Universidade Federal do Pará

campus Universitário de Bragança

Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Construções Geométricas: Uma Proposta para o Ensino e Aprendizagem em Geometria Plana

Por

Edilson Alves de Assis

BRAGANÇA, PA - BRASIL

DEZEMBRO DE 2021

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA PLANA

Edilson Alves de Assis

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

Aprovada por: Carlos Alessandro da Costa Baldez

Prof. Carlos Alessandro da Costa Baldez, D.Sc
(Presidente)

Augusta

Profa. Maria Augusta Raposo de Barros Brito, D.Sc.
(Membro Interno)

Glauco Lira Pereira

Prof. Glauco Lira Pereira, D.Sc.
(Membro Interno)

Prof. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro, Ph.D
(Membro Externo-UFPA/Abaetetuba)

BRAGANÇA, PA - BRASIL
DEZEMBRO DE 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A848c Assis, Edilson Alves de.
Construções geométricas: Uma proposta para o ensino e aprendizagem em geometria plana / Edilson Alves de Assis. — 2021.
xv, 61 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Bragança, Programa de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, Bragança, 2021.

1. Ensino da Matemática. 2. Geometria. 3. Construções Geométricas. I. Título.

CDD 516.007

e.pí.gra.fe

"A verdade é um duelo de percepções. As pessoas só enxergam o que podem enfrentar. Nâo importa o que você vê... Mas sim, o que você enxerga. Quando diferentes percepções duelam entre si... A verdade tem um jeito de se perder... E os monstros. Encontram um jeito de sair."

(REVENGE.)

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais: Raimundo Rosa de Assis e Josefa Alves Lima e também minha avó Francisca Alves Lima, por terem me apoiado sempre e em todos os momentos difícei, também pelo apoio incondicional na minha caminhada dos estudos.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar a Deus por ter colocado no meu caminho pessoas necessárias que contribuíram muito para o meu conhecimento, e que eu pude contar nas horas precisas.

A Universidade Federal do Pará – *campus* de Bragança e a todos os professores do PROFMAT, pelo empenho de cada um, pela confiança e ética, pois me oportunizaram vislumbrar um novo horizonte.

Aos meus colegas de classe no quais tenho muito carinho e que foram muito solícitos quando precisei. Dias e noites que passamos juntos estudando arduamente para alcançar nossos objetivos e ao companherismo de todos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Alessandro da Costa Baldez pela orientação e suporte que me foi dado, tirando as dúvidas e dando dicas valiosas.

Resumo da Dissertação apresentada a UFPA/MEC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática (M.Sc.)

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA PLANA

Edilson Alves de Assis

Dezembro , 2021

Orientador: Carlos Alessandro da Costa Baldez, D.Sc

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta pedagógica em relação ao ensino da geometria através das construções geométricas. Em problemas gradualmente adequados aos anos finais do ensino fundamental e em todo o ensino médio. O significado matemático é obtido estabelecendo conexões entre ideias matemáticas em discursões particulares associadas a outros conhecimentos pessoais do indivíduo, a geometria esta presente no dia a dia dos alunos, e uma metodologia didática que é o uso das construções geométricas. Para isso, o estudo oferece buscar aliar o ensino da geometria por meio das construções geométricas, justificando cada processo cognitivo usando os conhecimentos básicos da geometria euclidiana, tais como axiomas, proporções, teoremas dentre outros. Desta forma, fazer com que os alunos possam assimilar melhor os conteúdos em geometria. Além disso, traz também a resolução de problemas sem o uso da álgebra, e em quais em casos mais complexos seu uso se faz necessário. Metodologicamente, esta dissertação trata-se de uma abordagem qualitativa como tipo de investigação.

Palavras-Chave: Ensino da Matemática. Geometria. Construções Geométricas.

Abstract of Dissertation presented to UFPA/MEC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Mathematics (M.Sc.)

GEOMETRIC CONSTRUCTIONS: A PROPOSAL TO TEACHING AND LEARNING IN PLANE GEOMETRY

Edilson Alves de Assis

December, 2021

Advisor: Carlos Alessandro da Costa Baldez, D.Sc

This paper aimed to promote a pedagogical proposal in relation to geometry teaching through geometric constructions. In math‘s problems appropriate to final grades of elementary school and all high school. The mathematical meaning is gotten stablishing connections between mathematical ideas in particular discussions combined to previous knowledge of the students. The geometry is present in students daily, a didactic approach by use of geometric constructions. For this, this work proposes associate the geometry teaching through geometric constructions. It justify each cognitive process by the use of basic knowledge of the Euclidean Plane Geometry, such as: axioms, proportions, theorems, among others. That way, the students might be able assimilate well geometry contents. In addition, it also provides the resolution of the problems without using algebra, however in case more complex the algebra use is necessary. Methologically this master‘s thesis shows a qualitatite theoretical approach how kind of investigation.

Words-key: Mathematics teaching. Geometry. Geometric Constructions.

Sumário

Lista de Figuras

Figura

Lista de Tabelas

Tabela

Lista de Siglas e Abreviaturas

- O.P.V : Opostos pelo vértice
- ABC : Triângulo de vértices A, B e C.
- L.A.L : Caso de congruência de triângulos: Lado-Ângulo-Lado
- A.L.A : Caso de congruência de triângulos: Ângulo-Lado-Ângulo
- L.L.L : Caso de congruência de triângulos: Lado-Lado-Lado
- L.G : Lugar geométrico
- $\blacksquare$: Fim de uma demonstração

Capítulo 1

Introdução

A Geometria é de fundamental importância para o nosso dia a dia, pois ela nos permite uma percepção e visualização de espaço, como também o desenvolvimento de habilidades em outras áreas de conhecimento, como a Mecânica, Engenharias, Física entre outras, ela nos possibilita fazer explorações, representações e construções.

O ensino/aprendizagem da geometria na rede pública de ensino, tem seus desafios, dentre eles cita-se o ensino de construções geométricas. O fato é que as construções geométricas que deram origem a geometria euclidiana necessita de materiais como régua e compasso, porém a ausência desses materiais no momento da aula acarreta na não aplicação da prática dos conteúdos. Já quando a iniciativa independe dos alunos e alunas em contruir os entes geométricos, a concepção se limita em simples desenhos, assim cabendo o professor mostrá-los que esse ensino geométrico vai muito além disso.

As construções geométricas desenvolvem a percepção e aperfeiçoamento de um pensamento lógico para assimilação da geometria euclidiana. Ao falar das construções geométricas, é relevante destacar que ela chegou ao Brasil com "A Academia Real Militar da Corte e foi fundada pela Carta Régia de 4 de Dezembro de 1810, através de D. João VI." porém sua implantação de forma oficial na rede publica foi no século XIX com as escolas militares, " A matemática no Brasil estava fortemente presente na formação técnica e militar" Zuin (2002), pág. 66.

Ao longo do tempo as construções geométricas (desenho geométrico) foram perdendo espaço e sofrendo com uma acentuada desvalorização causada pela falta de obrigatoriedade nas provas de vestibulares, o que culminou com sua retirada do currículo escolar, com a promulgação da Lei 5.692 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental (1971).

Assim muitas escolas "excluíram o Desenho Geométrico, já que esse não era mais uma disciplina obrigatória" Zuin (2002), pág.91. Ressurgindo nos anos 90, inserido nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática — PCNs Ministério da Educação e do Desporto (1998), porém sua implantação ao livro didático foi de forma acanhada e descolada do ensino da geometria. Como frisa Zuin (2001), "as construções geométricas, abordadas nos livros de matemática, se restringem a um conteúdo muito reduzido, fixando-se apenas a alguns tópicos, não possibilitando uma visão mais ampla da sua integração com a geometria euclidiana " Zuin (2001), pág. 191

Observando esse atual cenário de desvalorização no processo de ensino e aprendizagem das construções geométricas, surgiu a motivação em desenvolver este trabalho na busca de resgatar o ensino e a prática dos conteúdos da área em questão, destacando a relevância de tal ensino para os estudos matemáticos.

Diante desse quadro, o estudo pretende propor um processo de percepção, memoraização e raciocíno lógico para o ensino da geometria através das construções geométricas, justificando cada etapa de criação dos desenhos geométricos usando os conhecimentos básicos da geometria euclidiana, como: axiomas, proporções, teoremas dentre outros. Desta forma, fazendo com que os alunos possam assimilar melhor os conteúdos em geometria. trazer também a resolução de problemas sem o uso da álgebra e quais casos mais complexos seu uso se se faz necessário.

Como sugere WAGNER (2007): "As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática Elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas".

Desta forma, acreditamos que com as construções geométricas, e justificando passo a passo, iremos alcançar o resultado desejado, ou seja que os alunos se apoderem dos conhecimentos matemáticos, implementando o uso em situações hipotéticas bem como em situações reais.

1.1 Motivação da Dissertação

Diante de observações em sala de aula e nos livros didáticos sobre o ensino da geometria percebeu-se que havia uma distância entre as construções geométricas e a geometria plana, desta forma não havia o interesse dos alunos em "decorar" postulados, teoremas e proposições, assim um caminho no incetivo de que eles guardem tais informações é com o uso das construções geométricas. Outro fator decisivo para escolha de nosso tema de dissertação deu-se ao analisarmos o Livro I de EUCLIDES (2009) onde encontramos sua primeira proposição, cuja demonstração é uma prova clara sobre o ensino de geometria unido ao uso de régua e compasso.

I

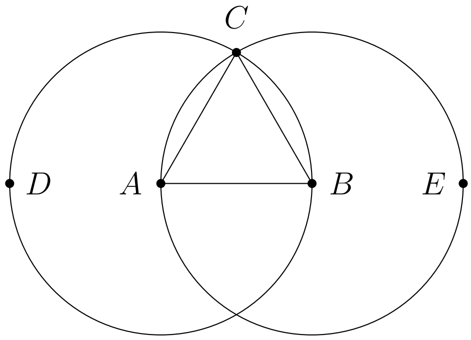
"***Construir(com régua e compasso) um triângulo equilátero sobre a reta limitada***"

Demonstração: Seja AB a reta limitada. Fique descrito por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir, do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B fiquem ligadas as retas CA, CB.

E como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo. com o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual a BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si.

Portanto o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada AB.

Figura 1.1: Construção do triângulo equilátero com lado AB em posicção.



Fonte: C. A. da Costa Baldez.

■

Esses dois pontos despertou a idéia de unir as contruções geométricas como um modo auxiliador para o ensino da geometria plana para alunos do ensino básico.

1.2 Objetivo da Dissertação

Este trabalho tem como objetivo trazer uma proposta pedagógica em relação ao ensino da geometria, através das construções geométricas. Trabalhando conjuntamente com as construções geométricas e os resultados básicos da geometria euclidiana, trazendo também problemas adequados aos anos finais do ensino fundamental e em todo o ensino médio.

1.3 Organização da Dissertação

O trabalho está dividido em capítulos começando com a introdução. No capítulo 2, enunciamos resultados básicos da geometria euclidiana, as demonstrações foram omitidas para efeito de pesquisa.

No capítulo 3, abordamos as construções básicas com régua e compasso, ou seja, as construções elementares que darão sustentação para resolver vários problemas geométricos.

No capítulo 4, usamos as expressões algébricas como forma de construir soluções de problemas com o uso da álgebra.

E por fim, no capítulo 5, fazemos nossas considerações finais e conclusão de nosso trabalho.

Capítulo 2

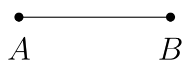
Resultados Básicos

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados básicos da geometria Euclidiana, aqui trataremos das definições, proposições, axiomas, lemas, corolários e teoremas da geometria plana, servindo de suporte para justificar cada construção dos capítulos seguintes.

2.1 Segmentos

Definição 2.1.1 O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado de segmento AB. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.

Figura 2.1: Segmento de extremidade A e B.



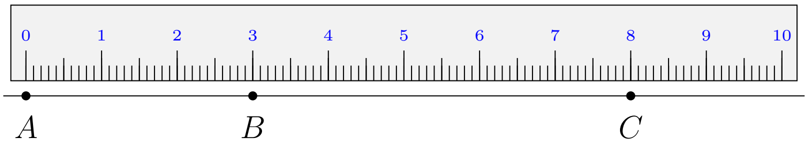
Fonte: Autor.

Observação 2.1.1 A régua graduada é o instrumento que usamos para medir comprimento de segmentos.

Neste exemplo, dizemos que AB mede 3 cm, AC mede 8 cm e BC mede 5 cm.

Um triângulo é uma figura plana formada por três pontos que não pertencem a uma mesma reta e pelos três segmentos determinados por estes três pontos.

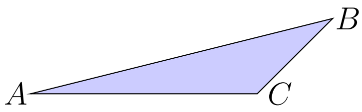
Figura 2.2: Régua graduada



Fonte: Fonte: Adaptado de dos SANTOS (2016).

Os três pontos são chamados de *vértices* do triângulo e os segmentos , *lados* do triângulo.

Figura 2.3: Triângulo de vértices A, B e C



Fonte: Autor.

Definição 2.1.2 Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos de segmento ABe por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de *semi-reta* de origem A contendo o ponto B, e é representado por S_{AB}. O ponto A é chamado de origem da semi-reta AB.

Figura 2.4: Semi-reta de origem A, contendo B. S_{AB}.

Fonte: Autor.

Observação 2.1.2 Os pontos A e B determinam duas semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ que contém o segmento AB.

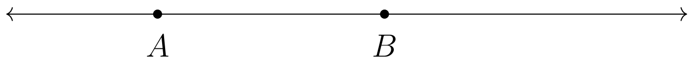
Proposição: Para as semi-retas determinadas por dois pontos A e B tem-se:

a) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ é a reta determinada por A e B,

b) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$

Demonstração: Ver BARBOSA (2003), pág. 4.

Figura 2.5: Reta AB.

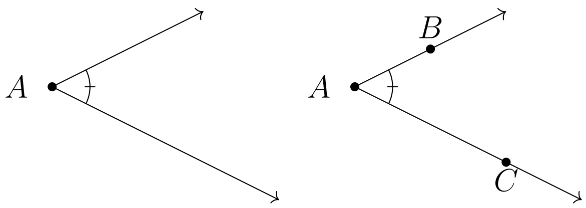


Fonte: Autor.

2.2 Ângulos

Definição 2.2.1 Chamamos de *ângulo* a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem

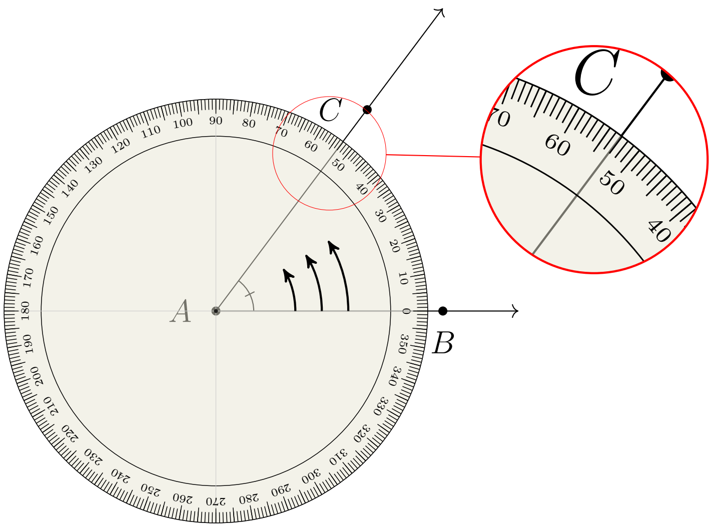
Figura 2.6: Ângulo AOB de vértice O.



Fonte: Autor

Notação. $\widehat{A}$, $\angle A$ ou para não haver dúvidas $\angle BAC$ ou $(\angle CAB)$. Os ângulos são medidos em graus com o auxílio de um transferidor. Neste caso, temos $\angle BAC =$

Figura 2.7: Transferidor.

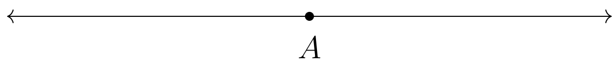


Fonte: Adaptado de NEVES (2016).

53°.

Observação 2.2.1 As semi-retas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem comum, de *vértice* do ângulo. Um ângulo formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta é chamado de *ângulo raso*, e sua medida é 180°.

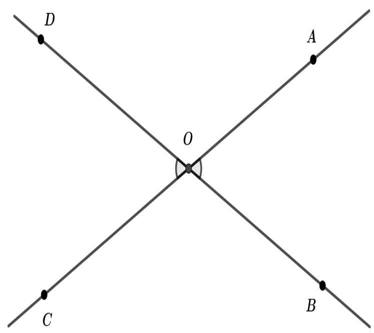
Figura 2.8: Ângulo raso.



Fonte: Autor.

Definição 2.2.2 Dois ângulos $\angle AOB$ e $\angle COD$ (de mesmo vértice O) são opostos pelo vértice (abreviamos O.P.V) se seus lados forem semirretas opostas.

Figura 2.9: Ângulos opostos pelo vértice.



Fonte: Autor.

Proposição 2.2.1 Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais.

Demonstração: Ver BARBOSA (2003), pg. 34.

2.3 Congruência de Triângulos

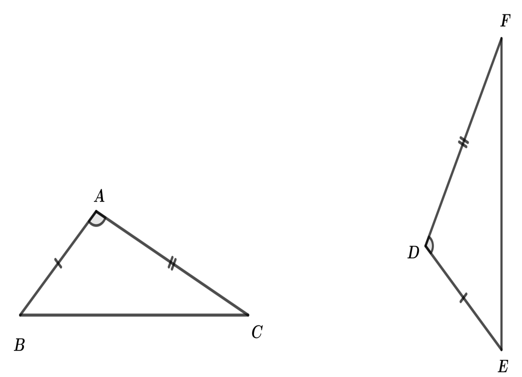
Definição 2.3.1 Dizemos que dois triângulos ABC e DEF são congruentes, se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

$$ABC \equiv A'C'D' \iff \begin{cases} AB \equiv A'B' & \text{e} \quad \angle A \equiv \angle A' \\ AC \equiv A'C' & \text{e} \quad \angle B \equiv \angle B' \\ BC \equiv B'C' & \text{e} \quad \angle C \equiv \angle C' \end{cases}$$

A congruência entre triângulos é *reflexiva, simétrica e transitiva.*

Axioma 2.3.1 Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem, respectivamente, iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses outros dois lados, então os triângulos são congruentes.

Figura 2.10: Caso de congruência LAL.

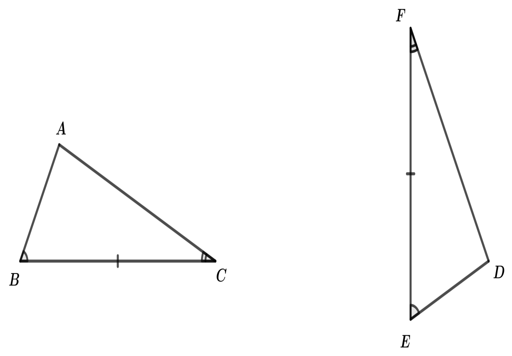


Fonte: Autor.

Teorema 2.3.1 Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

Demonstração: BARBOSA (2003); DOLCE (2001).

Figura 2.11: Caso de congruência ALA.



Fonte: Autor.

Proposição 2.3.1 Se ABC é um triângulo isósceles de base BC, então $\hat{B} = \hat{C}$

Demonstração: BARBOSA (2003); DOLCE (2001); MUNIZ NETO (2013)

Proposição 2.3.2 Se, em um triângulo ABC, tem-se dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles.

Demonstração: BARBOSA (2003)

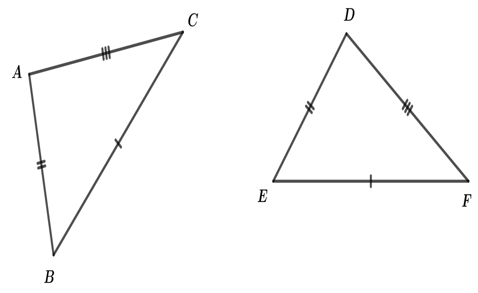
Proposição 2.3.3 Em um triângulo isósceles a mediana **relativamente** a base é também bissetriz e altura

Demonstração: BARBOSA (2003)

Teorema 2.3.2 Se dois triângulos têm três lados corresnpondentes congruentes então os triângulos são congruentes.

Demonstração: BARBOSA (2003); DOLCE (2001).

Figura 2.12: Caso de congruência LLL.



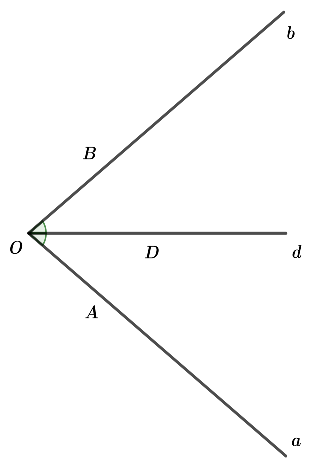
Fonte: Autor.

Corolário 2.3.1 Dado um segmento de extremidade AB existe um único ponto M entre A e B tal que $AM = MB$. Esse ponto M é chamado de ponto médio do segmento AB.

Demonstração: BARBOSA (2003); DOLCE (2001).

Corolário 2.3.2 Dado um ângulo $\angle AOB$ existe uma única semi-reta $\overrightarrow{OD}$ tal que $\angle AOD = \angle DOB$. Essa semi-reta é chamada **bissetriz** do ângulo $\angle AOB$.

Figura 2.13: Existência da semi reta bissetriz.



Fonte: Autor.

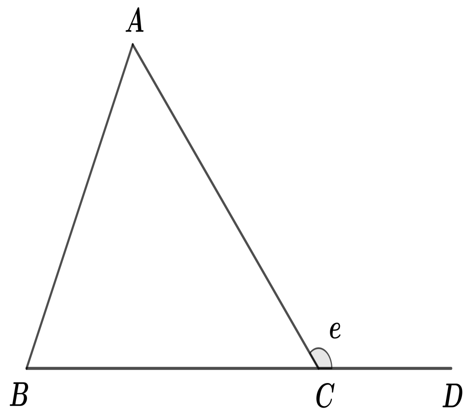
Demonstração: DOLCE (2001).

2.4 Paralelismo

Lema 2.4.1 Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração: BARBOSA (2003).

Figura 2.14: Ângulo externo



Fonte: Autor.

Proposição 2.4.1 A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o.

Demonstração: BARBOSA (2003); DOLCE (2001).

Corolário 2.4.1 Os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a 60^o.

Corolário 2.4.2 Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ale.

Demonstração: DOLCE (2001).

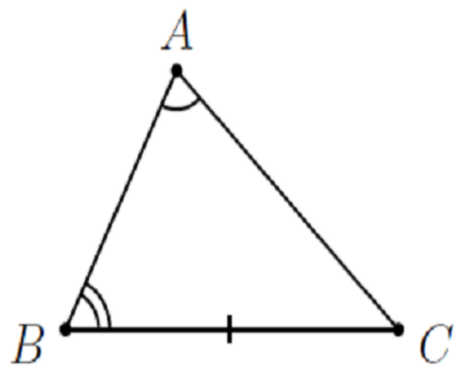
Corolário 2.4.3 Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois de outro triângulo e ao lado oposto correspondente nesse outro triângulo, então os triângulos são congruentes. Em símbolos, dados triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$\text{Hipótese:} \quad \begin{cases} \overline{BC} & \equiv & \overline{B'C'} \\ \angle BAC & \equiv & \angle B'A'C' \\ \angle ABC & \equiv & \angle A'B'C' \end{cases} \implies \text{Tese:} \quad ABA \equiv A'B'C'$$

Com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$.

Demonstração: MUNIZ NETO (2013).

Figura 2.15: Caso de congruência LAA_0.



Fonte: Autor.

2.5 Paralelogramo

Definição 2.5.1 Um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

Proposição 2.5.1 Um quadrilátero convexo é paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem iguais.

Demonstração: BARBOSA (2003); DOLCE (2001).

Proposição 2.5.2 Um quadrilátero convexo é um losangulo se, e só se, tiver diagonais perpendiculares.

Demonstração: MUNIZ NETO (2013).

2.6 Semelhança de Triângulos

Definição 2.6.1 Diremos que dois triângulos ABC e EFGsão semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices: $A \to E$, $B \to F$ e $C \to G$, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

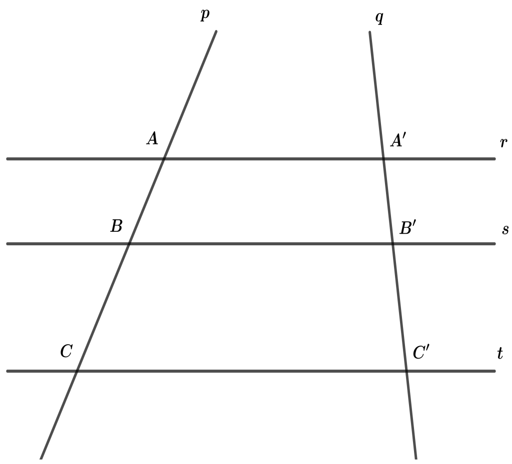
$$ABC \sim EFG \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{AB}{EF} = \kappa \quad \text{e} \quad \angle A \equiv \angle E \\ \dfrac{BC}{FG} = \kappa \quad \text{e} \quad \angle B \equiv \angle F \\ \dfrac{CA}{GE} = \kappa \quad \text{e} \quad \angle C \equiv \angle G \end{cases}$$

κ é chamada de constante de **razão de proporcionalidade**

Teorema 2.6.1 *Teorema de Tales* - Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhendo pontos $A, A' \in r$, $B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

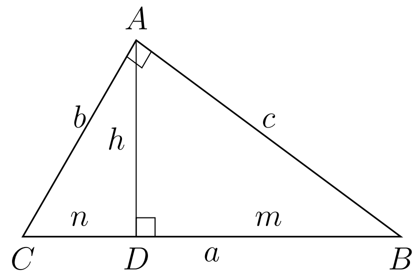
Figura 2.16: Configuração geométrica para o Teorema de Tales.



Fonte: Autor.

Demonstração: BARBOSA (2003); DOLCE (2001); MUNIZ NETO (2013).

Figura 2.17: Semelhança de triângulo em um triângulo retângulo.



Fonte: C. A. da Costa Baldez.

2.6.1 Relações Métricas de em um Triângulo Retângulo

Na figura abaixo, temos três triângulos retângulos, a saber: ABC, ADB e ADC. Nota-se que os triângulos ABC e ADB são triângulos semelhantes. Assim como os triângulos ABC e ADC. Daí, concluímos a semelhança entre os triângulos ADC e ADB. Dessa relação de semelhança, obtemos:

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}.$$

Da última igualdade deduz-se que

$$h^2 = m \cdot n$$

Assim, provamos a seguinte

Proposição 2.6.1 Em todo triângulo retângulo a altura do vértice do ângulo reto é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Teorema 2.6.2 *-Teorema (de PITÁGORAS)-* Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipoteusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos do catetos.

Prova: Da relação de semelhança do triângulo acima, obtemos

i)

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a}$$

ii)

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$$

De $i)$ e $ii)$ temos $c^2 = m \cdot a$ e $b^2 = n \cdot a$, respectivamente. Logo

$$b^2 + c^2 = n \cdot a + m \cdot a = (n + m) \cdot a = a^2.$$

■

Em resumo temos a seguinte tabela:

Semelhança	Relações	Resultados
$DAC \sim ABC$	$\frac{b}{a} = \frac{n}{b}$	$b^2 = a \cdot n$
$DAB \sim ACB$	$\frac{c}{a} = \frac{m}{c}$	$c^2 = a \cdot m$
$DAC \sim DAB$	$\frac{h}{a} = \frac{n}{h}$	$h^2 = m \cdot n$
		$a^2 = b^2 + c^2$
		$a \cdot h = b \cdot c$

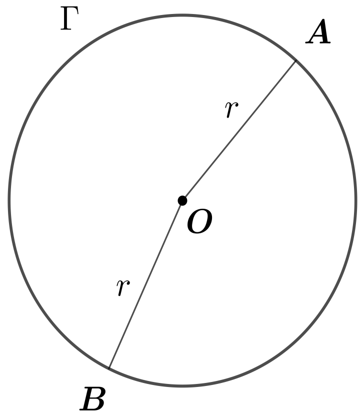
Tabela 2.1: Relações métricas em um triângulo retângulo

2.7 Círculo

Definição 2.7.1 O círculo Γ de centro O e raio r é o lugar geométrico formado por todos os pontos do plano que estão a uma mesma distância r do ponto O.

Observação 2.7.1 Chamaremos de *raio* ao segmento que une o centro do círculo a qualquer de seus pontos. O segmento ligando dois pontos do círculo será chamado de *corda*. Toda corda que passa pelo centro do círculo é um diâmetro.

Figura 2.18: Configuração do círculo Γ, de centro O e raio r.

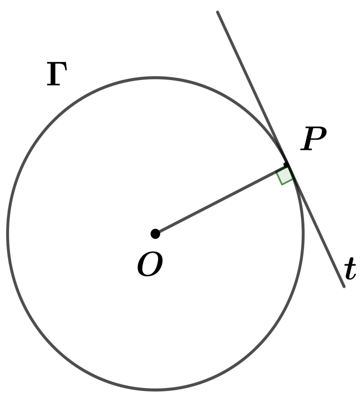


Fonte: Autor.

Proposição 2.7.1 Sejam Γ um círculo de centro O e P um ponto de Γ. Se t é uma reta que passa por P e é perpendicular à OP, então t é tangente a Γ.

Demonstração: BARBOSA (2003).

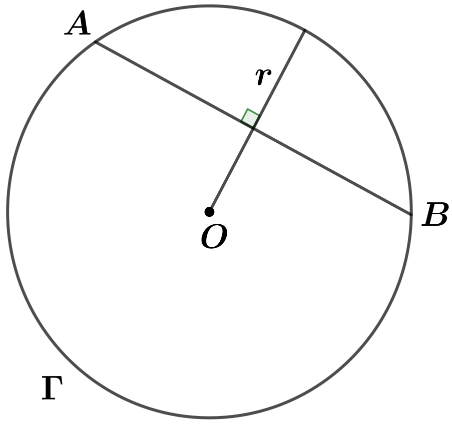
Figura 2.19: Configuração de uma reta tangente ao um círculo dado.



Proposição 2.7.2 Um raio é perpendicular a uma corda(que não é um diâmetro) se e somente se a divide em dois segmentos congruentes.

Demonstração: BARBOSA (2003).

Figura 2.20: Configuração de uma corda de um círculo e um raio perpendicular à mesma.



Fonte: Autor.

Proposição 2.7.3 Se uma reta é tangente a um círculo então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.

Demonstração: BARBOSA (2003).

Proposição 2.7.4 Se uma reta é perpendicular a um raio em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.

Demonstração: BARBOSA (2003).

Proposição 2.7.5 Todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente.

Demonstração: BARBOSA (2003).

Corolário 2.7.1 Todos os ângulos inscritos que subtendem um mesmo arco têm a mesma medida. Em particular, todos os ângulos subtendem um semicírculo são retos.

Demonstração: BARBOSA (2003).

Proposição 2.7.6 Sejam AB e CD cordas distintas de um mesmo círculo que se intersectam num ponto P. Então $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.

Demonstração: BARBOSA (2003).

Proposição 2.7.7 Se dois lados de um ângulo de vértice P são tangentes a um círculo nos pontos A e B, então. $i)$ a medida do ângulo $\angle APB$ é igual a 180^o menos a medida do arco menor determinado por A e B. $ii)$ $PA = PB$.

Demonstração: BARBOSA (2003).

Capítulo 3

Contruções Geométricas: Régua e Compasso

Neste capítulo, mostramos as construções com régua e compasso, buscando justificar cada resultado obtido, mostrando uma integração com o capítulo anterior.

3.1 Construções Básicas Fundamentais

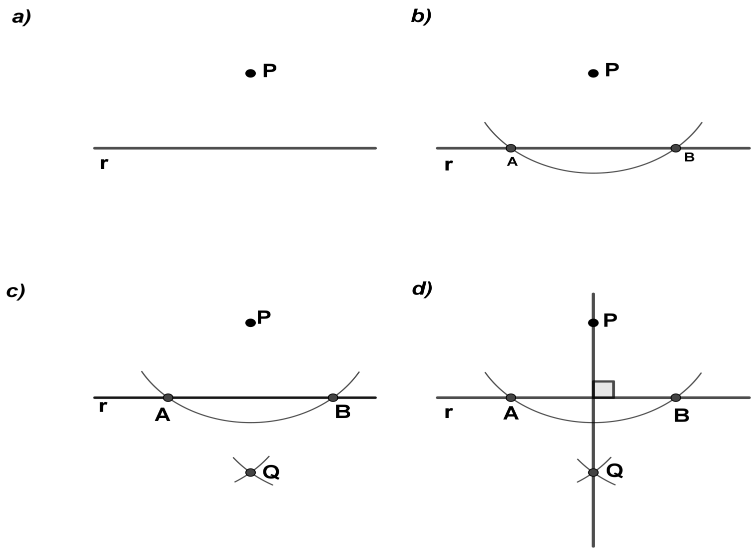
Definição 3.1.1 De acordo com DOLCE (2001), duas retas são perpendiculares (símbolo:$\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.

Abaixo, descrevemos dois métodos para construção de retas perpendiculares, sendo que reta a ser construida deve passar por um determinado ponto P.

- Caso 1: Dados uma reta r e um ponto P, com $P \notin r$. Fig. *a)*.

  1. Traçamos um círculo Γ_1 com centro em P intersectando r em A e B. Fig. *b)*.
  2. Com o mesmo raio, traçamos os círculos Γ_2 e Γ_3 com centros em A e B, respectivamente. Esses círculos se intersectam em dois pontos, chamamos de Q uma dessas interseção. Fig. *c*.
  3. Traçamos a reta PQ. Fig. *d)*.
  4. A reta PQ é a reta perpendicular pedida.

Figura 3.1: Construção de uma reta perpendicular, com o ponto P não pertencente à reta dada.



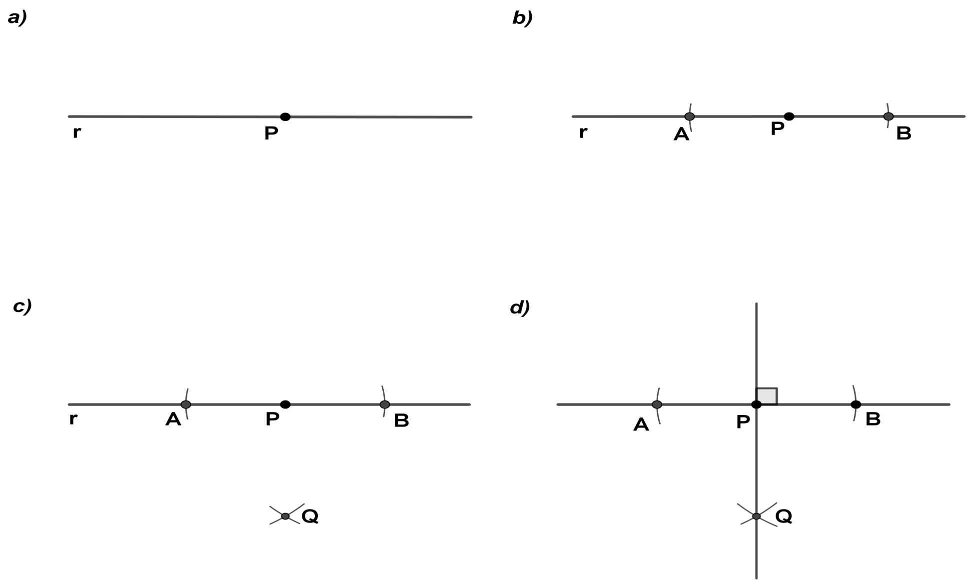
Fonte: Autor.

Justificativa: De fato, por construção $AP = PB$ (raios de Γ_1) e $AQ = QB$ (raios de Γ_2 e Γ_3). Desta forma, temos que $ABCD$ é um losângulo, logo AB e PQ são diagonais, da Proposição 2.5.2 temos que AB e PQ são perpendiculares.

- Caso 2: Dado uma reta r e um ponto P, com $P \in r$. Fig. *a).*

  1. Centrado em P traçamos o círculo Γ_1 de raio qualquer determinando A e B sobre r. Fig. *b).*
  2. Traçamos os círculos Γ_2, centrado em A e raio maior que AP e com mesmo raio centrado em B, traçamos Γ_3, obtendo Q, uma das interseções de Γ_2 e Γ_3. Fig. *c).*
  3. Traçamos a reta PQ. Fig. *d).*
  4. A reta PQ é a reta perpendicular procurada.

Figura 3.2: Construção de uma reta perpendicular, com o ponto P pertencente à reta dada.



Fonte: Autor.

Justificativa: Observe que o triângulo AQB é isósceles de base AB e P é ponto médio de AB. Assim, PQ é mediana de ABQ logo, pela Proposição 2.3.3, PQ é mediana e altura. Portanto, perpendicular.

Problema 1. Construir uma reta perpendicular à extremidade de um segmento AB sem prolongá-lo. Fig. *a)*.

Solução:

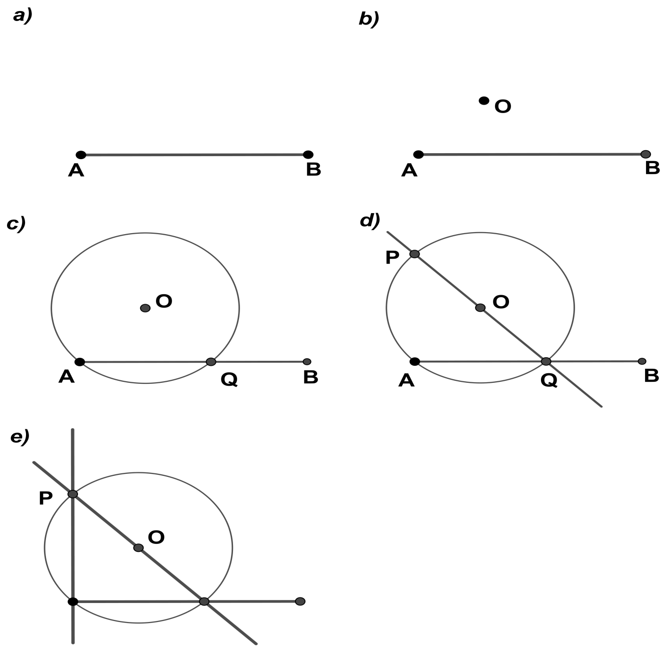
1. Tome um ponto O qualquer não pertencente ao segmento AB. Fig. *b)*.

2. Centrado em O e raio AO traçamos um círculo Γ, determinando o ponto Q sobre a reta AB. Fig. *c)*.

3. Unindo os pontos O e Q, determinamos o ponto P sobre Γ. Fig. *d)*.

4. A reta AP é a reta, perpendicular a AB, procurada. Fig. *e)*.

Figura 3.3: Construção de uma reta perpendicular, passando pela extremidade A.



Fonte: Autor.

Justificativa: Observe que PQ é diâmetro do círculo Γ e $A \in \Gamma$, como $\angle QAP$ é um ângulo inscrito no semicírculo segue da Proposição 2.7.5 que $\angle QAP$ é reto.

$\blacksquare$

Definição 3.1.2 A mediatriz de um segmento AB é o Lugar Geométrico-**LG** constituído por todos os pontos equidistantes de A e B.

Problema 2. Dado um segmento AB, construa a reta perpendicular à AB passando pelo seu ponto médio M. Fig. *a)*.

Solução:

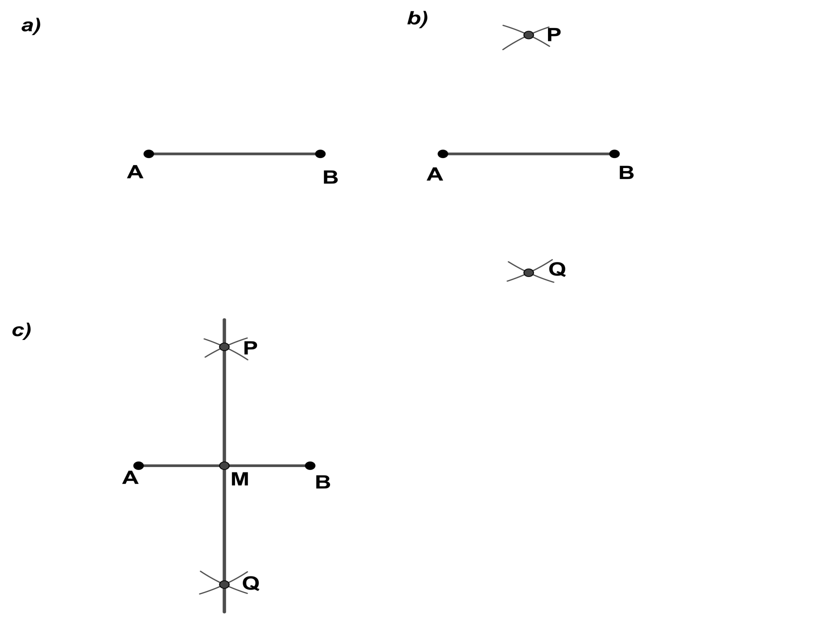
1. Com o compasso centrado em A trace um círculo Γ_1 com raio maior que AB. Fig. *b)*.

2. Do mesmo modo, centrado em B trace um círculo Γ_2.

3. Os círculos se intersectam em dois pontos P e Q. Fig. *c)*.

4. A reta m, definida por PQ intersecta AB em seu ponto médio M e é a mediatriz do segmento AB.

Figura 3.4: Construção da mediatriz de um segmento dado.



Fonte: Autor.

Justificativa: De fato, o triângulo que APB é isósceles e PM é a mediana, por construção, logo segue da Proposição 2.3.3 que PM é altura e, portanto, a reta m definida por PM, é perpendicular a AB. Além disso, se P' é um ponto qualquer de m então o triângulo $AP'B$ é isósceles. Essa afirmação segue da congruência dos triângulos $AM'P$ e BMP' pelo caso $L.A.L.$ Desta forma, a reta PM é também a mediatriz.

■

Problema 3. (*Construção de Paralelas*) - Dado uma reta r e um ponto P com $P \in r$. Construa um reta s paralela à reta r, passando por P. Fig. *a)*.

Solução:

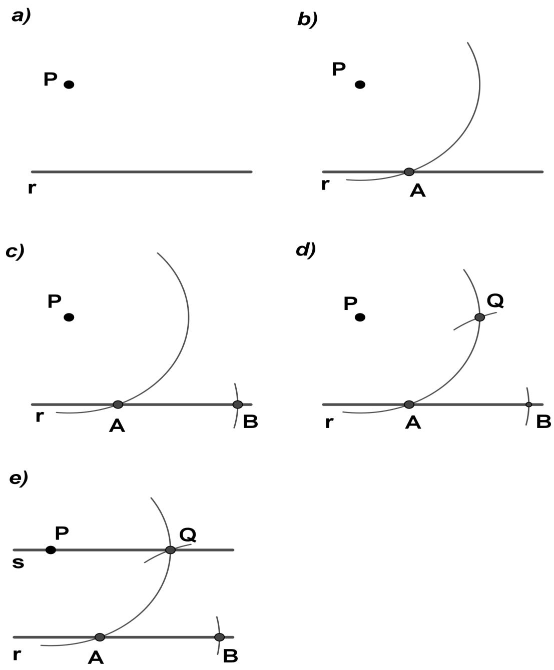
1. Centrado em P traçamos o círculo Γ_1, determinando um ponto A, como sendo uma das interseções com r. Fig. *b)*.

2. Centrado em A e, com mesmo raio, traçamos Γ_2, determinando B, uma das interseções com r. Fig. *c)*.

3. Centrado em B e mesmo raio, traçamos Γ_3, determinando o ponto Q a interseção com Γ_1. Fig. *d)*.

4. A reta s, definida pelos pontos PQ é a reta paralela a r. Fig. *e)*.

Figura 3.5: Construção da paralelas.



Fonte: Autor.

Justificativa: Segue da Proposição 2.5.1 que o quadrilátero $PABQ$ é um paralelogramo.

■

Problema 4. Construa um triângulo ABC conhecendo os lados AB, BC e a altura relativa a BC. Fig. *a)*.

Solução:

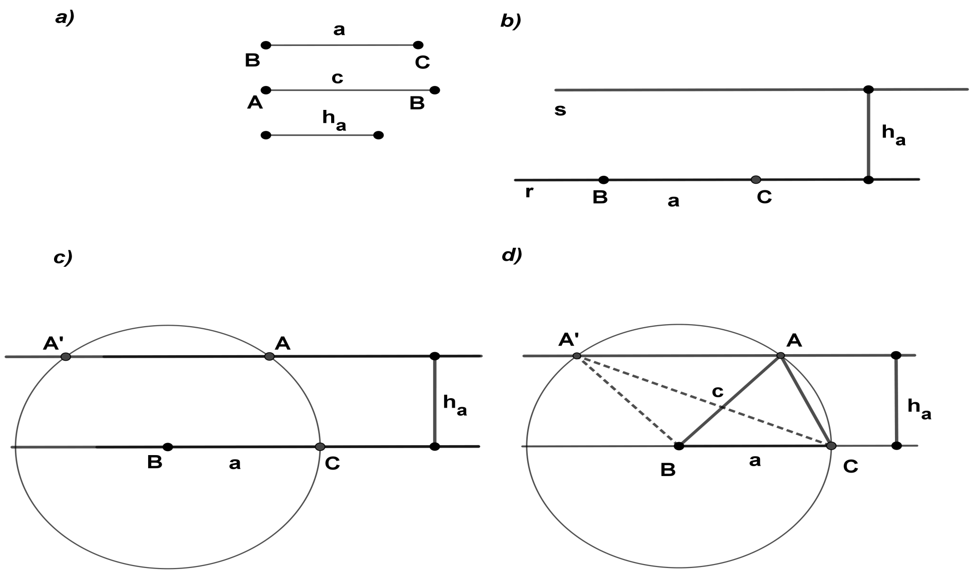
1. Trace uma reta r e sobre ela marcamos o segmento BC.

2. Trace uma reta s paralela a r, cuja distância entre elas seja a igual a altura h dada. Fig. *b)*.

3. Trace o círculo Γ centrado em B e raio AB, determinando A e A' sobre s. Fig. *c)*.

4. ABC é o triângulo procurado. Fig. *d)*.

Figura 3.6: Solução geométrica do Problema 4.



Fonte: Autor.

Observação 3.1.1 Note que o problema admite duas soluções. A saber, os triângulos ABC e $A'BC$, tais triângulos não são congruentes, mas são equivalentes(ou seja, triângulos de mesma área).

Problema 5. (*Construção de Bissetriz*) - Dado um ângulo $\angle AOB$, construa a bissetriz desse ângulo.

Primeiramente, iremos mostrar como se transporta um ângulo dado. Fig. *a)*.

1. Centrado em O e raio qualquer trace o círculo Γ_1 determinando os pontos P e Q sobre os lados do ângulo. Fig. *b)*.

2. Em seguida, com mesmo raio, trace o círculo Γ_2 centrado no ponto D de uma reta r, encontrando o ponto E sobre r. Fig. *c)*.

3. Depois trace o círculo Γ_3, centrado em E com raio PQ, determinando F, interseção de Γ_2 com Γ_3. Fig. *d)*.

4. Finalmente, trace DF, desta forma, temos $\angle EDF = \alpha$. Fig. *e)*.

Figura 3.7: Transporte de um ângulo

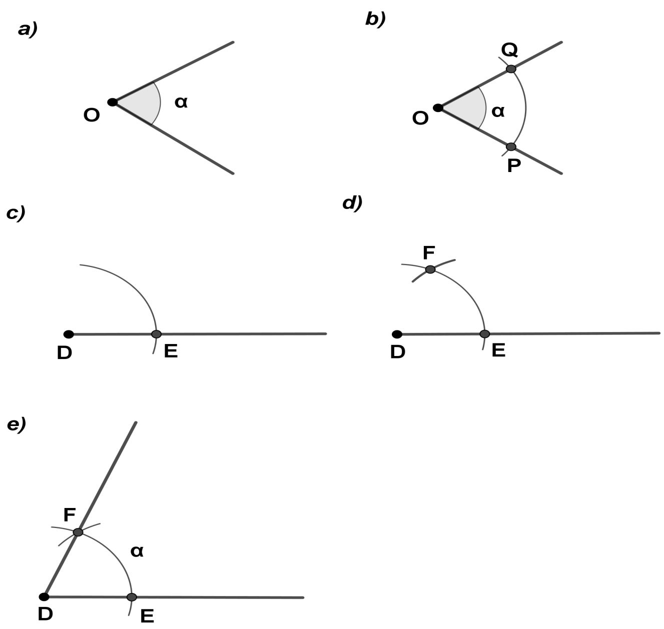


Figura 3.8: Fonte: Autor.

Justificativa: Por construção, os triângulos OPQ e DEF são congruentes, pelo caso $L.L.L$, em particular, temos congruência dos ângulos.

Solução(Construção de Bissetrizes):

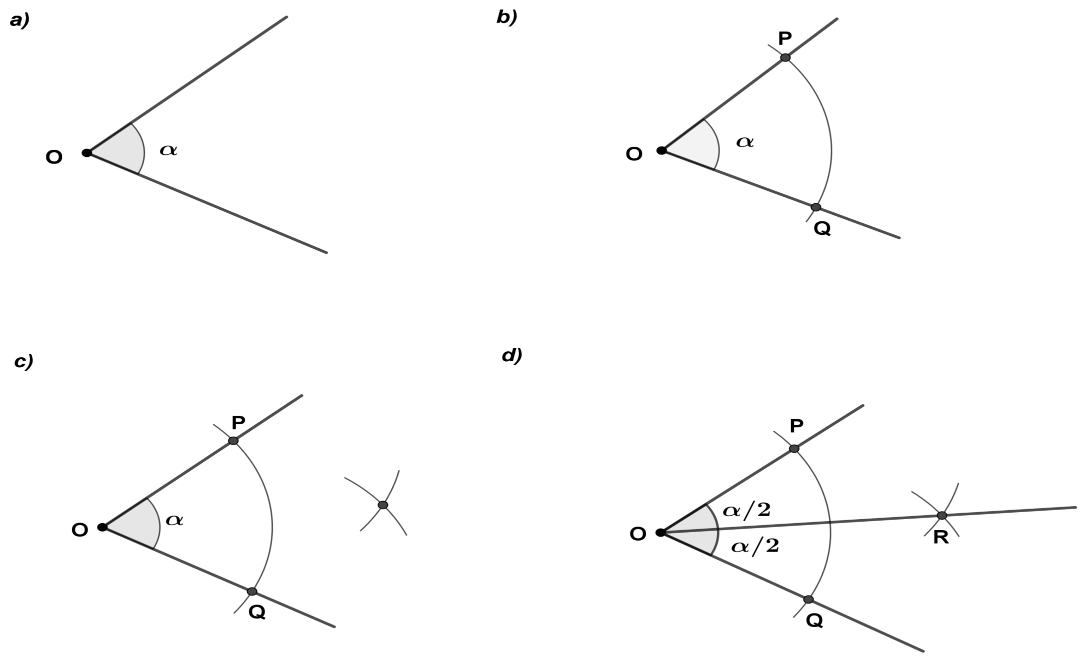
1. Trace o círculo Γ_1, centrado em O e raio qualquer determine os pontos P e Q. Fig. *b)*.

2. Com o mesmo raio trace os círculos Γ_2 e Γ_3, centrados em P e Q, respectivamente, obtendo o ponto R. Fig. *c)*.

3. Trace a semi reta OR. Fig. *d)*.

4. A reta OR é a bissetriz do ângulo dado.

Figura 3.9: Construção da bissetriz de um ângulo qualquer.



Fonte: Autor.

Justificativa: Note que os triângulos POR e QOR são congruentes, pelos caso $L.L.L$. Segue da congruência que $\angle POR \equiv \angle QOR$.

■

Problema 6. Construa o triângulo ABC conhecendo o perímetro $2p$ e os ângulos $\angle B$ e $\angle C$. Em seguida trace a bissetriz de tais ângulos. Fig. *a)*.

Solução:

1. Trace uma reta r e sobre ela determine dois pontos B' e C' de modo que $B'C' = 2p$. Fig. *b)*.

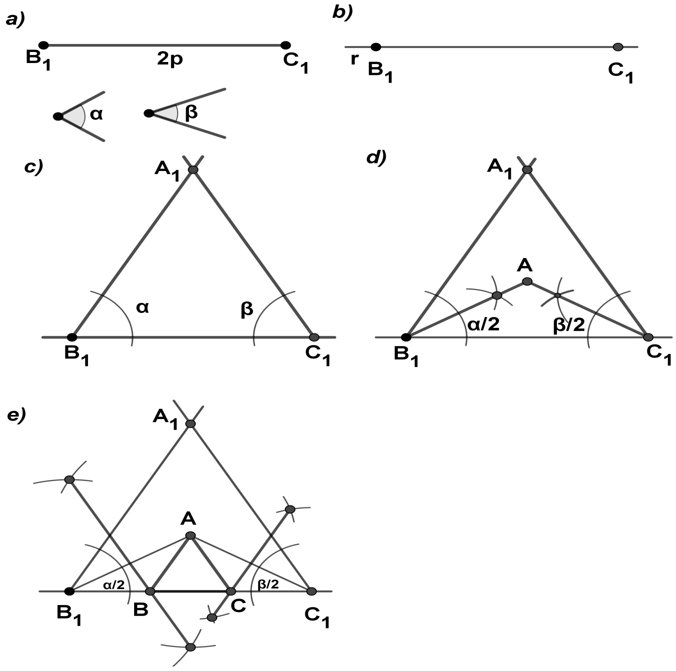
2. Transporte os ângulos $\angle B$ e $\angle C$, com vérices em B' e C'. Fig. *c)*.

3. Trace as bissetrizes dos ângulos $\angle B$ e $\angle C$ com origem em B' e C' com interseção no ponto A. Fig. *d)*.

4. Agora trace as mediatrizes dos segmentos $B'A$ e $C'A$, determinando os pontos pontos B e C em r, respectivamente. Fig. *e)*.

5. O triângulo ABC é o triângulo desejado.

Figura 3.10: Triângulo ABC solução do problema 6.



Fonte: Autor.

Justificativa: Pela propriedade da mediatriz temos que $B'B = BA$ e $C'C = CA$, e portanto, o triângulo $B'BA$ e $C'CA$ são isósceles de base $B'A$ e C'A, respectivamente. Desta forma, segue do Corolário 2.4.2 que $\angle ABC = \angle B$. De modo análogo, concluímos que $\angle ACB = \angle C$. Além disso, sendo $B'B = AB$ e $C'C = AC$ vem que o perímetro de ABC é igual a $2p$.

■

Problema 7. *Construção do Arco Capaz* Dados um segmento CD e um ângulo α, com $0 < \alpha < 180°$ o **LG** dos pontos P do plano tais que $\angle CPD = \alpha$ é chamado de **arco capaz** de α em relação a CD. Construa o arco capaz. Fig. *a).*

Solução:

1. Transporte o ângulo α para a extremidade do segmento CD. Fig. *b).*

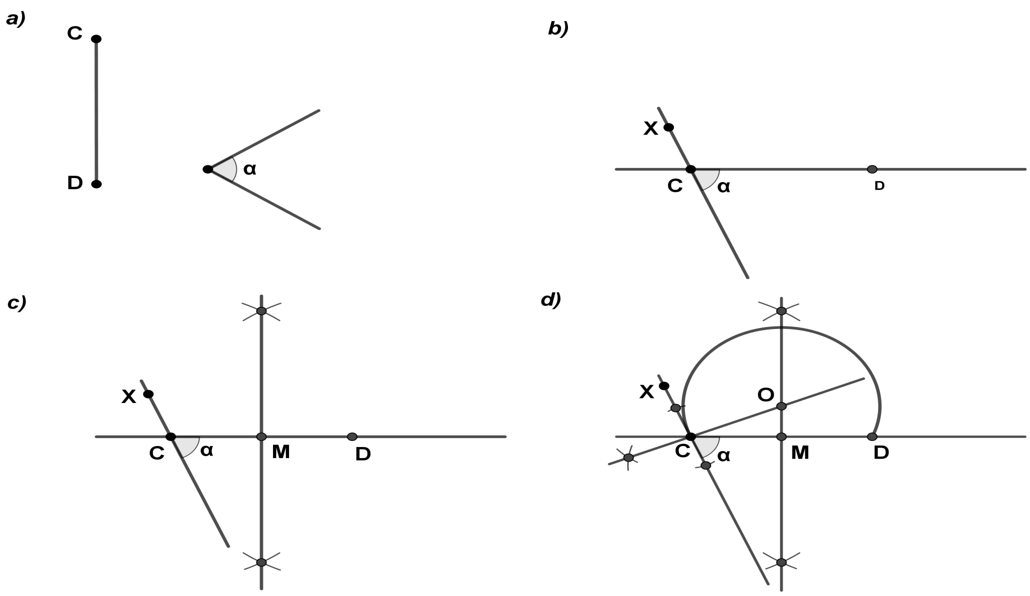
2. Trace a mediatriz m do segmento CD. Fig. *c).*

3. Trace a reta t perpendicular a CX passando por C, Fig. *d).*

4. A interseção de m e t é o ponto O, que é o centro do arco capaz.

5. Desta forma, temos o arco capaz de centro O e segmento CD.

Figura 3.11: Construção do arco capaz.



Fonte: Autor.

Justificativa: Observe que $\angle MCO = 90 - \alpha$, logo $\angle COD = 2\alpha$. Desta forma, a Proposição 2.7.5, garante que o ângulo inscrito é metade do ângulo central, então o arco capaz terá medida α.

■

Problema 8. Construa o triângulo ABC, conhecendo os comprimentos a do lado BC, h_a da altura relativa a BC e a medida α do ângulo $\angle A$. Fig. *a)*.

Solução:

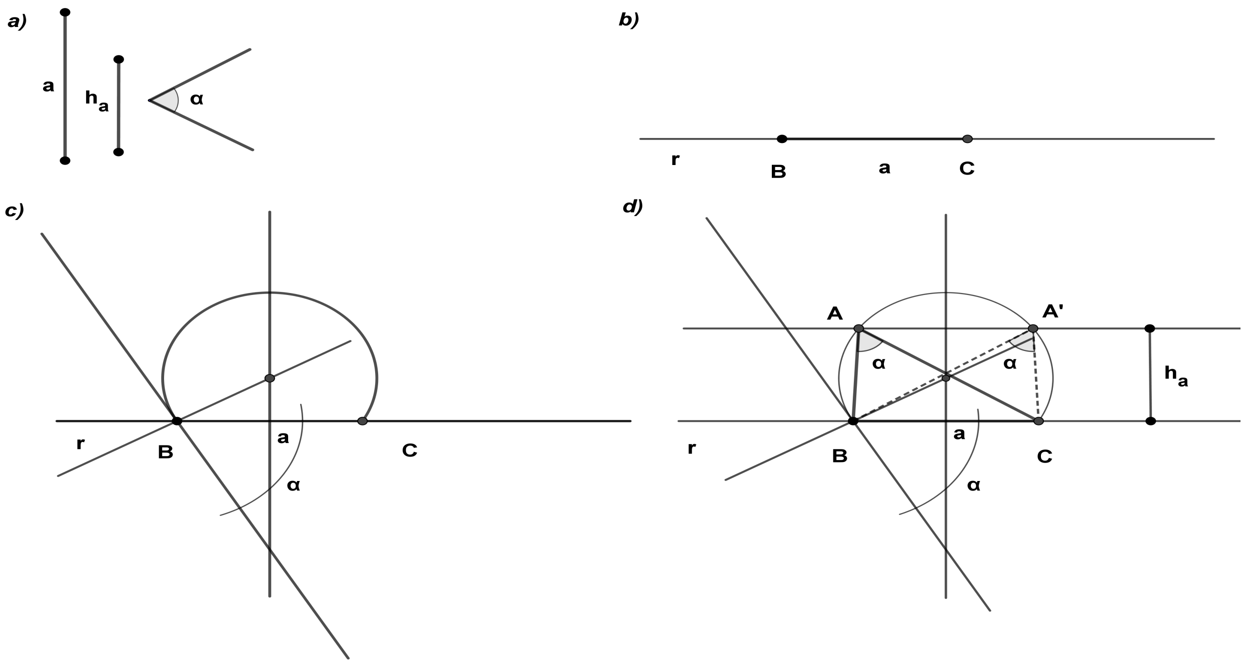
1. Sobre uma reta suporte r defina o lado $BC = a$. Fig. *b)*.

2. Construa o arco capaz do ângulo α. Fig. *c)*.

3. Trace uma paralela a r de distancia h_a, Fig. *d)*.

4. A interseção desta reta com o arco capaz são os pontos A e A', determinando assim o triângulo desejado, a saber, ABC ou $A'BC$.

Figura 3.12: Solução geométrica do Problema 8.



Fonte: Autor.

Justificativa: Por definição de arco capaz, segue que $\angle BAC = \angle BB'C = \alpha$

Observação 3.1.2 Novamente, nesse problema temos a existência de mais de uma solução.

$\blacksquare$

Problema 9. (*Divisão de um Segmento em Partes Iguais.* -) Dado um segmento qualquer AB, devemos dividí-lo em n partes iguais. Fig. *a).*

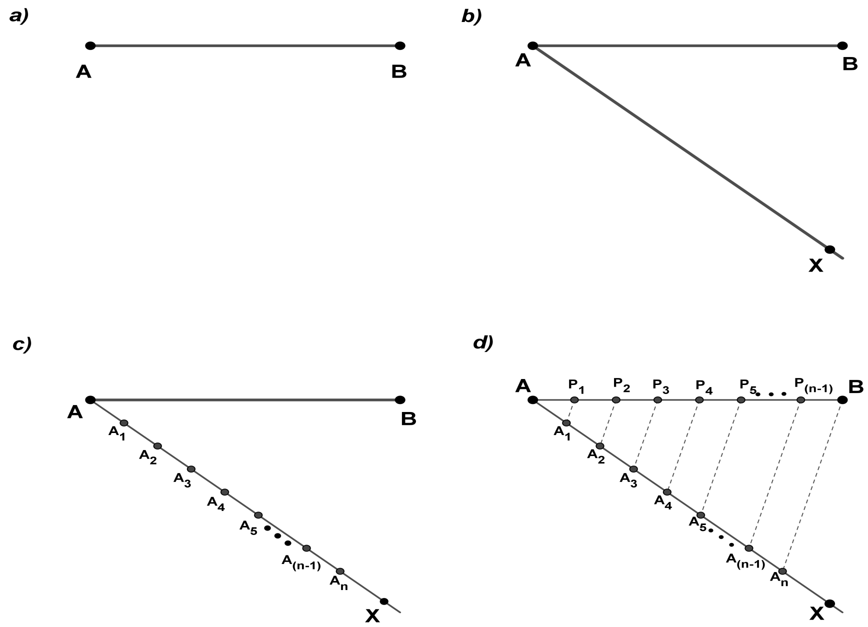
Solução:

1. Traçar uma semirreta AX de origem em A. Fig. *b).*

2. Com um compasso e um raio qualquer marcamos n segmentos: $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, até $\overline{A_{n-1}A_n}$, sobre AX. Fig. *c).*

3. Unimos A_nB e traçamos as paralelas à A_nB passando pelos pontos A_i, com $i = 1, \cdots, n-1$, obetendo em AB os pontos P_1, P_2, P_3, $P_4 \cdots P_{n-1}$. Assim, obtemos $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, $\overline{P_4P_5}$, $\overline{P_5P_6}$, até $\overline{P_{n-1}B}$, as partes iguais procuradas. Fig. *d)*.

Figura 3.13: Divisão de um segmento



Fonte: Autor.

Justificativa: Segue do Teorema 2.6.1

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1P_2}}$$

Por construção, temos $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1A_2}} = 1$, logo $\frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1P_2}} = 1$ e, portanto $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2}$. De modo análogo, concluímos que

$$\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \cdots = \overline{P_{n-1}P_n}.$$

Problema 10. Construir um triângulo ABC conhecendo o lado a e as medianas m_b e m_c. Fig. *a)*.

Solução:

1. Em uma reta r, determine $BC = a$. Fig. *b)*.

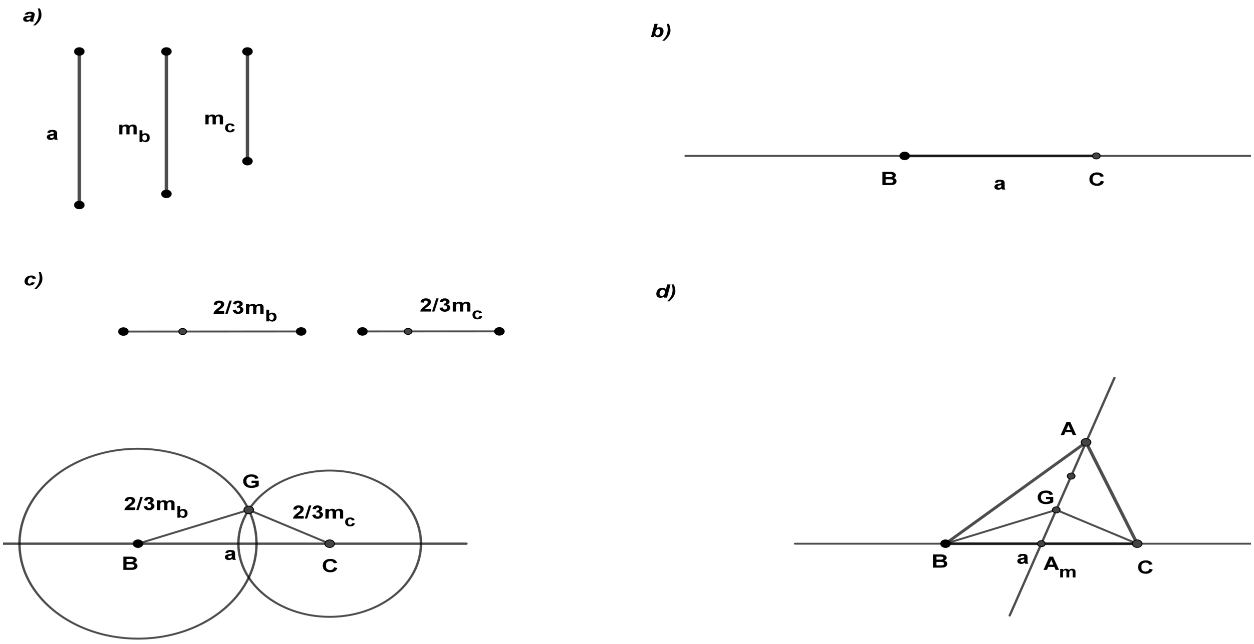
2. Trace os círculos Γ_1 com centro em B e raio $\frac{2}{3}m_b$ e Γ_2 com centro em C e raio $\frac{2}{3}m_c$ determinando G interseção de Γ_1 e Γ_2. Fig. *c)*.

3. Determine A_m, ponto médio de BC.

4. Prolongue A_mG e marque A, de modo que $AG = 2A_mG$. Fig. *a)*.

5. O triângulo ABC é a solução do problema,

Figura 3.14: Solução geométrica do Problema 10.



Fonte: Autor.

Justificativa: O ponto G é o baricentro do triângulo ABC, ver proposição 2.37 em MUNIZ NETO (2013)

Problema 11. (*Traçados das tangentes a um círculo.*)

- Caso 1: Dado o círculo Γ, traçar uma reta t tangente a Γ passando por P, com $P \in \Gamma$. Fig. *a)*.

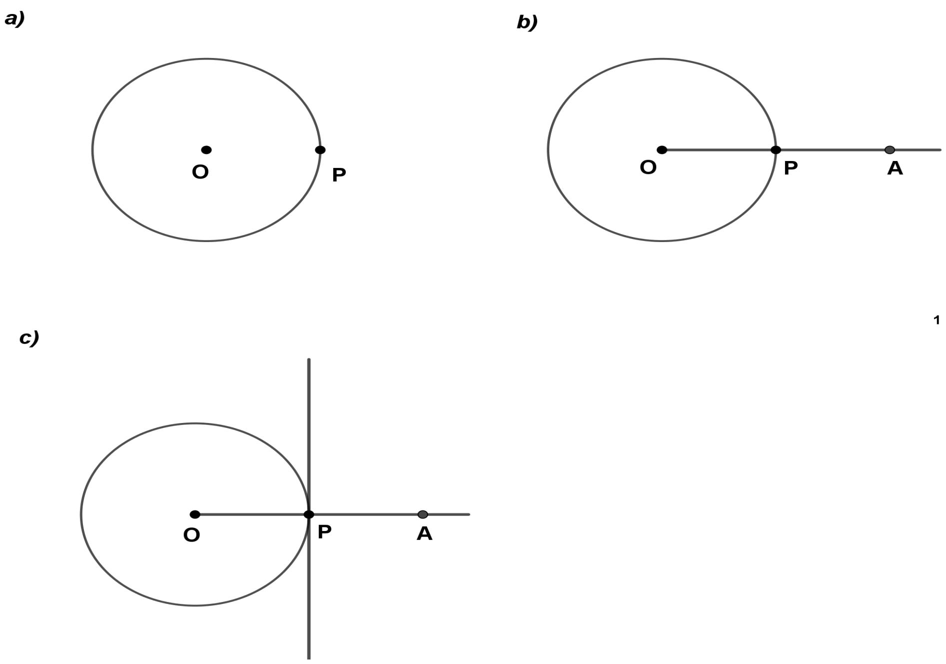
$\blacksquare$

Solução:

1. Trace a semireta S_{OP}, depois obtenha $M \in S_{OP}$ de modo que $OP = PA$. (Fig. *b)*).

2. Construa a mediatriz do segmento OA, determinando assim a reta t, tangente ao círculo Γ. Fig. *c)*.

Figura 3.15: Solução geométrica do traçados de tangentes. Caso 1.



Fonte: Autor.

Justificativa: Como t é mediatriz de OA, então tomando Q ponto sobre t, temos que o triângulo OAQ isósceles logo QP, é a altura, portanto $QP \perp OP$, pela proposição 2.7.4 vem que que t é tangente a Γ.

$\blacksquare$

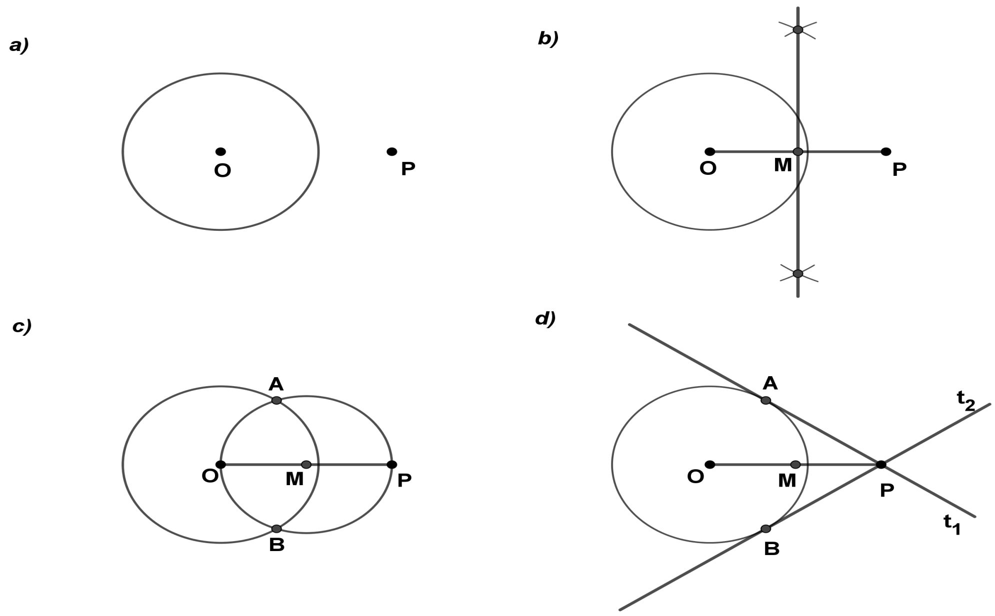
- Caso 2: Dado o círculo Γ, traçar uma reta t tangente a Γ passando por P, com $P \notin \Gamma$, sendo P exterior. Fig. *a)*.

  1. Determine o segmento OP, depois determine o seu ponto médio M. Fig. *b)*.

  2. Centrado em M e raio OM trace o círculo Γ_1 obtendo os pontos A e B interseções de Γ e Γ_1. Fig. *c)*.

3. Unindo AP e BP obtemos as retas tangentes a Γ, t_1 e t_2, respectivamente. Fig. *d)*.

Figura 3.16: Solução geométrica do traçados de tangentes. Caso 2.



Fonte: Autor.

Justificativa: Basta notar que $\angle PAO$ é o ângulo que subtende o diâmetro do círculo de centro M e raio MP. Segue do Teorema 2.7.4 que $\angle PAO = 90^o$ e da Proposição 2.7.5, vem que t_1 é a reta tangente, passando por P. De mod ánalogo, concluímos que t_2 é a outra reta tangente procurada.

■

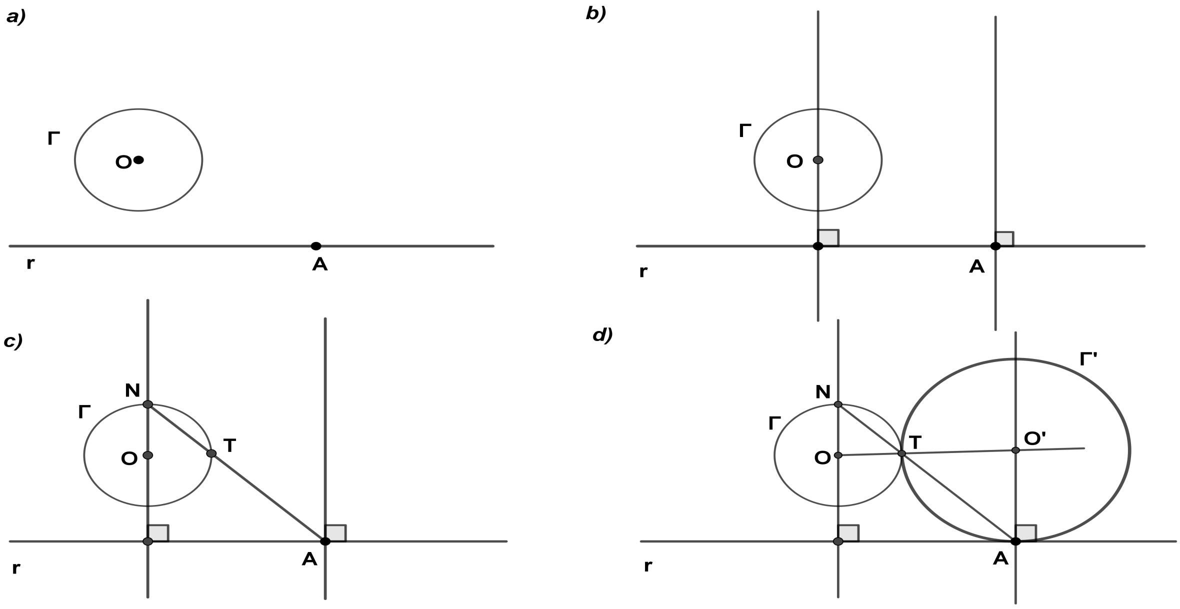
3.2 Problemas Envolvendo Construções Básicas

Problema 1. São dados um círculo Γ, uma reta r e um ponto A sobre r. Construir um círculo Γ' tangente exteriormente a Γ e tangente, em A, à reta r. Fig. *a)*.

Solução:

1. Traçar a reta s perpendicular a r passando no ponto A. Fig. *b)*.
2. Traçar a reta w perpendicular a r passando por O, determinando M e N sobre Γ. Fig. *c)*.
3. A reta NA determina T sobre Γ, sendo T o ponto de tangência de Γ e Γ',
4. A reta OT determina O' sobre a reta s. Fig. *d)*.
5. O círculo Γ' é identificado como sendo o círculo de centro O' e raio OT.

Figura 3.17: Construção geométrica do problema de círculos tangentes.



Fonte: Autor.

Justificativa: Note que os triângulos ONT e $O'AT$ são semelhantes pelo caso $A.A.A$. De fato, $\angle ONT = \angle OAT$ são alternos internos e $\angle OTN = \angle OTA$ são O.P.V. Desta forma, segue da semelhança a seguinte igualdade:

$$\frac{r}{r} = \frac{ON}{OT} = \frac{O'A}{O'T}$$

Definindo o círculo Γ'. Por outro lado, pela proposição 2.7.5, segue que r é tangente a Γ'. Por outro lado, sendo T pertencente à reta que uni os dois círculos vem que T é um ponto de contato logo os círculos são tangentes exteriormente.

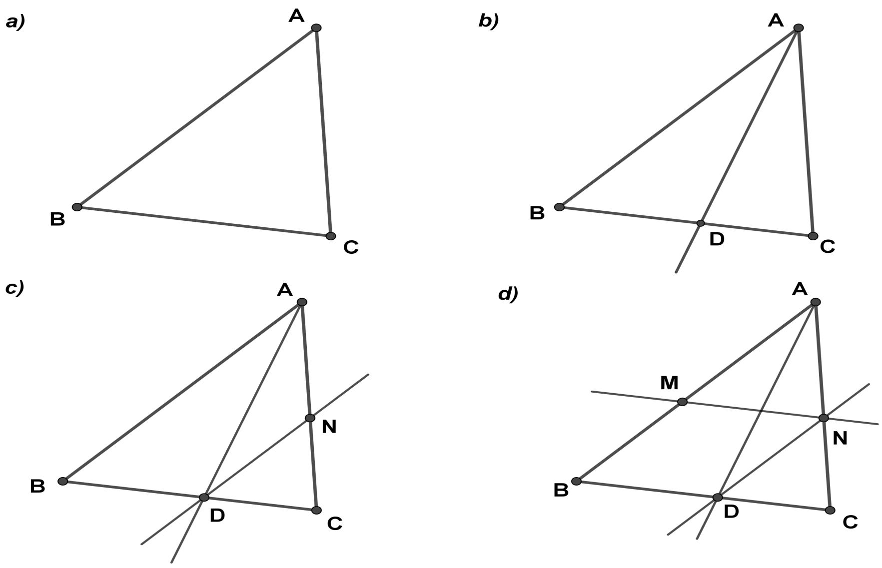
$\blacksquare$

Problema 2. Dado um triângulo ABC, trace uma paralela a BC que corta AB em M e AC em N, de forma que se tenha $AN = MB$. Fig. *a)*.

Solução:

1. Trace a bissetriz do ângulo $\angle A$, determinando o ponto D sobre BC. Fig. *b)*.
2. Trace uma reta paralela a AB passando por D e cortando AC, definindo assim o ponto N. Fig. *c)*.
3. Trace uma reta paralela a BC passando por N, cortando AB em um ponto M. Fig. *d)*.
4. Assim, construímos a reta pedida, a saber MN.

Figura 3.18: Construção da solução do problema 2.



Fonte: Autor.

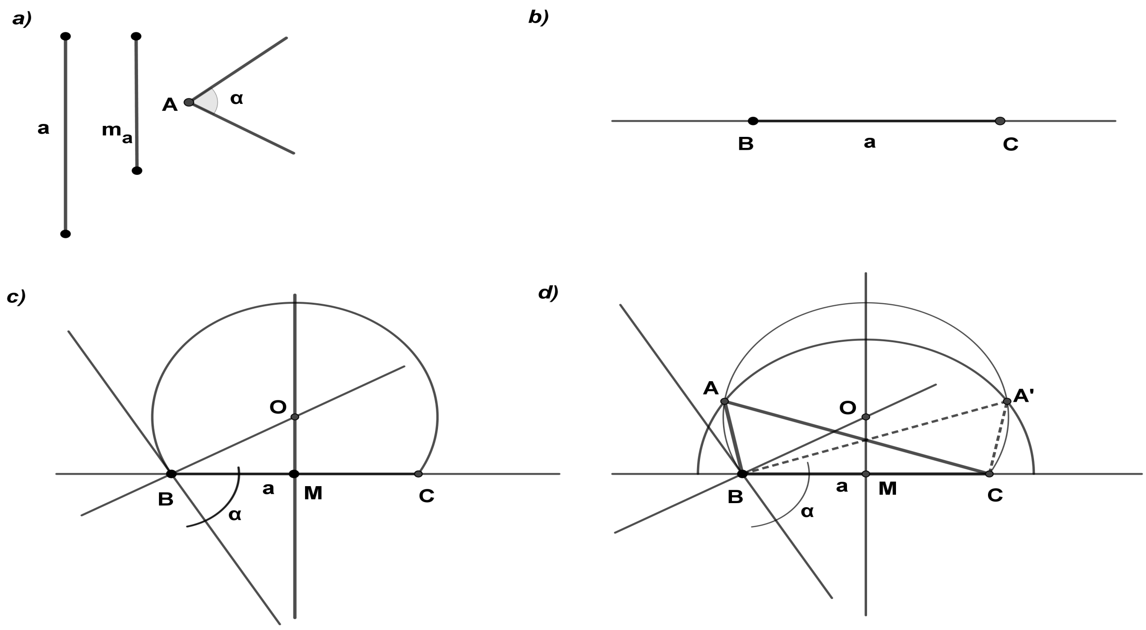
Justificativa: Como AD é bissetriz e DN é paralela a AB então, $\angle DAN = \angle ADN$, pois $\angle ADN = \angle DAM$ são ângulos alternos internos logo $NA = ND$. Ao traçar a paralela a BC, temos um quadrilátero $MBDN$ e por definição, é um paralelogramo, portanto $AN = MB$.

■

Problema 3. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado a, o ângulo A e a mediana m_a. Fig. *a)*.

Solução:

1. Sobre uma r suporte tramsporte o lado $BC = a$. Fig. *b)*.
2. Trace o arco capaz do ângulo $\angle A$. Fig. *c)*.
3. Trace um círculo Γ de centro M, sendo M o ponto médio de BC, e raio m_a, determinando os pontos A e A'. Fig. *d*.
4. Os triângulos ABC e $A'BC$ são soluções do problema.



Fonte: Autor.

Justificativa: Por contrução os triângulos satisfazem as hipóteses do Prolema.

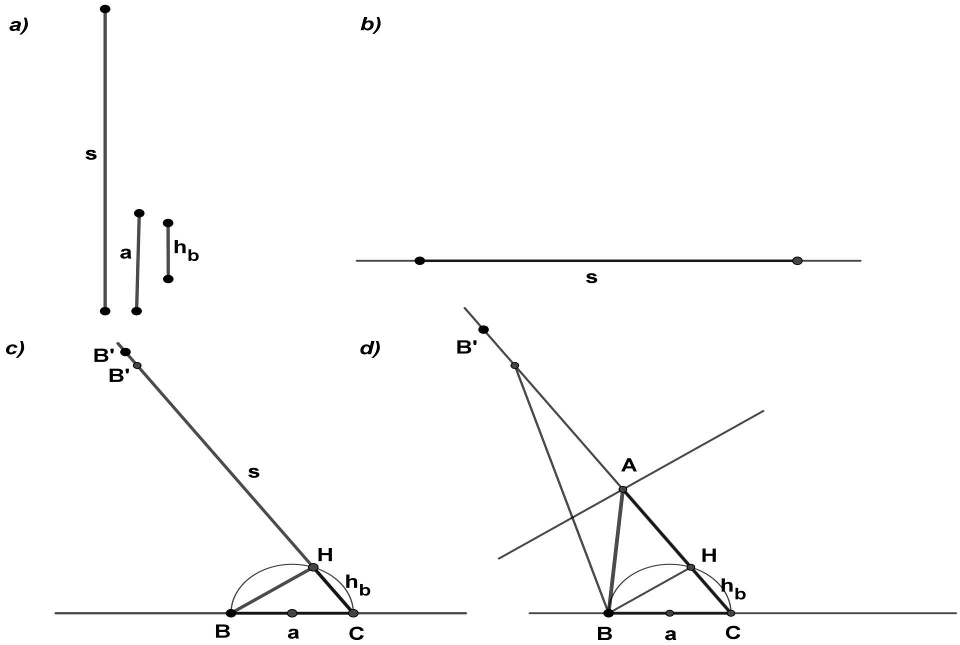
■

Problema 4. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado a, a soma $s = b + c$ e altura h_b. Fig. *a)*.

Solução:

1. Construa o triângulo retângulo BCh_b de hipotenusa $BC = a$ e cateto h_b. Fig. *c)*.
2. Prolongue o segmento h_b de extremidade C. Fig. *d)*.
3. Marque nessa semirreta um ponto B' tal que $CB' = s$. Fig. *d)*.
4. Trace a mediatriz de BB', cuja interseção com CB' seja o ponto A.. (ig. *d)*.
5. O triângulo ABC é a solução do problema. Fig. *d)*.

Figura 3.19: Construção da solução do problema 4



Fonte: Autor.

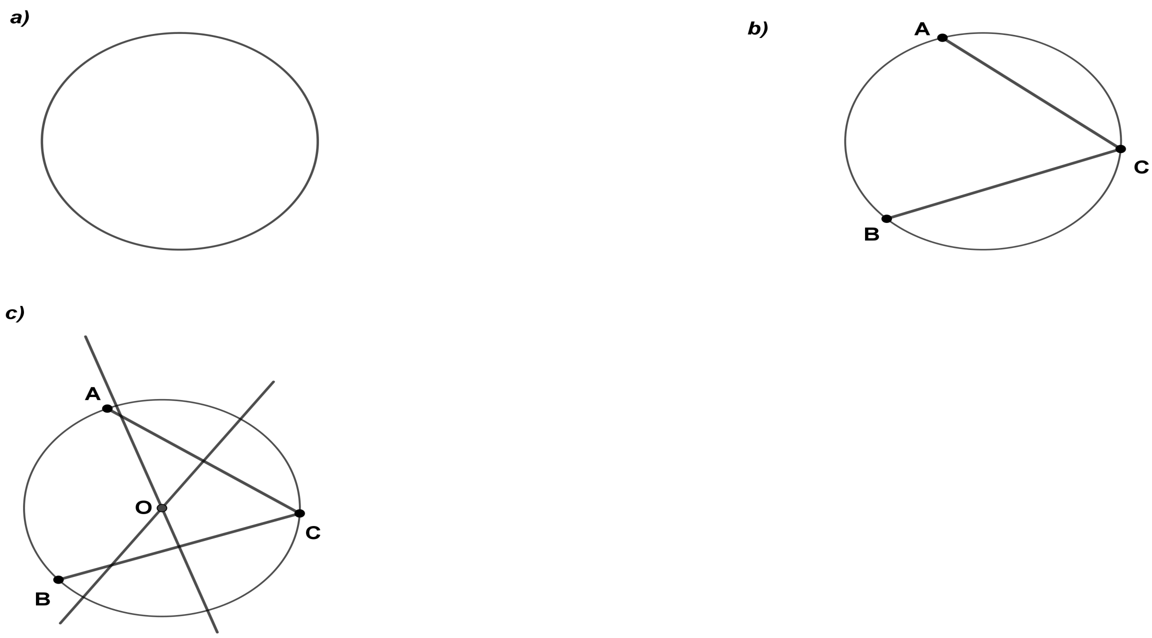
Justificativa: Basta notar que o triângulo ABB' é isóscele de base $B'B$ e portanto, $AB' = AB$, mostrando assim, que $BA + AC = b + c$ e a altura relativa ao lado AC é h_b por construção.

Problema 5. É dado um círculo, com o auxilio de régua e compasso, encontre seu centro. Fig. *a)*.

Solução:

1. Marque três pontos quaisquer no círculo. Fig. *b)*.
2. Trace duas cordas, do círculo, cujas extremidades sejam os pontos marcados. Fig. *c)*.
3. Construa as mediatrizes dessas cordas. Fig. *c)*.
4. O ponto de intersec ção dessas mediatrizes é o centro do círculo.

Figura 3.20: Construção da solução do problema 4



Fonte: Autor.

Justificativa: O método é uma consequência direta da Proposição 2.7.2.

Capítulo 4

Construções Geométricas: Equações Algébricas

Aqui trataremos das construções não imediatas como ocorria no capítulo anterior, onde teremos que unir ao uso da álgebra para obtermos a um novo métodos construtivo. E para chegar nesses métodos construtivos iremos nos valer dos conhecimentos da álgebra.

4.1 Construções e Identidades Algébricas

1. **A quarta proporcional.** Dados os segmentos a, b e c, chamamos de $4^{\underline{a}}$ proporcional o segmento x, tal que:

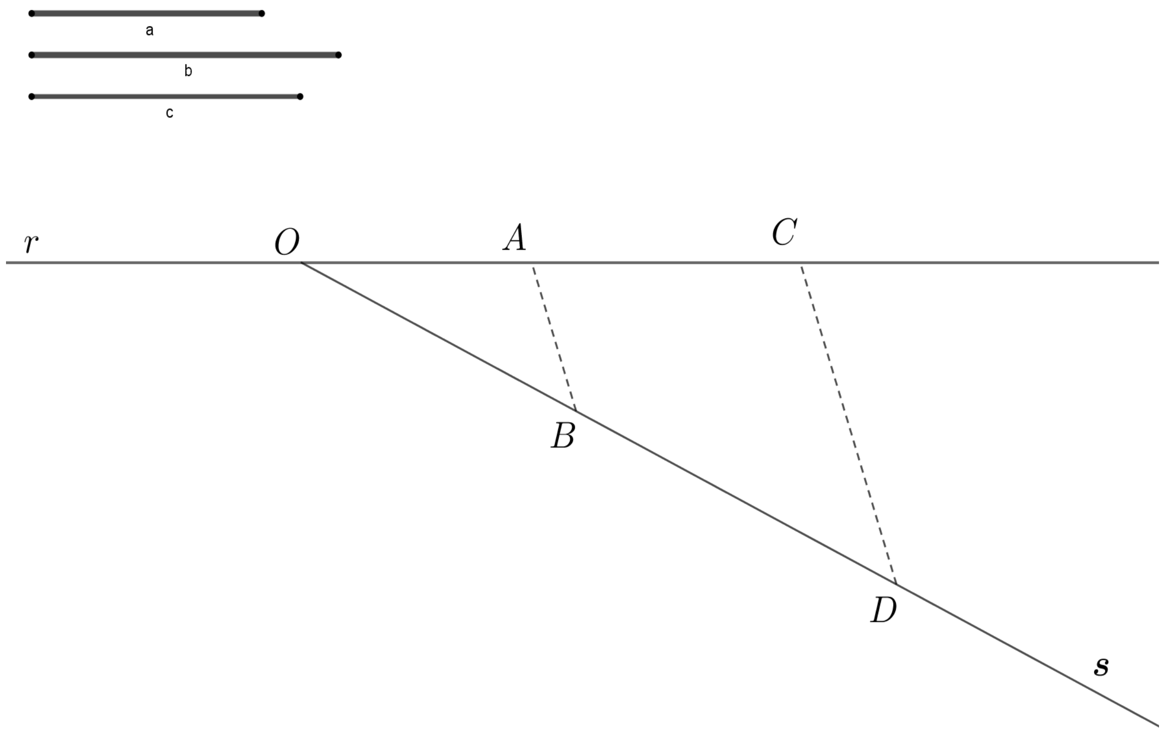
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Leftrightarrow ax = bc.$$

Para obter o segmento x, geometricamente usaremos a seguinte construção.

1. Construa duas retas r e s que se intersectam em um ponto O.
2. Sobre r tome os segmentos $\overline{OA} = a$ e $\overline{AC} = c$.
3. Sobre s construas o segmento $\overline{OB} = b$.
4. Construa o segmento $\overline{AB}$.
5. Construa um segmento, passando por C, paralelo a $\overline{AB}$ cortando s em D.

6. O segmento $\overline{BD} = x$ é a quarta proporcional

Figura 4.1: Construção geométrica para o segmento da quarta proporcional.



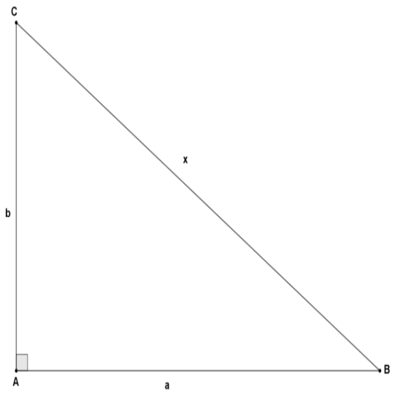
Fonte: Autor

Justificativa: A última afirmação, segue direto do Teorema 2.6.1

2. **Construção de** $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dados segmentos a e b. Construir o segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

    1. Construa duas retas r e s perpendiculares entre si no ponto A.
    2. Sobre r marque B de modo que $\overline{AB} = a$
    3. Sobre s marque C de modo que $\overline{AC} = b$
    4. Construa o segmento $\overline{BC}$.
    5. O segmento $\overline{BC}$ é o segmento procurado.

Figura 4.2: Solução geométrica da construção de $\sqrt{a^2+b^2}$.



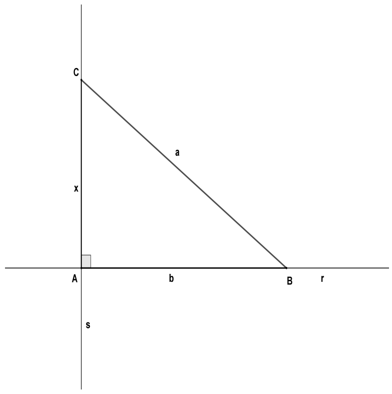
Fonte: Autor

Justificativa: Pelo teorema de Pitágoras, temos que: $\overline{AB} = \sqrt{a^2+b^2}$. Daí, concluímos que a expressâo em questão é geometricamente a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos a e b.

3. **Construção de** $\sqrt{a^2-b^2}$. Dados segmentos a e b, com $a > b$. Construir o segmento $x = \sqrt{a^2-b^2}$

    1. Construa duas retas r e s perpendiculares entre si no ponto A.
    2. Sobre r marque B de modo que $\overline{AB} = b$
    3. Fixando o compasso em B, construa um círculo Γ de raio $r = a$, intersectando s em C.
    4. O segmento $\overline{AC}$ é o segmento procurado.

Figura 4.3: Solução geométrica da construção de $\sqrt{a^2 - b^2}$.



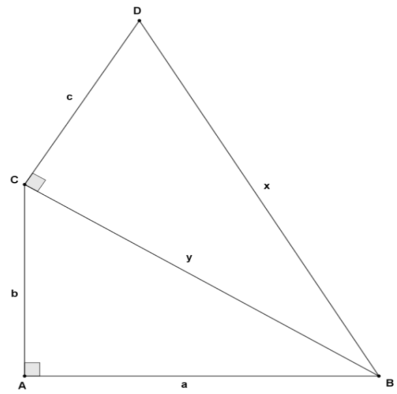
Fonte: Autor

Justificativa: Pelo teorema de Pitágoras, temos que: $a^2 = x^2 + b^2 \Rightarrow \overline{AB} = x = \sqrt{a^2 - b^2}$. Daí, concluímos que a expressão em questão é geometricamente um dos catetos de um triângulo retângulo com hipotenusa a e o outro cateto b.

4. **Construção de** $\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2}$. Dados segmentos a, b e c. Construir o segmento $x = \sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2}$

    1. Construa duas retas r e s perpendiculares entre si no ponto A.
    2. Sobre s marque B de modo que $\overline{AB} = a$
    3. Sobre r marque C de modo que $\overline{AC} = b$
    4. O segmento $\overline{BC}$ é a hipotenusa do triângulo retâgulo ABC.
    5. Construa uma reta r' perpendicular a $\overline{BC}$ passando por C.
    6. Sobre r' com um compasso marque um ponto D, tal que $c = \overline{CD}$.
    7. O segmento $\overline{DB}$ é o segmento procurado.

Figura 4.4: Solução geométrica da construção de $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.



Fonte: Autor

Justificativa: Chamando $y = \overline{CB}$, segue do teorema de Pitágoras, que: $y^2 = a^2 + b^2$. Fazendo $x = \overline{DB}$ e aplicando novamente o teorema de Pitágoras, temos $x = \sqrt{y^2 + c^2}$. Portanto,

$$\overline{DB} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Observação 4.1.1 Esse processo por ser usado, indutivamente, para obter geometricamente, expressões do tipo: $\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \cdots}$. Em particular, para o caso $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \cdots}$, com $a = b = c = \cdots$, o processo acima pode ser usado para obter expressões para expressões $a\sqrt{n}$, sendo n um natural qualquer.

5. **Construção da Média Aritmética.** Dados segmentos a, b e c, definimos como a média aritmética um segmento m, tal que

$$m = \frac{a+b}{2}$$

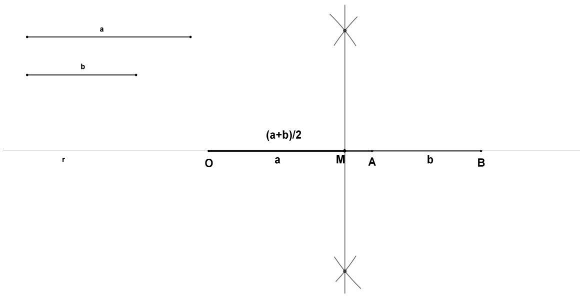
1. Construa uma reta r e sobre ela marque um ponto O.
2. Com um compasso fixo em O marque um ponto A, em r de modo que $\overline{OA} = a$
3. Com um compasso fixo em A marque um ponto B, em r de modo que

A esteja entre O e B com $\overline{AB} = b$

4. Construa o ponto médio M do segmento OB.

5. M é o ponto procurado com $OM = m$.

Figura 4.5: Solução geométrica da construção de do ponto médio de um segmento.



Fonte: Autor

Justificativa: É uma consequência direta da construção da reta mediatriz de um segmento.

6. **Construção da Média Geométrica.** Dados segmentos a, b definimos como a média geométrica g, o segmento

$$g = \sqrt{ab}.$$

1. Construa uma reta r.

2. Sobre r com um compasso marque os pontos O e A, de modo que $\overline{OA} = a$.

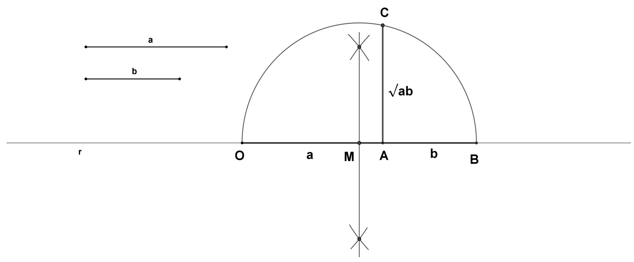
3. Com um compasso fixo em A marque um ponto B, em r de modo que A esteja entre O e B com $\overline{AB} = b$.

4. Trace um semicírculo de diâmetro $\overline{OB}$.

5. Construa um reta s perpendicular a r, passando por A e intersectando o semicírculo no ponto C.

6. $\overline{AC}$ é o segmento procurado.

Figura 4.6: Solução geométrica da construção da média geométrica de dois segmento.



Fonte: Autor

Justificativa: É uma consequência direta das relações métricas de um triângulo retângulo(ver BARBOSA (2003), proposição 7.4).

4.2 Aplicações das Expressões Algébricas Construtivas

1. O Segmento Áureo. Dado um segmento $\overline{AB}$ tomemos um ponto C no seu interior, dividindo o em duas partes com as seguintes propriedades: A parte menor está para a parte maior assim como a parte maior está para o segmento todo $\overline{AB}$. Isto é,

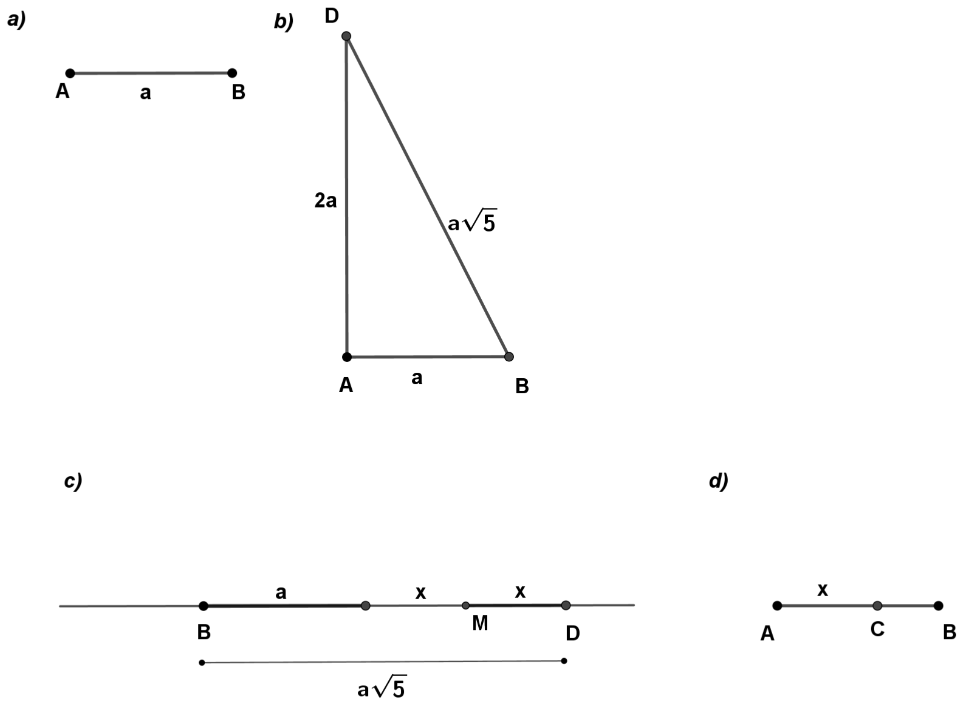
$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Solução: Fazendo $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = x$, temos

$$\begin{aligned} \frac{a-x}{x} &= \frac{x}{a}, \\ x^2 &= a^2 - ax, \\ x^2 - a^2 + ax &= 0, \end{aligned}$$

cujas soluções são dadas por $x_1 = \dfrac{-a + a\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{-a - a\sqrt{5}}{2}$. Como estamos interessados em uma solução que expresse a medida de um segmento então podemos afirmar que: $x = \dfrac{-a + a\sqrt{5}}{2.}$ Usando os métodos anteriores podemos construir um segmento com essa medida.

Figura 4.7: Construção do segmento áureo.



Fonte: Autor

2. Dados segmentos a, b, c, d, e e construir o segmento $\dfrac{abc}{de}$.

Solução: Usando o método da quarta proporcional, obtenha y solução

$$\frac{d}{a} = \frac{b}{y} \Leftrightarrow dy = ab.$$

Obtido y e, novamente, recorrendo ao método da quarta proporcional obtenha x tal que

$$\frac{e}{c} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow ex = cy.$$

Portanto, temos $d(ex) = d(cy)$, logo, $(de)x = c(dy)$, que nos dá $(de)x =$

cab. De onbde vem que

$$x = \frac{abc}{de}$$

3. Construir $x = \sqrt{a^2 + 3b^2}$ onde a e b são segmentos dados.

Solução: A solução desse problema pode ser resumida nos seguintes passos.

1. Construa $b\sqrt{3}$.

2. Construa um triângulo retângulo de catetos a e $b\sqrt{3}$.

   Observação 4.2.1 Neste caso, podemos usar o método desenvolvido em WAGNER (2007), pág. 36.

3. A hipotenusa desse triângulo é o segmento procurado.

Justificativa: De fato, seja x a hipotenusa do triângulo acima, segue do Teorema de Pitágoras que $x = \sqrt{a^2 + (b\sqrt{3})^2}$, isto é

$$x = \sqrt{a^2 + 3b^2}$$

4. Construir $x = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$, onde a é um segmento dado e n um número natural.

Solução: Construiremos a solução da seguinte forma

1. Usando os métodos descritos anteriormente, divida o segmento a em n partes iguais, obtendo o segmento $\dfrac{a}{n}$.
2. Construa x média geométrica de a e $\dfrac{a}{n}$.
3. O segmento x é a solução do problema.

Justificativa: De fato, temos que $x = \sqrt{a\dfrac{a}{n}}$. Portanto,

$$x = \frac{a}{\sqrt{n}}.$$

5. Construir um segmento de $\sqrt{5,8}$ centímetros.

Solução: A contrução desse segmento é baseada nos seguintes passos.

1. Construa um triângulo retângulo, cujos catetos medem 8 e 9 centímetros, respectivamente.

2. Divida a hipotenusa em 5 partes iguais.

3. Cada uma dessas partes é um solução do problema

Justificativa: De fato, basta seguir a seguintes expressões:

$$x = \frac{\sqrt{8^2+9^2}}{5} = \frac{\sqrt{64+81}}{5} = \frac{\sqrt{145}}{5} = \frac{2\sqrt{145}}{10} = \sqrt{\frac{4\cdot 145}{100}} = \sqrt{\frac{580}{100}}$$

De onde vem que: $x = \sqrt{5,8}$ cm.

6. Dados dois segmentos a e b, encontre outros dois segmentos cuja soma e produto é igual a a e b^2, respectivamente.

Solução: Sejam x e y os segmentos dados. Podemos representar o problema no seguinte sistema

$$\begin{cases} x+y &= a, \\ xy &= b^2 \end{cases}$$

Resolvemos esse problema seguindo a seguinte construção. Primeiramente, note que $\frac{a}{2}$ e b é a média aritmética e geométrica de x e y, respectivamente. Sabemos que para quaisquer números reais $\alpha,\ \beta$, temos $2\alpha\beta \leq \alpha+\beta$. Isso nos dá

$$b \leq \frac{a}{2} \tag{4.1}$$

1. Construa um semicírculo de diâmetro $\overline{AB} = a$,

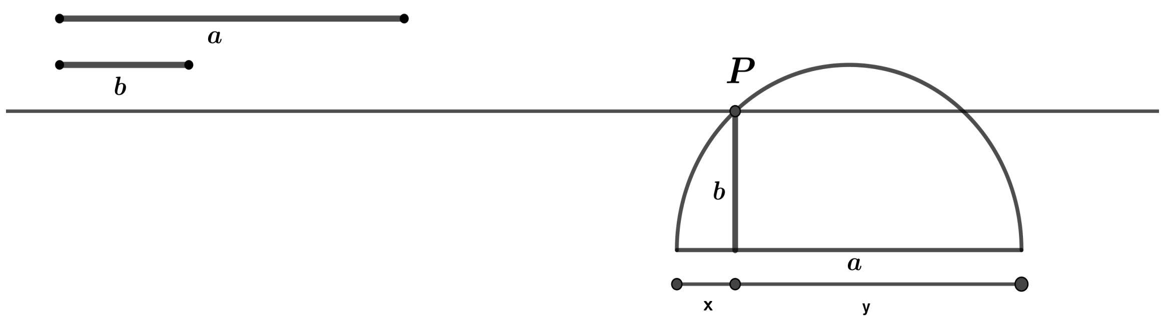
2. Traçar uma paralela, ao diâmetro, de altura b. De (4.1), vem que a paralela intersecta o semicírculo em um ponto P.

3. Pelo ponto de interseção traçar um reta perpendicular ao diâmetro, intersectando o no ponto Q.

4. Temos $x = AQ$ e $y = QB$.

Justificativa: Basta notar que o diâmetro é igual a $x + y$ e b é a média geométrica de x e y, o que nos dá $b^2 = xy$.

Figura 4.8: Solução geométrica do problema 6.



Fonte: Autor.

7. Resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & a^2, \\ x + y & = & b \end{cases}$$

sendo a e b segmentos dados. Fig. *a)*.

Solução: A solução é obtida pela seguinte construção

1. Construa um triângulo retângulo ABC, de catetos $CB = a$ e $CA = b$. Fig. *b)*.

2. Traçar a mediatriz da hipotenusa passando em um ponto P e intersectando um dos catetos no ponto O. Fig. *c)*.

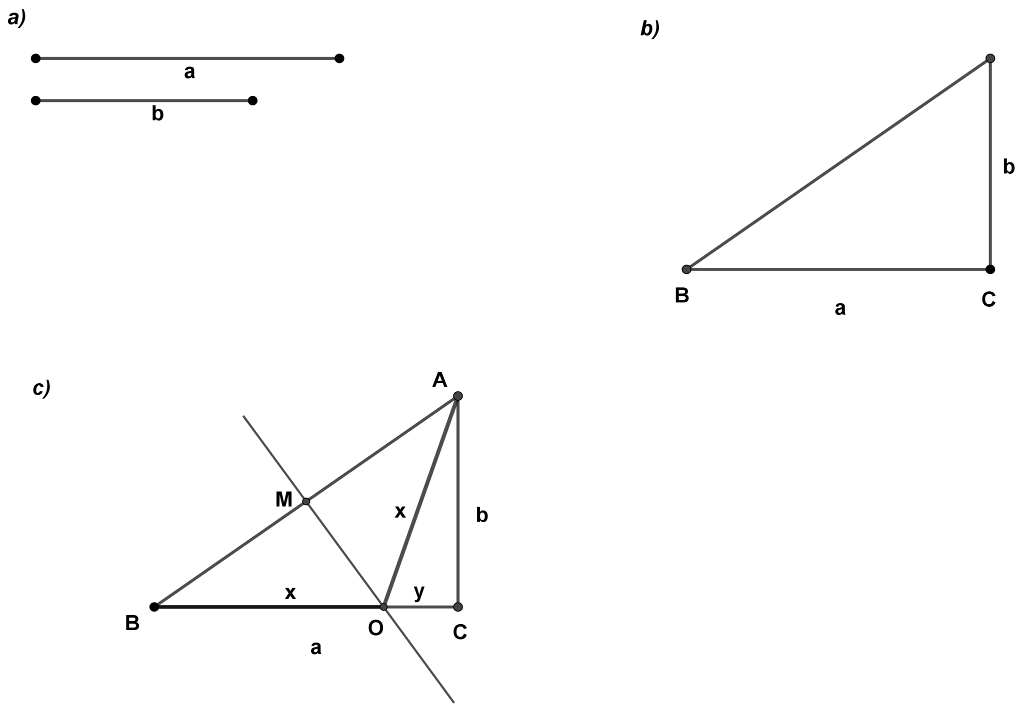
3. Temos $x = OA = OB$ e $y = CO$.

Justificativa: Os triângulos AOP e BOP são congruentes pelo caso $L.A.L.$ Assim, segue da congruência que, $x = \overline{AO} \equiv \overline{OB}$. Chamando $\overline{OC}$ de y, temos: $x + y = b$ e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OCB, de onbde vem $y^2 + a^2 = x^2$, o que nos dá:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{e} \quad x + y = b.$$

Como queríamos demonstrar.

Figura 4.9: Solução geométrica do problema 7.



Fonte: Autor

8. Resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & a^2, \\ xy & = & b^2 \end{cases}$$

sendo a e b segmentos dados.

Solução: Primeiramente, note que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, do sistema vem que

$$x + y = \sqrt{a^2 + 2b^2}$$

Logo, obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y & = & \sqrt{a^2 + 2b^2}, \\ xy & = & b^2 \end{cases}$$

Agora podemos aplicar o método desenvolvido no problema 6.

Capítulo 5

Conclusões e Futuras Perspectivas

O ensino da matemática não se limita em fórmulas prontas, por essa razão surgiu uma intenção de metodologia diferenciada de ensino, que possa proporcionar uma melhor idéia. Foi a partir dessa visão que se verificou a importância das construções geométricas no processo de ensino.

O ensino não se limita ao simples método tradicional de ser educador, ou de simplesmente apresentar

Um conceito matemático se constrói articulado com outros conteúdos, idéias e noções a matemática da mesma maneira que analisamos nos livros de ensino, com todo o poder de alcançar o conhecimento do dia a dia dos alunos para então se aplicá-la de maneira construtiva. substânciais, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode se afirmar que o aluno constrói um campo de conhecimento que toma sentido num ambiente de problema, e não um raciocínio isolado em resposta a um problema particular.

Assim conclui-se que aplicando as construções geométricas com responsabilidade e de forma correta, inserindo as definições, os postulados, as proposições e os teoremas adequadamente nos problemas de construção, a aprendizagem acontece de forma linear e mais abrangente. Fazendo do ensino e aprendizagem da geometria euclidiana mais lúdica e agradável, esperando sempre que o aluno absorva os conhecimentos geométricos com êxito.

Como perspectiva futura, para uma proposta, que possa auxiliar no aprendizado e ensino em geometria plana pode ser desenvolvido seguindo os seguintes passos apresentado por sugesteão de MUNIZ NETO (2013).

1. *Supor o problema resolvido:* Contruir um esboço da figura possuidora de propriedades desejadas, identificando na mesma os dados doproblema e os elementos que possam nos levar à solução

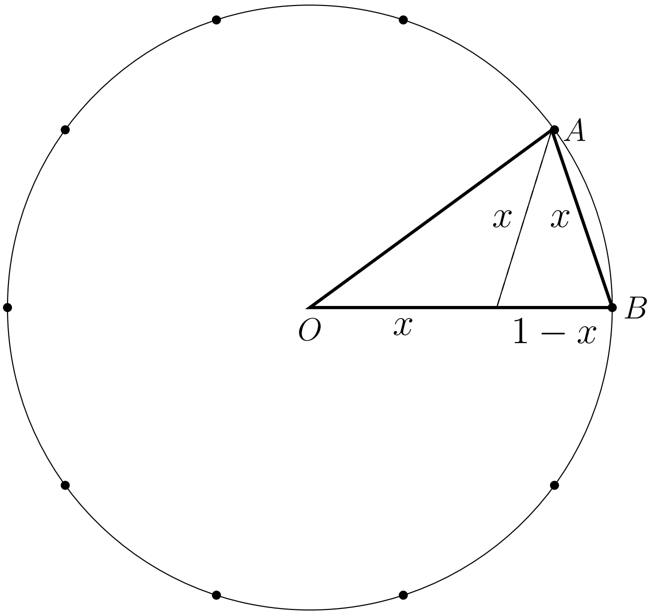
2. *Construir os pontos chaves para solução:* um **ponto-chave** é todo ponto que, uma vez construído, torna imediatas as construções subsequentes necessárias e, em última análise, a solução do problema em questão. Para construir o(s) ponto(s)-chave de um determinado problema, cumpre examinarmos as propriedades geométricas da situação em estudo com bastante cuidado.

Essa proposta está exemplificada com o seguinte problema, extraído da referência COURANT (2000).

Problema. Construir com régua e compasso o pentágono regular.

O método. Vamos começar pelo *decágono regular.* Vamos supor que o decágono regular esteja inscrito em um círculo de raio 1, e chamaremos de seu lado de x.

Figura 5.1: Decágono regular.



Fonte: Adaptado de COURANT (2000).

Uma vez que x subtenderá um ângulo de 36° no centro do círculo, os outros dois ângulos do triãngulo grande terão cada um 72°, e portanto a reta pontilhada que divide ao meio o ângulo A divide o triângulo OAB em dois triângulo OAB em dois triângulos isósceles, cada um com lados iguais de comprimento x. O raio do círculo é assim divido em dois segmentos, x e $1 - x$. Uma vez que OAB é semelhante ao triângulo isósceles menor, temos

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

A partir dessa proposição obtemos a equação quadrática $x^2 + x - 1 = 0$, cuja solução é $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. (A outra solução da equação é irrelevante, pois ela produz um resultado negativo). Tendo o comprimento x, podemos agora construir o decágono regular, demarcando este comprimento dez vezes como um corda do círculo. O pentágono regular pode então ser construído pela união de vértices alternados do decágono regular. Podemos construir a segmento de comprimento $\sqrt{5}$ como a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 1 e 2, respectivamente.

■

Acreditamos, que essa nova proposta pode ser desenvolvida e trabalhada para futuras aplicações em geometria.

Referências Bibliográficas

J.L.M BARBOSA. **Geometria Euclidiana Plana**. Sociedade Brasileira de Matematica, 10 edição, 2003.

H. COURANT, R. & ROBBINS. **O Que É Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Ed. Ciência Moderna Ltda, 6 edição, 2000.

Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Lei de diretrizes e bases da educação nacional; lei n. 5.692, de 11 de agosto de 1971. Relatório técnico, Ministério da Educação/ Brasilia: MEC/SEF, 1971.

N. DOLCE, O. & POMPEO. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometia Plana**. Editora Atual, 7 edição, 2001.

L. M. R. dos SANTOS. **Matemática Computacional Introdução ao TikZ**. Disponível em: <http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20172/2016-II/slides/slidestikz%20-%20MAT%20172%20-%202016-II.pdf>, 2016.

EUCLIDES. **Os elementos**. UNESP, 1 edição, 2009.

Secretaria de Educação Fundamental Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros curriculares nacionais. Relatório técnico, Ministério da Educação/ Brasilia: MEC/SEF, 1998.

A.C. MUNIZ NETO. **GEOMETRIA**. SBM: coleção PROFMAT, 6 edição, 2013.

A. NEVES. **LATEX e outras coisas**. Disponível em: <https://www.youtube.com/user/anteroneves?app=desktop>, 2016.

E. WAGNER. **Construções Geométricas**. SBM: COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 6 edição, 2007.

E. S. L. Zuin. **Da régua e do compasso: As construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais/ Brasil, 2001.

E. S. L. Zuin. Parâmetros curriculares nacionais de matemtíca para o 3° e 4° ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações. In: **Reunião Anual da ANPED(Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação)**, 2002.