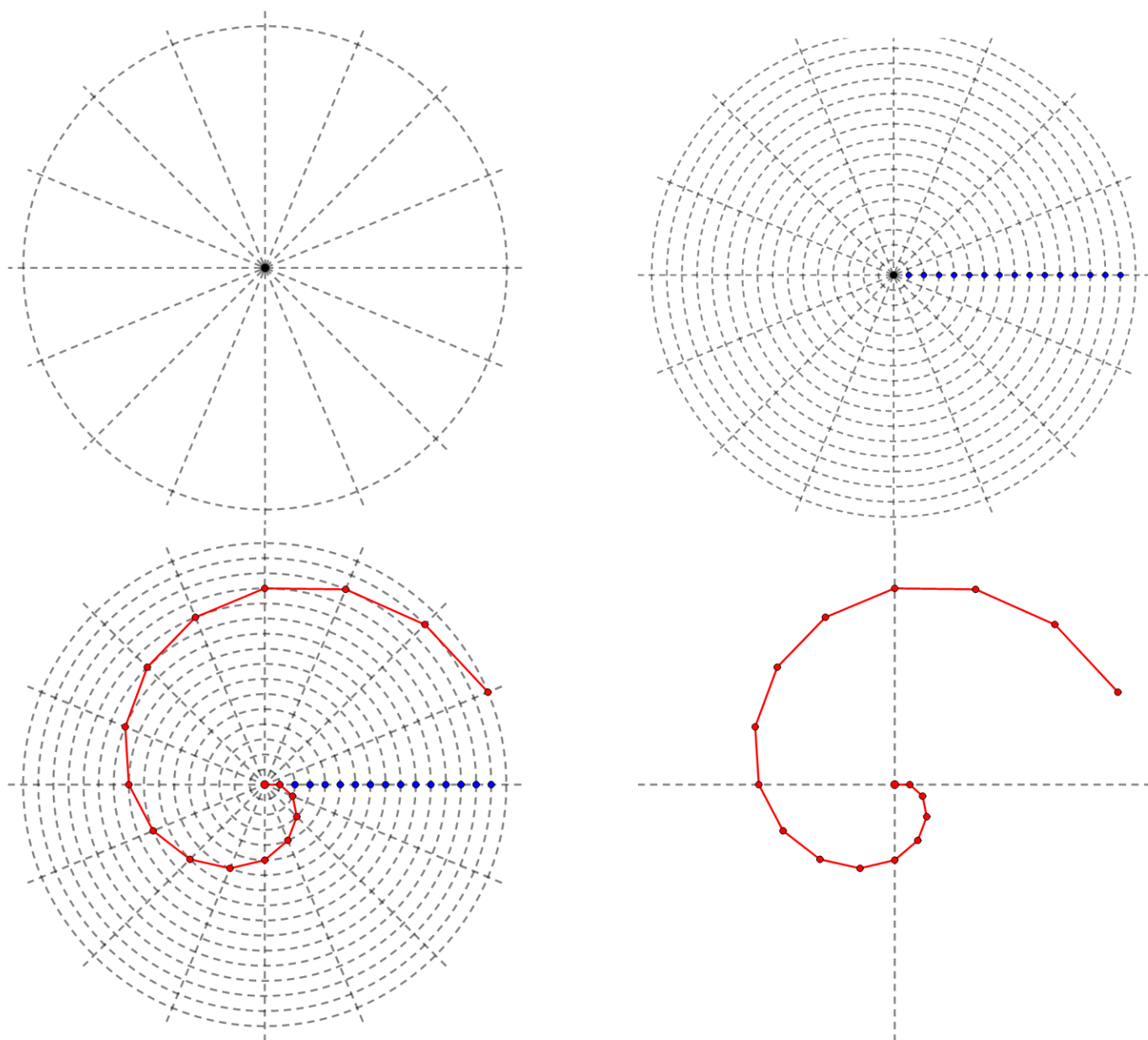


Figura 5.10: Construção da espiral de Arquimedes em 4 etapas.

### Considerações finais

---

A pandemia do SARS-CoV-2 impediu a implementação da proposta de trabalho apresentada no capítulo anterior nas salas de aula. Porém, atividades similares a essa já foram realizadas pelo autor em anos anteriores. O resultado obtido e as respostas dadas pelos alunos naquele momento foram muito satisfatórias. O claro entusiasmo por parte dos alunos em aprender a manipular a régua e o compasso, em vencer desafios durante a realização das atividades e o consequente desenvolvimento da criatividade que tais atividades promovem foram, sem dúvida, resultados observados que nos motivaram a apresentar tais atividades no capítulo anterior como uma proposta para colegas que lecionam nas séries finais do ensino fundamental 2. Não adianta esperarmos que os alunos do ensino médio, que estão totalmente focados em preparar-se para os vestibulares, irão demonstrar empenho e dedicação na realização de atividades que envolvem construções com régua e compasso, caso o interesse por elas não seja plantado e desenvolvido durante o ensino fundamental, mais especificamente do 6º ao 9º anos.

Além disso, a aplicação das atividades do Capítulo 5 dará ao professor a garantia de estar atendendo aos requisitos propostos pela BNCC e descritos no Capítulo 1, envolvendo construções com régua e compasso, permitindo ao aluno ser capaz de:

- construir circunferências utilizando compasso, reconhecendo-nas como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes;
- construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ ;
- descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso;

- descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Por fim, nos dias atuais, é muito válido utilizar também o *Geogebra*, pois a tecnologia deve ser uma aliada à nossa prática didática. Assim, talvez seja aconselhável, num primeiro momento, ensinar o aluno a construir as figuras, utilizando apenas as ferramentas mais básicas do software, que simulam a utilização da régua não graduada e do compasso, similar ao que fora apresentado no passo a passo das construções ao longo dessa obra. Assim, gradativamente, tendo em vista verificações de conceitos e práticas assimilados, conduzir ao uso de ferramentas pré-programadas como por exemplo, a construção de paralelas, perpendiculares, bissetrizes, mediatrizes, dentre outros, numa perspectiva de estudantes e educadores criativos, investigativos, inovadores e transformadores.

## Raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 2$

Durante a discussão do Exemplo 4.11, afirmamos que o polinômio  $p(x) = x^3 - 2$  não possui raízes em  $\mathbb{Q}$ , mas se considerarmos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ , teremos, respectivamente, uma raiz ( $\sqrt[3]{2}$ ) e três raízes  $\left( \sqrt[3]{2}, \frac{-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\sqrt{3}i}{2} \text{ e } \frac{-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}\sqrt{3}i}{2} \right)$ . O que vamos fazer agora é verificar que esses valores são realmente as raízes desses polinômio.

A raiz  $x_1 = \sqrt[3]{2}$  pode ser facilmente obtida, isolando  $x$  na equação  $x^3 - 2 = 0$ . Note que  $x_1$  é um número real, mas não é racional.

Para encontrar as outras raízes, utilizaremos as relações de Girard para equações polinomiais de 3º grau. Tais relações, que podem ser encontradas em [13, p. 116], são dadas por:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

sendo  $x_1, x_2$  e  $x_3$  as raízes do polinômio  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

Substituindo os valores dos coeficientes e o valor de  $x_1$  nas equações do sistema (A.1), temos

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2} + x_2 + x_3 = 0 \\ \sqrt[3]{2} \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \sqrt[3]{2} \cdot x_3 = 0 \\ \sqrt[3]{2} \cdot x_2 \cdot x_3 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 + x_3 = -\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2} \cdot (x_2 + x_3) + x_2 \cdot x_3 = 0 \\ x_2 \cdot x_3 = \sqrt[3]{4} \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

Utilizando a primeira e a terceira equações do sistema (A.2), montamos o sistema

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -\sqrt[3]{2} \\ x_2 \cdot x_3 = \sqrt[3]{4} \end{cases} \quad (\text{A.3a})$$

$$\begin{cases} x_2 \cdot x_3 = \sqrt[3]{4} \end{cases} \quad (\text{A.3b})$$

e, utilizando a equação (A.3a), concluímos que  $x_3 = -\sqrt[3]{2} - x_2$ . Substituindo esse valor em (A.3b), chegamos à conclusão de que  $x_2 \cdot (-\sqrt[3]{2} - x_2) = \sqrt[3]{4}$ , ou seja,  $x_2^2 + \sqrt[3]{2}x_2 + \sqrt[3]{4} = 0$ .

Resolvendo essa equação quadrática na variável  $x_2$ , com coeficientes  $a = 1$ ,  $b = \sqrt[3]{2}$  e  $c = \sqrt[3]{4}$ , temos:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c \\ &= (\sqrt[3]{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{4} \\ &= \sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4} \\ &= -3\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{4}}}{2} \\ &= \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt[6]{-108}}{2} \\ &= \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt[6]{2^2 \sqrt[6]{-3^3}}}{2} \\ &= \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt[3]{2} \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

Com isso, podemos utilizar novamente a equação obtida a partir de (A.3a), para calcularmos o valor de  $x_3$ :

• se  $x_2 = \frac{-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2}$ , então

$$\begin{aligned} x_3 &= -\sqrt[3]{2} - x_2 \\ &= -\sqrt[3]{2} - \left( \frac{-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \right) \\ &= -\sqrt[3]{2} + \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{-2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

• se  $x_2 = \frac{-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2}$ , então

$$\begin{aligned} x_3 &= -\sqrt[3]{2} - x_2 \\ &= -\sqrt[3]{2} - \left( \frac{-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \right) \\ &= -\sqrt[3]{2} + \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{-2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

Com isso, podemos concluir que o polinômio  $p(x) = x^3 - 2$  possui como raízes os números  $\left( \sqrt[3]{2}, \frac{-\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \text{ e } \frac{-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \sqrt{3}i}{2} \right)$ .

---

# Referências Bibliográficas

---

- [1] Barbosa, J. L. M.: *Geometria Euclidiana Plana*, vol. 1. SBM, 11ª ed., 2012.
- [2] Bicudo, I.: *Os Elementos - Euclides*, vol. 1. Unesp, 2009.
- [3] Boyer, C. B.: *História da Matemática*, vol. 1. Edgard Blüsher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- [4] Brasil, M. E.: *Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Ensino Fundamental - Anos Finais*, vol. 1. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 3ª ed., 2017.
- [5] Coelho, F. U. e Lourenço, M. L.: *Um curso de álgebra linear*, vol. 1. EdUSP, 2ª ed., 2018.
- [6] Costa, V. C. da: *Números Construtíveis*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Campina Grande, 2013.
- [7] Dolce, O. e Pompeo, J. N.: *Fundamentos de matemática elementar: geometria plana*, vol. 9. Atual, 9ª ed., 2013.
- [8] Educação MG, S. de Estado de: *Plano de estudo tutorado - 9º ano, vol3, 2021*. <https://estudeemcasa.educacao.mg.gov.br/pets/ens-fund-anos-finais-2021>, acesso em 16/12/2021.
- [9] Eves, H.: *Introdução à História da Matemática*, vol. 1. Unicamp, 5ª ed., 2011.
- [10] Freitas, J. M.: *Os três problemas clássicos da Matemática grega*. Dissertação de Mestrado, UNESP - São José do Rio Preto, 2014.
- [11] Gonçalves, A.: *Introdução à Álgebra*, vol. 1. IMPA, 1979.
- [12] Gusmai, R. M.: *Um estudo sobre três problemas clássicos da geometria euclideana*. Dissertação de Mestrado, USP - São Carlos, 2016.
- [13] Iezzi, G.: *Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios e equações*, vol. 6. Atual, 8ª ed., 2013.

- [14] Kleber Kilhian: *Divisão de um Segmento de Reta em  $n$  Partes Iguais*. <https://www.obaricentrodamente.com/2010/10/divisao-de-um-segmento-em-n-partes.html>, acesso em 06/09/2021.
- [15] Kleber Kilhian: *Teorema de Pitágoras - Método de Perigal*. <https://www.obaricentrodamente.com/2018/11/teorema-de-pitagoras-metodo-de-perigal.html>, acesso em 03/12/2021.
- [16] Neto, A. C. M.: *Coleção PROFMAT: Geometria*, vol. 1. SBM, 1ª ed., 2013.
- [17] OBMEP, C. de Matemática da: *Medianas de um triângulo*. <http://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-medianas-de-um-triangulo/>, acesso em 24/02/2022.
- [18] Precioso, J.C. e Pedroso, H.A.: *Construções euclidianas e o desfecho de problemas famosos da geometria*. Revista Ciências Exatas e Naturais, v. 13, n. 2, p. 163-183, 2011.
- [19] Souza, M. A. de: *Introdução à Teoria de Galois*, 2017. Monografia de Graduação.