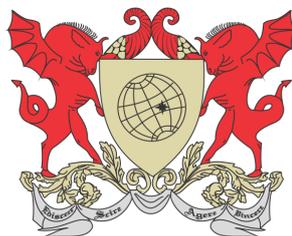


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



RÔMULO LÚCIO DE CASTRO

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO E APLICAÇÕES
AO ESTUDO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO -
FLORESTAL - MINAS GERAIS - BRASIL
MARÇO/2020 1

**FLORESTAL – MINAS GERAIS
2021**

RÔMULO LÚCIO DE CASTRO

**PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO E APLICAÇÕES AO ESTUDO DE
FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO - FLORESTAL - MINAS GERAIS - BRASIL
MARÇO/2020 1**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Justino Muniz Júnior

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

C355p
2021
Castro, Rômulo Lúcio de, 1987-
Problemas de otimização e aplicações ao estudo de funções no Ensino Médio - Florestal - Minas Gerais - Brasil - Março/2020 1 / Rômulo Lúcio de Castro. – Florestal, MG, 2021. 99 f.: il. (algumas color.).

Inclui apêndice.

Orientador: Justino Muniz Júnior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Matemática, 2021.

Referências bibliográficas: f.99.

DOI: <https://doi.org/10.47328/ufvcaf.2022.001>

1. Matemática (Ensino médio). 2. Modelagem.
3. Otimização.. I. Júnior, Justino Muniz. II. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

511.326

Bibliotecário(a) responsável: Elaine da Cunha 2844

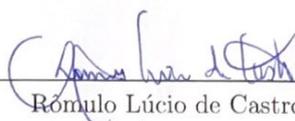
RÔMULO LÚCIO DE CASTRO

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO E APLICAÇÕES AO ESTUDO
DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO - FLORESTAL - MINAS
GERAIS - BRASIL MARÇO/2020 1

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 22 de dezembro de 2021.

Assentimento:


Rômulo Lúcio de Castro
Autor


Justino Muniz Júnior
Orientador

Dedicatória

Dedico, em primeiro lugar, a Deus, pela força, coragem e por iluminar a minha caminhada no Mestrado. Dedico este trabalho aos meus familiares, mãe e irmãos, por acreditarem, incentivarem e estimularem a seguir em frente.

Dedico este trabalho aos meus amigos do curso pelos momentos inesquecíveis de estudos, pelas risadas e por compartilharem comigo os seus conhecimentos. Dedico este trabalho aos meus amigos próximos que sempre estiveram ao meu lado.

Ao meu orientador, Justino Muniz Júnior, pela dedicação, disponibilidade e conhecimentos prestados.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ser parte principal pela conquista de um sonho. Sem o nosso Senhor Deus que me proporcionou força, saúde e vida, não poderia ter chegado ao fim dessa trajetória.

Agradeço em especial a minha família, mãe e irmãos, pois sempre estiveram no meu lado dando todo apoio, incentivo e por não deixarem desistir desta caminhada árdua.

Agradeço imensamente ao meu orientador professor Dr. Justino Muniz Júnior por todo apoio, conhecimentos compartilhados e orientação. Estendo o agradecimento ao meu coorientador professor Dr. Luiz Gustavo Perona Araújo, que enriqueceu o trabalho com suas observações e pela disciplina de Fundamentos de Cálculo ministrada a turma, base desse trabalho. A realização desse sonho também pertence aos senhores.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT da Universidade Federal de Viçosa, com qualidade, respeito e dedicação estiveram comprometidos com a qualidade do mestrado.

Agradeço aos meus amigos, considero-os como família, pelos finais de semanas, feriados e festas por não estar presente, pois a batalha precisava ser vencida. Esta minha família formada pelos amigos: Delcimara, Ênio, Gleidiane, Izadorah e Nathalya, o meu muito obrigado. Amo todos vocês.

Os meus agradecimentos aos meus amigos do curso, foram longos dias de estudos compartilhados, sendo eles finais de semanas ou feriados. Dias estes coroados por risadas, alegrias e ansiedades. Amigos estes que formam o G7: Eliane, Marccone, Cláudio, Carla, Fernanda, Marcelo e Ednéia. O meu muito obrigado ao G7, estarão sempre em meu coração.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

CASTRO, Rômulo Lúcio de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2021. **Problemas de otimização e aplicações ao estudo de funções no ensino médio - Florestal - Minas Gerais - Brasil Março/2020 1**. Orientador: Justino Muniz Júnior.

Em Matemática, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática de valores em um dado intervalo. Problemas de otimização são comuns em nossa vida diária e aparecem quando queremos por exemplo minimizar os custos e maximizar os lucros de um negócio, minimizar o tempo de uma viagem, determinar a velocidade mínima necessária para que um foguete escape da atração gravitacional da Terra, minimizar o número de azulejos que devem ser usados para cobrir uma parede e etc. O foco deste trabalho será estudar alguns métodos para modelar e resolver alguns problemas de otimização, mais especificamente, estudar problemas envolvendo máximos e mínimos de funções e explorar alguns exemplos motivadores do cotidiano que possam ser levados para a sala de aula e aplicar aos alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino Médio. Modelagem. Otimização.

Abstract

CASTRO, Rômulo Lúcio de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2021.
Optimization problems and applications to the study of functions in high school - Florestal - Minas Gerais - Brasil Março/2020 1. Adviser: Justino Muniz Júnior.

In Mathematics, the term optimization refers to the study of problems that seek to minimize or maximize a function through the systematic choice of values in an interval. Optimization problems are common in our daily lives and arise when we want to for example minimize costs and maximize profits for a business, minimize travel time, determine the minimum speed needed for a rocket to escape the Earth's gravitational field, minimize the number of tiles that should be used to cover a wall and so on. The focus of this work will be to study some methods for modeling and some optimization problems, more specifically to study problems involving maxima and minima application of functions and to explore some motivating everyday examples that can be taken to the classroom and applied to high school students.

Keywords: High School. Modeling. Optimization.

Lista de Figuras

2.1	O valor $f(x)$ como a altura do ponto acima do eixo x .	18
2.2	Gráfico de f com destaque do domínio e imagem.	18
2.3	Gráfico da função $f(x) = 5x + 4$.	19
2.4	Composição das funções f e g .	21
2.5	Diagrama de setas: função inversa f^{-1} reverte a função f .	21
2.6	Função quadrática: $\Delta > 0$.	23
2.7	Função quadrática: $\Delta = 0$.	23
2.8	Função quadrática: $\Delta < 0$.	24
2.9	Ponto de mínimo de f .	25
2.10	Ponto de máximo de f .	25
2.11	Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x - 5$.	27
4.1	Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.	46
4.2	Inclinação da reta tangente no ponto $P = (a, f(a))$.	48
4.3	Ilustração do Teorema do Valor Médio de Lagrange.	54
4.4	Gráfico de uma função convexa f .	58
5.1	Esboço do gráfico $f(x) = ax^2 + bx + c$.	65
5.2	Quadra de basquete com comprimentos $100 - x$ e x .	66
5.3	Gráfico da função $A(x) = -x^2 + 100x$.	67
5.4	Gráfico da função $p(x) = -x^2 + 120x + 3600$.	69
5.5	Campo retangular à margem de um rio reto.	70
5.6	Cilindro reto de raio r e altura h .	71
5.7	Cilindro reto: base, tampa e superfície lateral.	71
5.8	Gráfico da função $R(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$.	74
6.1	Caso geral do problema 1.	83
6.2	Gráfico da função $A(x) = 1200x - 2x^2$.	84
6.3	Gráfico da função $h(t) = -t^2 + 6t$.	85

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

\in	Pertence	∞	Infinito
\mathbb{N}	Conjunto dos Números Naturais	f^{-1}	Função inversa
\mathbb{Q}	Conjunto dos Números Racionais	$Dom(f)$	Conjunto domínio de f
\mathbb{R}	Conjunto dos Números Reais	$Im(f)$	Conjunto imagem de f
$G(f)$	Gráfico da função f	\exists	Existe
\neq	Diferença	\emptyset	Conjunto vazio
\Rightarrow	Implica que	ε	Letra grega Épsilon
\Leftrightarrow	Equivalência	δ	Letra grega Delta
\cup	União	η	Letra grega Eta
\cap	Intersecção		

Lista de Abreviaturas e Siglas

Neste trabalho foram utilizadas as siglas:

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

PNE - Plano Nacional de Educação

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD - Programa Nacional do Livro e do Material Didático

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sumário

1	Introdução	12
2	Função com olhar para problemas de otimização	15
2.1	Um pouco de história do conceito de função	15
2.2	Funções	17
2.3	Função quadrática	22
3	Conceitos preliminares do Cálculo	28
3.1	Sequências de números reais	28
3.1.1	Limite de uma sequência	28
3.1.2	Limites e desigualdades	31
3.1.3	Operações com limites	32
3.2	Algumas noções topológicas	33
3.2.1	Conjuntos abertos	33
3.2.2	Conjuntos fechados	34
3.2.3	Pontos de acumulação	35
3.2.4	Conjuntos compactos	36
4	Conceitos fundamentais do Cálculo	37
4.1	Limites de funções	37
4.1.1	Definição e propriedades	37
4.1.2	Limites laterais	40
4.2	Funções contínuas	41
4.2.1	Funções contínuas num intervalo	44
4.2.2	Funções contínuas em conjuntos compactos	46
4.3	Derivadas	47
4.3.1	A noção de derivada	48
4.3.2	Regras operacionais	50
4.3.3	Derivada e crescimento local	51
4.3.4	Funções deriváveis num intervalo	52
4.4	Fórmula de Taylor e aplicações da derivada	55
4.4.1	Fórmula de Taylor	55
4.4.2	Funções convexas e côncavas	57

5	Problemas de Otimização	62
5.1	Métodos para resolução de problemas de otimização	63
5.2	Esboço do gráfico da função quadrática	64
5.3	Resolução de problemas de otimização sem o uso do Cálculo	66
5.4	Resolução de problemas de otimização com o uso do Cálculo	69
6	Currículo no Ensino Médio e a resolução de problemas	75
6.1	Sequência didática: resolução de problemas de otimização	79
6.2	Descrição da sequência didática	80
7	Considerações Finais	90
A	Atividade de Nivelamento	92

Introdução

A Matemática é uma ciência benéfica e necessária para a sociedade, ela nos ajuda a compreender e resolver situações do dia a dia. Ela também nos auxilia a encontrar respostas e soluções precisas sobre ela. O conhecimento matemático facilita-nos a aplicar métodos para encontrar soluções para vários problemas da vida cotidiana, o progresso e o desenvolvimento da humanidade.

Partindo desta premissa, em muitas situações do nosso cotidiano, deparamos com as seguintes questões: Qual o custo mínimo para produzir uma lata cilíndrica? Ou então, qual é a maior área que se consegue cercar com uma quantidade conhecida de tela? Cabe à Matemática dedicar-se a responder essas questões que se relacionam com o mundo da Otimização.

Sendo assim, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática de valores em um dado intervalo. Problemas de otimização são comuns em nossa vida diária e aparecem quando procuramos determinar o nível de produção mais econômico de uma fábrica, determinar a velocidade mínima necessária para que um foguete escape da atração gravitacional da Terra, o consumo de despesas do dia a dia, dentre outros exemplos.

Em virtude desta realidade, o presente trabalho abordará alguns problemas de otimização, suas aplicações e as contribuições da metodologia de resoluções de problemas nas suas resoluções. Para Stewart [19], na solução destes problemas práticos, o maior desafio está frequentemente em converter o problema em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada.

Desde a Grécia Antiga, no século III a.C., os estudiosos gregos têm se interessado em compreender o “ótimo” de um determinado fenômeno, como por exemplo, intuitivamente sabiam que de todas as curvas com igual perímetro, as que envolviam maior área era o círculo. Assim como este, inúmeros problemas eram resolvidos utilizando processos inteligentes, mas não há uma maneira sistemática de resolvê-los.

Antigamente, a resolução dos problemas de otimização estava relacionada a estudos geométricos. Como aponta Santiago [17], a primeira obra histórica onde se identifica os problemas de otimização foi bem anterior ao desenvolvimento do Cálculo

Diferencial. Esses registros podem ser encontrados nas obras *Elementos*, de Euclides, datada do século V a.C.. Podemos observar esse fato nos livros de Geometria no Plano, livro III, dos *Elementos*, na proposição 7, proposição 8, proposição 15 e proposição 16 que estão relacionadas com o círculo. A quinta proposição, no livro IV, a proposição 27, comenta sobre um problema que consiste em procurar o maior produto possível entre dois números cuja soma era dada.

O problema de máximo e mínimo tido como o mais antigo na história da Matemática, é essencialmente geométrico, o chamado problema isoperimétrico clássico, que pode ser descrito da seguinte maneira: achar, dentre as curvas planas fechadas de um dado comprimento, aquela que abarca a maior superfície. Na literatura sobre problemas de máximos e mínimos, o problema mais antigo é encontrado no épico Eneida, do poeta romano Virgílio, chamado “A Lenda de Dido”. Dido era uma princesa fenícia da cidade de Tiro, que fugiu de navio no século IX a.C para o norte da África, após o assassinato do seu marido. Dido fundou a cidade de Cartago. Segundo a lenda, o rei local lhe disse que podia tomar toda a terra que couber numa bolsa feita com a pele de um único animal. Dido então decidiu cortar a pele em tiras muito finas, que foram emendadas formando uma longa corda. Ela escolheu um lugar a beira mar na qual decidiu por fazer um semicírculo com essa longa corda feita com a pele do animal.

Segundo Eves [6], as primeiras manifestações claras do método diferencial se encontra em algumas ideias de Pierre de Fermat¹ (1607 - 1665). Ele desenvolveu o primeiro método geral para a determinação de máximos e mínimos. No entanto, este método era um procedimento algorítmico desprovido de qualquer fundamentação demonstrativa. A generalização da resolução deste tipo de problema aparece com os trabalhos de Isaac Newton (1643 - 1727)² e Gottfried Leibniz (1646 - 1716)³ no desenvolvimento do Cálculo Diferencial Integral.

No documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), propõe-se que no Ensino Médio o foco seja a construção de uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade em diferentes contextos. Nesse sentido, é importante o recurso das tecnologias digitais e aplicativos para a investigação matemática. Assim, o uso do GeoGebra [7], um software de matemática dinâmico gratuito para todos os níveis de ensino, pode ser usado para a construção de modelos e das resolução de problemas matemáticos. O presente trabalho não teve o foco na abordagem de resoluções de situações problemas com o uso do GeoGebra, mas o professor poderá usar o software

¹Pierre Fermat (1601-1665) nasceu em Beaumont de Lomagne, perto de Toulouse, no dia 17 de agosto de 1601. Advogado francês teve a mais importante contribuição para a matemática, a fundação da moderna Teoria dos Números. Descartes e Fermat estão no centro das mudanças que culminaram com a invenção da geometria analítica.

²Isaac Newton nasceu na aldeia de Woolsthorpe no dia do Natal em 1642, ano da morte de Galileu. Quando entrou na Universidade de Cambridge em 1661, Newton não sabia muito de matemática, mas aprendeu rapidamente lendo Euclides e Descartes e frequentando as aulas de Isaac Barrow.

³Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig em 1646 e estudou direito, teologia, filosofia e matemática na universidade local, graduando-se com 17 anos. Após obter seu doutorado em direito aos 20 anos, Leibniz entrou para o serviço diplomático. Considerado o grande gênio universal do século XVII e rival de Newton na invenção do cálculo.

em suas aulas para verificar (refletir sobre) a solução de problema aqui abordado. O trabalho possui um total de vinte e cinco figuras, excluindo as figuras da atividade de nivelamento, sendo que dezesseis delas foram construídas com o uso do GeoGebra e as outras foram retiradas das referências bibliográficas mencionadas no texto.

A organização deste trabalho segue a ordem: O capítulo 1, a introdução enfoca os objetivos e a justificativa para a escolha do assunto, apresenta um breve contexto histórico do surgimento do Cálculo Diferencial.

O capítulo 2 se divide em três seções, sendo que na primeira seção abordar-se-á de forma breve a história do conceito de função. Nas duas seções seguintes serão abordados conceitos básicos e propriedades relacionados às funções em geral e as funções quadráticas. Neste último caso, destinam-se ao estudo dos conceitos de máximos e mínimos, imprescindíveis no desenvolvimento do trabalho.

No capítulo 3 serão abordados definições e conceitos preliminares do cálculo como sequências de números reais, limites de uma sequência, operações com limites e algumas noções de topologia. Esse capítulo irá abordar resultados que irão subsidiar os resultados do capítulo seguinte.

No capítulo 4, conceitos fundamentais do cálculo, serão estudados teoremas e definições de limites de funções, continuidade e de derivadas que fundamentam este trabalho.

O capítulo 5 divide-se em quatro seções, sendo que na primeira seção é apresentado dois métodos para a resolução de problemas de otimização. A segunda seção abordará como esboçar o gráfico da função quadrática usando as ferramentas do Cálculo Diferencial. A terceira seção será apresentado dois problemas de otimização, retirados de dois livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático e do Material Didático (PNLD) de 2021. Essa seção trabalhará com a resolução de problemas sem o uso do Cálculo Diferencial. Na última seção, será apresentado a resolução de outros três problemas de otimização com o uso do Cálculo.

O capítulo 6 se organiza em duas seções. Aponta-se o documento normativo da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as competências específicas do Ensino Médio que devem ser garantidas aos estudantes e as habilidades relacionadas a elas. O capítulo abordará a temática da resolução de problema, vista pelo autor George Polya⁴, no seu livro *A arte de resolver problemas*. Na primeira seção desse capítulo, será observado o conceito de sequência didática e a apresentação da proposta da sequência didática a ser ministrada aos alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Na seção seguinte será apresentada a descrição da sequência didática.

Por fim, são expostas as considerações finais, referências bibliográficas e apêndices com a proposta da atividade para verificação de conhecimento dos alunos, intitulada atividade de nivelamento.

⁴George Polya (1887-1985) matemático húngaro, nasceu Budapeste (Hungria), tornou referência no ensino da Matemática e dedicou-se à arte de resolução de problemas de matemática.

Função com olhar para problemas de otimização

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos e noções de funções de uma variável real e função quadrática que irão subsidiar os pré-requisitos para o entendimento na resolução dos problemas de otimização. Na seção que trata da função quadrática, será abordado os conceitos e definições da função e a construção do seu gráfico para que possa ser feito o estudo dos extremos, ponto de máximo ou mínimo, que neste caso é o vértice da parábola. Inicia-se o capítulo discorrendo sobre a história do conceito de função, no qual a ideia teve uma evolução turbulenta na história da Matemática. As definições e os resultados dados podem ser encontrados nas referências Iezzi [8], Lima [10] e Stewart [19].

2.1 Um pouco de história do conceito de função

A presente seção inicia-se com um parágrafo retirado do livro Tópicos de História da Matemática [15], no qual temos a ideia do conceito de função, que por sinal, teve uma evolução turbulenta para a definição que temos hoje. O parágrafo diz:

Hoje, quando pensamos em uma função, duas coisas vêm à mente: a curva que a representa graficamente e sua expressão analítica. Em seguida, se fizermos um exercício mais formal, também lembramos da ideia de correspondência, expressa pela definição em termos de conjuntos. (Pitombeira e Roque, 2019, p.296)

O conceito de função ao longo da história da Matemática apresenta um longo e turbulento processo de formação de pensamentos, ideias e generalizações. O que pode ser constatado em estudos bibliográficos é que o conceito de função levou muito tempo para formulação no modo que encontramos nos livros didáticos. Como diz Eves [6], a história do termo *função* proporciona um exemplo interessante da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar conceitos.

Segundo o autor Eves, o conceito de função, como as noções de espaço e geometria, passou por uma evolução acentuada e ainda ele enfatiza que:

O conceito de função permeia grande parte da Matemática e, desde as primeiras décadas do século presente, século XX, muitos matemáticos vêm advogando seu uso como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática. [...]. Enfim, é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para sua formação matemática. (EVES, 2004, p. 661).

Atualmente, quando pensamos no conceito de função, a ideia principal que vem a nossa mente é a ideia de uma correspondência. Observa-se na história, nas tabelas babilônicas e egípcias, a ideia de função era relatada implicitamente. Deste ponto de vista, pode-se dizer que essas tabelas presumiam a ideia de função, uma vez que tratavam de registros de correspondências, por exemplo, entre um número e o resultado das operações que envolvem este número.

O matemático Leibniz em 1694, parece ter introduzido a palavra função, segundo o autor Eves, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de um curva. E foi no século XVIII, quando séries infinitas foram usadas para expandir o universo das curvas, até então as curvas que podiam ser expressas analiticamente eram de natureza algébrica. Essa foi a base para a definição do conceito de função.

Foi no século XVIII que o conceito de função foi definido como uma expressão analítica composta de um modo qualquer de quantidades constantes e variáveis. Mas essa definição, como expressão analítica, começou a mudar com os trabalhos de Joseph Fourier (1768-1830). No ano de 1718, o matemático Johann Bernoulli (1667-1748) havia considerado função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes. Essa nova noção de função dada por Bernoulli foi publicada em artigo apresentado à Academia de Ciências de Paris. Contudo, pouco tempo depois, Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.

A definição dada por Euler foi alterada quando Fourier teve que considerar nas suas pesquisas sobre a propagação do calor, séries trigonométricas. Essas séries envolvem uma forma de relação mais geral entre as variáveis que as que já haviam estudadas anteriormente. O matemático Lejeune Dirichlet (1805-1859), numa forma de dar uma ênfase na definição de função para englobar essa forma de relação fez a seguinte formulação: “Uma *variável* é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números, se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre se atribui um valor a x , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y , então se diz que y é uma função (unívoca) de x .” A variável x , é chamada *variável independente*, variável essa que pode ser atribuída qualquer valor e a variável y que é chamada *variável dependente*, cujos valores dependem dos valores de x . Os valores possíveis que x pode assumir são o campo da definição da função e os valores assumidos por y são o campo de valores da função.

Segundo Eves, no século XX, o conceito de função, ao ser reelaborado, considerou

a Teoria dos Conjuntos. Esse conceito de função, a partir da Teoria dos Conjuntos, é encontrado na maioria dos livros didáticos de matemática utilizados pelos alunos do Ensino Médio. Esta ampliação do conceito de função a partir desta teoria, proporcionou abranger relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa. Assim, como define o autor, o conceito de função a partir da Teoria do Conjuntos:

Uma *função* f é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e o conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem* da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Uma função f se diz *injetora* se, de $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $b_1 = b_2$, decorre $a_1 = a_2$. Se f é uma função e $(a, b) \in f$, escreve-se $b = f(a)$. (EVES, 2004, p. 661).

Portanto, ao longo da história o que podemos observar é que o conceito de função teve um caminho longo de definições e que ele evoluiu a partir de fatos que se relacionam com as noções de espaço e geometria, segundo o autor Eves [6].

2.2 Funções

Definição 2.1: Dados dois conjuntos X e Y , uma *função* $f : X \rightarrow Y$ é uma regra (ou um conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$.

O conjunto X chama-se *domínio* e Y é o *contradomínio* da função f . Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de x pela função f , ou o *valor* assumido pela função f no ponto $x \in X$. Iremos trabalhar com funções reais de uma variável real que são quando os conjuntos $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.1: A *função identidade* $f : X \rightarrow X$, definida por $f(x) = x$ para todo x pertencente a \mathbb{R} e as *funções constantes* $f : X \rightarrow Y$, onde se toma um elemento $c \in Y$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in X$, são exemplos particulares simples de funções.

Exemplo 2.2.2: A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, é chamada função *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Casos particulares de funções afins são as funções *lineares* $f(x) = ax$, as funções constantes $f(x) = b$ e a função identidade $f(x) = x$.

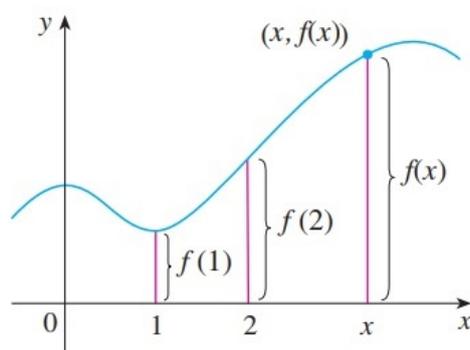
Definição 2.2: Seja f uma função com domínio \mathbf{D} , então o gráfico de f , $G(f)$, *gráfico* será o conjunto de pares ordenados

$$G(f) = \{(x, f(x)) | x \in \mathbf{D}\}.$$

Notemos que o gráfico de f consiste de todos os pontos (x, y) no sistema cartesiano ortogonal XY tais que $y = f(x)$ e x está no domínio de f .

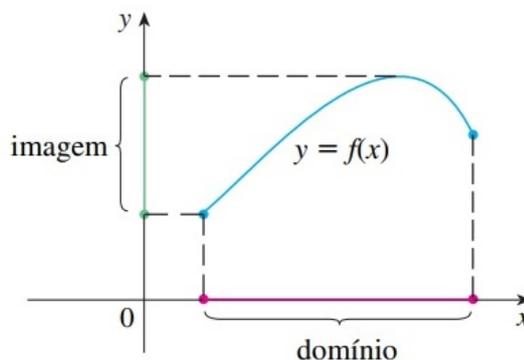
O gráfico de uma função f nos fornece uma ilustração do comportamento da função, uma vez que a coordenada y de qualquer ponto (x, y) sobre o gráfico é $y = f(x)$. Portanto, podemos fazer a leitura: o valor $f(x)$ sendo a altura do ponto no gráfico acima de do eixo x , veja a Figura (2.1). Uma leitura importante sobre gráfico de f é que ele nos permite visualizar o domínio de f sobre o eixo x e a imagem sobre o eixo y , como mostra na Figura (2.2).

Figura 2.1: O valor $f(x)$ como a altura do ponto acima do eixo x .



Fonte: STEWART, 2013, p. 11.

Figura 2.2: Gráfico de f com destaque do domínio e imagem.



Fonte: STEWART, 2013, p. 11.

Definição 2.3: Uma função $f : X \rightarrow Y$ chama-se *injetiva* quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y . Ou seja, f é injetiva quando

$$x \neq x' \text{ em } X \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

A condição acima pode também ser expressa em sua forma *contrapositiva*:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

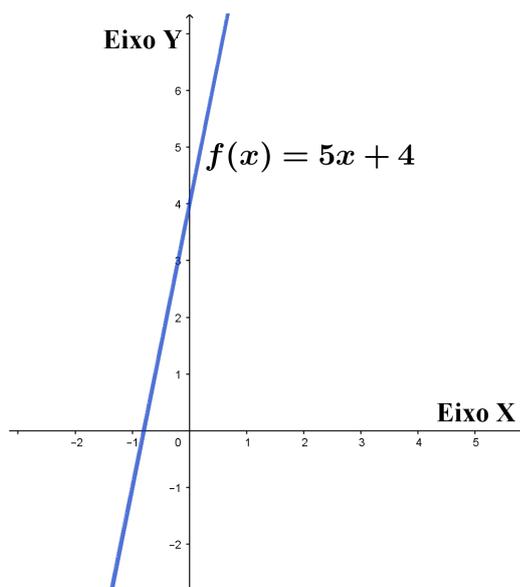
Definição 2.4: Uma função $f : X \rightarrow Y$ é *sobrejetiva* quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Uma observação importante a ser feita é que para mostrar que uma função f é sobrejetiva deve-se provar que a “equação” $f(x) = y$ possui solução $x \in X$, seja qual for o $y \in Y$ dado.

Definição 2.5: Uma função $f : X \rightarrow Y$ chama-se uma *bijeção*, ou uma *correspondência biunívoca* entre X e Y quando é a ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 2.2.3: Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x + 4$. A função é injetiva, pois para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$ então $5x_1 + 4 \neq 5x_2 + 4$, logo $f(x_1) \neq f(x_2)$. A função f é sobrejetiva, pois para qualquer elemento $y \in \mathbb{R}$ tem-se que $x = \frac{y - 4}{5}$, satisfaz $f(x) = y$. Logo, a função $f(x) = 5x + 4$ é bijetiva, veja o gráfico na Figura (2.3).

Figura 2.3: Gráfico da função $f(x) = 5x + 4$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A construção do gráfico da função $f(x) = 5x + 4$ foi feita pelo *software* Geogebra. Mas o gráfico pode ser construído por uma tabela no qual se atribui valores aleatórios para a variável x . Esses valores serão substituídos na lei de formação da função $f(x) = 5x + 4$ para que o valor correspondente de y seja determinado, bem como o par ordenado (x, y) . A Figura (2.3) representa a parte que mostra as interseções do gráfico com os eixos coordenados (Eixo X e Eixo Y). Essas interseções são importantes, pois a interseção do gráfico com o Eixo X representa a raiz ou zero da função, ou seja, quando $f(x) = 0$. A interseção do gráfico com o Eixo Y representa o ponto de coordenada $(f(0), 4)$. Esse recorte sinaliza informações importantes à respeito da função estudada.

Duas funções f e g podem ser combinadas para formar novas funções $f + g$, $f - g$, fg e $\frac{f}{g}$. As funções soma e diferença são assim definidas

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

Se o domínio de f é A e o domínio de g é B , então o domínio de $f + g$ é a intersecção $A \cap B$, porque tanto $f(x)$ quanto $g(x)$ devem estar definidos. Analogamente, as funções produtos e quociente são definidas por

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

O domínio de fg é $A \cap B$ e o domínio de f/g é $\{x \in A \cap B | g(x) \neq 0\}$.

Exemplo 2.2.4: Sejam as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$. O domínio da função f é $A = [0, +\infty)$ e o domínio da função g é $B = (-\infty, 2]$. Portanto, o domínio da função $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ é $A \cap B = [0, 2]$.

Exemplo 2.2.5: Sejam as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 1$, então o domínio da função racional $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-1}$ é $\{x | x \neq 1\}$, ou então, $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Existe outra maneira de combinar duas funções para obter uma nova função. Vejamos a definição abaixo.

Definição 2.6: Dadas duas funções f e g , a *função composta* (também chamada de *composição* de f e g) é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

O domínio da função composta $f \circ g$ é o conjunto de todos os x no domínio de g tais que $g(x)$ está no domínio de f . Logo, $f \circ g$ está definida sempre que tanto $g(x)$ quanto $f(g(x))$ estiverem definidas. A Figura 2.4 mostra como ter uma visão da composição de funções.

Podemos associar uma função real a uma espécie de máquina, ver Figura 2.4, que transforma os valores de entrada, segundo uma regra determinada (lei de formação), obtendo um novo valor no final do processo, chamado imagem do primeiro.

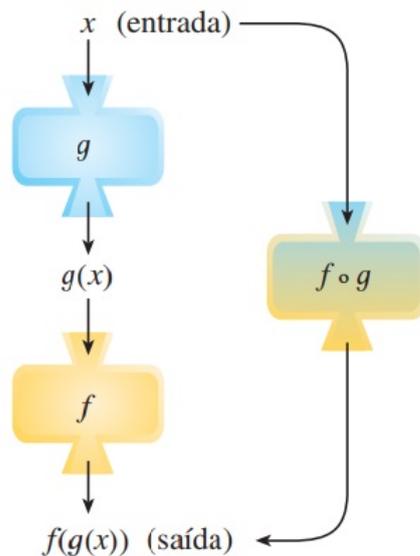
Em muitos casos, sobre um número x atua primeiro uma função g e, depois, sobre a imagem assim obtida, torna a atuar uma outra função f . Dessa maneira, aplicando primeiro a função g a um determinado valor de seu domínio e depois outra função f , à imagem assim obtida, definimos uma nova função $f \circ g$, chamada composição de f e g . A $f \circ g$ máquina é composta pela máquina g (primeiro) e a seguir pela máquina f .

Exemplo 2.2.6: Sejam as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$. As funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ são:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Figura 2.4: Composição das funções f e g .

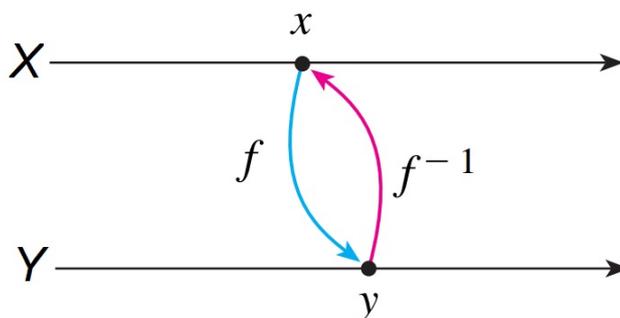


Fonte: STEWART, 2013, p. 38.

Definição 2.7: Diz-se que a função $g : Y \rightarrow X$ é a *inversa* da função definida por $f : X \rightarrow Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é a inversa de f se, e somente se, f é a inversa de g . **Notação:** g é a função inversa de f e é denotada por $g = f^{-1}$.

Quando g é a inversa de f , tem-se que $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$. Isto é, se f transforma x em y , então f^{-1} transforma y de volta para x . O diagrama de setas na Figura 2.5 indica que f^{-1} reverte o efeito de f .

Figura 2.5: Diagrama de setas: função inversa f^{-1} reverte a função f .



Fonte: STEWART, 2013, p. 56.

Exemplo 2.2.7: Seja $f(x) = x^3$. Sua função inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, porque se $y = x^3$, então

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x.$$

Resultados que são consequência da definição: se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ então a função f é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Por sua vez, a igualdade $f(g(y)) = y$, valendo para todo $y \in Y$, implica que f é sobrejetiva pois, dado $y \in Y$ arbitrário, tomamos $x = g(y) \in X$ e temos $f(x) = y$.

Portanto, se a função $f : X \rightarrow Y$ possui inversa então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre X e Y . Reciprocamente, se $f : X \rightarrow Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y então f possui uma inversa $g : Y \rightarrow X$. Para definir g , notamos que, sendo f sobrejetiva, para todo $y \in Y$ existe algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Além disso, como f é injetiva, este x é único. Podemos então $g(y) = x$. Assim, $g : Y \rightarrow X$ é a função que associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. De fato, temos que

$$g(f(x)) = x \text{ e } f(g(y)) = y \text{ para } x \in X \text{ e } y \in Y \text{ quaisquer.}$$

2.3 Função quadrática

Definição 2.8: Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando existem números reais a, b, c , com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O gráfico da função quadrática é chamado de *parábola*. A definição e a construção dela pode ser vista no livro do Lima [10], página 125.

Exemplo 2.3.1: A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$ é quadrática com os coeficientes $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

Definição 2.9: Os *zeros* ou *raízes* da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Segundo Lima [10], página 120, achar as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é um conhecimento milenar. O método de completar quadrados será usado para determinar as raízes da equação. Seja $ax^2 + bx + c$ o trinômio do segundo grau. Podemos determinar sua forma canônica fazendo:

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right].$$

Completando o quadrado da expressão dentro do colchetes, temos:

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

A expressão na última parte da igualdade acima, maneira na qual escrevemos o trinômio do segundo grau, é chamada a *forma canônica* e tem alguns resultados importantes. Vejamos.

Em primeiro lugar, ela permite determinar a fórmula que dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Portanto, para determinar os *zeros* ou *raízes* da função quadrática, façamos $f(x) = 0$ e sendo $a \neq 0$. Temos as seguintes equivalências:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \tag{2.1}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{2.2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.4}$$

Logo, temos a fórmula de *Bháskara*

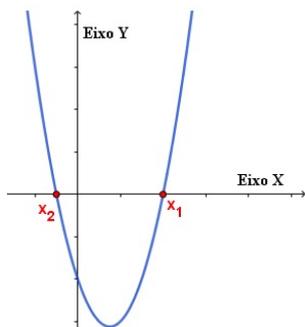
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o *discriminante* e a passagem da linha (2.2) para a linha (2.3) só é válida para $\Delta \geq 0$. Agora se $\Delta < 0$, a equivalência entre as linhas (2.1) e (2.2) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado do termo $x + \frac{b}{2a}$ não pode ser negativo. Logo, podemos fazer uma análise do discriminante em relação as raízes da função quadrática. Segue-se:

- i. Se $\Delta > 0$ a função quadrática terá duas raízes reais e distintas;
- ii. Se $\Delta = 0$ a função quadrática terá duas raízes reais e iguais;
- iii. Se $\Delta < 0$ a função quadrática não terá raízes reais.

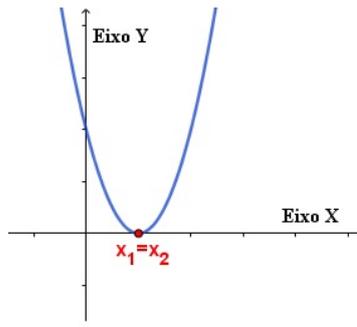
Pelas análises feitas do discriminante, observemos o gráfico da função quadrática para cada situação listada. Vamos considerar uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a > 0$. O caso para $a < 0$ é análogo.

Figura 2.6: Função quadrática: $\Delta > 0$.

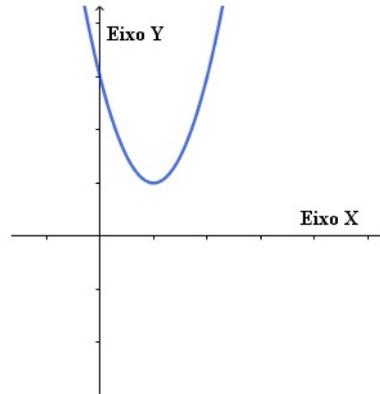


Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.7: Função quadrática: $\Delta = 0$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.8: Função quadrática: $\Delta < 0$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Da fórmula de *Bhaskara* da linha (2.4), temos o resultado que a soma das raízes da equação do segundo grau é $s = \frac{-b}{a}$ e o produto é $p = \frac{c}{a}$. De fato,

Demonstração. Sejam $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ as raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Assim:

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta}) + (-b - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})}{2a} \cdot \frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

□

Um resultado importante é que a média aritmética das raízes x_1 e x_2 é $\frac{-b}{2a}$, ou seja, as raízes x_1 e x_2 são equidistantes do ponto $\frac{-b}{2a}$.

Vejam agora a seguinte análise, suponhamos $a > 0$, temos que a forma canônica do trinômio do segundo grau é dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

A análise que fazemos, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira parcela, que depende de x , é sempre maior ou igual a zero. A segunda parcela é constante. Portanto, o menor valor dessa soma é atingindo quando

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

Neste ponto, $f(x)$ também atinge seu valor mínimo o qual é:

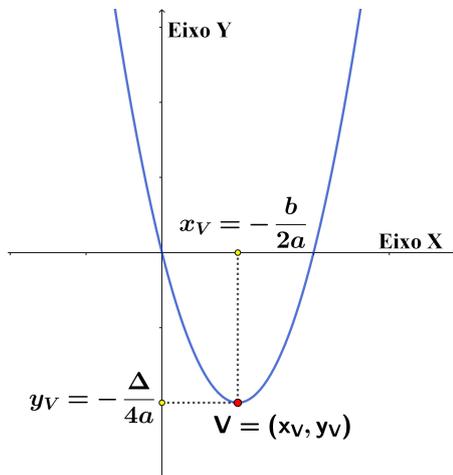
$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left(\frac{-\Delta}{4a^2} \right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Se $a < 0$, o valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, quando $a > 0$, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ não assume valor máximo. Ela é uma função ilimitada superiormente. De forma análoga, quando $a < 0$, a função f não assume valor mínimo, ou seja, ela é ilimitada inferiormente. Desses dois casos que acabamos de ver, o ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

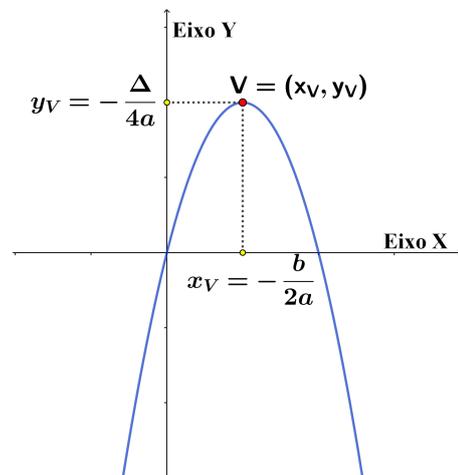
representa as coordenadas do extremo da parábola, ou seja, as coordenadas do *vértice da parábola*. E se $a > 0$, a função possui *ponto de mínimo*, Figura 2.9, agora se $a < 0$, Figura 2.10, a função possui *ponto de máximo*.

Figura 2.9: Ponto de mínimo de f .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2.10: Ponto de máximo de f .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, podemos tirar as seguintes conclusões do gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ a partir do seu vértice:

Lema 2.10:

1. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$: a função tem concavidade voltada para cima e nesse caso terá um ponto de mínimo, sendo limitada inferiormente. Logo, o conjunto imagem da função f , denotado por $Im(f)$, é

$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R}; y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\}.$$

2. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a < 0$: a função tem concavidade voltada para baixo e nesse caso terá um ponto de máximo, sendo limitada superiormente. Logo, o conjunto imagem da função f é

$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R}; y \leq -\frac{\Delta}{4a} \right\}.$$

Demonstração.

1. Seja a forma canônica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right].$$

Por definição, $a \neq 0$ e $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ é uma quantidade maior ou igual a zero, temos para $a > 0$:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0.$$

Somando a ambos os membros o termo $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, temos:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Mas, $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right]$. Temos então que

$$f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Já que o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Logo,

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Isso quer dizer que a função é limitada inferiormente por $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$. Ou seja, o valor mínimo da função y_V é atingido quando $a > 0$.

Portanto:

$$y = f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo, o conjunto imagem da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

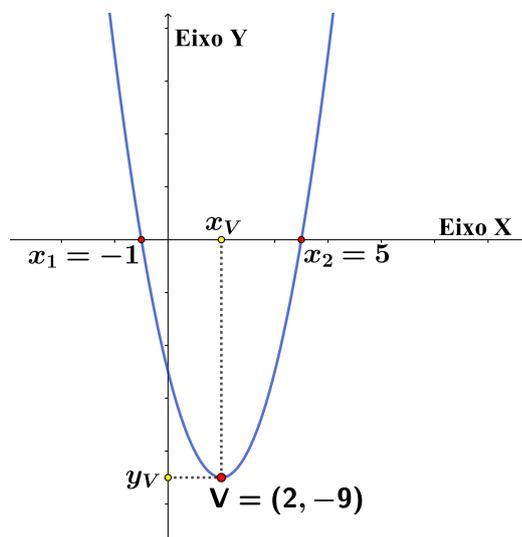
$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R}; y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\}.$$

2. A demonstração do item 2 com $a < 0$ é análoga a do item 1.

□

Exemplo 2.3.2: A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x - 5$, com $a = 1 > 0$, com raízes $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$, possui concavidade voltada para cima e possui ponto de mínimo de coordenadas $V = (2, -9)$.

Figura 2.11: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x - 5$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A construção do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x - 5$ foi feita pelo *software* Geogebra, mas o gráfico pode ser construído por uma tabela no qual se atribui valores aleatórios para a variável x . Esses valores serão substituídos na lei de formação da função $f(x) = x^2 - 4x - 5$ para que o valor correspondente de y seja determinado, bem como o par ordenado (x, y) . A Figura 2.11 representa a parte que mostra as interseções do gráfico com os eixos coordenados (Eixo X e Eixo Y) e o vértice da parábola. Este recorte do gráfico com esses pontos são importantes para o estudo do sinal da função quadrática.

Conceitos preliminares do Cálculo

Neste capítulo apresentaremos conceitos preliminares importantes como: sequência de números reais, limites de sequências, operações com limites, limites infinitos e algumas noções de topologia. Esses conceitos serão importantes para o estudo de problemas de otimização e aplicações ao estudo de funções. As definições e resultados tratados neste capítulo são baseados na referência de Lima [9].

3.1 Sequências de números reais

Nesta seção será abordado: limites de sequências dos números reais. Esses conceitos e resultados importantes da Análise Matemática referem-se a limites. Os resultados apresentados nesta seção será o alicerce para o entendimento dos demais conceitos desse trabalho.

3.1.1 Limite de uma sequência

Uma *sequência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o *n-ésimo termo* da sequência. Escreve-se $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente x_n para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n .

Uma sequência (x_n) diz-se *limitada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sequência (x_n) é *limitada* quando ela é limitada superior e inferiormente. Isto equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada uma sequência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma *subsequência* de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ de \mathbb{N} . Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ ou $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ para indicar a subsequência $x' = x|_{\mathbb{N}'}$. A notação $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}}$ mostra como uma subsequência pode ser considerada como uma sequência, isto é, uma função cujo domínio é \mathbb{N}' . Lembremos que $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado, isto é, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}'$ com $n_k > n_0$.

Diz-se que o número real a é *limite* da sequência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$.

Simbolicamente, escreve-se:

$$a = \lim x_n \quad . \equiv . \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Acima, o símbolo $. \equiv .$ significa que vem depois é a definição do que vem antes. O símbolo \forall significa “para todo” e o símbolo \exists significa “existe”. O ponto e vírgula quer dizer “tal que” e a seta \Rightarrow significa “implica”.

Convém lembrar que $|x_n - a| < \varepsilon$ é o mesmo que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Assim, dizer que $\lim x_n = a$, significa afirmar que qualquer intervalo aberto de centro a contém todos os termos x_n da sequência, salvo para um número finito de índices n (a saber, os índices $n \leq n_0$ onde n_0 é escolhido em função do raio ε do intervalo dado).

Escreve-se $a = \lim x_n$ ou $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$ ou $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ou $x \rightarrow a$. Esta última expressão lê-se “ x_n tende para a ” ou “converge para a ”. Uma sequência que possui limite diz-se *convergente*, caso contrário, ela chama *divergente*.

Teorema 3.1 (Unicidade do Limite): Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$. Se $a \neq b$, $|b - a| > 0$. Seja $\varepsilon = \frac{|b - a|}{2} > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$ e existe também m_0 tal que $n \geq m_0$ implica que $|x_n - b| < \varepsilon$. Então $n \geq \max\{n_0, m_0\}$ implica:

$$\begin{aligned} |b - a| &= |b - x_n + x_n - a| \leq |b - x_n| + |x_n - a| \\ &\leq |x_n - b| + |x_n - a| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |b - a| \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo, $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$. □

Teorema 3.2: Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a .

Demonstração. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$ a subsequência. Dado qualquer intervalo aberto I de centro a , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n , com $n > n_0$, pertencem a I . Em particular, todos os termos x_{n_k} , com $n_k > n_0$ também pertencem a I . Logo, $\lim x_{n_k} = a$. □

Teorema 3.3: Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $x_n \in (a - 1, a + 1)$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$. Todos os termos da sequência x_n estão contido no intervalo $[b, c]$. Logo, ela é limitada. □

Uma sequência x_n chama-se *monótona* quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n . No primeiro caso, diz-se que (x_n) é *monótona não-decrescente* ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$) e, no segundo, que (x_n) é *monótona não-crescente* ($x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$). Se, mais precisamente, tivermos $x_n < x_{n+1}$ (respectivamente $x_n > x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a sequência é *crescente* (respectivamente, *decrescente*).

Toda sequência monótona não-decrescente (respectivamente não-crescente) é limitada inferiormente (respectivamente superiormente) pelo seu primeiro termo. A fim de que ela seja limitada é suficiente que possua uma subsequência limitada. Com efeito, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência limitada da sequência monótona (digamos, não-decrescente) (x_n) . Temos $x_{n'} \leq c$ para todo $n' \in \mathbb{N}'$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $n' \in \mathbb{N}'$ tal que $n < n'$. Então $x_n \leq x_{n'} \leq c$.

Para a demonstração do próximo teorema e outros que serão visto no decorrer do trabalho, vamos definir o conceito de *ínfimo* e *supremo*. Mas antes, temos os seguintes conceitos: um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *limitado superiormente* quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma *cota superior* de X . Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O número a chama-se então de *cota inferior* de X .

Definição 3.4: Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. Dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é o *supremo* de X quando é a menor das cotas superiores, ou seja,

- (S1) Para todo $x \in X$ tem-se $x \leq b$;
- (S2) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.
Podemos trocar (S2) por:
- (S2') Se $c < b$ então existe $x \in X$ tal que $c < x$.

Notação: $b = \sup X$

Definição 3.5: Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o *ínfimo* de X quando é a maior das cotas inferiores, ou seja,

- (I1) Para todo $x \in X$ tem-se $a \leq x$;
- (I2) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$.
Podemos trocar (I2) por:
- (I2') Se $a < c$ então existe $x \in X$ tal que $x < c$.

Notação: $a = \inf X$

Teorema 3.6: Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração. Seja (x_n) monótona, digamos não-decrescente limitada. Escrevemos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, conjunto dos elementos da sequência, e $a = \sup X$. Afirmamos que $\lim x_n = a$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X . Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $n > n_0$ implica que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$. \square

Corolário 3.7 (Teorema de Bolzano-Weierstrass): Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Basta mostrar que toda sequência (x_n) limitada possui uma subsequência monótona.

Para demonstrar o corolário, definimos que um termo x_n da sequência é *destacado* quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$.

Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$, então a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito $D = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ for maior do que todos os $n \in D$. Então, x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado. Logo, existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência estritamente crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \dots < x_{n_k} < \dots$. \square

3.1.2 Limites e desigualdades

Seja P uma propriedade referente aos termos de uma sequência (x_n) . Diremos que “para todo n suficientemente grande x_n goza da propriedade P ” para significar que “que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que x_n goza da propriedade P ”.

Teorema 3.8: Seja $a = \lim x_n$. Se $b < a$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$ então $x_n < b$ para todo n suficientemente grande.

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Se $b < a$, tomamos $\varepsilon = a - b > 0$, temos $\varepsilon > 0$ e $b = a - \varepsilon$. Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Portanto, $b < x_n$. Analogamente, tomamos $\varepsilon = b - a$, temos $\varepsilon > 0$ e $b = a + \varepsilon$. Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Portanto, $x_n < b$. \square

Corolário 3.9: Seja $a = \lim x_n$. Se $a > 0$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $x_n > 0$. Analogamente, se $a < 0$ então $x_n < 0$ para todo n suficientemente grande.

Demonstração. Basta considerar $b = 0$ no Teorema 3.8. \square

Corolário 3.10: Sejam $a = \lim x_n$ e $b = \lim y_n$. Se $x_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $a \leq b$. Em particular se $x_n \leq b$ para todo n suficientemente grande então $\lim x_n \leq b$.

Demonstração. Vamos demonstrar por contradição. Se $a > b$, seja $c = \frac{a+b}{2}$, temos $b < c < a$. Temos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1$ implica $x_n > c$. Existe também $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2$ implica $y_n < c$.

Logo, para $n = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ implica que $y_n < c < x_n$, contradição por hipótese. \square

Uma observação a respeito do colorário 3.10 é que se fosse $x_n < y_n$ (estrito) não poderia concluir que $a < b$. Basta tomar $x_n = 0$ e $y_n = \frac{1}{n}$.

3.1.3 Operações com limites

Teorema 3.11: Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada (convergente ou não) então $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$

Demonstração. Seja (y_n) uma sequência limitada, então existe $c > 0$ tal que $|y_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por definição de limite, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{c}$.

Então $n > n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \left(\frac{\varepsilon}{c}\right) \cdot c = \varepsilon$. Logo $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$. \square

Um resultado importante da definição de limite é que:

$$\boxed{\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim(x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n - a| = 0}$$

Teorema 3.12: Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então:

1. $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$.
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.
3. $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$, se $b \neq 0$.

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema.

1. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$. Logo:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, $\lim(x_n + y_n) = a + b$. Mesmo argumento para $x_n - y_n$.

2. Para demonstrar o item 2, basta provar que $\lim(x_n y_n - ab) = 0$.

Temos $x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a)$. Pelo Teorema 3.3, (x_n) é limitada pois é convergente. Além disso, $\lim(y_n - b) = \lim(x_n - a) = 0$. Segue do Teorema 3.11 e do item (1) que:

$$\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a)b] = 0, \text{ donde } \lim(x_n y_n) = ab$$

3. Vale $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b}{y_n b} - \frac{y_n a}{y_n b}$. Como $\lim(x_n b - y_n a) = ab - ba = 0$, basta provar que $\frac{1}{y_n b}$ é uma sequência limitada para concluir que $\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$ e, portanto, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Ora, tomando o valor de $c = \frac{b^2}{2}$, temos $0 < c < b^2$. Como $\lim y_n b = b^2$, segue do Teorema 3.8 que para todo n suficientemente grande, tem-se $c < y_n b$ e, portanto, $\frac{1}{c} > \frac{1}{y_n b}$, donde $\frac{1}{y_n b}$ é limitado. Pelo Teorema 3.11, temos

$$\lim(x_n b - y_n a) \cdot \frac{1}{y_n b} = 0.$$

Logo, $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}$.

□

3.2 Algumas noções topológicas

Esta seção irá abordar alguns conceitos de Topologia. Estes conceitos referem-se a subconjuntos de \mathbb{R} e serão a base para o desenvolvimento das seções seguintes. Vale destacar que no texto será usada uma linguagem geométrica, dizendo ponto em vez de “número real” e reta em vez de “o conjunto \mathbb{R} ”.

3.2.1 Conjuntos abertos

Diz-se que o ponto a é *interior* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando existe um número $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X . O conjunto dos pontos interiores a X chama-se o *interior* do conjunto X e representa-se pela notação $\text{int } X$. Quando $a \in \text{int } X$ diz-se que o conjunto X é uma *vizinhança* do ponto a . Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se *aberto* quando $A = \text{int } A$, isto é, quando todos os pontos de A são interiores a A .

Exemplo 3.2.1: Todo ponto c do intervalo aberto (a, b) é um ponto interior a (a, b) . Os pontos a e b , extremos do intervalo fechado $[a, b]$ não são interiores a $[a, b]$. O interior do conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é vazio. Por outro lado, $\text{int}[a, b] = (a, b)$.

Uma observação importante que podemos fazer, em termos de conjuntos abertos, é a reformulação da definição de limite de uma sequência: tem-se $a = \lim x_n$ se, e somente se, para todo aberto A contendo a existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$.

Teorema 3.13: a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a interseção de $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto.

b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos abertos, a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração. a) Se $x \in A_1 \cap A_2$ então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são conjuntos abertos, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ tais que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2$. Seja ε o menor dos dois números ε_1 e ε_2 . Então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_2$. Logo, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$. Assim, todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é um ponto interior, ou seja, o conjunto $A_1 \cap A_2$ é aberto.

b) Se $x \in A$ então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto $x \in A$ é interior, isto é, A é aberto.

□

3.2.2 Conjuntos fechados

Dizemos que um ponto a é *aderente* ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$. Evidentemente, todo $a \in X$ é aderente a X : basta tomar $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Chama-se *fecho* de um conjunto X ao conjunto \overline{X} formado por todos os pontos aderentes a X . Tem-se que $X \subset \overline{X}$. Se $X \subset Y$ então $\overline{X} \subset \overline{Y}$. Um conjunto X diz-se *fechado* quando $X = \overline{X}$, isto é, quando todo ponto aderente a X pertence a X . Seja $X \subset Y$. Diz-se que X é *denso* em Y quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, quando todo $b \in Y$ é aderente a X . Por exemplo, \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} .

Teorema 3.14: Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X .

Demonstração. (\Rightarrow) Seja a aderente a X , isto é, a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma vizinhança qualquer $V \ni a$ temos $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande (pela definição de limite). Isto é, dado $\varepsilon > 0$, temos $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ para todo n suficientemente grande. Logo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$.

(\Leftarrow) Se toda vizinhança de a contém pontos de X podemos escolher, em cada intervalo $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X$. Então $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Logo $\lim x_n = a$ e a é aderente a X . \square

Pelo teorema acima, afim de que um ponto a não pertença a \overline{X} é necessário e suficiente que exista uma vizinhança $V \ni a$ tal que $V \cap X = \emptyset$.

Exemplo 3.2.2: Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado, não vazio. Então $a = \inf X$ e $b = \sup X$ são aderentes a X . Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in X$ com $a \leq x_n < a + \frac{1}{n}$, logo $a = \lim x_n$. Analogamente, vê-se que $b = \lim y_n$, $y_n \in X$. Em particular, a e b são aderentes a (a, b) .

Exemplo 3.2.3: O fecho dos intervalos (a, b) , $[a, b)$ e $(a, b]$ é o intervalo $[a, b]$. \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} e, para todo intervalo I , $\mathbb{Q} \cap I$ é denso em I .

Definimos uma *cisão* de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ como uma decomposição $X = A \cup B$, tal que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A . Em particular, A e B são disjuntos. A decomposição $X = X \cup \emptyset$ chama-se a *cisão trivial*.

Exemplo 3.2.4: Se $X = \mathbb{R} - \{0\}$, então $X = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ é uma cisão. Dado um número irracional α , sejam $A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$. A decomposição $\mathbb{Q} = A \cup B$ é uma cisão do conjunto \mathbb{Q} dos racionais. Por outro lado, se $a < c < b$, então $[a, b] = [a, c] \cup (c, b]$ não é uma cisão.

3.2.3 Pontos de acumulação

Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é *ponto de acumulação* do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do próprio a , isto é, $V \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.

Indica-se com X' o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto X . Portanto, $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$. A condição $a \in X'$ exprime-se simbolicamente: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$.

Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X , diz-se que a é um *ponto isolado* de X . Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Quando todos os pontos do conjunto X são isolados, X chama-se um conjunto *discreto*.

Teorema 3.15: Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. a é um ponto de acumulação de X ;
2. a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;
3. Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X .

Demonstração. Para provar as equivalências do teorema iremos provar as seguintes implicações: (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (1).

1. (1) \Rightarrow (2)

Supondo (1), para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos achar um ponto $x_n \in X$, $x_n \neq a$, na vizinhança de $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. Logo $\lim x_n = a$, o que prova (2).

2. (2) \Rightarrow (3)

Supondo (2), então para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n, n > n_0\}$ é infinito, porque do contrário existiria um termo x_{n_1} que se repetiria infinita vezes e isto forneceria uma sequência constante com $\lim x_{n_1} \neq a$. Pela definição de limite, vê-se portanto que (2) \Rightarrow (3).

3. (3) \Rightarrow (1). Sejam $a \in X$ e $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ o intervalo aberto de centro a e raio ε . Temos que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Logo, pela definição de ponto de acumulação, concluímos que $a \in X'$, ou seja, a é um ponto de acumulação.

□

Exemplo 3.2.5: Se X é finito então $X' = \emptyset$ (conjunto finito não tem ponto de acumulação). O conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros é infinito, mas todos os pontos de \mathbb{Z} são isolados. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Se $X = (a, b)$ então $X' = [a, b]$.

3.2.4 Conjuntos compactos

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se *compacto* quando é limitado e fechado.

Exemplo 3.2.6: Todo conjunto finito é compacto. Um intervalo do tipo $[a, b]$ é um conjunto compacto.

Teorema 3.16: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X .

Demonstração. (\Rightarrow) Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto (limitado e fechado), toda sequência de pontos de X é limitada, logo pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass possui uma subsequência convergente, cujo limite é um ponto de X (pois X é fechado).

(\Leftarrow) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência que converge para um ponto de X . Então, X é limitado porque, do contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos encontrar $x_n \in X$ com $|x_n| > n$. A sequência (x_n) , assim obtida, não possuiria subsequência limitada, logo não teria subsequência convergente. Além disso, X é fechado pois do contrário existiria um ponto $a \notin X$ com $a = \lim x_n$, onde cada $x_n \in X$. A sequência (x_n) não possuiria então subsequência alguma convergindo para um ponto de X pois toda suas subsequências teriam limite a . Logo X é compacto. \square

Uma observação importante: se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então, pelo Exemplo 3.2.2, $a = \inf X$ e $b = \sup X$ pertencem a X . Assim, todo conjunto compacto contém um elemento mínimo e um elemento máximo, ou seja, X compacto implica que existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $x_0 \leq x \leq x_1$ para todo $x \in X$.

Conceitos fundamentais do Cálculo

Neste capítulo apresentaremos os conceitos e resultados fundamentais do Cálculo Diferencial, peças fundamentais para o estudo de problemas de otimização e a busca por maximizar ou minimizar uma função. Estes conceitos e resultados são sobre limites de funções, funções contínuas, continuidade uniforme, derivadas, derivadas e crescimento local, funções deriváveis num intervalo, fórmula de Taylor e aplicações de derivadas.

4.1 Limites de funções

Visto no Capítulo 3, o estudo de limites para seqüências. O estudo de limites será agora explorado à situação onde se tem uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida num subconjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}$.

4.1.1 Definição e propriedades

Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X . Diz-se que o número real L é *limite de $f(x)$* quando x tende para a e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Simbolicamente:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Informalmente: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ quer dizer que se pode tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto se queira desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente de, a .

A restrição $0 < |x - a|$ significa $x \neq a$. Assim, no limite $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não é permitido à variável x assumir o valor de a . Portanto, o valor de $f(a)$ não tem importância alguma quando se quer determinar L : o que conta é o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a , sempre com $x \neq a$.

Na definição de limite é essencial que a seja ponto de acumulação do conjunto X , mas é irrelevante que a pertença ou não a X , isto é, que f , esteja ou não definida no ponto a . Como veremos a seguir, uns dos exemplos mais importantes de limite,

a saber, a derivada, estuda-se $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$, onde a função $q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ não está definida para $x = a$.

Nas condições $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, negar que se tem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ equivale a dizer que existe um número $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: seja qual for $\delta > 0$, pode-se sempre se achar $x_\delta \in X$ tal que $0 < |x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon$.

Teorema 4.1: Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Se $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$.

Demonstração. Seja $\varepsilon = \frac{M - L}{2} > 0$. Pela definição de limite, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$0 < |x - a| < \delta_1, x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < L + \varepsilon$$

$$0 < |x - a| < \delta_2, x \in X \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon \Rightarrow g(x) > M - \varepsilon$$

Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < L + \varepsilon = M - \varepsilon < g(x)$, o que prova o teorema. □

Observações: Sobre a hipótese $L < M$, não pode ser substituída por $L \leq M$ no Teorema 4.1. Para o Teorema 4.1 e seus corolários, bem como para o Teorema 4.4 abaixo, valem as versões análogas com $>$ em lugar de $<$ e vice-versa. Tais versões serão usadas sem maiores comentários.

Corolário 4.2: Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < M$, então existe δ tal que $f(x) < M$ para todo $x \in X$ com $0 < |x - a| < \delta$.

Corolário 4.3: Sejam $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $L \leq M$.

Demonstração. Se fosse $M < L$ existiria $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) < f(x)$, uma contradição. □

Teorema 4.4 (Teorema do Sanduíche): Sejam $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ então $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

Demonstração. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ e $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então:

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Logo $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ □

A noção de limite é *local*, isto é, dadas as funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e dado $a \in X'$, se existir uma vizinhança V do ponto a tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ em $V \cap X$ então existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se, e somente se, existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Além disso, se existirem, esses limites serão iguais. Assim, por exemplo no Teorema 4.4 não é necessário supor que vale $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ par todo $x \in X - \{a\}$. Basta que exista uma vizinhança V do ponto a tal que estas desigualdades valham para todo $x \neq a$ pertencente a $V \cap X$. Observação análoga para o Teorema 4.1 e o seu Corolário 4.3.

Teorema 4.5: Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$. A fim de que seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos primeiro que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e que se tem uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$.

Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Existem também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $0 < |x_n - a| < \delta$ (pois $x_n \neq a$ para todo n). Por conseguinte, $n > n_0$ implica que $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, logo $\lim f(x_n) = L$.

(\Leftarrow) Suponhamos $x_n \in X - \{a\}$ e $\lim x_n = a$ impliquem $\lim f(x_n) = L$ e provemos que se tem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Com efeito, negar esta igualdade implicaria em afirmar a existência de um número $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ podemos achar $x_n \in X$ tal que $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ mas $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Então teríamos $x_n \in X - \{a\}$, $\lim x_n = a$ sem que fosse $\lim f(x_n) = L$. Esta contradição completa a demonstração. \square

Corolário 4.6 (Unicidade do Limite): Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ então $L = M$.

Demonstração. Tomamos uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$ o que é assegurado pelo Teorema 3.15 do Capítulo 3. Então teremos $L = \lim f(x_n)$ e $M = \lim f(x_n)$. Pela unicidade do limite de sequência $(f(x_n))$, vem $L = M$. \square

Corolário 4.7 (Operações com limites): Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$, com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Então:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, se $M \neq 0$.

Além disso, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e a função g é limitada numa vizinhança de a , tem-se $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

Demonstração. Dada qualquer sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, pelo Teorema 3.12 do Capítulo 3 valem:

1. $\lim[f(x_n) \pm g(x_n)] = \lim f(x_n) \pm \lim g(x_n) = L \pm M.$
2. $\lim[f(x_n) \cdot g(x_n)] = \lim f(x_n) \cdot \lim g(x_n) = L \cdot M$
3. $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim f(x_n)}{\lim g(x_n)} = \frac{L}{M}.$

Finalmente, se existem uma vizinhança V de a e uma constante c tal que $|g(x)| \leq c$ para todo $x \in V$ então, como $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande, a sequência $g(x_n)$ é limitada, logo pelo Teorema 3.11, tem-se $\lim f(x_n) \cdot g(x_n) = 0$, pois $\lim f(x_n) = 0$. O Corolário 4.7 segue-se portanto do teorema. \square

Teorema 4.8: Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'$. Se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ então a função f é limitada numa vizinhança de a , isto é, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq c$.

Demonstração. Seja $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Tomando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, resulta que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ implica que

$$|f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x)| = |f(x) - L + L| \leq |f(x) - L| + |L| < |L| + 1.$$

Basta então tomar $c = |L| + 1$. \square

O Teorema 4.8 generaliza o fato de toda sequência convergente é limitada.

4.1.2 Limites laterais

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o número real a é um *ponto de acumulação à direita* para X , e escreve-se $a \in X'_+$, quando toda vizinhança de a contém algum ponto $x \in X$ com $x > a$. Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $X \cap (a, a + \varepsilon) \neq \emptyset$. Afim de que $a \in X'_+$ é necessário e suficiente que a seja limite de uma sequência de pontos $x_n > a$, pertencentes a X . Finalmente, a é um ponto de acumulação à direita para o conjunto X se, e somente se, é um ponto de acumulação ordinário do conjunto $Y = X \cap (a, +\infty)$.

Define-se *ponto de acumulação à esquerda*: $a \in X'_-$ significa que, para todo $\varepsilon > 0$, tem-se $X \cap (a - \varepsilon, a) \neq \emptyset$, ou seja, $a \in Z'$ onde $Z = (-\infty, a) \cap X$. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma sequência cujo termos $x_n < a$ pertencem a X . Quando $a \in X'_+ \cap X'_-$ diz-se que a é um *ponto de acumulação bilateral* de X .

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X'_+$. Diz-se que o número real L é *limite à direita* de $f(x)$ quando x tende para a , e escreve $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$. Simbolicamente:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X \cap (a, a + \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Analogamente se define o *limite à esquerda* $L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, no caso de $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com $a \in X'_-$: isto significa que, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode se escolher $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

As propriedades gerais dos limites, demonstradas na seção 4.1.1, se adaptam facilmente para os limites laterais. Basta observar que o limite à direita $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ se reduz ao limite $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, onde g é a restrição da função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ao conjunto $X \cap (a, +\infty)$. E analogamente para o limite à esquerda.

Uma observação importante a ser feita é que dado $a \in X'_+ \cap X'_-$, existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *monótona não-decrescente* quando para $x, y \in X$, $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$. Se $x < y$ implica que $f(x) \geq f(y)$, f diz-se *monótona não-crescente*. Se vale a implicação mais estrita $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ dizemos que f é *crescente*. Finalmente, se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, dizemos que f é uma função *decrescente*.

Teorema 4.9: Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona limitada. Para todo $a \in X'_+$ e todo $b \in X'_-$ existem $L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $M = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Ou seja, existem sempre os limites laterais de uma função monótona limitada.

Demonstração. Para fixar as ideias, suponhamos f não-decrescente, ou seja, $x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Seja $L = \inf\{f(x); x \in X, x > a\}$. Afirmamos que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

Com efeito, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, temos que $L + \varepsilon$ não é cota inferior do conjunto limitado $\{f(x); x \in X, x > a\}$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $a + \delta \in X$ e $L \leq f(a + \delta) < L + \varepsilon$. Como f é não-decrescente, $x \in X \cap (a, a + \delta)$ implica que $L \leq f(x) < L + \varepsilon$, o que prova a afirmação feita. De modo análogo, vê-se que $M = \sup\{f(x); x \in X, x < b\}$ é o limite à esquerda $M = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.

□

Observação: Se $a \in X$, não é necessário supor que f seja limitada no Teorema 4.9. Com efeito, suponhamos, para fixar as ideias, que f seja monótona não-decrescente e $a \in X'_+$. Então $f(a)$ é uma cota inferior do conjunto $\{f(x); x \in X, x > a\}$ e o ínfimo deste conjunto é $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Analogamente, se $a \in X'_-$ então $f(a)$ é uma cota superior do conjunto $\{f(x); x \in X, x < a\}$, cujo supremo é o limite à esquerda $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

4.2 Funções contínuas

Entender as noções de limite apresentadas na seção anterior, e continuidade são fundamentais para a compreensão dos conceitos de derivada que é um conteúdo importante na resolução de problemas de otimização.

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se *contínua no ponto* $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que

$x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Em símbolos, f contínua no ponto a significa:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon}$$

Chama-se *descontínua no ponto* $a \in X$ uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua nesse ponto. Isto quer dizer que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ pode se achar $x_\delta \in X$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Em particular, tomando δ sucessivamente igual a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ e escrevendo x_n em vez de $x_{1/n}$, vemos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é descontínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$ pode-se obter $x_n \in X$ com $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Evidentemente, $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $\lim x_n = a$.

Diz-se que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função *contínua* quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

A continuidade é um fenômeno *local*, isto é, a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existe uma vizinhança V de a tal que a restrição de f a $V \cap X$ é contínua no ponto a .

Se $a \in X \cap X'$, isto é, se $a \in X$ é um ponto de acumulação de X , então $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ao contrário do caso de um limite, na definição de função contínua o ponto a deve pertencer ao conjunto X e pode-se tomar $x = a$ pois, quando isto se dá, a condição $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ torna-se $0 < \varepsilon$, o que é óbvio.

Teorema 4.10: Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.

Demonstração. Tomemos $c = \frac{f(a) + g(a)}{2}$ e $\varepsilon = g(a) - c = c - f(a)$.

Temos que $\varepsilon > 0$ e $f(a) + \varepsilon = g(a) - \varepsilon = c$. Pela definição de continuidade, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$\begin{aligned} x \in X, |x - a| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon = c \\ x \in X, |x - a| < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon \Rightarrow c = g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon \end{aligned}$$

Seja δ o menor dos números δ_1 e δ_2 . Então $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x)$, o que prova o teorema. \square

Corolário 4.11: Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$. Se $f(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(a)$.

Demonstração. De fato, para fixar as ideias, suponhamos $f(a) < 0$. Então basta tomar a função g identicamente nula no Teorema 4.10. \square

Teorema 4.12: A fim de que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$. Seja $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$. Pela definição de continuidade de função temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in X$ com $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Como $\lim x_n = a$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se $|x_n - a| < \delta$.

Daí para todo $n \geq n_0$, concluímos que $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$.

Logo, $\lim f(x_n) = f(a)$.

(\Leftarrow) Suponha que f seja descontínua no ponto $a \in X$. Assim existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, encontra-se $x_\delta \in X$ com $|x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Faça $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ com $n \in \mathbb{N}$. Portanto, existe $x_n \in X$ tal que

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

Então teríamos $x_n \in X$, $\lim x_n = a$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Se $\lim f(x_n) = f(a)$ teríamos então $0 = \lim |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$, ou seja, $\varepsilon \leq 0$, o que é um absurdo. Portanto, f é contínua no ponto a . □

Corolário 4.13: Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são contínuas nesse ponto as funções $f \pm g, f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$, bem como a função $\frac{f}{g}$, caso $g(a) \neq 0$.

Demonstração. Sejam as funções f e g são contínuas no ponto $a \in X$, então pela definição de continuidade tem-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

1. Deseja-se mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = f(a) \pm g(a)$.

Utilizando as operações com limites vista no Corolário 4.7, item (a), temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \pm g(a).$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = f(a) \pm g(a)$, por isso pode-se afirmar que $f \pm g$ é contínua no ponto $a \in X$.

2. Queremos mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = f(a) \cdot g(a)$.

Utilizando as operações com limites vista no Corolário 4.7, item (b), temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \cdot g(a).$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = f(a) \cdot g(a)$, por isso pode-se afirmar que $f \cdot g$ é contínua no ponto $a \in X$.

3. Deseja-se mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$, com $g(a) \neq 0$.

Seja $a \in X$ tal que $g(a) \neq 0$, assim pelo Corolário 4.7, item (c), temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$, com $g(a) \neq 0$, por isso pode-se afirmar que f/g com $g(a) \neq 0$ é contínua no ponto $a \in X$.

□

O domínio da função f/g , bem entendido, é o subconjunto de X formado pelos pontos x tais que $g(x) \neq 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $X \cap (a - \delta, a + \delta)$ está contido nesse domínio.

Teorema 4.14: Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $f(X) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definida. Então $g \circ f$ é contínua no ponto a . (A composta de duas funções contínuas é contínua).

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe, pela continuidade de g no ponto b , um número $\eta > 0$ tal que $y \in Y$, $|y - b| < \eta$ implicam $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$.

Por sua vez, a continuidade de f no ponto a assegura que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implicam $|f(x) - b| < \eta$. Consequentemente, $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$, o que prova o teorema. □

4.2.1 Funções contínuas num intervalo

Teorema 4.15 (Teorema do Valor Intermediário): Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração. Seja o conjunto $A = \{x \in [a, b]; f(x) < d\}$. O conjunto A não é vazio, pois $f(a) < d$. Afirmamos que nenhum elemento do conjunto A é maior do que todos os outros. Com efeito, seja $\alpha \in A$. Como $f(\alpha) < d$, vemos que $\alpha \neq b$ e, portanto, $\alpha < b$. Tomando $\varepsilon = d - f(\alpha)$, a continuidade de f no ponto α nos dá um $\delta > 0$ (que tomaremos pequeno, de modo a ter $[\alpha, \alpha + \delta] \subset [a, b]$) tal que, para todo $x \in [\alpha, \alpha + \delta)$ tem-se $f(x) < f(\alpha) + \varepsilon$, ou seja, $f(x) < d$. Assim, todos os pontos do intervalo $[\alpha, \alpha + \delta)$ pertencem A . Agora, ponhamos $c = \sup A$. Como c é limite de uma sequência de pontos $x_n \in A$, temos $f(c) = \lim f(x_n) \leq d$. Como o conjunto A não possui maior elemento, não se tem $c \in A$. Logo não vale $f(c) < d$, o que nos obriga a concluir que $f(c) = d$.

□

Corolário 4.16: Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $f(I)$ é um intervalo.

Demonstração. Se f é constante é óbvio a validade do corolário. Caso contrário, sejam $\alpha = \inf f(I) = \inf\{f(x); x \in I\}$ e $\beta = \sup f(I) = \sup\{f(x); x \in I\}$. Se $f(I)$ for ilimitado, tomaremos $\alpha = -\infty$ e/ou $\beta = +\infty$.

Para provar que $f(I)$ é um intervalo (aberto, fechado ou semiaberto) cujos extremos são α e β , tomemos d tal que $\alpha < d < \beta$. Pelas definições de ínfimo 3.5 e supremo 3.4, existem $a, b \in I$ tais que $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta$.

Pelo Teorema 4.15 existe $c \in [a, b]$, logo $c \in I$, tal que $f(c) = d$. Assim, $d \in f(I)$. Isto prova que $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Como α é o ínfimo e β é o supremo de $f(I)$, nenhum número real menor do que α e maior do que β pode estar em $f(I)$. Portanto $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β . \square

Mostraremos que se uma bijeção $f : I \rightarrow J$, entre intervalos, é contínua, então sua inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ também é contínua. Na seção posterior, veremos que a inversa de uma bijeção contínua também é contínua, se o domínio é compacto.

Teorema 4.17: Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Toda função contínua injetiva $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona e sua inversa $g : J \rightarrow I$ definida no intervalo $J = f(I)$ é contínua.

Demonstração. Para concluirmos que f é monótona, basta verificar sua monotonicidade em cada subintervalo limitado e fechado $[a, b] \subset I$. Assim podemos admitir que $I = [a, b]$. Sabemos que $f(a) \neq f(b)$, pois f é injetiva. Para fixar as ideias, vamos supor que $f(a) < f(b)$. Mostraremos então que f é crescente. Do contrário, existiriam pontos $x < y$ em $[a, b]$ tais que $f(x) > f(y)$. Há duas possibilidades: $f(a) < f(y)$ ou $f(a) > f(y)$. No primeiro caso, temos $f(a) < f(y) < f(x)$, logo, pelo Teorema 4.15, existe $c \in (a, x)$ com $f(c) = f(y)$, assim contradizendo a injetividade de f . No segundo caso, vem $f(y) < f(a) < f(b)$, portanto existirá $c \in (y, b)$ com $f(c) = f(a)$, contradizendo a injetividade de f . Logo f é mesmo crescente (isto prova que toda função real contínua e injetiva, definida num intervalo, é monótona).

Agora seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e injetiva no intervalo arbitrário I . Se f não fosse monótona, existiriam pontos $u < v$ e $x < y$ em I tais que $f(u) < f(v)$ e $f(x) > f(y)$. Sejam a o menor e b o maior dos números u, v, x e y . Então, f restrita ao intervalo $[a, b]$, seria contínua, injetiva porém não monótona, contradizendo o que acabamos de provar.

Finalmente, consideremos a inversa $g : J \rightarrow I$ da bijeção contínua crescente $f : I \rightarrow J$. Evidentemente, g é crescente. Sejam $a \in I$ um ponto arbitrário e $b = f(a)$. Para provar que g é contínua no ponto b , começaremos supondo a interior a I . Então, dado $\varepsilon > 0$, podemos admitir que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset I$. Assim, $f(a - \varepsilon) = b - \alpha$ e $f(a + \varepsilon) = b + \beta$, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Seja $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$. Como g é crescente, $y \in I$, temos:

$$\begin{aligned} b - \delta < y < b + \delta &\Rightarrow b - \alpha < y < b + \beta \Rightarrow g(b - \alpha) < g(y) < g(b + \beta) \\ &\Rightarrow a - \varepsilon < g(y) < a + \varepsilon \end{aligned}$$

Logo g é contínua no ponto b . Se, entretanto, a é uma extremidade de I , digamos a inferior, então $b = f(a)$ é a extremidade inferior de J . Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, podemos supor $a + \varepsilon \in I$ e teremos $f(a + \varepsilon) = b + \delta$, $\delta > 0$. Então $y \in J$, temos:

$$\begin{aligned} b - \delta < y < b + \delta &\Rightarrow b \leq y < b + \delta \Rightarrow a \leq g(y) < g(b + \delta) \Rightarrow a \leq g(y) < a + \varepsilon \\ &\Rightarrow a - \varepsilon < g(y) < a + \varepsilon \end{aligned}$$

Logo g é, ainda neste caso, contínua no ponto b . \square

4.2.2 Funções contínuas em conjuntos compactos

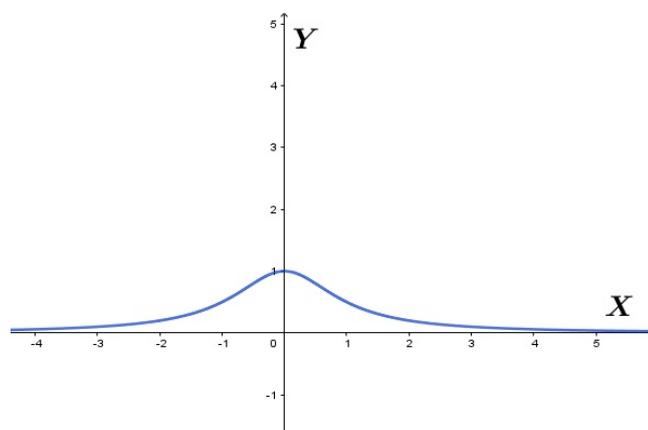
Vários problemas da Matemática como também do nosso cotidiano consistem encontrar a solução “ótima” para ele. Na Matemática, isso representa a procura de pontos de um conjunto X nos quais uma certa função real $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ assume seu valor máximo ou seu valor mínimo. O que devemos observar antes de resolver esses problemas, é a verificação se realmente tais pontos existem. Nesta seção, estudaremos resultados que são importantes para essa verificação de problemas de otimização que iremos estudar neste trabalho.

Uma função f pode ser ilimitada superiormente (e então não possui valor máximo) ou inferiormente (e não possuiu valor mínimo). Entretanto mesmo limitada, f pode não assumir valor máximo em X , ou mínimo, ou nenhum dos dois.

Exemplo 4.2.1: Sejam $X = (0, 1)$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Então $f(X) = (0, 1)$ logo, para todo $x \in X$ existem $x', x'' \in X$ com $f(x') < f(x) < f(x'')$. Isto significa que, para nenhum $x \in X = (0, 1)$, tem-se que o valor $f(x)$ é o maior elemento ou o menor elemento que f assume em X .

Exemplo 4.2.2: Outro exemplo, podemos tomar $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Figura 4.1: Gráfico da função $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Temos que $0 < g(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $g(0) = 1$, vemos que $g(0)$ é o valor máximo de $g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x)$ seja o menor valor de g . Com efeito, se $x > 0$, basta tomar $x' > x$ para ter que $g(x') < g(x)$. E se $x < 0$, toma-se $x' < x$ e se tem novamente $g(x') < g(x)$. Ver o gráfico da função g na Figura 4.1.

Teorema 4.18 (Weierstrass): Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.

Estabeleceremos o Teorema de Weierstrass como consequência do

Teorema 4.19: A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.

Demonstração. De acordo com o Teorema 3.16, devemos provar que toda sequência de pontos $y_n \in f(X)$ possui uma subsequência que converge para algum ponto em $f(X)$.

Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $y_n = f(x_n)$, com $x_n \in X$. Como X é compacto, a sequência (x_n) possui uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ que converge para algum ponto $a \in X$. Sendo f contínua no ponto a , de $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = a$ concluímos que, pondo $b = f(a)$, temos que $b \in f(X)$ e, além disso, $\lim_{y \in \mathbb{N}'} y_n = \lim_{n \in \mathbb{N}'} f(x_n) = f(a) = b$, como queríamos demonstrar. \square

Vamos demonstrar agora o Teorema Weierstrass enunciado acima.

Demonstração. Como foi visto na subseção 3.2.4, o conjunto compacto $f(X)$ possui um menor elemento $f(x_0)$ e um maior elemento $f(x_1)$. Isto quer dizer que existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$. \square

Corolário 4.20: Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, isto é, existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.

Teorema 4.21: Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então toda bijeção contínua $f : X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ tem inversa contínua $g : Y \rightarrow X$.

Demonstração. Tomemos um ponto arbitrário $b = f(a)$ em Y e mostremos que a função g é contínua no ponto b .

Se não fosse assim, existiriam um número $\varepsilon > 0$ e uma sequência de pontos $y_n = f(x_n) \in Y$ com $\lim y_n = b$ e $|g(y_n) - g(b)| \geq \varepsilon$, isto é, $|x_n - a| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim x_n = a' \in X$, pois X é compacto. Tem-se $|a' - a| \geq \varepsilon$. Em particular, $a' \neq a$. Mas, pela continuidade de f , $\lim y_n = \lim f(x_n) = f(a')$. Como já temos que $\lim y_n = b = f(a)$, daí resultaria $f(a) = f(a')$, contradizendo a injetividade de f . \square

4.3 Derivadas

Esta seção dedica-se ao estudo das derivadas de funções reais de uma variável. O conceito de derivada, que é um limite, é uma das noções mais importantes na área da Matemática. Serão abordados os resultados de sua aplicação para descobrir os valores de máximo e mínimo de uma função, pois esses conceitos serão essenciais na resolução dos problemas de otimização. Na seção 4.4.2 será apresentada uma aplicação de derivada, que é o estudo das funções convexas.

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$. O quociente $q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tem sentido para valores de $x \neq a$, logo define uma função $q : X - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, cujo valor $q(x)$ é a *inclinação da secante* (reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ no gráfico f) em relação ao eixo x .

Se imaginarmos x como o tempo e $f(x)$ como a abcissa, no instante x , de um ponto móvel que se desloca sobre o eixo x , então $q(x)$ é a *velocidade média* desse ponto no intervalo de tempo decorrido entre os instantes a e x .

De um modo geral, o quociente $q(x)$ é a relação entre a variação de $f(x)$ e a variação de x a partir do ponto $x = a$.

No caso em que $a \in X' \cap X$ então é natural considerar $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$. As interpretações deste limite, nos contextos acima, são respectivamente a inclinação da tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, a velocidade instantânea do móvel no instante $x = a$ ou, em geral, a "taxa de variação" da função f no ponto a .

4.3.1 A noção de derivada

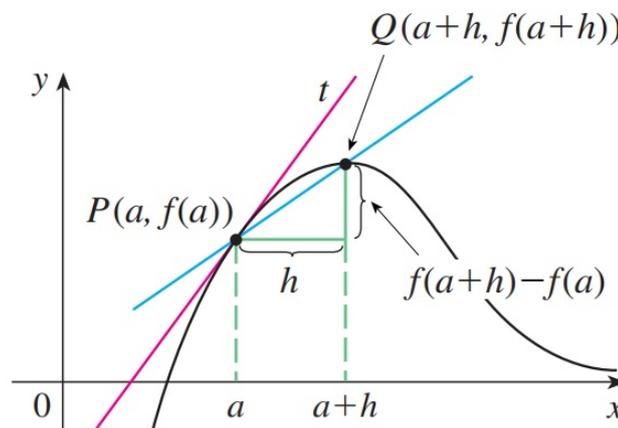
Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A *derivada* da função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Bem entendido, o limite acima pode existir ou não. Se existir, dizemos que f é *derivável no ponto a* . Quando existe a derivada $f'(x)$ em todos os pontos $x \in X \cap X'$ diz-se que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é *derivável no conjunto X* e obtém-se uma nova função $f' : X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, chamada a *função derivada de f* . Se f' é contínua, diz-se que f' é de *classe C^1* .

Como foi dito anteriormente, a derivada é a inclinação da reta tangente no ponto $(a, f(a))$. O gráfico abaixo ilustra a inclinação da reta tangente, considerando o segundo limite $f'(a)$ acima. Se $h = x - a$, então $x = a + h$ e, observemos que quando x tende a a , h tende a 0, assim, inclinação da reta tangente é o limite $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Figura 4.2: Inclinação da reta tangente no ponto $P = (a, f(a))$.



Fonte: STEWART, 2013, p. 132.

Vejamos abaixo, outras notações para a derivada de f no ponto a são

$$Df(a), \quad \frac{df}{dx}(a) \quad e \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}.$$

Teorema 4.22: A fim de que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in X \Rightarrow f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. No caso afirmativo, tem-se $c = f'(a)$.

Demonstração. Seja $Y = \{h \in \mathbb{R}; a+h \in X\}$. Então $0 \in Y \cap Y'$. Supondo que $f'(a)$ exista, definimos $r : Y \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h$. Então

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a),$$

logo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. A condição é, portanto, necessária.

Reciprocamente, se vale a condição, então $\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c$, logo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, portanto $f'(a)$ existe e é igual a c . □

Corolário 4.23: Uma função é contínua nos pontos em que é derivável.

Demonstração. Com efeito, se f é derivável no ponto a então

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \left[\frac{r(h)}{h} \right] \cdot h \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Logo $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$, ou seja, f é contínua no ponto a . De fato, escrevemos $h = x - a$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [f(a) + c(x-a) + r(x)] = f(a) + \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \left(c + \frac{r(x)}{x-a} \right) = \\ &= f(a) + 0 \cdot c = f(a). \end{aligned}$$

Portanto, f é contínua no ponto a . □

Observação: Para toda função f , definida nos pontos a e $a+h$, e todo número real c , pode-se sempre escrever a igualdade $f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, a qual meramente define o número $r(h)$. O que o Teorema 4.22 afirma é que existe no máximo um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Este número c , quando existe, é igual a $f'(a)$. O Teorema 4.22 diz também que, quando $f'(a)$ existe, o acréscimo $f(a+h) - f(a)$ é a soma de uma “parte linear” $c \cdot h$, proporcional ao acréscimo h da variável independente, mas um “resto” $r(h)$, o qual é infinitamente pequeno em relação a h , no sentido que o quociente $\frac{r(h)}{h}$ tende a zero com h .

Quando $a \in X$ é um ponto de acumulação à direita, isto é, $a \in X \cap X'_+$, pode-se tomar o limite $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} q(x)$. Quando existe, este limite chama-se a *derivada à direita* de f no ponto a . Analogamente, se $a \in X \cap X'_-$, tem sentido considerar o limite à esquerda $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} q(x)$. Se existe, ele se chama a *derivada à esquerda* de f no ponto a .

Caso $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$, isto é, caso $a \in X$ seja ponto de acumulação bilateral, a função f é derivável no ponto a se, e somente se, existem e são iguais as derivadas à direita e à esquerda, com $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$. O Teorema 4.22 (com $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{r(h)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{r(h)}{h}$) vale para derivadas laterais. E seu colorário também. Por exemplo, se existe a derivada à direita $f'_+(a)$ então f é contínua à direita no ponto a , isto é, $f(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(a+h)$.

4.3.2 Regras operacionais

Teorema 4.24: Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$. As funções $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (caso $g(a) \neq 0$) são também deriváveis no ponto a , com

1. $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,
2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$.

Demonstração. (1) Façamos a demonstração para $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$. A demonstração $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$ é análoga. Aplicando a definição de derivada, temos:

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - [f(a) + g(a)]}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a). \end{aligned}$$

(2) Aplicando a definição de derivada, temos:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)(g(x) - g(a))}{x - a} + \frac{g(a)(f(x) - f(a))}{x - a} \right] = \\ &= f(a) \cdot g'(a) + g(a) \cdot f'(a). \end{aligned}$$

(3) Vamos provar que $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$, donde

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(-\frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\ &= -\frac{1}{g(a)^2} \cdot g'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.25 (Regra da Cadeia): Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$, $b \in Y \cap Y'$, $f(X) \subset Y$ e $f(a) = b$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto b então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$.

Demonstração. Consideremos uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$ e ponhamos $y_n = f(x_n)$, logo $\lim y_n = b$.

Sejam $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) \neq f(a)\}$ e $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N}; f(x_n) = f(a)\}$. Se $n \in \mathbb{N}_1$ então $y_n \in Y - \{b\}$ e

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} &= \frac{g(y_n) - g(b)}{f(x_n) - f(a)} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \\ &= \frac{g(y_n) - g(b)}{y_n - b} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}. \end{aligned}$$

□

Portanto, se \mathbb{N}_1 é infinito, tem-se $\lim_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Se \mathbb{N}_2 é infinito tem-se $\lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = 0$, logo $f'(a) = 0$. Ainda neste caso, tem-se $\lim_{n \in \mathbb{N}_2} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. Como $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, resulta daí que, em qualquer hipótese, vale $\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{[g(f(x_n)) - g(f(a))]}{x_n - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, o que prova o teorema.

4.3.3 Derivada e crescimento local

Os resultados dessa seção serão enunciados para derivada à direita mas análogos valem para derivada à esquerda.

Teorema 4.26: Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$ implica $f(a) < f(x)$.

Demonstração. Temos $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) > 0$.

Pelo Corolário 4.2, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, e portanto, $f(x) - f(a) > 0$.

□

Corolário 4.27: Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente então suas derivadas laterais, onde existem, são ≥ 0 .

Demonstração. Com efeito, se alguma derivada lateral, digamos f'_+ , fosse negativa então o (análogo do) Teorema 4.26 nos daria $x \in X$ com $a < x$ e $f(x) < f(a)$, uma contradição \square

Definição 4.28: Diz-se que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tem um **máximo local** no ponto $a \in X$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implicam $f(x) \leq f(a)$. Quando $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta$ implicam $f(x) < f(a)$, diz-se que f tem um **máximo local estrito** no ponto a . Definições análogas para **mínimo local** e **mínimo local estrito**.

Definição 4.29: Quando $a \in X$ é tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de **mínimo absoluto** para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se vale $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in X$, diz-se que a é um ponto de **máximo absoluto**.

Corolário 4.30: Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita no ponto $a \in X \cap X'_+$ e tem aí um máximo local então $f'_+(a) \leq 0$.

Demonstração. Com efeito, se fosse $f'_+(a) > 0$, pelo Teorema 4.26, teríamos $f(a) < f(x)$ para todo $x \in X$ à direita e suficientemente próximo de a , logo f não teria máximo local no ponto a . \square

Corolário 4.31: Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral. Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto a e possui aí um máximo local ou mínimo local então $f'(a) = 0$.

Demonstração. Com efeito, pelo Corolário 4.30 temos $f'_+(a) \leq 0$ e $f'_-(a) \geq 0$. Como $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$, segue-se que $f'(a) = 0$. \square

Definição 4.32: Um ponto $c \in X$ chama-se **ponto crítico** da função derivável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando $f'(c) = 0$ ou não existir $f'(c)$.

Se $c \in X \cap X'_+ \cap X'_-$, isto é, ponto de acumulação bilateral, é um ponto de mínimo ou de máximo local então c é crítico, mas a recíproca é falsa: a bijeção crescente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, não pode ter máximo nem mínimo local mas admite o ponto crítico $x = 0$. (**Observação:** método para achar máximo e mínimo local, qualquer candidato a máximo ou mínimo local tem que ser ponto crítico).

4.3.4 Funções deriváveis num intervalo

Teorema 4.33 (Darboux): Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável. Se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - dx$. Temos que $g'(x) = f'(x) - d$, $g'(a) = f'(a) - d < 0$ e $g'(b) = f'(b) - d > 0$. Daí temos que $g'(a) < 0 < g'(b)$.

Queremos provar que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Como $g'(a) < 0$ então existe δ_1 tal que $a < x < a + \delta_1 \Rightarrow g(x) < g(a)$. E $g'(b) > 0$ então existe δ_2 tal que $b - \delta_2 < x < b \Rightarrow g(x) < g(b)$.

Como g é derivável então g é contínua e o intervalo $[a, b]$ compacto implicam que existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, necessariamente $c \neq \{a, b\}$.

Logo $c \in (a, b)$ é interior e $g'(c) = 0$.

Portanto, $f'(c) - d = g'(c) = 0$ implica que $f'(c) = d$. □

Teorema 4.34 (Rolle): Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo m e seu valor máximo M em pontos de $[a, b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se um desses pontos, digamos c , estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$. □

Teorema 4.35 (Teorema do Valor Médio de Lagrange): Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, representada pela função $g(x) = f(x) - dx$, onde d é escolhido de modo que $g(a) = g(b)$, ou seja, $d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é,

$$g'(c) = 0 = f'(c) - d \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Geometricamente, o Teorema do Valor Médio de Lagrange significa que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa c , isto é, $P = (c, f(c))$, é paralela à reta secante que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, isto é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f é a mesma inclinação da reta secante. Vejamos o gráfico na Figura 4.3 que ilustra o teorema.

Um enunciado equivalente: Seja $f : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivável em $(a, a+h)$. Existe um número θ , $0 < \theta < 1$ tal que $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h) \cdot h$.

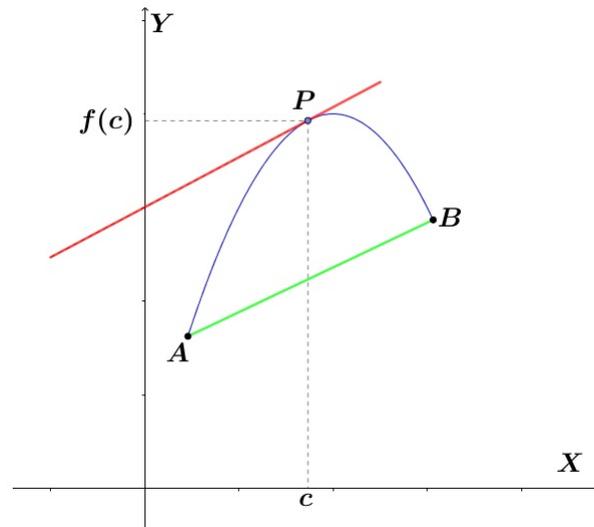
Corolário 4.36: Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, contínua no intervalo I , com derivada $f'(x) = 0$ para todo $x \in \text{int } I$, é constante.

Demonstração. Dados $x, y \in I$ quaisquer, existe c entre x e y tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(y) - f(x) = 0 \cdot (y - x) \Rightarrow f(y) - f(x) = 0.$$

Logo $f(x) = f(y)$. □

Figura 4.3: Ilustração do Teorema do Valor Médio de Lagrange.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Corolário 4.37: Se $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, deriváveis em $\text{int } I$, com $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \text{int } I$ então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in I$.

Demonstração. Seja a função $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = g(x) - f(x)$ que satisfaz $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$ para todo $x \in \text{int } I$ e $h(x)$ contínua em I .

Logo pelo Corolário 4.36, a função $h(x)$ é constante. Portanto, $h(x) = c$ e $g(x) = f(x) + c$. \square

Corolário 4.38: Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo I . Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ então $x, y \in I \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$.

Demonstração. Dados $x, y \in I$, f é contínua no intervalo fechado cujo extremos são x, y e derivável no seu interior. Logo, existe z entre x, y tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) \Rightarrow f(y) - f(x) = f'(z)(y - x),$$

donde $|f(y) - f(x)| = |f'(z)| |y - x| \leq k|y - x|$. \square

Corolário 4.39: A fim de que a função derivável $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ seja monótona não-decrescente no intervalo I é necessário e suficiente que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f é uma bijeção crescente de I sobre um intervalo J e sua inversa $g = f^{-1} : J \rightarrow I$ é derivável, com $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ para todo $y = f(x) \in J$.

Demonstração. Com efeito, já sabemos que, pelo Corolário 4.27 referente ao Teorema 4.26, que se f é monótona não-decrescente então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Reciprocamente, se vale esta condição conforme o enunciado, então para quaisquer x, y em I , temos $f(y) - f(x) = f'(z)(y - x)$, onde $z \in I$ entre x, y .

Como $f'(z) \geq 0$, vemos que $f(y) - f(x) \geq 0$, isto é, $x < y$ em $I \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Do mesmo modo que se vê que, supondo $f'(x) > 0$ para todo $x, y \in I$ tem-se f crescente. As demais afirmações seguem-se do Teorema 4.17 do Capítulo 4 e do Corolário da Regra da Cadeia (Teorema 4.25). \square

O corolário 4.39 é válido para uma função monótona não-crescente que é necessário é suficiente que $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$. Como resultado temos que se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f é um bijeção decrescente de I sobre um intervalo J .

4.4 Fórmula de Taylor e aplicações da derivada

4.4.1 Fórmula de Taylor

A n -ésima derivada (ou derivada de ordem n) de uma função no ponto a será indicada com a notação $f^{(n)}(a)$. Para $n = 1, 2$ e 3 escreve-se $f'(a)$, $f''(a)$ e $f'''(a)$ respectivamente. Por definição, $f''(a) = (f')'(a)$ e assim sucessivamente temos que, $f^{(n)}(a) = [f^{(n-1)}]'(a)$. Para que $f^{(n)}(a)$ tenha sentido, é necessário que $f^{(n-1)}(x)$ esteja definida num conjunto do qual a seja ponto de acumulação e seja derivável no ponto $x = a$. Em todos os casos que consideraremos, tal conjunto será um intervalo. Quando existe $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$, diz-se que a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no intervalo I . Quando f é $n - 1$ vezes derivável numa vizinhança de a e existe $f^{(n)}(a)$, dizemos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no ponto $a \in I$.

Dizemos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^n , e escrevemos $f \in C^n$, quando f é n vezes derivável e, além disso, a função $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Quando $f \in C^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que f é de classe C^∞ e escrevemos $f \in C^\infty$. É conveniente considerar f como sua própria “derivada de ordem zero” e escrever $f^{(0)} = f$. Assim, $f \in C^0$ significa que f é uma função contínua.

Seja a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida no intervalo I e n vezes derivável no ponto $a \in I$. O polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é o polinômio $p(h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n$ (de grau $\leq n$) cujas derivadas de ordem menor ou igual n no ponto $h = 0$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de f no ponto a , isto é, $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Ora, as derivadas $p^{(0)}, p'(0), p''(0), \dots, p^{(n)}(0)$ determinam de modo único o polinômio $p(h)$ pois $p^{(i)}(0) = i!a_i$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é

$$p(h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Se $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in I$ então a função $r(h) = f(a + h) - p(h)$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$, é n vezes derivável no ponto $0 \in J$, com $r(0) = r'(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0$.

Lema 4.40: Seja $r : J \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $0 \in J$. A fim de que seja $r^{(i)}(0) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, n$, é necessário e suficiente que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

Demonstração. (\Rightarrow) Mostraremos inicialmente a condição é necessária.

Suponhamos inicialmente que as derivadas de r no ponto 0 sejam nulas até a ordem n . Para $n = 1$, isto significa que $r(0) = r'(0) = 0$. Então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h) - r(0)}{h} = r'(0) = 0$$

Para $n = 2$, temos $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$. Pelo o que acabamos de ver, isto implica que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r'(x)}{x} = 0$. O Teorema do Valor Médio assegura que para todo $h \neq 0$, existe x no intervalo de extremos 0 e h tal que

$$\frac{r(h)}{h^2} = \frac{r(h) - r(0)}{h^2} = r'(x) \cdot \frac{h}{h^2} = \frac{r'(x)}{h}.$$

Por conseguinte, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{r'(x)}{x} \left(\frac{x}{h} \right) \right] = 0$, pois $h \rightarrow 0$ implica que $x \rightarrow 0$ e, além disso, $\left| \frac{x}{h} \right| \leq 1$ ($|x| \leq |h|$ e está entre 0 e 1). O mesmo argumento permite passar de $n = 2$ para $n = 3$ e assim por diante.

(\Leftarrow) Suponhamos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. Daí resulta, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$ que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^i} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{r(h)}{h^n} \cdot h^{n-i} \right) = 0$. Portanto, $r(0) = \lim_{h \rightarrow 0} r(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^0} = 0$.

Além disso, $r'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Quanto a $r''(0)$, consideremos a função auxiliar $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi = r(h) - \frac{r''(0)h^2}{2}$. Evidentemente, vale $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$. Pela parte do lema já demonstrada segue-se que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h^2} = 0$. Como $\frac{\varphi(h)}{h^2} = \frac{r(h)}{h^2} - \frac{r''(0)}{2}$ e sabemos que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$, resulta que $r''(0) = 0$. O mesmo argumento permite passar de $n = 2$ para $n = 3$ e assim por diante.

□

Teorema 4.41 (Fórmula de Taylor infinitesimal): Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. A função $r : J \rightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R}, a + h \in I\}$ pela igualdade

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + r(h),$$

cumpra $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. Reciprocamente, se $p(h)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n tal que $r(h) = f(a + h) - p(h)$ cumpra $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$ então $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a , isto é,

$$p(h) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot h^i.$$

Demonstração. (\Rightarrow) A função r , definida pela fórmula de Taylor, é n vezes derivável no ponto 0 e tem derivadas nulas nesse ponto, até a ordem n . Logo, pelo Lema anterior, vale $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

(\Leftarrow) Se $r(h) = f(a+h) - p(h)$ é tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$ então, novamente pelo Lema, as derivadas de r no ponto 0 são nulas até a ordem n , logo $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$, ou seja, $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a . □

4.4.2 Funções convexas e côncavas

Se $a \neq b$, a *reta* que liga os pontos (a, A) e (b, B) no plano \mathbb{R}^2 é conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$y = A + \frac{B - A}{b - a}(x - a)$$

ou, equivalentemente,

$$y = B + \frac{B - A}{b - a}(x - b).$$

Quando se tem uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, e são dados $a, b \in X$, o segmento de reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, pertencentes ao gráfico de f , será chamado a *secante* ab .

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *convexa* quando seu gráfico se situa abaixo de qualquer de suas secantes. Em termos precisos, a convexidade de f se exprime assim:

$$a < x < b \quad \text{em} \quad I \Rightarrow f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

ou seja,

$$a < x < b \quad \text{em} \quad I \Rightarrow f(x) \leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

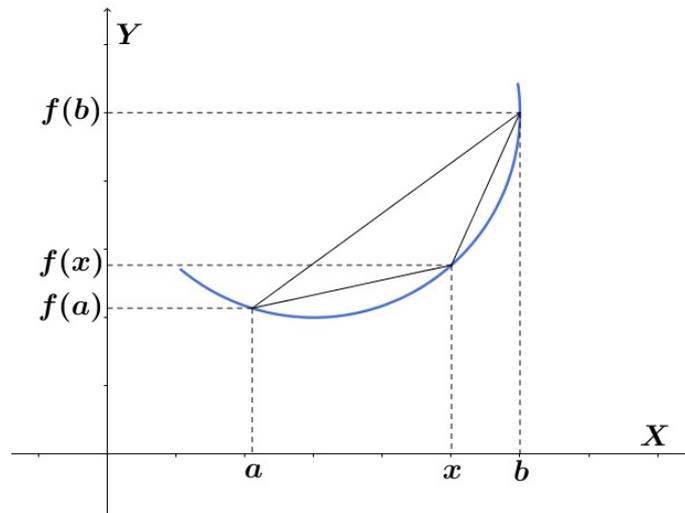
Portanto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I se, e somente se, valem as desigualdades fundamentais:

$$a < x < b \quad \text{em} \quad I \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Essas desigualdades decorre direto do fato de:

$$\begin{aligned} f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) &\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ e,} \\ f(x) \leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) &\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}$$

Figura 4.4: Gráfico de uma função convexa f .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Qualquer umas das desigualdades acima implica a outra. Elas significam que, $a < x < b$, a secante ax tem inclinação que menor que a secante ab e esta, por sua vez, tem inclinação menor do que a secante xb .

Teorema 4.42: Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I então existem as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ em todo o ponto $c \in \text{int } I$.

Demonstração. Em virtude das observações feitas acima, a função definida como $\varphi_c(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ é monótona não-decrescente no intervalo $J = I \cap (c, +\infty)$. Além disso, como $c \in \text{int } I$, existe $a \in I$, com $a < c$. Portanto para $a < c < x$, temos que:

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \varphi_c(x)$$

Logo, $\varphi_c(x) \geq \frac{f(a) - f(c)}{a - c}$, para todo $x \in J$. Assim, a função $\varphi_c : J \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada inferiormente. Sendo assim, existe o limite à direita $\lim_{x \rightarrow c^+} \varphi_c = f'_+(c)$. Raciocínio análogo para a derivada à esquerda. \square

Corolário 4.43: Uma função convexa $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em todo ponto interior ao intervalo I .

Demonstração. Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, então pelo teorema anterior as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$ existem em todo ponto $c \in \text{int } I$. Note que:

$$0 \leq |f(c+h) - f(c)| = \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot |h| \right| \leq M \cdot |h|.$$

Fazendo $h \rightarrow 0^+$ e $h \rightarrow 0^-$, temos que $\lim_{h \rightarrow 0} f(c+h) = f(c)$ \square

Teorema 4.44: As seguintes afirmações sobre a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo I , são equivalentes:

1. f é convexa.
2. A derivada $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente.
3. Para quaisquer $a, x \in I$ tem-se $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$, ou seja, o gráfico de f está situado acima de qualquer de suas tangentes.

Demonstração. Provaremos as implicações (1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3) e (3) \Rightarrow (1).

(1) \Rightarrow (2) Sejam $a < x < b$ em I . Como f é convexa, temos que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Aplicando o limite $x \rightarrow a^+$ na primeira desigualdade e analogamente com $x \rightarrow b^-$ na segunda desigualdade, temos que:

$$f'(a) = f'_+(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_-(b) = f'(b).$$

Logo, $a < b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b)$.

(2) \Rightarrow (3) Suponhamos $a < x$ em I . Pelo Teorema do Valor Médio, existe $z \in (a, x)$ tal que

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(z)(x - a).$$

Como f' é monótona não-decrescente e $a < z < x$, temos que $f'(z) \geq f'(a)$.

Logo, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$

Se $x < a$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $w \in (x, a)$ tal que,

$$f'(w) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \Rightarrow f(x) = f(a) + f'(w)(x - a).$$

Como f' é monótona não-decrescente, temos $f'(w) \leq f'(a)$. Como $(x - a) < 0$, temos que $f'(w)(x - a) \geq f'(a)(x - a)$. Portanto, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

(3) \Rightarrow (1) Suponhamos que vale a condição (3) e sejam $a < c < b$ em I . Queremos mostrar que $f(c) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$.

Escrevemos a função $\alpha(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ e chamemos o conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq \alpha(x)\}$ o semiplano superior determinado pela reta $y = \alpha(x)$, tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$.

Evidentemente H é um subconjunto convexo do plano, isto é, o segmento que liga quaisquer dois pontos de H está contido em H . Da hipótese (3), temos que os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencem a H , logo o segmento de reta que une estes dois pontos estão contidos em H . Em particular, o ponto desse segmento que tem abscissa c , ou seja, $\left(c, f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)\right)$, pertence a H , isto é,

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a) \geq \alpha(c) = f(c)$$

Como $a < c < b$ são quaisquer em I , a função f é convexa.

□

Corolário 4.45: Todo ponto crítico de uma função convexa é um ponto de mínimo absoluto.

Demonstração. Seja $a \in I$ um ponto crítico de uma função convexa $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, $f'(a) = 0$. Pela condição (3) do Teorema 4.9, temos que:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a), \text{ para todo } x \in I.$$

Como $f'(a) = 0$ segue que $f(x) \geq f(a)$ para todo $x \in I$. Logo a é ponto de mínimo absoluto.

□

Corolário 4.46: Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes derivável no intervalo I , é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Demonstração. Com efeito, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ equivale afirmar que $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente (Corolário 4.39) e o que equivale afirmar que f é convexa.

□

Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *côncava* quando $-f$ é convexa, isto é, quando o gráfico de f está acima de qualquer de suas secantes. Em termos precisos, a convexidade de f se exprime assim:

$$a < x < b \quad \text{em} \quad I \Rightarrow f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

ou seja,

$$a < x < b \quad \text{em} \quad I \Rightarrow f(x) \geq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b).$$

Portanto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava no intervalo I se, e somente se

$$a < x < b \quad \text{em} \quad I \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Existem as derivadas laterais de uma função côncava em cada ponto interior ao seu domínio, logo a função é contínua nesse ponto. Uma função derivável é côncava se, e somente se, sua derivada é monótona não-crescente. Uma função duas vezes derivável é côncava se, e somente se, sua derivada segunda é ≤ 0 . Uma função derivável é côncava se, e somente se, seu gráfico está abaixo de qualquer de suas tangentes. Todo ponto crítico de uma função côncava é um ponto de máximo absoluto.

Existem ainda as noções de função *estritamente convexa* e *estritamente côncava*, onde se exige que

$$a < x < b \quad \text{em} \quad I \Rightarrow f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

no caso convexo, com $>$ em vez de $<$ no caso côncavo. Isto evita que o gráfico de f possua trechos retilíneos.

Convexidade estrita implica que f' seja crescente mas não implica $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$. Entretanto, $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ implica que f' crescente implica que f estritamente convexa.

Problemas de Otimização

A característica do problema de otimização é que a função a ser otimizada (encontrar o máximo ou mínimo) não aparece, muitas das vezes, no seu enunciado. Sendo assim, o aluno deverá usar o seu conhecimento prévio, habilidade de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas, para determinar a função.

Em cursos de Matemática avançados, os problemas de otimização geralmente são resolvidos por Cálculo Diferencial. Em um ambiente de Ensino Médio, a maioria dos problemas de otimização levará a funções polinomiais, como por exemplo, a função quadrática. Mas o aluno não deve pensar que esse universo de problemas de otimização é limitado, pois há muitos problemas básicos que não se enquadram nessa simplificação. Porém, mesmo no Ensino Médio, é possível lidar com problemas de otimização que normalmente só podem ser resolvidos no Ensino Superior. Esses problemas podem ser trabalhados como situações problemas de investigação, ou seja, o aluno deverá procurar a “melhor” solução que atenda o problema. A procura da solução através da pesquisa empírica pode ser feita usando algum programa matemático, como por exemplo o Geogebra.

O capítulo foi dividido em quatro seções, sendo a primeira seção destinada a mostrar dois resultados para determinar o ponto de máximo e/ou mínimo de uma função derivável. A segunda seção aborda a construção do gráfico da função quadrática usando as ferramentas do Cálculo Diferencial. As duas últimas seções são destinadas à apresentação da resolução de problemas de otimização, com e sem o auxílio das ferramentas do Cálculo Diferencial. Sendo que na terceira seção será apresentado a resolução de dois problemas de otimização sem a utilização das ferramentas do cálculo. Na última seção serão apresentados soluções de três problemas de otimização usando os resultados abordados na primeira seção deste capítulo. Os problemas apresentados são encontrados nas referências Stewart [19], Dante [4], Souza [18].

5.1 Métodos para resolução de problemas de otimização

No decorrer do Ensino Médio, são abordados problemas de otimização na qual deve determinar a função a ser otimizada (encontrar máximo ou mínimo). A maior parte deles estão associados às funções polinomiais e podemos nos depararmos com exercícios dessa natureza na área da geometria, física, química, biologia, dentre outras áreas. Além dos problemas trabalhados no Ensino Médio, existem outros tipos de questões envolvendo máximos e mínimos de funções que o universo da educação básica não abrange.

As ferramentas vistas no Ensino Médio não são suficientes para resolver problemas de otimização para funções polinomiais diferentes da função quadrática. Sendo assim, será apresentado resultados envolvendo derivada para a obtenção dos pontos de máximos ou mínimos de uma função real. Esses resultados seguem da teoria vista no Capítulos 4 desse trabalho.

O resultado a seguir é conhecido como **Teste da Segunda Derivada**, visto nos curso de Cálculo no ensino superior. Esse teste busca a classificação de extremos de uma função. Ele foi retirado da referência Neto [14], página 173.

Teorema 5.1 (Teste da Segunda Derivada): Sejam I um intervalo aberto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável e x_0 um ponto crítico de f . Se $f'' > 0$ (respectivamente $f'' < 0$) em I , então x_0 é o único ponto de mínimo (respectivamente máximo) global de f . Em particular, x_0 é o único ponto crítico de f .

Demonstração. Suponha $f'' > 0$ em I (o caso $f'' < 0$ em I é análogo). Como $f'' = (f')'$, o Corolário 4.39 (aplicado a f' , no lugar de f) garante que f' é crescente em I . Mas, como $f'(x_0) = 0$, segue que $f'(x) < 0$ para $x < x_0$ e $f'(x) > 0$ para $x > x_0$. Então, novamente pelo Corolário 4.39 garante que f é decrescente em $I \cap (-\infty, x_0]$ e crescente em $I \cap [x_0, +\infty)$. Logo, x_0 é o único ponto de mínimo global para f e, como tal, seu único ponto crítico. \square

Antes de resolver alguns exercícios propostos no trabalho, vamos trazer outra demonstração das coordenadas de x_V e y_V da função quadrática.

No final seção 2.3, foi demonstrado como obter o ponto de máximo ou de mínimo da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, a partir da forma canônica do trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$. A demonstração foi feita sem a utilização do conceito de derivada. Vamos trazer outra demonstração utilizando o Teorema 5.1.

Consideremos a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Calculando a derivada primeira, temos que $f'(x) = 2ax + b$. Pela definição de ponto crítico 4.32, temos que $x_V = \frac{-b}{2a}$ é ponto crítico da função f .

A derivada segunda da função f é $f''(x) = 2a$. Pelo Teorema 5.1, sendo o valor de a positivo, temos um mínimo global. Analogamente, sendo o valor de a negativo, temos um máximo global no vértice x_V .

Veamos agora um resultado da teoria vista na seção 4.4, aplicações da fórmula de Taylor. Esse resultado é usado para determinar máximos e mínimos locais para uma função f que é n vezes derivável num ponto a . Desta forma, apenas sabendo o valor de a , pode-se dizer qual a concavidade da parábola.

Teorema 5.2: Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in \text{int } I$, com $f^{(i)}(a) = 0$ para $1 \leq i < n$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$. Afirmamos que:

1. Se n for par, então a será um ponto de máximo local estrito se $f^{(n)}(a) < 0$, ou um ponto de mínimo local estrito se $f^{(n)}(a) > 0$.
2. Se n for ímpar, o ponto a não será de máximo nem de mínimo local.

Demonstração. Podemos escrever a fórmula de Taylor como

$$f(a+h) - f(a) = h^n \cdot \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n} \right].$$

Pela definição de limite, existe $\delta > 0$ tal que para $a+h \in I$ e $0 < |h| < \delta$ a soma dentro dos colchetes tem o mesmo sinal de $f^{(n)}(a)$. Como $a \in \text{int } I$, podemos tomar esse δ de modo que $|h| < \delta \Rightarrow a+h \in I$.

Então, quando n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, a diferença $f(a+h) - f(a) > 0$ sempre que $0 < |h| < \delta$, logo f possui um *mínimo local estrito* no ponto a . Analogamente, se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, a diferença $f(a+h) - f(a) < 0$ quando $0 < |h| < \delta$, logo f tem um *máximo local estrito* no ponto a . Finalmente, se n é ímpar, o fator h^n tem o mesmo sinal de h , logo a diferença $f(a+h) - f(a)$ muda de sinal juntamente com h , portanto f não tem máximo nem mínimo local no ponto a . \square

5.2 Esboço do gráfico da função quadrática

No Capítulo 4 e na seção 5.1 estudamos várias ferramentas (estudo da primeira variação de um função derivável, teste da derivada segunda, ponto crítico) do Cálculo Diferencial. Essas ferramentas permitirão esboçar com segurança, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Um roteiro para o esboço do gráfico de uma função real pode ser encontrado no livro Stewart [19], no Capítulo 4, seção 4.5.

Consideremos a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. A demonstração será feita para a função f com $a > 0$ e o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Analogamente, a demonstração pode ser feita para $a < 0$ e para os discriminante (Δ) negativo ou igual a zero.

Construção do gráfico da função quadrática: Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $0 < a \neq 0$ e o discriminante $\Delta > 0$.

Notamos que o domínio da função f é o conjuntos dos números Reais, ou seja, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. O ponto de intersecção com o Eixo- Y é $(f(0), c)$ e com o Eixo-X são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Chamemos as raízes de x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$. Assim, os pontos de intersecção do gráfico de f com o Eixo- X são $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

Calculando a derivada primeira de f , temos que $f'(x) = 2ax + b$. Pela definição de ponto crítico 4.32, temos que $x_V = \frac{-b}{2a}$ é o ponto crítico, pois $f'(x_V) = 0$. Notemos que

$$f'(x) > 0 \text{ para } x_V > \frac{-b}{2a}.$$

$$f'(x) < 0 \text{ para } x_V < \frac{-b}{2a}.$$

Pelo Corolário 4.39, estudo da primeira variação de uma função derivável, temos que a função f é crescente no intervalo $[-b/2a, +\infty)$, a cor verde no gráfico 5.1, e decrescente no intervalo $(-\infty, -b/2a]$, a cor vermelha no gráfico 5.1.

Calculando a derivada segunda da função f , temos que $f''(x) = 2a$ e $f'' > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 5.1, teste da segunda derivada, concluímos que $x_V = \frac{-b}{2a}$ é o único ponto de mínimo da função f . Pelo Corolário 4.46, a função f é convexa, ou seja, o gráfico da função é côncavo para cima.

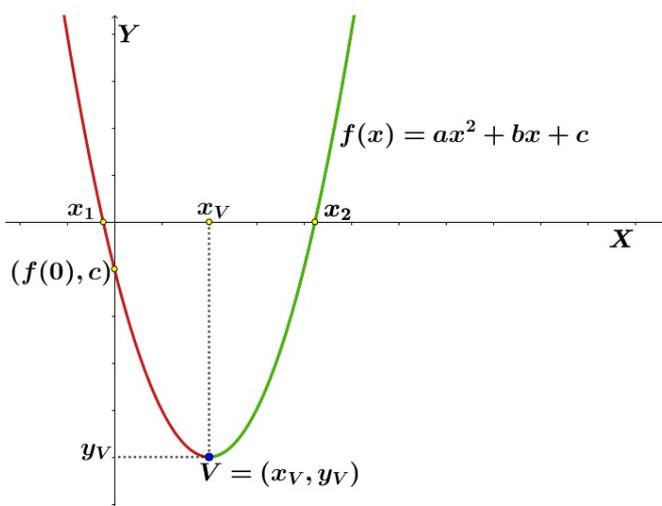
Finalmente, observamos que não existe assíntotas ¹ verticais e nem assíntotas horizontais. De fato, como f é contínua em \mathbb{R} , não há assíntotas verticais. Por outro lado, uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

concluímos que não há assíntotas horizontais.

Reunindo todas as informações acima e usando o *software* do Geogebra, traçamos o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$ e $\Delta > 0$, conforme a Figura 5.1.

Figura 5.1: Esboço do gráfico $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

¹**Definição de Assíntotas:** são retas imaginárias, no sentido horizontal ou vertical, que delimitam a aproximação dos gráficos das funções das mesmas, a medida que x cresce ou decresce. Ver mais sobre assunto na referência Stewart [19], página 87 (assíntota vertical) e página 121 (assíntota horizontal).

5.3 Resolução de problemas de otimização sem o uso do Cálculo

Como é normatizado na Base Comum Curricular (BNCC) [3] do Ensino Médio, o foco é a construção de uma visão da matemática voltada à realidade do aluno. Portanto, a presente seção apresentará duas situações problemas que o aluno poderá deparar no seu dia a dia.

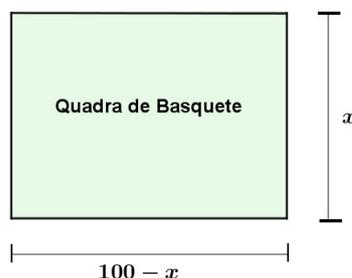
Para resolver os problemas propostos, utilizaremos as ideias e fórmulas desenvolvidas no final do Capítulo 2, aquelas associadas ao vértice da função quadrática, ou seja, $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Lembrando que este ponto representa o valor máximo ou mínimo que a função pode assumir, dependendo da concavidade de sua parábola.

No Capítulo 6 será apresentado quatro etapas, sugeridas pelo autor George Polya, para a resolução de problemas matemáticos que podem ser úteis para os alunos. Apresentação das etapas no capítulo posterior é para mostrar a construção da sequência didática proposta, visto que a resolução dos problemas apresentada nele não difere da sequência lógica da resolução dos exercícios deste capítulo. Os problemas apresentados foram retirados de dois livros didáticos enviados às escolas pelo Programa Nacional do Livro Didático e do Material Didático (PNLD) de 2021.

Problema 1: (Livro [4], página 119) Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado o entorno de uma quadra de basquete. Foi disponibilizada uma tela de 200 metros de medida de comprimento. Os diretores desejam saber quais devem ser as medidas de comprimento da largura e da profundidade da quadra a ser cercada para que a área seja a maior possível?

Solução: Desejamos encontrar as medidas do comprimento e da largura da quadra de basquete, para que ela possua uma maior área. Iremos fazer um diagrama, conforme a Figura 5.2. Sejam A a área que queremos maximizar da quadra e x um dos lados da quadra e o outro lado deve medir $100 - x$.

Figura 5.2: Quadra de basquete com comprimentos $100 - x$ e x .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, podemos expressar a área $A(x)$ em termos das medidas $100 - x$ e x

$$A(x) = (100 - x) \cdot x = -x^2 + 100x.$$

Observemos que a função A é uma função quadrática. Assim, para encontrar o máximo de A , devemos determinar o vértice (extremo) da parábola. Sabemos que o vértice da parábola é

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

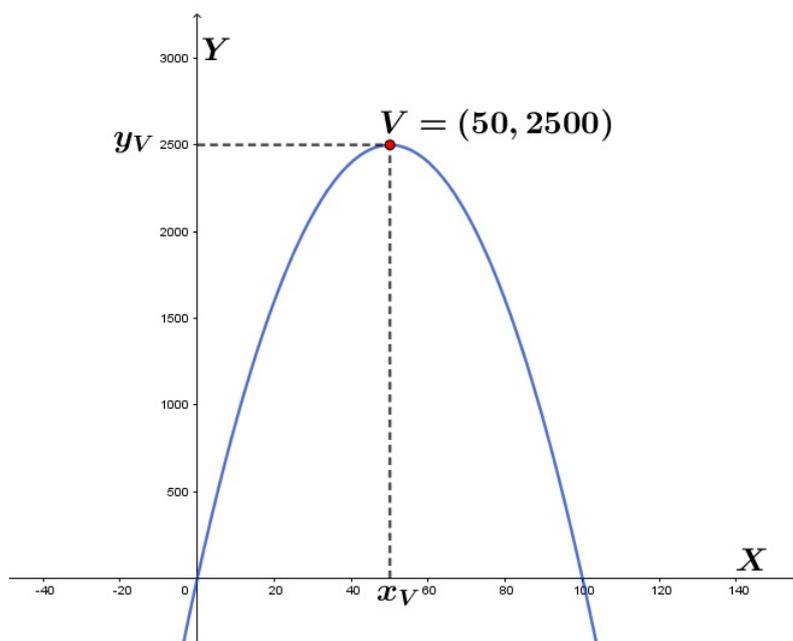
Então, temos que

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2 \cdot (-1)} = 50$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(100^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0)}{4 \cdot (-1)} = 2.500$$

Portanto, as coordenadas do vértice da função quadrática A são $V = (50, 25000)$. Concluímos então que as medidas de comprimento da largura e da profundidade da quadra devem ser 50 metros cada uma. Ou seja, a área máxima deve ser de um quadrado de lado 50 metros. A área máxima é a área desse quadrado, isto é, $A = y_V = 2.500 \text{ m}^2$.

Figura 5.3: Gráfico da função $A(x) = -x^2 + 100x$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

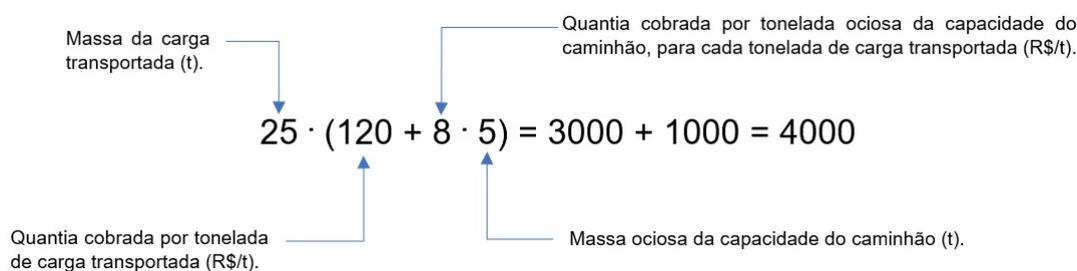
A leitura do gráfico da Figura 5.3 nos diz que o Eixo-Y representa a área da região da quadra e o Eixo-X representa a dimensão de um dos lados da quadra. O que observamos é que para valores de $x < 0$ ou $x > 100$ não é possível a construção da quadra, devido a condição proposta no enunciado. Portanto, o domínio da função $A(x) = -x^2 + 100x$ para o problema é domínio $Dom(A) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 100\}$.

A partir desse exercício, um exemplo importante do problema de otimização de áreas diz respeito a **figuras isoperimétricas**: dado um perímetro fixo, que formatos ou

proporções de contorno otimizam (maximizam) a área contida nesse contorno. Não é objetivo do trabalho a pesquisa sobre problemas isoperimétricos, mas na mesma ótica do problema 1, com perímetro fixo, qual o triângulo tem área máxima? A resposta para essa pergunta é o triângulo equilátero, conforme resultado apresentado por Lomas [11], página 32. Podemos encontrar outros resultados e a conjectura para um polígono de n lados na mesma referência.

Problema 2: (Livro [18], página 38) Certa transportadora, para determinar o preço do frete de uma caminhão com 30 toneladas de capacidade, na realização do trajeto entre um posto de abastecimento e um porto, calcula para cada tonelada de carga transportada R\$ 120,00 mais R\$ 8,00 por tonelada ociosa da capacidade do caminhão.

Por exemplo, para transportar uma carga de 25 t, realiza-se o seguinte cálculo:



Portanto, a transportadora irá receber o valor de R\$ 4.000,00 para transportar 25 toneladas.

Qual o maior valor que a transportadora pode receber por um frete seguindo esses critérios?

Solução: O que deseja-se obter é o maior valor que a transportadora pode receber por um frete. De acordo com o exemplo dado, sejam x a massa ociosa da capacidade desse caminhão, em toneladas e p o valor do frete, em reais. Partindo do exemplo, podemos escrever a seguinte função quadrática em função de p e x . Assim:

$$p(x) = (30 - x)(120 + 8 \cdot x) \Rightarrow p(x) = -8x^2 + 120x + 3600$$

Dado que a função p é uma função quadrática, para achar o maior valor que a transportadora pode receber de frete, deve-se determinar o valor extremo (y_V do vértice) da parábola. Assim, temos

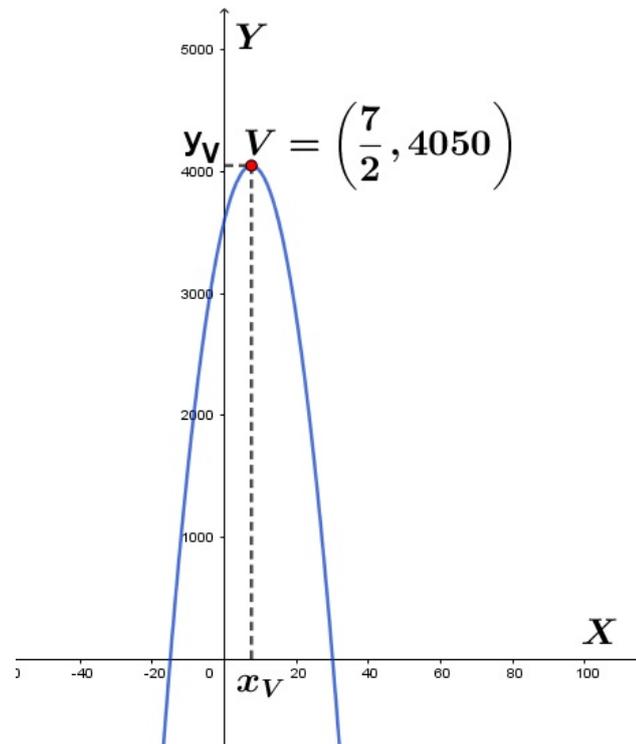
$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(120^2 - 4 \cdot (-8) \cdot 3600)}{4 \cdot (-8)} = \frac{14400 + 115200}{-32} = 4050$$

Portanto, o maior valor que a transportadora pode receber é R\$ 4.050,00 reais. Observemos esse valor no gráfico da função p na Figura 5.4, representado no vértice da parábola.

O gráfico na Figura 5.4 é o esboço da função $p(x) = -x^2 + 120x + 3600$. A leitura do gráfico representado para a situação problema 2 corresponde que o Eixo-Y representa o valor do frete a ser recebido pela transportadora e o Eixo-X representa

a massa ociosa da capacidade do caminhão, em toneladas. Faz sentido considerar valores para x entre o intervalo $0 \leq x \leq 30$, pois o caminhão possui capacidade para 30 toneladas.

Figura 5.4: Gráfico da função $p(x) = -x^2 + 120x + 3600$.



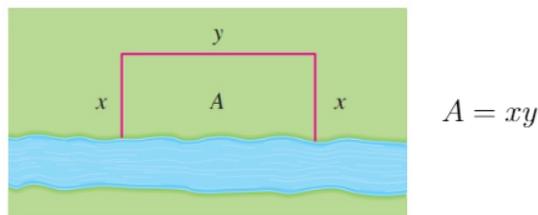
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 Resolução de problemas de otimização com o uso do Cálculo

Para a solução dos problemas de otimização que serão apresentados, iremos usar o Teorema 5.1, Teste da Segunda Derivada. No livro do autor Stewart [19], os resultados para a solução dos problemas podem ser encontrados na seção 4.5 da página 262.

Problema 1: (Livro [19], página 294) Um fazendeiro tem 1.200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

Solução: Desejamos encontrar as dimensões do campo, que tem a forma de um retângulo. Para que ele possua uma área maior, faremos um diagrama conforme a Figura 5.5. Sejam A a área que queremos maximizar do retângulo, x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros). Então, expressamos A em termos de x e y :

Figura 5.5: Campo retangular à margem de um rio reto.

Fonte: STEWART, 2013, p. 295.

Vamos expressar a área A em função de apenas uma variável. Para isso, consideremos a informação dada que o comprimento total da cerca é de 1.200 m. Logo,

$$2x + y = 1200 \Rightarrow y = 1200 - 2x$$

Substituindo o valor de y encontrado na expressão $A = xy$, temos

$$A(x) = x(1200 - 2x) = 1200x - 2x^2$$

Observemos que $x \geq 0$ e $x \leq 600$ (de outra forma resultaria $A < 0$). Logo, a função que desejamos maximizar é $A(x) = 1200x - 2x^2$, cujo domínio é $0 \leq x \leq 600$.

Vamos encontrar o ponto crítico da função, calculando a derivada da função A e fazendo $A' = 0$. Temos

$$A'(x) = 1200 - 4x$$

e fazendo $A'(x) = 0$, temos que

$$1200 - 4x = 0 \Rightarrow x = 300.$$

Para determinarmos que este valor, $x = 300$, seja máximo, usaremos o critério do Teorema 5.1, Teste da Segunda Derivada. Note que

$$A''(x) = -4 < 0, \text{ para todo } x.$$

Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, concluímos que $x = 300$ é o único máximo global da função $A(x) = 1200x - 2x^2$.

Logo, o campo retangular dever ter 300 m de profundidade e 600 m de extensão para ter uma maior área.

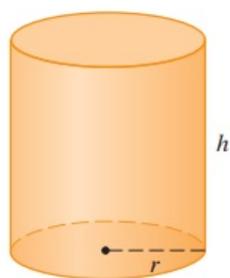
Uma observação a ser feita em relação a esse problema e o problema 1 da seção 5.3, que aborda determinar as dimensões da quadra, é que ambos pedem para determinar a área máxima da região retangular. A diferença que o problema da quadra considera os quatro lados do retângulo, diferente do problema do fazendeiro que não considera o lado do retângulo ao longo da margem do rio. Essa restrição influencia no perímetro do polígono, pois no problema da quadra, a maior área é determinada quando se tem um quadrado de lado 50 m, visto que no problema do fazendeiro, o polígono que

possui maior área é o retângulo de dimensões 300 m de profundidade e 600 m de extensão. Ambos os exercícios podem ser resolvidos usando ou não as ferramentas do Cálculo Diferencial.

Problema 2: (Livro [19], página 295) Uma lata cilíndrica é feita para receber um 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.

Solução: Desejamos encontrar as dimensões da lata cilíndrica para minimizar o custo do metal para a produção dela. Observemos na Figura 5.6, um cilindro reto de raio r e altura h , ambos em centímetros.

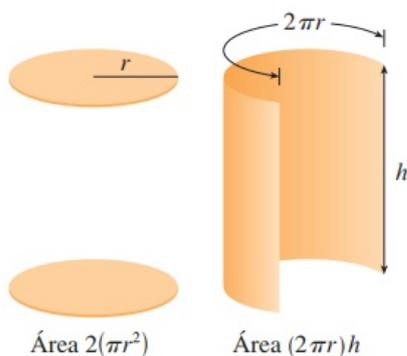
Figura 5.6: Cilindro reto de raio r e altura h .



Fonte: STEWART, 2013, p. 295.

Como queremos minimizar o custo do metal, devemos minimizar a área da superfície total do cilindro, isto é, a base, a tampa e a superfície lateral. Observemos da Figura 5.7, que a superfície lateral do cilindro é uma folha retangular com dimensões: base da folha $2\pi r$ e altura h .

Figura 5.7: Cilindro reto: base, tampa e superfície lateral.



Fonte: STEWART, 2013, p. 295.

Portanto, a área da superfície total do cilindro é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Dado que o volume da lata cilíndrica é 1 litro, usaremos esse fato para eliminarmos a variável h da expressão de A acima. Sabendo que 1 litro é igual a 1.000 cm^3 e que o volume do cilindro é calculado pela expressão $V = \pi r^2 h$, temos então que

$$\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Substituindo-o na expressão para A , temos

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2} \right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Portanto, a expressão que queremos minimizar é $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$, $r > 0$, cujo o domínio da função é o intervalo $(0, +\infty)$.

Vamos encontrar o ponto crítico da função A , pois ele é o candidato candidato a ser ponto de mínimo e/ou máximo. Calculando a derivada da função e fazendo $A' = 0$. Temos então

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Então $A'(r) = 0$ quando $\pi r^3 = 500$; logo, o número crítico é $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Uma vez que o domínio da função A é $(0, +\infty)$, o ponto crítico da função não será uma das extremidades do intervalo.

Usaremos o Teste da Segunda Derivada visto no Teorema 5.1 para comprovarmos que $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ é ponto de mínimo. De fato

$$A''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3} \Rightarrow A'' \left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \right) = 4\pi + \frac{4000}{(\sqrt[3]{500/\pi})^3} > 0$$

Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, concluímos que $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ é o único ponto de mínimo global.

O valor da altura h correspondente a $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ é

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi (500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Logo, para minimizar o custo da lata, o raio da base deve ser $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm e a altura, igual ao dobro do raio, ou seja, $h = 2r$, que é igual ao diâmetro.

Problema 3: (Livro [19], página 299) Uma loja tem vendido 200 aparelhos reprodutores de Blu-ray por semana a \$ 350 cada. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada \$ 10 de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

Solução: Vamos dividir a solução do problema em duas partes, sendo que elas estarão interligadas para determinar o valor do desconto para maximizar a receita.

1ª Parte: Desejamos encontrar a função demanda (ou função preço) e a função receita. As funções descritas abaixo são de importância para um economista ou um industrial. Elas são:

- $C(x)$ = custo total da produção de x unidades de um produto, durante um certo período de tempo (chamada **função custo**).
- $p(x)$ = preço por unidade que a companhia pode cobrar se ela vender x unidades (chamada **função demanda** ou **função preço**).
- $R(x)$ = rendimento total da venda de x unidades de um produto durante o período de tempo (chamada **função receita**).
- $L(x)$ = lucro total obtido na venda de x unidades de um produto durante o período de tempo (chamada **função lucro**).

Se x unidades forem vendidas, então o lucro total será

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

Seja x o número de reprodutores de Blu-ray vendidos por semana. Então, o aumento semanal nas vendas será de $x - 200$. Para cada \$ 10 de desconto há um aumento de 20 unidades vendidas, ou seja, o preço cai em \$ 10 para cada aumento de 20 unidades. Portanto, para cada unidade adicional vendida, o valor do preço (decréscimo) será de $\frac{1}{20} \times 10$ e a **função demanda** ou **função preço** será

$$p(x) = 350 - \frac{10}{20}(x - 200) = 450 - \frac{1}{2}x$$

A **função receita** é

$$R(x) = x \cdot p(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$$

2ª Parte: A função que devemos maximizar é a função quadrática $R(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$ cujo domínio é o conjunto dos números reais \mathbb{R} . Portanto, para determinar o desconto para se obter uma maior receita, vamos encontrar o ponto crítico da função, calculando a derivada da função R . Temos

$$R'(x) = 450 - x$$

Como $R'(x) = 450 - x$, vemos que $R'(x) = 0$ quando $x = 450$. Para determinarmos o valor do desconto que a loja deverá oferecer para maximizar sua receita, usaremos o Teorema 5.1, Teste da Segunda Derivada. Note que

$$R''(x) = 450 > 0, \text{ para todo } x.$$

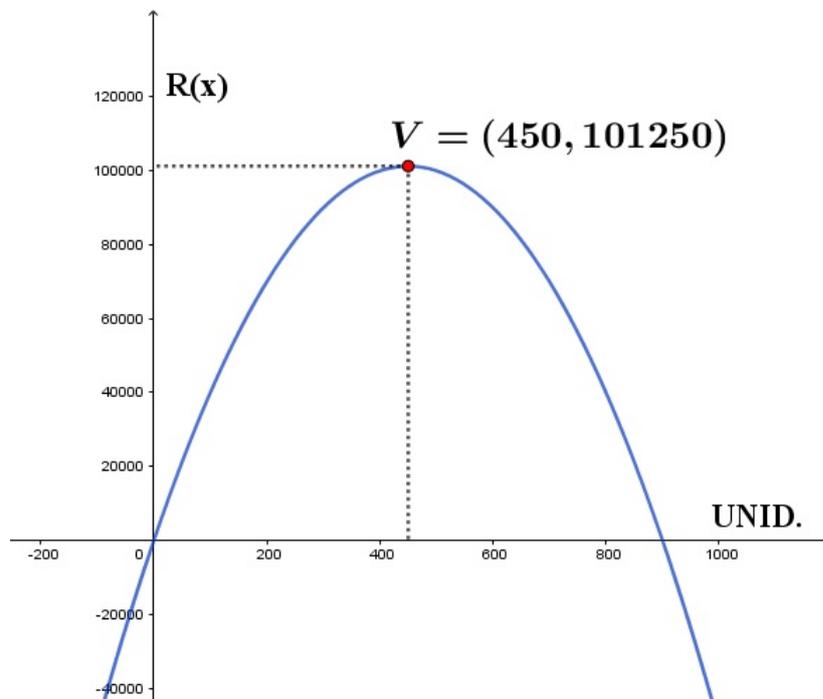
Portanto, pelo Teste da Segunda Derivada, concluímos que $x = 450$ é o único máximo global da função $R(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$. Esse valor de x é o valor extremo da função quadrática (vértice da parábola), conforme pode ser verificado pelo gráfico da função R na Figura 5.8.

Portanto, o preço correspondente a $x = 450$ é

$$p(450) = 450 - \frac{1}{2}(450) = 225$$

e o desconto é $350 - 225 = 125$. Logo, para maximizar a receita, a loja deveria oferecer um desconto de \$125.

Figura 5.8: Gráfico da função $R(x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Currículo no Ensino Médio e a resolução de problemas

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [3], homologada pelo ministro da Educação em 14 de dezembro de 2018, é um documento de caráter normativo que define os processos de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas da Educação Básica. E portanto, a BNCC deve assegurar os direitos de aprendizagem e desenvolvimento conforme prescreve o Plano Nacional de Educação (PNE).

O mais recente documento de orientação do sistema educacional brasileiro, a BNCC [3], retém esse cerne da importância da contextualização elencado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), defendendo:

... no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2018, p.528)

De acordo com BNCC [3], a formulação dos currículos e as propostas pedagógicas dos sistemas das redes escolares dos Estados, Distrito Federal e dos Municípios devem-se nortear pelo documento. Atendendo à Base Nacional Comum Curricular, foi homologado no dia 07 de abril de 2021 o *Currículo Referência do Ensino Médio de Minas Gerais*.

O Currículo Referência do Ensino Médio de Minas Gerais é composto pela formação geral básica que compreende as quatro áreas do conhecimento e seus componentes curriculares: Linguagens e suas tecnologias; Matemática e suas tecnologias; Ciências da Natureza e suas tecnologias; Ciências Humanas e Sociais aplicadas. O documento considera as aprendizagens comuns e obrigatórias definidas na BNCC e buscam tornar essa etapa de ensino mais atraente para os estudantes. Sendo assim, a homologação do currículo é um dos passos para o Novo Ensino Médio, que tem data de previsão

de implantação para 2022. Como ressalta a diretora do Ensino Médio da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, Letícia Palma:

O novo ensino médio tem o objetivo de tornar a etapa mais atraente e conectada com os anseios das juventudes, prevendo a implementação gradativa e de maneira possível para as escolas. A tarefa é construir um desenho que implemente o currículo referência para o Ensino Médio, em conjunto com a organização curricular mais flexível, que propõe novas perspectivas aos estudantes, ampliando a carga horária, de acordo com as normas. Os primeiros anos de implementação serão de muito aprendizado e trabalho compartilhado.

Considerando os pressupostos descritos na BNCC, no que tange à articulação das competências e das habilidades específicas de cada uma das etapas constantes da Educação Básica, a área da Matemática e suas Tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de cinco competências específicas (ver documento BNCC [3], página 531). E relacionadas a cada uma delas, são descritas as habilidades a serem alcançadas pelos estudantes no decorrer dessa etapa.

As competências específicas propostas na BNCC, de cada área do conhecimento, não têm uma ordem preestabelecida. Elas se interligam de modo que o desenvolvimento de uma requer, em determinadas situações, a mobilização de outras. A cada competência são associadas várias habilidades que irão traçar os parâmetros a serem adotados e a sequência didática sugerida neste trabalho, para o conteúdo de otimização no Ensino Médio, elas estão traçadas nas tabelas abaixo. É importante ressaltar que as habilidades estão associadas a determinada competência, não significa que ela não contribua para o desenvolvimento de outras.

Fazendo o estudo detalhado das competências específicas e das habilidades relacionadas a cada uma competência, é possível perceber particularidades do tema do trabalho em cada uma delas. Na competência específica 3, são relacionadas as habilidades presentes para a resolução e elaboração de problemas. Na competência específica 5, nota-se a habilidade de investigar pontos de máximos e mínimos de funções quadráticas. As tabelas 6.1, 6.2 mostram uma leitura do retrato das habilidades mais interligadas ao projeto de pesquisa pautado na BNCC, conforme cada competência específica da área de Matemática.

No Ensino Médio, o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Para que os propósitos de formular e resolver problemas em diversos contextos com maior autonomia e usando os recursos matemáticos necessários, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base na discussão e verificação conjunta, devem aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais elaborados.

E tratando da temática resolução de problemas, o autor George Polya¹ elucida

¹George Polya foi um matemático húngaro que viveu de 1887 a 1985. Professor na Universidade de Stanford, fez contribuições fundamentais em Análise Combinatória, Teoria dos Números, Análise

no seu livro *How to Solve It*, traduzido para o português com o título *A Arte de Resolver Problemas* [16], algumas ideias heurísticas, que na opinião do autor, essas ideias podem ajudar alunos e professores interessados na resolução de problemas matemáticos.

Unidades Temáticas	Competência Específica	Habilidades
Número e Álgebra	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Geometria e Medidas	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
Geometria e Medidas	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Tabela 6.1: Competências e habilidades para abordagem do tema Otimização para o 1º ao 3º ano do Ensino Médio.

Unidades Temáticas	Competência Específica	Habilidades
Número e Álgebra	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1 ^o ou 2 ^o graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
Números e Álgebra	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2 ^o grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
Números e Álgebra	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Tabela 6.2: Competências e habilidades para abordagem do tema Otimização para o 1^o ao 3^o ano do Ensino Médio.

Procurando organizar um pouco o processo de resolução de problemas, George Polya o dividiu em quatro etapas. As etapas desse processo citado em seu livro [16] são: Compreender o problema; Estabelecimento de um plano; Execução do plano; Reflexão da solução. Para o autor, a metodologia de ensino apresentada no seu livro contribui para que os alunos possam desenvolver estruturas cognitivas de qualidade. O autor sugere que se faça uma reflexão e adote princípios sobre a arte de resolver problemas para melhorar a qualidade das aulas de Matemática.

No livro de cálculo diferencial do autor James Stewart [19], página 294, o autor fala dos métodos abordados no capítulo para encontrar os valores extremos em situações problemas do dia a dia. O autor cita ainda que na solução destes problemas, o maior desafio é converter o problema em um problema de otimização matemática,

determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada.

O autor Stewart menciona os princípios da resolução de problemas que foram discutidos no livro e faz adaptações para as situações problemas que envolvem o tema de Otimização. Fazendo uma ponte com as etapas citadas por Polya em seu livro para a resolução de problemas matemáticos, é possível ver semelhança com que o autor escreveu no livro em 1978 com as etapas apresentadas por Stewart. O marcante nessas etapas é que o aluno possa compreender o problema, elaborar um diagrama (podemos dizer planejar a solução) e introduzir uma notação para as grandezas a serem determinadas.

Problemas de Otimização são presentes no dia a dia de qualquer ser humano e, encontrar uma maneira de achar a melhor solução para eles, faz com que a justificativa de resolver problemas matemáticos seja foco no Ensino Médio dos discentes. Conforme a BNCC, que reitera que resolver e elaborar problemas é essencial para a formação humana integral dos estudantes, as etapas sugeridas por Pólya em seu livro podem ser usadas no cotidiano dos alunos para que eles possam resolver várias situações. Sendo assim, os verbos compreender, planejar, resolver e refletir são essenciais para que os alunos desenvolvam um raciocínio lógico-dedutivo dentro dessa área aplicada da Matemática: Otimização.

6.1 Sequência didática: resolução de problemas de otimização

O conceito de sequência didática, nada mais é que uma forma de organizar de forma sequencial a execução das atividades e a definição clara de um objetivo de ensino-aprendizagem. Partindo desse princípio, a elaboração de uma sequência didática, e estruturado na BNCC, foram retirados de alguns livros didáticos enviados para as escolas estaduais do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) do ano de 2021, problemas de otimização e aplicações ao estudo de funções quadráticas. As escolhas desses problemas foram a base para a elaboração do roteiro da sequência didática deste trabalho. Esses problemas podem ser encontrados nos livros do Dante et. al [4], Logen et. al [12], Souza [18], Bonjorno et. al [1].

Dentro da área do conhecimento de Matemática e suas Tecnologias, a habilidade de investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas, expressa na competência número 5 da BNCC, foi elaborada uma sequência didática composta por 4 (quatro) atividades. Essas atividades poderão ser aplicadas aos alunos do terceiro ano do ensino médio. A sequência didática que é composta por quatro atividades, inicia com a aplicação de uma atividade de nivelamento para identificar os conhecimentos dos alunos. Essa atividade será a motivadora para o trabalho das outras três atividades da sequência didática. O planejamento para essa sequência didática é para um total de seis aulas de 50 minutos, podendo variar de acordo com a realidade da turma.

A pandemia de COVID-19 mudou a vida social por meio de medidas de quarentena, impactando diretamente na Educação. Essa nova realidade no ao longo de 2020 e 2021 impactou na interrupção das aulas presenciais. Com essa nova realidade, a

sequência didática proposta no projeto tinha como cronograma a execução no ano de 2021. Devido à pandemia de COVID-19, a aplicação não foi possível devido a vários fatores para execução das aulas síncronas como: falta de equipamentos como computadores, *tablets*, *smartphones* modernos que possuem memória para o armazenamento de aplicativos, acesso à internet banda larga, acesso à internet somente por banco de dados dentre outros.

6.2 Descrição da sequência didática

Conteúdos abordados: Equações do 2º grau. Função quadrática.

Tema: Problemas de máximo ou mínimo de função quadrática.

Justificativa: A resolução de problemas que abordam o estudo de máximo ou mínimo de função, neste caso, determinar os extremos de uma função, poderá ajudar os discentes à compreensão de fenômenos do seu contexto social e permitirá que eles criem relações interculturais. Portanto, abordar problemas de otimização e suas aplicações ao estudo de funções pode despertar o interesse dos alunos do Ensino Médio para a Matemática. O tema é proposto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio em que “Resolver e Elaborar Problemas” devem estar presentes na formação dos alunos.

Competências da BNCC:

Competência específica 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Competência específica 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Objetivos:

- Consolidação, ampliação e aprofundamento das aprendizagens essenciais do Ensino Fundamental.
- Construção de uma visão integrada da Matemática aplicada à realidade, em diferentes contextos.
- Desenvolver o raciocínio hipotético-dedutivo.
- Retomar a resolução de equações do 2º grau vista no Ensino Fundamental.
- Compreender o conceito de função quadrática.
- Utilizar funções quadráticas para modelar e resolver problemas em contextos diversos.
- Construir gráficos de funções quadráticas com e sem recursos digitais.
- Compreender o que é vértice da parábola e investigar ponto de máximo ou de mínimo de funções quadráticas.

Público-alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Recursos: Serão usados como recursos os instrumentos como o quadro branco, folhas de papel, livro didático, computador, Datashow, celular.

Avaliação: Ao final de cada aula das atividades propostas ou quando do término do processo de ensino-aprendizagem a avaliação ocorrerá de forma processual ou de forma participativa para a verificação da consolidação dos conhecimentos dos alunos.

Cronograma:

1ª ATIVIDADE: Na primeira aula será aplicada a atividade de nivelamento para identificar os conhecimentos prévios que servirão como pré-requisitos para o estudo do tema da dissertação. Essa atividade abordará os conteúdos: números racionais, potenciação, números irracionais, expressão algébrica, cálculo do valor numérico de expressões algébricas, equação do 2º grau, sistema de equação do 2º grau, área de figura plana, plano cartesiano, função afim, função quadrática.

2ª ATIVIDADE: Na segunda atividade da sequência didática, a proposta é fazer a correção da atividade de nivelamento aplicada à turma na primeira aula, bem como um momento para esclarecimento de dúvidas dos alunos. Será também uma oportunidade para trabalhar conteúdos que os alunos não estudaram no Ensino Médio, ou então, que não consolidaram no Ensino Fundamental. O planejamento dessa atividade irá requerer duas aulas de 50 minutos.

3ª ATIVIDADE: A quarta aula, que corresponde à terceira atividade, tem por objetivo, por meio de uma aula expositiva, apresentar um exemplo de problema de otimização, no qual o modelo matemático para a situação é a obtenção do ponto de máximo de uma função quadrática. A situação problema que será a motivadora para o discurso foi abordada na atividade de nivelamento, questão de número 5 (cinco). O planejamento para essa aula abordará a metodologia empregada no livro de Pólya para a resolução de problemas. A aula terá dois momentos. O primeiro será com a resolução de dois problemas com o emprego dos passos apresentados no livro de Pólya e o segundo momento será pedido aos alunos que resolvam a atividade de nivelamento número onze usando os passos apresentados nos dois exemplos. Após aplicação da metodologia do autor Pólya, espera-se que o aluno encontre como resposta a alternativa D (dimensões 15 metros e 30 metros). A duração dessa terceira atividade será de duas aulas de 50 minutos.

Problema 1: (Livro [19], página 294) Um fazendeiro tem 1.200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

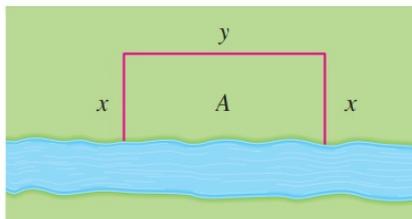
Seguindo as quatro etapas de George Polya para a resolução de problemas, elucidada no seu livro “A arte de resolver problemas” [16], vamos organizar o processo da resolução da situação problema. As etapas serão apresentadas aos alunos para que eles possam no subconsciente mentalizar o processo para resolver problemas de otimização.

1. **Compreender o problema:** o aluno, após ler cuidadosamente até que seja entendido claramente o problema, deve fazer as seguintes inferências: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
 - (a) **O que é dado no problema?** É dado no problema a metragem de 1.200 metros para cercar o campo retangular, sem a necessidade de cercar ao longo do rio.
 - (b) **O que é desconhecido?** As dimensões do campo retangular.
 - (c) **O que se pede?** As dimensões do campo para que ele tenha a maior área.
2. **Estabelecer um plano:** O aluno deverá fazer um desenho e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama, sendo x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros), respectivamente, conforme a Figura 6.1.

Observando o desenho com as quantidades desconhecidas, deseja se maximizar a área A do retângulo. Então, deverá expressar a área A em termos de x e y : $A = xy$ (I). O outro passo agora é usar informação de que o comprimento total da cerca é de 1.200 m. Essa informação representa o perímetro do retângulo, desconsiderando o lado do campo em torno do rio. Logo, $2x + y = 1200$ (II) é perímetro do campo.

3. **Executar o plano:** Queremos expressar a área A como uma função de apenas uma variável, assim, eliminamos y expressando-o em termos de x . Munidos

Figura 6.1: Caso geral do problema 1.



Fonte: STEWART, 2013, p. 295.

da equação (I) e (II) da etapa anterior, o aluno deverá montar o sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 1200 \Rightarrow y = 1200 - 2x \\ A = xy = x(1200 - 2x) = 1200x - 2x^2 \text{ (III)} \end{cases}$$

Sobre a equação (III), $A(x) = 1200x - 2x^2$, que representa uma função quadrática, o aluno deverá determinar o ponto extremo, isto é, determinar o vértice da parábola, dado por $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$. Assim:

$$\begin{cases} x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1200}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1200}{-4} = 300 \\ y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-[1200^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0]}{4 \cdot (-2)} = 180.000 \end{cases}$$

Assim, o campo retangular deve ter 300 m de profundidade e 600 m de extensão para ter a área máxima de 180.000 m².

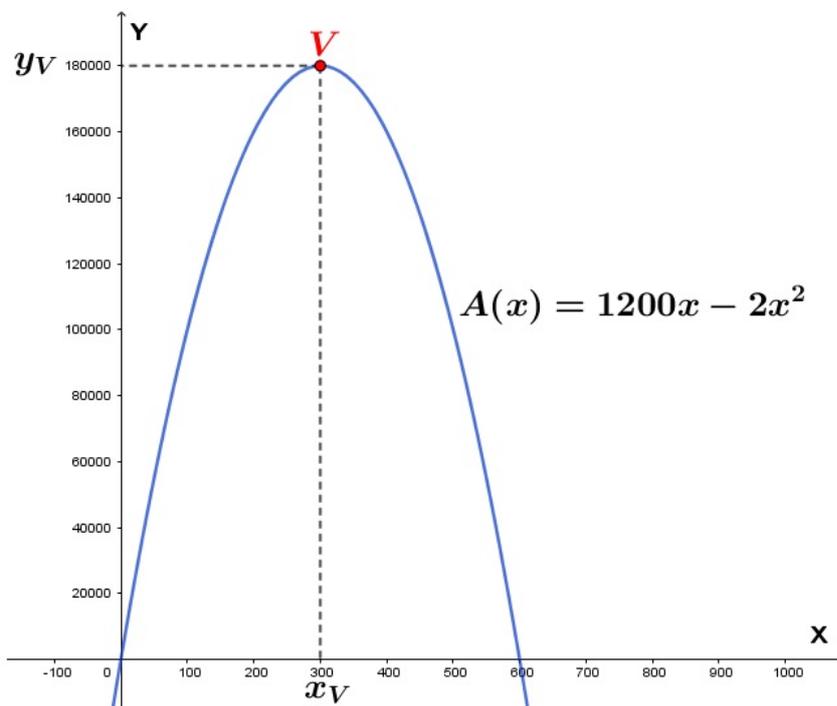
4. Verificar (refletir) a solução:

A partir da lei de formação da função quadrática, $A(x) = 1200x - 2x^2$, o gráfico da função poderá ser construído, para a constatação do vértice da parábola, que é $V = (300, 180.000)$. O aluno poderá usar a *software* GeoGebra ou fazer um esboço com os conhecimentos já adquiridos. Ver o gráfico na figura 6.2.

Problema 2: (Livro [4], página 116) A trajetória da bola, em um chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que a medida do comprimento de altura h , em metros, e t segundos após o chute, seja dada por $h = -t^2 + 6t$, responda aos itens.

- Em que instante a bola atinge a medida de comprimento de altura máxima?
- Qual é a medida de comprimento de altura máxima atingida pela bola?

Para a solução desse problema, iremos adotar as etapas mencionadas no livro de Polya, conforme exemplo seguido no problema 1. Assim:

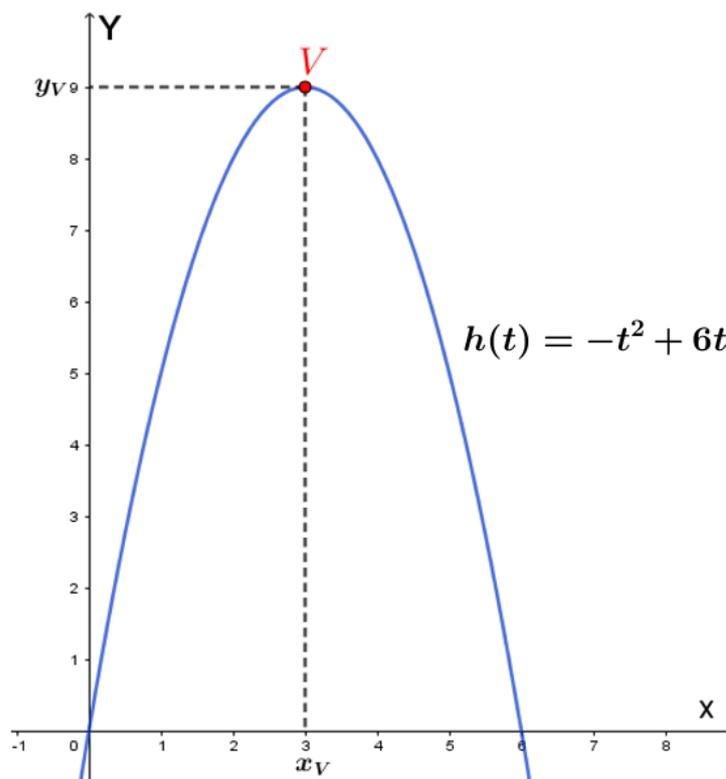
Figura 6.2: Gráfico da função $A(x) = 1200x - 2x^2$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

1. **Compreender o problema:** o aluno, após ler cuidadosamente até que seja entendido claramente o problema, deve fazer as seguintes inferências: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
 - (a) **O que é dado no problema?** É dado no problema a função quadrática $h = -t^2 + 6t$.
 - (b) **O que é desconhecido?** A altura h que a bola atinge em metros e o tempo (instante) t em segundos após o chute.
 - (c) **O que se pede?** No item (a), pede o instante que a bola atinge a altura máxima e no item (b), pede a altura máxima atingida pela bola.
2. **Estabelecer um plano:** O aluno deverá fazer o esboço do gráfico da função quadrática $h(t) = -t^2 + 6t$ e observar que os dados que são desconhecidos é o vértice, $V = (t_V, h_V)$, da função h .
3. **Executar o plano:**
 - 3.1. **Item a:** conforme a leitura do gráfico no passo anterior, o dado solicitado, o instante que a bola atinge a altura máxima, é a coordenada $x_V = t_V$. Assim temos:

$$t_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

Logo, a bola atinge a altura máxima no instante $t = 3$ segundos.

Figura 6.3: Gráfico da função $h(t) = -t^2 + 6t$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

- 3.2. **Item b:** conforme a leitura do gráfico, o dado solicitado, o comprimento que a bola atinge a altura máxima, é a coordenada $y_V = h_V$. Assim temos:

$$t_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-[6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0]}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9.$$

Portanto, a medida do comprimento da altura máxima atingida pela bola é $h = 9$ metros.

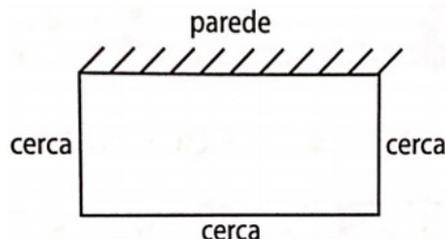
4. **Verificar (refletir) a solução:** A partir do esboço do gráfico da função quadrática construída no passo 2, utilizando o software Geogebra, concluí-se que o ponto máximo atingido pela bola é o vértice da função e as coordenadas do vértice determina as medidas pedidas nos itens do problema. Pode verificar que quando o $t_V = 3$ segundos, o valor de $h_V(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9$ metros é altura máxima.

2º momento da 3ª Atividade:

Atividade do teste nivelamento, questão 11: Murilo comprou 60 metros de cerca para fazer um cercado em formato de retângulo para seu cachorro no quintal de sua moradia. Ele vai aproveitar uma parede como um lado do cercado de acordo com

a figura a seguir. Sabendo que ele vai utilizar toda a cerca comprada, quais são as medidas do retângulo de forma que a área cercada seja a maior possível?

- A) dimensões de 12,5 m e 15 m.
- B) dimensões de 12,5 m e 35 m.
- C) dimensões de 15 m e 22,5 m.
- D) dimensões de 15 m e 30 m.



Fonte: Bonjorno et. al, 2020, p. 135.

4ª ATIVIDADE: A execução da quarta atividade que corresponde à quinta e à sexta aulas ministradas aos alunos, seguirá o seguinte planejamento: os alunos irão receber uma lista contendo 3 problemas por aula. Eles terão uma média de 20 minutos para resolverem os exercícios. Após esgotado o tempo, será feito um levantamento de quais problemas os alunos conseguiram resolver, quais as dúvidas encontradas. Após a coleta das informações, serão resolvidos no quadro branco os problemas da lista. Esta atividade será dividida em duas aulas de 50 minutos, sendo que cada aula irá seguir o planejamento descrito para a quarta atividade.

Tais exercícios, para os alunos resolverem são questões retiradas de alguns vestibulares, como o IFMG, UEMG e do Enem e eles estão nos livros do Ensino Médio.

1ª Questão: (Livro [10], página 156) Com 80 metros um fazendeiro deseja cercar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

Comentário: O primeiro exercício da quarta atividade é para que os alunos possam aplicar os passos seguidos para a resolução de um problema, visto na 3ª Atividade da sequência didática. O grau de dificuldade da questão é de nível baixo, devido o modelo da solução já ter sido apresentada aos alunos. A resolução da atividade é a mesma do problema 1 da sequência didática. Tem-se por objetivo que os alunos sigam

os passos demonstrados nela. A resposta da atividade é: dimensões do retângulo 20 metros e 40 metros.

2ª Questão: (IFMG 2013) O gerente de um estabelecimento comercial observou que o lucro (**L**) de sua loja dependia da quantidade de clientes (**c**) que frequentavam o mesmo diariamente. Um matemático analisando a situação estabeleceu a seguinte função:

$$L(c) = -c^2 + 60c - 500$$

Qual seria o número de clientes necessário para que o gerente obtivesse o lucro máximo em seu estabelecimento?

- A) 28.
- B) 29.
- C) 30.
- D) 32.
- E) 34.

Comentário: O objetivo do exercício é que os alunos reconheçam que a função dada é uma função quadrática e que eles determinem o vértice da parábola. O grau de dificuldade do exercício é nível baixo. O vértice da parábola da função dada é $V = (30, 400)$. A resposta do problema é a alternativa C.

3ª Questão: (Livro [12], página 95) (ENEM PPL 2009) Uma empresa vendia, por mês, 200 unidades de certo produto ao preço de R\$ 40,00 a unidade. A empresa passou a conceder desconto na venda desse produto e verificou-se que a cada real de desconto concedido por unidade do produto implicava na venda de 10 unidades a mais por mês. Para obter o faturamento máximo em um mês, o valor do desconto, por unidade do produto, deve ser igual a

- A) R\$ 5,00.
- B) R\$ 10,00.
- C) R\$ 12,00.
- D) R\$ 15,00.
- E) R\$ 20,00.

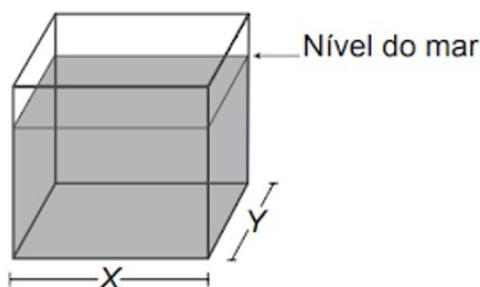
Comentário: O objetivo do exercício é trazer uma situação problema que pode ser vivenciada no dia a dia do aluno. O grau de dificuldade do exercício é nível alto. O aluno deverá perceber que se trata de um problema de otimização e, neste caso, determinar o x_V da parábola. A estratégia para a resolução é a informação que o faturamento da empresa é o preço unitário vezes a quantidade vendida, podendo escrever a função $f(x)$ que fornece o faturamento em função do desconto. Espera-se que o aluno possa chegar na função $f(x) = (40 - x) \cdot (200 + 10x)$, sendo a variável x o valor do desconto em reais. A função obtida é uma função quadrática e o valor do desconto para o faturamento máximo corresponde à coordenada do x_V . Portanto, a resposta do exercício é a alternativa B (R\$ 10,00).

4ª Questão: (Livro [1], página 135) (UEMG) Suponha que numa fábrica de barras de chocolate o custo total da produção, em reais, é dado por $C(x) = x^2 - 20x + 600$, em que x é a quantidade de barras produzidas. Nesse caso, é CORRETO afirmar que:

- A) a produção de 10 barras é a que proporciona o custo mínimo da produção.
- B) quando são produzidas 20 barras, o custo total da produção é de R\$ 400,00.
- C) o custo máximo da produção é de R\$ 600,00.
- D) o custo mínimo da produção é de R\$ 650,00.

Comentário: O objetivo do exercício é fazer assertivas sobre uma situação problema e os alunos julgarem se elas são verdadeiras ou falsas. As inferências sobre as assertivas estão relacionadas a valores de máximo, ou mínimo, da abscissa ou da ordenada da função quadrática dada. O grau de dificuldade é nível médio. A resposta do exercício é alternativa A.

5ª Questão: (ENEM [5], 2017) Viveiros de lagostas são construídos por cooperativas locais de pescadores em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marítima. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas na laterais.



Quais devem ser os valores de X e Y, em metros para que a área da base do viveiro seja máxima?

- A) 1 e 49.
- B) 1 e 99.
- C) 10 e 10.
- D) 25 e 25.
- E) 50 e 50.

Comentário: O exercício, como os demais dos cinco exercícios propostos, tem o objetivo de usar a metodologia de Pólya para resolvê-los. O exercício trabalha com a geometria espacial e a geometria plana, no qual deseja obter as dimensões da base do viveiro para tornar a área máxima. O grau de dificuldade é nível médio. Espera-se que o aluno use as mesmas estratégias usadas no primeiro exercício desta lista para resolver. A resposta do exercício é a alternativa D.

6ª Questão: (ENEM [5], 2020 Digital) Uma empresa de chocolates consultou o gerente de produção e verificou que existem cinco tipos diferentes de barras de chocolate que podem ser produzidas, com os seguintes preços no mercado:

- Barra I: R\$ 2,00;
- Barra II: R\$ 3,50;
- Barra III: R\$ 4,00;
- Barra IV: R\$ 7,00;
- Barra V: R\$ 8,00.

Analisando as tendências do mercado, que incluem a quantidade vendida e a procura pelos consumidores, o gerente de vendas da empresa verificou que o lucro L com a venda de barras de chocolate é expresso pela função $L(x) = -x^2 + 14x - 45$, em que x representa o preço da barra de chocolate. A empresa decide investir na fabricação da barra de chocolate cujo preço praticado no mercado renderá o maior lucro.

Nessas condições, a empresa deverá investir na produção da barra

- A) I.
- B) II.
- C) III.
- D) IV.
- E) V.

Comentário: Questão interessante do ENEM 2020 (aplicação digital) que trata sobre ponto extremo da função quadrática. O objetivo é que os alunos possam reconhecer que a função dada é uma função quadrática e que eles calculem o vértice da parábola. O grau de dificuldade do exercício é nível baixo. O vértice da parábola é $V = (7, 4)$ e com isso espera que o aluno julgue a alternativa D com o preço no mercado que irá gerar o maior lucro.

Considerações Finais

Por meio da pesquisa deste trabalho, pode-se perceber que o ensino da Matemática tem evidenciado grandes desafios, entres eles o despertar da consciência dos alunos para a disciplina. Levando em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, destaca-se a importância da referência ser a realidade dos alunos. Buscando situações problemas da vivência dos estudantes, deparamos com os problemas de otimização, comuns em nossa vida diária. Em Matemática, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca maximizar ou minimizar uma função através da escolha sistemática de valores de um conjunto. Portanto, esses problemas são aqueles para os quais envolvem o processo de encontrar a melhor solução para uma situação problema. Podemos verificar que existem diversas áreas de aplicação desses problemas, como a engenharia, biologia, economia e outras.

A pesquisa revelou que os problemas de otimização surgiram há muito tempo, como podemos ver na Grécia Antiga, no século III a.C. e, os gregos tinham interesse em compreender o “ótimo” de um determinado fenômeno. Com surgimento do Cálculo Diferencial, os problemas de otimização passaram a ser resolvidos de uma forma mais simples. Usando a derivada, as principais aplicações como a otimização, é uma excelente ferramenta para a resolução desses tipos de problemas. A trajetória do trabalho é o estudo formal do Cálculo Diferencial por meio da análise real de uma variável, como a ferramenta de sustentação para o professor. Mostramos que existe outra técnica para a resolução desses modelos de problemas, como o estudo de valores de máximos e mínimos de funções quadráticas. Essa técnica é empregada na escola pública para os alunos do Ensino Médio e teve o foco para a elaboração da sequência didática do trabalho.

A análise realizada dos problemas que envolvem as funções quadráticas, ao construir o gráfico da função, permite ao professor verificar que o vértice da parábola pode ser denominado o ponto de otimização, sendo ele ponto de máximo ou de mínimo. Neste contexto, o professor pode explorar o recurso da tecnologia em sala de aula, com o uso do software Geogebra [7] para a investigação dos conteúdos ministrados, pelo professor, sendo muito útil nas aulas de Matemática. O estudo de diversos problemas de otimização, sendo eles resolvidos com o uso do Cálculo Diferencial ou não é viável inseri-los em sala de aula no Ensino Médio, com a seleção

do professor e que eles trabalhem com a realidade dos alunos. Esses problemas permitem ao professor o trabalho de conceitos relacionados ao estudo de funções quadráticas, noções geométricas, noções de limites e derivadas, apesar desses dois últimos não serem parte da proposta do currículo do Ensino Médio, poderiam ser apresentados de forma simples e modesta no contexto do estudo das funções.

Acreditamos que a abordagem desenvolvida no corpo do trabalho das estratégias para a resolução de problemas, técnicas usadas por Polya, são essenciais e devem ser ministradas aos alunos do Ensino Médio para que eles possam consolidar as habilidades específicas do ensino, conforme é mencionada na BNCC [3]. Além disso, este documento reconhece que a educação deve afirmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade. Assim, acreditamos que formular, resolver problemas e criar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas é uma competência geral do documento, essencial para a formação humana dos alunos para despertar nos estudantes o interesse pela área da Matemática.

O projeto teve como foco a elaboração e aplicação de uma sequência didática para os alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública onde leciono. Devido à pandemia de COVID-19 que iniciou no ano de 2020 e delongou no ano de 2021, ano desenvolvimento da pesquisa, as aulas presenciais foram suspensas e o projeto não pode ser ministrado aos estudantes da escola. Os alunos são do turno noturno e a grande maioria não possui acesso à internet banda larga em casa. Fato constatado durante as tentativas de aulas síncronas pelo Google Meet ministradas aos alunos.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT visa ao aprimoramento de professores da Educação Básica com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para a docência. Sendo assim, o trabalho de conclusão final deve versar sobre temas pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica com impacto na sala de aula. A apresentação desenvolvida neste trabalho, consideramos o tema de extrema relevância para a formação dos estudantes e porque não para a Educação?

Como a pesquisa não pôde ser aplicada aos estudantes, a mesma ficará como um trabalho futuro a ser aplicado nos alunos e coletar dados para o aprimoramento da minha formação docente. Este trabalho fica como sugestão para os professores de Matemática aplicarem para seus alunos, contribuindo não só para o ensino e aprendizagem dos estudantes como também para os docentes seja da escola onde leciono ou de outras escolas.

O projeto de pesquisa foi desenvolvido com o objetivo de estabelecer perspectivas de conexão entre a realidade dos alunos às situações cotidianas vivenciadas por eles. Espera-se que o conteúdo deste estudo motive e desperte o interesse pela Matemática ministrada na Educação Básica.

Por fim, destaco que o presente estudo contribuiu significativamente e acrescentou muito em minha formação de professor e educador, espero que ele possa contribuir e acrescentar conhecimentos para a formação de professores de Matemática que tenham interesse e, após a leitura, estudo e apreciação deste trabalho, sintam-se motivados e motivadas a se interessarem pelo tema e a proposta desta pesquisa.

Atividade de Nivelamento

ATIVIDADE Nº 01 – ATIVIDADE DE NIVELAMENTO		
Professor: Rômulo Lúcio de Castro	Disciplina: Matemática	
Área do Conhecimento: Matemática e suas Tecnologias	Ensino Médio	Turma: 3º ano
Nome:	Data: ___/___/___	AULA 1

INSTRUÇÕES PARA ATIVIDADE:

- Faça sua atividade lendo atentamente cada questão antes de dar as respostas.
- Os cálculos deverão constar na atividade para correção do professor.
- Faça a revisão da sua atividade antes de entregá-la.

QUESTÃO 1: Marque a alternativa **CORRETA** que representa o resultado da expressão abaixo:

$$(-2)^3 + 3^2$$

- A) -1.
- B) 0.
- C) 1.
- D) 12.

Comentário: O objetivo desse exercício é verificar se os alunos consolidaram as habilidades referentes aos conteúdos envolvendo números racionais e potenciação. Esses conteúdos irão subsidiar as operações envolvendo cálculo com valor numérico de expressões algébricas. O aluno poderá apresentar dificuldade na execução do exercício ao desenvolver a potenciação, devido a não compreensão da definição de potenciação de números racionais. O exercício será novamente abordado nas questões 3, 4, 11. A inclusão do exercício como sendo a primeira questão do teste de nivelamento é para não desestimular os alunos para as demais questões e verificar as habilidades necessárias nos outros conteúdos do teste.

QUESTÃO 2: (PROEB) Mauro efetuou a operação indicada com os números irracionais abaixo.

$$3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Mauro usou o valor aproximado de $\sqrt{2} \approx 1,41$ e $\sqrt{3} \approx 1,73$. Qual resultado que Mauro encontrou?

- A) 1,5.
- B) 2,5.
- C) 3,3.
- D) 4,2.

Comentário: A questão 2 do teste de nivelamento, os alunos deverão reconhecer os números irracionais, entender a diferença entre um número irracional e um número racional e realizar operações básica entre números racionais. A dificuldade que o aluno poderá encontrar nesse exercício é a realização das operações básicas envolvendo números racionais.

QUESTÃO 3: (PROEB) Dada a expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Sendo $a = 1$, $b = -7$ e $c = 10$, um valor numérico de x é

- A) -5 .
- B) -3 .
- C) -2 .
- D) 5 .

Comentário: A questão 3 do teste de nivelamento, os alunos deverão reconhecer a fórmula de Bhaskara e resolver as operações envolvendo cálculo com valor numérico de expressões algébricas. Eles poderão encontrar dificuldade nas operações envolvendo cálculo com valor numérico, porque poderão ter dúvidas na substituição dos valores dados a, b e c na expressão. Outro ponto importante que o aluno poderá ter dificuldade é a obtenção dos valores de x da expressão. Esse exercício vincula-se ao exercício posterior, no qual o aluno deverá resolver a equação do 2º grau, podendo usar a fórmula de Bhaskara.

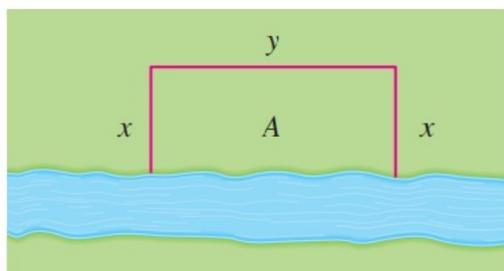
QUESTÃO 4: Quais são as raízes da equação do 2º grau abaixo:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

- A) $S = \{1, 4\}$.
- B) $S = \{1, -4\}$.
- C) $S = \{-1, 4\}$.
- D) $S = \{-1, -4\}$.

Comentário: Na questão 4 do teste de nivelamento, os alunos deverão reconhecer a equação dada como sendo uma equação do 2º grau e determinar as raízes dela. O aluno que identificar que a expressão dada na questão 3 do teste é a fórmula de Bhaskara, poderá usá-la para determinar as raízes da equação. Este exercício está linkado ao conteúdo de função quadrática, no qual os alunos irão deparar com estas operações.

QUESTÃO 5: Um fazendeiro tem 1.200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Ele quer descobrir quais são as dimensões do campo que tem maior área. Veja a ilustração abaixo. O sistema de equações do 2º grau que melhor representa a situação é:



A) $\begin{cases} 2x + y = 1200 \\ A = x(1200 - 2x) = 1200x - 2x^2 \end{cases}$

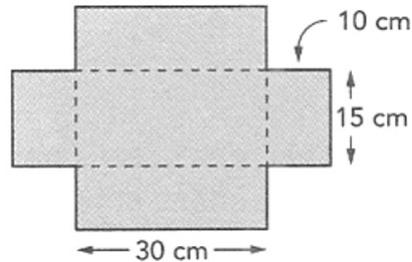
B) $\begin{cases} 2x + 2y = 1200 \\ A = x(600 - 2x) = 600x - x^2 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + y = 1200 \\ A = x(1200 - x) = 1200x - x^2 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x + y = 600 \\ A = x(600 - x) = 600x - x^2 \end{cases}$

Comentário: A questão 5 do teste de nivelamento possibilita ao professor verificar se os alunos consolidaram as habilidades envolvendo os conteúdos de áreas de figuras planas, no caso, área de um retângulo, e a construção de sistema de equação do 2º grau dado por uma situação problema. O exercício não requer a resolução do sistema. A dificuldade que o aluno poderá encontrar nesta atividade é converter o problema na linguagem matemática, no caso, a construção do sistema de equação do 2º grau. A construção do modelo para a resolução do exercício é encontrada em vários exercícios envolvendo problemas de máximo ou mínimo de função quadrática. O exercício foi colocado no teste, porque será abordado na 3ª atividade da sequência didática. Ele é usado como motivador para a trabalhar as etapas dadas por Pólya para a resolução de problemas.

QUESTÃO 6: Para construir uma caixa aberta com a forma de um bloco retangular, Douglas recortou uma região poligonal como está indicado na figura, dobrou e colocou fita-crepe. Quantos centímetros quadrados de papelão ele usou?

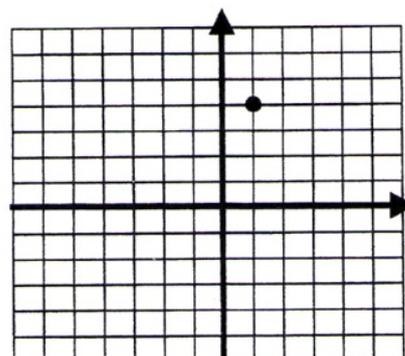


- A) 1600 cm².
- B) 1550 cm².
- C) 1500 cm².
- D) 1350 cm².

Comentário: A questão 6 do teste de nivelamento nos permite verificar se os alunos consolidaram as habilidades envolvendo os conteúdos de áreas de figuras planas. O aluno poderá ter dificuldade para determinar a área da figura poligonal, caso não decida em dividir a região em várias figuras planas conhecidas, como o retângulo. Este exercício pode ser explorado pelo professor como um problema de otimização, no qual deseja determinar o custo mínimo de material para produção da caixa.

QUESTÃO 7: (SIMAVE) No Sistema de Coordenadas Cartesianas, cada ponto é representado por um par ordenado, onde o primeiro número é chamado de abscissa (na horizontal), e o segundo é chamado de ordenada (na vertical), e estes estão localizados no plano em ordem crescente de valores, tanto na horizontal quanto na vertical. No plano abaixo, cada quadradinho representa uma unidade e nele está a marcação do ponto que representa a casa de Carla. Ela possui quatro amigas que moram em chácaras: Adriana, Márcia, Paula e Rita. Se você marcar os pontos que representam a localização dessas chácaras, observando a distância dessas à casa de Carla, poderá responder à seguinte pergunta: sabendo-se que Carla recebeu a visita da amiga que mora mais próximo dela, quem a visitou?

- A) Márcia.
- B) Adriana.
- C) Rita.
- D) Paula.



Localização das chácaras:

- Ponto (5,0) Adriana
- Ponto (-2,4) Márcia
- Ponto (5,4) Paula
- Ponto (-1,-4) Rita

Comentário: O objetivo do exercício 7 é que os alunos possam localizar pontos em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada, a partir de suas coordenadas ou vice-versa. E também que o aluno possa reconhecer as coordenadas de um ponto dado em um plano cartesiano com o apoio de malha quadriculada. O aluno poderá ter dificuldade ao interpretar as coordenadas do ponto, ou seja, $P = (x,y)$, no qual a primeira coordenada refere-se ao eixo da abscissa e a segunda coordenada refere-se ao eixo da ordenada. O exercício tem a finalidade de preparar o aluno para construção dos gráficos das funções, sendo importante a representação dos pontos no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

QUESTÃO 8: Dada a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 6$. Marque a alternativa que corresponde o valor da função $f(-3)$.

- A) -15.
- B) -12.
- C) 0.
- D) 12.

Comentário: O objetivo do exercício 8 é que os alunos possam determinar o valor de uma função afim, dada sua lei de formação. O exercício também alcança o mesmo objetivo do exercício 3, proposto no teste de nivelamento. O aluno poderá usar a habilidade desse exercício para determinar o valor extremo da função quadrática conhecendo o valor do ponto extremo.

QUESTÃO 9: Uma função Afim e uma função Quadrática tem como gráfico, respectivamente:

- A) Uma reta e uma elipse.
- B) Uma curva e uma reta.
- C) Uma reta e uma parábola.
- D) Uma reta e uma hipérbole.

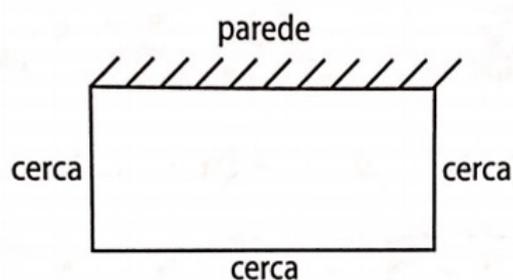
Comentário: O objetivo do exercício 9 é que os alunos possam reconhecer que o gráfico da função afim é uma reta e o gráfico da função quadrática é uma parábola. A elaboração desse exercício possibilita aos alunos, construir o gráfico da função afim ou quadrática, reconheça a sua curva e possa localizar corretamente os pontos.

QUESTÃO 10: O cálculo da tarifa de táxi em Belo Horizonte, da bandeira 1, é calculada aproximadamente obedecendo a uma função afim com lei de formação $\mathbf{P(x) = 4,70 + 2,90x}$, em que $\mathbf{P(x)}$ é o preço pago, em reais, e \mathbf{x} representa o valor da quantidade de quilômetros rodados. Se um passageiro pagou R\$ 36,60, o táxi percorreu

- A) 8 km.
- B) 9 km.
- C) 10 km.
- D) 11 km.

Comentário: O objetivo do exercício 10 é resolver e elaborar problemas utilizando o conceito de função afim e algumas propriedades. A abordagem do exercício no teste é para a construção das soluções dos exercícios abordados na 4ª atividade da sequência didática. A dificuldade que poderá ser encontrada na execução do exercício pelo aluno é na resolução da equação do 1º grau encontrada e a operação da divisão de números racionais, no caso, a divisão $x = \frac{36,60 - 4,70}{2,90}$.

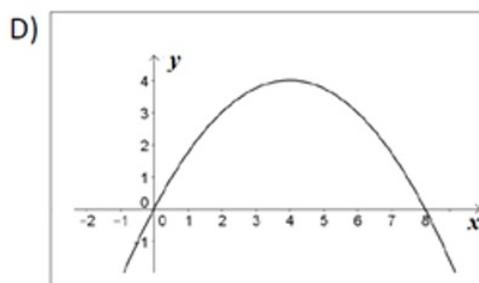
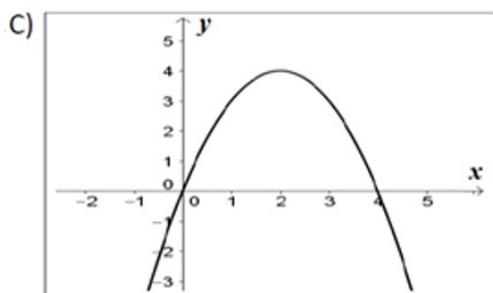
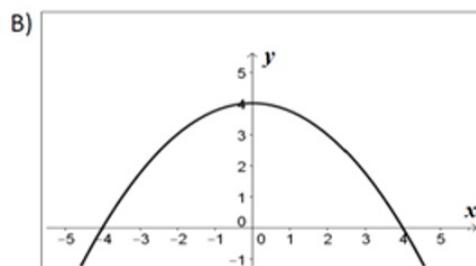
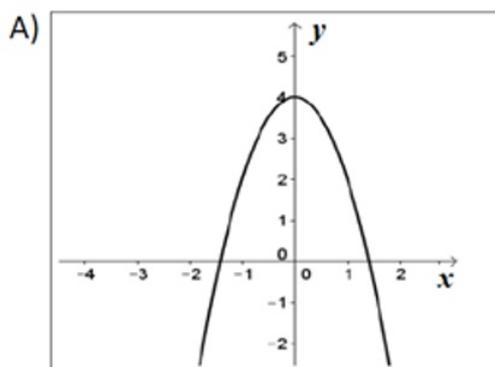
QUESTÃO 11: Murilo comprou 60 metros de cerca para fazer um cercado em formato de retângulo para seu cachorro no quintal de sua moradia. Ele vai aproveitar uma parede como um lado do cercado de acordo com a figura a seguir. Sabendo que ele vai utilizar toda a cerca comprada, quais são as medidas do retângulo de forma que a área cercada seja a maior possível?



- A) dimensões de 12,5 m e 15 m.
- B) dimensões de 12,5 m e 35 m.
- C) dimensões de 15 m e 22,5 m.
- D) dimensões de 15 m e 30 m.

Comentário: A questão 11 do teste de nivelamento tem como objetivo compreender o que é o vértice da parábola e investigar ponto de máximo ou de mínimo de funções quadráticas. A construção de um plano para a resolução do problema poderá ser uma das dificuldades encontradas pelos alunos. Outra dificuldade que o aluno poderá encontrar é a compreensão do que o problema pede para determinar. Uma das grandezas desconhecidas, que é a medida do retângulo para obter a área máxima, representa uma coordenada do vértice da função quadrática, sendo a outra coordenada do vértice o valor da área máxima da cerca. A construção dos exercícios do teste de nivelamento seguiu a ordem para a construção de ferramentas e conhecimentos, por parte dos alunos, para a obtenção da solução do exercício. O exercício será retomado no 2º momento da 3ª atividade da sequência didática.

QUESTÃO 12: Um chute em uma bola foi dado da linha de fundo do campo. O lançamento alcançou a altura máxima de 4 m e uma distância com essa mesma medida. O gráfico que representa essa situação é



Comentário: A última questão do teste de nivelamento tem como conteúdo a ser destacado: reconhecer o valor máximo de uma função quadrática representada graficamente e o eixo de simetria da parábola. O aluno, na resolução deste exercício, pode encontrar dificuldade na compreensão do enunciado e transferir os dados do problema para a montagem do gráfico da função quadrática.

Bibliografia

- [1] Bonjorno, J. R., Júnior, J. R. G. e Souza, P. R. C. de. *Prisma matemática: conjuntos e funções*. 1ª Ed. FTD, 2020.
- [2] Boyer, C. B. e Merzbach, U. C. *História da matemática*. Editora Blucher, 2019.
- [3] BRASIL. “Base Nacional Comum Curricular”. *MEC* (2018). URL: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_ELEF_110518-versaofinal_site.pdf (acesso em 31 de jul. de 2021).
- [4] Dante, L. R. e Viana, F. *Matemática em Contextos: função afim e função quadrática*. 1ª Ed. Ática, 2020.
- [5] ENEM. *Exame Nacional do Ensino Médio*. INEP. Ministério da Educação. Disponível em: <<http://www.enem.inep.gov.br/>>. Acesso em outubro de 2021.
- [6] Eves, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora Unicamp, 2004.
- [7] GEOGEBRA. *GeoGebra*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>> acesso em setembro de 2020.
- [8] Iezzi, G. e Murakami, C. *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 1*. 8ª Ed. Editora Atual, 2004.
- [9] Lima, E. L. *Funções de Uma Variável*. 10ª Ed. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2008, p. 195.
- [10] Lima, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. Vol. 1. SBM, 2006.
- [11] Lomas, F. H. “Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio”. Diss. de mest. Universidade de São Paulo, jun. de 2016, p. 51.
- [12] Longen, A., Freitas, L. M. T. de e Blanco, R. M. *Interação matemática: as unidades de medida e a resolução de problemas por meio de função do 2º grau*. 1ª Ed. Brasil, 2020.
- [13] Macêdo, J. A. de, Lopes, L. d. R. P. e Souza Gusmão, L. de. “Resolução de problemas de otimização nas aulas de Matemática”. *Educação Matemática Debate* 2.4 (2018), pp. 100–115.
- [14] Neto, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. 1ª Ed. Coleção PROFMAT. SBM, 2015, p. 565.
- [15] Pitombeira, J. B. e Roque, T. M. *Tópicos de História da Matemática*. 2ª Ed. Coleção Profmat. SBM, 2019, p. 452.
- [16] Polya, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.
- [17] Santiago, A. E. E. e Astudillo, M. T. G. *Entre Euclides e a Actualidade: Um Problema de Otimização*. 2013. URL: <http://www.spiem.pt/eiem2013/wp-content/uploads/2013/05/GD3C5SantiagoAstudillo1.pdf> (acesso em 31 de jul. de 2021).
- [18] Souza, J. de. *Multiversos Matemática: funções e suas aplicações*. 1ª Ed. FTD, 2020.
- [19] Stewart, J. *Cálculo, volume I*. 7ª Ed. Cengage Learning, 2013.