



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Números complexos e a construtibilidade do heptadecágono regular: Uma proposta educacional para o ensino médio

TIAGO MONTEIRO ALVES

Bragança

2021

TIAGO MONTEIRO ALVES

Números complexos e a construtibilidade do heptadecágono regular: Uma proposta educacional para o ensino médio

Dissertação de Mestrado apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre.

Área de concentração: Construções geométricas

Orientador: Prof. Dr. Edson Jorge de Matos

Bragança

2021

Dados para Catalogação na Fonte
Setor de Processamento Técnico
Biblioteca UFPA - Campus Bragança

C186e Alves, Tiago Monteiro.
Números complexos e a construtibilidade do heptadecágono regular:
Uma proposta educacional para o ensino médio / Tiago Monteiro Alves. –
Bragança, 2021.
56 f.

Impresso por computador.

Orientador: Prof. Dr. Edson Jorge de Matos.

Dissertação de Mestrado — Universidade Federal do Pará – UFPA, 2021.

1. Geometria . 2. Construções geométricas. 3. Números complexos. 4. Polígono de
17 lados. I. Matos, Edson, *orient.* II. UFPA III. Título.

CDD: 515.7

TIAGO MONTEIRO ALVES

**NÚMEROS COMPLEXOS E A CONSTRUTIBILIDADE DO HEPTADECÁGONO
REGULAR: UMA PROPOSTA EDUCACIONAL PARA O ENSINO MÉDIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Pará - Bragança, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data da aprovação: 17 / 12 / 2021.

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA:

Edson Jorge de Matos

Prof. Dr. Edson Jorge de Matos
PROFMAT UFPA BRAGANÇA Presidente

Marcos Lázaro de Souza Albuquerque

Prof. Dr. Marcos Lázaro de Souza Albuquerque
PROFMAT UFPA BRAGANÇA Interno

Elizardo Fabricio Lima Lucena

Prof. Dr. Elizardo Fabricio Lima Lucena
UFPA BRAGANÇA Externo ao Programa

Andréia Gomes Pinheiro

Profa. Dra. Andréia Gomes Pinheiro
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PARÁ Externo à Instituição

Dedico este trabalho à Florêncio dos Anjos
Alves (In Memoriam) .

— TIAGO MONTEIRO ALVES

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, o qual não mereço, mas que pela sua infinita misericórdia, me foi dado.

Agradeço também a Francisca Cardoso Monteiro, minha querida mãe, por sempre acreditar que este momento se concretizaria; à Florêncio dos Anjos Alves, meu inesquecível pai, que fez sacrifícios além de suas forças para me proporcionar o que de melhor existia dentro de suas possibilidades; à minha esposa Maria de Nazaré de Sousa Silva por me apoiar sem reservas nos momentos de dificuldade; à minha filha Thalissa Melissa Silva Alves, o presente mais maravilhoso que já recebi em minha existência.

Ao professor e amigo Elizardo Fabrício Lima Lucena por fazer parte primordial da realização deste trabalho e também da minha formação como professor.

Aos colegas e amigos de curso da primeira turma de mestrado profissional em matemática da UFPA - Campus Bragança - Aldair Monteiro de Sousa, Alexandre Rodrigues da Silva, Ângelo César Ribeiro Rodrigues, Benedito José da Silva Pinheiro, Camila Araújo Peres de Sousa, Edilson Alves de Assis, Enilson José Sousa Cunha, Felipe Lima Cavalcante, Francisco Claudeniz Barbosa de Oliveira, Jackson Roberto Carvalho de Sousa, Ozival Rodrigues dos Reis, Paulo Alexandre Mota do Nascimento, Renan da Silva Fraz e Wallace Monteiro de Amaral por me proporcionarem momentos ímpares de alegria, conforto e aprendizagem, momentos que levarei para a vida toda.

Aos professores Marcos Lázaro De Sousa Albuquerque, Marly dos Anjos Nunes, João dos Santos Protázio (In Memoriam), Carlos Alessandro Da Costa Baldez, Glauco Lira Pereira, Leandro Santos Ribeiro, Maria Augusta Raposo De Barros Brito e Alessandra Mariana Dos Santos Oliveira, por compartilharem daquilo que, na minha opinião, é mais precioso do que o mais fino ouro e diamantes: O conhecimento.

Agradeço ao orientador deste trabalho, Prof. Dr. Edson Jorge de Matos, por sua acolhida, apoio e luz em momentos tempestuosos e escuros. Sua Ajuda e colaboração foram pilares de sustentação para a conclusão deste trabalho.

A todos que de alguma maneira auxiliaram em minha formação acadêmica e propiciaram-me aporte para a elaboração deste trabalho, meus mais sinceros agradecimentos.

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta.”

Gauss - Carl Friedrich.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivos mostrar a construtibilidade com régua e compasso do heptadecágono regular e propor uma atividade de ensino para alunos do 3º ano do ensino médio. Para isso, como pré-requisitos: apresenta a definição de números complexos; apresenta a construção de alguns segmentos construtíveis usando apenas régua e compasso; apresenta construção do heptadecágono regular e sua justificativa e por fim apresenta uma proposta que se traduz em uma sequência de aulas voltada para alunos do 3º ano do ensino médio abordando parte do conteúdo deste trabalho.

Palavras-chaves: números complexos, régua e compasso, heptadecágono regular.

ABSTRACT

This work aims to show the constructibility with a ruler and compass of the regular heptadecagon and to propose a teaching activity for students in the 3rd year of high school. For this, as prerequisites presents and definition of complex numbers; presents the construction of some constructible segments using only ruler and compass; It presents the construction of the regular heptadecagon and its justification, and finally presents a proposal that translates into a sequence of classes aimed at students in the 3rd year of high school, covering part of the content of this work.

Key-words: complex numbers, ruler and compass, regular heptadecagon.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	2
2	NÚMEROS COMPLEXOS - UMA PEQUENA INTRODUÇÃO	3
2.1	Um pouco de história	3
2.2	A forma algébrica	3
2.3	Potências da unidade imaginária	5
2.4	A forma trigonométrica de um número complexo	9
2.5	Interpretação geométrica da multiplicação de complexos	16
2.6	Raízes da unidade	17
3	RÉGUA E COMPASSO	21
3.1	Alguns segmentos contrutíveis	22
3.2	Segmentos Proporcionais	23
3.3	A Secção Áurea	28
3.4	Construção dos lados do decágono e do pentágono regular	31
4	A CONSTRUTIBILIDADE DO HEPTADECÁGONO REGULAR	34
4.1	Justificativa da construção do heptadecágono regular	40
5	PROPOSTA DE APLICAÇÃO	47
6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	55
6.1	Considerações Finais	55
	REFERÊNCIAS	56

1 INTRODUÇÃO

Construir polígonos regulares sempre esteve no rol dos problemas que despertaram grande interesse dos matemáticos de todos os tempos. Ao focar nosso olhar para a Grécia antiga, considerada berço da geometria como ciência dedutiva, era comum os matemáticos darem soluções à problemas algébricos se valendo da geometria a medida que transformavam-nos em problemas geométricos e assim construírem suas soluções. Não se pode negar a habilidade que os gregos tinham em resolver os problemas por esse caminho. Todavia, surgiram problemas que perpetuaram por um longo período sem que sua solução fosse encontrada. Encabeçam a lista de tais famosos problemas a duplicação do cubo, a quadratura do círculo, a trisseção do ângulo e, como uma das consequências destes, a construção de polígonos regulares. Este trabalho tem como objetivo a construção de um polígono em particular: o heptadecágono regular, o qual foi resolvido por um dos maiores matemáticos de toda a história: Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o qual também era astrônomo e físico. Gauss resolveu este problema pouco antes de completar 19 anos. Até este momento da história só se sabia construir, usando apenas régua e compasso, o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono e os demais polígonos com número de lados iguais a $3 \cdot 2^n$, $4 \cdot 2^n$ e $5 \cdot 2^n$, mas nenhum outro polígono com número de lados primo. Gauss mostrou que um polígono regular de n lados, é construtível se e somente se, n for da forma $n = 2^b \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_r$, na qual cada p_i é um primo de Fermat.

Assim, este trabalho segue a linha de raciocínio que culmina na construção do heptadecágono regular com uma atividade proposta a alunos do 3º ano ensino médio. Com este propósito, o capítulo 2 traz uma abordagem de números complexos, onde definiremos a forma algébrica, potências da unidade assim como a forma trigonométrica, interpretação geométrica e raízes da unidade. Já o capítulo 3 versará sobre construções com régua e compasso dando ênfase a alguns segmentos construtíveis, segmentos proporcionais, passando pela secção áurea e finalizando com a construção dos lados do decágono e do pentágono regular. No capítulo 4, capítulo principal deste trabalho, será provada a construtibilidade do heptadecágono regular, junto com a construção do mesmo. Para finalizar apresentaremos uma proposta de aplicação em sala de aula voltada para alunos do 3º ano do ensino médio. Esperamos firmemente que este trabalho seja de alguma valia para o ensino da matemática nas escolas.

2 NÚMEROS COMPLEXOS - UMA PEQUENA INTRODUÇÃO

2.1 Um pouco de história

O matemático Jerônimo Cardano, nascido em Pávia na Itália, publicou em seu livro "*Ars Magna*" em 1545, um método para resolver equações de terceiro grau. Esse método é hoje conhecido como FÓRMULA DE CARDANO. Rafael Bombelli (1526 - 1572), em sua "*Álgebra*", aplicou a fórmula de Cardano à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ obtendo

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Mesmo com o sentimento leve de não aceitação às raízes quadradas de números negativos (segundo suas palavras eram "inúteis e sofisticadas"), Bombelli operava livremente com elas, aplicando-as as regras usuais da Álgebra. Bombelli mostrou que

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12 \cdot \sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \\ &= 2 + \sqrt{-121} \end{aligned}$$

Assim,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

e, analogamente,

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Portanto, o valor de x é $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Pelo fato de 4 ser realmente raiz da equação, a partir de Bombelli os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos, embora se sentissem um pouco desconfortáveis com isso. Bombelli trabalhava sistematicamente com a quantidade $\sqrt{-1}$, que hoje chamamos de unidade imaginária e representamos por i .

2.2 A forma algébrica

Chamamos de número complexo os números que tem a forma $x + yi$, com x e y reais e $i = \sqrt{-1}$.

Quando fixamos um sistema de coordenadas no plano, o complexo $z = x + yi$ pode ser representado pelo ponto $P(x, y)$. O ponto P é chamado de imagem do complexo z . Como a correspondência entre os complexos e suas imagens é um - a - um, frequentemente identificamos os complexos à suas imagens, escrevendo $(x, y) = x + yi$. Chamamos o plano no qual representamos os complexos de ARGAND - GAUSS.

Observe que os números que são representados no eixo dos x são da forma $(x, 0) = x + 0i = x$, isto é, são números reais. Assim, o eixo dos x é chamado *eixo real*. Analogamente,

como os complexos representados no eixo dos y são da forma $(0, y) = 0 + yi = yi$, eles são chamados de *imaginários puros*. As coordenadas x, y do complexo $z = x + yi$ são chamadas respectivamente de *parte real* e *parte imaginária* de z . Escreve-se $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.

Os complexos $z = x + yi$ e $z' = x' + y'i$ são iguais (por definição), se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$. Em particular, tem-se $x + yi = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$.

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 2.1 *Vamos efetuar algumas operações com alguns números complexos de acordo com as definições supracitadas*

$$(a) \quad (5 + 7i) + (3 - i) = 8 + 6i$$

$$(b) \quad (5 + 7i) - (3 - i) = 2 + 8i$$

(c)

$$\begin{aligned} (5 + 7i) \cdot (3 - i) &= 15 - 5i + 21i - 7i^2 \\ &= 15 + 16i - 7 \cdot (-1) \\ &= 15 + 16i + 7 \\ &= 22 + 16i \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} (5 + 7i)^2 &= 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7i + (7i)^2 \\ &= 25 + 70i + 49 \cdot (-1) \\ &= 25 + 70i - 49 \\ &= -24 + 70i \end{aligned}$$

O conjugado de um número complexo $z = x \pm yi$ é o número complexo $\bar{z} = x \mp yi$.

Percebe-se, de maneira simples, que complexos conjugados têm imagens simétricas em relação ao eixo real.

Observe o seguinte produto:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2 \quad (2.1)$$

Como este produto é um número real, utiliza-se-o na divisão de números complexos da seguinte maneira: para dividir dois complexos, multiplicamos dividendo e divisor pelo conjugado do divisor, o que transforma o problema em uma divisão por um número real. veja um exemplo:

$$\frac{5 + 7i}{3 - i} = \frac{5 + 7i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{15 + 5i + 21i + 7i^2}{3^2 - i^2} = \frac{15 + 26i - 7}{9 + 1} = \frac{8}{10} + \frac{26}{10}i \quad (2.2)$$

2.3 Potências da unidade imaginária

As potências de i apresentam um comportamento interessante. Veja o cálculo das oito primeiras potências de i .

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1; & i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^1 = i; & i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^2 = -1; & i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i \end{array}$$

Como pode-se perceber, estas potências repetem-se em ciclos de 4. De fato, $i^{n+4} = i^n \cdot i^4 = i^n \cdot 1 = i^n$. Este fato permite-nos estabelecer uma regra para o cálculo das potências de i :

Para calcular i^n , divida n por 4; Se r é o resto dessa divisão, temos $i^n = i^r$. Verdade pois, se q é o quociente da divisão, teremos

$$i^n = i^{4 \cdot q + r} = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

Exemplo 2.2 Vamos calcular $i^{12468451183}$

Solução: Basta determinar o resto da divisão de 12468451183 por 4. Para isso basta determinar o resto da divisão do número formado pelos dois últimos algarismos, no caso, 83 (aqui se faz presente o uso do critério de divisibilidade por 2^n). Assim, como 83 deixa resto 3 quando dividido por 4, teremos $i^{12468451183} = i^3 = -i$ ■

Exemplo 2.3 Vamos resolver a equação $z^2 - 2z + 10 = 0$

Solução: Para resolver este exemplo vamos aplicar a fórmula resolvente da equação do 2º grau:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ z &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} \\ z &= \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ z &= \frac{2 \pm 6i}{2} \\ z &= 1 \pm 3i \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.4 Determine as raízes quadradas de $5 - 12i$

Solução: Procuramos complexos $z = x + yi$ tais que $z^2 = 5 - 12i$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} z^2 &= (x + yi)^2 \\ z^2 &= x^2 + 2xyi + (yi)^2 \\ z^2 &= x^2 - y^2 + 2xyi \\ z^2 &= (x^2 - y^2) + 2xyi = 5 - 12i \end{aligned}$$

Complexos iguais têm coordenadas iguais. Daí,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

Pela segunda equação

$$y = -\frac{6}{x}$$

Substituindo na primeira, obtemos

$$x^2 - \left(-\frac{6}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Daí, $x^2 = 9$ ou $x^2 = -4$. Como x é real temos apenas duas possibilidades: $x = 3$ ou $x = -3$.

Como $y = -\frac{6}{x}$, obtemos $y = -2$ ou $y = 2$ respectivamente. As raízes são $3 - 2i$ e $-3 + 2i$

■

Exemplo 2.5 Identifique geometricamente o conjunto dos complexos da forma $z = t + t^2i$, quando o número real t varia de 0 a 1

Solução: É fácil ver que as coordenadas das imagens desses complexos são $x = t$ e $y = t^2$, com $0 \leq t \leq 1$. Os complexos procurados formam, portanto, o arco da parábola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$. ■

Teorema 2.1 Se z e w são complexos, então:

i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

ii) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

iv) Se $w \neq 0$ então $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

v) Se z é real então $z = \bar{z}$

vi) $\overline{\bar{z}} = z$

vii) Se n é um inteiro positivo, então $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Demonstração:

i) Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, então:

$$\begin{aligned}\overline{z + w} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} \\ &= \overline{a + bi + c + di} \\ &= \overline{a + c + bi + di} \\ &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= a + c - bi - di \\ &= a - bi + c - di \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \bar{z} + \bar{w}\end{aligned}$$

ii) Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, então:

$$\begin{aligned}\overline{z - w} &= \overline{(a + bi) - (c + di)} \\ &= \overline{a + bi - c - di} \\ &= \overline{a - c + bi - di} \\ &= \overline{(a - c) + (b - d)i} \\ &= (a - c) - (b - d)i \\ &= a - c - bi + di \\ &= a - bi - c + di \\ &= (a - bi) - (c - di) \\ &= \bar{z} - \bar{w}\end{aligned}$$

iii) $z = a + bi$ e $w = c + di$, então:

$$\begin{aligned}
 \overline{z \cdot w} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} \\
 &= \overline{ac + adi + bci + bdi^2} \\
 &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\
 &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\
 &= ac - bd - adi - bci \\
 &= ac - bd \cdot (-1) \cdot (-1) - adi - bci \\
 &= ac + bd \cdot i^2 - adi - bci \\
 &= a(c - di) - bi(c - di) \\
 &= (a - bi) \cdot (c - di) \\
 &= \overline{z \cdot w}
 \end{aligned}$$

iv) Sendo $w = c + di$, com c e d não nulos simultaneamente, então:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c + di} = \frac{1}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{c - di}{c^2 + d^2} \quad (2.3)$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{\overline{w}} = \frac{1}{c - di} \cdot \frac{c + di}{c + di} = \frac{c + di}{c^2 + d^2} \quad (2.4)$$

De 2.3 e 2.4, vem

$$\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\overline{w}}$$

Daí,

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

v) Sendo z real, então

$$z = a + 0i = a = a - 0i = \overline{z}$$

vi) Sendo $z = a + bi$, então

$$\overline{\overline{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a - (-bi) = a + bi = z$$

vii) Decorre da aplicação reiterada de iii). ■

Exemplo 2.6 Vamos resolver a equação $3z - \overline{z} = 4 + 12i$

Solução: Fazendo $z = x + yi$, teremos

$$\begin{aligned}
 3 \cdot (x + yi) - (x - yi) &= 4 + 12i \\
 3x + 3yi - x + yi &= 4 + 12i \\
 3x - x + 3yi + yi &= 4 + 12i \\
 2x + 4yi &= 4 + 12yi
 \end{aligned}$$

Daí, temos $x = 2$ e $y = 3$. Portanto $z = 2 + 3i$ e $\overline{z} = 2 - 3i$ ■

Teorema 2.2 Se $P(z)$ é um polinômio de coeficientes reais, então $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$

Demonstração: Se $P(z) = \sum_{k=0}^n A_k x^k$ com A_k real, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ temos que $A_k = \overline{A_k}$, pois A_k é real $\forall k$. Logo

$$P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n A_k \bar{x}^k = \sum_{k=0}^n \overline{A_k} \cdot \bar{x}^k = \sum_{k=0}^n \overline{A_k \cdot x^k} = \overline{\sum_{k=0}^n A_k \cdot x^k} = \overline{P(z)}$$

■

Corolário 2.1 Se um polinômio de coeficientes reais admite uma raiz complexa $a + bi$, com a e b reais, então ele admite também a raiz $a - bi$.

Demonstração: Se $P(a + bi) = 0 = 0 + 0i$, então, pelo teorema $P(a - bi) = 0 - 0i = 0$ ■

2.4 A forma trigonométrica de um número complexo

Fixemos um sistema de coordenadas no plano.

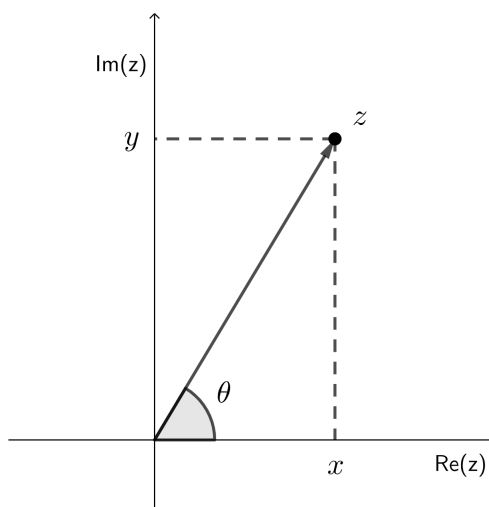
Agora representaremos cada complexo $z = x + yi$ não mais pelo ponto $P(x, y)$, mas sim pelo vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y)$.

Definimos o módulo de um número complexo $z = x + yi$ como sendo o módulo de vetor que o representa, isto é, é o valor r da distância de sua imagem P até a origem. Assim,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definimos um *argumento* do complexo $z = a + bi$, $z \neq 0$, como sendo qualquer dos ângulos

Figura 1 – plano dos complexos



Fonte: do Autor

$\theta = \arg z$ que o vetor \overrightarrow{OP} forma como semi-eixo positivo dos x . Obviamente todo complexo não nulo possui uma infinidade de argumentos, dois quaisquer deles diferindo entre si por um múltiplo de 2π . O argumento que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamado de argumento principal e é representado por $\text{Arg } z$.

Se θ é um argumento de $z = x + yi$ então $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, o que permite fazer

$$z = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

que é chamada de *forma trigonométrica* ou *polar* do complexo z . (Os números r e θ são as *coordenadas polares* do ponto $P(x, y)$ do plano.

Exemplo 2.7 Vamos escrever o complexo $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ na forma trigonométrica

Solução:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3$$

Além disso,

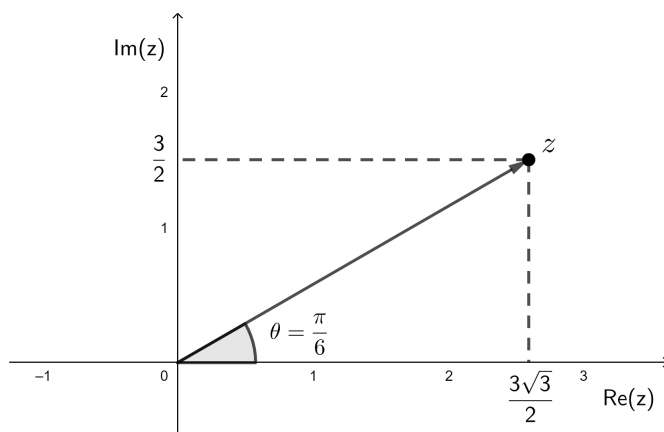
$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

Assim, um dos valores possíveis para θ é $\frac{\pi}{6}$ e a forma trigonométrica de z é

$$z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

■

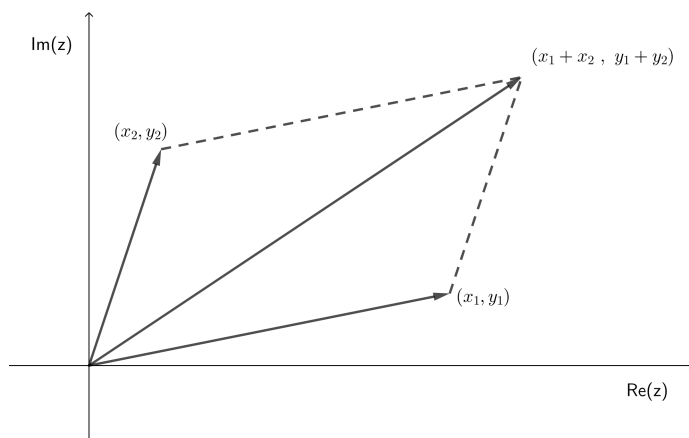
Figura 2 – forma trigonométrica de z



Fonte: do Autor

A soma (e a diferença) de dois complexos pode ser obtida somando-se (e subtraindo-se) os vetores que os representam. De fato, se $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$, então $z_1 + z_2 =$

Figura 3 – soma de complexos



Fonte: do Autor

$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$, que é representado pelo vetor $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ que é a soma dos vetores que representam z_1 e z_2 .

Decorrem daí dois fatos:

(i) Para números complexos vale a desigualdade triangular

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Realmente, se os vetores que representam z_1 e z_2 não têm a mesma direção, para somá-los formamos um triângulo com lados $|z_1|$, $|z_2|$ e $|z_1 + z_2|$. Como em um triângulo cada lado tem medida menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que a diferença das medidas dos outros dois

$$||z_1| - |z_2|| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$$

Por Outro lado, se os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido, $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Se tem a mesma direção e sentidos opostos, $||z_1| - |z_2|| = |z_1 + z_2|$. Portanto, em qualquer caso,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(ii) Se z_1 e z_2 são complexos, distância entre eles é igual a $|\overrightarrow{z_1 z_2}| = |z_2 - z_1|$. A distância entre dois complexos é igual ao módulo de sua diferença.

As operações com números complexos, exceto a adição e a subtração se fazem mais facilmente na forma polar do que algébrica, conforme mostraremos a seguir.

Teorema 2.3 Se $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + isen \theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + isen \theta_2)$, então

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$$

e, se $r_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2] \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

■

Para mostrar a segunda, basta mostrar que

$$\frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

multiplicado por z_2 é igual a z_1 . Ora, pelo que já provamos na primeira parte, para multiplicar devemos multiplicar os módulos e somar os argumentos. Como $\frac{r_1}{r_2} \cdot r_2 = r_1$ e $(\theta_1 - \theta_2) + \theta_2 = \theta_1$, temos

$$\frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \cdot z_2 = r_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = z_1$$

Daí decorre

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Note que

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

e

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\text{se } |z_2| \neq 0)$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

A igualdade $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ significa que qualquer argumento de $z_1 \cdot z_2$ é a soma de um argumento de z_1 com um argumento de z_2 e vice-versa.

A fórmula a seguir, para o cálculo de potências de um complexo, é conhecida com o nome de Fórmula de De Moivre, em honra de Abraham de Moivre (1667 - 1754).

Fórmula de De Moivre: Se n é inteiro,

$$[r \cdot (\cos \theta) + i \operatorname{sen} \theta]^n = r^n \cdot [\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta]$$

Demonstração: Para $n = 0$ ou $n = 1$, fórmula é óbvia. Para n inteiro maior que 1, a fórmula decorre da aplicação reiterada da fórmula da multiplicação.

Provemos a fórmula para o caso de n inteiro negativo.

Seja $n = -m$, com m inteiro e positivo. Temos

$$\begin{aligned}
 (r.[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta])^n &= (r.[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta])^{-m} \\
 &= \frac{1}{(r.[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta])^m} \\
 &= \frac{1.(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)}{r^m.[\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta]} \\
 &= \frac{1}{r^m}.[\cos(0 - m\theta) + i \operatorname{sen}(0 - m\theta)] \\
 &= r^{-m}.[\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta)] \\
 &= r^n.[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.8 Calcule $(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i)^{15}$

Solução: Observe que $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ tem módulo

$$r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$$

e argumento θ tal que $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim

$$\begin{aligned}
 (2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i)^{15} &= \left(4. \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right]\right)^{15} \\
 &= 4^{15}. \left[\cos \frac{15\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{15\pi}{4}\right] \\
 &= 4^{15}. \left[\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right] \\
 &= 4^{15}. \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\
 &= 2.4^{14}. [\sqrt{2} - i \sqrt{2}]
 \end{aligned}$$

Vamos ver agora como calcular raízes de números complexos. Calcular

$$\sqrt[n]{r.[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]}$$

é determinar os complexos z tais que

$$z^n = r.[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$$

Fazendo $z = \rho.[\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha]$, obtemos

$$(\rho.[\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha])^n = r.[\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$$

Pela fórmula de De Moivre,

$$\rho^n \cdot [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)] = r \cdot [\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$$

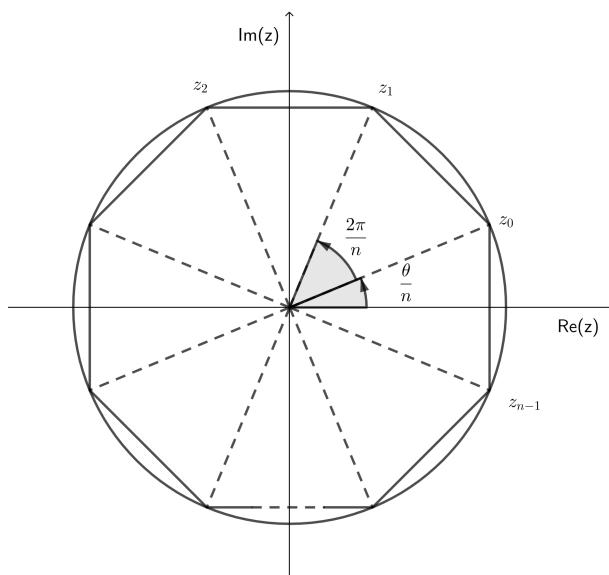
Como complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes, $\rho^n = r$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi$, k inteiro. Daí, $\rho = \sqrt[n]{r}$ e $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$.

Portanto

$$\sqrt[n]{r} \cdot [\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta] = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

■

Figura 4 – imagens das raízes de z



Fonte: do Autor

Observemos que as raízes têm todas o mesmo módulo, $\sqrt[n]{r}$. Se $r \neq 0$, as imagens dessas raízes se situam em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Observemos também que dando valores inteiros a k , os argumentos crescem em progressão aritmética de razão $2\pi/n$, o que mostra que essas raízes estão uniformemente espaçadas na circunferência. Se $r \neq 0$, as imagens dessas raízes são vértices de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$, se $r = 0$, é claro que todas as raízes são iguais a zero.

Exemplo 2.9 Vamos determinar as raízes cúbicas de 27.

Solução: O número real positivo 27 tem módulo 27 e argumento 0. Então,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{27 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)} &= \sqrt[3]{27} \cdot \left[\cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{0 + 2k\pi}{3} \right] \\ &= 3 \cdot \left[\cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3} \right]. \end{aligned}$$

Esses valores se repetem em ciclos de 3. De fato, cada aumento de uma unidade no valor de k gera um aumento de $2\pi/3$ no argumento. Um aumento de 3 unidades no valor de k gera um aumento de 2π no argumento e faz que o valor de

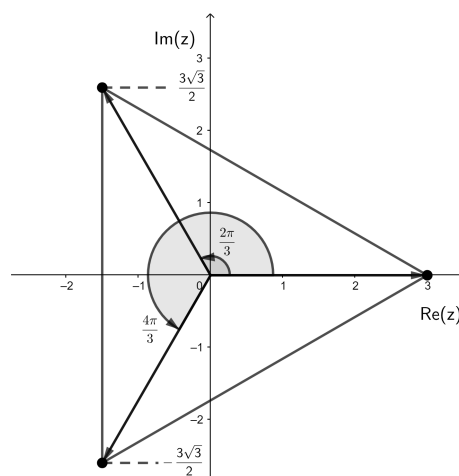
$$\cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}$$

se repita. Note que essas raízes são vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo de centro na origem e raio 3.

As raízes são obtidas fazendo $k = 0, 1, 2$ (pois se repetem a partir daí). As raízes são:

- $k = 0$; $3 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 3 \cdot (1 + i \cdot 0) = 3$
- $k = 1$; $3 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
- $k = 2$; $3 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Figura 5 – raízes cúbicas de 27



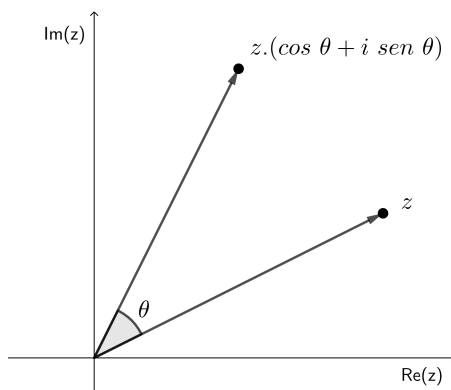
Fonte: do Autor



2.5 Interpretação geométrica da multiplicação de complexos

Quando multiplicamos um complexo z por $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, o vetor que representa z sofre uma rotação de um ângulo θ em torno da origem.

Figura 6 – rotação de z



Fonte: do Autor

De fato, para multiplicar complexos, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos. Como $\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ tem módulo 1, $z \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ tem o mesmo módulo que z . O argumento de $z \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ é o argumento de z aumentado de θ . Logo, o vetor que representa $z \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ é o resultado da rotação do vetor que representa z de um ângulo θ em torno da origem.

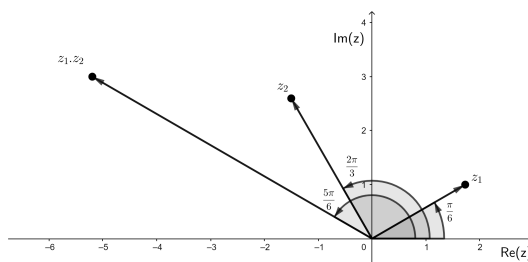
Exemplo 2.10 Vamos multiplicar $z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$ por $z_2 = 3 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right)$

Solução:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = 6 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right)$$

■

Figura 7 – multiplicação de complexos



Fonte: do Autor

2.6 Raízes da unidade

Uma estrutura interessante é dada, para cada n fixo, pelas raízes n -ésimas da unidade. Sabemos que há exatamente n raízes n -ésimas da unidade e que as imagens dessas raízes no plano complexo são os vértices de um polígono regular de n lados com centro na origem.

Temos

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1} &= \sqrt[n]{1 \cdot [\cos 0 + i \operatorname{sen} 0]} \\ &= \sqrt[n]{1} \cdot \left[\cos \left(\frac{0 + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{0 + 2k\pi}{n} \right) \right] \\ &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}\end{aligned}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Fixado n , as raízes n -ésimas da unidade serão representadas por ε_k

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Exemplo 2.11 *Vamos calcular as raízes sextas da unidade.*

Solução:

$$\begin{aligned}\varepsilon_k &= \cos \frac{2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{6}, \\ &= \cos \frac{k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\end{aligned}$$

Temos

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1 = 1 + 0 = 1$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\varepsilon_3 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + 0 = -1$$

$$\varepsilon_4 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\varepsilon_5 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

■

As raízes n -ésimas da unidade (n fixo) têm algumas propriedades interessantes:

Propriedade 2.1 *O produto de duas raízes n -ésimas da unidade é também uma raiz n -ésima da unidade.*

Demonstração: Se $z^n = 1$ e $w^n = 1$ então $(z.w)^n = z^n.w^n = 1.1 = 1$ ■

Propriedade 2.2 *O inverso de uma raiz n -ésima da unidade é também uma raiz n -ésima da unidade.*

Demonstração: Se $z^n = 1$ então $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1^n}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$ ■

Corolário 2.2 *O quociente de duas raízes n -ésimas da unidade é também uma raiz n -ésima da unidade.*

Demonstração: Se $z^n = 1$ e $w^n = 1$ então $\left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{z^n}{w^n} = z^n \cdot \frac{1}{w^n} = 1.1 = 1$ ■

Finalizaremos esta secção com o seguinte Teorema

Teorema 2.4 *Sejam*

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$$

e

$$\varepsilon_j = \cos \frac{2j\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2j\pi}{n}, \quad k, j \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

duas raízes n -ésimas da unidade. Então $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_j = \varepsilon_{k+j}$ onde a adição é módulo n .

Demonstração:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \cdot \varepsilon_j &= \left[\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right] \cdot \left[\cos \frac{2j\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2j\pi}{n} \right] \\ &= \cos \frac{2(k+j)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2(k+j)\pi}{n} \end{aligned}$$

Seja $k + j \equiv r \pmod{n}$ então existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $k + j = n \cdot q + r$. Assim,

$$\begin{aligned} \varepsilon_k \cdot \varepsilon_j &= \cos \frac{2(k+j)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2(k+j)\pi}{n} \\ &= \cos \frac{2(n \cdot q + r)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2(n \cdot q + r)\pi}{n} \\ &= \cos \left(2q\pi + \frac{2r\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(2q\pi + \frac{2r\pi}{n} \right) \\ &= \cos \frac{2r\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2r\pi}{n} \\ &= \varepsilon_r \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.12 Consideremos as raízes sextas da unidade.

- $\varepsilon_4 \cdot \varepsilon_5 = \varepsilon_3$ pois $4 + 5 \equiv 9 \equiv 3 \pmod{6}$
- $(\varepsilon_5)^8 = \varepsilon_4$ pois $5 \cdot 8 = 40 \equiv 4 \pmod{6}$

Exemplo 2.13 Sabemos que as potências de raízes n -ésimas da unidade são também raízes n -ésimas da unidade. Por exemplo, as raízes quartas da unidade são

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Essas raízes são $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = i, \varepsilon_2 = -1$ e $\varepsilon_3 = -i$

As potências de $\varepsilon_2 = -1$ são todas iguais a 1 e -1

As potências de $\varepsilon_1 = i$ são iguais a $i, -1, -i$ ou 1 .

Em ambos os casos estamos verificando o fato, já provado anteriormente, que as potências de uma raiz n -ésima da unidade são também raízes n -ésimas da unidade. Há no entanto uma diferença fundamental entre os comportamentos de $\varepsilon_2 = -1$ e $\varepsilon_1 = i$. As potências de $\varepsilon_1 = i$ geram todas as raízes quartas da unidade ao passo que as potências de $\varepsilon_2 = -1$ geram apenas algumas das raízes quartas da unidade.

Diremos que uma raiz n -ésima da unidade é primitiva quando suas potências geram todas as raízes n -ésimas da unidade.

Exemplo 2.14 As raízes quartas primitivas da unidade são $\varepsilon_1 = i$ e $\varepsilon_3 = -i$

Fechamos esta secção com o seguinte

Teorema 2.5 A raiz n -ésima da unidade

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

é primitiva se, e somente se, k e n são relativamente primos

Demonstração: Se k não é primo com n , a fração $\frac{k}{n}$ pode ser reduzida e temos $\frac{k}{n} = \frac{p}{q}$, com $q < n$. Então a raiz n -ésima da unidade

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2p\pi}{q} + i \operatorname{sen} \frac{2p\pi}{q}$$

também é uma raiz q -ésima da unidade (é a raiz q -ésima da unidade ε_p). Mas então suas potências, por serem raízes q -ésimas da unidade, poderão ter no máximo q valores distintos e não poderão dar origem a todas as n raízes n -ésimas da unidade pois $q < n$.

Se k é primo com n , considere as n potências

$$\varepsilon_k, (\varepsilon_k)^2, \dots, (\varepsilon_k)^n$$

Essas n potências são raízes da unidade. Como existem precisamente n raízes n -ésimas da unidade, se essas potências forem distintas, elas serão todas as raízes n -ésimas da unidade. Portanto, devemos provar apenas que essas raízes são todas diferentes.

Consideremos duas dessas potências $(\varepsilon_k)^s$ e $(\varepsilon_k)^t$, com $s < t$. Se fosse $(\varepsilon_k)^s = (\varepsilon_k)^t$, teríamos

$$(\varepsilon_k)^{t-s} = 1$$

,

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right)^{t-s} = 1$$

$$\cos \frac{2k(t-s)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k(t-s)\pi}{n} = 1$$

Isso implica $\frac{2k(t-s)\pi}{n}$ múltiplo de 2π , ou seja $\frac{2k(t-s)}{n}$ inteiro. Como k é primo com n , $t-s$ deve ser múltiplo de n . Isso é um absurdo pois como $t, s \in \{1, 2, \dots, n\}$ e $s < t$, $t-s \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

■

3 RÉGUA E COMPASSO

A possibilidade (ou não) de se construir números representados por segmentos é um dos assuntos que fascinou matemáticos desde os tempos mais remotos. O livro que pode ser considerado a base primordial de toda geometria euclidiana chama-se "*Os elementos*" de Euclides. Euclides de Alexandria, viveu de 300 a 200 antes de Cristo, como era conhecido foi um professor de Matemática da linha platônica e escritor. Euclides escreveu sobre o rigor matemático, perspectivas, teoria dos números, seções cônicas e geometria esférica. A famosa obra de Euclides abrange treze volumes, caracterizados por um desenvolvimento dedutivo e coerente, dos quais seis se dedicam basicamente à Geometria. Os livros originais foram destruídos e apenas em 1482, a partir de reconstituições acumuladas através dos séculos, foi impressa sua primeira edição. A partir daí, aproximadamente 1000 edições já foram lançadas. O principal interesse em "*Os elementos*" é o desenvolvimento lógico dedutivo de teoremas da geometria plana e dos sólidos. São deduzidos 465 teoremas a partir de um conjunto de apenas 10 axiomas.

A geometria euclidiana é a primeira e, serve de base sólida para todas as outras geometrias. Se manteve intransponível no pensamento matemático clássico medieval e renascentista pois somente em termos modernos que surgiram outros tipos de geometrias.

A possibilidade da construção geométrica (com régua e compasso) de polígonos e números não é suficiente para alguns casos bastantes conhecidos no meio matemático. Existem três exemplos bem evidenciado de problemas que infelizmente não se pode resolver com tais instrumentos. São eles:

- Duplicação do cubo (ou Problema de Delos): construir a aresta de um cubo cujo volume é igual ao dobro de um cubo dado. Que pode ser resumido em construir $\sqrt[3]{2}$
- Quadratura do círculo: construir um quadrado com área igual à de um círculo dado, que ficaria resumido em construir $\sqrt{\pi}$
- Trissecção do ângulo: dividir um ângulo qualquer em três partes iguais.

A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso, embora esses instrumentos sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção. A busca ingente de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas, como as seções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentais. Um produto muito posterior foi o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos. Somente no século XIX, mais de 2000 anos depois de os problemas terem sido concebidos, se estabeleceu a impossibilidade das três construções, sob a limitação autoimposta de se usarem apenas régua e compasso. O grande estímulo ao desenvolvimento da matemática, inclusive para a criação de novas teorias,

dado pelos esforços continuados para se resolverem os três famosos problemas da Antiguidade, ilustra o valor heurístico de problemas matemáticos atraentes não resolvidos.

3.1 Alguns segmentos contrutíveis

Segmentos construtíveis são segmentos que podem ser obtidos, a partir de segmentos dados, por intermédio de construções com régua e compasso. Entendemos por construções com régua e compasso construções em que se usa uma régua sem marcações e um compasso simples. Com a régua podemos traçar uma reta desde que sejam dados dois pontos da reta, e com o compasso podemos desenhar circunferências desde que sejam dados o ponto central da circunferência e o raio ou o ponto central da circunferência e um ponto pertencente a ela.

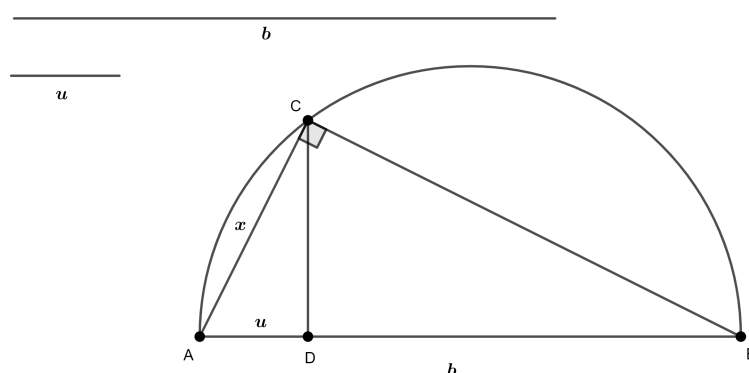
Todo número Construtível com Régua e Compasso é Algébrico, isto é, ele deve ser Raiz de um Polinômio do Coeficientes Inteiros. O leitor mais experiente deve lembrar que números (reais ou complexos) que são raízes de polinômios com coeficientes inteiros são chamados de algébricos, enquanto os outros são ditos transcendentos. Assim, podemos concluir que todo número Construtível é algébrico e que todo número transcendente não é Construtível. Ao leitor, que queira se aprofundar no assunto sugerimos LAFETÁ; SILVA; LELIS (2016)

A seguir construiremos, como exemplo, alguns segmentos clássicos da geometria plana.

Exemplo 3.1 *Dado o segmento b , construiremos o segmento $c = \sqrt{b}$*

Solução: para este exemplo usaremos resultados de geometria plana sobre semelhança de triângulos.

Figura 8 – raiz de um segmento dado



Fonte: do Autor

Descrição dos passos:

- construímos um triângulo retângulo onde o segmento dado b é a hipotenusa e como projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa, o segmento unitário.
- Este cateto é o segmento $x = \sqrt{b}$

■

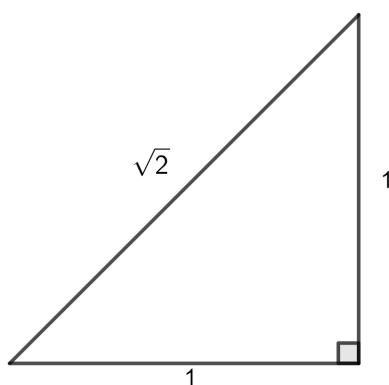
Justificativa

Observemos que no triângulo ABC , retângulo em C , vale a relação $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, pela semelhança do triângulo ABC com o triângulo ACD . Assim $\frac{b}{x} = \frac{x}{1}$. E portanto $x = \sqrt{b}$.

Exemplo 3.2 *Construiremos, agora, o segmento $\sqrt{2}$*

Basta construir um triângulo retângulo isósceles com catetos medindo a unidade. Pelo teorema de Pitágoras, conclui-se que a hipotenusa do triângulo tem medida $\sqrt{2}$. Usando o argumento

Figura 9 – raiz quadrada de 2



Fonte: do Autor

supracitado podemos construir os segmentos $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{n}$.

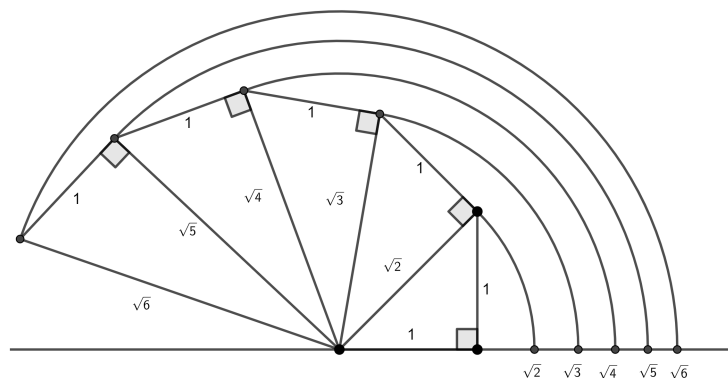
Exemplo 3.3 *Vamos construir o segmento $a\sqrt{n}$, sendo $n \in \mathbb{N}$ e a é dado.*

Solução: Análogo ao **Exemplo 3.2** basta construir o primeiro triângulo retângulo isósceles com catetos iguais a a e os demais da sequência iguais ao segmento unitário. ■

3.2 Segmentos Proporcionais

Dizemos que os segmentos a e b são **proporcionais** aos segmentos c e d quando é verdadeira a relação $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou qualquer outra equivalente a ela.

Figura 10 – sequencia de raízes quadradas



Fonte: do Autor

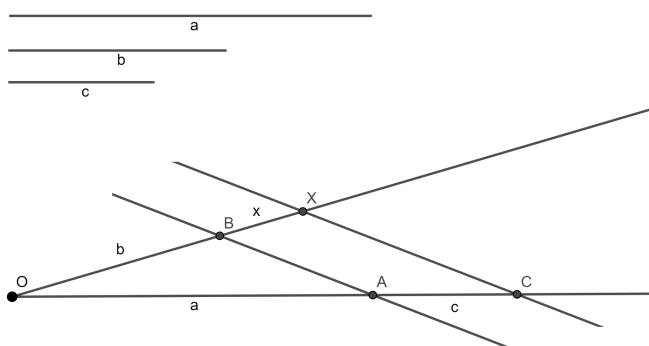
1. A 4ª proporcional

O segmento x é a 4ª proporcional entre os segmentos a, b, c e d quando for válida a relação

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Vamos obter x sendo dados a, b e c

Figura 11 – a quarta proporcional



Fonte: do Autor

Descrição dos passos

- Construímos um triângulo qualquer de vértice O e transportamos sobre um de seus lados os segmentos $OA = a$, e em seguida $AC = c$, e sobre o outro lado o segmento $OB = b$
- Tracemos \overleftrightarrow{AB} , e pelo ponto C a reta CX , paralela a \overleftrightarrow{AB} , com X pertencente a \overrightarrow{OB}

A solução procurada é o segmento $BX = x$. A justificativa pode ser feita facilmente usando-se o Teorema de Tales

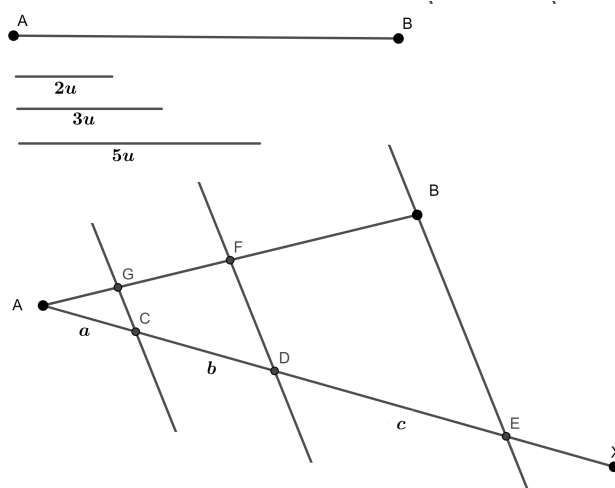
2. A 3ª proporcional

A 3ª proporcional entre dois segmentos a e b nessa ordem é o segmento x tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.
 A construção é análoga à anterior e deixada como exercício.

3. Divisão de um segmento em partes proporcionais a números ou segmentos dados.

Vamos dividir o segmento AB em partes proporcionais a 2, 3 e 5.

Figura 12 – divisão em partes proporcionais



Fonte: do Autor

Descrição dos passos

- Traçamos um ângulo BAX de medida arbitrária, tendo por um de seus lados a semirreta AB , suporte do segmento AB dado.
- Transportamos sobre \overrightarrow{AX} , consecutivamente, os segmentos a, b e c de medidas 2, 3 e 5, respectivamente, obtendo os pontos C, D e E .
- Tracemos a reta BE , e por C e D , duas paralelas a \overleftarrow{BE} , que encontrarão o segmento AB nos pontos F e G

Os pontos G e F dividem \overline{AB} na proporção pedida. A justificativa faz-se claramente pelo Teorema de Tales.

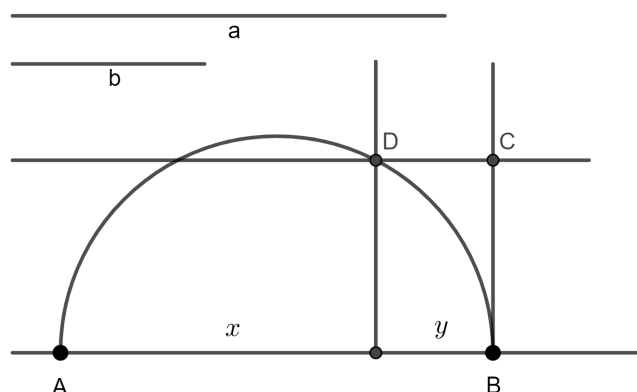
Como caso particular temos a divisão de um segmento em n segmentos congruentes.

4. Vamos determinar os segmentos x e y tais que

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b^2 \end{cases}$$

Neste caso, conhecemos a soma a e a média geométrica b entre os segmentos x e y

Figura 13 – soma e quadrado



Fonte: do Autor

Descrição dos passos

- Tracemos o segmento $AB = a$;
- Levantemos, perpendicularmente, em algum ponto de \overleftrightarrow{AB} , por exemplo B , o segmento $BC = b$.
- O ponto E , que dividirá o segmento a nos dois segmentos x e y pedidos, é o pé da perpendicular a \overleftrightarrow{AB} , baixada do ponto D , o qual é o ponto de intersecção da semicircunferência cujo diâmetro é \overline{AB} com a reta CD paralela a \overleftrightarrow{AB} pelo ponto C .

É evidente que o triângulo ADB é retângulo em D . Assim $\overline{ED} = b^2 = x \cdot y$ e $AE = x$ e $EB = y$. Se $b = \frac{a}{2}$ então temos $x = y$; Se $b > \frac{a}{2}$ então o sistema não admitirá soluções reais.

5. Resolução geométrica de Equações do Segundo Grau.

De um modo geral, podemos resolver graficamente uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números construtíveis dados.

Obtendo graficamente $r = \frac{b}{a}$ e $s = \frac{c}{a}$, vamos transformar a equação dada na nova equação $x^2 + rx + s = 0$

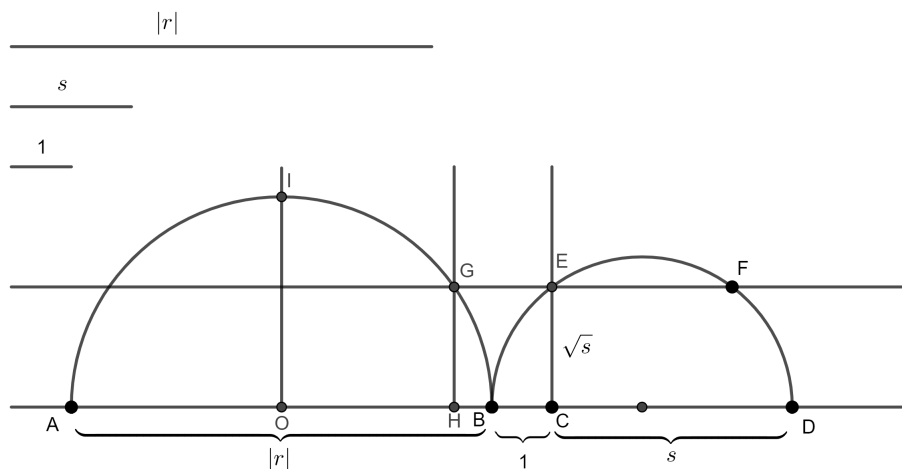
Vamos considerar inicialmente o caso em que as raízes x_1 e x_2 têm o mesmo sinal.

Dessa forma caímos no sistema

$$\begin{cases} |x_1| + |x_2| = |r| \\ |x_1| \cdot |x_2| = s \end{cases}$$

A solução é análoga a do item 4, só diferindo na distância entre as retas paralelas, que, aqui, deve ser \sqrt{s}

Figura 14 – raízes da equação do segundo grau



Fonte: do Autor

Se $r < 0$, $x_1 = AH$ e $x_2 = HB$ são as raízes.

Se $r > 0$, $x_1 = -AH$ e $x_2 = -HB$ são as raízes.

Se $\overleftrightarrow{EF} \cap C(O, OA) = \{I\}$, ou seja, se $s = \frac{r^2}{4}$, a equação admitirá uma única solução, isto é, a raiz $x = x_1 = x_2$

Se $\overleftrightarrow{EF} \cap C(O, OA) = \emptyset$, isto é, se $s > \frac{r^2}{4}$, a equação não admitirá soluções reais.

Se considerássemos aqui o caso $b = 0$, teríamos $ax^2 + c = 0$, ou seja, $x^2 + \frac{c}{a}$, e o problema se reduziria à resolução da equação $x = \sqrt{d}$, com $d < 0$, e não teria solução real.

Vamos agora considerar o caso em que s é negativo, isto é, as raízes x_1 e x_2 têm sinais diferentes. Considerando x_1 a raiz de maior valor absoluto, o sistema de equações fica

$$\begin{cases} |x_1| - |x_2| = r \\ |x_1| \cdot |x_2| = |s| \end{cases}$$

Traçamos uma circunferência de diâmetro $AB = r$ e centro O .

Sobre a semirreta oposta à semirreta BA , transportamos consecutivamente os segmentos 1 e $|s|$, a fim de construirmos $ED = \sqrt{|s|}$.

Traçamos o segmento BG , tangente a $C(O, \frac{r}{2})$ no ponto B , congruente a \overline{ED} , com G e E do mesmo lado de \overleftrightarrow{AB} .

Traçamos a semirreta GO , que encontrará $C(O, \frac{r}{2})$ nos pontos H e I .

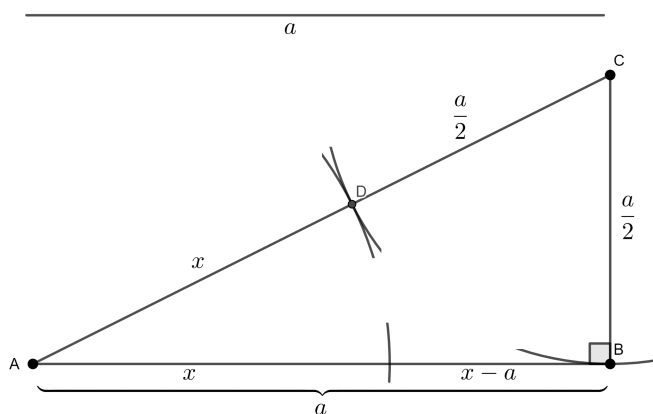
Afirmamos que os segmentos GH e GI representam as raízes da equação.

A justificativa fez-se observando que, de fato, ocorre $|x_1| - |x_2| = r$ pois I e H estão na circunferência de diâmetro r ; além disso $(GB)^2$ é a potência do ponto G em relação

Algebricamente, determinar x é resolver a equação do segundo grau $x^2 + ax - a^2 = 0$, $a > 0$ obtida de 3.1, cuja solução é $x = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$, da qual consideramos somente a raiz positiva $x = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

Vamos obter graficamente o segmento áureo x do segmento a .

Figura 16 – secção áurea



Fonte: do Autor

Descrição dos passos

- Construímos inicialmente um triângulo retângulo ABC que tenha como catetos os segmentos a e $\frac{a}{2}$.
- Transportamos a partir de C e sobre a semirreta CA , o segmento CB , determinando o ponto D .

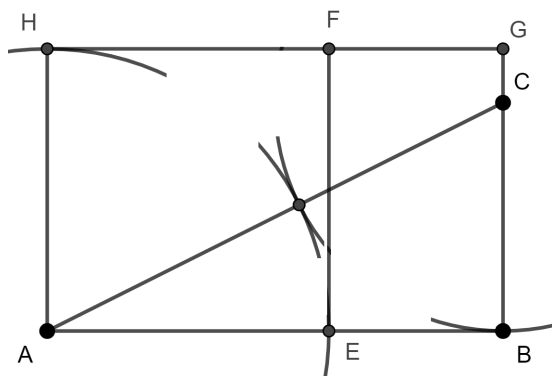
O ponto E , pertencente a $a = \overline{AB}$ tal que $a = \overline{AE} \cong a = \overline{AD}$, é o ponto que estamos procurando, e $x = \overline{AE}$. De fato, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ABC , temos a relação $AC^2 = AB^2 + BC^2$, ou seja, $(x + \frac{a}{2})^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2$, o que é equivalente à relação 3.1.

A partir da construção do segmento áureo x correspondente ao segmento a , dado inicialmente, podemos construir o famoso **retângulo áureo**, que tem a e x como lados.

Como sabemos, retângulos com esta proporção são utilizados desde a Antiguidade até os dias de hoje, tanto nas artes como na arquitetura, pois a sua proporção é perfeita, tendo sido chamada de **divina proporção**.

Pela relação 3.1, podemos ver também que o retângulo $ABGH$, que tem por base o segmento inicial a e por altura o segmento $x = AE$ é semelhante ao retângulo restante $BGFE$ quando se retira dele o quadrado $AEFH$ de lado x . A razão $\frac{a}{x}$ é conhecida por muitos como

Figura 17 – retângulo áureo



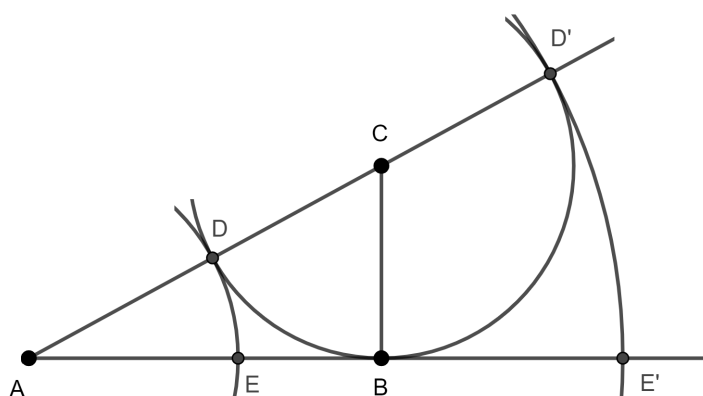
Fonte: do Autor

razão áurea, e o número irracional $\phi = \frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,61$, como número áureo ou número de ouro.

Na figura seguinte, voltando à construção do segmento áureo, o segmento AE' é tal que $\frac{AE'}{AB} = \frac{AB}{BE'}$ e é chamado **segmento áureo externo** de $a = \overline{AB}$. Pode-se mostrar que $AE' = a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

Podemos dizer também que $a = \overline{AB}$ é o segmento áureo de $a = \overline{AE'}$

Figura 18 – segmento áureo externo



Fonte: do Autor

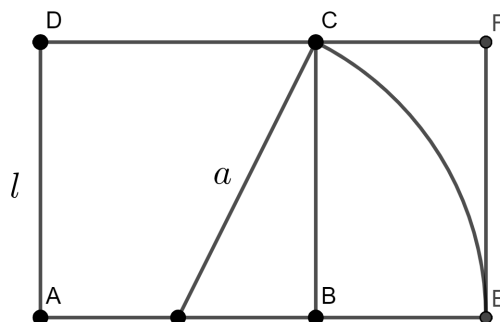
É claro que o retângulo cujos lados são congruentes a $\overline{AE'}$ e a \overline{AB} é também um retângulo áureo.

Apresentamos uma outra maneira de construir o retângulo áureo, a partir do lado menor, a qual também é muito utilizada.

Seja dado o lado menor l do retângulo áureo. Construímos um quadrado $ABCD$ de lado l e, com centro no ponto médio de \overline{AB} , traçamos o arco CE com E pertencente a \overline{AB}

O retângulo $AEFD$ é um retângulo áureo.

Figura 19 – retângulo áureo a partir de quadrado



Fonte: do Autor

De fato, pelo Teorema de Pitágoras $a^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2 = \frac{5l^2}{4}$ e, portanto $a = \frac{l\sqrt{5}}{2}$.

Logo, $AE = \frac{l}{2} + a = \frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{5}}{2} = l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

É claro que $BEFC$ também é um retângulo áureo, e \overline{BE} é o segmento áureo de \overline{BC} .

Esse método será útil na construção do decágono regular e do pentágono regular, como veremos a seguir.

3.4 Construção dos lados do decágono e do pentágono regular

Vamos determinar o lado l_{10} do decágono regular inscrito numa circunferência de raio r .

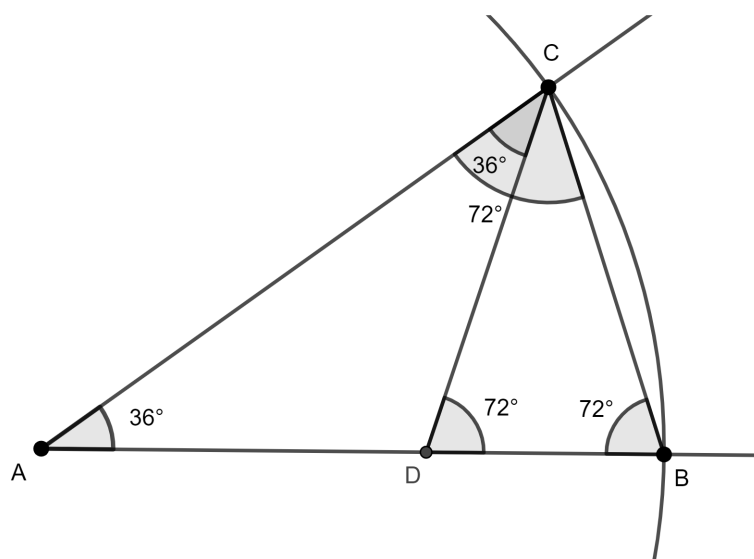
A construção do l_{10} é equivalente à construção de um arco de medida 36° , isto é, equivalente à décima parte de uma circunferência dada.

Consideremos, então, numa circunferência de centro A e raio r , o ângulo central CAB com medida 36°

O triângulo ABC é isósceles de base \overline{BC} , com ângulos da base medindo 72° . Consideremos o segmento CD , congruente ao segmento BC , com D pertencente a \overline{BC} . É claro que ambos são congruentes ao lado l_{10} do decágono regular inscrito.

O triângulo CDB é então isósceles, tendo por base o segmento DB e dessa forma $m\widehat{CDB} = 72^\circ$.

Figura 20 – arco de 72°



Fonte: do Autor

Decorre daí que os triângulos ABC e CDB são semelhantes. Com isso, vale a relação $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{DB}$.

O triângulo ADC , por sua vez, é isósceles com base AC , tendo em vista que $m\widehat{ACD} = 36^\circ = m\widehat{A}$.

Dessa forma, temos $AD \cong CD \cong l_{10}$

Isto mostra que $\frac{r}{l_{10}} = \frac{l_{10}}{r - l_{10}}$, e portanto l_{10} é o segmento áureo do raio da circunferência inicial.

$$\text{Logo } l_{10} = r \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Construção do l_{10} e do decágono regular

Traçamos a circunferência $C(O, r)$ e, nela, dois diâmetros perpendiculares \overline{AB} e \overline{CD} .

Com centro em M , ponto médio de \overline{OB} , traçamos o arco CE , com E pertencente ao raio OA

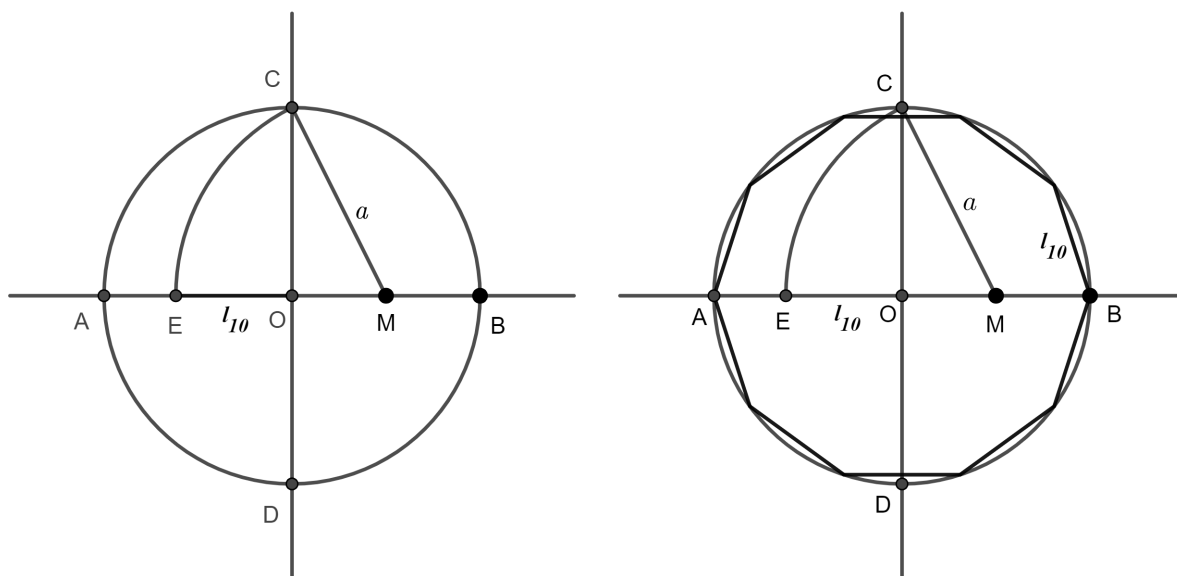
Afirmamos que \overline{EO} é o segmento procurado, sendo portanto sua medida, a medida do lado do decágono regular inscrito em $C(O, r)$.

Isto se justifica pela construção do retângulo áureo apresentada anteriormente.

A partir da divisão da circunferência em 10 arcos congruentes, podemos construir também o pentágono regular inscrito nesta circunferência, ligando os pontos obtidos de forma alternada.

Porém, na própria figura já temos obtido o segmento CE , que é o lado do **pentágono**

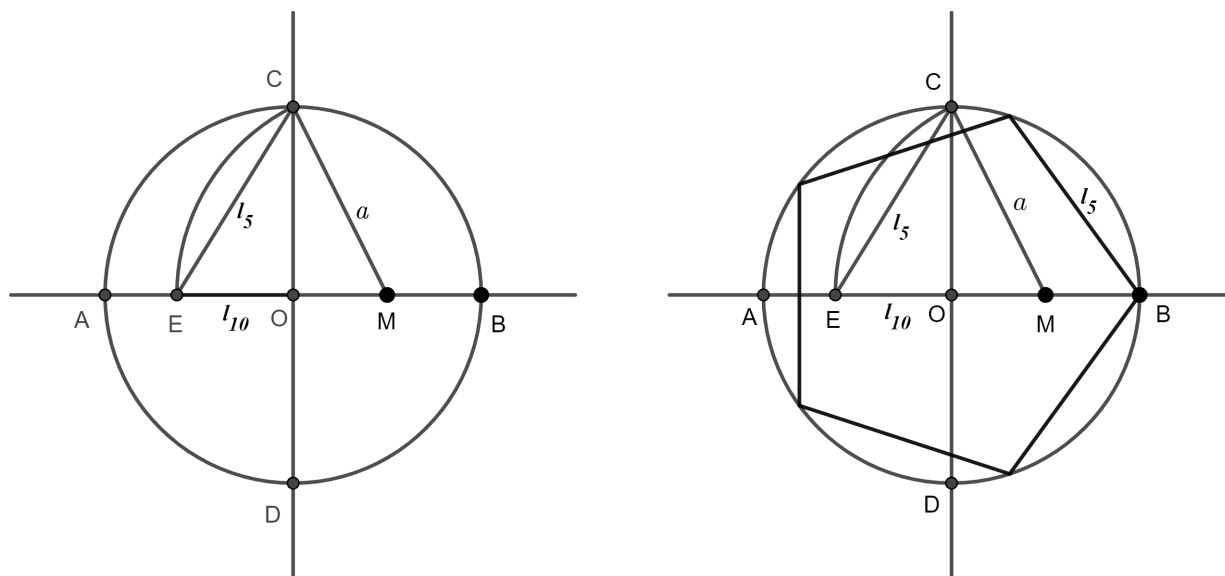
Figura 21 – decágono regular



Fonte: do Autor

regular inscrito naquela circunferência (21), como mostra a figura a seguir.

Figura 22 – pentágono regular



Fonte: do Autor

4 A CONSTRUTIBILIDADE DO HEPTADECÁGONO REGULAR

Este capítulo trata da primeira obra prima de Carl Friedrich Gauss: *A construção do polígono regular de 17 lados*, usando apenas régua e compasso, coisa que, antes dele, jamais alguém sequer imaginaria ser possível

Sabe-se hoje, após significativo e importante avanço na matemática que qualquer número tem n raízes n -ésimas e que, quando representadas no plano complexo, formam entre si, sucessivamente, ângulos de $\frac{2\pi}{n}$. Falando abertamente, a extração da raiz n -ésima da unidade produz n números complexos, cujas representações gráficas formam um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio 1, fato que vimos anteriormente no capítulo 2 deste trabalho. Por este motivo, equação $x^n - 1 = 0$ recebeu o nome de equação ciclotômica e foi intensamente estudada no final do século XVIII e início do século XIX, principalmente pelo jovem Gauss.

Seja agora a equação $x^{17} - 1 = 0$. Como $x = 1$ é uma de suas raízes, podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$(x - 1) \cdot (x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

Separada da raiz $x = 1$, ela se torna

$$x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Vamos agora descrever o procedimento usado por Gauss na construção do heptadecágono.

Gauss, que estava bem familiarizado com interpretação geométrica de números foi capaz de resolver equações ciclotômicas por meio de radicais. A fim de encontrar valores intermediários adequados, ele primeiro ordenou as raízes n -ésimas da unidade de um modo particular, motivado por seu conhecimento das propriedades de divisibilidade dos inteiros.

Num primeiro momento parece sensato ordenar as raízes de acordo com a sua posição na circunferência, isto é, na ordem $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}$ onde $\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e $\varepsilon^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$. No entanto, Gauss percebeu que fazia sentido ordenar as raízes numa ordem bem diferente, pelo menos no caso em que n é primo. Considerando que $\varepsilon^n = 1$, o valor de ε^k depende apenas do resto da divisão de k por n . Assim, podemos escolher qualquer ordem dos possíveis restos da divisão por n . Além da ordem $1, 2, 3, \dots, n-1$, é possível, no caso em que n é primo, obter todos os restos não nulos $1, 2, 3, \dots, n-1$ não apenas pela adição repetida de 1, mas pela repetida multiplicação por um número g adequado. Assim, obtemos a seguinte ordenação: $g^0, g^1, g^2, g^3, \dots, g^{n-1}$. O resto obtido quando g é dividido por n é chamado de raiz primitiva módulo n .

No caso em que $n = 17$, por exemplo, pode-se escolher $g = 3$. De fato, começando com $g^0 = 1, g^1 = 3, g^2 = 9, g^3 = 3^3 = 27 \equiv 10 \pmod{17}, g^4 = 81 \equiv 13 \pmod{17}, \dots$. Completamente, obtém-se a seguinte ordenação: $3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6, 1$.

Como a lista finaliza em $g^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ poderíamos continuar obtendo $g^{17} \equiv 3, g^{18} \equiv 9$, e assim por diante.

No caso de um heptadecágono regular, adotando a ordenação sugerida por Gauss, a lista resultante de raízes da unidade teria a seguinte ordenação:

$$\varepsilon^1, \varepsilon^3, \varepsilon^9, \varepsilon^{10}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^5, \varepsilon^{15}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{16}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^8, \varepsilon^7, \varepsilon^4, \varepsilon^{12}, \varepsilon^2, \varepsilon^6$$

. O propósito de Gauss ao ordenar as raízes desse modo era formar somas parciais das raízes da unidade, denominadas períodos, que permitiam calcular, passo a passo, as raízes da unidade. Inicialmente começamos com dois períodos contendo as raízes da unidade que estão em posições ímpares em posições pares, respectivamente. Essas somas de oito raízes da unidade são denominadas de períodos de oito membros.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon^1 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^8 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 \\ \alpha_2 &= \varepsilon^3 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^6 \end{aligned}$$

Em seguida, consideram-se os quatro períodos contendo as raízes cujas posições diferem em quatro na lista. Essas somas de quatro raízes da unidade são denominadas de períodos de quatro membros.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \varepsilon^1 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^4 \\ \beta_2 &= \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{12} \\ \beta_3 &= \varepsilon^9 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^8 + \varepsilon^2 \\ \beta_4 &= \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7 + \varepsilon^6 \end{aligned}$$

Finalmente, consideramos os períodos de dois membros, que são as somas das raízes da unidade, contendo as raízes cujas posições diferem em oito na lista original. Para o que queremos obter, os dois períodos seguintes são suficientes.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon^1 + \varepsilon^{16} \\ \gamma_2 &= \varepsilon^{13} + \varepsilon^4 \end{aligned}$$

Este método tem por objetivo dividir as raízes em grupos nos quais a soma dos expoentes dê 17 porque para m e para $17 - m$ temos

$$\varepsilon^m = \cos \frac{2m\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2m\pi}{n} \quad \text{e} \quad \varepsilon^{17-m} = \cos \frac{2m\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{2m\pi}{n}$$

ou seja, estas raízes são conjugadas e, então

$$\varepsilon^m + \varepsilon^{17-m} = 2 \cos \frac{2m\pi}{n} \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (4.1)$$

Assim cada período pode ser obtido a partir do próximo período mais longo por uma equação quadrática. Para isso, os períodos são colocados em pares, de modo que cada soma e cada

produto do par possam ser representados como uma soma de períodos do dobro do comprimento. Vamos ver como isso funciona.

Iniciamos o cálculo com os dois períodos de oito membros α_1 e α_2 . Sua soma pode ser facilmente calculada:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^8 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} \\ &= (1 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^8 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{12} + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{14} \\ &\quad + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16}) - 1 \\ &= -1\end{aligned}$$

Já que a soma de todas as raízes n -ésimas da unidade é sempre igual a zero. Em contra partida, determinar os sessenta e quatro produtos em $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ é muito trabalhoso, porém elementar. Assim, Obtemos $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -4$. Portanto, os dois períodos de oito membros podem ser calculados como solução da equação quadrática $a^2 + a - 4 = 0$, cujas raízes são $a_1 = \alpha_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$ e $a_2 = \alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$

Em seguida, usando os dois períodos de oito membros α_1 e α_2 , os quatro períodos de quatro membros $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 podem ser calculados. De fato, $\beta_1 + \beta_3 = \alpha_1$ e $\beta_1 \cdot \beta_3 = -1$ assim como $\beta_2 + \beta_4 = \alpha_2$ e $\beta_2 \cdot \beta_4 = -1$. Esses dois sistemas levam às equações quadráticas $\beta^2 - \alpha_1\beta - 1 = 0$ e $c^2 - \alpha_2c - 1 = 0$. Vamos resolver essas duas últimas equações porém dando enfoque a β_1 e β_2 . Começemos, portanto resolvendo $\beta^2 - \alpha_1\beta - 1 = 0$. Para isso faremos uso da fórmula resolvente da equação do segundo grau:

$$\begin{aligned}b_1 = \beta_1 &= \frac{-(-\alpha_1) + \sqrt{(-\alpha_1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{\frac{-1+\sqrt{17}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{\frac{-1+\sqrt{17}}{2} + \sqrt{\frac{34-2\sqrt{17}}{4}}}{2} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}\end{aligned}\tag{4.2}$$

Agora vamos resolver $c^2 - \alpha_2c - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}c_1 = \beta_2 &= \frac{-(-\alpha_2) + \sqrt{(-\alpha_2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{\frac{-1-\sqrt{17}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{\frac{-1-\sqrt{17}}{2} + \sqrt{\frac{34+2\sqrt{17}}{4}}}{2} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Agora podemos calcular os dois períodos de dois membros $\gamma_1 \gamma_2$ já que $\gamma_1 + \gamma_2 = (\varepsilon^1 + \varepsilon^{16}) + (\varepsilon^{13} + \varepsilon^4) = \beta_1$ e $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = (\varepsilon^1 + \varepsilon^{16}) \cdot (\varepsilon^{13} + \varepsilon^4) = \varepsilon^{14} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^3 = \beta_2$. Esse sistema de equações leva à equação quadrática $d^2 - \beta_1 d + \beta_2 = 0$. Embora a resolução dessa equação seja trabalhosa, seu entendimento é simples. Vamos resolvê-la.

$$\begin{aligned}
 d_1 = \gamma_1 &= \frac{-(-\beta_1) + \sqrt{(-\beta_1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta_2}}{2} \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} + \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\right)} \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} + \sqrt{\frac{-2\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{578 - 34\sqrt{17}} + 26}{8} + 1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-2\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{578 - 34\sqrt{17}} + 26}{8} + 1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \\
 &= \frac{1}{8} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \right) \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Observemos ainda que de 4.1 temos $\gamma_1 = \varepsilon^1 + \varepsilon^{16} = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$ e da lei dos cossenos aplicada ao ângulo central dos polígonos regulares inscritos na circunferência unitária (nesse caso o heptadecágono) temos também que $l_{17} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{17}}$ o que resulta em

$$l_{17} = \sqrt{2 - \frac{1}{8} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \right)}$$

e, assim, o heptadecágono é construtível apenas com régua e compasso uma vez que no processo de busca de l_{17} foram envolvidas apenas operações racionais e extração de raízes quadradas.

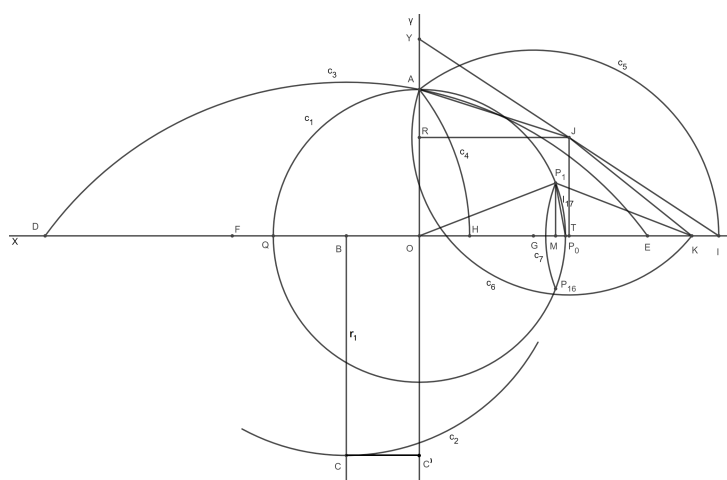
A seguir apresentaremos uma construção do heptadecágono regular feita originalmente por Duane W. DeTemple em sua obra "*Carlyne circles and Lemoine Simplicity of polygon constructions*". DETEMPLE (2009)

1. Construa uma reta x ;
2. Construa uma reta y perpendicular a reta x ;
3. Marque o ponto O , intersecção da reta x com a reta y ;
4. Trace o círculo c_1 com centro em O e raio unitário;
5. Marque, na reta x , os pontos Q e P_0 , intersecções do círculo c_1 com a mesma reta x tal que o ponto P_0 fique à direita do ponto Q . Note que $\overline{QO} = \overline{OP_0} = 1$;
6. Marque, na reta y , no semiplano superior à reta x , o ponto A , o qual é intersecção do círculo c_1 com a mesma reta y ;
7. Marque, na reta x , o ponto B , ponto médio de \overline{QO} ;

8. Trace o círculo $c_2 = (B, \overline{BP_0})$, círculo de centro em B e raio de comprimento $\overline{BP_0}$;
9. Trace a reta r_1 , perpendicular a reta x pelo ponto B ;
10. No semiplano abaixo da reta x marque o ponto C , intersecção da reta r_1 com o círculo c_2 ;
11. Trace o círculo $c_3 = (C, \overline{CA})$, círculo de centro em C e raio \overline{CA} ;
12. Marque os pontos D e E , intersecções do círculo c_3 com a reta x , tal que o ponto E fique à direita do ponto D ;
13. Marque, na reta x , o ponto F , ponto médio do segmento \overline{DO} ;
14. Marque, na reta x , o ponto G , ponto médio do segmento \overline{OE} ;
15. Construa o círculo $c_4 = (F, \overline{FA})$, círculo de centro em F e raio \overline{FA} ;
16. Marque, no semiplano à direita da reta y , o ponto H , intersecção do círculo c_4 com a reta x ;
17. Trace o círculo $c_5 = (G, \overline{GA})$, círculo de centro em G e raio \overline{GA} ;
18. No semiplano à direita da reta y marque o ponto I , intersecção do círculo c_5 com a reta x ;
19. No semiplano superior à reta x marque, na reta y , o ponto Y , tal que $\overline{OY} = \overline{QH}$;
20. Trace o segmento \overline{YI} ;
21. Marque o ponto J , ponto médio do segmento \overline{YI} ;
22. Marque, na reta x , o ponto T , projeção ortogonal do ponto J ;
23. Marque, na reta y , o ponto R , projeção ortogonal do ponto J ;
24. Trace o círculo $c_6 = (J, \overline{JA})$, círculo de centro em J e raio \overline{JA} ;
25. No semiplano à direita da reta y e entre os pontos E e I , marque o ponto K , intersecção do círculo c_6 com a reta x .
26. Trace o círculo $c_7 = (K, 1)$, círculo de centro em K e raio unitário;
27. Marque os pontos P_1 e P_{16} , intersecções do círculo c_7 com o círculo c_1 . Os pontos P_{16} , P_0 e P_1 são vértices do heptadecágono regular;
28. Na reta x marque o ponto M , projeção ortogonal do ponto P_1 ;
29. Trace o segmento $\overline{P_0P_1}$. Este segmento é o lado do heptadecágono regular.

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Abaixo temos a imagem da construção anteriormente descrita, construída no GeoGebra.

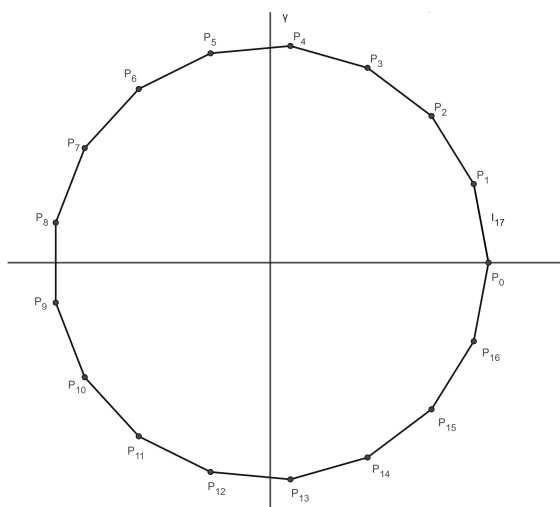
Figura 23 – lado do heptadecágono regular



Fonte: do Autor

Transportando, com o compasso, o segmento de comprimento $\overline{P_0P_1}$ em torno da circunferência unitária, chegamos à construção final do heptadecágono regular.

Figura 24 – heptadecágono regular



Fonte: do Autor

4.1 Justificativa da construção do heptadecágono regular

Projetando o ponto C ortogonalmente na reta y obtemos o ponto C' . Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $CC'A$ obtemos

$$\begin{aligned}\overline{CA} &= \sqrt{(\overline{CC'})^2 + (\overline{C'A})^2} \\ \overline{CA} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{26}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{26}}{2}\end{aligned}$$

Temos, por construção que $\overline{CA} = \overline{CE}$ e $\overline{BC} = \overline{BP_0} = \frac{3}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo BCE obtemos

$$\begin{aligned}(\overline{BE})^2 + (\overline{BC})^2 &= (\overline{CE})^2 \\ (\overline{BE})^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 \\ (\overline{BE})^2 &= \frac{26}{4} - \frac{9}{4} \\ (\overline{BE})^2 &= \frac{17}{4} \\ \overline{BE} &= \frac{\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

Como F é ponto médio de \overline{DO} , temos que

$$\begin{aligned}\overline{OF} &= \frac{\overline{DB} + \overline{BO}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{17})\end{aligned}$$

Observando que $\overline{OE} = \overline{BE} - \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}\overline{OE} &= \overline{BE} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo OFA , obtemos

$$\begin{aligned}
 (\overline{AF})^2 &= (\overline{OA})^2 + (\overline{OF})^2 \\
 (\overline{AF})^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{17})\right)^2 \\
 &= 1 + \frac{1}{16} \cdot (1 + 2\sqrt{17} + 17) \\
 &= 1 + \frac{1}{16} \cdot (18 + 2\sqrt{17}) \\
 &= 1 + \frac{9}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8} \\
 &= \frac{17}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot (17 + \sqrt{17}) \\
 \overline{AF} &= \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 + \sqrt{17})}
 \end{aligned}$$

Observando que $\overline{AF} = \overline{FH}$ temos

$$\begin{aligned}
 \overline{OH} &= \overline{FH} - \overline{FO} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 + \sqrt{17})} - \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{17})
 \end{aligned}$$

Como o ponto G é ponto médio de \overline{OE} , temos que $\overline{OG} = \frac{\overline{OE}}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AGO obtemos

$$\begin{aligned}
 (\overline{AG})^2 &= (\overline{AO})^2 + (\overline{OG})^2 \\
 (\overline{AG})^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{17} - 1)\right)^2 \\
 &= 1 + \frac{1}{16} \cdot (17 - 2\sqrt{17} + 1) \\
 &= 1 + \frac{1}{16} \cdot (18 - 2\sqrt{17}) \\
 &= 1 + \frac{18}{16} - \frac{\sqrt{17}}{8} \\
 &= \frac{16 + 18 - 2\sqrt{17}}{16} \\
 &= \frac{34 - 2\sqrt{17}}{16} \\
 &= \frac{17 - \sqrt{17}}{8} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot (17 - \sqrt{17}) \\
 \overline{AG} &= \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 - \sqrt{17})}
 \end{aligned}$$

Calculemos \overline{OY} .

$$\begin{aligned}\overline{OY} = \overline{QH} &= 1 + \overline{OH} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 + \sqrt{17})} - \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{17})\end{aligned}$$

Observando que $\overline{AG} = \overline{GI}$, calculemos \overline{OI}

$$\begin{aligned}\overline{OI} &= \overline{OG} + \overline{GI} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{17} - 1) + \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 - \sqrt{17})}\end{aligned}$$

Voltemos nossa atenção para o triângulo OYI . O ponto J é ponto médio da hipotenusa \overline{YI} e tem o ponto R como sua projeção ortogonal sobre a reta y , o que nos dá $\overline{RJ} \parallel \overline{OI}$. Logo pelo Teorema de Tales, temos que $\overline{OR} = \frac{\overline{OY}}{2}$. Assim

$$\begin{aligned}\overline{AR} &= \overline{AO} - \overline{OR} \\ \overline{AR} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 + \sqrt{17})} + \frac{1}{8} \cdot (1 + \sqrt{17}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 + \sqrt{17})} + \frac{1}{8} \cdot (1 + \sqrt{17})\end{aligned}$$

Novamente observemos o triângulo retângulo OYI . O ponto J é ponto médio da Hipotenusa \overline{YI} e tem o ponto T como sua projeção ortogonal sobre a reta x , o que nos dá $\overline{JT} \parallel \overline{OY}$. Logo, Novamente pelo Teorema de Tales vem que $\overline{OT} = \frac{\overline{OI}}{2}$. Assim

$$\begin{aligned}\overline{OT} = \frac{\overline{OI}}{2} &= \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{17} - 1) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 - \sqrt{17})} \\ &= \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{17} - 1) + \sqrt{\frac{1}{32} \cdot (17 - \sqrt{17})}\end{aligned}$$

Notemos que $\overline{OT} = \overline{RJ}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao Triângulo retângulo ARJ , obtemos

$$\begin{aligned}
 (\overline{AJ})^2 &= (\overline{AR})^2 + (\overline{RJ})^2 \\
 (\overline{AJ})^2 &= \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{32} \cdot (17 + \sqrt{17})} + \frac{1}{8} \cdot (1 + \sqrt{17}) \right)^2 + \left(\frac{1}{8}(\sqrt{17} - 1) + \sqrt{\frac{1}{32} \cdot (17 - \sqrt{17})} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{32} \cdot (17 + \sqrt{17}) + \frac{1}{64} \cdot (1 + 2\sqrt{17} + 17) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{32} \cdot (17 + \sqrt{17})} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot (1 + \sqrt{17}) \\
 &\quad - \frac{2}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{32} \cdot (17 + \sqrt{17})} \cdot (1 + \sqrt{17}) + \frac{1}{64} \cdot (17 - 2\sqrt{17} + 1) \\
 &\quad + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{17} - 1) \cdot \sqrt{\frac{1}{32} \cdot (17 - \sqrt{17})} + \frac{1}{32} \cdot (17 - \sqrt{17}) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{17}{32} + \frac{\sqrt{17}}{32} + \frac{9}{32} + \frac{\sqrt{17}}{32} - \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}}}{32} + \frac{4}{32} + \frac{4\sqrt{17}}{32} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}} \cdot (1 + \sqrt{17})}{32} + \frac{9}{32} - \frac{\sqrt{17}}{32} + \frac{(\sqrt{17} - 1) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}}}{32} + \frac{17}{32} - \frac{\sqrt{17}}{32} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{17}{32} + \frac{\sqrt{17}}{32} + \frac{9}{32} + \frac{\sqrt{17}}{32} - \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}}}{32} + \frac{4}{32} + \frac{4\sqrt{17}}{32} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}}}{32} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}}}{32} + \frac{9}{32} - \frac{\sqrt{17}}{32} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}}}{32} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}}}{32} \\
 &\quad + \frac{17}{32} - \frac{\sqrt{17}}{32} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{-5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}} - \sqrt{34} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}} + 56 + 4 \cdot \sqrt{17} + \sqrt{34} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}}}{32} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}}}{32}
 \end{aligned}$$

Por construção temos que $\overline{AJ} = \overline{JK}$ e $\overline{JT} = \overline{OR} = 1 - \overline{AR}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \overline{JT} = \overline{OR} &= 1 - \overline{AR} \\
 &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 + \sqrt{17})} + \frac{1}{8} \cdot (1 + \sqrt{17}) \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 + \sqrt{17})} - \frac{1}{8} \cdot (1 + \sqrt{17})
 \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $T K J$, obtemos

$$\begin{aligned}
 (\overline{TK})^2 &= (\overline{JK})^2 - (\overline{JT})^2 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{-5\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}} - \sqrt{34}\sqrt{17+\sqrt{17}} + 56 + 4\sqrt{17} + \sqrt{34}\sqrt{17-\sqrt{17}}}{32} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}}{32} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}(17+\sqrt{17})} - \frac{1}{8}(1+\sqrt{17}) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{-5\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}} - \sqrt{34}\sqrt{17+\sqrt{17}} + 56 + 4\sqrt{17} + \sqrt{34}\sqrt{17-\sqrt{17}}}{32} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}}{32} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{8}(17+\sqrt{17}) + \frac{1}{64}(1+2\sqrt{17}+17) \right. \\
 &\quad \left. + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}(17+\sqrt{17})} - 2\frac{1}{2}\frac{1}{8}(1+\sqrt{17}) - 2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}(17+\sqrt{17})}\frac{1}{8}(1+\sqrt{17}) \right) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{-5\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}} - \sqrt{34}\sqrt{17+\sqrt{17}} + 56 + 4\sqrt{17} + \sqrt{34}\sqrt{17-\sqrt{17}}}{32} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}}{32} - \left(\frac{1}{4} + \frac{17}{32} + \frac{\sqrt{17}}{32} + \frac{9}{32} + \frac{\sqrt{17}}{32} + \frac{4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}{32} - \frac{4}{32} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4\sqrt{17}}{32} - \frac{\sqrt{2}}{32}\sqrt{17+\sqrt{17}}(1+\sqrt{17}) \right) \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{5\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}{32} - \frac{\sqrt{34}\sqrt{17+\sqrt{17}}}{32} + \frac{56}{32} + \frac{4\sqrt{17}}{32} + \frac{\sqrt{34}\sqrt{17-\sqrt{17}}}{32} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}}{32} - \frac{1}{4} - \frac{17}{32} - \frac{\sqrt{17}}{32} - \frac{9}{32} - \frac{\sqrt{17}}{32} - \frac{4\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}{32} + \frac{4}{32} \\
 &\quad - \frac{4\sqrt{17}}{32} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}{32} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{17}\sqrt{17+\sqrt{17}}}{32} \\
 &= \frac{\sqrt{34}\sqrt{17-\sqrt{17}} - \sqrt{2}\sqrt{17-\sqrt{17}} - 8\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}} + 34 + 6\sqrt{17}}{32} \\
 \overline{TK} &= \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \left(\sqrt{34}\sqrt{17-\sqrt{17}} - \sqrt{2}\sqrt{17-\sqrt{17}} - 8\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}} + 34 + 6\sqrt{17} \right)}
 \end{aligned}$$

Calculemos, agora, $\frac{\overline{OK}}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{OK}}{2} &= \frac{\overline{OT} + \overline{TK}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot (\sqrt{17} - 1) + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}(17 - \sqrt{17})} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{32} \cdot \left(\sqrt{34} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}} - 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}} + 34 + 6\sqrt{17} \right)} \\
&= \frac{1}{16} \cdot (\sqrt{17} - 1) + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 - \sqrt{17})} \\
&+ \frac{\sqrt{32}}{64} \cdot \sqrt{\sqrt{34} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}} - 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}} + 34 + 6\sqrt{17}} \\
&= \frac{1}{16} \cdot \left(\sqrt{17} - 1 + 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot (17 - \sqrt{17})} \right) \\
&+ \frac{1}{16} \cdot \sqrt{\frac{32}{16} \cdot \left(\sqrt{34} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}} - 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}} + 34 + 6\sqrt{17} \right)} \\
&= \frac{1}{16} \cdot \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{\frac{16}{8} \cdot (17 - \sqrt{17})} \right) \\
&+ \frac{1}{16} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}} - 16 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 + \sqrt{17}} + 68 + 12\sqrt{17}} \\
&= \frac{1}{16} \cdot \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16 \cdot \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{17 - \sqrt{17}}} \right) \\
&= \frac{1}{16} \cdot \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16 \cdot \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2 \cdot \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \right) \\
&= \frac{1}{16} \cdot \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16 \cdot \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2 \cdot (\sqrt{17} - 1) \cdot \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \right)
\end{aligned}$$

Observe que $\frac{\overline{OK}}{2} = \overline{OM} = \cos \widehat{P_0OP_1}$

Aplicando a lei dos cossenos ao ângulo \widehat{O} do triângulo P_0OP_1 obtemos:

$$\begin{aligned} (\overline{P_0P_1})^2 &= (\overline{P_0O})^2 + (\overline{OP_1})^2 - 2 \cdot \overline{P_0O} \cdot \overline{OP_1} \cdot \cos \widehat{P_0OP_1} \\ &= 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \right) \\ \overline{P_0P_1} &= \sqrt{2 - \frac{1}{8} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2(\sqrt{17} - 1)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}} \right)} \end{aligned}$$

5 PROPOSTA DE APLICAÇÃO

PROPOSTA DIDÁTICA

Um dos resultados importantes da produção do conhecimento reside na possibilidade que temos de fazer a interação de múltiplos saberes. O conceito de número complexo é um bom exemplo dessa possibilidade exploratória da produção científica, ao permitir relações com a álgebra, geometria plana, geometria analítica, trigonometria, séries e aritmética. Esta é uma Proposta apresentada com a finalidade de esquematizar uma sequência de aulas para auxiliar no ensino de números complexos, sua interpretação geométrica juntamente com a construção de polígonos regulares utilizando as construções geométricas além de outros recursos didáticos, além disso, pode ser adaptada para qualquer outro tipo de conteúdo.

DISCIPLINA: Matemática.

NOME DO PROFESSOR: Tiago Monteiro Alves

Turma/Série: 3º ano do Ensino Médio.

TEMA: Números Complexos

CONTEÚDOS TRABALHADOS

- Surgimento dos números complexos;
- Definição de número complexo;
- Soma e subtração de números complexos;
- Multiplicação e divisão de complexos;
- Representações algébricas e geométricas de um número complexo;
- Módulo de um número complexo;
- Potências da unidade imaginária;
- Representação trigonométrica de um número complexo;
- Multiplicação e divisão na forma trigonométrica;
- Potenciação na forma trigonométrica;
- Construção, com régua e compasso, do triângulo equilátero

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS PARA O ENSINO MÉDIO - BNCC

- 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente;
- 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

HABILIDADES (BNCC)

- (EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.
- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
- (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Tempo da sequência didática

- 5 aulas de 80 minutos cada.

Materiais necessários para a sequência didática

O conteúdo dos capítulos 2, 3 e 4 deste trabalho organizado de forma sequencial, caderno para anotações, pincel ou giz, caderno de desenho, régua não graduada, compasso, tanto para o professor quanto para os alunos, notebook, aplicativo Geogebra e data show.

AULA 1

Organização da turma

- Os alunos ficarão em seus respectivos lugares.

Introdução

Primeiramente fazer uma retomada histórica do surgimento dos números complexos, destacando sua inicial recusa e posterior aceitação pelos matemáticos da época. Em seguida entrar em sua definição assim como apresentar as primeiras operações de soma e subtração atentando para uma atividade no final da aula.

Desenvolvimento

- 1º. Momento: Abordar a história do surgimento dos números complexos, dando sua definição e expondo como exemplo alguns números complexos;
- 2º. Momento: Definir as operações de soma e subtração com números complexos;
- 3º. Momento: abrir um espaço para que os alunos comentem e tirem dúvidas sobre as operações apresentadas
- 4º. Momento: aplicar alguns exercícios de fácil entendimento para fixação do conteúdo trabalhado.

Conclusão

Concluir a aula resolvendo, junto com os alunos, os exercício de fixação e abrindo mais uma vez o espaço para o diálogo entre alunos e professor com o objetivo de sanar alguma dúvida, se caso existir.

Avaliação

A avaliação nesta aula será feita de forma paralela, observando comportamento, participação e interesse dos alunos.

AULA 2

Organização da turma

- Os alunos ficarão em seus respectivos lugares.

Introdução

Primeiramente fazer uma peque retomada da aula anterior. Em seguida expor aos alunos o conteúdo a ser trabalho nesta aula: Multiplicação e divisão de complexos; Representação algébrica e geométrica de um número complexo e módulo de um número complexo.

Desenvolvimento

- 1°. Momento: Definir as operações de multiplicação e divisão de números complexos;
- 2°. Momento: Representar Geometricamente um número complexo no plano dos complexos;
- 3°. Momento: Definir módulo de um número complexo;
- 4°. Momento: Abrir um espaço para que os alunos comentem e tirem dúvidas sobre definições e as operações apresentadas;
- 5°. Momento: aplicar alguns exercícios de fácil entendimento para fixação do conteúdo trabalhado.

Conclusão

Concluir a aula resolvendo, junto com os alunos, os exercício de fixação e abrindo mais uma vez o espaço para o diálogo entre alunos e professor com o objetivo de sanar alguma dúvida, se caso existir.

Avaliação

A avaliação nesta aula será feita de forma paralela, observando comportamento, participação e interesse dos alunos.

AULA 3

Organização da turma

- Os alunos ficarão em seus respectivos lugares.

Introdução

Primeiramente fazer uma peque retomada da aula anterior. Em seguida expor aos alunos o conteúdo a ser trabalho nesta aula: Potências da unidade imaginária; Representação trigonométrica de número complexo; multiplicação e divisão na forma trigonométrica.

Desenvolvimento

- 1°. Momento: Definir como se calcula as potências da unidade imaginária atentando para sua periodicidade;
- 2°. Momento: Definir como se representa um número complexo na forma trigonométrica;
- 3°. Momento: Definir as operações de multiplicação e divisão na forma trigonométrica;
- 4°. Momento: Abrir um espaço para que os alunos comentem e tirem dúvidas sobre as definições e operações apresentadas

5°. Momento: aplicar alguns exercícios de fácil entendimento para fixação do conteúdo trabalhado.

Conclusão

Concluir a aula resolvendo, junto com os alunos, os exercício de fixação e abrindo mais uma vez o espaço para o diálogo entre alunos e professor com o objetivo de sanar alguma dúvida, se caso existir.

Avaliação

A avaliação nesta aula será feita de forma paralela, observando comportamento, participação e interesse dos alunos.

AULA 4

Organização da turma

- Os alunos ficarão em seus respectivos lugares.

Introdução

Primeiramente fazer uma peque retomada da aula anterior. Em seguida expor aos alunos o conteúdo a ser trabalho nesta aula: Potenciação na forma trigonométrica; Raízes enésimas de números complexos; apresentação da fórmula de De Moivre .

Desenvolvimento

- 1°. Momento: Definir como se calcula as potências de um número complexo na forma trigonométrica apresentando a fórmula de De Moivre;
- 2°. Momento: Definir como se calcula raiz enésima de um número complexo na forma trigonométrica;
- 3°. Momento: Abrir um espaço para que os alunos comentem e tirem dúvidas sobre as definições e operações apresentadas
- 4°. Momento: aplicar alguns exercícios de fácil entendimento para fixação do conteúdo trabalhado.

Conclusão

Concluir a aula resolvendo, junto com os alunos, os exercício de fixação e abrindo mais uma vez o espaço para o diálogo entre alunos e professor com o objetivo de sanar alguma dúvida, se caso existir.

Avaliação

A avaliação nesta aula será feita de forma paralela, observando comportamento, participação e interesse dos alunos.

AULA 5

Organização da turma

- Os alunos ficarão em seus respectivos lugares.

Introdução

Nesta aula apresentaremos os instrumentos de desenho (Régua não graduada e compasso); Definiremos e construiremos retas paralelas e perpendiculares assim como definir e construir o triângulo equilátero. Faremos a ligação entre a relação que existe entre as raízes cúbicas da unidade e os vértices do triângulo equilátero.

Desenvolvimento

- 1º. Momento: Apresentar, com o auxílio de Notebook e data show, usando o aplicativo geogebra, a construção de retas paralelas e perpendiculares;
- 2º. Momento: Fazer com que os alunos reproduzam, com régua e compasso, a atividade descrita no momento anterior;
- 3º. Momento: Apresentar a construção do triângulo retângulo ainda com uso das ferramentas tecnológicas e digitais usadas no primeiro momento;
- 4º. Fazer com que os alunos reproduzam, com régua e compasso, a atividade descrita no momento anterior;
- 5º. Momento: aplicar e resolver, junto com os alunos o exercício abaixo desde o cálculo das raízes até a construção com régua e compasso do triângulo equilátero cujos vértices serão as raízes encontradas.

Calcule as raízes cúbicas do número 1 e represente-as no plano dos complexos

Solução: O número real positivo 1 tem módulo 1 e argumento 0. Então,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)} &= \sqrt[3]{1} \cdot \left[\cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{0 + 2k\pi}{3} \right] \\ &= 1 \cdot \left[\cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3} \right].\end{aligned}$$

Esses valores se repetem em ciclos de 3. De fato, cada aumento de uma unidade no valor de k gera um aumento de $2\pi/3$ no argumento. Um aumento de 3 unidades no valor de k gera um aumento de 2π no argumento e faz com que o valor de

$$\cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}$$

se repita. Note que essas raízes são vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo de centro na origem e raio 1.

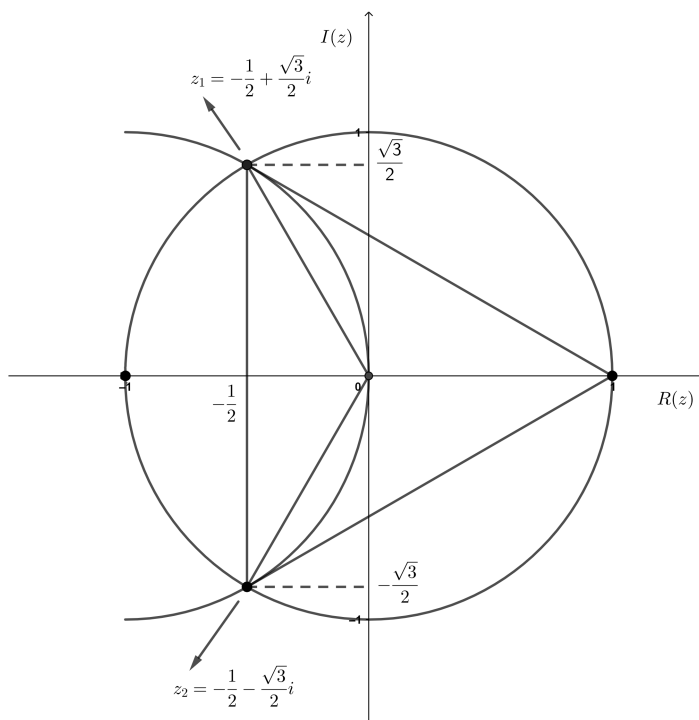
As raízes são obtidas fazendo $k = 0, 1, 2$ (pois se repetem a partir daí)

As raízes são:

- $k = 0; z_0 = 1.(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1.(1 + i .0) = 1$
- $k = 1; z_1 = 1. \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = 1. \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $k = 2; z_2 = 1. \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right) = 1. \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Vamos agora representar graficamente os três números complexos encontrados.

Figura 25 – raízes cúbicas da unidade



Fonte: do Autor

Conclusão

Concluir a aula abrindo mais uma vez o espaço para o diálogo entre alunos e professor com o objetivo de sanar alguma dúvida, se caso existir.

Avaliação

A avaliação nesta aula será feita de forma paralela, observando comportamento, participação e interesse dos alunos.

6 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

6.1 Considerações Finais

Ser professor é uma profissão que precisa ser constantemente reciclada e reinventada, por isso acreditamos que o professor de matemática, deve sempre buscar qualificação profissional para si, estudar e saber sempre mais sobre os assuntos que ministra (e mais do que os assuntos que ministra), para assim poder atender e prestar um serviço de ensino de alto grau de qualidade para a sociedade em que vive. Pensando nisso este trabalho buscou ajudar na formação e entendimento no que diz respeito a números complexos perpassando por sua história, definições e exemplos assim como a construção de segmentos construtíveis com régua e compasso. Ou sou em mostrar a construtibilidade do heptadecágono regular assim como uma justificativa da construção que, embora tenha se revelado trabalhosa pelo fato de apresentar longos e exaustivos cálculos pouco divulgados na literatura matemática, seu entendimento é relativamente simples uma vez que se valeu e se alicerçou no famoso Teorema de Pitágoras e assim, alcançando o objetivo desta obra. Vale ressaltar que o aplicativo de uso livre Geogebra foi de grande valia na construção deste trabalho, pois sendo este usado na construção das figuras que ilustraram esta obra. Concluímos este trabalho com a proposição de uma atividade de ensino para turmas de 3º ano do ensino médio. Nossa expectativa é que este trabalho gere frutos no que diz respeito ao melhoramento do processo de ensino-aprendizagem da matemática das escolas públicas assim como o mesmo pode servir de ponto de partida para futuros trabalhos relacionados à construções geométricas com régua e compasso e números complexos.

REFERÊNCIAS

- DETEMPLE, DUANE W. *Carlyle Circles and the Lemoine Simplicity of Polygon Constructions*. The American Mathematical Monthly, Volume 98, Issue 2 (Feb.,1991), 97-108. Citado na página 37.
- GARBI, GILBERTO G. *O romance das equações algébricas*. 3rd ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. Nenhuma citação no texto.
- LAFETÁ, ANNA CAROLINA; SILVA, ELAINE; LELIS, JEAN *Teoria dos números transcendentes: do teorema de Liouville à conjectura de Schanuel*. 1nd ed. Biental de Matemática. Rio de Janeiro, Brasil: 1997. Citado na página 22.
- LIMA, ELON LAGES; CARVALHO, PAULO CEZAR PINTO; WAGNER, EDUARDO, MORGADO, ALGUSTO CÉSAR *A Matemática do ensino médio Vol 3* . Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, Brasil: 1998 Nenhuma citação no texto.
- MACHADO, LUIZ A. DE A. *Construção com régua e compasso: Uma proposta didática para o ensino de polígonos regulares*. UFT, Arraias, Tocantins, 2019. Dissertação de Mestrado Nenhuma citação no texto.
- MIGUEL, MARCOS J. *Construções com régua e compasso*. UFRPE, Recife, Pernambuco, 2018. Dissertação de Mestrado Nenhuma citação no texto.
- REZENDE, ELIANE Q. F.; QUEIROZ, MARIA L. B. DE *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Campinas. SP: editora da Unicamp, 2000. Nenhuma citação no texto.
- WIKIPEDIA, A ENCICLOPÉDIA LIVRE. *Heptadecágono*. Disponível em <<https://pt.wikinew.wiki/wiki/Heptadecagon>>. Último acesso em 30/10/2021. Nenhuma citação no texto.