



Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Campus São Paulo
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Avaliação do risco de contaminação com COVID-19: Um estudo através de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy

Renato Gondim Rios

São Paulo - SP, 2021

Renato Gondim Rios

Avaliação do risco de contaminação com COVID-19: Um estudo através de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo

Campus São Paulo

Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientadora: Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro Luiz

Coorientador: Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos

São Paulo - SP

2021

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

r586a	<p>Rios, Renato Gondim Avaliação do risco de contaminação com covid-19: um estudo através de um sistema baseado em regras fuzzy / Renato Gondim Rios. São Paulo: [s.n.], 2021. 68 f.</p> <p>Orientadora: Mônica Helena Ribeiro Luiz Co-orientador: Marco Aurélio Granero Santos</p> <p>Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2021.</p> <p>1. Modelagem Matemática. 2. Teoria dos Conjuntos Fuzzy. 3. Sistema Baseado Em Regras Fuzzy. 4. Covid-19. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.</p> <p>CDD 510</p>
-------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Renato Gondim Rios

Avaliação do risco de contaminação com COVID-19: Um estudo através de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. São Paulo - SP, 09 de dezembro de 2021.

**Profa. Dra. Mônica Helena Ribeiro
Luiz**
Orientadora

**Prof. Dr. Marco Aurélio Granero
Santos**
Coorientador

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
Membro interno

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
Membro externo

São Paulo - SP
2021

Dedico este trabalho aos meus pais Edvaldo e Maria Cristina que desde sempre me incentivaram a estudar cada vez mais e sou grato por isso.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pois sem Ele eu não estaria aqui.

Agradeço a minha esposa, Janaína, pelo apoio e incentivo em todas as horas, seja nas minhas frustrações, quando a escrita não fluía, ou nas alegrias, quando meus planejamentos davam certo.

Agradeço ao meu pai, Edvaldo, à sua esposa Lourdes, à minha mãe, Maria Cristina, e a seu marido Hildo, além dos meus irmão e irmãs Eduardo, Thaís e Carolina por entenderem quando não consegui estar presente em alguns compromissos para me dedicar ao mestrado.

Durante todo o percurso de meu trabalho, as aulas não seriam tão proveitosas e interessantes se não fossem os excelentes docentes que ministraram as aulas. Sou grato por ter conhecido e ter podido aprender com cada uma das professoras e professores do IFSP que lecionaram para a turma do PROFMAT-2019.

Agradeço também pelos colegas de curso: o apoio mútuo de todos foi essencial para que concluíssemos essa jornada.

Às professoras Alice Aguiar e Daniela Toffoli, meu muito obrigado pelas ajudas pontuais em língua portuguesa e, esta última, principalmente, pela revisão deste trabalho.

Agradeço aos docentes que compuseram a banca examinadora pelo tempo dedicado à leitura deste trabalho e pelas considerações apontadas.

E um agradecimento muito especial à minha orientadora professora Doutora Mônica Helena Ribeiro Luiz e ao meu coorientador professor Doutor Marco Aurélio Granero não só por terem me auxiliado na elaboração dessa dissertação e por todo o conhecimento compartilhado, mas pela sensibilidade que tiveram ao conduzir todo esse longo processo de escrita, quando, por vezes, até eu mesmo duvidava da sua conclusão.

“Tudo aquilo que o homem ignora, não existe para ele. Por isso o universo de cada um, se resume no tamanho de seu saber.”
(Albert Einstein)

Resumo

Neste trabalho é apresentado um modelo matemático fuzzy para avaliar o risco de contaminação pelo novo coronavírus SARS-CoV-2, causador da pandemia de COVID-19. Para isso, é elaborado um Sistema Baseado em Regras Fuzzy utilizando o método de inferência de Mamdani e o método de defuzzificação pelo centro de massa. São consideradas as variáveis de entrada febre, tosse, dispneia e mialgia, e a variável de saída é o risco de um indivíduo estar infectado com COVID-19. Uma vez que estas variáveis podem ser descritas por termos subjetivos, o modelo fuzzy elaborado é capaz de fornecer uma resposta satisfatória ao fenômeno estudado. A Modelagem Matemática amparou o desenvolvimento do trabalho no que diz respeito à construção do modelo proposto. Foram consideradas ainda, possibilidades de conexões da lógica fuzzy com o Ensino Básico tendo como referências as habilidades contidas na Base Nacional Comum Curricular.

Palavras-chaves: Sistema Baseado em Regras Fuzzy. Modelagem Matemática. COVID-19.

Abstract

In this work a fuzzy mathematical model is presented to evaluate the risk of contamination by the new coronavirus SARS-CoV-2, which causes the pandemic of COVID-19. For that, a Fuzzy Rule Based System is elaborated using the Mamdani inference method and the center of gravity defuzzification method. The input variables are fever, cough, dyspnea and myalgia, and the output variable is the risk of an individual being infected by COVID-19. Since these variables can be described by subjective terms, the elaborated fuzzy model is able to present a satisfactory response to the studied phenomenon. Mathematical Modeling supported the development of the work regarding the construction of the proposed model. Possibilities of connections between fuzzy logic and Basic Education were also considered, having as references the skills contained in the Common National Curriculum Base.

Keywords: Fuzzy Rules Based System. Mathematical Modeling. COVID-19.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama representando as etapas de um processo de modelagem. . . .	23
Figura 2 – Representação gráfica dos conjuntos fuzzy (a) A e (b) B do Exemplo 1.2.1.	26
Figura 3 – Representação gráfica dos conjuntos fuzzy (a) $A \cap B$ e $A \cup B$ e (b) A' dos Exemplos 1.2.2, 1.2.3 e 1.2.4, respectivamente.	28
Figura 4 – Representação do α -nível da função de pertinência σ_A	30
Figura 5 – Representação gráfica de um número triangular fuzzy.	31
Figura 6 – Representação gráfica dos números próximos de 100 do Exemplo 1.2.7.	32
Figura 7 – Representação gráfica de um número trapezoidal fuzzy.	33
Figura 8 – Representação gráfica do tempo de cozimento de feijões do Exemplo 1.2.8.	34
Figura 9 – Representação gráfica da adição entre os números fuzzy C e D	36
Figura 10 – Representação gráfica da subtração entre os números fuzzy C e D	36
Figura 11 – Representação gráfica da multiplicação do número fuzzy C pelo escalar -2	37
Figura 12 – Representação gráfica da multiplicação entre os números fuzzy C e D	38
Figura 13 – Representação gráfica da divisão entre os números fuzzy C e D	39
Figura 14 – Representação gráfica da classificação de pessoas de acordo com sua altura.	40
Figura 15 – Esquema geral de um controlador fuzzy.	41
Figura 16 – Método de Mamdani com composição <i>max-min</i>	43
Figura 17 – Distribuição fuzzy da variável de entrada Febre.	47
Figura 18 – Distribuição fuzzy da variável de entrada Tosse.	48
Figura 19 – Distribuição fuzzy da variável de entrada Dispneia.	49
Figura 20 – Distribuição fuzzy da variável de entrada Mialgia.	50
Figura 21 – Distribuição Fuzzy da Variável de Saída: Risco de Estar Contaminado.	51
Figura 22 – Representação gráfica das entradas e respectivas saídas do paciente fictício da Seção 2.4.	52
Figura 23 – Saída do SBRF considerando os sintomas apresentados.	53

Sumário

	INTRODUÇÃO	19
1	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
1.1	Modelagem Matemática	21
1.2	Teoria de Conjuntos Fuzzy	24
1.2.1	Conceitos Preliminares	25
1.2.2	Operações com Números Fuzzy	35
1.2.3	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	39
2	PROBLEMA APLICADO	45
2.1	Variáveis de entrada	46
2.1.1	Febre	46
2.1.2	Tosse	47
2.1.3	Dispneia	48
2.1.4	Mialgia	49
2.2	Variável de saída: Risco de um indivíduo estar contaminado	50
2.3	Base de regras	51
2.4	Exemplo: Paciente fictício	52
3	LÓGICA FUZZY E A BNCC	55
3.1	Ensino de Gráficos e a Teoria Fuzzy	58
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	REFERÊNCIAS	63
	ANEXO A – REGRAS FUZZY PARA O SBRF ELABORADO	67

Introdução

A pandemia de COVID-19, que assolou o mundo inteiro a partir de 2019, foi responsável pela morte de, pelo menos, 1,8 milhão de pessoas ao redor do mundo somente no ano de 2020. Porém, há estudos da Organização Mundial da Saúde (OMS) indicando que, neste mesmo ano, as mortes diretas e indiretas ocasionadas por essa doença estão em torno de 3 milhões. (WHO, 2021, p.5).

Além de entender o que causa a doença e como ocorre a transmissão entre os seres humanos, compreender as reações ocorridas no organismo torna-se válido a fim de evitar a propagação do vírus para outros indivíduos, ou seja, tendo conhecimento dos principais sintomas é possível inferir a possibilidade de ser um paciente sintomático afetado pela doença.

Os principais sintomas da COVID-19 têm uma subjetividade intrínseca a eles, ou seja, a sensação de se estar com um sintoma pode não ser passada com a precisão devida a quem a diagnostica. Portanto, buscar uma maneira de, considerando tal subjetividade, avaliar se os sintomas apresentados por um indivíduo indicam algum grau de estar infectado com COVID-19 é importante a fim de evitar a propagação do vírus.

Na Matemática, uma teoria que contempla a subjetividade dos elementos estudados é a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, apresentada inicialmente por Lotfi Asker Zadeh, em 1965 (BASSANEZI, 2002, p.3).

Nesta teoria, a ideia de que um elemento $x \in U$ ou $x \notin U$ é extrapolada para situações em que essa relação de pertinência não está bem definida, a exemplo, de quando termos vagos como “perto”, “longe”, “grande”, “pequeno” são utilizados.

Para isso, Zadeh definiu o grau de pertinência de um elemento a um conjunto. Em linhas gerais, é possível dizer que um elemento pode estar mais contido em um conjunto do que outro elemento. Explorando esse conceito, um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) surge com o intuito de, valendo-se de entradas fuzzy, modelar matematicamente uma situação, produzindo uma saída para o problema analisado.

Este trabalho, considerando a atualidade do tema da COVID-19, tem como objetivo principal elaborar um modelo baseado em regras fuzzy para avaliar a possibilidade de um indivíduo sintomático estar infectado com a doença.

Para isso, foi necessário realizar um levantamento bibliográfico dos principais sintomas da COVID-19 e metodologias que fossem capazes de quantificar esses sintomas. Um estudo sobre os conceitos envolvidos na Teoria dos Conjuntos Fuzzy também foi realizado, o que serviu de base para se chegar à definição e funcionamento de um Sistema

Baseado em Regras Fuzzy.

Pretende-se, também, sugerir formas de apresentar o tema da lógica fuzzy no Ensino Básico, uma vez que o tema é relevante devido à sua aplicabilidade. Para tal proposta é levantada a possibilidade de se fazer essa conexão por meio do ensino de gráficos, tema recorrente em vestibulares e que são muito úteis na comunicação visual dos estudos de um SBRF.

O trabalho está dividido em três capítulos, além da Introdução, Considerações Finais e Referências.

No Capítulo 1 é apresentada uma fundamentação teórica que subsidiou esse trabalho. A Seção 1.1 apresenta a Modelagem Matemática como um método científico de pesquisa, bem como as etapas de um processo de modelagem. A Seção 1.2 traz importantes definições acerca da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, essenciais para a proposta desta dissertação.

O Capítulo 2 alia as definições apresentadas no capítulo anterior para aplicá-las em um problema real do mundo atual: a avaliação do risco de se estar contaminado com a doença COVID-19. Para isso, elencaram-se as funções fuzzy de entrada e saída, complementando com uma situação hipotética para exemplificar.

No Capítulo 3 foram sugeridas possibilidades de trabalho da lógica fuzzy com o Ensino Básico, tendo como referencial principal a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Por último, são apresentadas as considerações finais sobre os estudos realizados, discutindo a importância da aplicação da lógica fuzzy em diferentes contextos, inclusive no Ensino Básico. Também foram levantadas possibilidades para trabalhos futuros.

1 Fundamentação Teórica

Neste capítulo serão apresentados dois dos temas centrais que norteiam esse trabalho: a Modelagem Matemática e a Teoria de Conjuntos Fuzzy. Para ambos os temas, foram pesquisadas e consultadas bibliografias de referência sobre os assuntos.

No que tange à Modelagem Matemática, esta dissertação baseou-se principalmente no trabalho de [Bassanezi \(2002\)](#). Neste caso, foi realizado um levantamento bibliográfico do que vem a ser Modelagem Matemática segundo o autor, o qual destaca duas concepções distintas da modelagem: metodologia de ensino e método científico de pesquisa. A segunda concepção foi adotada para esse trabalho pois se adequa ao estudo proposto nesta dissertação.

Sobre a Teoria de Conjuntos Fuzzy, foram utilizadas referências que contemplam conceitos preliminares deste conteúdo. Dentre as bibliografias consultadas, foram priorizados os trabalhos de [Barros e Bassanezi \(2006\)](#), [Gomes \(2009\)](#) e [Corcoll-Spina \(2010\)](#).

1.1 Modelagem Matemática

Esta seção trata sobre Modelagem Matemática como método científico de pesquisa, e está baseada no trabalho de [Bassanezi \(2002\)](#).

A Modelagem Matemática pode ser entendida como uma ferramenta capaz de representar matematicamente situações do cotidiano a fim de explicá-los ou entender o seu comportamento. É um recurso que vem sendo utilizado nas mais diversas áreas, como Economia, Engenharias, Física, ou ainda no estudo de crescimento populacional, tomadas de decisão etc., uma vez que permite fazer análises sobre os mais diversos fenômenos.

Uma característica da Modelagem Matemática é propiciar um estudo investigativo sobre o tema escolhido para se fazer a análise, pois assim é possível interpretar e estudar situações do cotidiano a partir da linguagem matemática.

É importante destacar que a Modelagem Matemática está relacionada a problemas reais, ou seja, identificam-se situações em que seja necessária uma análise mais detalhada para, com auxílio da matemática, realizar um estudo sobre tal situação.

Segundo [Bassanezi \(2002, p.16\)](#), “A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

O desenvolver da atividade de modelagem envolve buscar informações sobre a situação inicial, identificar e selecionar variáveis, elaborar hipóteses, realizar simplificações,

obter um modelo matemático, validá-lo e resolver o problema.

Porém, deve-se atentar que, por mais eficiente que a Modelagem Matemática possa ser, ela deve ser considerada sempre como uma aproximação da realidade, ou seja, há fatores que fazem com que os resultados apresentados não sejam exatos, todavia permitem tirar conclusões suficientemente boas para o que se deseja analisar.

De maneira sucinta, pode-se dizer que a Modelagem Matemática se apropria de um problema do mundo real e, após uma transcrição matemática desse problema, buscam-se soluções que podem explicar ou fazer projeções acerca do fenômeno escolhido para análise.

Essa dimensão da realidade pode se dar sob diversos exemplos, como o estudo sobre a dinâmica populacional (DELGADO; DINIZ, 2018) ou estudos relativos à saúde/enfermidades (CAETANO, 2010) ou, ainda, análises sobre consumo e fontes de água/alimentos (SILVA; SILVA; ATHAYDE JUNIOR, 2017) além de outros exemplos. Isso mostra como a Matemática pode estar inserida na sociedade e como a Modelagem Matemática é uma ferramenta importante nas análises de situações do cotidiano.

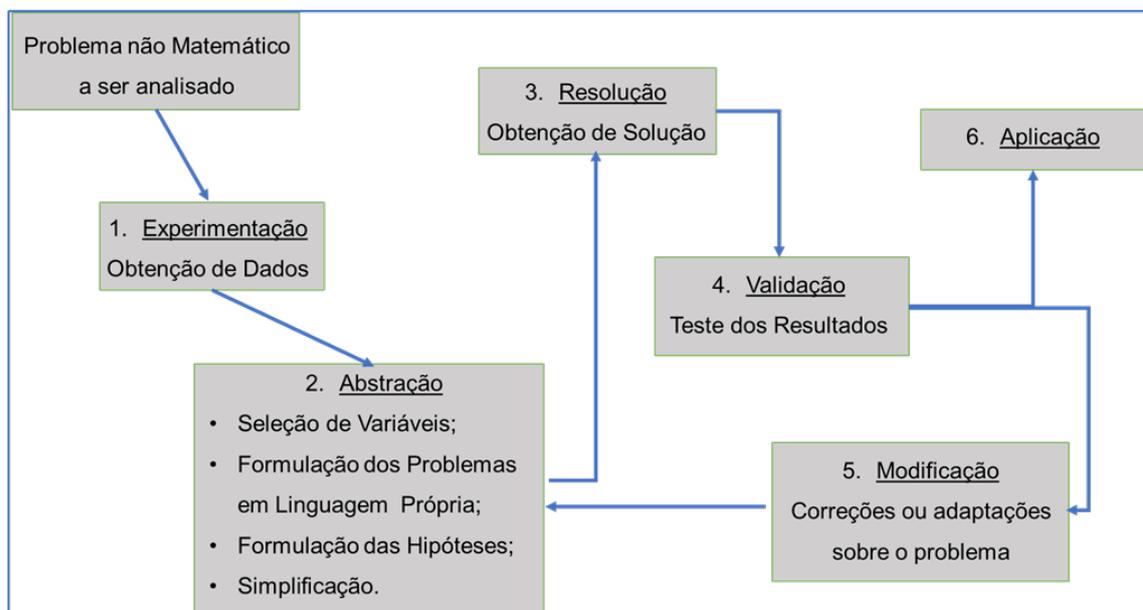
Para que ocorra o processo de Modelagem Matemática é necessário, primeiramente, estabelecer o modelo matemático, que é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (BASSANEZI, 2002, p. 20). E para que se tenha um modelo que possa representar de maneira fidedigna o fenômeno estudado, faz-se necessário o cumprimento de algumas etapas, pois, do contrário, a modelagem sugerida pode não ser eficiente para seu propósito. Tais etapas, como aponta Bassanezi (2002), são: Experimentação, Abstração, Resolução, Validação e Modificação, e são descritas a seguir.

1. **Experimentação:** fase em que se obtém os dados necessários para a modelagem. A boa seleção de dados que envolve o problema a ser estudado permite resultados mais confiáveis ao fim do processo;
2. **Abstração:** é a etapa na qual se originam os modelos matemáticos. Para isso, serão elencadas subetapas que ajudam a compor a Abstração. São elas:
 - (a) *Seleção das variáveis:* subetapa na qual são definidos os conceitos (variáveis) que serão utilizados para o estudo do problema;
 - (b) *Formulação dos problemas teóricos em uma linguagem própria da área em que se está trabalhando:* subetapa que possibilita a compreensão do problema a ser estudado;
 - (c) *Formulação das hipóteses:* subetapa na qual são estimadas possíveis soluções para o problema estudado;
 - (d) *Simplificação:* subetapa na qual os excessos gerados são postos de lado para que o problema seja tratável;

3. **Resolução:** etapa na qual se empregam os conhecimentos matemáticos e obtém-se uma solução matemática para o problema estudado. Isso quer dizer que essa tarefa, em algumas situações, pode se desvincular completamente da realidade modelada, uma vez que é possível notar uma quantidade de cálculos que em nada lembra o problema original;
4. **Validação:** etapa em que os resultados obtidos anteriormente são testados e comparados aos dados reais. É importante frisar que esses resultados podem ser aceitos ou não;
5. **Modificação:** diversos fatores podem fazer com que as soluções obtidas na etapa da Resolução possam não ser aceitas na etapa de Validação. Quando isso ocorre, o processo de Modificação surge para reparar ou, ainda, reanalisar o problema à luz desses novos fatores.

A Figura 1 representa as etapas citadas anteriormente, mostrando a sequência em que elas ocorrem. Vale destacar que, após o processo de Validação, já é possível seguir para a aplicação desses resultados no problema que estava sendo analisado.

Figura 1 – Diagrama representando as etapas de um processo de modelagem.



Fonte: Adaptado de Bassanezi (2002).

A etapa de Modificação aparecerá neste processo caso haja alguma falha ou até mesmo novos elementos que possibilitem obter outros resultados, logo, é necessário tratar os dados iniciais como um novo problema, gerando, assim, um novo percurso pelas etapas.

Pode-se notar, portanto, que o processo de Modelagem Matemática possui algumas etapas que devem ser satisfeitas para se atingir a um objetivo, a fim de produzir um conhecimento sobre o tema estudado.

A Modelagem Matemática como um método científico de pesquisa aparece como ferramenta para este trabalho, pois se vale do empirismo científico para estabelecer relações com a realidade e, dessa forma, poder entender o comportamento das situações estudadas.

Vale destacar que a Modelagem Matemática como método científico de pesquisa é relevante em alguns pontos. Conforme Bassanezi (2002, p.32):

- Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Pode ser um método para se fazer interporlações, extrapolações e previsões;
- Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade.

Esses tópicos foram destacados por serem importantes e fazerem sentido para a proposta deste trabalho.

Na próxima seção serão apresentados alguns conceitos da Teoria de Conjuntos Fuzzy necessários para o processo de modelagem proposto nesta dissertação.

1.2 Teoria de Conjuntos Fuzzy

Um conjunto, na Matemática, pode ser entendido como o agrupamento de elementos que possuam alguma semelhança. Por exemplo, os elementos do conjunto de números naturais menores que 5 são os números 0, 1, 2, 3 e 4. Logo, todos os elementos listados neste conjunto possuem a característica indicada. É evidente, portanto, dizer que os elementos não listados não possuem essa característica.

Essa ideia de conjunto pode ser descrita matematicamente por meio de uma função, a qual indicará, para cada elemento dado, se ele pertence ou não ao conjunto analisado.

Desta maneira, um conjunto clássico pode ser caracterizada por uma função – chamada *função característica* – da seguinte maneira:

Definição 1.2.1 *Seja \mathbb{U} um conjunto e A um subconjunto de \mathbb{U} . A função característica de A é dada por:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Isso significa que, para uma função χ_A qualquer, é possível determinar se um elemento pertence A (casos em que $\chi_A(x) = 1$) ou não (casos em que $\chi_A(x) = 0$). Ou seja, a imagem da função é o conjunto $\{0,1\}$.

Porém, existem casos que não são contemplados por esse tipo de definição. Situações que envolvem termos imprecisos ou aproximados, como “perto”, “longe”, “meio cheio”, “meio vazio”, “quente”, “frio” etc., carecem de uma análise mais aprofundada.

A Teoria de Conjuntos Fuzzy é capaz de tratar essas imprecisões, pois considera o contradomínio da função não como o conjunto discreto $\{0, 1\}$, mas como o intervalo real $[0, 1]$. Ou seja, deixa de considerar apenas a pertinência completa de um elemento a um determinado conjunto, e estabelece um grau para essa pertinência. Quanto maior for esse grau, mais próxima de 1 será a imagem da função, e quanto menor for o grau, mais próxima de 0.

Essa noção de subconjuntos fuzzy possibilitou o armazenamento de dados imprecisos nos computadores podendo gerar respostas com base em informações subjetivas, assim como em situações cotidianas (BASSANI, 2016).

Toma-se como exemplo o conjunto de pessoas jovens. Quando se analisa esse exemplo sob o viés da Teoria Clássica de Conjuntos, é esperado atribuir um limite de idade para que cada pessoa possa ser considerada jovem ou não. Sob essa ótica, uma pessoa que atinja o limite estipulado, deixará de pertencer a esse conjunto.

Porém, quando se trata o mesmo exemplo sob a perspectiva da Teoria de Conjuntos Fuzzy, a interpretação é diferente. Para cada idade é estipulado um grau de pertinência, o qual revela se o indivíduo com a respectiva idade está mais ou menos inserido no conjunto.

Nas subseções seguintes são apresentados alguns conceitos que subsidiam a Teoria de Conjuntos Fuzzy, as operações intervalares entre números fuzzy, além dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy que serão essenciais para a proposta deste trabalho.

1.2.1 Conceitos Preliminares

Nesta subseção são apresentados alguns conceitos sobre a Teoria de Conjuntos Fuzzy baseados nos trabalhos de Barros e Bassanezi (2006) e Gomes (2009).

A Teoria de Conjuntos Fuzzy pode ser vista como uma extensão da Teoria Clássica de Conjuntos. Como apresentado anteriormente, o contradomínio de uma função que caracteriza um conjunto fuzzy¹ é o intervalo real $[0, 1]$.

Definição 1.2.2 *Seja \mathbb{U} um conjunto. Um subconjunto F de \mathbb{U} é caracterizado por uma função*

$$\sigma_F : \mathbb{U} \rightarrow [0, 1],$$

chamada de função de pertinência do subconjunto fuzzy F .

¹ No decorrer do texto serão utilizados os termos “subconjunto fuzzy” e “conjunto fuzzy”, os quais têm a mesma definição neste trabalho.

Em se tratando dos conjuntos fuzzy, as operações de união, interseção e complemento também se aplicam. Seus resultados igualmente terão um grau de pertinência entre 0 e 1.

A fim de deixar as definições mais compreensíveis, considere o Exemplo 1.2.1 que será retomado posteriormente para contextualizar os tópicos que virão. Além disso, os gráficos ilustrados no exemplo e no decorrer deste trabalho foram elaborados utilizando o *software Matlab*.

Exemplo 1.2.1 *Sejam A e B dois conjuntos fuzzy dados pelas seguintes funções de pertinência*

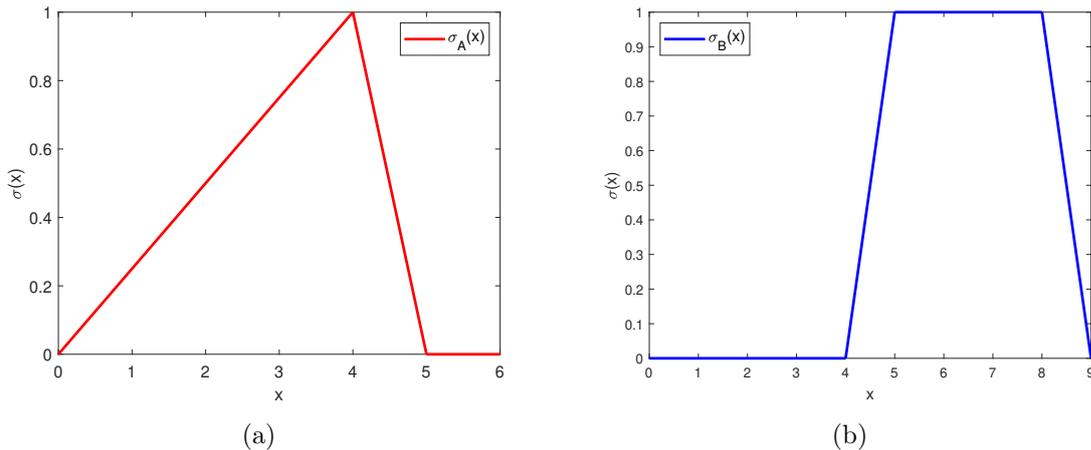
$$\sigma_A(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 4, \\ -x + 5, & \text{se } 4 \leq x < 5, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\sigma_B(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{se } 4 \leq x < 5, \\ 1, & \text{se } 5 \leq x < 8, \\ -x + 9, & \text{se } 8 \leq x < 9, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na Figura 2 são apresentadas as representações gráficas dos conjuntos fuzzy A e B dados pelas funções de pertinência $\sigma_A(x)$ e $\sigma_B(x)$, respectivamente.

Figura 2 – Representação gráfica dos conjuntos fuzzy (a) A e (b) B do Exemplo 1.2.1.



Fonte: Autoria própria.

Definição 1.2.3 *Dados dois conjuntos fuzzy A e B de \mathbb{U} , a união entre eles é um conjunto fuzzy determinado pela seguinte função de pertinência*

$$\sigma_{A \cup B}(x) = \max\{\sigma_A(x), \sigma_B(x)\}, \forall x \in \mathbb{U}.$$

Exemplo 1.2.2 Considere os conjuntos fuzzy A e B do Exemplo 1.2.1. Para cada um dos intervalos analisados, o valor máximo entre as duas funções de pertinência representará a união entre eles, ou seja,

$$\sigma_{(A \cup B)}(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 4, \\ -x + 5, & \text{se } 4 \leq x < 4,5, \\ x - 4, & \text{se } 4,5 \leq x < 5, \\ 1, & \text{se } 5 \leq x < 8, \\ -x + 9, & \text{se } 8 \leq x < 9, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 1.2.4 Dados dois conjuntos fuzzy A e B de \mathbb{U} , a intersecção entre eles é um conjunto fuzzy determinada pela função de pertinência

$$\sigma_{(A \cap B)}(x) = \min\{\sigma_A(x), \sigma_B(x)\}, \forall x \in \mathbb{U}.$$

Exemplo 1.2.3 Considere os conjuntos fuzzy A e B do Exemplo 1.2.1. A intersecção entre eles se dará pelo valor mínimo entre duas funções de pertinência, ou seja,

$$\sigma_{(A \cap B)}(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{se } 4 \leq x < 4,5, \\ -x + 5, & \text{se } 4,5 \leq x < 5, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 1.2.5 Dado um subconjunto fuzzy A de \mathbb{U} , seu complemento A' é um subconjunto fuzzy determinado pela função de pertinência

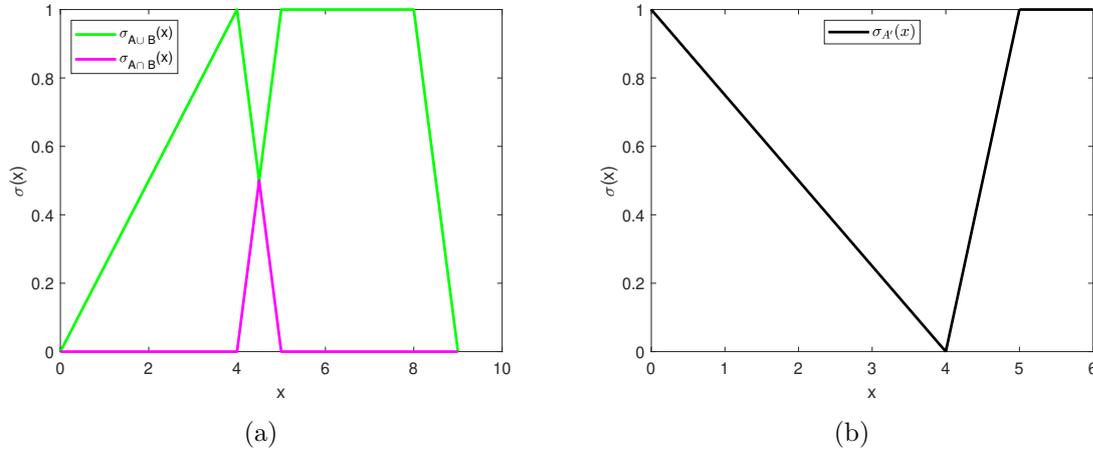
$$\sigma_{A'}(x) = 1 - \sigma_A(x), \forall x \in \mathbb{U}.$$

Exemplo 1.2.4 Considere o conjunto fuzzy A do Exemplo 1.2.1. O conjunto complementar fuzzy de A é dado pela função de pertinência

$$\sigma_{A'}(x) = \begin{cases} \frac{-x}{4} + 1, & \text{se } 0 \leq x < 4, \\ x - 4, & \text{se } 4 \leq x < 5, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A Figura 3 (a) ilustra os conjuntos fuzzy $A \cup B$ e $A \cap B$ dos Exemplos 1.2.2 e 1.2.3, dados, respectivamente, pelas funções de pertinência $\sigma_{A \cup B}(x)$, em verde, e $\sigma_{A \cap B}(x)$, em rosa. A Figura 3 (b) ilustra o conjunto fuzzy A' do Exemplo 1.2.4, dado pela função de pertinência $\sigma_{A'}(x)$.

Figura 3 – Representação gráfica dos conjuntos fuzzy (a) $A \cap B$ e $A \cup B$ e (b) A' dos Exemplos 1.2.2, 1.2.3 e 1.2.4, respectivamente.



Fonte: Autoria própria.

Nota-se que, quando são estudadas as propriedades de união, intersecção e complementar de subconjuntos fuzzy, a lei do terceiro excluído não tem validade². Na Teoria dos Conjuntos Clássicos a intersecção entre um conjunto e seu complementar é sempre o conjunto vazio. Porém, isso não ocorre nos Conjuntos Fuzzy.

Ainda assim muitas das propriedades conhecidas para os conjuntos clássicos também valem para os conjuntos fuzzy. As propriedades reflexiva, associativa, comutativa, distributiva e existência de elemento neutro para união e intersecção são válidas e obedecem os mesmos critérios conhecidos para os conjuntos clássicos.

Proposição 1.2.1 *Dados os subconjuntos fuzzy A , B e C de \mathbb{U} , são válidas as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned}
 A \cup A &= A, \\
 A \cap A &= A, \\
 A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\
 A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C, \\
 A \cup B &= B \cup A, \\
 A \cap B &= B \cap A, \\
 A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\
 A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\
 A \cup \emptyset &= A, \\
 A \cap \emptyset &= \emptyset, \\
 A \cup \mathbb{U} &= \mathbb{U},
 \end{aligned}$$

² A lei do terceiro excluído é um princípio lógico que afirma que, para qualquer proposição, ou ela ou sua negação é verdadeira, não havendo outra possibilidade.

$$A \cap \mathbb{U} = A.$$

A demonstração da Propriedade 1.2.1 são aplicações das propriedades de máximo e mínimo entre duas funções, isto é,

$$\max[\varphi(x), \omega(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \omega(x) + |\varphi(x) - \omega(x)|],$$

$$\min[\varphi(x), \omega(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \omega(x) - |\varphi(x) - \omega(x)|],$$

sendo φ e ω funções quaisquer com imagem em \mathbb{R} .

A demonstração de uma dessas propriedades pode ser encontrada em Barros e Bassanezi (2006), as demais podem ser demonstradas de maneira análoga.

Definição 1.2.6 Dado um subconjunto fuzzy F de \mathbb{U} , o seu suporte é definido por

$$\text{supp } F = \{x \in \mathbb{U} : \varphi_F(x) > 0\}.$$

Portanto, o suporte é o conjunto de todos os elementos de \mathbb{U} desconsiderando aqueles que possuem pertinência nula a F .

Exemplo 1.2.5 Considere o conjunto fuzzy $\sigma_B(x)$ do Exemplo 1.2.1. O suporte de B é o intervalo aberto $]4, 9[$.

Definição 1.2.7 O α -nível do subconjunto fuzzy F de \mathbb{U} é definido por

$$[F]^\alpha = \{x \in \mathbb{U} : \varphi_F(x) > \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

O caso em que $\alpha = 0$ é considerado como o fecho do suporte de F e indicado por $\overline{\text{supp}} A$. Define-se como sendo o menor subconjunto clássico fechado de \mathbb{U} que contém o suporte de F .

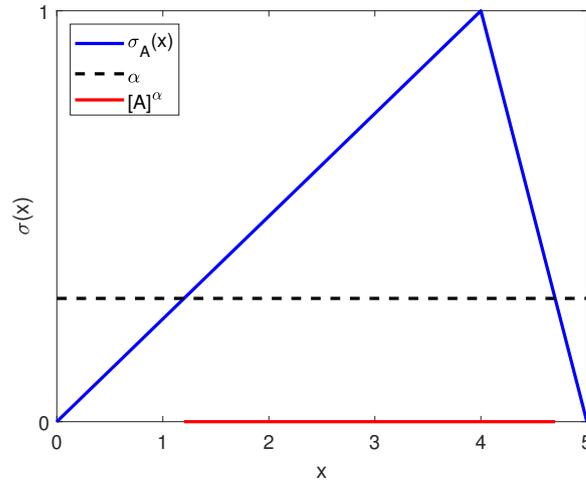
Exemplo 1.2.6 Considere o conjunto fuzzy $\sigma_A(x)$ do Exemplo 1.2.1. Nesse caso, tem-se:

$$[A]^\alpha = [4\alpha, 5 - \alpha] \text{ para } 0 < \alpha \leq 1,$$

e

$$[A]^0 = [0, 5].$$

Na Figura 4 está ilustrada uma representação gráfica do α -nível de um conjunto fuzzy A .

Figura 4 – Representação do α -nível da função de pertinência σ_A .

Fonte: Autoria própria.

Definição 1.2.8 Um subconjunto fuzzy F de \mathbb{U} é chamado de número fuzzy quando o universo no qual φ_F está definida é o conjunto dos números reais \mathbb{R} que satisfaz às seguintes condições:

- (i) Todos os α -níveis de F são não vazios;
- (ii) Todos os α -níveis de F são intervalos fechados de \mathbb{R} ;
- (iii) $\text{supp } F = \{x \in \mathbb{U} : \varphi_F(x) > 0\}$ é limitado.

Portanto, conforme definição apresentada, um número fuzzy é um caso especial de conjunto fuzzy. Os números fuzzy triangulares e trapezoidais, que recebem este nome devido à sua representação gráfica, são os mais comuns, embora outras formas podem ser utilizadas dependendo da aplicação a ser realizada.

Definição 1.2.9 Um número fuzzy triangular tem a função pertinência definida da seguinte forma

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a, \\ \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a \leq x < u, \\ \frac{x-d}{u-d}, & \text{se } u \leq x < d, \\ 0, & \text{se } x \geq d. \end{cases}$$

Para determinar os α -níveis de um número fuzzy triangular, basta analisar a função para quando sua imagem pertencer ao intervalo $]0, 1[$. Sejam, então, α_1 e α_2 os valores

respectivos da função para um determinado α -nível. Tem-se que α_1 é obtido a partir da parte crescente da função, enquanto α_2 pela parte decrescente, isto é,

$$\alpha_1 = \frac{x - a}{u - a} \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot (u - a) = x - a \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot (u - a) + a = x,$$

e

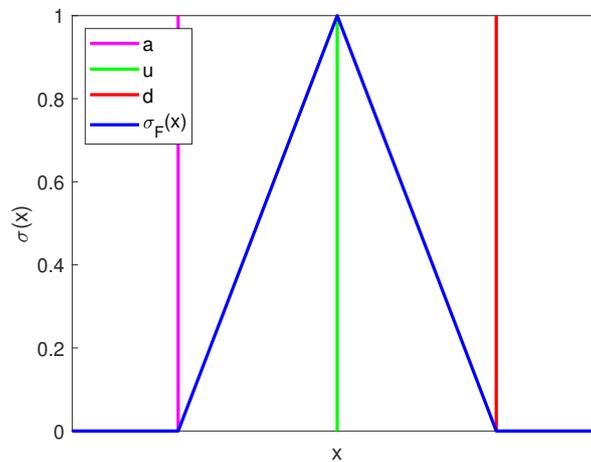
$$\alpha_2 = \frac{x - d}{u - d} \Leftrightarrow \alpha_2 \cdot (u - d) = x - a \Leftrightarrow \alpha_2 \cdot (u - d) + d = x.$$

Portanto, para um número fuzzy triangular, tem-se que seus α -níveis são:

$$[F]^\alpha = [(u - a) \cdot \alpha + a, (u - d) \cdot \alpha + d] \quad (1.1)$$

A Figura 5 ilustra a representação gráfica da função de pertinência de um número fuzzy triangular.

Figura 5 – Representação gráfica de um número triangular fuzzy.



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.2.7 *Suponha uma função que indique o quão próximo um determinado número está de 100. Essa noção de proximidade é bem relativa. Por exemplo, considerando o universo de 0 a 200, o número 180 não é próximo de 100. Mas considerando o conjunto universo de 0 a 2.000.000.000, 180 torna-se próximo de 100. Por isso, é importante determinar uma função que faça sentido para aquilo que se quer analisar. Para a situação posta, considere o número fuzzy F dado pela função de pertinência*

$$\sigma_F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 80, \\ \frac{x - 80}{100 - 80}, & \text{se } 80 \leq x < 100, \\ \frac{x - 120}{100 - 120}, & \text{se } 100 \leq x < 120, \\ 0, & \text{se } x \geq 120. \end{cases}$$

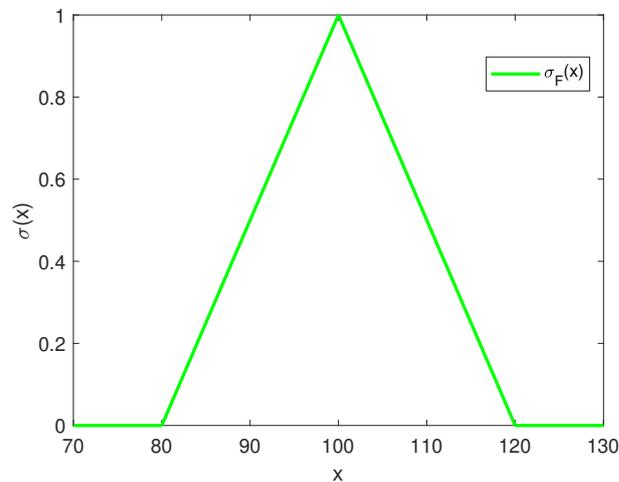
Neste caso, o universo considerado é $[0, 200]$ e, de acordo com a função de pertinência $\sigma_F(x)$, os números acima de 120 e abaixo de 80 não estão próximos de 100 e os números entre 80 e 120 estão próximos de 100 com algum grau de pertinência.

Utilizando a equação (1.2.1), obtêm-se os seus α -níveis:

$$[F]^\alpha = [20\alpha + 80, -20\alpha + 120].$$

Na Figura 6 é apresentada a representação gráfica dos números próximos de 100.

Figura 6 – Representação gráfica dos números próximos de 100 do Exemplo 1.2.7.



Fonte: Autoria própria.

Outra maneira de representar um número fuzzy triangular é escrevê-lo a partir dos valores do domínio em que o gráfico da função de pertinência muda de comportamento. Então o número fuzzy A do Exemplo 1.2.7 pode ser escrito como $A(x; 80, 100, 120)$.

Definição 1.2.10 Um número fuzzy trapezoidal possui a função de pertinência definida

da seguinte maneira

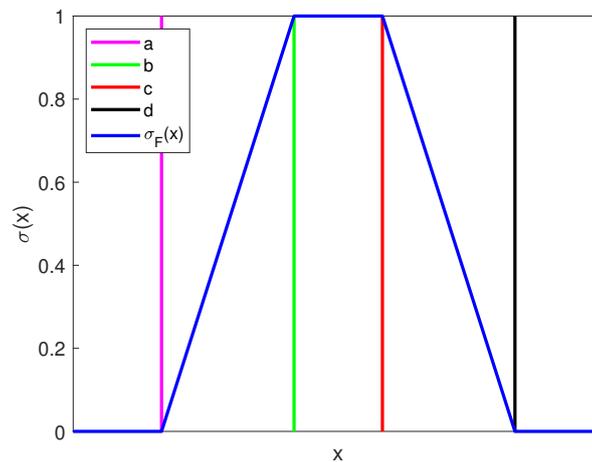
$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b, \\ 1, & \text{se } b \leq x < c, \\ \frac{x-d}{c-d}, & \text{se } c \leq x < d, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os valores dos α -níveis de um número fuzzy trapezoidal são obtidos de maneira análoga aos α -níveis de um número fuzzy triangular, e são dados por

$$[F]^\alpha = [(b-a) \cdot \alpha + a, (c-d) \cdot \alpha + d]. \quad (1.2)$$

A Figura 7 ilustra a representação gráfica da função de pertinência de um número fuzzy trapezoidal.

Figura 7 – Representação gráfica de um número trapezoidal fuzzy.



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.2.8 *No cozimento do feijão, é preciso deixá-lo no fogo por aproximadamente 25 minutos após o início da pressão. Tempos muito menores que esses podem não cozinhar o feijão, enquanto que muito maiores podem queimá-lo. Suponha que a função de pertinência*

que associa o cozimento do feijão ao tempo em que ele permanece no fogo seja:

$$\varphi_F(x) = \begin{cases} \frac{x - 15}{23 - 15}, & \text{se } 15 \leq x < 23, \\ 1, & \text{se } 23 \leq x < 28, \\ \frac{x - 40}{28 - 40}, & \text{se } 28 \leq x < 40, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

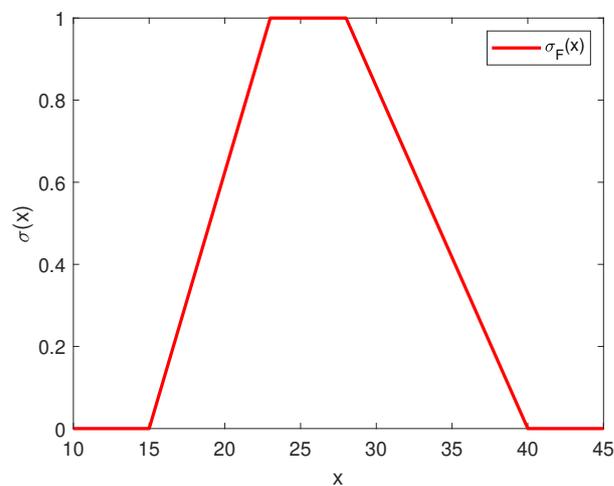
Essa função indica, portanto, que feijões que ficam até 15 minutos ou mais de 40 minutos no fogo não servem para serem consumidos. Para o tempo entre 15 e 23 minutos e 28 e 40 minutos, podem ser consumidos com algum grau de cozimento. Enquanto que aqueles que ficam entre 23 e 28 minutos têm o cozimento ideal para consumo.

Utilizando a equação (1.2.1), obtém-se os seus α -níveis, dados por

$$[F]^\alpha = [(23 - 15) \alpha + 15, (28 - 40) \alpha + 40].$$

Na Figura 8 é apresentada a representação gráfica do tempo de cozimento de feijões.

Figura 8 – Representação gráfica do tempo de cozimento de feijões do Exemplo 1.2.8.



Fonte: Autoria própria.

Assim como ocorre com número fuzzy triangular, também é possível escrever um número fuzzy trapezoidal a partir dos valores do domínio em que o gráfico da função de pertinência muda de comportamento. Logo, o número fuzzy A desse exemplo, pode ser escrito como $A(x; 13, 18, 45, 60)$.

A seguir, são apresentadas as definições que especificam as operações aritméticas entre números fuzzy baseadas nas operações aritméticas intervalares.

1.2.2 Operações com Números Fuzzy

Os números fuzzy são úteis, pois permitem tratar informações imprecisas usadas rotineiramente, como “aproximadamente”, “em torno de”, “parcialmente” etc., matematicamente e, conseqüentemente, tornam mais fácil sua manipulação pelos computadores.

As operações aritméticas entre números fuzzy estão bem definidas e, nesta subseção, serão abordados os conceitos relacionados às operações intervalares de um número fuzzy. Para cada número fuzzy, sua representação intervalar pode ser obtida por meio de seu α -nível.

Novamente, as definições apresentadas seguem se baseando nos trabalhos de [Barros e Bassanezi \(2006\)](#) e [Gomes \(2009\)](#).

Definição 1.2.11 Considere λ um número real e os intervalos fechados $A = [a_1, a_2]$ e $B = [b_1, b_2]$. Definem-se as seguintes operações:

- (i) a adição entre A e B é o intervalo $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$;
- (ii) a subtração de A por B é o intervalo $A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$;
- (iii) a multiplicação de A por λ é o intervalo $\lambda \cdot A = \begin{cases} [\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2], & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_1], & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$;
- (iv) a multiplicação de A por B é o intervalo $A \cdot B = [\min P, \max P]$, sendo $P = \{a_1 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2, b_1 \cdot a_2, a_2 \cdot b_2\}$;
- (v) a divisão de A por B , considerando $0 \notin B$, é o intervalo $A/B = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right]$.

Para os exemplos a seguir, considere os números fuzzy trapezoidais

$$C(x; 2, 8, 13, 14) \text{ e } D(x; 3, 6, 9, 12),$$

cujas representações em forma de intervalos são, respectivamente,

$$C = [6\alpha + 2, -\alpha + 14] \text{ e } D = [3\alpha + 3, -3\alpha + 12].$$

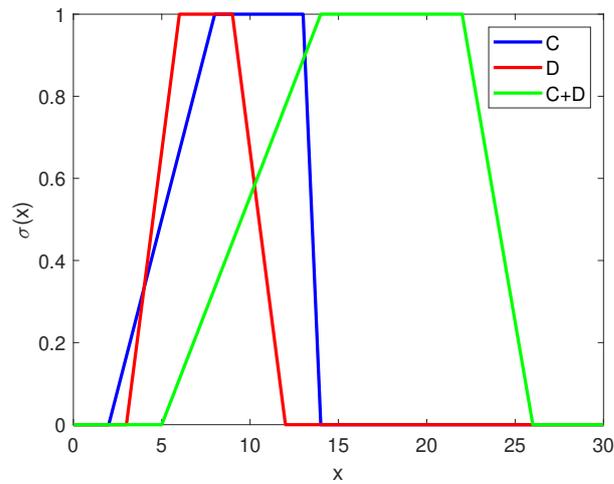
Exemplo 1.2.9 A adição dos números fuzzy C e D é dada por:

$$[C + D]^\alpha = [9\alpha + 5, -4\alpha + 26],$$

ou ainda $(x; 5, 14, 22, 26)$.

Na Figura 9 é apresentada a representação gráfica do número fuzzy $C + D$, em que C está indicado pela cor azul, D pela cor vermelha e $C + D$ pela cor verde.

Figura 9 – Representação gráfica da adição entre os números fuzzy C e D .



Fonte: Autoria própria.

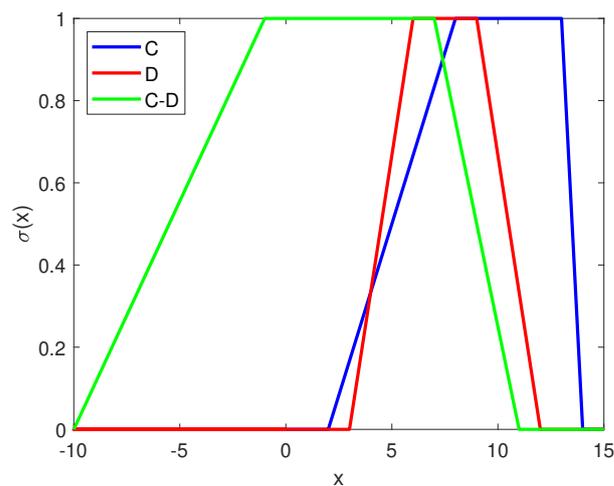
Exemplo 1.2.10 A subtração dos números fuzzy C e D é dada por:

$$[C - D]^\alpha = [9\alpha - 10, -4\alpha + 11],$$

ou ainda $(x; -10, -1, 7, 11)$.

Na Figura 10 é apresentada a representação gráfica do número fuzzy $C - D$, em que C está indicado pela cor azul, D pela cor vermelha e $C - D$ pela cor verde.

Figura 10 – Representação gráfica da subtração entre os números fuzzy C e D .



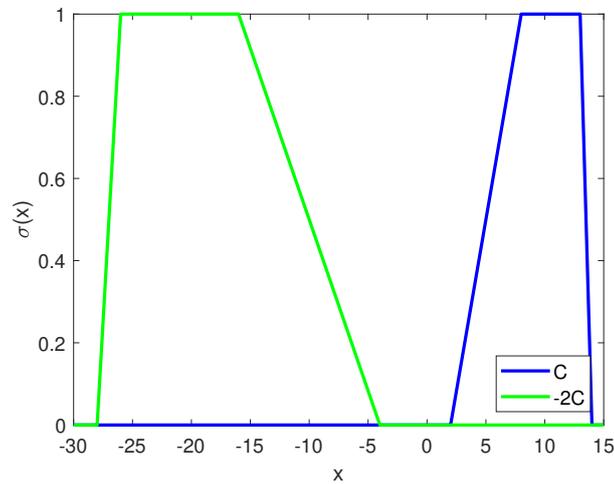
Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.2.11 A multiplicação do número fuzzy C pelo escalar -2 é dada por:

$$[-2 C]^\alpha = [2\alpha - 28, -12\alpha - 4].$$

Na Figura 11 é apresentada a representação gráfica do número fuzzy $-2C$, em que C está indicado pela cor azul, e $-2C$ pela cor verde.

Figura 11 – Representação gráfica da multiplicação do número fuzzy C pelo escalar -2 .



Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.2.12 Para a multiplicação dos números fuzzy C e D , tem-se

$$P = \{18\alpha^2 + 24\alpha + 6, -18\alpha^2 + 66\alpha + 24, -3\alpha^2 + 39\alpha + 42, 3\alpha^2 - 54\alpha + 168\}.$$

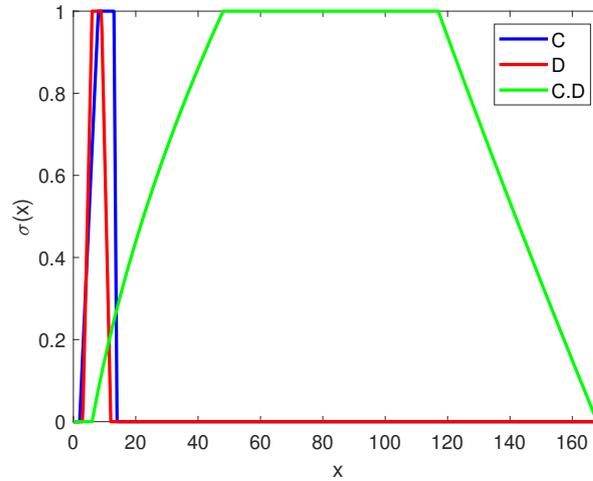
No intervalo $[0, 1]$, a função $18\alpha^2 + 24\alpha + 6$ é sempre menor que as demais, enquanto que a função $3\alpha^2 - 54\alpha + 168$ é sempre maior. Portanto,

$$[C \cdot D]^\alpha = [18\alpha^2 + 24\alpha + 6, 3\alpha^2 - 54\alpha + 168],$$

com $\alpha \in [0, 1]$, ou seja, sua função de pertinência é dada por

$$\sigma_{C \cdot D}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+4}-4}{6}, & \text{se } 6 \leq x < 48, \\ 1, & \text{se } 48 \leq x < 117, \\ \frac{-\sqrt{3x+225}+27}{3}, & \text{se } 117 \leq x < 168, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na Figura 12 é apresentada a representação gráfica do número fuzzy $C \cdot D$, em que C está indicado pela cor azul, D pela cor vermelha e $C \cdot D$ pela cor verde. Vale ressaltar que, diferentemente das operações de adição e subtração, o resultado da multiplicação entre números fuzzy trapezoidais não será, necessariamente, um número trapezoidal.

Figura 12 – Representação gráfica da multiplicação entre os números fuzzy C e D .

Fonte: Autoria própria.

Exemplo 1.2.13 A divisão entre dois números fuzzy se dá a partir de um processo de multiplicação. Para a divisão do número fuzzy C por D , tem-se

$$P = \left\{ \frac{6\alpha + 2}{-3\alpha + 12}, \frac{6\alpha + 2}{3\alpha + 3}, \frac{-\alpha + 14}{-3\alpha + 12}, \frac{-\alpha + 14}{3\alpha + 3} \right\}.$$

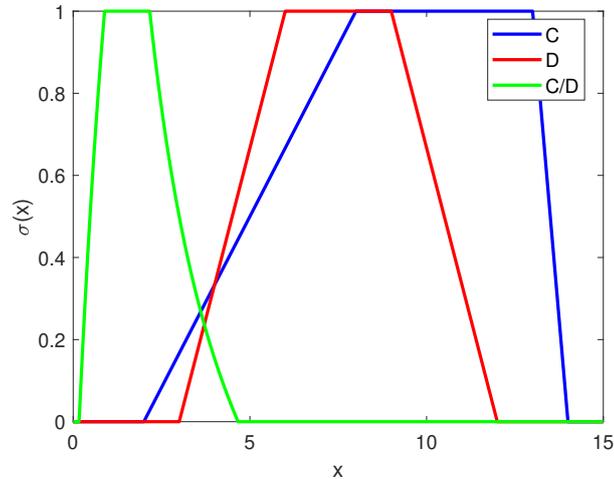
No intervalo $[0, 1]$, a função $\left\{ \frac{6\alpha + 2}{-3\alpha + 12} \right\}$ é sempre menor que as demais, enquanto que a função $\left\{ \frac{-\alpha + 14}{3\alpha + 3} \right\}$ é sempre maior. Logo,

$$\left[\frac{C}{D} \right]^\alpha = \left[\frac{6\alpha + 2}{-3\alpha + 12}, \frac{-\alpha + 14}{3\alpha + 3} \right],$$

com $\alpha \in [0, 1]$, ou seja, sua função de pertinência é dada por

$$\sigma_{C/D}(x) = \begin{cases} \frac{12x - 2}{3x + 6}, & \text{se } \frac{1}{6} \leq x < \frac{8}{9}, \\ 1, & \text{se } \frac{8}{9} \leq x < \frac{13}{6}, \\ \frac{3x - 14}{-3x - 1}, & \text{se } \frac{13}{6} \leq x < \frac{14}{3}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na Figura 13 é apresentada a representação gráfica do número fuzzy C/D , em que C está indicado pela cor azul, D pela cor vermelha, C/D pela cor verde. Diferentemente das operações de adição e subtração e, assim como o resultado da multiplicação entre dois números trapezoidais, a divisão entre dois números dessa forma não será, necessariamente, trapezoidal.

Figura 13 – Representação gráfica da divisão entre os números fuzzy C e D .

Fonte: Autoria própria.

1.2.3 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Como mencionado anteriormente, o termo fuzzy significa impreciso, incerto ou nebuloso. Assim, a teoria

(...) associada a ele vem sendo utilizada para dar tratamento matemático às informações que, em uma situação/problema, quando esta é delineada através de informações fornecidas por seres humanos ao se comunicar e portanto, carregadas de termos vagos, subjetivos e vinculados ao contexto sobre qual se referem. (CORCOLL-SPINA, 2010, p. 54)

Uma das aplicações que surge dessa teoria é o Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF). Seguindo ainda as definições de Corcoll-Spina (2010, p. 70), “um SBRF é um sistema que se utiliza da lógica fuzzy para produzir saídas para cada entrada fuzzy”.

Em linhas gerais, entradas e saídas fuzzy são valores fornecidos previamente por um especialista sobre o assunto para determinar um grau de pertinência de um elemento para cada conjunto.

Exemplo 1.2.14 *Em um grupo de pessoas, é possível estabelecer subgrupos de acordo com suas estaturas. Há grupos de pessoas baixas, médias e altas.*

Neste caso, para fugir da imprecisão, seria possível criar funções que determinariam se cada uma das pessoas será considerada com estatura baixa, média ou alta. Essas funções são as chamadas funções de pertinência, que relacionariam a altura com cada um dos subconjuntos listados.

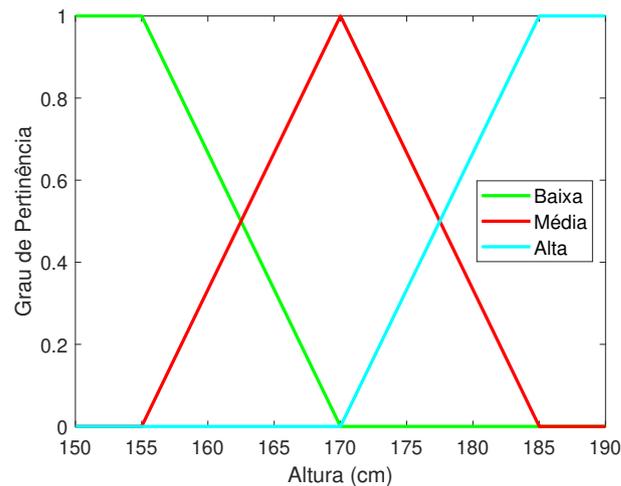
Uma possível classificação poderia ser da seguinte forma:

- *Pessoas abaixo de 150 cm são consideradas baixas;*

- Pessoas entre 150 e 165 cm são consideradas baixas, porém em menor grau que as primeiras listadas;
- Pessoas entre 155 e 185 cm são consideradas médias em diferentes graus;
- Pessoas acima de 190 cm são consideradas altas;
- Pessoas entre 185 e 190 cm são consideradas altas, porém em menor grau que as listadas anteriormente.

Para cada uma das classificações, uma função matemática específica pode ser determinada e, com isso, é possível esboçar um gráfico capaz de contemplar a situação apontada, ilustrado na Figura 14, em que as cores verde, vermelha e roxa indicam, respectivamente, as funções de pertinência dos conjuntos das pessoas baixas, médias e altas.

Figura 14 – Representação gráfica da classificação de pessoas de acordo com sua altura.



Fonte: Autoria própria.

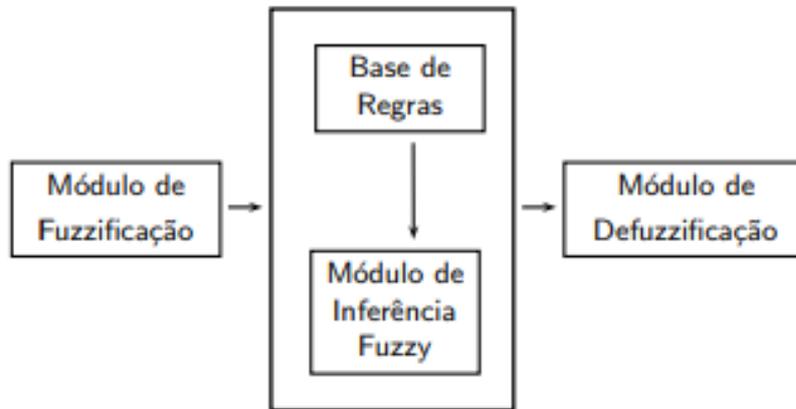
Os termos linguísticos ou variáveis linguísticas são os elementos imprecisos que representam um conceito ou uma variável de um problema. No Exemplo 1.2.14, essas variáveis seriam os termos: baixas, médias e altas, relacionados à estatura de cada indivíduo.

A tradução de termos imprecisos em funções matemáticas permite a aplicação de processos de controle e automação de tarefas, uma vez que associa cada termo vago a um intervalo numérico.

Essa automação de tarefas é um processo construído com base no SBRF. Porém, para que essa automação se concretize, é necessário seguir um roteiro a fim de que seja concluída. Fazem parte desse roteiro as etapas de módulo de fuzzificação, módulo da base de regras, módulo de inferência fuzzy e módulo de defuzzificação. Esses módulos são

apresentados a seguir com base em Barros e Bassanezi (2006), e seu esquema pode ser visualizado na Figura 15.

Figura 15 – Esquema geral de um controlador fuzzy.



Fonte: Barros e Bassanezi (2006, p.119).

- 1. Módulo de fuzzificação:** é o processo de modelagem por conjuntos fuzzy considerando seus respectivos domínios. É nessa etapa que se estabelece o grau de pertinência de cada variável de entrada ao seu conjunto fuzzy;
- 2. Módulo da base de regras:** é composto pelas proposições fuzzy. Neste módulo são estabelecidas as proposições na forma linguística “Se x é X , então y é Y ”. Tanto as variáveis empregadas quanto os termos linguísticos são modelados por conjuntos fuzzy nessa etapa do processo;
- 3. Módulo de inferência fuzzy:** é o estágio no qual cada uma das proposições fuzzy é “traduzida” matematicamente utilizando técnicas fuzzy. Essa etapa é que fornecerá a saída fuzzy a partir de cada entrada;
- 4. Módulo de defuzzificação:** é o processo que permite representar um conjunto fuzzy por um valor real, tendo assim um conjunto de saída bem definido.

Por se tratar de um sistema com controlador fuzzy, as saídas desse processo são fuzzy. Com isso, é preciso estipular um método que *defuzzifique* essa saída. O método que será utilizado neste trabalho é o Centro de Gravidade, no qual a saída a ser considerada é obtida pelo centro de gravidade do conjunto fuzzy, isto é, determina-se a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy.

Tal média é obtida a partir da equação (1.3) para domínios discretos e pela equação (1.4) para domínios contínuos.

$$G(A) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_A(u_i)}{\sum_n \varphi_A(u_i)}, \quad (1.3)$$

$$G(A) = \frac{\int_R u \varphi_A(u) du}{\int_R \varphi_A(u) du}. \quad (1.4)$$

Esse cálculo é semelhante ao de uma média aritmética ponderada sendo seus pesos os valores $\varphi_A(u_i)$, indicando o grau de compatibilidade do valor u_i , modelado pelo conjunto fuzzy A .

No módulo de Inferência Fuzzy, os operadores matemáticos definem a relação fuzzy que modela a base de regras. Para isso, neste trabalho será adotado o método de Mamdani, o qual é baseado em uma estrutura de operações *min-max* envolvendo regras de inferência do tipo: “Se x é A e y é B , Então z é C ”, com A , B e C sendo conjuntos fuzzy.

As regras por meio do operador lógico “OU” são modeladas pelo operador máximo, enquanto as do operador lógico “E” são modeladas pelo operador mínimo.

Então, neste método, as regras de inferência são expressas como declarações do tipo “Se... Então” e cada uma delas é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy que compõem o antecedente e o conseqüente da regra.

Cada regra que relaciona as variáveis linguísticas é considerada uma relação fuzzy R_i , na qual o grau de pertinência para cada par (a, b) é:

$$\varphi_{R_i}(a, b) = \min \{ \varphi_{A_i}(a), \varphi_{B_i}(b) \}. \quad (1.5)$$

Para cada par (a, b) a relação fuzzy R que representa o modelo determinado por uma base de regras é dada por:

$$\varphi_{R_i}(a, b) = \max_{1 \leq i \leq r} [\varphi_{A_i}(a) \wedge \varphi_{B_i}(b)]. \quad (1.6)$$

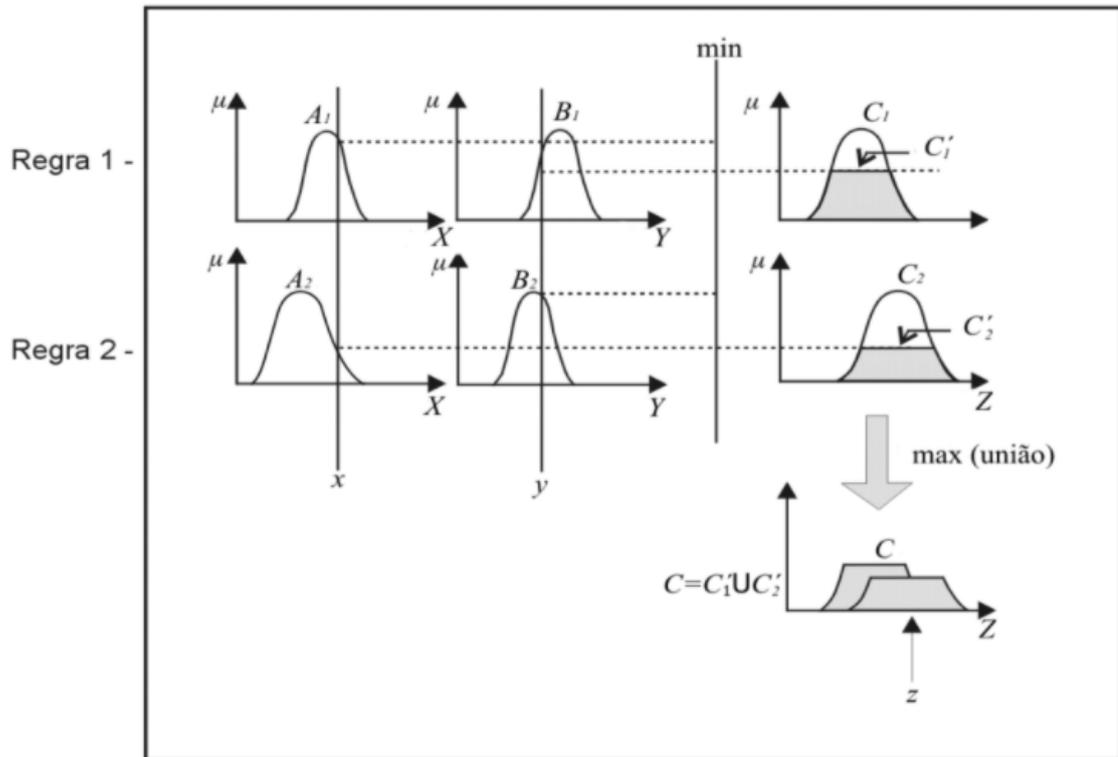
Em ambas as equações, (1.5) e (1.6), cada um dos valores $\varphi_{A_i}(a)$ e $\varphi_{B_i}(b)$ são interpretados como os graus com que a e b estão nos subconjuntos fuzzy A_i e B_i , respectivamente. Especificamente para a equação (1.6), r é o número de regras que compõe a base de regras.

A Figura 16 ilustra o método de inferência de Mamdani a partir das entradas x e y reais com as regras:

Regra 1: Se (x é A_1 e y é B_1) então (z é C_1);

Regra 2: Se (x é A_2 e y é B_2) então (z é C_2).

Figura 16 – Método de Mamdani com composição *max-min*.



Fonte: Jafelice, Barros e Bassanezi (2012, p.21).

2 Problema Aplicado

Atualmente o mundo vive sob uma pandemia mundial, levando a óbito mais de 4.200.00 pessoas desde o primeiro caso identificado da doença, registrado em dezembro de 2019 (CSSE-JHU, 2021). Estima-se que ela cause a morte de aproximadamente 2% das pessoas infectadas.

Tal doença é popularmente chamada de COVID-19 e é causada pela infecção com o coronavírus da síndrome respiratória aguda grave (SARS-CoV-2). Não se sabe ao certo a origem desse vírus, mas a causa mais provável é que ele tenha sido transmitido aos humanos por intermédio de morcegos em dezembro de 2019 na China (FERREIRA NETTO; CORRÊA, 2020, p.19).

Devido ao crescente número de casos ao redor do mundo, em 11 de março de 2020, a Organização Mundial da Saúde (OMS) admitiu tratar-se de uma pandemia (OMS, 2020).

A COVID-19 se apresenta de maneira muito semelhante a outras doenças do trato respiratório como a gripe ou resfriado. Segundo Llor e Moragas (2020, tradução do autor) “Os sintomas mais comuns incluem febre, tosse e dispneia, mas em alguns casos também podem haver sintomas digestivos”. Já segundo Iser et al. (2020), os cinco sintomas mais comuns são “a febre (temperatura $\geq 37,8^{\circ}\text{C}$), tosse, dispneia (dificuldade respiratória), mialgia e fadiga”.

Apesar de haver outros sintomas decorrentes da infecção pelo coronavírus, o documento do Ministério da Saúde e Secretaria de Ciência, Tecnologia, Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde (2020) corrobora o estudo de Iser et al. (2020) indicando febre, tosse, dispneia, mialgia e fadiga como sintomas mais comuns em pacientes acometidos pela COVID-19.

Com isso, uma pessoa que identifica esses sintomas em si tem possibilidade de estar infectado com o coronavírus. Logo, torna-se viável estabelecer um modelo capaz de avaliar o risco de um indivíduo sintomático estar com COVID-19. Além disso, como os sintomas carregam subjetividades inerentes ao modelo, faz sentido representá-los por meio de conjuntos fuzzy.

Para tal proposta, é necessário estabelecer alguns parâmetros quantificáveis dos sintomas para tentar minimizar a subjetividade que alguns deles apresentam. Logo, foram buscados em bibliografias especializadas dos respectivos temas valores de referência para os seguintes sintomas: febre, tosse, dispneia e mialgia.

Partindo disso, é possível estabelecer um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) que permita quantificar a possibilidade de um indivíduo estar ou não infectado por

coronavírus bem como a gravidade com que a doença se apresenta. Os quatro sintomas citados anteriormente representarão as variáveis de entrada do SBRF.

Essas variáveis de entrada apoiam-se nas manifestações clínicas mais comuns dos pacientes sintomáticos da doença. Desse modo, o conjunto das variáveis selecionadas refere-se a: febre, tosse, dispneia e mialgia. Para cada uma das entradas, foram atribuídas classificações de acordo com a gravidade de cada sintoma. As classificações são:

- Febre: podendo ser de baixo ou de alto grau;
- Tosse: sendo classificada em ineficaz, média ou eficaz;
- Dispneia: com as classificações ausente, leve, moderada ou intensa;
- Mialgia: podendo ser leve, moderada ou intensa.

2.1 Variáveis de entrada

Nesta seção, são apresentadas as variáveis de entrada consideradas na modelagem do problema de avaliar o risco de um indivíduo estar contaminado com COVID-19.

2.1.1 Febre

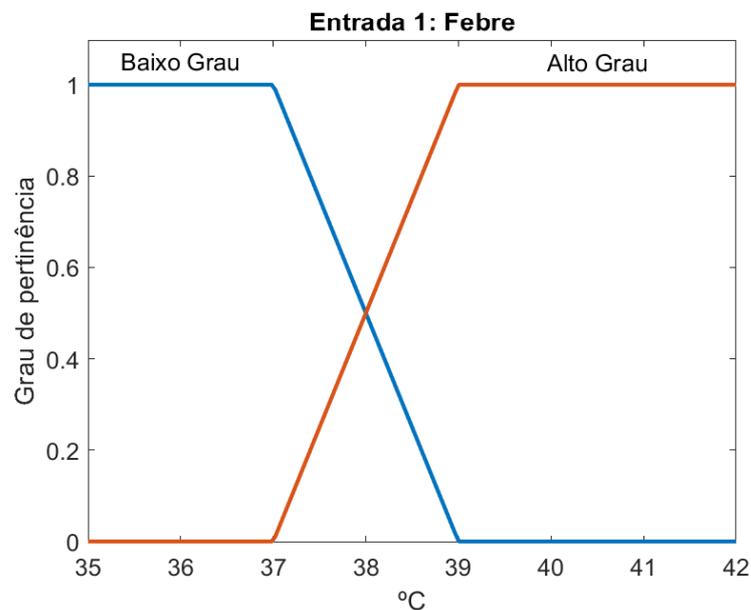
Para determinar as classificações possíveis para febre, adotou-se como referência o trabalho de [VOLTARELLI \(1994\)](#). Entende-se que “as febres benignas podem ser divididas quanto a sua magnitude nas de baixo e alto grau” ([VOLTARELLI, 1994](#), p. 19).

Por febre benigna entende-se aquelas não associadas a síndromes clínicas específicas. Seguindo ainda [VOLTARELLI \(1994\)](#), febres de baixo grau são aquelas em que a medição chega até a 38°C , enquanto as febres de alto grau são aquelas que ultrapassam os 38°C .

Portanto, pode-se estabelecer um conjunto fuzzy como ilustrado na Figura 17.

Pode-se notar que temperaturas abaixo de 37°C , seguindo a bibliografia analisada, refletem um grau de pertinência igual a 1 para um baixo grau de febre. Já as temperaturas acima de 39°C indicam um grau de pertinência igual a 1 para um alto grau de febre.

Figura 17 – Distribuição fuzzy da variável de entrada Febre.



Fonte: Autoria própria.

2.1.2 Tosse

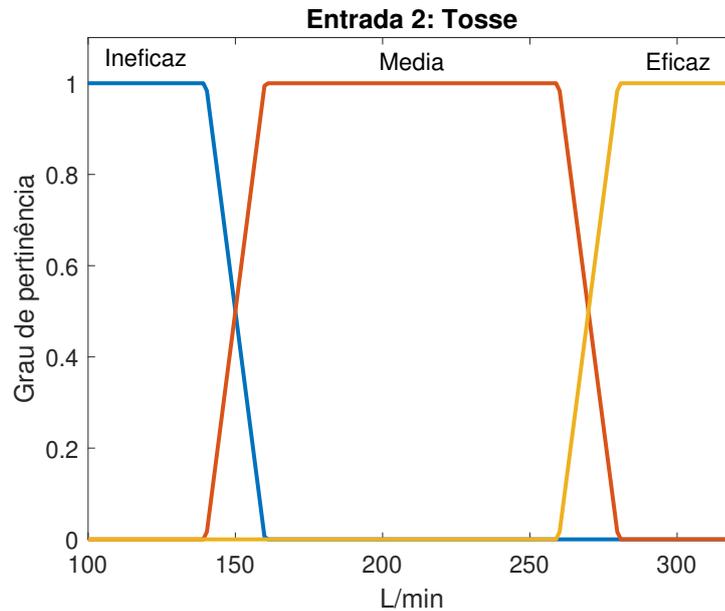
Segundo [Freitas, Parreira e Ibiapina \(2010\)](#), “A tosse é um mecanismo complexo de proteção da árvore brônquica, tendo um importante papel na manutenção da via aérea livre de secreção e de corpos estranhos”. Para quantificar a gravidade da tosse de um paciente, é analisado o Pico de Fluxo da Tosse (PFT), pois ele “é a forma mais reprodutível de mensurar a força da tosse” ([SANTOS et al., 2019](#), p.840).

Nesse procedimento, o paciente é orientado a realizar uma inspiração máxima e, em seguida, tossir em um aparelho denominado *peek flow meter*. Essa ação deve ser realizada pelo menos três vezes, mas não mais que cinco, e registra-se o maior valor fornecido pelo aparelho medidor.

Estima-se que valores abaixo de 160L/min., estejam associados à ineficiência da tosse do clearancemucociliar. Valores entre 160-270L/ min., estão relacionados à deterioração da musculatura respiratória durante períodos de infecção respiratória. Portanto, valores de pico de fluxo acima de 270L/min., são utilizados para identificar pacientes que são capazes de produzir Pico do Fluxo da Tosse satisfatório na higienização adequada do trato respiratório. ([SANTOS et al., 2019](#), p.848)

Isso quer dizer que, quanto maior o valor mensurado no aparelho, mais eficaz será a tosse do paciente, ou seja, menor a possibilidade de ele estar com tosse relacionada a alguma enfermidade. Portanto, pode-se estabelecer um conjunto fuzzy tal como ilustrado na Figura 18.

Figura 18 – Distribuição fuzzy da variável de entrada Tosse.



Fonte: Autoria própria.

2.1.3 Dispneia

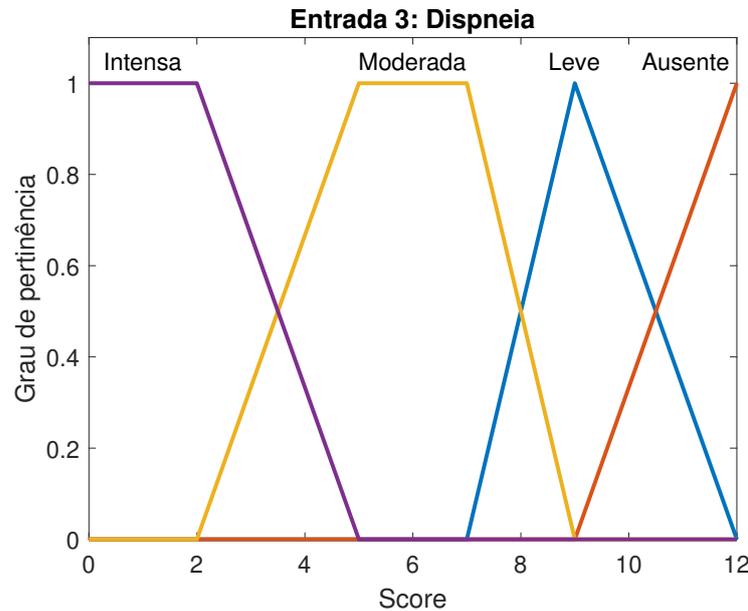
As classificações para dispneia apresentam questões subjetivas inerentes à intensidade desses sintomas. Isto porque quem sente falta de ar pode não passar a intensidade correta, uma vez que a interpretação de quem a sente pode ser diferente daquela para quem diagnostica.

As escalas mais utilizadas para mensurar a dispneia, segundo [Velloso, Costa e Ozeki \(2002\)](#), são a Escala Modificada de Borg e a Escala Analógica Visual, porém, ambas associam a dificuldade em respirar a práticas de exercícios físicos, o que não necessariamente ocorre com os pacientes sintomáticos de COVID-19. Portanto, um método que pode ser útil na aferição da dispneia é o índice Basal Modificado de Mahler.

O Índice Basal Modificado de Mahler quantifica a dispneia através de um score global que resulta do somatório de scores parciais relativos às dimensões de incapacidade funcional, magnitude do esforço e magnitude da tarefa. O score total será de 12 pontos, sendo o score máximo possível 12 e o mínimo de 0. Quanto menor o score final, mais grave será a dispneia e, como tal, a incapacidade. ([CHURRO, 2010](#), p.24)

Neste caso, como não há gradações estipuladas para a gravidade desse sintoma, adotaram-se as classificações: ausente, leve, moderada e intensa. O conjunto fuzzy estabelecido para tal variável é apresentado na [Figura 19](#).

Figura 19 – Distribuição fuzzy da variável de entrada Dispneia.



Fonte: Autoria própria.

2.1.4 Mialgia

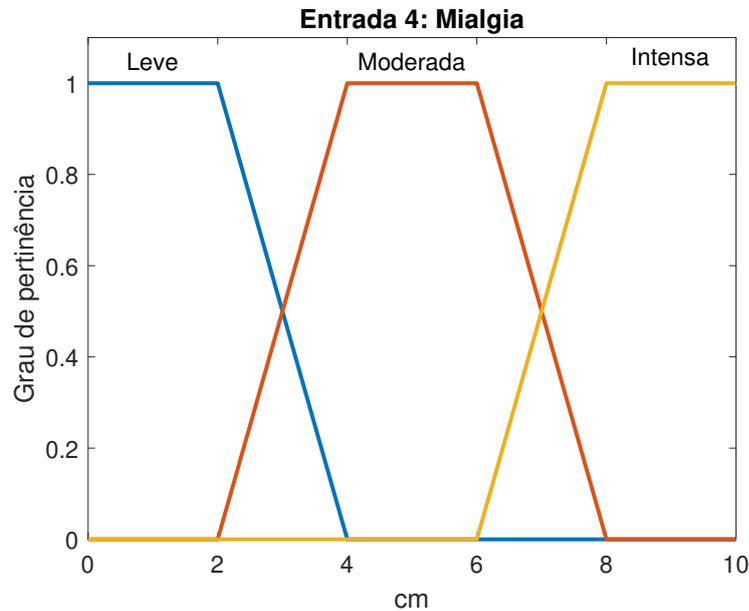
Assim como as classificações para a variável Dispneia apresentam questões subjetivas inerentes à intensidade desses sintomas, as classificações para a variável Mialgia também as apresentam. A avaliação da intensidade de mialgia pode sofrer influência da subjetividade, uma vez que é difícil explicitar a real potência da dor de cada um. Apesar dessa subjetividade, [Sousa e Silva \(2005\)](#) sugere o uso da Escala Analógica Visual para quantificar a dor, sendo esta, atualmente, um dos instrumentos mais amplamente usado para mensurar a dor.

Ela consiste de uma linha de 10 cm, com âncoras em ambas as extremidades. Numa delas é marcada “nenhuma dor” e na outra extremidade é indicada “a pior dor possível”, ou frases similares. Pacientes ou sujeitos experimentais indicam a magnitude da dor simplesmente marcando a linha, e uma régua é usada para quantificar a mensuração numa escala de 0-100 mm. ([SOUSA; SILVA, 2005](#), p.500)

Tais marcações são feitas de forma crescente, ou seja, marcações que indicam ausência de dor estão mais próximos do 0 mm, enquanto marcações que indicam a pior dor possível estão mais próximos de 100 mm.

Novamente, para esse caso, não há gradações que permitam aferir com precisão a gravidade do sintoma, por isso, foram adotadas as seguintes classificações: leve, moderada ou intensa. O conjunto fuzzy estabelecido para tal variável é ilustrado na [Figura 20](#).

Figura 20 – Distribuição fuzzy da variável de entrada Mialgia.



Fonte: Autoria própria.

É importante destacar que, apesar da identificação dos sintomas ou do resultado da avaliação a ser proposta nesse trabalho, só é possível confirmar a presença do vírus por meio de testes clínicos que indicam se o paciente está infectado ou não. Geralmente um exame de reação em cadeia de polimerase via transcriptase reversa (rPT-PCR) é suficiente para aferir se o paciente está acometido pela COVID-19 ou não. (ISER et al., 2020, p.6)

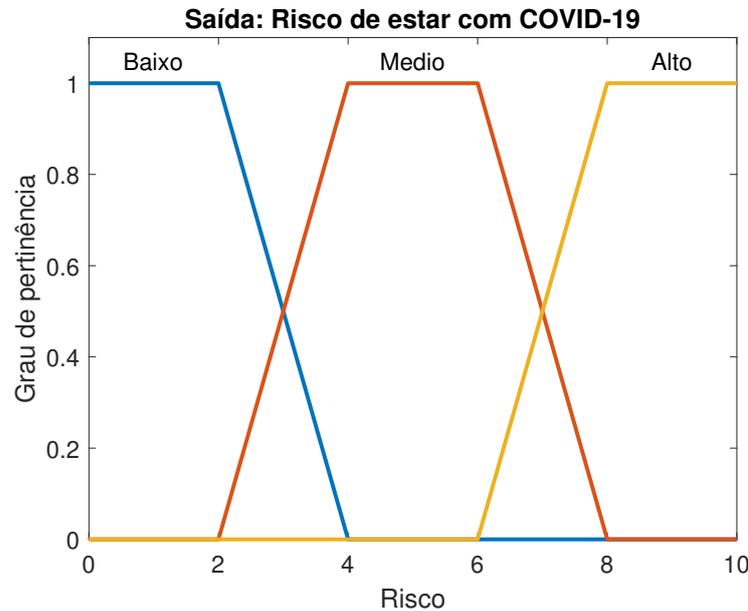
2.2 Variável de saída: Risco de um indivíduo estar contaminado

A saída que avalia o risco de estar contaminado com Covid-19 é um conjunto fuzzy para o qual foram estabelecidas 3 classificações: Risco Baixo, Risco Médio e Risco Alto.

As funções de pertinência para tal saída são apresentadas na Figura 21. As saídas indicam uma pontuação de 0 a 10, em que 0 significa a baixa possibilidade de estar com COVID-19, e 10, com alta possibilidade.

Para uma maior clareza sobre a possibilidade de um indivíduo estar infectado ou não, algumas considerações e definições contidas no documento do [Ministério da Saúde e Secretaria de Ciência, Tecnologia, Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde \(2020\)](#) foram utilizadas. Com isso, foi possível estabelecer as regras do SBRF, em que a saída do sistema é o risco de estar infectado com o coronavírus, descritas na próxima seção.

Figura 21 – Distribuição Fuzzy da Variável de Saída: Risco de Estar Contaminado.



Fonte: Autoria própria.

2.3 Base de regras

Após selecionar as variáveis linguísticas de entrada e saída, e os respectivos subconjuntos fuzzy, faz-se necessário estabelecer uma base de regras para a elaboração do SBRF. Desta forma, valendo-se desses subconjuntos, foram estabelecidas 72 regras para estimar o risco de um indivíduo estar contaminado com o coronavírus.

As regras levam em conta as diferentes classificações de cada um dos sintomas que indicam a possível presença da doença. Essas regras são apresentadas no Anexo A, e alguns exemplos de sua elaboração são dados a seguir com base em considerações e definições contidas no documento do [Ministério da Saúde e Secretaria de Ciência, Tecnologia, Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde \(2020\)](#).

Por exemplo, quanto ao quadro clínico inicial da doença, que é caracterizada como Síndrome Gripal, tem-se: “indivíduo com quadro respiratório agudo, caracterizado por sensação febril ou febre, mesmo que relatada, acompanhada de tosse ou dor de garganta ou coriza ou dificuldade respiratória” ([Ministério da Saúde; Secretaria de Ciência, Tecnologia, Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde, 2020, p.19](#)).

Já pacientes que desenvolvem os sintomas pertinentes à COVID-19 de forma mais forte, pode ter Síndrome Respiratória Aguda Grave (SRAG), definida pelo Ministério da Saúde como: “Síndrome Gripal que apresente: dispneia/desconforto respiratório ou Pressão persistente no tórax ou saturação de O₂ menor que 95% em ar ambiente ou coloração azulada dos lábios ou rosto” ([Ministério da Saúde; Secretaria de Ciência, Tecnologia,](#)

Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde, 2020, p.19).

Ainda, considerando os casos de indivíduos que detectam a presença do coronavírus no organismo e são sintomáticos, ou seja, manifestam um ou mais sintomas da doença, “aproximadamente 90% dos pacientes apresentam mais de um sintoma, sendo que 15% dos pacientes apresentam febre, tosse e dispneia” (Ministério da Saúde; Secretaria de Ciência, Tecnologia, Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde, 2020, p.21).

A seguir, é apresentado um exemplo considerando um paciente fictício.

2.4 Exemplo: Paciente fictício

Neste exemplo são considerados o método de inferência de Mamadani e o método de defuzzificação pelo centro de massa.

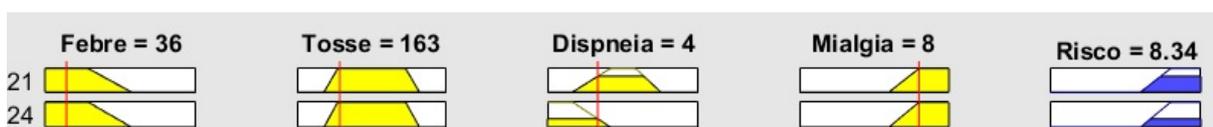
Considere um paciente fictício apresentando temperatura corporal de 36°C, tosse avaliada em 163 L/min, dispneia com grau 4, conforme Índice Basal de Mahler, e mialgia com grau 8, segundo a Escala Analógica Visual. Portanto, as regras fuzzy que inferem sobre esses valores são:

Se a febre é de Baixo Grau **E** a tosse é Média
E a dispneia é Moderada **E** a mialgia é Intensa
Então o risco de estar contaminado é Alto.

Se a febre é de Baixo Grau **E** a tosse é Média
E a dispneia é Intensa **E** a mialgia é Intensa
Então o risco de estar contaminado é Alto.

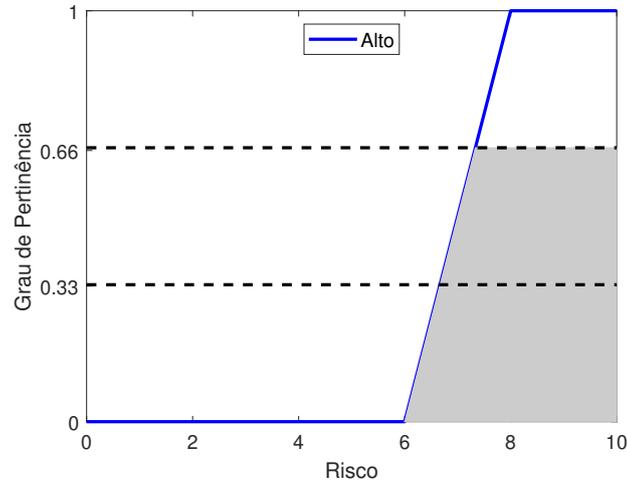
Na Figura 22 é apresentada uma representação gráfica dessas regras considerando os valores das entradas e respectivas saídas fuzzy. Na Figura 23 é apresentada uma representação gráfica da saída defuzzificada.

Figura 22 – Representação gráfica das entradas e respectivas saídas do paciente fictício da Seção 2.4.



Fonte: Autoria própria.

Figura 23 – Saída do SBRF considerando os sintomas apresentados.



Fonte: Autoria própria.

O método de inferência de Mamdani, para cada uma das regras, considera o menor grau de pertinência de cada uma das entradas. Para a primeira regra elencada, este valor corresponde a $\frac{2}{3}$ obtido pela variável Dispneia. Enquanto para a segunda regra o menor grau de pertinência é igual a $\frac{1}{3}$.

Em ambos os casos, a saída do SBRF refere-se a um risco alto de se estar com Covid-19. Pelo Método de Inferência de Mandani, utiliza-se o maior valor entre os resultados obtidos anteriormente, tendo, portanto, sua ordenada igual a $\frac{2}{3}$. A Figura 23 ilustra a situação apontada.

Para determinar o grau do risco de estar contaminada com COVID-19, realiza-se o cálculo de centro de massa da área em cinza da mesma Figura 23 pela equação (1.4), ou seja,

$$G(A) = \frac{\int_R u \varphi_A(u) du}{\int_R \varphi_A(u) du}.$$

Logo, a coordenada x do centro de massa é dada por:

$$G(A) = \frac{\int_6^{\frac{22}{3}} x \frac{x-6}{2} dx + \int_{\frac{22}{3}}^{10} x \frac{2}{3} dx}{\int_6^{\frac{22}{3}} \frac{x-6}{2} dx + \int_{\frac{22}{3}}^{10} \frac{2}{3} dx} = \frac{\frac{248}{81} + \frac{416}{27}}{\frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{374}{45}$$

Portanto, ao utilizar o método de defuzzificação pelo centro de massa, o resultado obtido para tal caso é um risco aproximado de 8,3 pontos do paciente estar infectado por coronavírus. Logo, esse paciente tem alta possibilidade de estar com COVID-19 devendo manter-se em isolamento domiciliar e realizar os exames laboratoriais para confirmar essa possibilidade, conforme orienta o [Ministério da Saúde e Secretaria de Ciência, Tecnologia, Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde](#) (2020, p. 62).

3 Lógica Fuzzy e a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo que norteia a formação dos currículos das redes de Ensino Infantil, Fundamental e Médio no Brasil. Foi regulamentada em 1996 por meio da Lei 9.394 de 20 de Dezembro de 1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

Art. 26 - Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. (BRASIL, 1996)

A partir de então, alguns documentos foram criados com o intuito de estabelecer esses currículos, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1997, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), em 2000, o Programa Currículo em Movimento, em 2008, entre outros. E, em setembro de 2015, foi apresentada a BNCC. Após isso, algumas modificações foram realizadas e, em dezembro de 2018, a sua versão mais atual foi homologada, já contando com as aprendizagens previstas para toda a Educação Básica.

Segundo o Ministério da Educação, a BNCC “estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica” (BRASIL, 2018a).

Ou seja, esse documento é uma diretriz que guia os conteúdos que devem prevalecer em cada uma das séries escolares no decorrer de todo o período acadêmico, destacando as competências que devem ser contempladas em cada um dos anos escolares.

Por competências entende-se como “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018b, p.8), enquanto “as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares” (BRASIL, 2018b, p.29).

Portanto, trabalhar com as habilidades e competências sugeridas pela BNCC perpassa buscar temas e conteúdos que se associam ao cotidiano dos alunos, a fim de fazer prevalecer a utilidade prática das matérias.

Esse capítulo, considerando o tema da dissertação, trata de possibilidades de se trabalhar algumas habilidades contempladas na BNCC em turmas de Ensino Médio utilizando alguns conceitos de Lógica Fuzzy.

Para o Ensino Médio, é colocado no documento que a área de Matemática e suas Tecnologias deve “construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade” (BRASIL, 2018b, p.471).

Partindo disso, nota-se que a Matemática pode e deve se interrelacionar com outras disciplinas. Dentre os temas e assuntos apresentados no decorrer do documento, uma das habilidades requeridas para essa disciplina no Ensino Médio (e nos outros ciclos) é o estudo sobre gráficos.

Uma contagem das habilidades requeridas na BNCC na área de Matemática para turmas de Ensino Médio, apontam que oito delas, de um total de quarenta e três, envolvem o estudo de gráficos. São elas:

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT102) Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decréscimo, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

(EM13MAT407) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (box-plot), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise (BRASIL, 2018b, pp.543-546).

Portanto, nota-se que o conteúdo de gráficos, de modo direto ou indireto, é recorrente para as turmas de Ensino Médio. Ressalta-se, ainda, a importância desse conteúdo, conforme apontam [Oliveira Neto, Silva e Serra \(2019\)](#).

Os gráficos são essenciais para o aprendizado do aluno do ensino fundamental, pois há uma interdisciplinaridade, em virtude da sua funcionalidade em outras disciplinas, como Biologia, Geografia, que representam taxas de crescimento, natalidade, além de estar presente nas aulas de Língua Portuguesa por meio dos gêneros textuais (textos jornalísticos, textos científicos, entre outros). ([OLIVEIRA NETO; SILVA; SERRA, 2019](#), p.5)

Pode-se ver, portanto, que os gráficos são um tema que possibilita o ensino por meio da interdisciplinaridade, conforme sugestão e orientação da BNCC. Surge daí a possibilidade de trabalhar diversos conceitos em turmas do Ensino Médio olhando para a Lógica Fuzzy, mais especificamente para um SBRF, o qual possibilita o uso gráficos para representar as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy.

Algumas habilidades contempladas na BNCC na área de Matemática e suas tecnologias para turmas de Ensino Médio se relacionam com o estudo e análise de gráficos. Além disso, “é válido ressaltar ainda que os gráficos estão presentes, principalmente, nos vestibulares nacionais, no qual são uma das competências exigidas nos Parâmetros Curriculares” ([OLIVEIRA NETO; SILVA; SERRA, 2019](#), p.4).

Além disso, conforme aponta [Corcoll-Spina \(2010\)](#), “[...] os conteúdos continuam sendo, na maioria das escolas, aplicados rigidamente com base em definições, nomenclatura e exercícios repetitivos, privilegiando o desenvolvimento algébrico e a aplicação de regras” ([CORCOLL-SPINA, 2010](#), p.30).

Como um SBRF traz situações que podem ser modeladas e analisadas graficamente, a proposta de um estudo de gráficos, valendo-se dessa proposta, pode ser interessante para o aluno, uma vez que pode ser possível trazer situações de seu cotidiano para esse fim.

Com isso, tratar um conteúdo relevante, tal como o estudo de gráficos para o Ensino Médio, a partir de uma abordagem não tão comum, pode ser um diferencial para motivar a aprendizagem dos estudantes, uma vez que se distancia do tradicionalismo apontado por [Corcoll-Spina \(2010\)](#).

Outro ponto a ser destacado nesse processo de estudo de gráficos por meio de uma abordagem fuzzy, é permitir a utilização da transversalidade apontada nos documentos norteadores dos currículos vigentes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são um desses documentos que orientam a educação no Brasil. No volume 8 dessa coleção é citado que “os Temas Transversais correspondem a questões importantes, urgentes e presentes sob várias formas na vida cotidiana” ([BRASIL, 1997](#), p.15).

Ou seja, o uso de uma situação, que seja comum aos estudantes para desenvolvimento de um conteúdo em sala de aula, pode gerar uma melhor compreensão daquilo que se pretende ensinar.

Valer-se de uma nova abordagem para trabalhar os conteúdos necessários para determinada série do Ensino Básico é importante, pois isso

[...] influencia diretamente no alcance ou não dos objetivos propostos para um determinado conteúdo, isto é, a forma como o professor ensina pode facilitar ou não a aquisição dos conhecimentos e o desenvolvimento de habilidades matemáticas, tais como contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar e explicar. (CONCEIÇÃO; DA MOTA, 2016, p.95)

Concomitantemente a isso,

Muitas vezes os conceitos matemáticos são ensinados de forma isolada, num processo mecânico e repetitivo para que o aluno memorize a sua solução. Essa forma de ensinar Matemática não contribui para o aprendizado do aluno, porque ele não consegue atribuir sentido àquilo que o professor ensina. (KAWAMURA, 2009, p.17)

Portanto, como um SBRF pode ser analisado a partir de gráficos, então, utilizá-lo a fim de introduzir o tópico sobre esse assunto para turmas de Ensino Médio pode ser uma alternativa para o estudo deste tema, permitindo um distanciamento do tradicionalismo matemático como um processo mecânico ou entendido de forma isolada.

3.1 Ensino de Gráficos e a Teoria Fuzzy

Esta seção tem como objetivo discutir aspectos significativos no ensino de gráficos para turmas de Educação Básica com um olhar sobre a Lógica Fuzzy.

É importante destacar que o presente trabalho não tem o intuito de fornecer sequências didáticas ou propor atividades que sejam imediatamente aplicadas a turmas regulares do Ensino Básico, ficando como proposta para trabalhos futuros.

Vale ressaltar, ainda, que as habilidades elencadas nas propostas a seguir não são restritas e nem exclusivas, ou seja, não são somente elas que podem ser contempladas nas sugestões, mas podem servir como parâmetro para a possibilidade de desenvolver um trabalho mais específico para o Ensino Básico.

As definições (1.2.9) e (1.2.10), apresentadas anteriormente, representam os números fuzzy triangular e trapezoidal, respectivamente. Ambos têm, em seus nomes, ligação com a forma de seu gráfico, o que cria uma possibilidade de intersecção entre o gráfico e os conjuntos fuzzy.

A forma dos gráficos é de fácil assimilação aos de funções polinomiais de primeiro grau. Pode-se associar cada aresta da forma geométrica (triângulo ou trapézio) a uma

função polinomial de primeiro grau. Surge, então, a possibilidade de, de acordo com o comportamento da função, discutir possíveis situações que levem a uma inclinação mais ou menos acentuada. Tal possibilidade é amparada pela habilidade EM13MAT101 da BNCC.

Dentro dessa possibilidade, observar os pontos que formam cada uma das retas de um número fuzzy e os pontos em que o gráfico muda de comportamento, além de analisar o grau de inclinação de cada uma dessas retas por meio do coeficiente angular, são possibilidades para complementar uma proposta de ensino de gráficos em sala de aula.

Para além dos números fuzzy, analisar gráficos a partir de um SBRF também pode ser interessante, já que, conforme explicitado, um SBRF traz, a partir dos gráficos, importantes considerações a respeito do objeto ou fenômeno estudado.

Pode-se notar que, dessa maneira, há uma contribuição positiva no ensino de gráficos pois traz elementos de um problema real mostrando diferentes comportamentos em um mesmo gráfico, o que possibilita, portanto, o estudo de uma função dada por partes. As habilidades EM13MAT301 e EM13MAT404 são contempladas em atividades trabalhadas sob essa perspectiva, pois vale-se de problemas de cotidiano com funções definidas por uma ou mais sentenças.

Como há problemas do cotidiano que podem ser modelados por um SBRF, é possível buscar informações publicadas em meios oficiais que possam ser modelados por conjuntos fuzzy para, por meio dos gráficos, os alunos terem a capacidade de avaliar a veracidade de tal informação bem como fazer inferências sobre o tema apresentado. Para tal proposta, a habilidade EM13MAT102 surge como referência para o trabalho a ser desenvolvido.

Ainda é possível, com base no comportamento do gráfico, buscar entender a realidade em que o fenômeno estudado está inserido e, com isso, inferir possíveis causas e soluções para o problema proposto, bem como buscar conjecturar possíveis cenários futuros baseando-se nas informações contidas no gráfico.

A interpretação de um gráfico é de extrema importância pois auxilia no entendimento da informação principal, bem como destaca elementos importantes do tema tratado. Partindo disso, olhar para as escalas dos gráficos de um SBRF, bem como de suas unidades de medida, são elementos importantes para analisar se a interpretação e a transmissão das informações estão ocorrendo de modo satisfatório.

Tendo como referência a habilidade EM13MAT406, valer-se de dados coletados para a criação de um SBRF pode ser viável para se trabalhar em sala de aula a construção do gráfico observando os elementos que o compõem. Mais do que plotar os pontos do gráfico no plano cartesiano, discutir as funções e o que elas representam para o contexto do SBRF pode ajudar o aluno a desenvolver o senso crítico para situações do cotidiano.

Por fim, trabalhar com os conceitos de domínio, imagem e contradomínio de funções

por meio de números fuzzy ou de gráficos gerados por um SBRF pode ser pertinente a fim de desenvolver a habilidade EM13MAT404 requerida na BNCC. E, ainda, discussões acerca do contradomínio de funções fuzzy podem gerar uma curiosidade por parte dos alunos para compreender o porquê de eles sempre estarem no intervalo real $[0, 1]$.

Como sugerido, interrelacionar o ensino de gráficos e conjuntos fuzzy pode ser uma alternativa ao ensino quando este ocorre de maneira descontextualizada ou desconexa da realidade dos alunos.

Considerações Finais

Neste trabalho foi abordado um tema atual – a pandemia de COVID-19 que assola o mundo desde 2020 – sob o viés da Matemática, buscando trazer importantes contribuições ao combate desta doença.

Para isso, a Modelagem Matemática foi utilizada como um método de pesquisa para investigar um problema real e estudar seu comportamento. Por meio da Teoria de Conjuntos Fuzzy, foi possível contemplar as subjetividades intrínsecas dos sintomas de COVID-19, características do modelo elaborado.

O modelo elaborado nesse trabalho pode, portanto, auxiliar a identificar casos de contaminação com COVID-19, uma vez que considera os principais sintomas para avaliar o risco de estar infectado com a doença. Assim, pode-se sugerir utilizá-lo em um processo de triagem, antes de serem solicitados exames laboratoriais mais específicos com custos envolvidos. Ressalta-se que, por ora, não houve validação deste trabalho, inviabilizando-o de ser posto em prática.

É importante destacar que mais estudos devem ser feitos para corroborar e validar a eficácia do método apresentado. Ademais, também é importante uma avaliação em maior escala dos pacientes que apresentam doenças crônicas cujos sintomas estejam relacionados aos sintomas considerados. Essas novas considerações são indicadas como proposta de trabalho futuro, a fim de tornar o diagnóstico prévio do coronavírus ainda mais fidedigno.

Neste trabalho, também foram buscadas maneiras de relacionar conceitos da Teoria de Conjuntos Fuzzy ao ensino de Matemática do Ensino Básico, tendo como referências as habilidades contidas na BNCC. Neste sentido, o ensino de gráficos apresenta-se mais atrativo para fazer uma associação entre os conceitos da lógica fuzzy e o Ensino Básico. Deste modo, outra proposta de trabalho futuro é a elaboração de sequências didáticas ou atividades envolvendo o ensino de gráficos e a Lógica Fuzzy para turmas de Ensino Básico valendo-se das ideias trazidas na Seção 3.1.

Referências

- BARROS, L. C. de; BASSANEZI, R. C. Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática. 2. ed. Campinas, SP: Coleção IMECC, 2006.
- BASSANEZI, R. C. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. 4. ed. Campinas, SP: Contexto, 2002.
- BASSANI, L. T. Sistema de base de regras fuzzy como método alternativo para avaliar o risco de doenças cardiovasculares. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — IMECC-UNICAMP, Campinas, SP, 2016.
- BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 1996.
- BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: apresentação dos temas transversais. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: Setembro de 2021.
- BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília, BF, 2018.
- CAETANO, M. T. P. Modelagem Matemática da Influenza A(H1N1). Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — IMECC - UNICAMP, 2010.
- CHURRO, T. S. A. Impacto da aplicação de um programa de educação em doentes com DOPC em fase estável. Tese (Mestrado em Saúde e Aparelho Respiratório) — FCM-ULN, Lisboa, 2010.
- CONCEIÇÃO, L. da S.; DA MOTA, D. M. Transversalidade em matemática uma realidade possível na aprendizagem de função afim no 9º ano. Revista Amazônica de Ensino de Ciências, Universidade do Estado do Amazonas, v. 6, n. 1, p. 469–513, 2016.
- CORCOLL-SPINA, C. O. Lógica fuzzy: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático. Tese (Doutorado em Educação) — FE - USP, São Paulo, SP, 2010.
- CSSE-JHU. Dashboard by the Center for Systems Science and Engineering (CSSE) at Johns Hopkins University (JHU). Center for Systems Science and Engineering at Johns Hopkins University, 2021. Disponível em: <<https://www.arcgis.com/apps/dashboards/bda7594740fd40299423467b48e9ecf6>>. Acesso em: Agosto de 2021.
- DELGADO, G. S.; DINIZ, M. M. Modelagem matemática da dinâmica populacional de afídeos com abordagem fuzzy. Grupo de Biomatemática IMECC - UNICAMP, v. 28, p. 115–130, 2018.
- FERREIRA NETTO, R. G.; CORRÊA, J. W. do N. Epidemiologia do surto de doença por coronavírus (covid-19). Desafios - Revista Interdisciplinar da Universidade Federal do Tocantins, v. 7, n. Especial 3, p. 18–25, 2020.

FREITAS, F. S. de; PARREIRA, V. F.; IBIAPINA, C. da C. Aplicação clínica do pico de fluxo da tosse: uma revisão de literatura. Fisioterapia em Movimento, Scielo Brasil, v. 23, n. 3, 2010.

GOMES, L. T. Um estudo sobre o espalhamento da dengue usando equações diferenciais parciais e lógica fuzzy. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — IMECC - UNICAMP, Campinas, SP, 2009.

ISER, B. P. M. et al. Definição de caso suspeito da covid-19: uma revisão narrativa dos sinais e sintomas mais frequentes entre os casos confirmados. Epidemiologia e Serviços de Saúde, Scielo Brasil, v. 29, n. 3, 2020.

JAFELICE, R. S. da M.; BARROS, L. C. de; BASSANEZI, R. C. Usando a teoria fuzzy na modelagem de fenômenos biológicos. In: II Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy (II CBSF). Natal, RN: [s.n.], 2012.

KAWAMURA, E. M. Temas Transversais: contribuições para o ensino e aprendizagem de Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — UNB, Brasília, DF, 2009.

LLOR, C.; MORAGAS, A. Coronavirus y atención primaria. Atención Primaria, Elsevier, v. 52, n. 5, p. 294–296, 2020.

Ministério da Saúde; Secretaria de Ciência, Tecnologia, Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde. Diretrizes para diagnóstico e tratamento da COVID-19. 2020. Disponível em: <<https://saude.rs.gov.br/upload/arquivos/202004/14140600-2-ms-diretrizes-covid-v2-9-4.pdf>>. Acesso em: Agosto de 2021.

OLIVEIRA NETO, C. B. de; SILVA, L. R. da; SERRA, F. P. Letramento e numeramento: Uma perspectiva sobre o ensino de gráficos no ensino fundamental. In: VI Congresso Nacional de Educação. Campina Grande, PB: [s.n.], 2019.

OMS. OMS afirma que COVID-19 é agora caracterizada como pandemia. Organização Mundial da Saúde, 2020. Disponível em: <<https://www.paho.org/pt/news/11-3-2020-who-characterizes-covid-19-pandemic>>. Acesso em: Agosto de 2021.

SANTOS, W. P. dos et al. Pico de fluxo da tosse em pacientes idosos com pneumonia adquirida na comunidade em tratamento hospitalar. Revista de Psicologia, v. 13, n. 48, p. 839–851, 2019.

SILVA, B. E. N.; SILVA, R. C. A. da; ATHAYDE JUNIOR, G. B. Previsão de consumo de água via modelagem matemática de sistema de abastecimento de água em municípios do estado do Ceará. In: IV Encontro Regional de Estudantes de Engenharia Civil. João Pessoa, PB: [s.n.], 2017.

SOUSA, F. F.; SILVA, J. A. da. A métrica da dor (dormetria): problemas teóricos e metodológicos. Rev. Dor, v. 6, n. 1, p. 469–513, 2005.

VELLOSO, M.; COSTA, C. P.; OZEKI, C. M. Métodos de mensuração da dispneia: Uma revisão da literatura. ConSCIENTIAE SAÚDE, Revista Científica UNINOVE, v. 1, p. 35–39, 2002.

VOLTARELLI, J. C. Febre e inflamação. Semiologia e Fisiopatologia Clínicas, v. 27, n. 1/2, p. 7–48, 1994.

WHO. World health statistics 2021. [S.l.]: World Health Organization (WHO), 2021.

ANEXO A – Regras Fuzzy para o SBRF elaborado

A seguir, são apresentadas as regras formuladas para o Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Capítulo 2.

Febre	Tosse	Dispneia	Mialgia	Risco
Baixa	Eficaz	Ausente	Leve	Baixo
Baixa	Eficaz	Ausente	Moderada	Baixo
Baixa	Eficaz	Ausente	Intensa	Baixo
Baixa	Eficaz	Leve	Leve	Baixo
Baixa	Eficaz	Leve	Moderada	Médio
Baixa	Eficaz	Leve	Intensa	Médio
Baixa	Eficaz	Moderada	Leve	Baixo
Baixa	Eficaz	Moderada	Moderada	Alto
Baixa	Eficaz	Moderada	Intensa	Alto
Baixa	Eficaz	Intensa	Leve	Baixo
Baixa	Eficaz	Intensa	Moderada	Médio
Baixa	Eficaz	Intensa	Intensa	Alto
Baixa	Média	Ausente	Leve	Baixo
Baixa	Média	Ausente	Intensa	Baixo
Baixa	Média	Ausente	Moderada	Médio
Baixa	Média	Leve	Leve	Médio
Baixa	Média	Leve	Moderada	Médio
Baixa	Média	Leve	Intensa	Médio
Baixa	Média	Moderada	Leve	Médio
Baixa	Média	Moderada	Moderada	Médio
Baixa	Média	Moderada	Intensa	Alto
Baixa	Média	Intensa	Leve	Alto
Baixa	Média	Intensa	Moderada	Alto
Baixa	Média	Intensa	Intensa	Alto
Baixa	Ineficaz	Ausente	Leve	Baixo
Baixa	Ineficaz	Ausente	Moderada	Médio
Baixa	Ineficaz	Ausente	Intensa	Médio
Baixa	Ineficaz	Leve	Leve	Médio
Baixa	Ineficaz	Leve	Moderada	Médio
Baixa	Ineficaz	Leve	Intensa	Médio
Baixa	Ineficaz	Moderada	Leve	Médio
Baixa	Ineficaz	Moderada	Moderada	Alto
Baixa	Ineficaz	Moderada	Intensa	Alto
Baixa	Ineficaz	Intensa	Leve	Alto
Baixa	Ineficaz	Intensa	Moderada	Alto
Baixa	Ineficaz	Intensa	Intensa	Alto

Tabela 1 – Regras do SBRF para auxílio na detecção de COVID-19.(Parte 1).

Fonte: Autoria própria.

Febre	Tosse	Dispneia	Mialgia	Risco
Alta	Eficaz	Ausente	Leve	Baixo
Alta	Eficaz	Ausente	Moderada	Baixo
Alta	Eficaz	Ausente	Intensa	Médio
Alta	Eficaz	Leve	Leve	Médio
Alta	Eficaz	Leve	Moderada	Médio
Alta	Eficaz	Leve	Intensa	Alto
Alta	Eficaz	Moderada	Leve	Médio
Alta	Eficaz	Moderada	Moderada	Alto
Alta	Eficaz	Moderada	Intensa	Alto
Alta	Eficaz	Intensa	Leve	Alto
Alta	Eficaz	Intensa	Moderada	Alto
Alta	Eficaz	Intensa	Intensa	Alto
Alta	Média	Ausente	Leve	Médio
Alta	Média	Ausente	Intensa	Médio
Alta	Média	Ausente	Moderada	Alto
Alta	Média	Leve	Leve	Médio
Alta	Média	Leve	Moderada	Médio
Alta	Média	Leve	Intensa	Alto
Alta	Média	Moderada	Leve	Alto
Alta	Média	Moderada	Moderada	Alto
Alta	Média	Moderada	Intensa	Alto
Alta	Média	Intensa	Leve	Alto
Alta	Média	Intensa	Moderada	Alto
Alta	Média	Intensa	Intensa	Alto
Alta	Ineficaz	Ausente	Leve	Médio
Alta	Ineficaz	Ausente	Moderada	Médio
Alta	Ineficaz	Ausente	Intensa	Médio
Alta	Ineficaz	Leve	Leve	Médio
Alta	Ineficaz	Leve	Moderada	Alto
Alta	Ineficaz	Leve	Intensa	Alto
Alta	Ineficaz	Moderada	Leve	Alto
Alta	Ineficaz	Moderada	Moderada	Alto
Alta	Ineficaz	Moderada	Intensa	Alto
Alta	Ineficaz	Intensa	Leve	Alto
Alta	Ineficaz	Intensa	Moderada	Alto
Alta	Ineficaz	Intensa	Intensa	Alto

Tabela 2 – Regras do SBRF para auxílio na detecção de COVID-19.(Parte 2).

Fonte: Autoria própria.