Universidade Estadual de Londrina

REGINALDO APARECIDO ALVES DA SILVA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS: ALGUNS RECORTES HISTÓRICOS E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO CONCEITOS DO CÁLCULO INTEGRAL

Londrina/Paraná

2021

REGINALDO APARECIDO ALVES DA SILVA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS: ALGUNS RECORTES HISTÓRICOS E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO CONCEITOS DO CÁLCULO INTEGRAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em nível de mestrado profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção de título de mestre.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho

Londrina/Paraná

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL.

S586 Silva, Reginaldo Aparecido Alves da.

Áreas de figuras planas: Alguns recortes históricos e uma proposta de atividade para o Ensino Médio utilizando conceitos do Cálculo Integral / Reginaldo Aparecido Alves da Silva. - Londrina, 2021. 148 f. : il.

Orientador: Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -

Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2021.

Inclui bibliografia.

1. Áreas de figuras planas. - Tese. 2. Proposta de atividade. - Tese. 3. Conceitos de integral. - Tese. I. Carvalho, Ana Márcia Fernandes Tucci de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

REGINALDO APARECIDO ALVES DA SILVA

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS: ALGUNS RECORTES HISTÓRICOS E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO CONCEITOS DO CÁLCULO INTEGRAL

BANCA EXAMINADORA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em nível de mestrado profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção de título de mestre.

____

Orientadora: Profª. Drª. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina

____

Profª. Drª. Patrícia Sândalo Pereira
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

____

Profª. Drª. Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 16 de dezembro de 2021

Dedico este trabalho primeiramente a DEUS, também aos meu familiares e amigos, em especial a minha mãe, minha avó dona Maria (in memorian) e a minha esposa querida Tainá.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a DEUS, que me concedeu saúde e me ajudou a não desanimar, também pela oportunidade e privilégio de enfrentar cada obstáculo ao longo do percurso e de poder chegar até aqui, sou grato pelo crescimento pessoal que obtive ao decorrer desse curso, agradeço a Ele por me capacitar e me sustentar em todas as coisas.

Agradeço a minha esposa Tainá por toda a paciência, apoio e incentivo, a ideia do tema desse trabalho ela quem teve primeiro, o que certamente contribuiu em muito para este desenvolvimento.

Agradeço a minha família por todo apoio que sempre tive quando comentava a respeito, sempre recebi palavras positivas e de ânimo.

Agradeço a professora Ana Márcia por aceitar ser minha orientadora, fez esse papel muito bem, com dedicação e sempre buscando o melhor para a realização desse trabalho, agradeço as correções, instruções e a paciência que teve em cada uma das perguntas, dúvidas ou questionamentos.

Agradeço também aos professores da UEL que fizeram parte desse processo, agradeço todo esforço e todo ensinamento, sem dúvidas cada um desses professores tem sua parcela de contribuição que muito me ajudou e continuará a ajudar ao longo da vida.

Aos colegas do PROFMAT que comigo compartilharam muitas experiências, me ajudaram muito nas dúvidas, nas atividades, nos trabalhos, enfim, me ajudaram a crescer.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuiu para que eu chegasse até esse momento.

Sem sacrifícios não há vitória!

Opitmus Prime

SILVA, Reginaldo Aparecido Alves da. **Áreas de Figuras Planas: Alguns Recortes Históricos e uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio utilizando conceitos do Cálculo Integral.** 2021. 148 fls. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a temática do cálculo de áreas de figuras planas, com o auxílo da História da Matemática, com alguns recortes históricos e cronológicos sobre esse tema. Além disso, apresentamos uma proposta de atividade para o Ensino Médio, para o qual buscamos inspiração nas ideias iniciais do Cálculo Integral. Entendemos que a utilização da História da Matemática na sala de aula permite reconstruir conceitos, enaltecendo os esforços contínuos daqueles que se dedicaram ao desenvolvimento da Matemática e possibilitando aos estudantes a valorização das práticas sociais que permitiram a descoberta de vários conceitos da Matemática. A metodologia geral para o desenvolvimento do trabalho foi a pesquisa bibliográfica. Para a realização da atividade para o Ensino Médio, fizemos uso da metodologia da Resolução de Problemas e contamos com o auxílio do recurso do software Geogebra, por ser um software gratuito. O cálculo de área de regiões curvas abordou conceitos intuitivos do Cálculo Integral, permitindo uma aproximação da Educação Superior com a Educação Básica. A contextualização deu-se a partir da geografia local, pois foi escolhido o contorno do Lago Igapó em Londrina como região de figura plana a ser tratada. A atividade não foi diretamente aplicada na sala de aula por causa das questões da pandemia que nos acometeu, todavia, espera-se que essa atividade proposta seja uma ferramenta instigante tanto para professores como para estudantes do Ensino Médio.

Palavras-chave: Área de figuras planas. História da Matemática. Cálculo Integral. Educação Matemática.

SILVA, Reginaldo Aparecido Alves da. **Areas of plane figures: some historical fragments and an activity proposal for High School using concepts from Integral Calculus.** 2021. 148 fls. Dissertation (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) – Londrina State University, Londrina, 2021.

ABSTRACT

In this work we present some studies on calculating areas of plane figures, with the help of the History of Mathematics, with some historical and chronological fragments on this theme. In addition, we present an activity proposal for High School for which we seek inspiration in the initial ideas of Integral Calculus. We understand that the use of the History of Mathematics in the classroom allows for a reconstruction of concepts, praising the continuous efforts of those who dedicated themselves to the development of Mathematics and enabling students to appreciate the social practices that allowed the discovery of various Mathematics concepts. The general methodology for the development of the work was the bibliographical research.To carry out the activity for High School, we used the Problem Solving methodology and had the help of the Geogebra software resource, as it is free software. The calculation of the area of curved regions approached intuitive concepts of Integral Calculus, allowing for an approximation between Higher Education and Basic Education. The contextualization was based on the local geography, as the contour of Lago Igapó in Londrina was chosen as the plane figure region to be treated. The activity was not directly applied in the classroom because of the issues of the pandemic that affected us, however, it is expected that this proposed activity will be an exciting tool for both teachers and high school students.

Key words: Area of plane figures. History of Mathematics. Integral Calculus. Mathematical Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fragmento dos Elementos de Euclides 27
Figura 2 – Construção de paralelogramo 31
Figura 3 – Construção de paralelogramo detalhada 32
Figura 4 – Triângulos 36
Figura 5 – Triângulos sobre bases iguais 36
Figura 6 – Triângulo com extensão de quadrados 1 37
Figura 7 – Triângulo com extensão de quadrados 2 38
Figura 8 – Triângulo com extensão de quadrados 3 39
Figura 9 – Triângulo com extensão de quadrados 4 39
Figura 10 – Triângulo com extensão de quadrados 5 40
Figura 11 – Pentágono e paralelogramo 42
Figura 12 – Pentágono e paralelogramos 43
Figura 13 – Reta AD 43
Figura 14 – Retângulos e quadrados 44
Figura 15 – Semi-circunferência 45
Figura 16 – Parábola com inscrição de triângulos 52
Figura 17 – Parábola com inscrição de triângulos invertida 54
Figura 18 – Função f(x) 56
Figura 19 – Curva com linhas paralelas 58
Figura 20 – Curva com linhas na mesma origem 58
Figura 21 – Curva com linhas tangentes 59
Figura 22 – Curva com linhas normais 59
Figura 23 – Curva com elementos destacados 62
Figura 24 – Lago Igapó II 91
Figura 25 – Contorno lago Igapó II 91
Figura 26 – Contorno superior do lago 92
Figura 27 – Contorno inferior do lago 92
Figura 28 – Contorno inferior do lago refletido 93
Figura 29 – Contorno superior do lago com pontos 93
Figura 30 – Contorno inferior do lago com pontos 93
Figura 31 – Parte do lago destacada 95
Figura 32 – Parte do lago ampliada 96

Figura 33 – Guia de atividade 97
Figura 34 – Barra de ferramentas geogebra 97
Figura 35 – Resolução 1 98
Figura 36 – Barra de ferramentas ângulo 98
Figura 37 – Barra de ferramentas seleção 99
Figura 38 – Barra de ferramentas área 99
Figura 39 – Resolução 1 com área 99
Figura 40 – Resolução 2 100
Figura 41 – Resolução 2 com área 100
Figura 42 – Guia de atividade 2 102
Figura 43 – Resolução 3 102
Figura 44 – Resolução 3 com área 103
Figura 45 – Resolução 4 103
Figura 46 – Resolução 4 com área 104
Figura 47 – Parte do lago destacada 2 105
Figura 48 – Parte do lago ampliada 2 106
Figura 49 – Guia de atividade 3 107
Figura 50 – Resolução 5 107
Figura 51 – Resolução 5 com área 108
Figura 52 – Resolução 6 109
Figura 53 – Resolução 6 com área 109
Figura 54 – Guia de atividade 2 111
Figura 55 – Resolução 7 111
Figura 56 – Resolução 7 com área 112
Figura 57 – Resolução 8 113
Figura 58 – Resolução 8 com área 113
Figura 59 – Função $y = 11.6x$ 116
Figura 60 – Função $y = -2.3 x^2 + 2.05x + 0.36$ 116
Figura 61 – Função $y = -2.3 x^2 + 2.05x + 0.36$ detalhada 1 117
Figura 62 – Função $y = -2.3 x^2 + 2.05x + 0.36$ detalhada 2 118
Figura 63 – Função $y = -0.23x + 0.93$ 119
Figura 64 – Função $y = -0.12x = 1.12$ 119
Figura 65 – Função $y = -0.47x + 2.71$ 120

Figura 66 – Função $y = 0.41x – 1.42$ 121
Figura 67 – Função $y = -0.19x + 1.47$ 121
Figura 68 – Função $y = -1.47x + 8.01$ 122
Figura 69 – Função $y = -0.05x + 0.71$ 122
Figura 70 – Função $y = 0.2x – 0.9$ 123
Figura 71 – Função $y = -2.04x + 20.39$ 124
Figura 72 – Função $y = 3x$ 124
Figura 73 – Função $y = 0.34x + 0.23$ 125
Figura 74 – Função $y = 0.36x + 0.08$ 125
Figura 75 – Função $y = 0.36x + 0.28$ 126
Figura 76 – Função $y = 0.16x + 0.77$ 126
Figura 77 – Função $y = 0.16x + 0.83$ 127
Figura 78 – Função $y = 0.05x + 2.03$ 128
Figura 79 – Função $y = 0.39x + 4.11$ 128
Figura 80 – Função $y = 0.11x + 2.13$ 129
Figura 81 – Função $y = 0.12x + 0.47$ 129
Figura 82 – Função $y = 0.01x + 1.5$ 130
Figura 83 – Função $y = 0.48x + 5.26$ 130
Figura 84 – Função $y = -0.78x + 8.23$ 131
Figura 85 – Função $y = -35.81x^2 + 708.02x - 3499.16$ 132
Figura 86 – Função $y = -35.81x^2 + 708.02x - 3499.16$ detalhada 1 133
Figura 87 – Função $y = -35.81x^2 + 708.02x - 3499.16$ detalhada 2 134
Figura 88 – Contorno do lago Igapó II detalhado 135

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Diferença das teorias entre Newton e Leibniz.. 63
Tabela 2 – Cronograma da atividade 89

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT - Associação Brasileira de Norma Técnica

a.E.C - Antes da Era Cristã

DCE - Diretrizes Curriculares Estaduais

DCEB - Diretrizes Curriculares da Educação Básica

HPM - International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics

ICMI - Comissão Internacional de Ensino de Matemática

NBR - Norma Brasileira

PCN - Parâmetros curriculares Nacionais

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Pública

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

SBHMat - Sociedade Brasileira de História da Matemática

UEL - Universidade Estadual de Londrina

UFSM - Universidade Federal de Santa Maria

UFF - Universidade Federal de Fluminense

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO..17

2. REVISÃO DA LITERATURA 22

2.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO..................23

2.2 CONTEXTOS HISTÓRICOS DO CÁLCULO E DOS PROBLEMAS DE ÁREA....25

2.2.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXAUSTÃO 51

2.3 ENSINO DE CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA 64

2.3.1 CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA 64

2.3.2 ENSINO DE CÁLCULO NO NIVEL SUPERIOR 68

2.3.3 ENSINO DE CÁLCULO EM GERAL 71

2.3.4 DIFICULDADES NO ENSINO DE CÁLCULO 72

2.3.5 LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS NO ENSINO MÉDIO? 74

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS...80

3.1 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA 80

3.2 O USO DAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA 81

3.2.1 SOFTWARE GEOGEBRA (METODOLOGIA DA ATIVIDADE).........................82

3.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS (METODOLOGIA DA ATIVIDADE)..................83

4. PROPOSTA DE ATIVIDADE...86

4.1 ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES 86

4.2 ATIVIDADES PRESENTES NA PROPOSTA...87

4.3 OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS DA PROPOSTA 88

4.4 ATIVIDADE 1: ÁREA DA SUPERFÍCIE DO LAGO IGAPÓ II 89

4.4.1 CÁLCULO DA ÁREA DA SUPERFÍCIE DO LAGO IGAPÓ II........................... 90

5. ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE A PROPOSTA 138

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS..142

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 145

INTRODUÇÃO

Apresentamos nesse trabalho uma discussão sobre, e uma proposta para, trabalhar com área de figuras planas irregulares na Educação Básica, pois geralmente, essas regiões e suas respectivas áreas não são exploradas nesse momento de ensino.

A ideia preliminar deste trabalho, cujo tema principal destaca-se o Cálculo de Área em regiões curvas, surgiu com reflexões e inquietações a respeito de minha própria vivência acadêmica. Ainda que eu compreendesse a importância do cálculo de áreas de figuras planas tratado na Educação Básica, ao ingressar na Universidade Estadual de Londrina (UEL), notei que apenas calcular áreas das figuras ‘regulares’ como triângulos e quadriláteros, em geral, não seriam suficientes para resolver ‘todos os problemas’ relacionado a esse tema, uma vez que existem muitas figuras planas compostas por partes com curvas.

Por esse motivo, apresentamos uma atividade para que alunos da Educação Básica venham a conhecer problemas mais complexos[1] relacionados ao cálculo de área, ressaltando que em algum dia ou em algum momento de suas vidas tais conceitos possam ser úteis ou até mesmo necessários. No entanto, ainda que não haja essa necessidade, poderá ficar o aprendizado, além de, certamente funcionar como um incentivo para os alunos que optarem por ingressar na universidade em áreas exatas e vierem a conhecer o Cálculo Diferencial e Integral nas matrizes curriculares.

Acreditamos que essa proposta atende aos requisitos exigidos pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), pois de acordo com o Artigo 21 do Regimento Geral do Programa, “O Trabalho de Conclusão de Curso versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica e que tenham impacto na prática didática em sala de aula” (SBM, 2020, p.5).

Dessa forma, ampliamos os estudos relacionados aos conceitos de área, ou seja, do cálculo de área de uma figura plana regular para o cálculo de área de uma figura plana *irregular,* direcionada para o primeiro ano do Ensino Médio.

---

[1] Complexo no sentido de apresentar figuras constituídas por partes curvas.

Para obtermos a resolução numérica dessa proposta, utilizamos o *software* Geogebra, ressaltamos que esse é um software de livre acesso aos estudantes e professores, que proporciona a utilização de recursos de Geometria, Álgebra e Cálculo, pois tem relação direta com os conceitos abordados na proposta, entre eles destacamos o Cálculo Integral.

Para o desenvolvimento específico da tarefa proposta, foi escolhida a Metodologia de Resolução de Problemas. Esta escolha da perspectiva do ensino através da Resolução de Problemas se deu por conta das possibilidades que essa estratégia pode proporcionar, levando em conta que o professor tem escolhas em relação às abordagens realizadas em diferentes formas. Tal estratégia permite também ao estudante percorrer diferentes caminhos e optar por diferentes formas nas resoluções das atividades, acreditamos que esta estratégia contribui para o desenvolvimento e aprendizado dos alunos, pois, os resultados quando obtidos, não são apenas situações mecanizadas.

A proposta constitui-se em uma oportunidade para que o professor possa abordar e explorar os conceitos de área em regiões curvas a partir do cálculo de área de regiões tradicionais, em que imaginamos já ser de conhecimento dos estudantes, possibilitando assim a ampliação desse conceito.

Apresentamos uma sequência e uma sugestão de roteiro para o professor fazer os encaminhamentos que julgar necessários. Apresentamos também algumas das possíveis resoluções que os alunos podem apresentar, notando sempre que essa sequência é apenas uma sugestão para um encaminhamento dentre tantos possíveis, levando em conta que geralmente a maioria das propostas culmina em caminhos diferentes dos esperados ou mesmos supostos quando são aplicadas, então cabe ao professor às tomadas de decisão na hora da realização.

Destacamos aqui a importância de trabalhar com as tendências metodológicas do campo da Educação Matemática de acordo com as Diretrizes Curriculares, destacamos as seguintes: Resolução de Problemas, Etnomatemática, História da Matemática, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas e Investigação Matemática. Ainda de acordo com as Diretrizes Curriculares destacamos que:

> Nenhuma das tendências metodológicas apresentadas nestas Diretrizes esgota todas as possibilidades para realizar com eficácia o complexo processo de ensinar e aprender Matemática, por isso, sempre que possível, o ideal é promover a articulação entre elas. (PARANÁ, 2008, p. 68).

Considerando a importância dessas tendências metodológicas destacadas pelas Diretrizes Curriculares, buscamos recursos metodológicos, afim de que esses recursos oferecessem apoio para os conceitos trabalhados. Nesse sentido, a História da Matemática foi incorporada durante a realização deste trabalho, pois entendemos que o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, obtidos desde as civilizações primitivas pode ser estudado por tal metodologia.

Portanto, adotamos a História da matemática como uma ferramenta metodológica, apresentando uma perspectiva histórica em relação ao desenvolvimento dos conceitos intuitivos do Cálculo Integral que aqui apresentamos. Destacamos ainda:

> A abordagem histórica deve vincular as descobertas matemáticas aos fatos sociais e políticos, às circunstâncias históricas e às correntes filosóficas que determinaram o pensamento e influenciaram o avanço científico de cada época. A história da Matemática é um elemento orientador na elaboração de atividades, na criação das situações-problema, na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos. Possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos. (PARANÁ, 2008, p. 66).

Nesse panorama, apresentamos em nossa Revisão de Literatura, uma perspectiva histórica de como foram se desenvolvendo alguns conceitos do Cálculo durante o desenvolvimento da humanidade e como podemos relacionar a compreensão e o entendimento desses processos no sentido de auxiliar nosso sistema de ensino e aprendizagem em nosso cotidiano atual.

Apresentaremos também uma proposta de atividade salientando sobre as possibilidades e aplicabilidade de inserir os conceitos intuitivos do Cálculo Integral na Educação Básica, através do cálculo de área de figuras curvas utilizando o resultado aproximado da área dessas regiões, a metodologia de ensino escolhida para a aplicação da atividade foi à tendência Resolução de Problemas.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

O capítulo 2 tratará de uma breve Revisão da Literatura, sendo dividido em três partes.

Na primeira parte, discorremos sobre a História da Matemática, por entendermos que o desenvolvimento histórico dos conceitos abordados aqui está diretamente relacionado a essa tendência. Portanto, consideramos a História da Matemática como meio para apresentar o processo de evolução desses conceitos durante o desenvolvimento da humanidade ao longo do tempo.

Já na segunda parte, apresentaremos um contexto histórico sobre o desenvolvimento do Cálculo e dos problemas de área ao longo da história, serão explorados os principais trabalhos e suas contribuições, daremos destaque aos principais matemáticos com participação nesses trabalhos. Na terceira parte, abordamos tópicos sobre o ensino de Cálculo na Educação Básica, questionaremos sobre as possibilidades de trabalhar esses conceitos no Ensino Médio e sobre as atividades que seriam interessantes para explorar tais conceitos, espera-se que essas indagações contribuam para levantar mais questões a respeito desse tema.

Já no capítulo 3 encontra-se o Procedimento Metodológico em que destacamos a pesquisa bibliográfica, apresentamos uma breve reflexão sobre o uso das tecnologias no Ensino de Matemática. Fazemos também uma pequena abordagem em relação ao software Geogebra e por fim, apresentamos a Metodologia da Resolução de Problemas, a qual será utilizada no desenvolvimento das atividades propostas sobre áreas de figuras planas irregulares.

No capítulo 4, tratamos da atividade da proposta. Essa atividade foi elaborada com o objetivo de possibilitar a exploração dos conceitos já citados anteriormente. Destacamos que primeiramente ela será realizada em partes, sua construção será feita no Geogebra pelo autor, no qual disponibilizaremos os meio necessários para acessar essas atividades, ou seja, nosso objetivo é disponibilizar um *link*.

Ao acessar o link, as construções já estarão feitas, dessa forma o professor pode direcionar os alunos já para a parte ‘prática’ de resolução. Fica a cargo também do professor os direcionamentos necessários durante a execução da atividade. O objetivo principal é explorar o conceito de ampliação do cálculo de área para regiões curvas. O desenvolvimento completo da atividade com a obtenção do resultado permitirá descobrir qual é a área da superfície do Lago Igapó II, uma conhecida região de lazer em Londrina, lugar cujo entorno é utilizado usualmente para caminhadas.

No capítulo 5 apresentamos algumas reflexões sobre a proposta como um todo e seu desenvolvimento, também queremos mostrar nesse capítulo um encadeamento entre nossas escolhas e o desenvolvimento que de fato fizemos em relação às tendências metodológicas.

Nosso objetivo é apresentar um resumo desses entrelaçamentos que acreditamos ter feito ao longo da proposta de maneira unificada, pois entendemos que é possível reunir essas ideias e sistematizar melhor esses encadeamentos.

O capítulo 6 contém as considerações finais. Apresentamos as possibilidades de ensino dos conceitos intuitivos do Cálculo no Ensino Médio. Cabe ressaltar que não houve a possibilidade de aplicação dessa proposta na sala de aula, nesse momento por conta das questões de segurança e restrição sanitária causada pela pandemia da Covid-19.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, buscaremos apresentar o desenvolvimento histórico do conceito de cálculo de área de figuras planas.

Utilizaremos a História da Matemática como fundamentação teórica, pois nosso objetivo é que a evolução desse conceito seja apresentada de forma cronológica. Assim, apresentaremos os primeiros registros de área que temos conhecimento que remonta dos egípcios, na sequência desses fatos, apresentaremos os principais trabalhos relacionados à área que constam no livro Elementos de Euclides – a escolha desta obra se deu pelo fato da importância tanto desse livro quanto do autor no desenvolvimento da Matemática em geral, como destaca Roque e Pitombeira 2012:

> Assim, muito do que sabemos da Matemática grega deve-se a esta obra de Euclides. Em segundo lugar, como os Elementos constituem a mais antiga exposição organizada de Matemática que nos chegou, eles muito influenciaram seu desenvolvimento posterior. (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 53).

Posteriormente, apresentaremos um pouco sobre a história e trabalhos de Arquimedes – considerado por vários historiadores como o precursor dos conceitos que abordaremos nessa proposta.

Seguindo de maneira cronológica, em relação ao desenvolvimento e evolução dos conceitos de área de figuras planas, daremos atenção a trabalhos realizados já nos séculos XVI e XVII, pois foi a partir desse tempo que mudanças significativas passaram a acontecer, comentando os trabalhos que se destacaram e dois personagens no desenvolvimento da matemática, Newton e Leibniz, consideramos estes muito importantes no desenvolvimento do Cálculo, como destaca Baron & Bos (1985), “Newton e Leibniz ocupam uma posição central na história do Cálculo e na Matemática em geral.” (BARON & BOS 1985, p. 68).

Apresentaremos um pouco sobre a biografia de cada um, pois ambos desenvolveram a teoria do cálculo, ainda que tenham percorrido caminhos e utilizado métodos diferentes.

Entendemos que, através do contexto histórico, isto é, mostrando alguns fatos relacionados à evolução desses conceitos, conseguimos perceber a relevância do saber sobre a História da Matemática. Apresentaremos também uma proposta de atividade relacionada a esse tema para o Ensino Médio.

2.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Primeiramente gostaríamos de destacar a importância da História da Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem, também consideramos que sua contribuição no sistema de ensino vai além de apenas contar pequenos relatos ou mesmo ao final de livros quando são apresentadas notas históricas. Fato é que a Matemática está presente na vida do ser humano desde os tempos antigos, por esse motivo é bem relevante e até mesmo necessário utilizar a História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem.

Há algum tempo que vários autores têm se dedicado à História da Matemática, com o intuito de formar argumentos relevantes e também conseguirem propor possíveis ações para a utilização da mesma no ensino de Matemática. Dentre esses autores, destacamos Miguel e Miorim.

Segundo Miguel e Miorim (2011), essa questão histórica relacionada ao ensino de matemática ganhou força a partir da década de 80 com a criação do *International Study Goup on the Relations bet ween the History and Pegagogy of Mathematis* (HPM), esse grupo faz parte da Comissão Internacional de Ensino de Matemática (ICMI). Já no Brasil, foi em torno de 1999 que esse movimento relacionado à História da Matemática teve de fato intensidade e visibilidade, principalmente pela criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat) (MIGUEL & MIORIM, 2011).

Ainda de acordo com Miguel e Miorim (2011), é possível evidenciar diferentes ramos de pesquisas que consistem na própria História da Matemática, assim dizem:

> [...] o movimento em torno da História da Matemática já é tão amplo e diversificado que poderíamos acusar a constituição, em seu interior, de vários campos de pesquisa autônomos, que, no entanto, mantém, em comum, a preocupação de natureza histórica incidindo em uma das múltiplas relações que poderiam ser estabelecidas entre a História, a Matemática, a Educação. Dentre tais campos de investigação, três deles se destacam: o da História da Matemática propriamente dito, o da História da Educação Matemática e o da História na Educação Matemática (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 11).

Ressaltamos que em nosso desenvolvimento metodológico, consideramos a História da Matemática como uma tendência metodológica, caracterizada de acordo com o último campo citado pelos autores acima, ou seja, o da História na Educação

Matemática, pois esta contribui na formação matemática dos estudantes, seja em qual for o nível de ensino.

Também consideramos que a utilização da história como metodologia de ensino tem como principal objetivo contribuir para o ensino e a aprendizagem da Matemática e que esse processo possa dar uma ressignificação do conhecimento matemático que a sociedade desenvolveu ao longo do tempo.

De acordo com Miguel e Miorim (2011):

> Muitos autores defendem a importância da história no processo de ensino aprendizagem da matemática por considerar que isso possibilitaria a desmistificação da Matemática e o estímulo a não alienação do seu ensino. Os defensores desse ponto de vista acreditam que a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno, não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido (MIGUEL; MIORIN, 2011, p.52).

Dessa forma, destacamos que nesse processo de ensino a História da Matemática tem o papel de desmistificar que a matemática é algo pronto e acabado geralmente assim apresentada nos cursos regulares de matemática (MIGUEL; MIORIN, 2011).

Miguel e Miorim (2011) defendem ainda que a abordagem dos conceitos históricos matemáticos dá suporte em relação à busca por atingir os objetivos pedagógicos e levar os alunos a compreenderem, por exemplo:

> (1) a Matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem Matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias Matemáticas; (4) as conexões existentes entre Matemática e filosofia, Matemática e religião, Matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da Matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 53).

Consequentemente, levando os alunos a compreender o porquê e o como do surgimento de um objeto matemático através da resolução de problemas do cotidiano, também fica evidente as dificuldades que os povos apresentaram ao decorrer do tempo, outro aspecto interessante desse processo é a possibilidade de comparações e relações entre os processos matemáticos antigos e atuais.

Destacamos agora, os principais argumentos que reforçam as potencialidades da história da matemática no ensino aprendizagem segundo Miguel (1997).

> 1º argumento – A História é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da matemática;
> 2º argumento – A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática;
> 3º argumento – A história constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino da Matemática;
> 4º argumento – A história é uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas de matemática;
> 5º argumento – A história é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino;
> 6º argumento – A história constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos;
> 7º argumento – A história é um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico;
> 8º argumento – A história é um instrumento unificador dos vários campos da matemática;
> 9º argumento – A história é um instrumento promotor de atitudes e valores;
> 10º argumento – A história constitui-se num instrumento de conscientização epistemológica;
> 11º argumento – A história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática;
> 12º argumento – A história é um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural; (MIGUEL, 1997, apud, SILVA, 2015).

Esperamos então que a tendência metodológica História da Matemática possa ser ainda muito explorada e presente na Educação Básica, e que esta tendência também seja cada vez mais significativa no processo de ensino e aprendizagem.

2.2 CONTEXTOS HISTÓRICOS DO CÁLCULO E DOS PROBLEMAS DE ÁREA

Um dos primeiros registros sobre cálculos de área que temos conhecimento vem dos egípcios. Roque (2012) destaca que mesopotâmicos e egípcios realizavam cálculos tanto com medidas e comprimento, mas também com áreas e volumes, ressalta ainda que alguns dos procedimentos utilizados envolviam transformações de áreas.

É muito comum lermos que a geometria surgiu às margens do Nilo, devido à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas, após as enchentes, entre os que haviam sofrido prejuízos. Essa hipótese tem sua origem nos escritos de Heródoto (ROQUE E PITOMBEIRA, 2012, P. 49).

> “[Quando das inundações do Nilo], o rei Sésostris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria, que migrou, mais tarde, para a Grécia”, (Heródoto, apud ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 49).

De acordo com Correa (2006, p. 2), “Os mais antigos vestígios da aplicação da agrimensura, remonta ao Antigo Egito através de papiros e pinturas em monumentos ou tumbas funerárias, as quais nos ensinam a aplicação desta profissão.”.

O autor relata ainda: “A agrimensura é uma das mais velhas artes praticadas pelo homem. Os registros históricos indicam que essa ciência se iniciou no Egito, Heródoto (1400 a.C.) descreve em seus apontamentos, os trabalhos de demarcação das terras às margens do Nilo.” (CORREA, 2006, p.2).

> Esse segundo livro é inteiramente consagrado ao Egito e nele se encontra a menção a palavra geometria”. Os egípcios teriam revelado que seu rei partilhava a terra igualmente entre todos, contanto que lhe fosse atribuído um imposto na base dessa repartição. Como o Nilo, às vezes cobria parte de um lote, era preciso medir que pedaço de terra o proprietário tinha perdido, com o fim de recalcular o pagamento devido. Conforme Heródoto, essa prática de agrimensura teria dado origem a invenção da geometria, um conhecimento que teria sido importado pelos gregos. (ROQUE, 2012, p. 78).

A palavra geometria pode ser traduzida, portanto, como medida da terra. “Vem daí a ideia de que seu surgimento está ligado à agrimensura.” (ROQUE, 2012, p. 78).

Apresentaremos, nessa parte, alguns dos trabalhos desenvolvidos que estão presentes na obra *Elementos*, em especial buscaremos apresentar aqueles trabalhos que tratem especificamente sobre os conceitos de área em figuras planas, decidimos assim prosseguir por acharmos essa obra muito interessante, pela sua importância, tanto na época, quanto ainda é hoje, consideramos essa obra como a de maior destaque que trata desse tema desde as civilizações antigas, conforme destacam Roque e Pitombeira.

> Assim, muito do que sabemos da Matemática grega deve-se a esta obra de Euclides. Em segundo lugar, como os Elementos constituem a mais antiga exposição organizada de Matemática que nos chegaram, eles muito influenciaram seu desenvolvimento posterior. (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 53).

De acordo com Roque (2012), a Obra *Elementos*, atribuída como autoria de Euclides, “é vista como o ápice do esforço de organização da geometria grega desenvolvida até o século III a.E.C.”, (ROQUE, 2012, p.118). Segundo a autora, o papel de Euclides em “*Elementos*” pode ser considerado por duas hipóteses: por um lado, a afirmação de que essa obra seria apenas uma compilação de resultados que já existiam e feitos por outros e não feitos por Euclides; nesse caso ele seria apenas um editor.

Outra possibilidade também é a afirmação sobre os trabalhos contidos na Obra “*Elementos*” foram expostos de um modo inovador, fato esse que implicaria a predominância na Grécia, nessa época, de um pensamento lógico e dedutivo.

Muito pouco se sabe sobre a vida de Euclides, ainda que afirmado que ele teria nascido em Alexandria, isso não é comprovado, porém, há evidências de que ele seja autor de outras obras de matemática, como “Sobre lugares geométricos”, “Cônicas”, entre outras, além de *Elementos*.

A Obra *Elementos* de Euclides é constituída em um conjunto de treze livros, provavelmente publicados em torno de 300 a.E.C.. Não há registros da obra original, apenas são encontradas versões e traduções tardias. Em Oxyrhynque, cidade a beira do rio Nilo, foi encontrado um fragmento de uma dessas versões entre vários papiros gregos, na data bem provável dos anos 100 da era comum (ROQUE, 2012).

Figura 1: Fragmento dos Elementos de Euclides

Fonte: https://commons.wikimedia.org/ acesso em: 08 abril 2021.

Acredita-se que as construções que constam no livro *Elementos* são realizadas apenas com o uso da régua e compasso.

Um fator a destacar na obra de Euclides é o motivo de as construções no livro *Elementos* serem realizadas através do uso de régua e compasso. Isso acabou originando a crença de que esse tipo de construção seria uma restrição da geometria imposta pelos cânones da época. Para a explicação desse motivo de restrição, geralmente se apela para a filosofia platônica, já que essa filosofia valoriza a matemática teórica.

Platão desprezaria construções mecânicas, por outro lado, a régua não graduada e o compasso, apesar de serem instrumentos, admitem representações: a régua pode ser representada pela linha reta e o compasso pode ser representado pelo circulo, sendo estes, a linha reta e o circulo, figuras com muita precisão. O que corrobora com o fato de nos *Elementos*, onde as construções exigem o uso de régua e compasso, essas sejam executadas através de retas e círculos definidos abstratamente (ROQUE, 2012).

Segundo esta autora, não há registros de que Euclides faz alguma afirmação explícita, de que em alguma parte de sua obra essas construções tenham obrigatoriamente que serem feitas com o uso de retas e círculos, as construções simplesmente são realizadas dessa maneira, enquanto que, no caso de Platão, sua filosofia tinha a reta e o círculo como figuras superiores, embora também não haja afirmações claras em seus escritos desse suposto, muito menos o impedimento de utilizar outros meios de construções (ROQUE, 2012).

Sabemos que a obra Elementos é constituída de alguns livros, e que essa composição que á originou foi feita por Euclides, a seguir faremos algumas observações a respeito desses livros, mostraremos as principais características que os compõem.

Roque (2012) faz as seguintes observações nos livros que constituem a obra Elementos:

> • Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema “de Pitágoras”.
>
> • Livro II: contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
>
> • Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
>
> • Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
>
> • Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.
>
> • Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
>
> • Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.
>
> • Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares (ROQUE, 2012, p. 144).

Após apresentarmos algumas características dos livros que compõem a obra *Elementos*, pode-se notar que há uma harmonia em sua distribuição, isso significa que os livros que formam a obra não estão distribuídos de forma aleatória, no que se refere á ordem e também em relação aos conceitos que cada livro traz, a partir disso, nosso foco nessa etapa é buscar mostrar o encadeamento dessas proposições e também apresentar o método dedutivo.

Outro aspecto interessante na obra *Elementos* de Euclides, é a percepção no sentido que desde o início da obra, nota-se que, no que se referem aos enunciados, há uma divisão em duas partes. Uma dessas divisões é chamada de 'Primeiros Princípios', que são as definições, os postulados e também as noções comuns, e a outra são as 'consequências', que são os problemas e os teoremas.

O papel desses princípios é enfatizado por Proclus, que também faz uma explicação sobre a distinção entre esses princípios através de vários tipos de transmissão. Fica determinado então que uma definição, como são apresentadas em *Elementos* de Euclides é uma espécie de hipótese, na qual quem está buscando aprender, não tem ainda a noção exata da mesma, ou seja, da hipótese, mas esse aprendiz tem confiança em quem ensina e passa a aceitar tais hipóteses ainda sem demonstração (ROQUE, 2012).

Mostraremos a seguir algumas definições que estão na obra *Elementos* no livro I, pois são essas definições que fazem referência aos objetos matemáticos que serão utilizados ao longo da obra *Elementos* e que possuem um conteúdo intuitivo.

Nosso objetivo a partir daqui é fazer uma fundamentação sobre tudo aquilo que pretendemos construir no decorrer dessa proposta, ou seja, nas construções, sejam de quadrados, triângulos, circunferências entre outros objetos, a questão é o porquê cada objeto ou cada parte desses objetos tem o nome próprio, como por exemplo, o que é o ponto? O que é a reta? Enfim, as definições que utilizamos hoje em dia são definições elaboradas por Euclides e por esse motivo as apresentamos abaixo:

Exemplos:

> Livro I da Obra Os Elementos – Definições:
>
> 1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
>
> 2. E linha é comprimento sem largura.
>
> 3. E extremidades de uma linha são pontos.
>
> 4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
>
> 5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
>
> 6. E extremidades de uma superfície são retas.
>
> 7. Superfície plana é a que esta posta por igual por igual com as retas sobre si mesma.
>
> 8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão posta sobre uma reta.

> 9. E quando a linha que contêm os ângulos seja reta, o ângulo é chamado retilíneo.
>
> 10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
>
> 11. Ângulo obtuso é maior do que um reto.
>
> 12. E agudo, o menor do que um reto.
>
> 13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
>
> 14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
>
> 15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha (que é chamada circunferência), em relação à qual todas as retas que a encontram (até a circunferência do círculo), a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si (EUCLIDES, 2009, p. 146).
>
> Na definição 4, o termo “linha reta” designa o que hoje chamamos de “segmento de reta”. À maneira de Euclides, usaremos aqui o termo “reta” com esse sentido. A definição 2 fornece um sentido mais geral para objetos com dimensão 1 (que podem não ser retas). A definição 15 está na origem da distinção entre círculo e circunferência encontrada em alguns livros-texto atuais. Após as definições, são enunciados os postulados e as noções comuns. Uma noção comum, segundo Proclus, é um enunciado de conteúdo óbvio, tido facilmente como válido pelo aprendiz. Se além de o enunciado ser desconhecido ele é proposto como verdadeiro por meio de alguma argumentação temos um postulado. Nesse caso, é necessário que aquele que ensina convença o aprendiz de sua validade (ROQUE, 2012, p. 146).

Por motivos análogos as definições apresentadas acima, também apresentaremos aqui os postulados que constam no livro 1 da obra *Elementos*, com o objetivo de fundamentar muitas das etapas de construção apresentadas às demonstrações que serão desenvolvidas nesse trabalho, como por exemplo: Porque os ângulos retos são iguais? Partimos dessa afirmação porque Euclides a definiu nessa obra, portanto apresentamos também os demais postulados e as noções comuns definidas por Euclides:

Livro I da Obra *Elementos* – Postulados

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
>
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
>
> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
>
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
>
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 147).
>
> **Livro I da Obra Os Elementos – Noções comuns**
>
> 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
>
> 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.

3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.

4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.

....

8. E o todo é maior do que a parte.

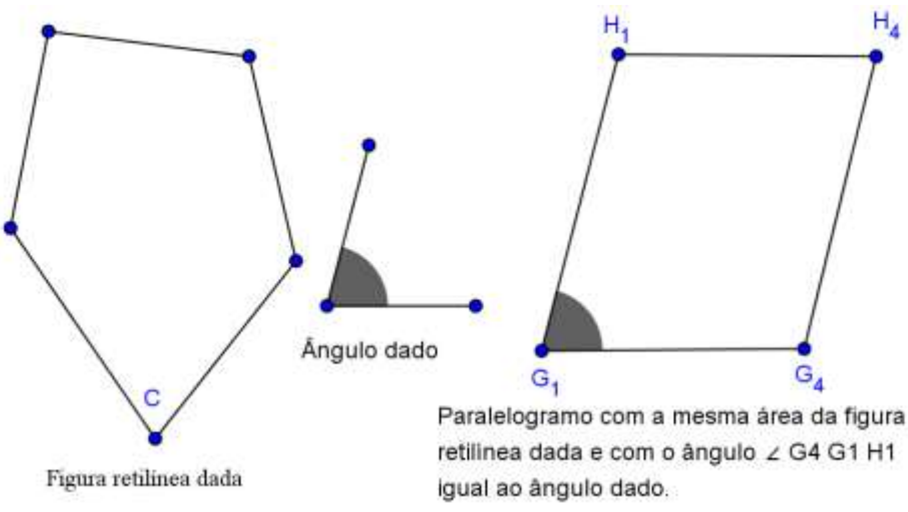
9. E duas retas não contêm uma área (EUCLIDES, 2009, p. 147).

De acordo com Roque (2012), nos dias de hoje, não tem sido tão utilizado a diferença dos tipos de hipóteses, mas é necessário ter em mente que a matemática em sua essência é feita de primeiros supostos. Os enunciados matemáticos seguem por demonstração dos primeiros princípios e justamente essa é a definição do método axiomático-dedutivo. Assim, além dessas observações, Roque (2012) levanta as seguintes perguntas: Porque Euclides utilizou esse método? Qual o objetivo disso? Em seguida a autora conclui:

> A tese mais reveladora a respeito do encadeamento das proposições nos *Elementos,* partindo de primeiros princípios, é a de que os resultados foram enunciados de trás para frente. Entre os primeiros princípios, alguns teriam por função construir os objetos efetivamente utilizados nas demonstrações. Depois de ter estabelecido as proposições que queria demonstrar, ou as construções que queria efetuar, Euclides teria listado os princípios que permitiam deduzir essas proposições, ou construir os objetos nelas realizados. (ROQUE 2012, p. 147).
> Segundo (I. MUELLER, apud ROQUE, 2012), no Livro I, seus princípios e resultados têm como objetivo principal dar a condição de efetuar a construção abaixo Roque (ROQUE 2012, p. 147).

Proposição I-45: construir, no ângulo retilíneo dado, um paralelogramo igual à [figura] retilínea dada.

Figura 2 – Construção de paralelogramo

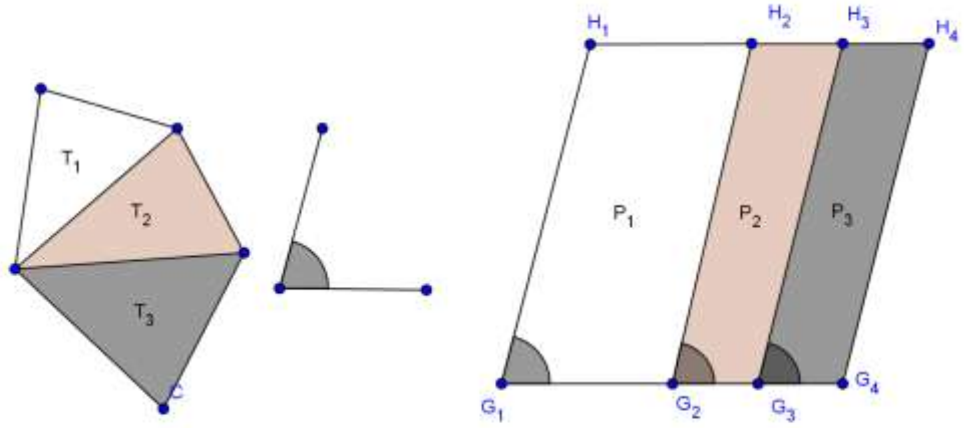


Fonte: o autor (2021)

A figura retilínea dada é um polígono, porém esse polígono tem sua área transformada na área de um quadrilátero. Observe que na figura 3 (figura que segue abaixo) o objetivo é mostrar a divisão desse polígono em triângulos, referindo-se aos mesmos como T_1, T_2, T_3 e construir paralelogramos P_1, P_2, P_3 relacionados com os triângulos T_1, T_2, T_3, essa relação é que as áreas de T_i sejam iguais às áreas de P_i respectivamente, onde i = 1, 2, 3.

Outro fator a considerar é o ângulo, cada um, que pode ser expresso por G4-Gi-Hi, com (i = 1, 2, 3) deve ser igual ao ângulo dado. As proposições dadas anteriormente, como a I-42, (esta é uma proposição que consta no livro 1 da obra *Elementos*), por exemplo, é que dá garantia para se ter recursos para realizar esses processos, que no caso mostra de que maneira se constrói um paralelogramo com a mesma área de um triângulo, tendo é claro um ângulo desse paralelogramo definido (ROQUE, 2012).

Figura 3 – Construção de paralelogramo detalhada



Fonte: Fonte: o autor (2021)

Essa proposição demonstrada acima tem como alvo mostrar que é possível construir um paralelogramo, caso se tenha um polígono qualquer e um ângulo. Podemos concluir através dessa proposição que é possível representar a área de qualquer polígono como um retângulo, lembrando que retângulo é um caso particular de polígono, porém apresenta os ângulos retos (ROQUE, 2012).

> Atualmente, medir é associar uma grandeza a um número. Se quisermos somar as áreas de dois polígonos, teremos de calcular a área de cada um, por meio de uma fórmula, e somar os resultados (que são números). Mas nesse momento as grandezas não eram tratadas por meio de associação a números. E como operar com grandezas, como comprimentos e áreas, a não ser por meio de suas medidas? Esse problema era resolvido pela busca de áreas equivalentes. Por exemplo, para “medir” a área de uma figura qualquer, deveríamos encontrar uma figura simples cuja área fosse igual à figura dada. Essa figura simples era um quadrado. Logo, o problema de encontrar a *quadratura* de uma figura qualquer era equivalente ao problema

> de construir um quadrado cuja área fosse igual à da figura dada (ROQUE 2012, p. 149).

Como já descrito acima, podemos perceber que nesses processos que apresentamos, surge à palavra “quadrar” e/ou ‘quadratura”, por esse motivo apresentamos aqui o conceito formal desse termo, pois na sequencia de nosso desenvolvimento essa ideia de quadratura será bastante explorada.

Por esse motivo achamos interessante fazer essa menção, de acordo com Baron (1985), sobre esse problema da quadratura, através de sequencias de transformações geométricas é possível reduzir qualquer figura, sendo essas figuras poligonais a um triângulo, de modo que a área do triângulo e da figura poligonal seja iguais, feito isso, transforma-se então esse triângulo em um paralelogramo, em seguida, transforma-se o paralelogramo em um retângulo e finalmente transforma-se o retângulo em um quadrado.

Esses resultados são encontrados na obra *Elementos,* no livro II, desse modo conclui-se que para qualquer figura poligonal plana é possível encontrar um quadrado com a mesma área (BARON, 1985). Esse é o conceito de quadratura, que será apresentado com mais detalhes um pouco adiante.

Nos métodos de aplicação de áreas que constam em *Elementos*, temos como parte dele a proposição I-45, cujo desenvolvimento já fizemos acima, para Roque (2012) esta é uma construção clássica e também é considerada como parte dos métodos de aplicação de área.

Vamos agora definir os passos usados para descobrir a quadratura de um polígono qualquer, para isso podemos usar a proposição I-45 para encontrar um retângulo com a mesma área do polígono e, em seguida, usara proposição II-14 para determinar o quadrado com a mesma área do retângulo (no livro II são fornecidos alguns procedimentos para transformar um retângulo em um quadrado).

A partir da proposição mencionada acima, era possível somar as áreas dos quadrados por meio da proposição I-47, enunciada logo após a construção obtida em I-45, e que equivale ao resultado que conhecemos como teorema “de Pitágoras”.

O modo como esse teorema é demonstrado nos Elementos será descrito a seguir e também destacamos de imediato a sua utilidade para somar áreas no contexto da geometria grega (ROQUE, 2012).

Nessa etapa do desenvolvimento, falaremos um pouco a respeito do teorema de Pitágoras, temos como objetivo mostrar o papel desse teorema, assim como suas curiosidades e o que de fato a história nos diz a respeito dele, além é claro de apresentar sua demonstração.

No exemplo a seguir, ainda de acordo com Roque (2012), mostraremos como as proposições do livro 1dos *Elementos* de Euclides estão entrelaçadas para chegar à demonstração de um teorema que hoje em dia conhecemos como Teorema de Pitágoras.

Destacamos que há controversas em relação a esse teorema, Roque e Pitombeira destacam:

> Mesmo o famoso teorema “de Pitágoras”, em sua compreensão geométrica como relação entre medidas dos lados de um triângulo retângulo, não parece ter sido particularmente estudado por Pitágoras e sua escola. (ROQUE E PITOMBEIRA, 2012, p. 53).

Os pitagóricos tinham uma visão diferente dos demais povos em relação aos números, veja abaixo:

> Pitágoras é frequentemente citado como o pai da Matemática grega, mas sua teoria dos números era concreta, baseada em manipulações de números figurados. Sua aritmética era indutiva e não continha provas. Era possível obter, graficamente, generalizações sobre sequências de números, mas as regras para obtenção de tais sequências, como as dos números quadrados, cubos e outros, eram desenvolvidas para uso prático. A diferença estava na reverência que os pitagóricos cultivavam pelos números, empregados não apenas para fins práticos. Associadas a forças cósmicas, as propriedades dos números não podiam ser consequências lógicas de sua estrutura, o que banalizaria suas propriedades. (ROQUE E PITOMBEIRA, 2012, p. 54).

Destacamos outra característica em relação aos números figurados:

> Os números figurados dos pitagóricos eram constituídos de uma multiplicidade de pontos que também não eram pontos matemáticos, mas remetiam a elementos discretos: pedrinhas dispostas em uma certa configuração. (ROQUE E PITOMBEIRA, 2012, p. 54).

Devemos ressaltar que nessa demonstração feita por Euclides, ele não utiliza o nome como o conhecemos hoje em dia, ele não dedica a Pitágoras e nem a outra pessoa. Fato é que é controverso o fato de quem é o verdadeiro autor dessa prova, segundo Proclus, a prova desse teorema é de fato a única contribuição de Euclides aos primeiros livros dos *Elementos*.

Entretanto, até mesmo a opinião de Proclus é questionável pelo fato de que a prova encontrada aqui é de uma natureza específica que se adequam perfeitamente à tradição geométrica marcada por um período anterior a de Euclides, nessa mesma prova podemos notar também que contém o que era chamado na época de “cálculo de áreas” que nada mais é do que aplicações de áreas, ou seja, buscar equivalência entre áreas e também realizar operações com áreas (ROQUE, 2012).

Agora, iremos apresentar os processos utilizados por Euclides no desenvolvimento desse teorema, o teorema de Pitágoras, para isso vamos enumerar as proposições que serão necessárias utilizarmos para a demonstração da proposição I-47, lembrando que essa proposição tem exatamente o conteúdo conhecido por nós como “Teorema de Pitágoras”, juntamente com sua recíproca encerra o livro 1 dos *Elementos*.

Sobre esse mesmo livro 1 dos *Elementos* de Euclides podemos considerar ou mesmo supor que essas outras proposições são como etapas para a demonstração da proposição I-47, desse modo, Roque (2012) afirma que esses processos são uma evidência de que o encadeamento dedutivo dessas proposições nada mais é do que uma maneira de enunciar, ai temos que observar que isso é feito de maneira bem ordenada, os resultados necessários às demonstrações de outros enunciados importantes (ROQUE, 2012).

Daremos início utilizando uma proposição que relata casos de congruências entre triângulos, também conhecida como LAL (lado, ângulo, lado), que em sua tradução significa que, se dois triângulos têm dois lados iguais e os ângulos formados por eles também forem iguais, logo esses triângulos são congruentes.

Ressaltamos que o termo “congruente” não era habitual à época, esse termo foi colocado depois, devido à necessidade de resolver uma inconsistência lógica, a qual foi atribuída após a geometria euclidiana. Falando logicamente, uma coisa só é igual a si mesma, assim na comparação de triângulos ou figuras seria incorreto dizer que é igual, por isso foi empregado o termo congruente, que de uma maneira intuitiva podemos pensar em duas figuras colocadas uma em cima da outra com o “encaixe” entre elas perfeito.

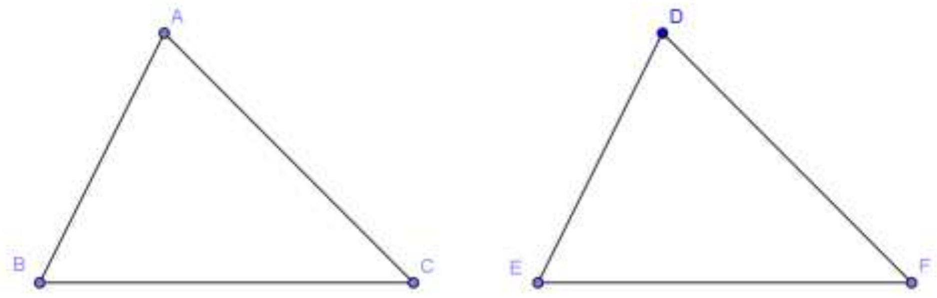
Para buscar manter o padrão dos trabalhos de Euclides, em nosso estudo, vamos utilizar os mesmos termos que ele utilizou, assim ao falarmos que duas figuras são iguais, elas são de fato congruentes ou ainda podem ter a mesma área (ROQUE, 2012).

Proposição I-4

Se dois triângulos tiverem, respectivamente, dois lados iguais a dois lados e se os ângulos compreendidos por esses lados forem também iguais, as bases serão iguais, os triângulos serão iguais e os demais ângulos que são opostos a lados iguais serão também iguais.

Em tradução temos que:

Figura 4 – triângulos



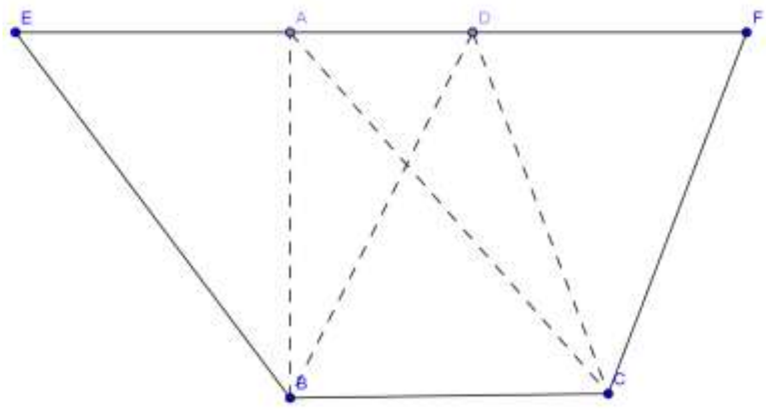
Fonte: o autor (2021)

Da figura acima, se o lado AB for igual ao lado DE, o lado BC for igual ao lado EF e o ângulo ABC também for igual ao ângulo DEF, então teremos que os triângulos ABC e DEF são iguais (ROQUE, 2012).

Proposição I-38

Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

Figura 5 – triângulos sobre bases iguais



Fonte: o autor (2021)

Traduzindo para a linguagem de hoje, temos que se dois triângulos têm a mesma base, note que pelo desenho acima os triângulos ABC e DBC tema mesma base que é BC, e os vértices exceto os da base em uma paralela, observe que os vértices A e D estão em uma reta paralela á base BC, portanto a área deles é igual.

Esse é exatamente o significado que temos hoje em dia em relação à área de triângulos, utilizamos a fórmula, que é a base multiplicada pela altura e o resultado dividido por 2.

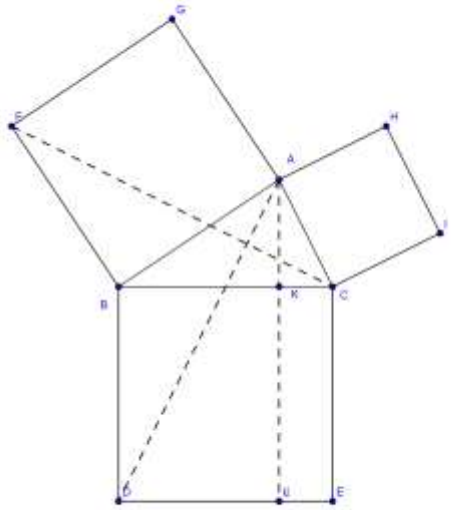
Vale lembrar que nessa tradição geométrica não era atribuído algum valor numérico para se referir a grandezas, logo não era utilizada essa fórmula citada antes. O intuito dessa proposição I-38 é mostrar justamente a equivalência entre as áreas sem a necessidade de calcular o seu valor específico, mas fato é que se os vértices dos triângulos estão na paralela à base, então eles têm as mesmas alturas e como já vimos que as bases também são iguais, logo eles têm a mesma área (ROQUE, 2012).

Seguiremos agora, mostrando as duas últimas proposições do livro 1 dos *Elementos* que tem justamente os resultados como conhecemos hoje em dia como “Teorema de Pitágoras” e também sua reciprocidade.

Proposição I-47

Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

Figura 6 – Triângulo com extensão de quadrados

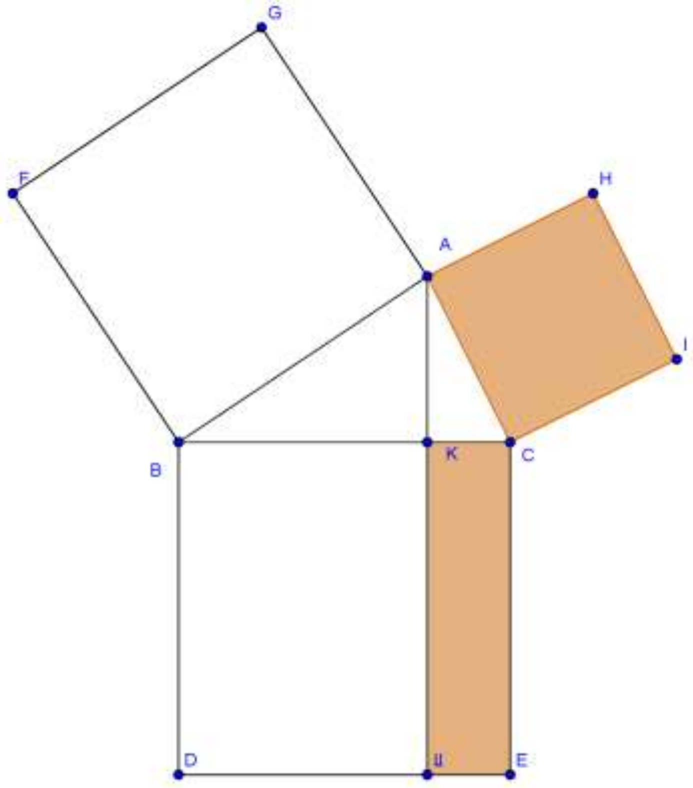


Fonte: o autor (2021)

Demonstração: Seja o triângulo retângulo ABC, com ângulo reto BAC. Queremos mostrar que a área do quadrado construído sobre o lado BC é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os lados AB e AC, que formam o ângulo reto BAC. Vamos ilustrar a demonstração com figuras que não foram usadas por Euclides, mas manteremos o espírito de sua prova.

Descrevemos ou construímos sobre cada lado do triângulo ABC um quadrado e vamos mostrar que a área do quadrado construído sobre o lado BC pode ser obtida pela soma de dois retângulos, um deles com área igual à do quadrado construído sobre AB (em cor branca na figura 7) e o outro com área igual à do quadrado construído sobre AC (de cor bege) (ROQUE, 2012).

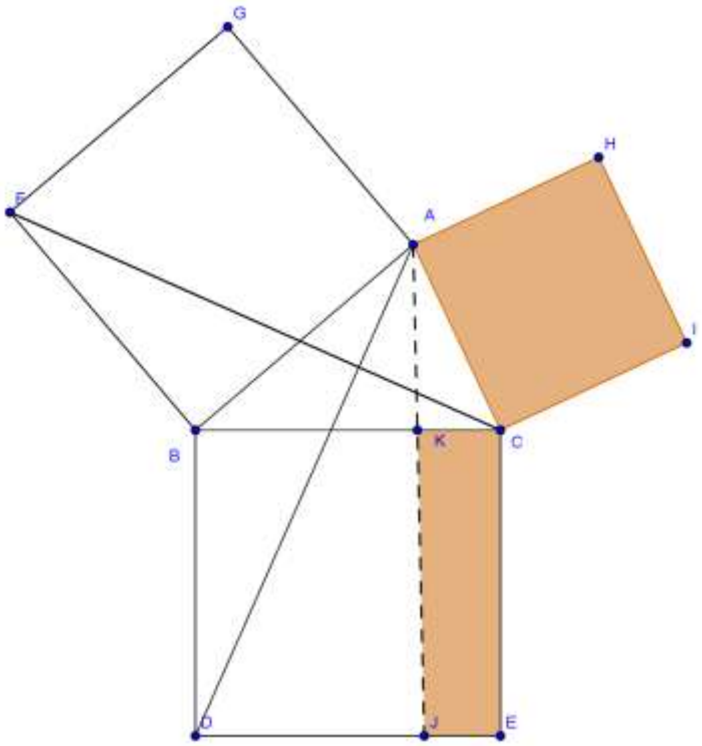
Figura 7 – Triângulo com extensão de quadrados 2



Fonte: o autor (2021)

O quadrado BDEC é construído sobre BC e os quadrados ABFG e ACIH, respectivamente, sobre AB e AC. Em seguida, traçamos a partir do ponto A uma reta AL, paralela a BD, e traçamos também duas retas AD e CF, formando novos triângulos ABD e CBF, como na figura 8.

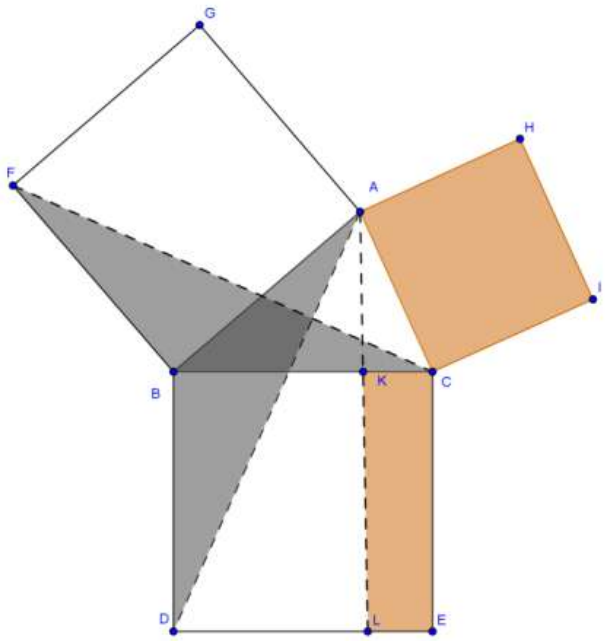
Figura 8 – Triângulo com extensão de quadrados 3



Fonte: o autor (2021)

Queremos mostrar que esses triângulos (em cinza-escuro na figura 9) são iguais.

Figura 9 – Triângulo com extensão de quadrados 4



Fonte: o autor (2021)

O lado AB de ABD é igual ao lado FB de CBF, por construção. O mesmo vale para os lados BD e BC. Logo, para os triângulos serem congruentes, basta mostrar que os ângulos ABD e CBF são iguais, pois pela proposição I-4 basta os triângulos terem dois lados e o ângulo formado por esses lados iguais. Os ângulos DBC e FBA, por serem retos, são iguais. Adicionando o mesmo ângulo ABC a ambos, o total ABD será igual ao total CBF. Então, temos que o triângulo ABD é igual ao triângulo CBF (ROQUE, 2012).

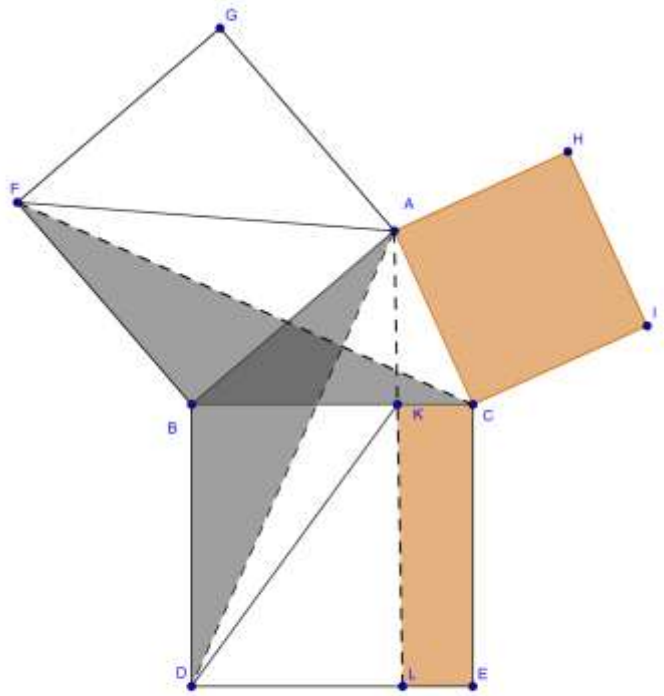
Queremos mostrar que a área do quadrado ABFG é igual à do retângulo BDLK. Os próximos passos para concluir essa demonstração são os seguintes:

1. Mostrar que a área do triângulo ABF, que é metade do quadrado ABFG, é igual à área do triângulo DBK, que é metade da do retângulo BDLK (como vemos na figura 10).

2. Para isso, mostraremos que a área de ABF é igual à de CBF e que a área de DBK é igual à de ABD.

3. Como já mostramos que a área de ABD e de CBF são iguais, concluiremos que a área de ABF é igual à área de DBK, assim, a área do quadrado ABFG será igual à do retângulo BDLK.

Figura 10 – Triângulo com extensão de quadrados 5



Fonte: o autor (2021)

Como os ângulos BAC e BAG são retos, os segmentos CA e AG estão sobre uma mesma reta.

Como essa reta é paralela a BF, temos que CBF e ABF são triângulos de mesma base com o terceiro vértice em uma paralela a essa base. Logo, pela proposição I-38, eles possuem a mesma área. De modo análogo, como AL foi construído paralelamente a BD, temos que ABD e DBK são triângulos de mesma base com terceiro vértice em uma paralela à base, sendo assim, possuem a mesma área. Esse parágrafo, juntamente com o anterior, conclui a etapa 2 (ROQUE, 2012).

Utilizando um raciocínio análogo, poderíamos demonstrar que o retângulo CKLE é igual ao quadrado ACIH. Dessa forma, o quadrado inteiro BDEC construído sobre o lado BC, oposto ao ângulo reto BAC, é igual à soma dos dois quadrados ABFG e ACIH, construídos, respectivamente, sobre os lados AB e AC, que formam o ângulo reto. Isso conclui a demonstração.

Observe em primeiro lugar, que não foi usado aqui nenhum resultado de razões e proporções. Hoje, é comum encontrarmos demonstrações do teorema “de Pitágoras” que usam semelhanças de triângulos expressas por meio de proporções. Por que Euclides não empregou uma argumentação desse tipo? Roque (2012) argumenta o seguinte:

> (i) Porque não conhecia os resultados sobre semelhança de triângulos e não possuía noções de razão e proporção. Essa explicação é historicamente inadequada, pois há registros anteriores a Euclides em que essas noções são usadas.
>
> (ii) Porque quis evitar esse uso, uma vez que as antigas noções de razão e proporção tinham sido colocadas em questão com a descoberta dos incomensuráveis. Essa é uma resposta plausível, mas poderíamos perguntar por que, nesse caso, Euclides não adiou demonstração do teorema “de Pitágoras” para depois do livro V, quando é exposta uma teoria de razões e proporções que vale para quaisquer grandezas. Na verdade, encontramos uma nova demonstração, por meio de razões e proporções, na proposição 31 do livro VI.
>
> (iii) No contexto da geometria que Euclides quis expor nos primeiros livros dos Elementos, o teorema que chamamos “de Pitágoras” fazia parte de uma cultura matemática que tinha como prática o que podemos nomear de “cálculo de áreas”. Isso envolve resultados sobre aplicação de áreas, equivalência de áreas e soma de áreas.
>
> A demonstração que acabamos de fornecer interpreta o teorema “de Pitágoras” como uma relação entre propriedades dos quadrados erigidos sobre os lados de um triângulo retângulo, e não como uma relação métrica entre esses lados. Sendo assim, a demonstração usa somente resultados envolvendo a equivalência de áreas e suas somas.
>
> As operações com áreas na geometria grega datam do período pré-euclidiano. Os métodos de aplicação de áreas, por exemplo, já eram usados muito antes de Euclides e lembram os métodos babilônicos de cortar e colar

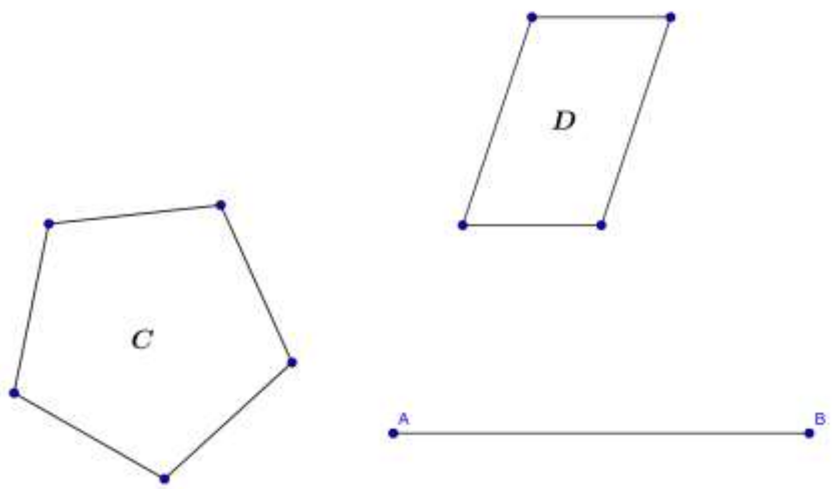
> áreas. Não podemos dizer, contudo, que tenha havido uma transmissão dessas técnicas da matemática mesopotâmica para a grega. Exporemos, brevemente, alguns outros resultados envolvendo o cálculo de áreas que constam do livro II e do livro VI dos *Elementos* (ROQUE, 2012, p. 158).
>
> Nosso objetivo agora é dar uma ideia dos procedimentos envolvendo equivalência de áreas, que já eram empregados antes de Euclides. Acredita-se que alguns resultados do livro II sejam mais antigos que os do livro I, e essas técnicas participavam da mesma tradição do método da aplicação de áreas e do teorema “de Pitágoras”. Apesar de exposto somente no livro VI, sabemos que o método da aplicação de áreas era bastante usado no século IV a.E.C. Nos *Elementos*, o tema foi deixado para o livro VI, provavelmente pelo interesse de usar a teoria das razões e proporções de Eudoxo. Mas, antes disso, esse método pode ter sido usado com uma teoria simples das razões e proporções (ROQUE, 2012, p. 158).

A seguir, mostraremos a proposição VI-29, destacamos também que essa proposição é um exemplo do modo euclidiano de realizar aplicações de áreas:

Proposição VI-29

À reta dada aplicar, igual à [figura] retilínea dada, um paralelogramo excedente por uma figura paralelogrâmica semelhante à dada.

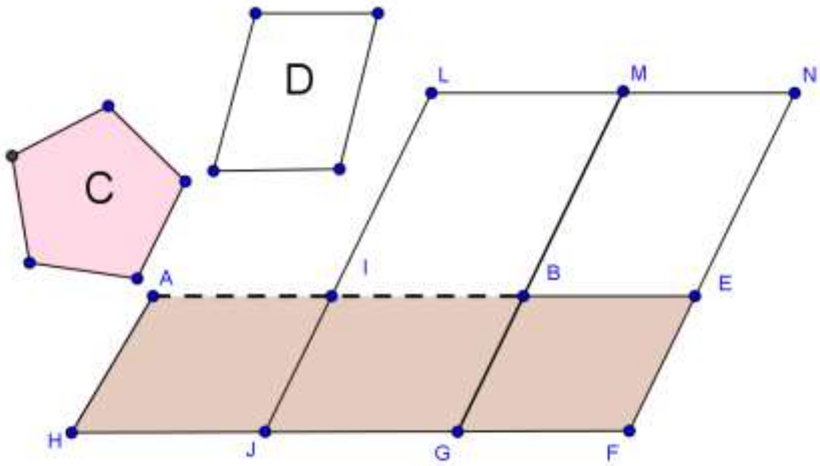
Figura 11 – Pentágono e paralelogramo



Fonte: o autor (2021)

> São dadas a reta AB, uma figura C (com determinada área) e uma figura D (com determinada forma). O problema consiste em aplicar à reta AB à figura AEFH da figura 12 (figura do autor), com área igual à de C e com um excedente dado pela figura BEFG, similar à D. Ou seja, queremos construir um paralelogramo com área igual à de outra figura (C, no exemplo), mas a construção deve ser feita com algo sobrando em relação ao segmento dado inicialmente (AB) (ROQUE, 2012, p. 159).

Figura 12 – Pentágono e paralelogramos



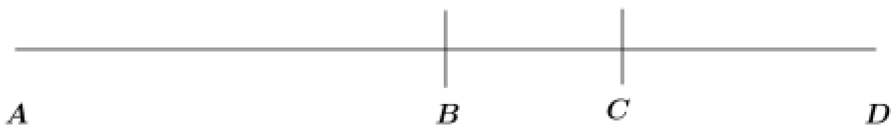
Fonte: o autor (2021)

Proposição II-5

Caso uma linha reta seja cortada em [segmentos] iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a [reta] entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade.

A reta AD é cortada em segmentos iguais por B (AB e BC) e em segmentos desiguais por C (AC e CD), como na figura abaixo:

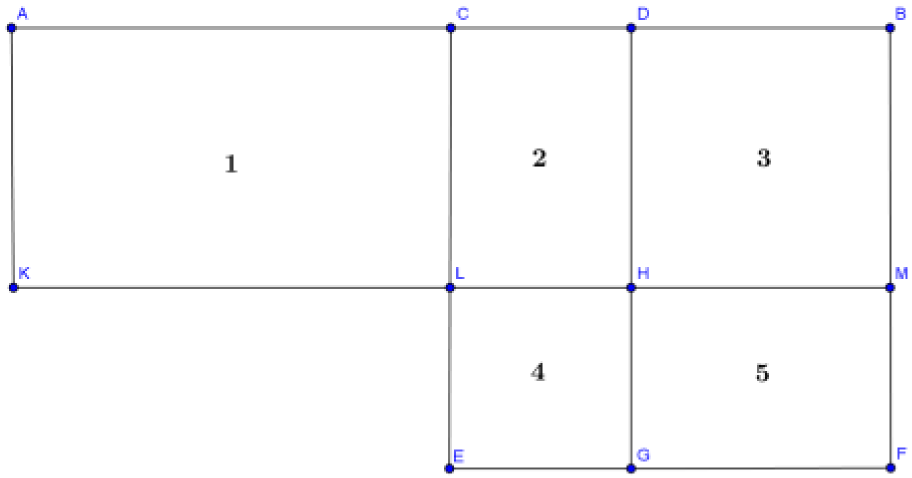
Figura 13 – Reta AD



Fonte: o autor (2021)

> Demonstração: Queremos mostrar que o retângulo de lados AD e DB, mais o quadrado de lado CD, é igual ao quadrado de lado CB. Descrevemos o quadrado CEFB sobre CB como na figura 14 (figura do autor). Traçamos DG por D paralelo a CE e BF. Sobre o ponto D, abrimos um compasso até o ponto B e, mantendo essa abertura, marcamos um ponto H sobre DG. Traçamos um segmento KM por H que seja paralelo a AB e EF. Traçamos, agora, um segmento AK por A, paralelo a CL e BM. Na Ilustração 16, queremos mostrar que 1 + 2 + 4 = 2 + 3 + 4 + 5. Vamos dividir nossa demonstração nas seguintes etapas:

Figura 14 – Retângulos e quadrados



Fonte: o autor (2021)

> i) O retângulo CDHL é igual ao retângulo HMFG (na figura, 2 = 5):
>
> Por construção, CB é igual à BF e DB é igual à DH, que é igual a BM. Portanto, CD é igual à CB− DB, que é igual à BF − BM, que é igual a MF (retiramos partes iguais de quantidades iguais, logo, os restos são iguais). Como DH é igual a HM por construção (pois DBMH é um quadrado), os retângulos CDHL e HMFG são iguais, uma vez que suas bases e suas alturas são iguais.
>
> (ii) O retângulo CBML é igual ao retângulo DBFG (2 + 3 = 3 + 5):
>
> Adicionamos, então, o quadrado DBMH a cada um dos retângulos CDHL e HMFG. Fazendo isso, temos que o retângulo CBML é igual ao retângulo DBFG.
>
> iii) O retângulo ACLK é igual ao retângulo DBFG (1 = 3 + 5):
>
> O retângulo CBML é igual ao retângulo ACLK, uma vez que AC é igual à CB, e CL é igual a BM. Logo, o retângulo ACLK é também igual ao retângulo DBFG (isso equivale a dizer que 1 = 3 + 5, na figura 14, então, resta-nos adicionar 2 e 4 a ambos os lados, o que será feito nos passos seguintes).
>
> iv) O retângulo ADHK é igual ao gnomon CBFGHL (1 + 2 = 2 + 3 + 5):
>
> Seguindo a demonstração de acordo com Euclides, adicionamos o retângulo CDHL a cada um dos retângulos ACLK e DBFG. Fazendo isso, o retângulo ADHK é igual ao gnomon CBFGHL (ou seja, 1 + 2 = 2+ 3 + 5).
>
> v) Somando o quadrado LHGE (1 + 2 + 4 = 2 + 3 + 4 + 5):
>
> ADHK é o retângulo AD por DB, uma vez que DH é igual a DB e falta apenas acrescentar à figura CBFGHL (área 2 + 3 + 5) o quadrado LHGE (área 4) para obter o quadrado CBFE do enunciado da proposição (2 + 3 + 4 + 5). Como LHGE é igual a um quadrado construído sobre CD, temos que o retângulo AD por DB (área 1 + 2) mais o quadrado em CD (área 4) é igual ao quadrado em CB (área 2 + 3 + 4 + 5) (ROQUE, 2012, p. 161).

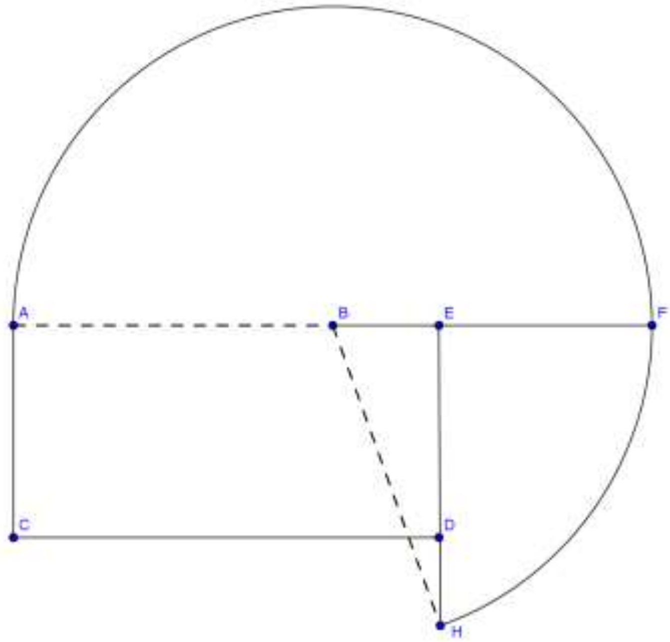
Após concluir essa demonstração, Roque (2012) apresenta ainda a proposição II-14 para justificar a utilidade e finalidade da proposição II-5.

Proposição II-14

Construir um quadrado igual à [figura] retilínea dada.

> Construção (na verdade, vamos construir um quadrado de área igual à de um retângulo dado): O retângulo BEDC é a figura retilínea dada. Se BE é igual a ED, temos o quadrado proposto. Se não, um dos segmentos, BE ou ED, é maior. Suponhamos que seja BE, e prolongamos esse segmento até F, de modo que EF seja igual a ED, como na figura 15. Bissetamos BF em G e descrevemos uma circunferência BFH com centro G, tendo como raio o segmento GB (ou GF).
>
> Prolongamos ED até H (um ponto na circunferência abaixo de D). O quadrado procurado é o de lado EH. Vamos mostrar isso usando a proposição II-5.

Figura 15– Semicircunferência



Fonte: o autor (2021)

> Demonstração de que a construção é válida: Como a reta BF foi cortada em segmentos iguais em G e em segmentos desiguais em E, o retângulo BE por EF, mais o quadrado em GE, é igual ao quadrado em GF (pela proposição II-5). Mas GF é igual à GH, logo, o retângulo de lados BE e EF (que é BEDC), mais o quadrado de lado GE, é igual ao quadrado de lado GH. Por Pitágoras, a soma dos quadrados de lados EH e GE são iguais ao quadrado de lado GH (em linguagem atual, GH2 = GE2 + EH2), então, o retângulo BEDC, mais o quadrado de lado GE, é igual à soma dos quadrados de lados GE e EH. Subtraindo o quadrado de lado GE de cada, resta que a área do retângulo BEDC é igual à do quadrado de lado EH (ROQUE, 2012, p. 162).

De acordo com Roque (2012), a proposição II-14 permite obter a quadratura de uma figura retilínea dada, ou seja, um quadrado com a mesma área de um retângulo dado. Encontrar a "quadratura" significava, no contexto grego, achar a área de uma figura dada. Dessa forma, Roque questiona:

Usando essa proposição, como seria possível, portanto, comparar as áreas de dois retângulos sem calculá-las?

E como podemos somar as áreas de dois retângulos?

Para esse questionamento, a autora da a seguinte justificativa respectivamente:

Basta construir os quadrados com áreas iguais às dos retângulos e comparar os lados.

Basta construir os quadrados com áreas iguais às dos retângulos e somar as áreas desses quadrados por meio do "Teorema de Pitágoras".

> Esperamos ter mostrado, assim, que grande parte dos enunciados dos primeiros livros de *Elementos* traduzia uma prática que pode ser denominada "cálculo de áreas", uma vez que consistia em comparar e operar diretamente com áreas de figuras geométricas sem associá-las a números. Na verdade, mencionamos resultados de livros diferentes como pertencendo a uma mesma tradição de operações com áreas: I-45, I-47, II-5, II-14 e VI-29, ... a partir do que foi mostrado, pode-se dizer que a sistematização efetuada nos Elementos tinha o encadeamento dedutivo como uma de suas principais preocupações, o que deve ter levado a um reordenamento artificial de enunciados que pertenciam a uma mesma cultura prática. Ao dizer "artificial", destaca-se o fato de essas proposições terem sido organizadas em função das técnicas de demonstração usadas para atestar sua validade, e não a partir dos problemas efetivos aos quais se aplicavam.
>
> Apresentando um último exemplo, observamos que à proposição VI-29 devia integrar, antes de Euclides, a mesma tradição da I-45: a dos procedimentos de aplicação de áreas. Lembrando que na proposição VI-29 pedia que se construísse um paralelogramo semelhante a uma dada figura com área igual à outra figura estabelecida e que a construção era feita com sobra em relação ao segmento dado inicialmente. Em grego, a palavra "hipérbole" refere-se ao fato de que a base do paralelogramo resultante excede o segmento dado, ou seja, a figura construída possui como excesso a figura semelhante ao paralelogramo dado. "Hiperbólico" remete a excessivo. Quando, inversamente, fica faltando uma figura para completar o segmento dado, tem-se uma situação associada a "elipse". O paralelogramo pedido é construído de modo que fique faltando uma figura semelhante à figura dada, e a palavra "elíptico" quer dizer que algo está faltando (essa construção foi executada na proposição VI-28).
>
> O caso apresentado pela proposição I-45 é similar ao da "parábola", no qual se deve construir, com um ângulo dado, um paralelogramo com área igual à de uma figura dada, ou seja, de modo exato, sem que nada esteja sobrando nem faltando. Nesse caso, em que não há nenhuma figura excedendo a construção pedida, o paralelogramo é construído exatamente sobre o segmento. A origem da palavra "parábola", em grego, remete ao fato de a figura ser construída de modo exato. As cônicas que conhecemos como parábola, hipérbole e elipse ganharam tais nomes no trabalho de Apolônio, justamente porque são usados métodos de aplicação de áreas em suas construções (ROQUE, 2012, p. 163).

Nesta etapa do trabalho, apresentaremos um pouco sobre a história da vida de Arquimedes e a contribuição que deixou no desenvolvimento da matemática.

Nessa proposta, destacamos um de seus trabalhos, intitulado "*quadratura da parábola*", ao qual no decorrer do nosso desenvolvimento apresentaremos a sua demonstração, pois consideramos que esse trabalho tem um papel interessante na evolução do Cálculo.

De acordo com Alvarenga (2006), "O método da exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal." (ALVARENGA, 2006, p. 2); do mesmo modo Boyer (1995), também ressalta, "Para achar áreas e volumes, o versátil Arquimedes usou sua própria versão primitiva do Cálculo Integral, que, de alguma maneira, é muito semelhante, quanto ao espírito, ao Cálculo atual." (BOYER, 1995).

Também escolhemos falar sobre esse matemático devido ao grande reconhecimento que vários autores atribuem a este personagem, dentre eles destacamos.

Arquimedes foi um dos matemáticos mais conhecidos do período pós-euclidiano, seus livros possuem uma estrutura bastante distinta daquela que caracteriza os *Elementos* de Euclides (ROQUE, 2012, p. 175).

Arquimedes (287-212 a.C.), a quem, de acordo com a maioria dos historiadores, deve-se a antecipação (ou mesmo a invenção) do Cálculo Integral (BARON, 1985, p. 9).

> Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.) é considerado consensualmente o maior matemático da antiguidade. Superou todos os outros pela quantidade e dificuldade dos problemas que tratou, pela originalidade de seus métodos e pelo rigor de suas demonstrações. Interessava-se tanto pela matemática pura quanto pela aplicada e criou os dois ramos da física (estática e hidrodinâmica). Tornou-se famoso por suas invenções mecânicas, algumas delas utilizadas na defesa da cidade de Siracusa contra o ataque das tropas romanas comandadas pelo general Marcelo durante a segunda guerra Púnica (218 – 201 a.C.) (ALVARENGA, 2006, p.1).
> Em seu trabalho, desenvolveu também o método de exaustão, creditado a Eudoxo, pelo qual se aproxima a quantidade desejada pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma sequência. Obteve aproximações da área de um círculo comparando-a com as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos. (BOYER, 1995).

De acordo com Assis (2008), Arquimedes viveu de 287 a 212 a.C., ele nasceu e viveu grande parte de sua vida na cidade de Siracusa, situada na costa da Sicília, que atualmente é a Itália, lembrando que naquela época Siracusa fazia parte do mundo grego.

Arquimedes era filho de um astrônomo chamado Fídias, este quem obteve as estimativas para os diâmetros do sol e da lua. Observando que antigamente os nomes dados geralmente continha algum significado, o nome de Arquimedes também tem o seu significado, seu nome pode ser separado em duas partes, sendo a primeira *Arché*, que significa princípio, domínio ou causa original, e *Medes* que significa mente, pensamento ou intelecto.

A interpretação do nome pode ser considerada de duas maneiras, da esquerda para direita, assim teríamos algo do tipo como “a principal mente” ou ainda da direita para a esquerda, nesse caso teríamos algo do tipo “amente do princípio”, sendo esse segundo caso o mais comum na interpretação de nomes da Grécia antiga (ASSIS, 2008).

Ainda de acordo com Assis (2008), Arquimedes viveu algum tempo no Egito, ele ressalta ainda a possibilidade de Arquimedes ter estudado na escola de Alexandria, juntamente com os sucessores de Euclides, famoso por ter publicado o livro *Elementos*, Alexandria era nessa época o centro da ciência grega.

De acordo com Alvarenga (2006), Arquimedes é considerado o maior matemático da antiguidade e um dos maiores cientistas que já existiu, somente Isaac Newton (1642-1727) é comparável a ele nos tempos modernos, Arquimedes tem esse prestígio devido ao desenvolvimento de seus trabalhos experimentais e também pelo brilhantismo e influência de sua obra (ALVARENGA 2006).

Em relação ao cálculo de áreas de figuras com regiões curvas, Arquimedes já calculava a área dessas regiões, afirmamos isso em decorrência do seu trabalho “a quadratura da parábola” ser justamente o cálculo da área de um segmento parabólico, no qual sabemos ser composto de uma região curva, sendo assim mais um motivo para explorarmos esse desenvolvimento.

De acordo com Roque (2012), um dos matemáticos mais conhecidos depois do período de Euclides, sem dúvidas podemos considerar Arquimedes, mostraremos aqui um pouco sobre a história e seus trabalhos, em especial vamos dar ênfase na sua obra intitulada *Quadratura da Parábola*, por se relacionar com o cálculo de área.

Na obra mencionada acima já fica claro a ideia de fazer divisões sucessivas da figura a ser calculada a área para se chegar a uma aproximação, entretanto, em seus livros e em seus trabalhos em geral tem uma estrutura bem diferente da que conhecemos e encontramos nos *Elementos* de Euclides, outra coisa a destacar também é que seus procedimentos e seus métodos não temas características do padrão euclidiano.

Os trabalhos de Arquimedes não têm foco algum quanto a utilizar ou mesmo defender qualquer método do tipo axiomático, ao que parece, e de acordo com seus feitos, Arquimedes não sofreu influência do padrão Euclidiano. Fica evidente então que Arquimedes não utilizava métodos euclidianos, ainda que fosse viável.

Podemos observar em suas obras que Arquimedes tinha mais interesse em divulgar e comunicar novas descobertas relacionadas à resolução de problemas especificamente geométricos, inclusive em seus relatos ele tem o zelo de diferenciar os métodos de descobertas dos métodos de demonstração (ROQUE, 2012).

Entre os trabalhos de Arquimedes, como já dito anteriormente, apresentaremos a *Quadratura da Parábola*, exibiremos essa demonstração aqui devido a relação que a mesma tem com a nossa proposta de trabalhar com os conceitos intuitivos do cálculo, ou seja, acreditamos que esse trabalho de Arquimedes pode contribuir e dar suporte para o desenvolvimento dos conceitos intuitivos do Cálculo Integral.

Para dar início a essa apresentação e a busca de contextualizar os fatos, primeiramente apresentaremos um trecho de uma carta que o próprio Arquimedes escreve a Dositheus a respeito dessa obra, de acordo com Roque (2012), Arquimedes relata sua intenção de comunicar “um certo" teorema geométrico que não foi investigado antes e que agora investigado por mim e que eu descobri, primeiramente, por meio da mecânica, e que foi exibido, em seguida por meio da geometria” (ROQUE, 2012, p. 175).

Seguindo a mesma linha de ideias, Arquimedes novamente volta a falar sobre esse “certo teorema”, dessa vez, no livro *O método dos teoremas mecânicos*, encontrado apenas em 1899 e escrito para Eratóstenes, onde o próprio Arquimedes afirma de acordo com Roque (2012):

> Pensei que seria apropriado escrever-lhe neste livro sobre um certo método por meio do qual você poderá reconhecer certas questões matemáticas com a ajuda da mecânica. Estou convencido de que ele não é menos útil para encontrar provas para os mesmos teoremas. Algumas coisas, que se tornaram claras para mim, em primeiro lugar, pelo método mecânico, foram provadas geometricamente em seguida, uma vez que a investigação pelo referido método não fornece, de fato, uma demonstração. No entanto, é mais fácil encontrara prova quando adquirimos previamente, pelo método, algum conhecimento das questões do que encontrá-la sem nenhum conhecimento prévio (Arquimedes, apud ROQUE, 2012. P. 176).

Através do método da exaustão, que é um procedimento de fazer integrações segundo Assis (2008), Arquimedes conseguiu determinar a área, o volume e o centro de gravidade de vários corpos importantes, salientando que ninguém havia feito isso antes dele (ASSIS, 2008).

De acordo com Alvarenga (2006), para o Cálculo Infinitesimal, esse método da exaustão é que dá fundamento, como o próprio nome diz, nesse cálculo soma-se um número infinito de parcelas, ao que podemos observar que Arquimedes podia não considerar que as somas pudessem ter essa quantidade infinita de parcelas, visto que para a soma infinita de termos é necessário ter ou desenvolver o conceito de numero real e os gregos não tinham esse conceito definido na época, como afirma o autor.

Por esse motivo, não é correto se referir ao método da exaustão como um processo que pode servir de passagem para o conceito de limite, lembrando que a noção de limite tem como pressuposto o fato de considerar o infinito, que na matemática grega sempre esteve ausente. Entretanto, Arquimedes e seus trabalhos certamente foram de grande incentivo para que as ideias de limite e infinito fossem desenvolvidas no século XIX, sendo assim, podemos afirmar que Arquimedes teve um papel fundamental no desenvolvimento do próprio Cálculo Infinitesimal (ALVARENGA, 2006).

> “Deve-se notar que a frase “método de exaustão” não era usada pelos gregos antigos, sendo uma invenção moderna; mas está tão firmemente estabelecida na história da matemática que continuamos a fazer uso dela.” (ALVARENGA, 2006, p. 2).
> Este método, que se tornou o modelo grego nas demonstrações de cálculos de áreas e volumes, era muito rigoroso, no entanto, tinha um grande senão: o resultado para ser provado, tinha de ser conhecido a priori. Arquimedes, sem dúvida, calculava integrais, mas como não as conhecia e pela semelhança com a ideia de cálculo integral dos tempos modernos, foi atribuído a esse processo o nome de método de exaustão. De onde concluímos que Arquimedes foi o precursor da integração. (ALVARENGA, 2006, p.4).

Ainda de acordo com Alvarenga (2006), muitos dos trabalhos de Arquimedes foram perdidos, dentre os quais foram preservados, o autor destaca os seguintes:

> Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I;
> A Quadratura da Parábola;
> Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas II;
> Sobre a Esfera e o Cilindro;
> Sobre as Espirais;
> Sobre os Cones e os Esferoides;
> Sobre os Corpos Flutuantes;
> A Medida de um Círculo;
> O Contador dos Grãos de Areia (ALVARENGA, 2006, p. 4).

Mostraremos agora, a aplicação do Método da Exaustão em *A Quadratura da Parábola.*

2.2.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO DA EXAUSTÃO

Dentre as muitas aplicações onde se utilizou o método da exaustão, a que tem maior destaque é justamente a Quadratura da Parábola. Segundo Alvarenga (2006), na matemática grega, a maioria dos resultados obtidos era através de comparações, assim, a determinação de um problema que envolvesse área, era feito por meio de encontrar uma área já conhecida, na qual muito comum era comparar com a área de um quadrado, esse processo é chamado de quadratura ou mesmo quadrar.

Hoje em dia temos o costume de calcular a área encontrando um número, para os geômetras gregos, o costume era encontrar uma figura já conhecida por eles que tivesse a mesma área, logo o problema de encontrar uma área se transformava em problema para determinar a relação entre duas áreas, como já dito, uma conhecida e a outra que se busca conhecer por meio da comparação.

A mais de um século antes de Arquimedes já se conheciam as secções cônicas, porem em relação ao cálculo de suas áreas nada ainda havia sido determinado. Utilizar esse método da exaustão exige um processo longo e elaborado e Arquimedes fez isso magistralmente. Ele provou que a área chamada A de um segmento parabólico é quatro terços da área chamada T de um triângulo, isso somente se o triangulo tiver a mesma base e a mesma altura do segmento parabólico (ALVARENGA, 2006).

Ainda de acordo com Alvarenga (2006), para encontrar esse resultado, Arquimedes fez a inscrição de um triângulo no segmento parabólico que se desejava encontrar a área, lembrando que esse triângulo inscrito tem a mesma base e a mesma altura, essa inscrição resulta em outros segmentos parabólicos que estão contidos no segmento parabólico a ser calculada a área, a continuação desse processo se dá em inscrever triângulos nesses segmentos parabólicos que a cada inscrição surgem.

Arquimedes então prova que em cada triangulo inscrito, os próximos dois triângulos que são inscritos sobre os lados desse triangulo tem a área igual a 1/4 desse triângulo. Assim, ele faz isso sucessivamente no segmento parabólico, retirando os triângulos inscritos, o resultado é que se têm várias e várias parcelas de áreas dos triângulos aos quais foram se retirando, note que cada parcela é 1/4 da parcela anterior, com exceção da primeira, através desse processo, observe também que essas parcelas forma uma progressão geométrica e sua soma é 4/3 do primeiro termo.

Destacamos então que Arquimedes tem o zelo de mostrar que a área do segmento parabólico jamais pode ser maior que a área do primeiro triângulo que foi inscrito nesse segmento, e por sua vez também não pode ser menor que esse mesmo valor (ALVARENGA, 2006).

> Explicando melhor, Arquimedes inscreve sucessivos triângulos no segmento de parábola, calcula a área desses triângulos e vai obtendo valores cada vez mais próximos do pretendido, somando as áreas dos sucessivos triângulos. Assim, demonstra que a área do segmento de parábola é igual a 3/4daáreadotriângulocomamesmabaseealturadosegmento (ALVARENGA, 2006, p. 5).

Vamos apresentar agora as definições utilizadas por Arquimedes sobre os principais elementos de um segmento de parábola.

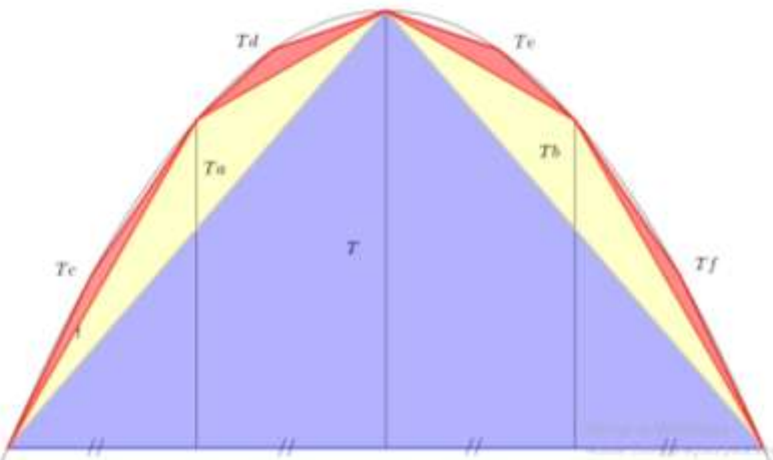
Base: a reta que interrompe a parábola

Altura: perpendicular máxima que pode ser traçada da curva até a base

Vértice: o ponto a partir da qual a altura é traçada

Já para encontrar as alturas dos outros triângulos, essas são encontradas através de retas paralelas com a altura máxima que dividem a base do segmento parabólico em respectivos pontos médios com interseção com a própria curva, conforme mostra a figura 16 (ALVARENGA, 2006).

Figura 16 – Parábola com inscrição de triângulos



Fonte: o autor (2021)

Ainda de acordo com o autor, para conseguir um valor cada vez mais preciso, Arquimedes inscreve sucessivamente triângulos no segmento de parábola e faz a soma das áreas desses sucessivos triângulos. Como já citado, ele não prolonga a soma das áreas desses triângulos até o infinito, mas fica demonstrado que a área do segmento parabólico é 4/3 da área do primeiro triângulo inscrito (ALVARENGA, 2006).

Chamando de S o segmento de parábola e T o primeiro triângulo inscrito no segmento, os outros dois segmentos que também cortam o segmento parabólico insere-se outros dois triângulos T_a e T_b (triângulos amarelos figura 16), de mesma base e altura, e seja a soma de T_a e T_b igual a $T_{1,}$ A partir desses dois triângulos são formados quatro novos segmentos de parábolas e faz-se a inscrição de quatro outros triângulos, T_c, T_d, T_e, T_f (triângulos vermelhos figura 16), onde sua soma é $T_{2.}$

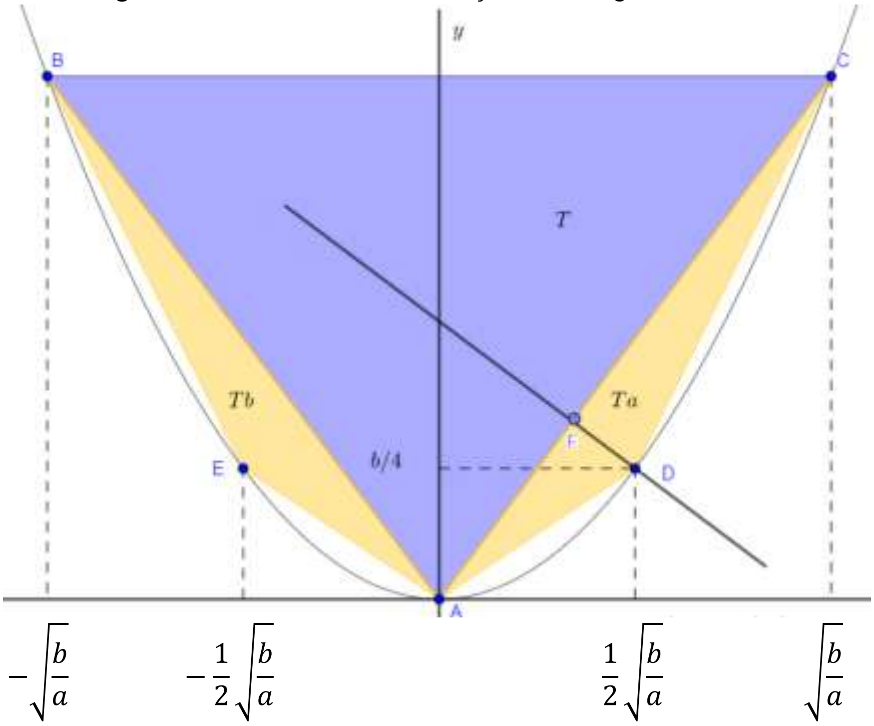
É preciso demonstrar agora que T_1 é igual a T/4 e T_2 é igual a T_1/4 e assim sucessivamente utilizando as propriedades da parábola.

Considere a figura 17, na qual utilizaremos de rotações adequadas de modo que a concavidade fique voltada para cima e o vértice seja a origem, para facilitar nosso entendimento e trabalho, se $a > 0$, podemos supor que qualquer parábola pode ser escrita como $y = ax^2$, suponha também que $y = b$, onde $b > 0$, Mostraremos que T_1 = 1/4T. Observe que os triângulos seguintes apresentam os mesmos cálculos, ainda de acordo com a figura 17, obtemos que T= $\frac{2\mathrm{b}\sqrt{\frac{b}{a}}}{\mathrm{a}}$= b$\sqrt{\frac{b}{a}}$.

O ponto D tem as coordenadas $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}$ e $y = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = \frac{b}{4}$. Dessa forma temos que D = $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{b}{4}\right)$, chamamos à reta r que passa pelos pontos A e C, esta é da forma $y = mx$, por conveniência e como já supomos anteriormente, o ponto A é a origem, logo $m = \frac{b}{\sqrt{\frac{b}{a}}}$ = $\frac{b}{\sqrt{b}}\sqrt{a}$ = $\sqrt{ab}$.

Portanto temos que r: $y = \sqrt{ab}\, x$ (ALVARENGA, 2006).

Figura 17 – Parábola com inscrição de triângulos invertida



Fonte: o autor (2021)

Continuando com a demonstração, vamos considerar agora a reta s, está por sua vez é perpendicular à reta r e passa por D. Assim temos que $s: y = -\frac{1}{m}x + k$, como já vimos que $m = \sqrt{ab}$, logo $s: y = -\frac{1}{\sqrt{ab}}x + k$, pelo fato de D ser ponto da reta, temos que $\frac{b}{4} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{ab}} + k$, onde podemos encontrar $k = \frac{2+ab}{4a}$, portanto $s: y = -\frac{1}{\sqrt{ab}}x + \frac{2+ab}{4a}$.

Chamando de F o ponto de interseção das retas r e s, temos por consequência que $\sqrt{ab}x = -\frac{x}{\sqrt{ab}} + \frac{2+ab}{4a}$, e simplificando, $x = \frac{(2+ab)\sqrt{ab}}{4a(1+ab)}$, então $y = \sqrt{ab}x = \sqrt{ab}* \left(\frac{(2+ab)\sqrt{ab}}{4a(1+ab)}\right) = \frac{b(2+ab)}{4(1+ab)}$, dessa forma temos que a coordenada do ponto F é $\left(\frac{(2+ab)\sqrt{ab}}{4a(1+ab)}, \frac{b(2+ab)}{4(1+ab)}\right)$.

Para calcular a área do triângulo T vamos encontrar sua altura que chamaremos de h, observe que a altura h é justamente a distância do ponto D a F e utilizando o cálculo de distância entre pontos temos que:

$h = d(D,F) = \sqrt{\left(\frac{(2+ab)\sqrt{ab}}{4a(1+ab)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + \left(\frac{b(2+ab)}{4(1+ab)} - \frac{b}{4}\right)^2}$, onde podemos fazer manipulações e obter $h = \frac{b}{4\sqrt{1+ab}}$, note que a base desse mesmo triângulo é a distância dos pontos A e C, [com A = (0,0)], também é calculada por $d(A,F) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{b+ab^2}{a}}$, como agora temos a altura e a base do triângulo sua área é calculada da seguinte forma:

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b+ab^2}{a}} * \frac{b}{4\sqrt{1+ab}}$, como soma das áreas dos triângulos T_a eT_b é T_1, temos que

$T1 = \sqrt{\frac{b+ab^2}{a}} * \frac{b}{4\sqrt{1+ab}} = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{T}{4}$, note que provamos que a soma das áreas de T_a e T_b 1/4 da área do triangulo T, para os cálculos dos triângulos que são inscritos na sequência, os processos são análogos.

Dessa forma, conforme figura 16 e dos cálculos desenvolvidos aqui, podemos perceber que $T + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + ... + T_n + ... = 4/3\ T$, ou ainda podemos escrever $T + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \frac{T}{4^4} + \frac{T}{4^5} + ... \frac{T}{4^n} + ... + \longrightarrow 4/3T$ (ALVARENGA, 2006). Na matemática atual, com a ideia de repetir esse processo infinitas vezes chegamos ao seguinte resultado, $T*(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + ... + \frac{1}{4^n} + ...) = T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} = T4/3$. Temos esse resultado porque a serie $T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ converge para 4/3, pois é a soma de uma progressão geométrica de razão 1/4.

“O elegante é observar que mesmo não pensando no infinito (soma de infinitos termos), Arquimedes encontra a soma exata da série,” (ALVARENGA, 2006, p. 8), encontrando assim o valor exato da área de um segmento parabólico.

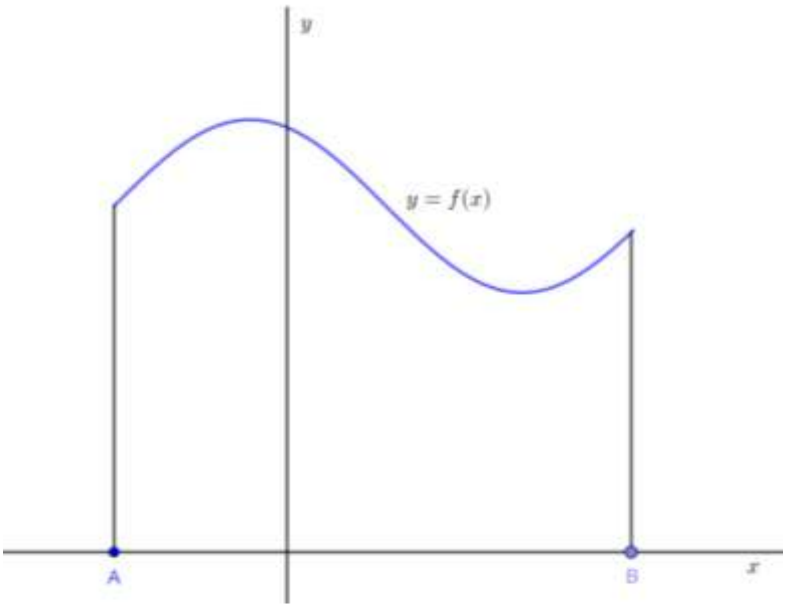
O nível de rigor dessa demonstração de Arquimedes só foi superado a partir dos séculos XVII ou XVIII (ALVARENGA, 2006).

Já vimos em decorrência do que foi apresentado acima que pelos feitos apresentados em seus trabalhos, Arquimedes é considerado o precursor, ou mesmo ainda inventor do Cálculo Integral, vamos agora explorar um pouco mais sobre esse conceito.

Como os resultados que Arquimedes obteve em seus trabalhos só foram superados a partir dos séculos XVII ou XVIII buscaremos apresentar aqui trabalhos dessa época e que apresentem tal superação, com o intuito de mostrar a evolução desses conceitos, mais particularmente abordaremos os trabalhos de Isaac Newton (1642-1727) e de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), pelo fato de estes serem considerados os inventores do Cálculo.

Segundo Zuin (2001), a palavra “cálculo” tem origem no latim, e seu significado é seixo, sinônimo de pedrinha. Entretanto, este termo originalmente na aritmética tinha relação com os sistemas de contagem. Atualmente, o sentido da palavra cálculo tem um significado bem mais amplo e nomes complementares específicos para algumas aplicações como, por exemplo: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral. O que se relaciona com o foco do trabalho aqui é o Cálculo integral, que consiste em calcular a área abaixo de uma curva plana, estando essa entre dois pontos já definidos no eixo x, que também é o “*problema das áreas*”, conforme ilustra a figura a seguir (ZUIN, 2001):

Figura 18– Função f(x)



Fonte: o autor (2021)

O Cálculo passa a ter mudanças significativas partir do século XVII, de acordo com Baron e Bos (1985), destacaram-se nesse período as obras de dois matemáticos, Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilheim Leibniz (1646 – 1716), aos quais é atribuído o papel central na “invenção” do cálculo, considerando é claro que o Cálculo nem começou e nem terminou entre esses dois personagens, mas que merecem mérito por seus feitos, pois, “Newton estendeu e unificou os vários processos de cálculo e Leibniz ligou-os através de uma notação eficaz e de um novo cálculo operacional.” (BARON & BOS, 1985, p 5).

Zuin (2001) faz uma ressalva em relação a Pierre de Fermat (1601-1665), a autora acredita que se Fermat tivesse publicado seus trabalhos e resultados, provavelmente ele também receberia o crédito pelo desenvolvimento do Cálculo, porém devemos destacar que o surgimento desse tal Cálculo na verdade tem a contribuição de vários matemáticos, físicos, astrônomos e não seria exagero dizer a contribuição de vários povos, ainda corroborando com essa ideia, os egípcios determinaram com precisão o volume de uma pirâmide de base quadrada como sendo igual a um terço do volume de um prisma retangular de mesma base e altura (ZUIN, 2001).

A autora acrescenta também que até mesmo na geometria grega clássica podemos encontrar origens do Cálculo já que os gregos se interessavam muito pelo cálculo de áreas em geral, destaca que Eudoxus de Cnido utilizava o método da exaustão que mais tarde foi utilizado por Arquimedes onde esse fez a demonstração da quadratura da parábola (ZUIN, 2001).

> O desenvolvimento do cálculo infinitesimal seguiu um caminho longo e irregular, que se estendeu das especulações filosóficas dos antigos gregos e das demonstrações clássicas de Arquimedes até o século XVII, quando mudanças significativas ocorreram – tanto na quantidade de trabalho realizado quanto na natureza dos métodos utilizados. (BARON & BOS, 1985, p5).

Na própria recente História da Matemática, de acordo com Zuin (2001) pode-se encontrar diversos trabalhos de vários matemáticos no qual muitos deles contribuíram de alguma maneira para o desenvolvimento do Cálculo, aqui citamos nomes como René Descartes (1596-1650), Buonaventura Cavalieri (1598-1647), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616- 1703), Blaise Pascal (1623-1662) Christian Huygens (1629-1695), Isaac Barrow (1630-1677) que inclusive fora professor de Newton em Cambridge e James Gregory (1646-1716) (ZUIN, 2001).

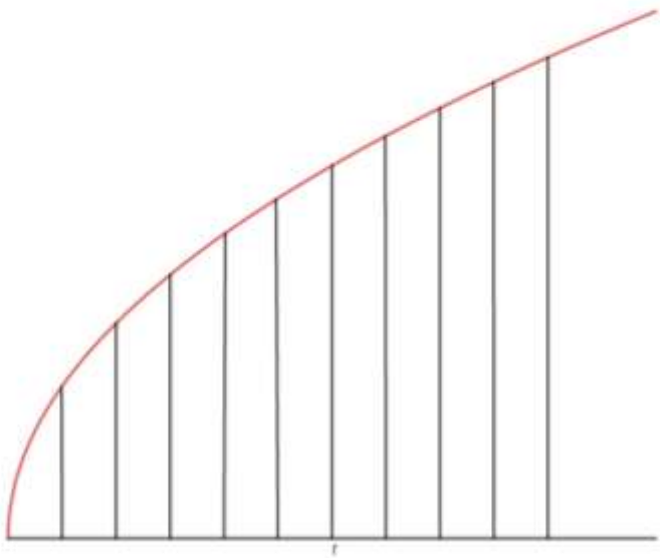
O método da exaustão de Arquimedes foi tão importante que Fermat e Pascal passaram a utilizar em seus trabalhos, Newton afirma que para desenvolver o Cálculo, suas ideias preliminares se baseavam no modo como Fermat traçava a tangente, para enfatizar a importância de vários personagens no desenvolvimento do Cálculo, Newton mesmo reconheceu e afirmou: *“Se eu pude ver mais longe é porque estava apoiado em ombros de gigantes”*. (ZUIN, 2001, p.16).

Prosseguindo e continuando os relatos sobre a importância do Cálculo para aplicações de áreas, também conhecido como Cálculo Integral, de acordo com BOS (1985), Johann Bernoulli dá à seguinte explicação sobre a aplicação da integração determinar quadraturas:

> Uma das mais importantes aplicações do cálculo integral é a determinação de áreas. As áreas são consideradas como sendo divididas em um número infinito de partes, sendo que cada uma pode ser considerada como o

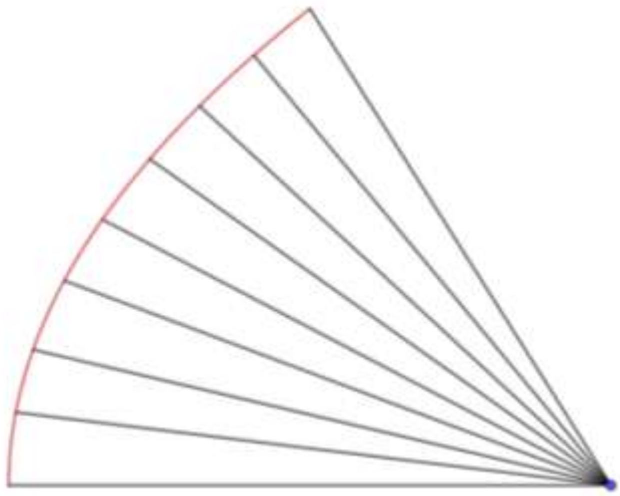
diferencial da área, de modo que, se formarmos a integral dessas partes, obteremos daí também a quadratura necessária.
Para as áreas planas, essas partes infinitesimais podem ser imaginadas de várias maneiras, dependendo do que for mais conveniente para a área plana em questão. Por exemplo, áreas planas podem ser divididas em um número infinito de linhas paralelas, conforme se vê na figura 19 (este é o caso mais usual); ou por um número infinito de linhas que se originam por um ponto determinado, conforme figura 20, ou por um número infinito de tangentes, conforme figura 21, ou por um número infinito de normais a curva, conforme figura 22 (...).

Figura 19 – Curva com linhas paralelas



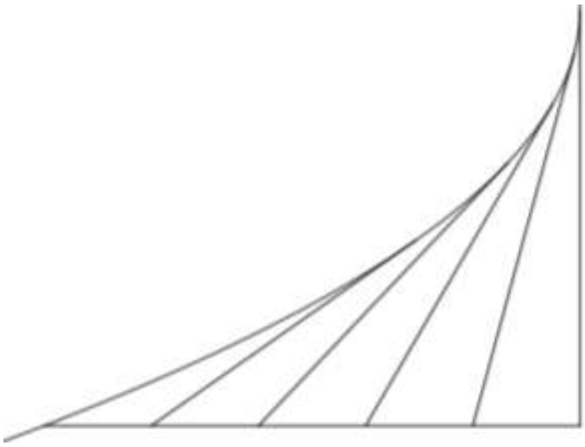
Fonte: o autor (2021)

Figura 20 – Curva com linhas na mesma origem



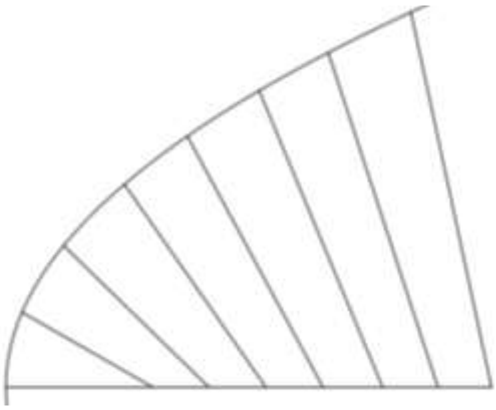
Fonte: o autor (2021)

Figura 21 – Curva com tangentes



Fonte: o autor (2021)

Figura 22 – Curva com linhas normais



Fonte: o autor (2021)

> Agora, para chegarmos às quadraturas, sejam as áreas divididas em qualquer uma das maneiras acima. Se quisermos encontrar o valor da área total, devemos primeiramente determinar o valor de uma das porções infinitamente pequenas, expresso por meio de letras determinadas e por somente um tipo de indeterminada. Tal expressão pode ser sempre determinada a partir da natureza e geração da curva. Isso nos fornece a quantidade diferencial de cuja integral necessitamos; e a integral nos dará a quadratura da área. (BOS, 1985, v.4, p13).

De acordo com Bardi (2008), o Cálculo foi desenvolvido primeiramente por Newton nos anos de 1665 e 1666:

> Um dos mais importantes legados intelectuais do século XVIII, o cálculo foi desenvolvido em primeiro lugar por Newton em seus criativos anos de 1665 e 1666, quando era um jovem estudante da Universidade de Cambridge em retiro na sua propriedade rural. Inesperadamente afastado de seus professores e colegas, Newton passou dois anos em isolamento quase absoluto, realizando experiências e refletindo sobre as leis físicas que governam o Universo. O que resultou desses anos é talvez a maior massa de conhecimentos já produzida por qualquer cientista em tão curto período. Newton fez importantes descobertas relativas à ótica moderna, à mecânica dos fluidos, à física das marés, às leis do movimento e à teoria da gravitação universal, para citar apenas algumas. (BARDI, 2008, p. 12).

Ainda de acordo com Bardi (2008), Newton inventou o cálculo e o chamou de método de fluxos e fluentes, porém manteve esse trabalho em segredo durante a maior parte da sua vida. Newton apenas circulava cópias privadas de seus trabalhos entre amigos e somente veio a publicar seus trabalhos depois de décadas desde que iniciou.

Bardi (2008) destaca também que Leibniz somente depois de aproximadamente dez anos em relação a Newton é que ele veio a se dedicar sobre o Cálculo, isso ocorreu em Paris por volta de 1675, no desenvolvimento dos anos seguintes ele refinou sua descoberta e criou um sistema de símbolos e representação gráfica completamente original. Ainda que Newton fosse o primeiro a descobrir, Leibniz foi o primeiro a publicar seu sistema de Cálculo, isso ocorreu em dois trabalhos datados em 1684 e 1686.

Dentre os citados que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo, citamos também Johannes Kepler (1571-1630) e Galileu Galilei (1564-1642) como pioneiros a apresentar uma teoria com a estrutura diferente da apresentada por Arquimedes, eles proporcionam a utilização dos indivisíveis, de acordo com Zuin (2001), Kepler estudou áreas e volumes baseando-se sempre na noção de quantidade infinita em referência às retas e planos.

Buonaventura Cavalieri (1598-1647) que inclusive foi aluno de Galilei escreveu os livros *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635) que significa: Geometria, aprimorada de uma forma nova pelos indivisíveis do contínuo e *Exercitationes geometricae sex* (1647) cujo significado é: Seis exercícios geométricos, os quais se tornaram referência para os métodos de integração (ZUIN, 2001).

James Gregory escreveu *Vera circuli et hyberbolae quadratura* (1667) e Geometriae par universalis (1668), no qual ele deu um tratamento verbal e geométrico, de acordo com Baron (1985), a autora entende que Gregory compreendia muito bem a relação inversa entre tangente e quadratura, ela ainda afirma:

> Ele passa diretamente da quadratura de uma curva à construção da tangente de uma outra curva (...). Podemos considerá-lo como a primeira afirmação publicada em forma geométrica do Teorema Fundamental do Cálculo (BARON, 1985, v.2, p.44).

Afirmam também que no livro X, na proposição 11, Barrow prova que este teorema e equivalente a:

$$Ry = \int_0^x zdz => R\frac{dy}{dx} = zR$$

Assim, concluem que este é o teorema que ficou conhecido como o *Teorema Fundamental do Cálculo.* (ZUIN, 2001).

Newton enuncia claramente este teorema em sua obra “Método de Fluxões” o qual ele escreve:

> Eu chamei de Quantidades Fluentes, ou simplesmente Fluentes, estas quantidades que eu considero como aumentados gradualmente e independente; eu as apresentei pelas ultimas letras do alfabeto, v, x, y, z para distinguir das outras quantidades que, mas equações, são consideradas como conhecidas e determinadas que nós representamos pelas letras iniciais a, b, c, etc.; eu representei pelas mesmas letras, sobrepostas de um ponto, x, y, ż as velocidades cujas quantidades fluentes são aumentadas pelo movimento que as produz e, por consequência, nós podemos chamar fluxões. Assim x e y são quantidades fluentes porque variam (fluem), e (x ponto) (y ponto) são fluxões dos fluentes x e y.
>
> Sendo dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões. E inversamente (Galarda, 1999, p. 128, apud ZUIN 2001, p. 23).

De acordo com Baron e Bos (1985), a invenção do Cálculo realizada por Leibniz é fundamentada em três ideias importante, as quais seguem:

> 1. O interesse de Leibniz pelo símbolo e pela notação, vinculado à sua ideia de uma linguagem simbólica geral;
> 2. O reconhecimento de que somar sequencias e tomar as suas diferenças são operações inversas e que, semelhantemente, a determinação de áreas e a de tangentes são operações inversas;
> 3. O triângulo característico e o seu uso para deduzir transformações gerais de áreas (por exemplo, a transmutação) (BARON & BOS, 1985, p. 52).

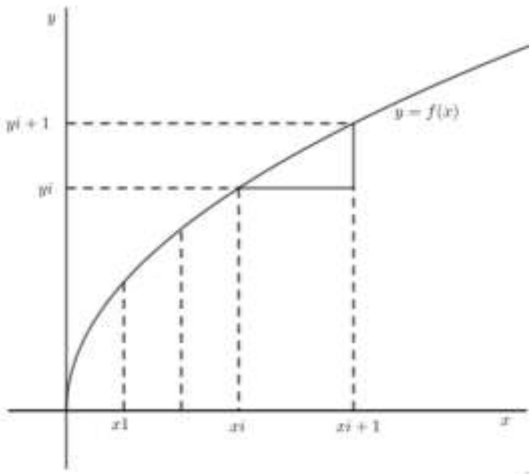
Ainda de acordo com Zuin (2001), Leibniz realizou seus estudos sobre áreas podendo estas serem calculadas através de divisões dessa área relativa em retângulos bem estreitos, e em seguida realizando a soma dos mesmos, outro ponto importante é que a tangente em relação a uma curva envolve as diferenças em relação às coordenadas x e y, que é a noção de diferencial, Leibniz também percebeu que esses processos são inversos e desenvolveu então uma terminologia e notações próprias.

Observando os trabalhos de Newton e Leibniz, nota-se que o primeiro utilizou o termo fluxões enquanto o segundo utilizou o termo cálculo, evidentemente que o termo cálculo utilizado por Leibniz foi o que prevaleceu juntamente com suas notações, por serem consideradas mais adequadas e significativas.

As notações que usamos hoje em dia tais como dx, dy, $\frac{dy}{dx}$, $\int ydx$, foram criadas por Leibniz.

Observe a curva $y = f(x)$ a seguir, conforme a figura 23:

Figura 23 – Curva com elementos destacados



Fonte: o autor (2021)

Leibniz fazia o seguinte: $\Delta xi = xi + 1 - xi = 1$. Logo, a área chamada S, delimitada pelo eixo x e pela função $y = f(x)$ seria:

$$S \cong \sum \mathrm{yi}\, \Delta xi = \sum \mathrm{yi}$$

Outro ponto a considerar é que a declividade da tangente à $y = f(x)$ no ponto cuja coordenada for x, era obtida da seguinte forma:

$$\frac{\Delta yi}{\Delta xi} = yi + 1 - yi$$

Note que quanto menor fosse à escolha da unidade, as aproximações seriam cada vez mais precisas, conclui se então que se a unidade for infinitamente pequena, esse resultado deixa de ser uma aproximação e passa a ser então uma exatidão (ZUIN, 2001).

Já vimos que vários autores contribuíram como o desenvolvimento do Cálculo, mas apenas Newton e Leibniz de fato formularam o *Teorema Fundamental do Cálculo*, cujo significado diz que “a solução do problema da tangente pode ser usada para resolver o problema da área” (ZUIN, 2001, p. 28). Vale a ressalva de que Gregory e Barrow já conheciam este teorema, porem Newton comprovou seus resultados em 1666 e 1676, mas estes somente foram publicados no século XVIII (ZUIN, 2001).

Para Leibniz, a “integral de função $f(x)$” expressaria algo inteiro, ou seja, a soma total das divisões que fora feita na superfície. Observe que integro significa inteiro, assim o símbolo da integral nada mais é do que uma abreviatura de soma, entretanto dx era tido como um acréscimo de x. Logo $f(x)dx$ era a área de um retângulo no ponto x, onde a largura desse retângulo era dx. Assim considerando dx infinitamente pequeno e somando todos os retângulos, teríamos uma expressão do tipo:

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx$$

Newton e Leibniz desenvolveram teorias que por fim chegaram ao Teorema Fundamental do Cálculo, mas o fato é que cada um percorreu caminhos distintos.

Segundo Baron &Bos (1985, v.4, p. 70-71), as autoras apontam as principais diferenças nas teorias desenvolvidas por Newton e Leibniz, conforme mostra a tabela 1:

Tabela 1 – Diferença das teorias entre Newton e Leibniz

Newton	*Leibniz*
Considerava as variáveis dependentes do tempo aplicando o conceito de movimento	*Entendia as variáveis como percorrendo sequências de valores infinitamente próximos. No seu cálculo há pouco uso de conceitos de movimento.*
O conceito cinemático sugere a velocidade ou taxa de mudança da variável como conceito fundamental: a fluxão. (A fluxão não era uma quantidade infinitamente pequena, mas uma velocidade finita).	*A noção das variáveis enfatizando a diferencial como diferença de dois vetores sucessivos na sequência. As variáveis adquirem novos valores continuamente e não por saltos. As diferenças não podiam ser finitas e tinham que ser infinitamente pequenas.*
A integral é a "tarefa de achar as quantidades fluentes para fluxões dadas".	*A integral é um somatório.*
O teorema Fundamental esta contido na definição de integral.	*O Teorema Fundamental não esta contido na definição de integral.*

Fonte: (Baron & Bos, 1985, v.3, p. 70-71)

Depois de Newton e Leibniz, vários outros matemáticos e estudiosos continuaram a estudar o Cálculo, nomes como Jaques Bernoulli, Johann Bernoulli, Nicholas Bernoulli, Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange.

Com o passar do tempo, no desenvolvimento e avanço da matemática, o Cálculo de Newton ficou mais direcionado a geometria, enquanto os estudos referentes ao Cálculo feito por Leibniz foram mais desenvolvidos para a análise, fugindo um pouco de figuras e interpretações geométricas. (Baron & Bos, 1985, v. 3, p. 72).

Concluímos então que Newton e Leibniz tiveram um papel fundamental no desenvolvimento do Cálculo de até mesmo no desenvolvimento da matemática, como destaca Baron & Bos (1985):

Consideram-se Leibniz e Newton os inventores do Cálculo. Isso significa que fizeram algo essencialmente *diferente e mais* do que os seus predecessores. (BARON & BOS, 1985, p. 68).

As autoras destacam ainda três motivos para essa atribuição da autoria do Cálculo a Newton e Leibniz, os quais são:

> 1) Leibniz e Newton criaram um sistema coerente de métodos a fim de resolver problemas sobre curvas.
> 2) A coerência dos sistemas de Leibniz e Newton foi atingida devido ao reconhecimento do teorema fundamental do cálculo: a relação inversa entre diferenciação e a integração.
> 3) Newton e Leibniz inventaram um sistema de notação e de símbolos pelo qual podiam aplicar analiticamente seus novos métodos, quer dizer, pelo uso de fórmulas ao invés de figuras e a sua descrição verbal por argumentos geométricos. (BARON & BOS, 1985, p. 69).

2.3 ENSINO DE CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

2.3.1 CÁLCULO NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Nosso objetivo nesta etapa da propostaé apresentarum breve contexto sobre o ensino de Cálculo na Educação Básica,apresentar propostas que já foram aplicadas nesse nível de ensino e dicutir as possibilidades e considerações sobre ensinar os conceitos intuitivos do Cálculo, durante toda a minha jornada escolar, pelo menos ao que me lembro, nunca estudei ou foi me apresentado os conceitos intuitivos do Cálculo, incluise, devido a essa vivência escolar, pensar no ensino de cálculo na Educação Básica para mim parece improvável, mas fato é que o Cálculo já fez parte da grade da Educação Básica, como destaca Avila (1991) a história do ensino de Cálculo no Brasil se resume da seguinte maneira:

> [...] fazia parte do programa da 3a série do chamado curso científico o ensino da derivada e aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como polinômio de Taylor. Isso desde 1943, quando foi instituída uma reforma do ensino secundário que ficou conhecida pelo nome do ministro na época, o sr. Gustavo Capanema. Mas mesmo antes da reforma Capanema, quando o que hoje chamamos de 5^{a} à 8^{a} série mais o 2o grau era o curso ginasial de 5 anos, seguidos por dois anos de pré-universitários, já o Cálculo fazia parte do programa no pré das escolas de engenharia (AVILA, 1991, p.1).

De acordo com Miorim (1998), os métodos modernos do Cálculo infinitesimal, cujo desenvolvimento geralmente é atribuído principalmente a Newton e Leibniz, fundamentaram o argumento para o início da modernização do estudo da matemática no Brasil no século XX.

Também destacamos que a matemática integra o currículo da escola no Brasil desde o século XIV:

> O ensino secundário brasileiro, entretanto, percorreu um longo caminho desde o descobrimento do Brasil, em pleno Renascimento, até 1931 para começar a ser organizado em um sistema nacional. O ensino de Matemática, também, teve um longo caminho a percorrer. Num primeiro momento, para conseguir que suas várias áreas fossem consideradas importantes para a formação geral do estudante. Num segundo momento, para modernizar seus conteúdos. (MIORIN 1998, p.81).

Outro aspecto que poderia servir de impecilho para inserir os conceitos intuitivos do Cálculo no Ensino Médio seria se não houvesse nenhuma sustentação na grade curricular desse ensino, tornando possível somente com uma mudança curricular, porém não é necessário nada disso, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, há uma orientação em relação a esses conteudos, chama também a atenção o alerta da necessidade de relacionar esses conteúdos e não trabalhar com eles de forma isolada.

> Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As seqüências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos,o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática (PCN/EM, 2000, p.43).

Observe que além da possibiliade de trabalhar com a introdução de tais conceitos, também há até um incentivo para que de fato isso ocorra, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais +, (2002):

> Se julgar mais apropriado, uma escola poderá iniciar algum trabalho de taxas de variação em Matemática na primeira série, juntamente com as funções; outra escola, por sua vez, pode atribuir à Física ou à Química o desenvolvimento de taxas no tempo, nas velocidades espaciais e de reação de que fazem uso, adiantando um trabalho que pode ser desenvolvido mais tarde em Matemática de forma mais geral (PCNs+, 2002, p.135).

Observa-se também que um fator que complica para inserir novos conceitos e propostas de ensino que de certa forma fogem do padrão das dinâmicas atuais das aulas em sua maioria é muitas vezes atribuidas pelo tempo, ou seja, a falta de tempo, as poucas aulas, o excesso já existente de conteúdos para contemplar a grade, mas os Parâmetros Curiculares Nacionais podem ter a solução para estes fatores complexos, veja a seguir:

> [...]o currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizadas. Outros aspectos merecem menor ênfase e devem mesmo ser abandonados por parte dos organizadores de currículos e professores. (PCN/EM, 2000, p.43).

Buscaremos agora apresentar parte do currículo de matemática do Ensino Médio, que tem relações com os conceitos que temos tratado, ou seja, as ideias intuitivas do Cálculo, dessa forma, primeiramente vamos definir o que de fato siginifica o currículo na Educação Básica, de acordo com as DCEB (Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática) e segundo Sacristan (2000), como segue:

> [...] o currículo como conjunto de conhecimentos ou matérias a serem superadas pelo aluno dentro de um ciclo – nível educativo ou modalidade de ensino é a acepção mais clássica e desenvolvida; o currículo como programa de atividades planejadas, devidamente sequencializadas, ordenadas metodologicamente tal como se mostram num manual ou num guia do professor; o currículo, também foi entendido, às vezes, como resultados pretendidos de aprendizagem; o currículo como concretização do plano reprodutor para a escola de determinada sociedade, contendo conhecimentos, valores e atitudes; o currículo como experiência recriada nos alunos por meio da qual podem desenvolver-se; o currículo como tarefa e habilidade a serem dominadas como é o caso da formação profissional; o currículo como programa que proporciona conteúdos e valores para que os alunos melhorem a sociedade em relação à reconstrução social da mesma (SACRISTAN, 2000, p. 14, apud DCEB, 2008).

Ainda de acordo com as DCEB (2008), propõe-se que o Currículo da Educação Básica possa oferecer ao estudante uma formação suficiente e necessárias visando enfrentamento da realidade social, econômica e política no contexto dos estudantes.

Outro ponto que cabe um destaque é o porque tem tanta importância toda essa questão que envolve o currículo e os conteúdos, segundo as DCEB (2008 p.24), “como saber escolar, o conhecimento se explicita nos conteúdos das disciplinas de tradição curricular, quais sejam:”, claro que entre as disciplinas esta a Matemática.

Ainda em decorrência desse pensamento, Sacristan (2000) afirma:

> Sem conteúdo não há ensino, qualquer projeto educativo acaba se concretizando na aspiração de conseguir alguns efeitos nos sujeitos que se educam. Referindo-se estas afirmações ao tratamento científico do ensino, pode-se dizer que sem formalizar os problemas relativos aos conteúdos não

> existe discurso rigoroso nem científico sobre o ensino, porque estaríamos falando de uma atividade vazia ou com significado à margem do para que serve (SACRISTÁN, 2000, p. 120, apud DCEB, 2008).

O autor corrobora ainda que já é hora de romper a barreira do pensamento de que o professor atua somente o que diz respeito as técnicas de ensino, mas que o mesmo também deve fazer parte de todo o processo em que os conteúdos disciplinares são decididos e também selecionados.

> [...] A reflexão sobre a justificativa dos conteúdos é para os professores um motivo exemplar para entender o papel que a escolaridade em geral cumpre num determinado momento e, mais especificamente, a função do nível ou especialidade escolar na qual trabalham. O que se ensina, sugere-se ou se obriga a aprender expressa valores e funções que a escola difunde num contexto social e histórico concreto (SACRISTÁN, 2000, p. 150 , apud DCEB, 2008).

Os conteúdos estruturantes são considerados os conhecimentos que tenham grandes amplitudes, os conceitos e as práticas que tem como papel identificar e organizar tais campos de estudos em relação a uma disciplina escolar são considerados fundamentais para a compreensão dos mesmos.

Seguem abaixo os conteúdos estruturantes propostos nas Diretrizes Curriculares que são direcionados para Educação Básica da rede Pública Estadual:

• Números e Álgebra
• Grandezas e Medidas
• Geometrias
• Funções
• Tratamento da Informação

Ainda de acordo com as DCEB (2008), para o Ensino Médio, os conteúdos estrututrantes se desdobram nos seguintes conteúdos:

Para Números e Algebra, apresenta-se:

• Números Reais
• Polinômios

Para Grandezas e medidas, apresenta-se:

• Medidas Derivadas: Área e Volume

Para Geometrias, apresenta-se:

• Geometria Plana

Para funções, apresenta-se:

• Função Afim
• Função Quadrática

• Função Polinomial

De acordo com as observações destacadas, concluimos que os conceitos intuitivos do Cálculo estão presentes nos currículos de Matemática, ainda que o trabalho praticado nas salas de aula ao menos em partes não contemplem totalmente esses conceitos.

2.3.2 ENSINO DE CÁLCULO NO NÍVEL SUPERIOR

Apresentamos a seguir, alguns aspectos do ensino de Cálculo no Ensino Superior. Segundo Resende (2003), o índice de reprovação na disciplina de Cálculo pertence à faixa de 45% a 95% na Universidade Federal de Fluminense. De acordo com Molon e Fiqueiredo (2015), destaca-se que o índice de reprovação na Universidade Federal de Santa Maria está próximo de 58%. Provavelmente, a realidade de elevados índices de reprovação não seja apenas encontrada em lugar isolado.

De acordo com Barufi (1999, apud LIMA e PAVANELO, 2017) a disciplina de Cálculo tem dois objetivos fundamentais, o primeiro objetivo é destacado como uma ferramenta importante para estudos de variação de grandezas e aproximações, já o segundo objetivo é apontado como um proporcionador de condições básicas referentes aos estudos de equações diferenciais, estas condições podem dar suporte a resoluções de problemas relevantes.

As autoras destacam que o Cálculo como um curso básico, amplo e integrador, é fundamental para a formação inicial de estudantes de exatas e ressalta ainda que o principal objetivo da disciplina de Cálculo deve ser a construção de significados conceituais por parte dos alunos. Importante ressaltar que este objetivo está diretamente relacionado com o processo de desenvolvimento didático envolvido em sala de aula.

Os conteúdos trabalhados nos cursos de Cálculo convergem para o conceito de função. Já vimos anteriormente que Leibniz ao introduzir essa palavra para o conceito teve como foco relacionar qualquer variável geométrica, como associação a uma determinada curva. Com o passar do tempo, a noção de função foi assumindo significados específicos, um desses significados é a relação de dependência entre uma variável dependente e outra independente.

Desde Newton e Leibniz, a relação entre integração e derivação sempre foi a de processos opostos, somente Cauchy introduziu uma teoria de integração independente da derivação (SILVA, 2011).

> A epistemologia histórica traz à luz obstáculos e paradoxos que acompanharam a gênese dos conceitos da matemática e, em particular, os do Cálculo. Esse fato indica, por um lado, que o ensino pode se tornar mais eficaz se não for desvinculado da evolução histórica; e por outro lado, aponta para a necessidade de investigações e estudos a fim de melhor se conhecer esta importante componente do ensino, fato que poderá contribuir para uma melhor instrumentalização, visando à compreensão dos desafios envolvidos nas atividades docentes. (SILVA, 2011, p. 7).

De acordo com Fonseca Bom (2003, apud SILVA, 2011), as dificuldades que os estudantes apresentam em relação ao Cálculo surgem na transição do estudo da Matemática na Educação Básica para o estudo da Matemática no Ensino Superior, o autor faz referência à teoria antropológica do didático de Chevallard, trata-se de uma teoria desenvolvida no quadro da Didática da Matemática e que permite, particularmente, analisar situações de ensino e aprendizagem da Matemática escolar.

Fundamentado nessa teoria, acredita-se que as matemáticas que se estuda no Ensino Médio sejam mais pontuais, rígidas e com bem pouca articulação entre esses estudos, além disso, destacam-se também as muitas descontinuidades entre a Matemática da Educação Básica e a Matemática do Ensino Superior, a Matemática da Educação Básica é considerada de acordo com essa teoria de “matemática mostrativa” enquanto que a Matemática do Ensino Superior é considerada “matemática demonstrativa”.

O autor ainda fundamenta essa conclusão baseando-se em uma análise de dados colhidos de uma grande mostra de estudantes, através desses dados foi possível identificar respostas coincidentes com as dos livros textos, fato que explica que a relação dos alunos com a Matemática da Educação Básica esta determinada diretamente pela relação com a instituição.

Ainda de acordo com Fonseca Bom (2003, apud SILVA 2011), nota-se que o estudo da Matemática realizado na Educação Básica é determinado por um contrato didático, com base na matemática pontual, com mecanismos e predominância de algoritmos, em que o foco é muito mais voltado aos procedimentos do que propriamente aos objetos matemáticos, conclui-se ainda que o professor acredita ter realizado um bom trabalho se os alunos desempenham bem os procedimentos e que esses processos garantem o sucesso desses estudantes ao ingressarem em cursos específicos da área de Matemática.

Entretanto, nas universidades "as matemáticas" são globais, requer relações já estabelecidas entre conteúdos matemáticos com conhecimentos já adquiridos anteriormente, isso se dá principalmente por demonstrações e generalizações, as quais são diretamente opostas ao que também se chama de procedimentos algorítmicos.

Vale ressaltar que também no Ensino Superior muitos professores abusam desses procedimentos algorítmicos, a diferença nesse caso se dá pela própria natureza da disciplina de matemática nesse nível de ensino, a própria Matemática apresenta uma característica mais global, exigindo com que os estudantes relacionem os diferentes saberes isolados que foram adquiridos na Educação Básica (SILVA, 2011).

Outro ponto que gostaríamos de destacar é sobre o ensino de maneira geral, o quanto a questão da sociedade atual e do próprio individuo interfere na relação de ensino e aprendizagem, Carvalho e Carvalho (2006) faz alguns questionamentos interessantes em relação a essas possibilidades, discutindo um pouco sobre os laços da Educação Matemática, Psicanálise e Hipermodernidade.

> Nesta nova era, o problema não é atingir algum objetivo, o problema é lidar com múltiplas possibilidades de escolhas. O homem angustia-se por ter que escolher porque toda escolha implica em uma perda, ao optar por um certo caminho é inevitável a dúvida sobre o outro que não será tomado, a liberdade excessiva, 'hiperliberdade', confunde o sujeito. (CARVALHO E CARVALHO 2006, p. 10).

Destacamos aqui que um ponto sobre a hipermodernidade, para Lipovetsky, "o rótulo 'pós-moderno' já ganhou rugas, tendo esgotado sua capacidade de exprimir o mundo que se anuncia" (LIPOVETSKY, 2004, p. 52, apud CARVALHO E CARVALHO 2006, p. 9).

Carvalho e Carvalho (2006) destacam que na educação e nas práticas educacionais de hoje é possível perceber as consequências sobre as desorientações desses tempos com relação aos tópicos acima, ressaltam sobre a ruptura de autoridade e que esses efeitos trazem consequências para a escola, que para os autores parecem estática, e ponderam:

A psicanálise apresenta-se como uma possibilidade de inovação ao redefinir nossa relação com este saber, tratando do impossível, do não-saber, do não-sentido (CARVALHO E CARVALHO 2006, p10).

Ainda de acordo com os autores, as questões relacionadas ao ensino-aprendizagem de Matemática são abundantes, para eles, costumeiramente se buscam as estratégias de ensino onde o saber prévio do aluno tenha destaque e a partir disso contextualizar com o ambiente escolar, o ponto superinteressante que os autores sugerem é dar um passo em direção a novos caminhos e buscar explorar ao invés do se sabe, explorar o não saber. (CARVALHO E CARVALHO 2006).

Consideramos que essa ideia de explorar o “não saber” pode ser de grande importância também para o Ensino de Cálculo, deixamos aqui essas observações com o intuito de cada vez mais ser dada atenção para o sistema de Ensino de forma geral e que nós possamos sempre estar atentos a novas tendências e estratégias em nossa caminhada, tanto acadêmica como profissional.

2.3.3 ENSINO DE CÁLCULO EM GERAL

O Ensino de Matemática tem sido alvo de diversos estudos, em todos os níveis, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Segundo Molon e Figueiredo (2015, p. 2) “Os alunos frequentemente apresentam dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos. Muitos deles não encontram sentido ou aplicação dos conteúdos abordados em sala de aula”, e como se não bastassem essas dificuldades não ficam apenas nos conceitos básicos, já que os conceitos matemáticos geralmente são encadeados, o que torna necessário a compreensão de uns conceitos para a sequência do aprendizado dos demais conhecimentos (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

Diante dessa realidade, muitos estudos também sugerem a necessidade de uma mudança, assim como enfatiza Ávila (1993, p. 3, apud MOLON e FIGUEIREDO, 2015): “a linguagem não motiva ninguém, ideias sim. Nenhum aluno pode se interessar por qualquer coisa onde não veja algum elemento que lhe satisfaça ou aguce a curiosidade”.

Em decorrência isso, temos que no Ensino Médio, por exemplo, destacando o primeiro ano, este é praticamente ocupado por formalismos da teoria dos conjuntos, definições de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, ao ocupar-se muito com esses formalismos, um ponto importantíssimo acaba ficando de lado, que seria a aplicação de cada função e a visualização do comportamento de seus gráficos, entre outros (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

Rezende (2003) destaca também que um ensino sobre função, sem que se trate de suas aplicações e visualizações, podem refletir nas dificuldades que se apresentam atualmente nas disciplinas iniciais de cálculo em diversos cursos do ensino superior.

Há estudos e pesquisas que apontam um grande número de reprovações na disciplina inicial de cálculo do ensino superior do Brasil, nesse sentido Rezende (2003, p.1) destaca que um dos grandes desafios no ensino superior de matemática é o "fracasso no ensino de cálculo", ainda de acordo com o autor, esse fracasso acontece justamente no momento em que se começa a ensinar cálculo.

2.3.4 DIFICULDADES NO ENSINO DE CÁLCULO NO NÍVEL SUPERIOR

O grande índice de não aprovação nas disciplinas de Cálculo mostra que há realmente uma dificuldade em relação ao Ensino de Cálculo, comprovando isso Rezende (2003) afirma que várias instituições de ensino apresentam resultados nada satisfatórios no estudo desses conceitos de matemática.

Corroborando com essa ideia, os possíveis fatores que podem contribuir para o fracasso ou alto índice de reprovação nas disciplinas de que envolvem os conceitos de Matemática no Ensino Superior de acordo com Santos e Borges (1993) podem ser atribuídos em específico aos alunos, aos professores ou até mesmo a instituição de ensino, também destacam que fatores de ordem sócio econômicos, de ordem pedagógica e fatores relativos às condições institucionais são as principais causas desses insucessos, destacamos a seguir esses principais fatores apontados pelos autores:

- Falta de conhecimentos básicos de Matemática por parte do aluno ao ingressar na Universidade
- Pouca motivação do aluno para o estudo
- Incapacidade cognitiva do aluno de aprender os conteúdos do Cálculo
- Origem de classe
- Renda familiar
- Nível instrucional dos pais
- Custos com educação
- Metodologia utilizada pelo professor
- Tipo de relação professor-aluno que se desenvolve em sala,
- Postura do professor em relação às dificuldades de aprendizagem do aluno
- Composição das turmas com alunos de diferentes cursos,

- Bibliotecas com um número insuficiente de livros para atender a demanda dos alunos
- Salas de aulas sem as mínimas condições físicas para desenvolver a prática docente
- Inadequação de currículos (SANTOS e BORGES, 1993, p. 6).

Segundo Barufi (1999), em relação ao índice de não aprovação em cursos de Cálculo, relata que:

> O índice de não aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45% - isto é, não se aprova mais do que 55% em uma turma de Cálculo. (BARUFI, 1999, p.14).

Rezende destaca também dados relativos à UFF (Universidade Federal de Fluminense), de acordo com ele, “a variação do índice de não aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que para o Curso de Matemática este não é inferior a 65%” (RESENDE, 2003, p.1).

Entretanto queremos destacar aqui que esses dados não são específicos de uma ou outra instituição, encontram-se também índices semelhantes em diversas outras instituições, como apresentam Molon e Figueiredo (2015), os autores apresentam dados da UFSM (Universidade Federal de Santa Maria), no período entre 2009 e 2012, nessa análise, eles avaliaram simplesmente a quantidade de aprovação e a quantidade de não aprovação nessa instituição nas disciplinas relacionadas ao cálculo.

Segundo os autores, de um total de 3457 matrículas, apenas 1447 foram aprovados com nota, desses dados conclui-se facilmente que a maioria dos estudantes não obteve sucesso nessas disciplinas, reprovaram por nota ou por frequência ou mesmo pelo trancamento parcial ou cancelamento da matrícula. Concluíram então que o índice geral reprovação nessas disciplinas foi de 58.14% (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

Os próprios dados apresentados nos fazem perceber a necessidade de fazer algo a respeito para superar esse problema, Molon e Figueiredo (2015), apontam a possibilidade de inserir as ideias do Cálculo no Ensino Médio, ou seja, eles sugerem atividades que envolvam as ideias intuitivas de limite, derivadas e integrais, também é possível explorar a variação através de problemas de aplicação e outro ponto importante é o cálculo da área de regiões delimitas por curvas, que na verdade são gráficos de função, através dessa possibilidade, podem–se percorrer bons caminhos para um trabalho que de fato tenha significado para a matemática do Ensino Médio.

2.3.5 LIMITES, DERIVADAS E INTEGRAIS NO ENSINO MÉDIO?

A pergunta que se faz sobre esses temas de limite, derivada e integral é a viabilidade de trabalhar com esses tópicos no Ensino Médio, se de fato considerarmos o Cálculo com sua linguagem exclusivamente formal, seus simbolismos, o rigor necessário nos teoremas e nas demonstrações, certamente podemos concluir que seria inviável fazer esse trabalho, pois para tal é necessário ter certos conhecimentos específicos e que podemos considerar que um estudante do Ensino Médio ainda não tem esse domínio (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

De acordo com o parágrafo acima, podemos concluir que (MOLON e FIGUEIREDO, 2015) propõe trabalhar com as ideias geradoras do Cálculo na Educação Básica, nossa proposta é justamente essa, onde utilizamos da História da Matemática para contextualizar a evolução dos conceitos intuitivos relativos ao Cálculo Integral através de uma proposta de atividade pertinente para esse processo.

De acordo com (ANTON, 2000), baseado na História da Matemática e na história do Cálculo, pode se perceber que os problemas que motivaram as ideias básicas do Cálculo são: o problema da Reta Tangente, o problema da Área, e o problema da Velocidade Instantânea.

O autor destaca também que ainda que possa parecer que esses problemas são distintos, eles na verdade tem um elo em comum, o fato de todos eles envolverem processos infinitos de aproximação. Anton (2000) afirma ainda que é possível perceber uma ligação entre assuntos através dos princípios fundamentais do Cálculo, (ANTON 2000, p.4).

Tendo esse entendimento, a questão agora é como tornar possível trabalhar com esses temas geradores do Cálculo e relacionar com os conteúdos do Ensino Médio de forma a introduzir de maneira satisfatória as ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

As possibilidades que os autores destacam é que ao trabalhar com o estudo das funções, ao analisar o comportamento gráfico, no caso da função quadrática que genericamente pode ser apresentada como $f(x) = ax^2 + bx + c,$ buscar uma maneira de levar o aluno a compreender que se o coeficiente a é positivo, então os valores da função serão cada vez maiores na medida em que o coeficiente a é cada vez maior ou cada vez menor (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

Os autores propõem também o problema da reta da tangente, eles destacam que este problema tem uma possível abordagem a partir do conceito da reta secante ao gráfico de uma função, o objetivo deste problema é fazer com que as secantes se aproximem cada vez mais da reta tangente, isso acontece à medida que se considera intervalos cada vez menores no domínio da função (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

Outro aspecto importante a considerar é que talvez o aluno ainda não conheça o significado de tangente, pode-se introduzir este conceito utilizando atividades semelhantes à proposta do problema da tangente, porém a secante pode e deve tender a tangente em um ponto já determinado do gráfico da função. (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

É através desse processo que Molon e Figueiredo (2015) destacam a possibilidade de introduzir a noção intuitiva da derivada de uma função em um determinado ponto, esta ideia intuitiva se dá calculando o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto desejado. Uma aplicação importante que se pode utilizar para a introdução desses conceitos e a aplicação à Física, segundo Duclos (1992, p.28, apud Molon e Figueiredo, 2015), “A Física é à base da técnica e a Matemática a linguagem da Física” e segundo Ávila (2006), a justificativa dessa afirmação se dá pelo fato de:

> “O ensino da derivada é da maior importância, pelo tanto que ajuda no tratamento de inúmeras propriedades das funções. E tem de ser feito logo na primeira série, quando pode integrar-se harmoniosamente com a Física no estudo do movimento” (AVILA, 2006, p.37).

Juntamente com esse estudo de funções é possível e até mesmo natural falar também em taxas de variação, nessa parte do processo, fica claro que é possível trabalhar com acréscimos e decréscimos nas variáveis em questão, é interessante também apresentar a notação utilizada que indica essa variação, pode ser Δx ou Δy.

Na sequência desse processo, pode-se explorar o cálculo do coeficiente angular através da notação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, levando em conta que provavelmente o aluno já tenha visto isso nos estudos de física. Para uma maior oportunidade de sucesso nesse processo de aprendizagem é necessário trabalhar com exemplos e problemas concretos, de modo que o estudante ao utilizar esses conceitos venha a se familiarizar (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

Já vimos então dois possíveis problemas para se trabalhar com as ideias fundamentais do Cálculo, agora veremos o terceiro problema que pode contribuir para introduzir esses conceitos que é o problema da área, sabemos que os alunos de maneira geral conseguem trabalhar com os conceitos de área, são capazes de calcular área de figuras planas como retângulo, quadrado, triângulos, trapézios e círculos, no entanto a propostas dos autores aqui ao trabalhar com esses conceitos seria trabalhar com a área de regiões irregulares, um exemplo disso seria calcular a área de uma função limitada por algum intervalo.

Ainda de acordo com Molon e Figueiredo (2015), pode-se aproveitar a ideia de aproximação de uma área desejada através da soma de áreas menores, estas áreas menores constituídas por figuras já conhecidas, como, por exemplo, o retângulo, e de acordo com (ANTON, 2000, apud MOLON e FIGUEIREDO, 2015), esse processo foi adotado por Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) que corretamente calculou a área de um segmento de parábola utilizando o método da exaustão.

Ainda nessa mesma linha de raciocínio, Simões (2012 apud MOLON e FIGUEIREDO, 2015) relata que Arquimedes preencheu com um número crescente de triângulos a região da área que se desejava calcular e notou que quanto maior o número de triângulos acrescentados na região desejada, mais o resultado se aproximava de um valor especifico.

Dessa forma podemos constatar que essa ideia intuitiva para o cálculo de área, a qual remete para o conceito de integral elaborado por Arquimedes pode ser utilizado no Ensino Médio, de acordo com Machado (2008), o conceito de integral consiste em:

> Para calcular a área sob o gráfico, podemos raciocinar da seguinte maneira: vamos subdividir o intervalo considerado em muitos pequenos intervalos, suficientemente pequenos [...]. Assim, em cada um dos pequenos intervalos, uma fatia da área que buscamos pode ser calculada como se fosse um pequeno retângulo; depois, para se ter a área procurada, basta somar as áreas de todos os retangulinhos. (MACHADO, 2008, p.3).

Ainda de acordo com Machado (2008), “Integrar é juntar esses pedaços” (Ibid., p.3).

Em referência ao mesmo assunto, destacamos outra ideia intuitiva relacionada à integração de maneira informal, pois de acordo com Simões (2012):

> Integração é isso: se o estudante precisa achar a área de uma figura geométrica cheia de curvas, ele fatia a figura, substitui cada fatia por um retângulo (isto é, substitui cada fatia por uma figura cuja área é fácil de calcular), e soma todas as fatias. Conforme o número de fatias aumenta, a área de todos os retângulos somados se aproxima da área real; conforme o número de fatias tende ao infinito, a área de todos os retângulos somados tende à área real exata. (SIMÕES, 2012, p.32, apud MOLON e FIGUEIREDO, 2015, p. 6).

Dessa forma, podemos concluir que é possível fazer com que os estudantes identifiquem a região a ser calculada a área por aproximação e efetuem os cálculos assim como a citação acima, fica evidente então que a ideia intuitiva do conceito de integral pode ser trabalhada na Educação Básica, tendo também como objetivo levar os alunos a ampliarem seus conhecimentos em relação à aplicabilidade da própria Matemática (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

Se retomarmos aquele questionamento sobre a viabilidade de se trabalhar limites, derivadas e integrais no Ensino Médio, considerando o que já foi apresentado acima e levando em conta que tratamos das ideias intuitivas dos conceitos do Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, a resposta para esse questionamento passa a ser positiva, ainda que alguns estudantes apresentem dificuldades, isso não seria um impedimento, pois geralmente acontece de os alunos apresentarem dificuldades em Matemática, fica a cargo de o professor propor aos estudantes do Ensino Médio trabalhar com esses desafios (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

Baseando-se na aplicação dessas atividades citadas anteriormente, os autores num primeiro momento observam que ao não trabalhar com a introdução desses conceitos no Ensino Médio, perde-se também uma grande oportunidade de ampliar o horizonte de conhecimento dos estudantes, outro ponto importante destacado pelos autores é que as atividades presentes em suas propostas podem ser inseridas dentro dos programas de ensino já existentes.

Dessa forma, destacamos que não é necessário fazer mudanças na grade curricular de ensino, mas apenas fazer adaptações nas abordagens que envolvem esses conteúdos a serem introduzidos e ter sempre como objetivo proporcionar um ensino aos estudantes baseado na aplicação dos conceitos, na visualização e também na experimentação.

Os autores ponderam ainda que através desses problemas geradores do Cálculo, isto é, o problema da reta tangente, o problema da velocidade instantânea e o problema do cálculo da área de regiões limitadas por curvas que são abordados no decorrer da aplicação feita pelos próprios, foi possível propor as atividades de uma maneira bem intuitiva com a ajuda do software Geogebra, dessa maneira, fica a critério do professor, mas muito se recomenda a utilização desse software, pois além da praticidade para as construções, a parte da visualização fica enriquecida.

Os autores destacaram também que o conceito intuitivo de derivada de uma função em um ponto foi compreendido pelos estudantes e também o conceito da reta tangente ao gráfico de uma função juntamente com à análise do coeficiente angular dessa reta foram assuntos entendidos pelos estudantes.

Os autores constatam que é possível ensinar tais conceitos, mesmo que de maneira intuitiva, ainda no primeiro ano do Ensino Médio, destacam também que em relação ao cálculo de área de uma região irregular limitada por uma função em um intervalo determinado pelo seu domínio, houve um grande interesse por parte dos estudantes, isso também é atribuído pela utilização e ferramentas disponíveis no Geogebra, ressaltam que não houve dificuldades os estudantes compreenderam a ideia da utilização de um número de figuras, no caso retângulo, cada vez maior para aproximar a área de uma figura irregular.

Também consta nas justificativas dos estudantes o processo infinito de aproximação, de maneira que através desses dados é possível afirmar que houve a compreensão da ideia intuitiva do Cálculo da Integral definida que foi apresentada nas atividades propostas (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

A partir disso, acredita-se que se for dada uma maior atenção a respeito da aplicação, experimentação e visualização dos conceitos matemáticos apresentados nessa proposta nesta fase da escolaridade, esse fator pode culminar como ajuda para a reversão das dificuldades que os estudantes apresentam quando se deparam com esses conceitos no Ensino Superior e também contribuir para melhorar os índices de aprovação, que estatisticamente são muito baixos.

Sabemos que a disciplina de Cálculo apresenta um grande índice de reprovação além de muitas desistências quando os estudantes ingressam no ensino superior, isso acaba ocorrendo pelo fato dos estudantes se deparam geralmente com atividades nas quais não há muita contextualização e muitas vezes já requer um conhecimento aprofundado, com essa exigência e sem algum estudo prévio, no caso não há uma compreensão verdadeira dos conceitos pela falta de construção das ideias, consequentemente não há compreensão da disciplina de Cálculo (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

Os autores acreditam que essa proposta para trabalhar com as ideias intuitivas do Cálculo pode se concretizar em uma estratégia de ensino e aprendizagem e que a tal contribui de maneira significativa para o Ensino de Matemática, pode tornar o entendimento da Matemática mais possível para os estudantes, deve ser levado em conta também a relação em questão à metodologia de ensino abordada para o ensino de cada conteúdo.

Se houver um comprometimento do professor na questão de fazer relações dos conteúdos com situações em que os estudantes estejam no contexto, que de maneira relevante faça sentido para os estudantes, que exijam dos mesmos a reflexão e o raciocínio, sem dúvidas já se supera um dos obstáculos no que diz respeito às dificuldades matemáticas, certamente já é um passo de um caminho a percorrer na busca pela melhoria do rendimento e da compreensão dos estudantes em relação à Matemática, tanto no Ensino Médio, quanto Ensino Superior (MOLON e FIGUEIREDO, 2015).

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

De acordo com Gil (2002, p. 44), “[...] a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”. O autor destaca ainda que quase todos os estudos exigem algum tipo de trabalho dessa natureza, porém destaca que existem pesquisas exclusivamente desenvolvidas por fontes bibliográficas (GIL, 2002).

“A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente.” (Gil 2002, p. 45).

O autor destaca ainda a importância desse tipo de pesquisa quando os dados a serem pesquisados tornam-se muito dispersos (GIL, 2002). Como nosso objetivo é apresentar estudos históricos, nos fundamentamos no que diz Gil, (2002) sobre esse tipo estudo, “A pesquisa bibliográfica também é indispensável nos estudos históricos. Em muitas situações, não há outra maneira de conhecer os fatos passados se não com base em dados bibliográficos.” (GIL, 2002, p. 45).

Com o objetivo de responder o questionamento de como foi o desenvolvimento do cálculo de área ao longo da história da humanidade, buscou-se estudar livros de História da Matemática, nos quais foi possível perceber que os trabalhos apresentados nos livros, além dos vários registros, apresentam também o ano aproximado de realização desses trabalhos, dessa forma, selecionamos os principais trabalhos que apresentaram os conceitos de área.

Nosso objetivo é apresentar uma sequência desses trabalhos elaborados em ordem cronológica e dessa maneira ter a possibilidade de analisar de que maneira e quais procedimentos eram realizados os cálculos de área de figuras planas desses trabalhos em cada época e observar a evolução desse processo ao longo do tempo afim de que as considerações acerca desses processos realizados possam de alguma maneira ajudar nos processos de ensino e de aprendizagem nos dias de hoje.

3.2 O USO DAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

É evidente que o excesso de informação faz parte desse nosso tempo atual devido à evolução e expansão tecnológica, acreditamos que cabe a nós enquanto docente pensar um pouco a respeito dessa nova era tecnológica e buscar utilizar desse recurso em prol da Educação, visto que os estudantes de maneira geral estão muito engajados a esses recursos e novidades. Hoje em dia está cada vez mais fácil o acesso a esses recursos, um exemplo disso é o celular, a grande maioria tem e ainda aqueles que não têm um celular também consegue acesso, seja pelo celular da mãe ou pai.

Outra questão importante que destacamos é sobre a utilização desses recursos tecnológicos, não basta simplesmente utilizarmos, precisamos nos conscientizar da necessidade de saber utilizar tais recursos e para isso precisamos nos capacitar, buscando isso certamente poderemos proporcionar mais alternativas para o processo de Educação proporcionando um Ensino de qualidade.

Como destaca as Diretrizes Curriculares da Educação Básica para o Ensino de Matemática em relação aos recursos tecnológicos:

> Os recursos tecnológicos, como o software, a televisão, as calculadoras, os aplicativos da Internet, entre outros, têm favorecido as experimentações matemáticas e potencializado formas de resolução de problemas (PARANÁ, 2008, p. 65).

Ainda sobre esses recursos tecnológicos, destacamos que estudantes e professores tem se beneficiado por sua utilização:

> Aplicativos de modelagem e simulação têm auxiliado estudantes e professores a visualizarem, generalizarem e representarem o fazer matemático de uma maneira passível de manipulação, pois permitem construção, interação, trabalho colaborativo, processos de descoberta de forma dinâmica e o confronto entre a teoria e a prática (PARANÁ, 2008, p. 66).

De acordo com Borba e Penteado (2001) "... a inserção de TI no ambiente escolar tem sido vista como um potencializador das ideias de se quebrar a hegemonia das disciplinas e impulsionar a interdisciplinaridade" (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 63).

Como essas Tecnologias Informáticas podem ter a capacidade de potencializar ideias, destacamos que através de suas ações pedagógicas, o professor tem a oportunidade de refletir e buscar inserir nesse ambiente, ou seja, nas aulas de Matemática, caminhos alternativos e proporcionar para os alunos verdadeiras experiências com os conteúdos abordados durante as aulas.

Outro fator que destacamos é a influência que a utilização dos recursos tecnológicos pode ter no Ensino da Matemática, pois de acordo com os (PCNs, 1998) destacam:

> - revitaliza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos eles podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
>
> - evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
>
> - possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
>
> - permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo (BRASIL, 1998, p. 43-44).

Concluímos que a utilização das tecnologias na Educação Básica pode contribuir significativamente no processo de Ensino e aprendizagem, sendo verdadeiro esse fato, podemos então considerar a tecnologia como uma aliada para favorecer o Processo de Ensino de Matemática na Educação Básica.

3.2.1 SOFTWARE GEOGEBRA

O Geogebra é um software de geometria dinâmica, seu nome vem da combinação das palavras geometria e álgebra, sendo assim, esse software permite trabalhar com geometria, álgebra e cálculo simultaneamente, pois é possível fazer interações entre os objetos geométricos e objetos algébricos. O Geogebra foi criado em 2001 pelo austríaco Markus Hohenwarter, que é professor da universidade de Salzburg e destacamos que através desse software podem-se explorar diferentes conteúdos matemáticos nos diferentes níveis de ensino. Fazemos a observação de que esse software é de uso livre e sem qualquer custo, ainda também é permitido seu download, inclusive fazer distribuição de cópias desde que não sejam para fins comerciais.

Com o Geogebra é bem simples de trabalhar, pois este programa apresenta muitas possibilidades de construções, desde o ponto e reta até as cônicas mais complexas, para fazer construções tem-se ainda à opção de escolher a ferramenta especifica para a construção desejada ou ainda inserir o comando através de texto/expressões a ser construído na janela de álgebra.

Concluímos então que a utilização do software Geogebra relacionado com as novas estratégias de ensino e de aprendizagem tem um grande potencial para explorar vários conceitos matemáticos, dentre esses conceitos destacamos o cálculo aproximado da área de uma região irregular.

3.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No ensino através de resolução de problema o professor aplica o problema e deixa um tempo para discussão em que os alunos apresentam suas estratégias e hipóteses, onde estas são registradas dando valor ao pensamento do aluno livre de regras. (SMOLE & DINIZ, 2001).

Cabe ao professor assegurar um espaço de discussão no qual os alunos pensem sobre os problemas que irão resolver, elaborem uma estratégia, apresentem suas hipóteses e façam o registro da solução encontrada ou de recursos que utilizaram para chegarem ao resultado. Isso favorece a formação do pensamento matemático, livre do apego às regras. O aluno pode lançar mão de recursos como a oralidade, o desenho e outros, até se sentir à vontade para utilizar sinais matemáticos (SMOLE & DINIZ, 2001).

As etapas da resolução de problemas são: compreender o problema; destacar informações, dados importantes do problema, para a sua resolução; elaborar um plano de resolução; executar o plano; conferir resultados; estabelecer nova estratégia, se necessário, até chegar a uma solução aceitável (POLYA, 2006).

O termo "problema" é bastante presente no dia a dia de pessoas que trabalham com Matemática, ou com seu ensino e aprendizagem, entretanto nem sempre seu uso é acompanhado de um consciente posicionamento sobre o seu significado.

Consideraremos nessa proposta o significado de problema da mesma forma que define Allevato (2005), onde a autora o define da seguinte forma: "uma questão será um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à resolução, mas está interessado em resolvê-la." Allevato (2005, p. 41), Concluímos então que apesar de apresentar interesse, o aluno não sabe como resolver tal problema.

Apresentaremos agora os passos, ou mesmo as etapas para a Resolução de Problemas segundo Onuchic e Allevato (2011). Destacamos que esses passos são apenas uma possibilidade de um caminho a seguir e não necessariamente um modelo rígido e pronto para se praticar, mas sim uma alternativa que ajuda a pôr em prática essa perspectiva de ensinar através de Resolução de Problemas.

> 1) Preparação do problema: Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema proposto não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula;
>
> 2) Leitura individual: Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura;
>
> 3) Leitura em conjunto: Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos;
>
> Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo e levando-os a interpretar o problema.
>
> Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
>
> 4) Resolução do problema: De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.
>
> Considerando os alunos como co-construtores da “Matemática nova” que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos na construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
>
> 5) Observar e incentivar: Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
>
> O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem.
>
> Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem

da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados; e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6) Registro das resoluções na lousa: Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária: Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca, como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca de consenso: Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor incentiva toda a classe a chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo: Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” – organizada e estruturada em linguagem Matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83 – 85).

4. PROPOSTAS DE ATIVIDADE

Plano de aula: Área do lago Igapó II

Tema geral: Área

Professor: Reginaldo Aparecido Alves da Silva

Disciplina: Matemática

Ano: 1° Ano do Ensino Médio

Realização:

Tempo estimado: 300 minutos

Conteúdo: Área de região curva

Tendência metodológica: Resolução de Problemas

4.1 ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

Para elaborar a atividade presente neste trabalho, o objetivo principal foi buscar uma tarefa que além de contemplar com as propostas das atividades, também fossem contextualizadas, que de algum modo fizessem parte do cotidiano dos alunos ou se relacionasse com alguma coisa em comum com a maioria e também com a comunidade em geral, por esse motivo optamos por calcular a área da superfície do lago igapó II, a proposta de atividade presente neste trabalho foram elaborada pelo próprio autor, considerando sempre as ideias e sugestões da orientadora.

Destacamos aqui que nossa atividade é uma proposta e devido às dificuldades que estamos vivendo neste tempo devido à pandemia do covid-19, se torna inviável a aplicação do próprio autor e consequentemente não será possível aqui explorarmos as considerações em relação aos resultados alcançados, mas será possível fazer considerações sobre possíveis processos de resoluções, destacamos que geralmente as propostas podem seguir outros caminhos quando se aplicada de fato, mas deixaremos sempre sugestões para que outros professores possam aplicar essa atividade em suas turmas, além disso, realizaremos um roteiro de aplicação.

4.2 ATIVIDADES PRESENTE NESTA PROPOSTA

Destacaremos aqui alguns objetivos que temos com a nossa proposta de atividade, um dos nossos objetivos é fazer uma introdução sobre os conceitos do cálculo de área de uma figura plana irregular através de uma sistematização pela estratégia de ensino Resolução de Problemas, outro objetivo é que esta proposta de atividade permita e auxilie os estudantes a calcular a área abaixo de uma função.

Para contemplar esses objetivos, faremos uma sistematização do conceito de área em regiões curvas, logo, o destaque nessa atividade está no fato de a área a ser calculada constituir em uma região plana irregular, deixaremos um link de acesso para o Geogebra contendo os requisitos necessários para realização da atividade, também é possível que os próprios estudantes construam essa região a ser calculada a área com o auxílio do software Geogebra, tendo o professor como mediador de todo esse processo,

Ainda ressaltamos que na utilização do software Geogebra para o desenvolvimento da atividade presente nessa proposta, partiremos do princípio de que os estudantes já tenham familiaridade com o software e que estejam aptos a construir o que se pede na atividade, caso algum estudante ainda não tenha utilizado esse software, o professor poderá dar uma introdução ao software, além de que deixaremos disponibilizados os links de acesso para a atividade que será explorada aqui, portanto se o professor achar conveniente, ele poderá utilizar desse link para explorar os conceitos e técnicas de construções do software Geogebra antes mesmos da aplicação da proposta.

Outro objetivo pertinente da nossa proposta é calcular a área da superfície do lago igapó II, uma foto desse lago foi inserida no Geogebra, no qual podemos considerar a imagem no plano cartesiano e o contorno desse lago foi construído através de funções sobrepostas na imagem, em seguida removeu-se a imagem, levando em conta a questão do tempo e com o intuito de auxiliar os estudantes.

Em nossa proposta de atividade já contem uma lista com as funções e seus intervalos, respectivos ao contorno do lago, o objetivo é calcular a área de cada função em seu respectivo intervalo separadamente, ao calcular a área de cada região, a área do lago se dará pela soma das áreas calculadas, observando que a proposta da atividade é um roteiro que visa auxiliar professor e aluno, mas não deve ser seguida como um ritual e sim cabe ao professor analisar e fazer mudanças caso necessário.

Decidimos desenvolver essa atividade de calcular a área da superfície do lago igapó II, na cidade de Londrina no estado do Paraná por ser um lugar muito conhecido pela maioria da comunidade, o entorno desse lago é um lugar apropriado para se fazer caminhada e/ou correr, tem uma pista exclusiva para esse fim. Por ser um lugar muito frequentado, e obviamente o lago tem seu contorno curvilíneo, acreditamos ser uma ótima escolha para realizar o cálculo por aproximação da área da superfície desse lago, já que o mesmo faz parte do cotidiano de muitos da região.

Dessa forma utilizaremos a aproximação da área dessa superfície para relacionar com os conceitos intuitivos de integral, definiremos as funções em intervalos apropriados para expressar todo o contorno desse lago.

Com o auxílio do software Geogebra, vamos construir esse lago e representá-lo por meio de funções que contemplem o seu contorno, para isso definiremos as funções em intervalos apropriados com o objetivo de que o conceito de função seja mantido.

Para conseguirmos isso, iremos separar esse lago em duas partes cortando-o por uma reta horizontal de modo que cada relação expressa seja também uma função e todas as relações, sejam inferiores ou superiores, também possam ser definidas como função.

4.3 OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS DA PROPOSTA

Essa proposta foi elaborada com o intuito de estender o conceito do cálculo área de uma figura plana para o cálculo de área de figuras planas com regiões curvilíneas, tem-se a expectativa de que essa proposta possa ser uma alternativa para o cumprimento desse objetivo, esperamos que esta proposta de ensino também possa auxiliar os alunos na compreensão e aprendizado de outros conceitos que eventualmente surgirem no desenvolvimento deste trabalho, em que destacamos os seguintes objetivos.

1° Objetivo geral:

Desenvolver os conceitos relacionados ao conteúdo matemático de área ampliando para o cálculo de área de regiões curvas.

2° Objetivos Específicos:

- Explorar os conceitos do cálculo de área.
- Explorar os conceitos de função.
- Calcular área de figura plana.
- Realizar operações envolvendo área.
- Realizar operações envolvendo os conceitos de função.
- Noções básicas de utilização do Geogebra.
- Introduzir o conceito de área de região curva calculando a área de uma função delimitada pelos eixos coordenados.
- Dados algum ponto x de uma função, determinar f(x) da função respectiva.
- Calcular área de figura plana com regiões irregulares.
- Calcular área de figuras curvas.
- Aprender o conceito do cálculo de área por aproximação.
- Utilizar os conceitos intuitivos de integral para a aproximação do cálculo de área.
- Calcular a área do lago Igapó II.
- Utilizar a média aritmética para uma melhor representação de resultados.

4.4 ATIVIDADE 1: ÁREA DA SUPERFÍCIE DO LAGO IGAPÓ II

Tabela 2 – Cronograma da atividade 1

Aulas	Conteúdos
Aula 1	Apresentação da atividade, orientações e introdução.
Aula 2	Cálculo da área de uma parte do lago.
Aula 3	Conclusões.
Aula 4	Resolução das demais partes do lago.
Aula 5	Sistematização.

Fonte: o autor (2021)

4.4.1 CÁLCULO DA ÁREA DA SUPERFÍCIE DO LAGO IGAPÓ II

Conteúdo Matemático: Área

Professor: Reginaldo Aparecido Alves da Silva

Tempo previsto de aplicação: 300 minutos

Objetivos:
Ampliar o estudo de área para área de regiões curvas
Calcular a área de uma figura plana com região curva
Trabalhar com os conceitos de área, aproximação, comparar os resultados aproximados da área da região.

Sugestão de aplicação:
Sugerimos ao professor que utilize a sala de informática, caso queira ganhar tempo, pode deixar os computadores preparados, a atividade estará salva em links que pode ser acessado pelo Geogebra online, dessa forma, o professor monitora e organiza o desenvolvimento da atividade, liberando os links no tempo correto para uma melhor organização.
Caso não tenha computadores para esta aplicação, sugerimos que o professor leve parte da atividade já construída em folhas impressas e as entregue para os alunos, através do material impresso acreditamos que também é possível realizar esta atividade, lembrando sempre que o professor tem autonomia para fazer modificações e ajustes que achar necessário.

Atividade 1:

O Igapó II é um lago que faz parte do cotidiano de muitos londrinenses, vista que, além do lago, há vegetação, trilhas, ciclovia e atividades náuticas. É um lugar utilizado para caminhadas e passeios com a família.

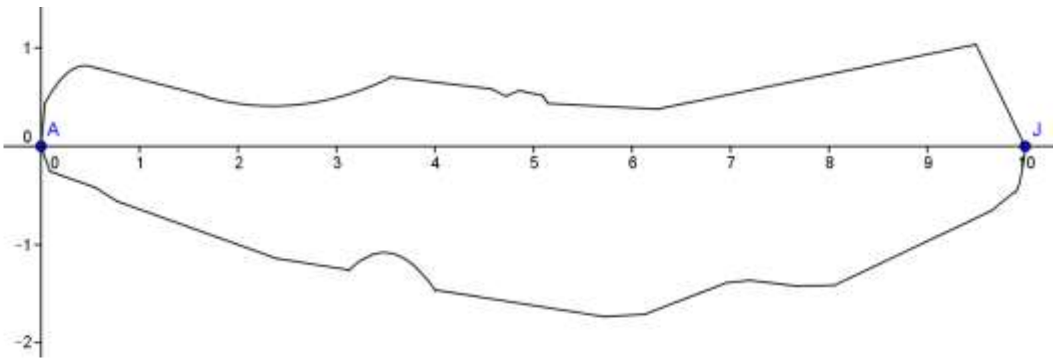
Qual é a área da superfície desse lago?

Figura 24 – Lago Igapó II

Fonte: Google maps

Abaixo temos a imagem do contorno desse lago adaptado no Geogebra.

Figura 25 – Contorno lago Igapó II



Fonte: o autor (2021)

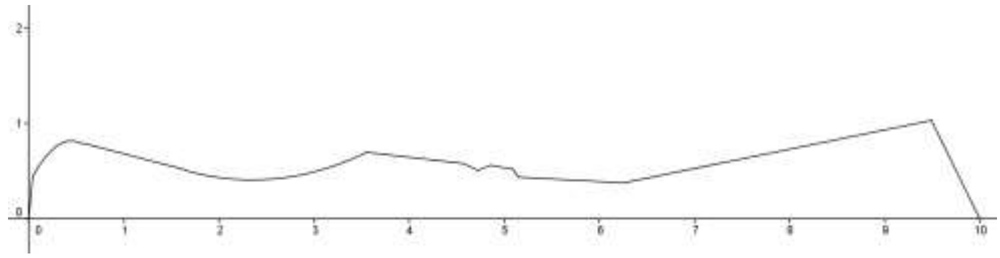
O desenho acima que representa o lago Igapó II foi elaborado pelo autor e adaptado no software Geogebra que convenientemente foi cortado pelo eixo x nos pontos A e J, também foi utilizada uma escala de 0 a 10 unidades como comprimento total do lago, as demais medidas como altura e amplitude, conseguimos em consequência da determinação do comprimento, isso foi feito para abreviar a facilitar a proposta, mas vale lembrar que ao final da atividade devemos fazer proporção para o tamanho real do comprimento do lago.

Ainda buscando facilitar nossos cálculos e para que tanto à parte superior quanto a inferior sejam funções, pois se cada parte for possível representar por uma função, podemos então utilizar os conceitos que envolvem função, assim calcularemos essa área dividida em duas partes, a superior que será considerada a região delimitada pelo eixo$x$e o contorno que representa a parte superior do lago e a inferior, que será delimitada pelo eixo xe o contorno que representa o a parte inferior do lago, também para que tenhamos mais facilidades nos cálculos, vamos refletir a parte inferior do lago em relação ao eixo$x$, assim evitaremos trabalhar com números negativos.

Ao observarmos a imagem notamos que descobrir a área da superfície desse lago não parece ser uma tarefa simples, devido seu contorno apresentar muitas regiões curvilíneas.

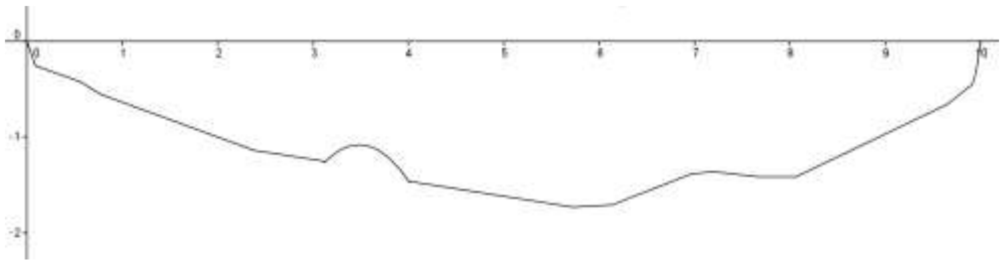
Estrategicamente adaptamos o contorno do lago para que o eixo x o corte nos pontos A e J, assim o lago ficou dividido em duas partes, uma parte ficou acima do eixo x e outra parte ficou abaixo do eixo x. Como nas imagens abaixo.

Figura 26– Contorno superior do lago



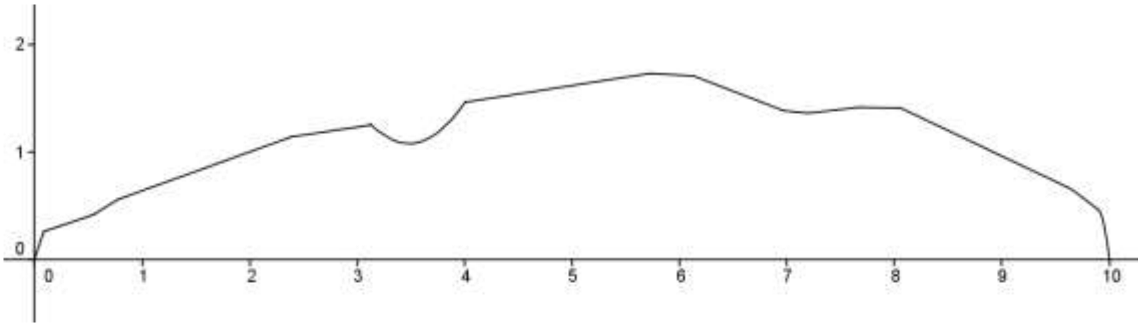
Fonte: o autor (2021)

Figura 27 – Contorno inferior do lago



Fonte: o autor (2021)

Figura 28– Contorno inferior do lago refletido



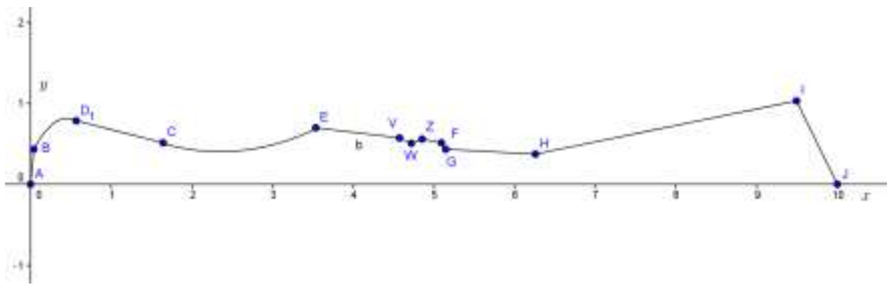
Fonte: o autor (2021)

Note que nesta segunda imagem fizemos uma reflexão da parte inferior do lago em relação ao eixo x, sendo assim, evitamos trabalhar com números negativos.

Dessa forma, vamos ter que a área total do lago será a soma das áreas das duas figuras acima, sabendo que a área de cada figura é dada pela região entre as funções e o eixo x.

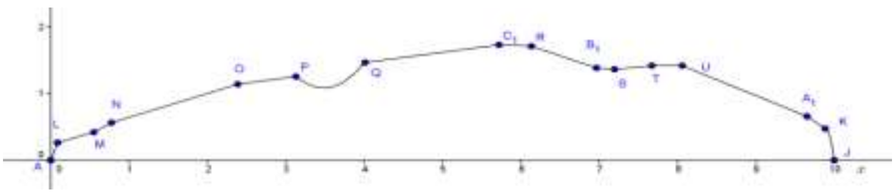
Observe que nas imagens abaixo cada função está compreendida entre o intervalo de dois pontos, isso implica que entre dois pontos temos uma função distinta.

Figura 29– Contorno superior do lago com pontos



Fonte: o autor (2021)

Figura 30 – Contorno inferior do lago com pontos



Fonte: o autor (2021)

Vamos apresentar agora todas as funções que estão no desenho acima, o qual representa o contorno do lago, faremos uma separação entre lista 1 e lista 2, onde a lista 1contém as funções que representam a parte superior desse lago enquanto que a lista 2 contém as funções que representam a parte inferior desse lago.

Lista 1, parte superior.

Função entre os pontos A e B: $y = 11.6x$, com $0 \leq x \leq 0,04$.

Função entre os pontos B e D1: $y = -2,3\,x^2 + 2,05x + 0,36$; com $0,04 < x \leq 0,56$.

Função entre os pontos D1 e C: $y = -0,23x + 0,93$; com $0,56 < x \leq 1,65$.

Função entre os pontos C e E: $y = 0,2x^2 - 0,94x + 1,51$; com $1,65 < x \leq 3,54$.

Função entre os pontos E e V: $y = -0,12x = 1,12$; com $3,54 < x \leq 4,57$.

Função entre os pontos V e W: $y = -0,47x + 2,71$; com $4,57 < x \leq 4,72$.

Função entre os pontos W e Z: $y = 0,41x – 1,42$; com $4,72 < x \leq 4,85$.

Função entre os pontos Z e F: $y = -0,19x + 1,47$; com $4,85 < x \leq 5,09$.

Função entre os pontos F e G: $y = -1,47x + 8,01$; com $5,09 < x \leq 5,15$.

Função entre os pontos G e H: $y = -0,05x + 0,71$; com $5,15 < x \leq 6,26$.

Função entre os pontos H e I: $y = 0,2x – 0,9$; com $6,26 < x \leq 9,49$.

Função entre os pontos V e J: $y = -2,04x + 20,39$; com $9,49 < x \leq 10$.

Lista 2, parte inferior refletida.

Função entre os pontos A e L: $y = 3x$; com $0 \leq x \leq 0,09$.

Função entre os pontos L e M: $y = 0,34x + 0,23$; com $0.09 \leq x \leq 0,55$.

Função entre os pontos M e N: $y = 0,36x + 0,08$; com $0,55 \leq x \leq 0,77$.

Função entre os pontos N e O: $y = 0,36x + 0,28$; com $0,77 \leq x \leq 2,39$.

Função entre os pontos O e P: $y = 0,16x + 0,77$; com $2,39 \leq x \leq 3,12$.

Função entre os pontos P e Q: $y = 1,41x^2 - 9,82x + 18,18$; com $3,12 \leq x \leq 4,01$.

Função entre os pontos Q e C1: $y = 0,16x + 0,83$, com $4,01 \leq x \leq 5,72$.

Função entre os pontos C1 e R: $y = 0,05x + 2,03$; com $5,14 \leq x \leq 6,14$.

Função entre os pontos R e B1: $y = 0,39x + 4,11$; com $6,14 \leq x \leq 6,96$.

Função entre os pontos B1 e S: $y = 0,11x + 2,13$; com $6,96 \leq x \leq 7,2$.

Função entre os pontos S e T: $y = 0,12x + 0,47$; com $7,2 \leq x \leq 7,67$.

Função entre os pontos T e U: $y = 0,01x + 1,5$; com $7,67 \leq x \leq 8,06$.

Função entre os pontos U e A1: $y = 0,48x + 5,26$; com $8,06 \leq x \leq 9,65$.

Função entre os pontos A1 e K: $y = -0,78x + 8,23$; com $9,65 \leq x \leq 9,89$.

Função entre os pontos K e J: $y = - 35,81x^2 + 708,02x - 3499.16$; com $9,89 \leq x \leq 10$.

A proposta agora é calcular a área aproximada da região limitada entre cada uma das funções que estão nas listas acima, faremos isso sempre tomando cada função individualmente.

Como já houve o processo de construção na elaboração do desenho para obter as funções, esse procedimento já nos garante também as coordenadas de y de todos os pontos que estão representados na figura, que será necessário para o cálculo dessas áreas.

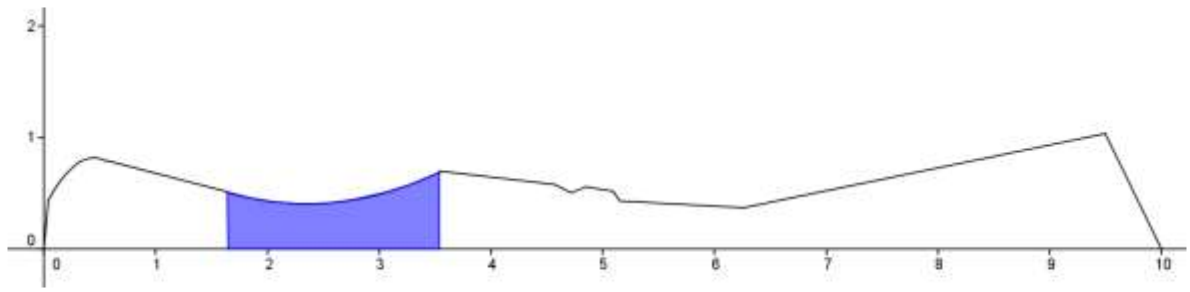
Observe que a maior parte das regiões é formada por triângulos e retângulos, para evitar confusões, utilizaremos uma cor diferente da preta para construir os segmentos auxiliares que nos ajudarão a ter uma compreensão melhor. Mostraremos isso através de desenhos e também deixaremos uma lista com as coordenadas dos pontos que estão representados no gráfico. Dessa forma, iniciaremos calculando primeiro a parte superior do lago.

Lembrando que vamos considerar a parte inferior do contorno do lago como uma reflexão em relação ao eixo x, por esse motivo as coordenadas y dos pontos abaixo também serão positivas.

Como já proposto, faremos agora o processo de dividir a região em várias partes, assim, podemos encontrar a área de cada parte separadamente até completarmos a região toda.

Veja um exemplo na imagem abaixo:

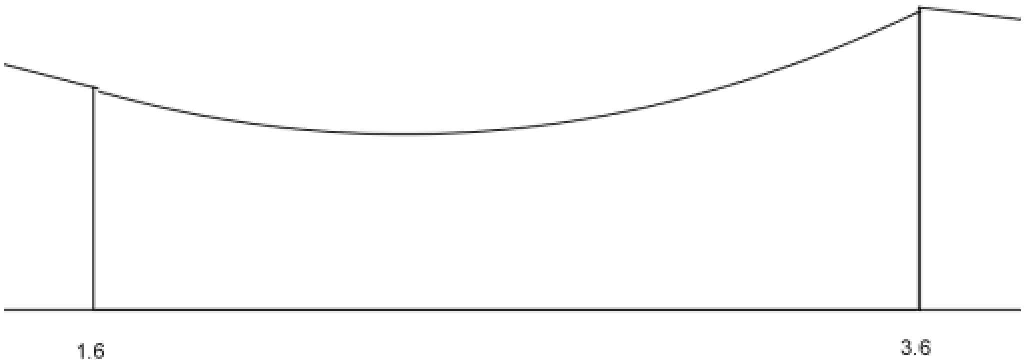
Figura 31 – Parte do lago destacada



Fonte: o autor (2021)

Ampliando a parte desejada temos:

Figura 32 – Parte do lago ampliada



Fonte: o autor (2021)

Dessa forma, temos o problema a ser resolvido, ou seja, encontrar a área da região destacada acima, para isso, será feita a seguinte proposta de atividade:

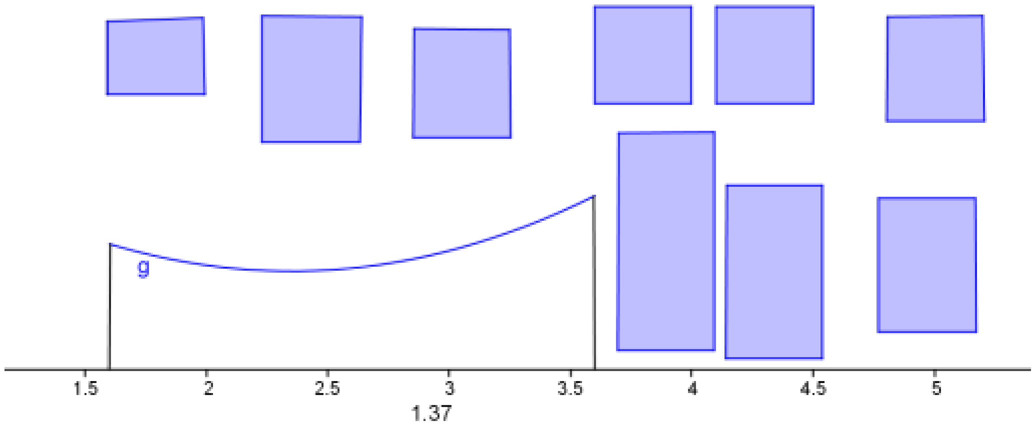
O objetivo desta proposta e encontrar cada parte de área que iremos separar e selecionar estrategicamente, ao encontrarmos cada parte da área da região, esse resultado terá como consequência que a soma das áreas dessas regiões resultará na área da superfície do lago igapó II.

Para isso, esta atividade será elaborada no software Geogebra, na qual deixaremos a atividade pré-definida, haverá um link de acesso para a atividade, na qual deixaremos as regiões e os retângulos já construídos, caberá então ao estudante a manipulação dos retângulos para preencher a região e consequentemente determinar sua área.

a) Utilizando o Geogebra, preencha a figura com os retângulos e determine a área dessa região destacada?

Ressaltamos que todo o retângulo tem a mesma medida da base e que nesse caso é possível completar a região da figura com 5 retângulos.

Figura 33 – Guia de atividade



Fonte: o autor (2021)

Guia de desenvolvimento da atividade:

Figura 34– Barra de ferramentas do Geogebra

Fonte: o autor (2021)

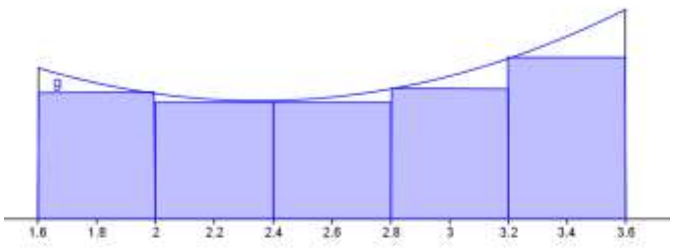
A figura acima mostra a barra principal de ferramentas do Geogebra localizada geralmente na parte superior esquerda da tela principal do software, a ferramenta destacada em azul chama-se mover, utilizaremos ela para mover os retângulos e encaixá-los na região que desejamos calcular a área, para isso basta clicar e segurar com o botão esquerdo do mouse no retângulo e mover até o ponto desejado, quando tiver movimentado da maneira desejada deve-se soltar o botão, caso o retângulo não tenha ficado exatamente no local desejado, pode-se repetir esse processo até quando conseguir, o mesmo deve ser feito com os outros retângulos até completar a região da maneira mais completa possível. Lembramos também que será necessário uma analise nas escolhas dos retângulos, pois nem todos são adequados, caberá aos alunos analisar as escolhas e também é possível fazer testes, visto que temos o auxílio do Geogebra.

Link de acesso: **https://www.geogebra.org/calculator/zrzedtsc**

Exemplos de resoluções:

Resolução 1:

Figura 35 – Resolução 1



Fonte: o autor (2021)

Arrastamos convenientemente os retângulos de modo preencher o espaço da região, por ser uma região curva, não foi possível preenche-la completamente, porém fizemos uma boa aproximação. Note que a aproximação será menor que o valor exato, pois os retângulos estão sob a curva.

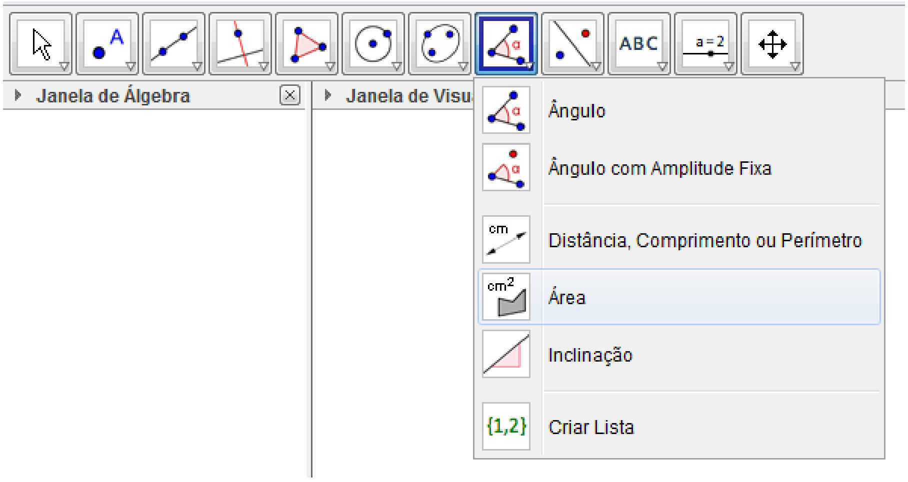
Para encontrarmos a área, podemos utilizar a ferramenta do Geogebra para calcular áreas.

Figura 36 – Barra de ferramentas ângulo

Fonte: o autor (2021)

Novamente recorremos à barra principal de ferramentas, na oitava ferramenta da esquerda para a direita temos uma ferramenta chamada ângulo, destacada de azul na imagem acima, para selecionarmos a ferramenta área basta clicarmos na seta inferior direita que aparece na ferramenta, após fazermos isso aparecerá várias outras ferramentas, devemos então escolher a ferramenta chamada área. Veja:

Figura 37 – Barra de ferramentas seleção



Fonte: o autor (2021)

Note que na quarta opção temos a ferramenta área, para escolhermos ela apenas precisamos clicar com o botão esquerdo do mouse e será selecionada.

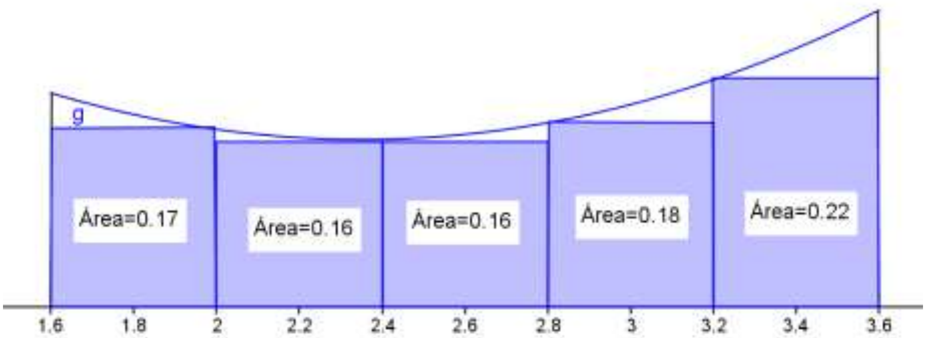
Figura 38 – Barra de ferramentas área

Fonte: o autor (2021)

Note que a ferramenta fica selecionada quando esta contornada em azul.

Agora, com a ferramenta selecionada, basta clicar na figura que desejamos, note que, a figura é composta por 5 retângulos, basta clicar neles e aparecerá a área de cada um, a área da figura será a soma das áreas dos retângulos. Como segue:

Figura 39 – Resolução 1 com área

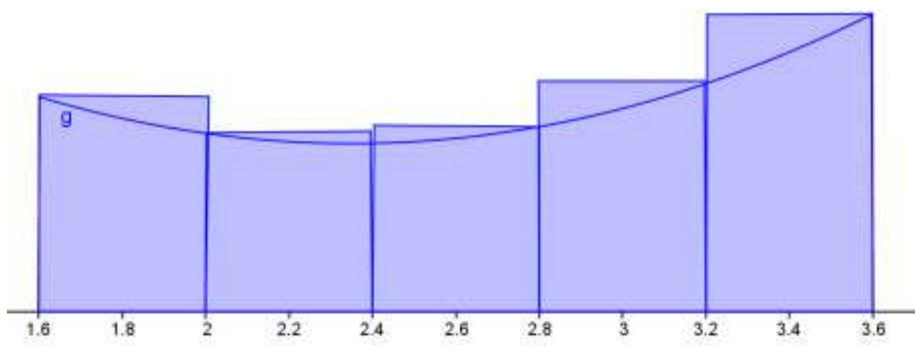


Fonte: o autor (2021)

Portanto, a área da região é $0{,}17 + 0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}18 + 0{,}22 = 0{,}89$ aproximadamente.

Resolução 2:

Figura 40 – Resolução 2

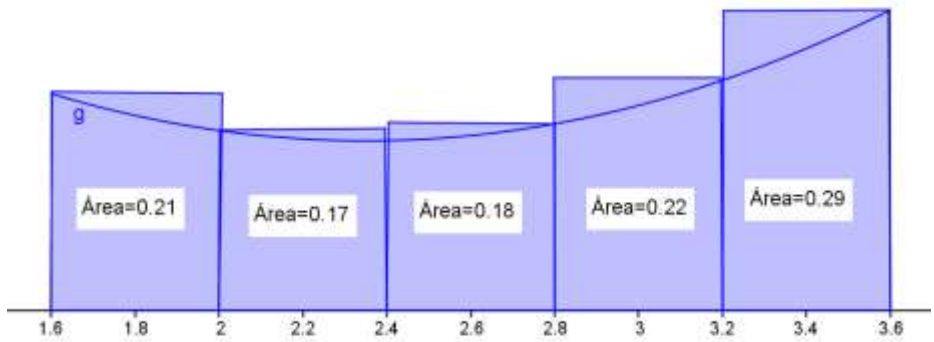


Fonte: o autor (2021)

Nesta outra resolução, também fizemos uma aproximação através dos retângulos, porém nesse caso, o valor aproximado será maior que o valor exato, pois os retângulos estão sobre a curva.

Utilizando a ferramenta de área do Geogebra, temos:

Figura 41 – Resolução 2 com área



Fonte: o autor (2021)

Novamente a soma da região é a soma dos retângulos.

Portanto, a área da região é $0{,}21 + 0{,}17 + 0{,}18 + 0{,}22 + 0{,}29 = 1{,}07$ aproximadamente.

INFERÊNCIAS

Através da resolução 1 notamos que o valor aproximado é menor que o valor exato e através da resolução 2 percebemos que o valor encontrado é maior que o valor exato, pois a própria montagem nos permite destacar isso, podemos então concluir que a área da região destacada é um valor entre 0,89 e 1,07.

Como a área está entre o intervalo 0,89 e 1,07; uma forma de relacionar os dois valores pode ser através da média aritmética, dessa forma temos que a área da região será:

$$\frac{0{,}89 + 1{,}07}{2} = \frac{1{,}92}{2} = 0{,}98$$

Portanto a área da região destacada é aproximadamente 0,98.

INFERÊNCIAS:

O que aconteceria se dividíssemos essa região em mais retângulos?

Qual será a área da região nesse caso?

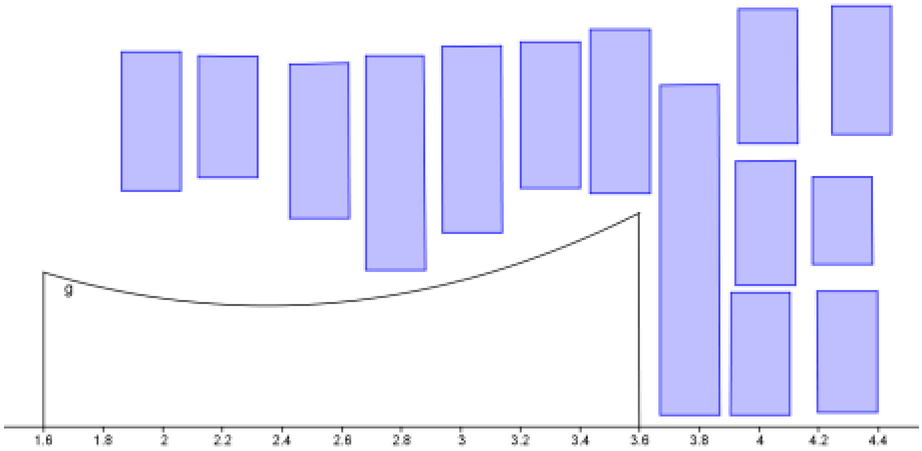
O valor encontrado seria mais ou menos próximo do valor exato?

Para buscar mais alternativas de resoluções, vamos resolver este mesmo problema, porém, agora vamos preencher a região com mais retângulos, ou seja, vamos aumentar o número de partições da base da figura, ou ainda, vamos diminuir o valor da base de cada retângulo.

Utilizando o Geogebra, preencha a figura com os retângulos e determine a área dessa região destacada?

Ressaltamos que todo o retângulo tem a mesma medida da base e que nesse caso é possível completar a região da figura com 10 retângulos.

Figura 42 – Guia de atividade 2



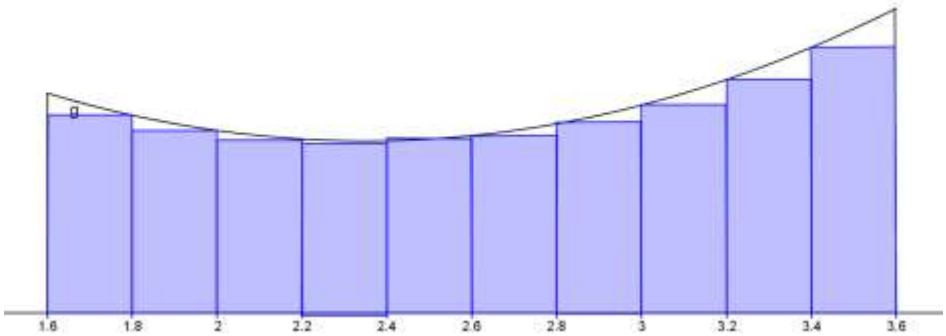
Fonte: o autor (2021)

Fazemos uma observação de que nesse caso também será necessária uma análise nas escolhas dos retângulos, pois nem todos são adequados, cabe aos alunos essa escolha e também é possível fazer testes, visto que temos o auxílio do Geogebra e de fato é bem simples arrastar e tentar encaixar os retângulos na figura.

Link de acesso: **https://www.geogebra.org/calculator/wuxfj9uk**

Resolução 3:

Figura 43 – Resolução 3

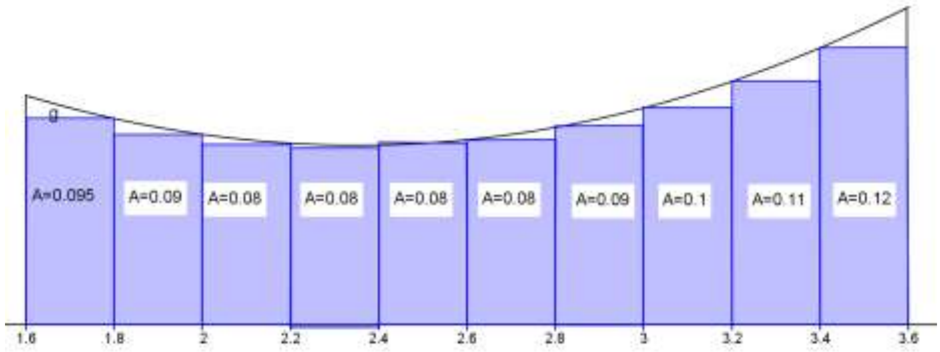


Fonte: o autor (2021)

Utilizamos o Geogebra para inserir os retângulos na figura, o melhor que conseguimos fazer foi como esta imagem acima, é evidente que a área encontrada será menor que a área exata da figura, pois os retângulos estão sob a curva.

Em seguida, precisamos calcular a área de cada retângulo e teremos a área aproximada da região, para isso temos uma ferramenta que calcula área no Geogebra, aplicando teremos como na imagem abaixo:

Figura 44 – Resolução 3 com área



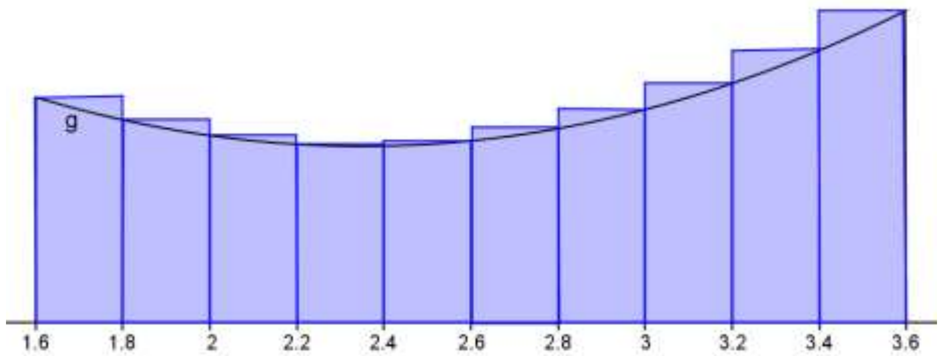
Fonte: o autor (2021)

Precisamos agora realizar a soma das áreas, que segue:

$$0{,}095 + 0{,}09 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}09 + 0{,}1 + 0{,}11 + 0{,}12 = 0{,}925$$

Resolução 4:

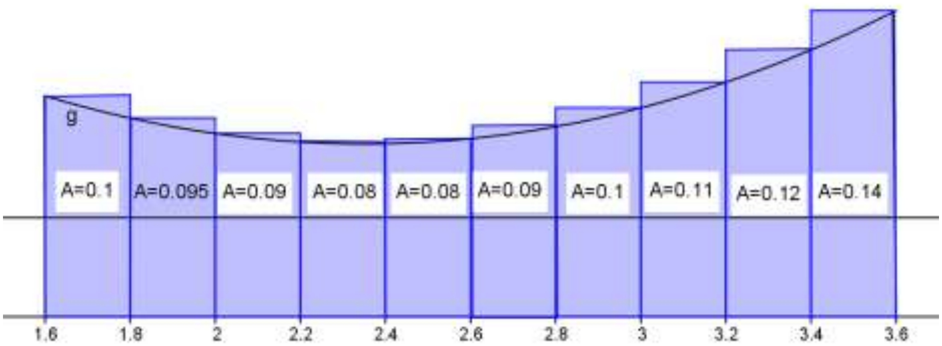
Figura 45 – Resolução 4



Fonte: o autor (2021)

Nessa região agora cabem 10 retângulos, todos com a mesma base, manipulamos através do Geogebra e conseguimos essa realização, como a figura é curva, foi apenas possível fazer uma aproximação, a área encontrada será maior que a área exata da figura, pois os retângulos estão sobre a curva. Basta agora utilizarmos a ferramenta que calcula área do Geogebra e aplicar em cada retângulo, dessa forma, a soma das áreas dos retângulos será a área da região.

Figura 46 – Resolução 4 com área



Fonte: o autor (2021)

Portanto, temos que a área da região será dada por:

$$0{,}1 + 0{,}095 + 0{,}09 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}09 + 0{,}1 + 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}14 = 1{,}005$$

Aproximadamente.

Através da resolução 3 notamos que o valor aproximado é menor que o valor exato e através da resolução 4 percebemos que o valor encontrado é maior que o valor exato, podemos então concluir que a área da região destacada é um valor entre 0,925 e 1,005.

Novamente temos que a área está entre o intervalo 0,92 e 1,005; uma forma de relacionar os dois valores pode ser através da média aritmética, dessa forma temos que a área da região será:

$$\frac{0{,}925 + 1{,}005}{2} = \frac{1{,}93}{2} = 0{,}965$$

Portanto a área da região destacada é aproximadamente 0,965

CONCLUSÕES:

O que podemos perceber através das resoluções 1 e 2 comparadas com as resoluções 3 e 4?

Vimos através das resoluções que quando aumentamos o número de retângulos, aumentamos o número de partições e consequentemente diminuímos o tamanho da medida da base de cada retângulo, quando fizemos com 5 retângulos a base de cada um era 0,4; já quando utilizamos 10 retângulos, a base de cada um era 0,2; em sequência disso percebemos que a área com 5 retângulos ficou no intervalo de 0.89 e 1,07 e pela média aritmética obtemos 0,98; já quando foi com 10 retângulos o intervalo ficou entre 0,925 e 1,005 e pela média aritmética obtemos 0,965.

Nesse caso percebemos que o segundo intervalo tem uma aproximação melhor do que o primeiro intervalo, dessa forma podemos então concluir que o valor do segundo resultado está mais próximo do valor exato.

O que aconteceria se dividíssemos a região em mais retângulos do que já apresentados? Se fossem 20 retângulos para preencher a figura, o que aconteceria?

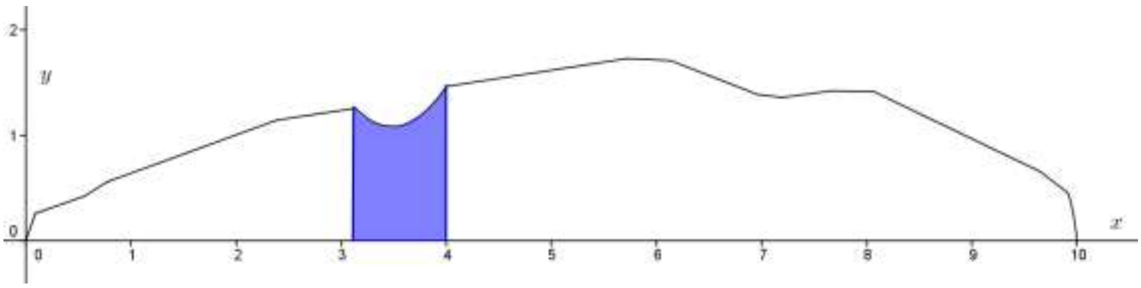
Provavelmente encontraríamos um intervalo ainda mais preciso que o anterior.

Será que isso acontecerá sempre?

Para respondermos essa questão vamos analisar mais um caso, ou seja, vamos calcular a área de outra parte do lago e verificar o que podemos concluir a respeito das observações que tivemos nesse caso.

Calcule a área da região destacada na imagem a seguir:

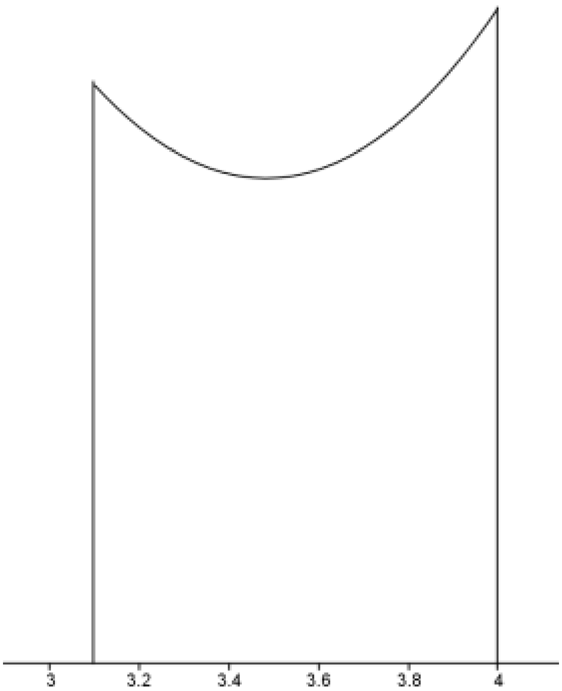
Figura 47 – Parte do lago destacada 2



Fonte: o autor (2021)

Ampliando a região destacada:

Figura 48 – Parte do lago ampliada 2



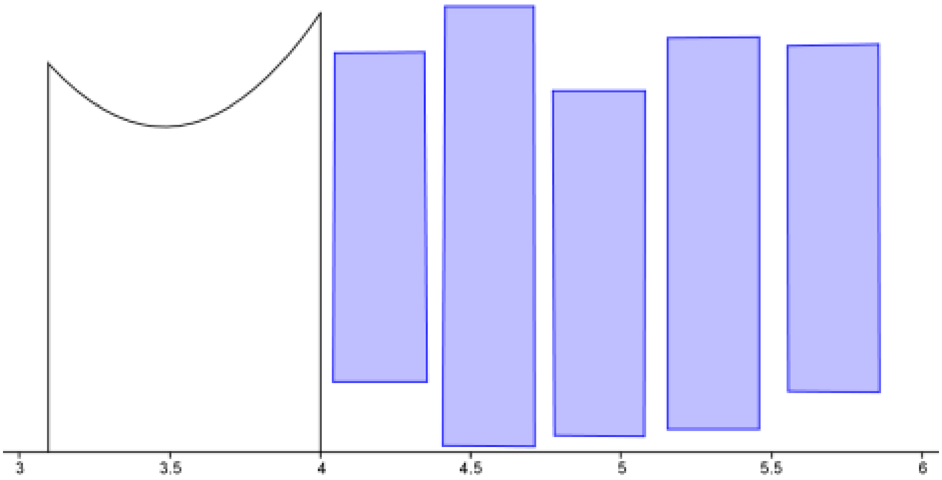
Fonte: o autor (2021)

Note que a base da região tem medida 0,9, pois 4 – 3,1= 0,9.

Continuando com nossa proposta, novamente temos esse problema a ser resolvido, ou seja, encontrar a área da região acima através dos encaixes e da manipulação dos retângulos pelo Geogebra, lembrando que a atividade estará salva, haverá um link de acesso, fazendo com que a parte da resolução já vá direto para a parte prática, nesse cenário, não faremos os processos de construção, o objetivo é justamente iniciar na parte prática.

Qual é a área dessa região destacada? Ressaltamos que todos os retângulos têm a mesma medida da base e que nesse caso é preciso 3 retângulos para completar a região da figura, no entanto é preciso analisar quais são os mais pertinentes de maneira a ter uma eficácia maior.

Figura 49 – Guia de atividade 3



Fonte: o autor (2021)

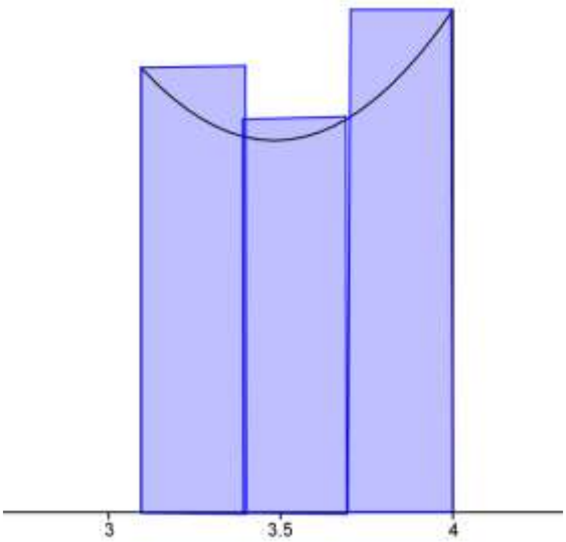
Para encontrarmos a área dessa região, devemos seguir o processo de arrastar os retângulos, isso será feito no Geogebra, o objetivo é tentar encaixá-los na região de modo a preenchê-la o máximo possível.

Link de acesso: **https://www.geogebra.org/calculator/p4cuxmww**

POSSÍVEIS RESOLUÇÕES:

Resolução 1:

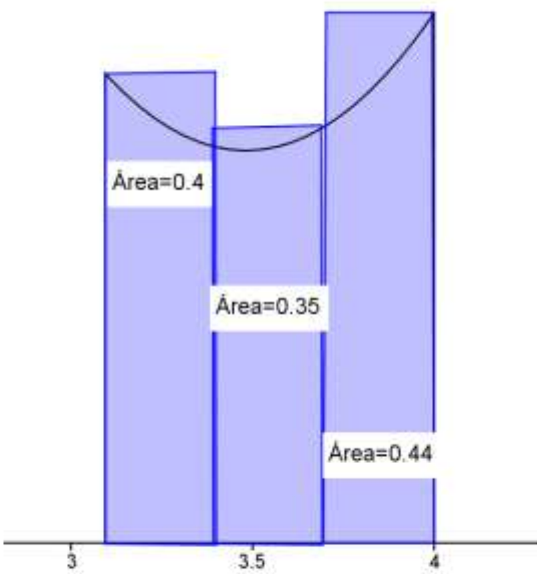
Figura 50 – Resolução 5



Fonte: o autor (2021)

Arrastamos os retângulos e preenchemos a região, como requisitado, utilizamos três retângulos, não foi possível preencher a figura com exatidão, pois é curva, conseguimos uma aproximação e a área pode ser dada pela soma das áreas dos retângulos, vamos também utilizar a ferramenta que calcula área no Geogebra, onde, quando selecionada, basta clicar no retângulo que aparece a área. Veja na figura abaixo.

Figura 51 – Resolução 5 com área



Fonte: o autor (2021)

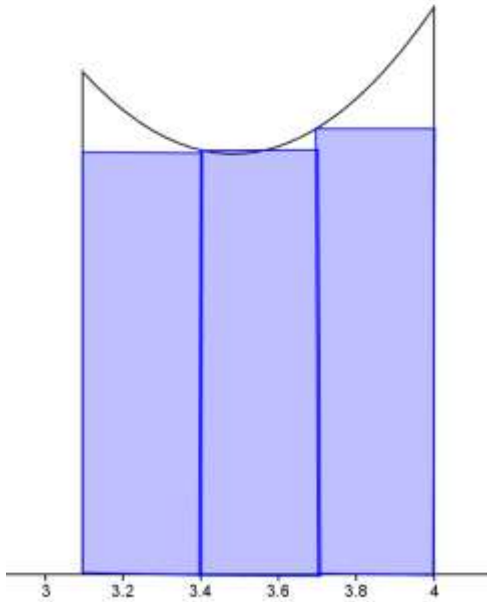
Dessa forma temos que a área aproximada da região é a soma das áreas dos retângulos, que calculando temos:

$$0{,}4 + 0{,}35 + 0{,}44 = 1{,}19$$

Portanto temos que a área aproximada da região é 1,19.

Resolução 2:

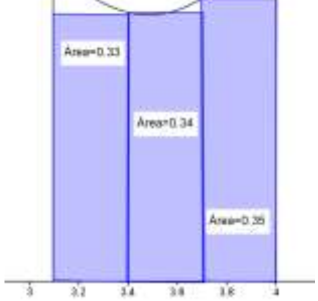
Figura 52 – Resolução 6



Fonte: o autor (2021)

Preenchemos a região destacada com três retângulos, para isso movemos os retângulos com os recursos do Geogebra, nesse caso não conseguimos preencher totalmente a região, pois a figura é curva, porém fizemos uma aproximação que acreditamos ser interessante, observe que os retângulos ficaram sob a curva, isso implica que a área encontrada será menor que a área exata da região, para encontrarmos a área basta agora calcular a área dos retângulos e efetuar essa soma, sendo assim, apresentamos os resultados abaixo.

Figura 53 – Resolução 6 com área



Fonte: o autor (2021)

Calculamos a área através da ferramenta de área do Geogebra, ela é bem prática, pois basta estar selecionada e clicar no polígono desejável e teremos a área, para concluirmos, basta somar essas áreas, que pode ser feito através da calculadora, como segue:

$$0{,}33 + 0{,}34 + 0{,}35 = 1{,}02$$

Desse modo temos que a área aproximada da região é 1,02.

Temos então que a área está entre o intervalo 1,19 e 1,02; uma forma de relacionar os dois valores pode ser através da média aritmética, dessa forma temos que a área da região será:

$$\frac{1{,}19 + 1{,}02}{2} = \frac{2{,}21}{2} = 1{,}105$$

Portanto a área da região destacada é aproximadamente 1,105.

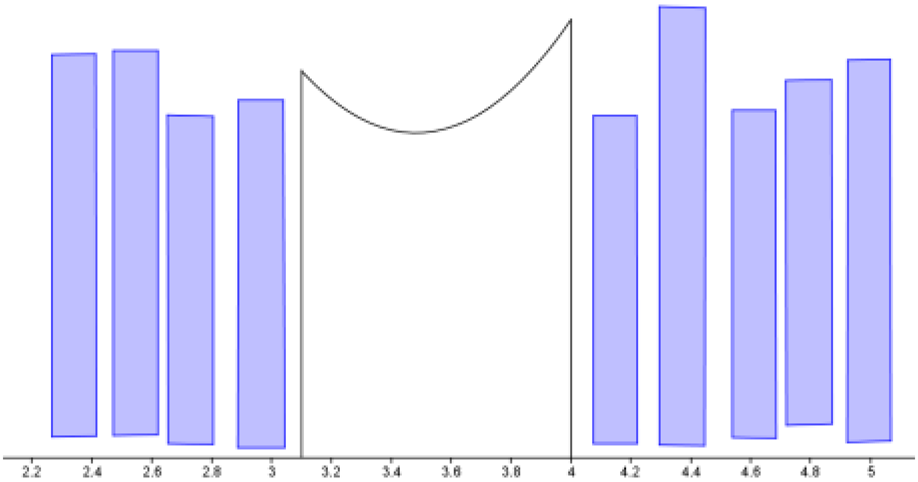
INFERÊNCIAS:

Vimos através das resoluções os valores aproximados da área da região, novamente questionamos sobre a quantidade de retângulos que foi dividida a região, na atividade anterior percebemos que quando aumentamos o número de retângulos para a realização da tarefa, o resultado da área ficou mais preciso. Será que isso sempre acontece?

Será que a aproximação da área está relacionada com a quantidade de partições que fazemos na região desejada?

Para buscar responder esses e outros questionamentos, vamos calcular novamente a área da região, porém, aumentaremos o numero de partições na base da região, nas duas resoluções anteriores, fizemos essa divisão em 3 retângulos, agora seguiremos analogamente, destacando que a base da região será agora dividida em 6 retângulos.

Figura 54 – Guia de atividade 2



Fonte: o autor (2021)

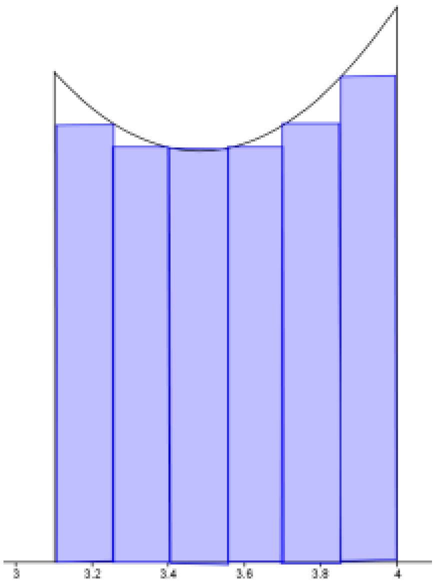
Analogamente, devemos preencher a região destacada acima.

Link de acesso: **https://www.geogebra.org/calculator/utv7xhun**

Apresentamos abaixo as resoluções:

Resolução 3:

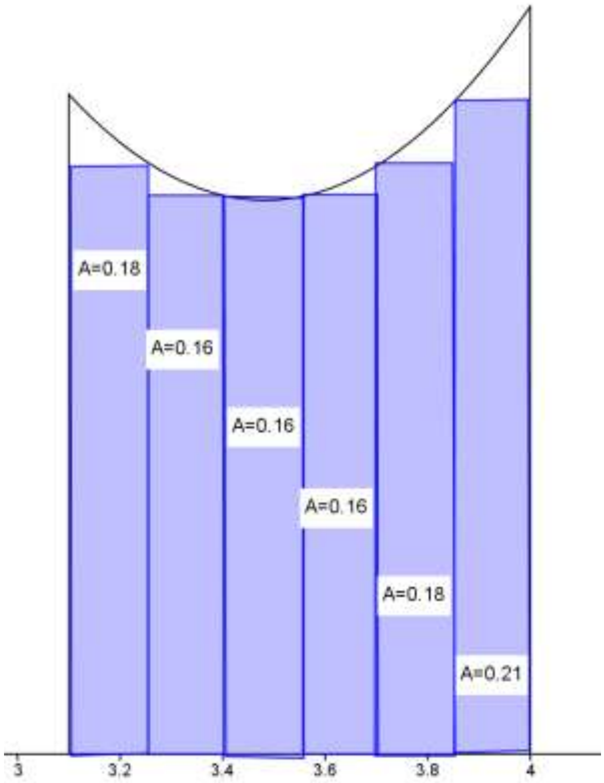
Figura 55 – Resolução 7



Fonte: o autor (2021)

Note que ao preenchemos a região da figura com 6 retângulos, ambos ficaram sob a curva, concluímos então que a área encontrada será menor que a área exata, a área aproximada pode ser obtida a partir da soma dos retângulos, para isso, utilizamos da ferramenta do Geogebra que calcula área, esta ferramenta por sua vez, basta estar selecionada e então clicar no polígono desejado para obter a área, veja na imagem abaixo as áreas representadas:

Figura 56 – Resolução 7 com área



Fonte: o autor (2021)

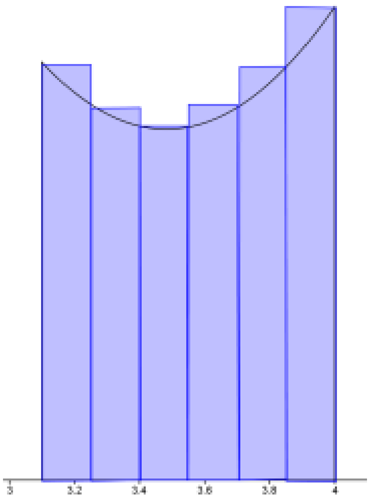
Note que a área de todos os retângulos já foi obtida, agora precisamos somar cada uma delas para encontrar a área aproximada da região, como segue:

$$0{,}18 + 0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}18 + 0{,}21 = 1{,}05$$

Portanto temos que a área aproximada da região é 1,05

Resolução 4:

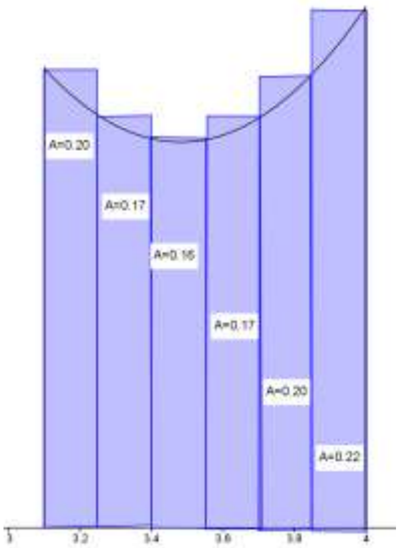
Figura 57 – Resolução 8



Fonte: o autor (2021)

A região foi preenchida com 6 retângulos, nessa resolução destacamos que os retângulos foram encaixados e ambos estão sobre a curva, concluímos a partir disso que a área encontrada será maior que a área exata da região, e podemos obter essa área aproximada através da soma das áreas dos retângulos, as áreas dos retângulos podem ser encontradas no próprio Geogebra através da ferramenta de calcular área, para isso apenas precisamos selecionar a ferramenta e clicar na figura desejada, nesse caso os retângulos, ilustramos na imagem abaixo depois de realizado esse procedimento.

Figura 58 – Resolução 8 com área



Fonte: o autor (2021)

Note que a área de cada retângulo já está representada na imagem acima, para cumprir nosso objetivo nessa atividade precisamos somar as áreas, como segue:

$$0{,}20 + 0{,}17 + 0{,}16 + 0{,}17 + 0{,}20 + 0{,}22 = 1{,}12$$

Logo temos que a área aproximada da região é 1,12.

Novamente temos que a área está entre o intervalo 1,05 e 1,12; uma forma de relacionar os dois valores pode ser através da média aritmética, dessa forma temos que a área da região será:

$$\frac{1{,}05 + 1{,}12}{2} = \frac{2{,}17}{2} = 1{,}085$$

Portanto a área da região destacada é aproximadamente 1,085

Concluímos então que, ao aumentarmos a quantidade de retângulos na região, por consequência temos que o intervalo encontrado diminui, ou seja, o valor encontrado é mais preciso quando o número de partições da base é maior.

SISTEMATIZAÇÃO

Podemos concluir através das resoluções que se os retângulos que estão sob a curva, à área encontrada terão um valor menor que o valor exato da região, por outro lado, se os retângulos estão sobre a curva, à área encontrada será então maior que a área exata, nota-se também que a partir dessas duas observações, a área exata da região está entre um resultado e outro, ou seja, está entre o intervalo de uma aproximação e outra.

Uma ideia para utilizar os valores encontrados nas aproximações obtidas é de que podemos utilizar a média aritmética entre os dois valores e assim definir um único resultado através das duas aproximações.

Outra observação que podemos analisar através das resoluções é que quanto mais aumentamos o número de partições, ou seja, quanto mais retângulos inserimos dentro da região, mais preenchida ela fica, consequentemente o intervalo entre uma aproximação e outra diminui, fazendo com que quanto mais retângulos inserimos na região, mais perto do valor exato da área dessa região chegamos, podemos concluir também que o valor exato da área da região tende para um número que depende de quantos retângulos utilizamos para aproximar desse valor, quanto mais retângulos, mais próximo o valor exato da área estará.

O que aconteceria se dividíssemos a região em mais retângulos do que os exemplos? Se fossem 20 retângulos para preencher a figura, o que aconteceria?

Concluímos que quanto maior for o número de partições que fizermos na base da região a ser calculada a área, mais próximo do valor exato será o resultado do valor da área. Destacamos também que se escolhermos um número muito grande de partições, a construção e a resolução tornam-se inviável, mas ressaltamos a importância dessas divisões.

Vimos que os intervalos de aproximação encontrados diminuem à medida que aumentamos o número de retângulos na região, isso significa que se continuarmos dividindo a base da região sucessivamente por partições cada vez menores, ou seja, cada vez mais acrescentar o número de retângulos, pode-se encontrar um intervalo cada vez menor, ou seja, mais preciso, já que o intervalo onde está o resultado diminui com esse processo.

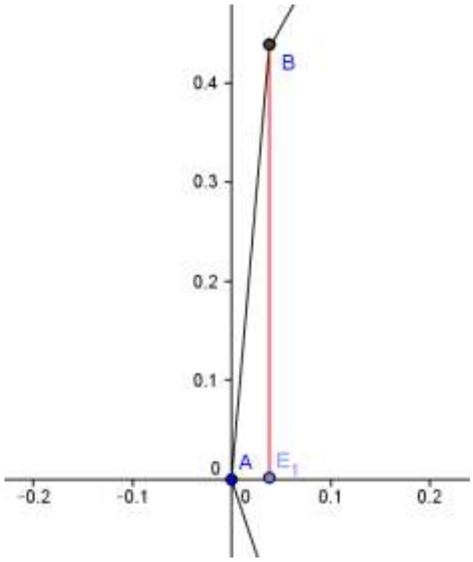
Destacamos também que esse procedimento de aumentar cada vez mais o número de partições na base da figura, remete ao método da exaustão de Arquimedes, referenciado neste trabalho. Portanto, concluímos.

Quanto maior o número de partições, menor será o intervalo de aproximação da área sob a curva e se considerarmos um número muito grande de partições, a área da região sob a curva tendera a um valor.

Agora apresentaremos os cálculos das outras partes para conseguirmos determinar a área da superfície do lago.

Área da função $y = 11{,}6x$ entre os pontos A e B, com $0 \leq x \leq 0{,}04$

Figura 59 – Função y = 11.6x

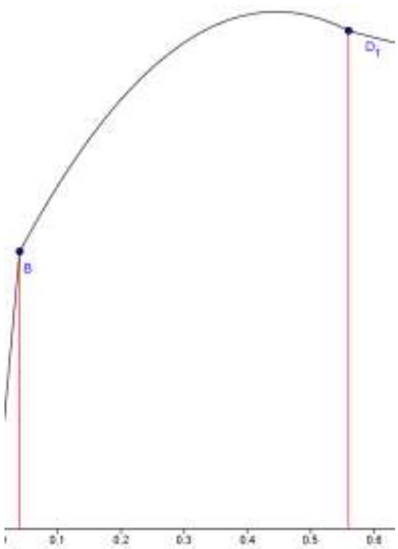


Fonte: o autor (2021)

Note que a área dessa região é formada por um triângulo, cuja base mede 0,04 e sua altura mede 0,44. Portanto a área dessa região é dada por $A = \frac{0{,}04 \times 0{,}4}{2} = \frac{0{,}016}{2} = 0{,}08$

Área da função y = -2,3 x² + 2,05x + 0,36 entre os pontos B e D1, com 0,04 < x ≤ 0,56.

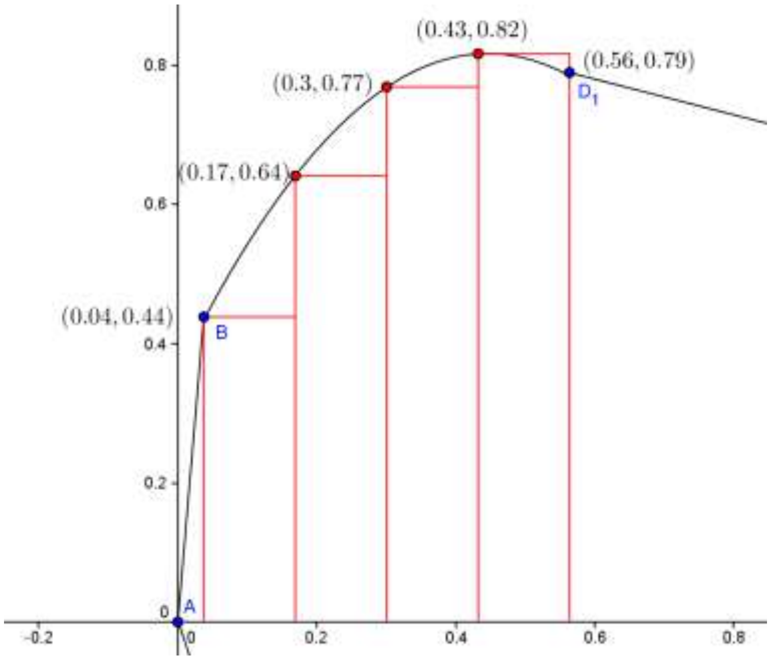
Figura 60– Função y = -2.3 x² + 2.05x + 0.36



Fonte: o autor (2021)

Note que a região acima é uma região irregular, por esse motivo faremos uma aproximação, dividindo a região por retângulos com mesma medida da base, e faremos isso com a diferença de aproximação da área para mais e diferença de aproximação da área para menos, ou seja, os retângulos ora excedem a região curva ora não a preenche totalmente, isso implica que nesses casos à área encontrada será menor ou maior que a área exata da região, em seguida faremos a média aritmética entre essas aproximações para um resultado melhor.

Figura 61– Função y = -2.3 x² + 2.05x + 0.36 detalhada 1



Fonte: o autor (2021)

Observe que os retângulos têm a mesma medida da base equivalente 0,56 – 0,04 = 0,52, devido às coordenadas dos pontos B e $D_{1,}$ que dividido por 4 da 0,13; pois foi construído 4 retângulos, assim para calcularmos a área de cada retângulo, basta multiplicarmos 0,13 pela altura de cada retângulo respectivamente.

Calcularemos a área de cada retângulo para obtermos a área da região. Chamaremos de A1 a área do primeiro retângulo, A2 a área do segundo retângulo e assim por diante.

$$A1 = 0{,}13 \times 0{,}44 = 0{,}0572$$

$$A2 = 0{,}13 \times 0{,}64 = 0{,}0832$$

$$A3 = 0{,}13 \times 0{,}77 = 0{,}1001$$

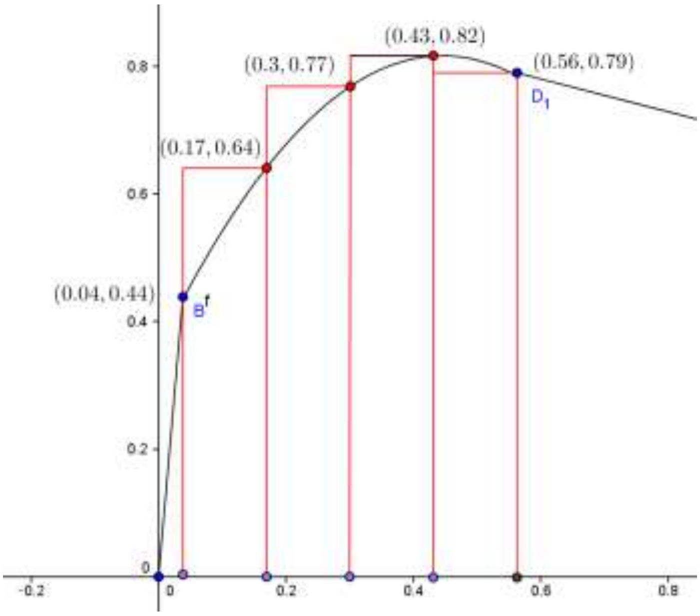
$$A4 = 0{,}13 \times 0{,}82 = 0{,}1066$$

Portanto obtemos a área da região pela soma das áreas dos retângulos acima, que dá um total de:

$AT = 0{,}3471.$

Como construímos os retângulos a partir da altura, nesse caso construímos para o lado direito, assim como na figura 61, desse modo, a maioria dos retângulos ficaram internos a região a ser calculada a área, desse modo podemos imaginar que essa área calculada será menor que a área da figura, por isso também construiremos os retângulos a partir da altura sempre para o lado esquerdo como mostra a figura abaixo, dessa forma, note que a maioria dos retângulos excede a figura, gerando uma área maior que a área exata da figura, então o cálculo da média aritmética entre essas duas áreas nos darão uma aproximação muito mais precisa.

Figura 62 – Função y = -2.3 x² + 2.05x + 0.36 detalhada 2



Fonte: o autor (2021)

Observe que os retângulos têm a mesma medida da base equivalente 0,56 – 0,04 = 0,52; que dividido por 4 é 0,13; pois construímos 4 retângulos, assim para calcularmos a área de cada retângulo, basta multiplicarmos 0,13 pela altura de cada retângulo respectivamente.

Calcularemos a área de cada retângulo para obtermos a área da região. Chamaremos de A1 a área do primeiro retângulo, A2 a área do segundo retângulo e assim por diante.

$A1 = 0{,}13 \times 0{,}64 = 0{,}0832$ $\qquad$ $A3 = 0{,}13 \times 0{,}82 = 0{,}1066$

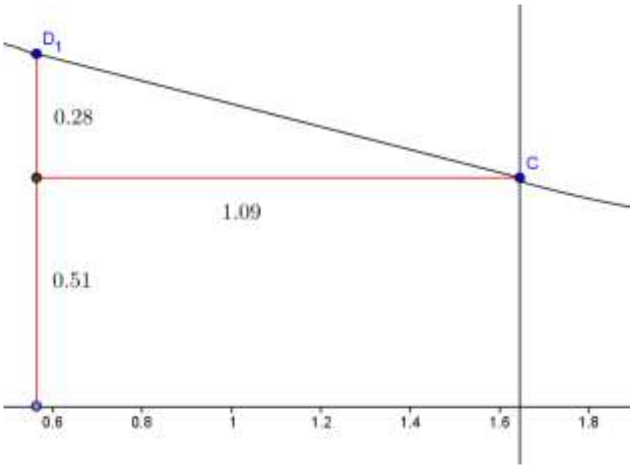
$A2 = 0{,}13 \times 0{,}77 = 0{,}1001$ $\qquad$ $A4 = 0{,}13 \times 0{,}79 = 0{,}102$

Portanto obtemos a área da região pela soma das áreas dos retângulos acima, que dá um total de, $AT = 0{,}3926$.

Fazendo a média aritmética temos que a área da região entre a função y = -2,3x² + 2,05x + 0,36; limitada pelos pontos B e D1 e com 0,04 < x ≤ 0,56 é dada por $0{,}3471 + 0{,}3926 = \frac{0{,}7397}{2} = 0{,}36985$.

Área da função y = -0,23x + 0,93 entre os pontos D1 e C, com 0,56 <x ≤1,65.

Figura 63– Função y =- 0.23x + 0.93

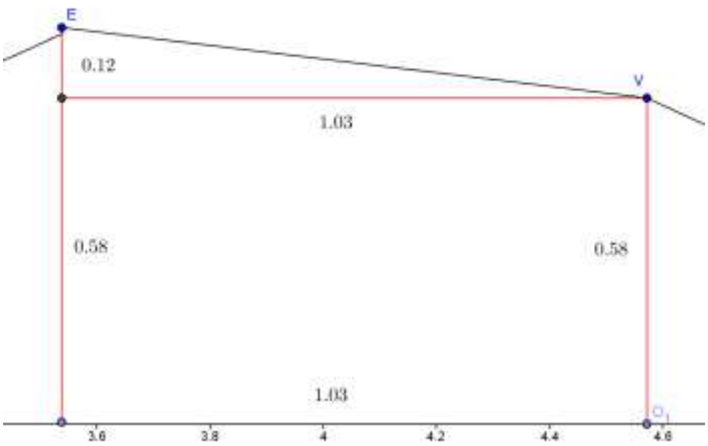


Fonte: o autor (2021)

A região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = (1{,}65 - 0{,}56) \times 0{,}51 = 1{,}09 \times 0{,}51 = 0{,}5559$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{1{,}09 \times 0{,}28}{2} = \frac{0{,}3052}{2} = 0{,}1526$; assim temos que a área dessa região é $0{,}5559 + 0{,}1526 = 0{,}7085$.

.Área da função y = -0,12x = 1,12 entre os pontos E e V, com 3,54 < x ≤ 4,57.

Figura 64 – Função y =-0.12x = 1.12

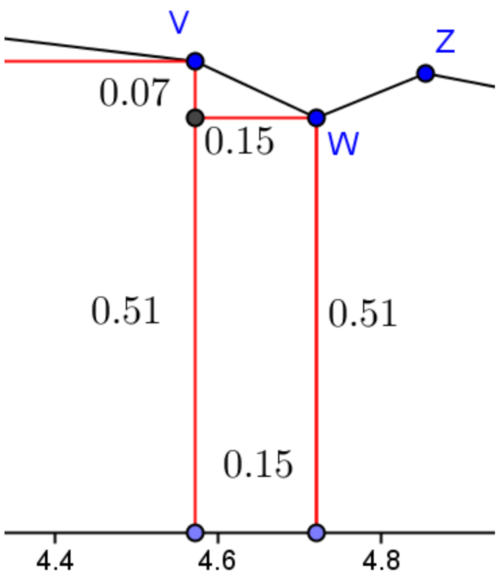


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 1{,}03 \times 0{,}58 = 0{,}5974$, já para a área do triângulo temos $A = \frac{1{,}03 \times 0{,}12}{2} = \frac{0{,}1236}{2} = 0{,}0618$; assim temos que a área dessa região é $0{,}5974 + 0{,}0618 = 0{,}6592$.

Área da função y = -0,47x + 2,71 entre os pontos V e W, com 4,57 <x ≤ 4,72.

Figura 65– Função y =-0.47x + 2.71

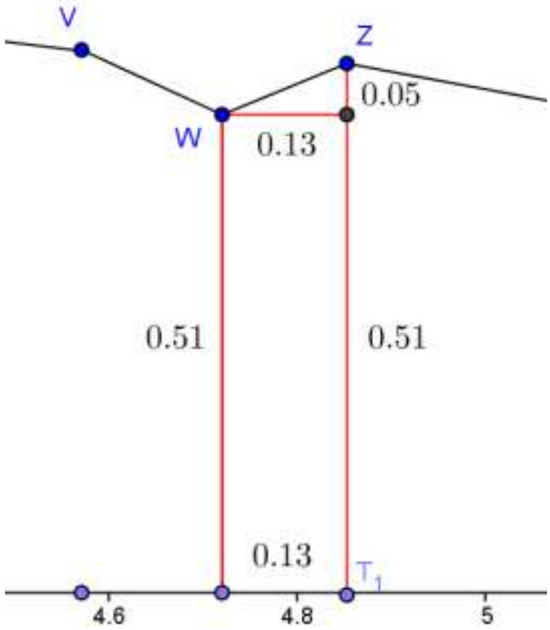


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0{,}15 \times 0{,}51 = 0{,}0765$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0{,}15 \times 0{,}07}{2} = \frac{0{,}0105}{2} = 0{,}00525$; assim temos que a área dessa região é $0{,}0765 + 0{,}00525 = 0{,}08175$.

Área da função y = 0,41x – 1,42 entre os pontos W e Z, com 4,72 <x ≤ 4,85.

Figura 66 – Função y = 0.41x – 1.42

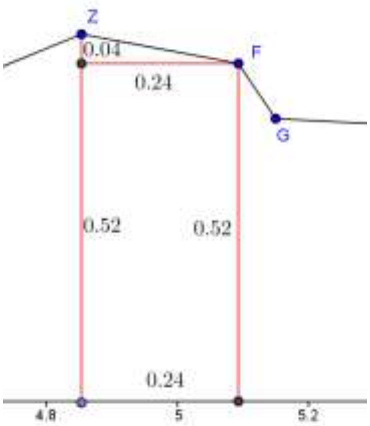


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0{,}13 \times 0{,}51 = 0{,}0663$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0{,}13 \times 0{,}5}{2} = \frac{0{,}0065}{2} = 0{,}00325$; assim temos que a área dessa região é $0{,}0663 + 0{,}00325 = 0{,}06955$.

Área da função y = -0,19x + 1,47 entre os pontos Z e F, com 4,85 <x ≤ 5,09.

Figura 67 – Função y = -0.19x + 1.47

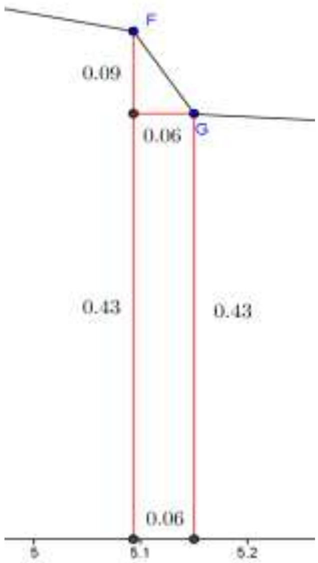


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0{,}24 \times 0{,}52 = 0{,}1248$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0,24 \times 0,04}{2} = \frac{0,0096}{2} = 0,0048$; assim temos que a área dessa região é $0,1248 + 0,0048 = 0,1296$.

Área da função y = -1,47x + 8,01entre os pontos F e G, com 5,09 <x ≤ 5,15.

Figura 68 – Função y =-1.47x + 8.01

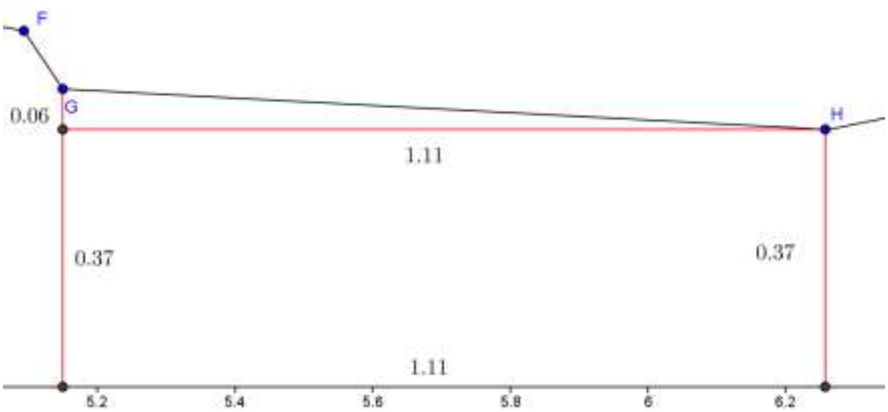


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0,06 \times 0,43 = 0,0258$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0,06 \times 0,09}{2} = \frac{0,0054}{2} = 0,0027$; assim temos que a área dessa região é $0,0258 + 0,0027 = 0,0285$.

Área da função y = -0,05x + 0,71 entre os pontos G e H, com 5,15 <x ≤ 6,26.

Figura 69– Função y =-0.05x + 0.71

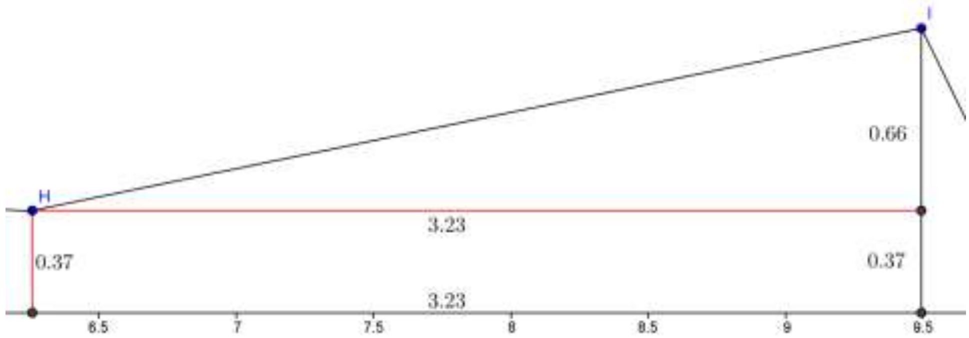


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 1{,}11 \times 0{,}37 = 0{,}4107$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{1{,}11 \times 0{,}06}{2} = \frac{0{,}0054}{2} = 0{,}0666$; assim temos que a área dessa região é $0{,}4107 + 0{,}0666 = 0{,}4773$.

Área da função y = 0,2x – 0,9 entre os pontos H e I, com 6,26 <x ≤ 9,49.

Figura 70 – Função y =0.2x – 0.9

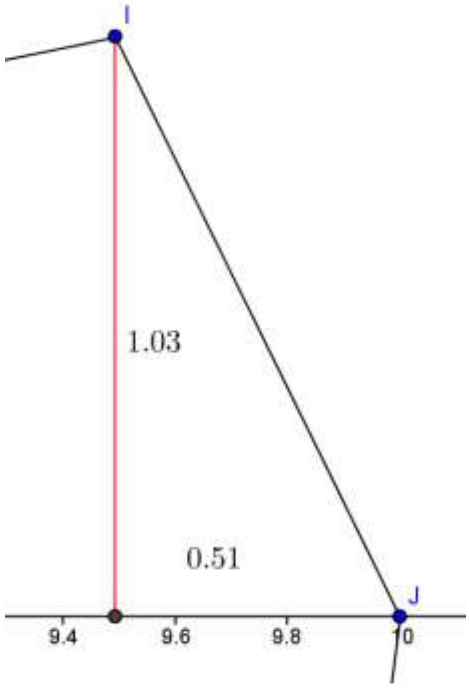


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 3{,}23 \times 0{,}37 = 1{,}1951$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{3{,}23 \times 0{,}66}{2} = \frac{2{,}1318}{2} = 1{,}0659$; assim temos que a área dessa região é $1{,}1951 + 1{,}0659 = 2{,}261$.

Área da função y = -2,04x + 20,39 entre os pontos V e J, com 9,49 <x ≤ 10.

Figura 71– Função y = -2.04x + 20.39

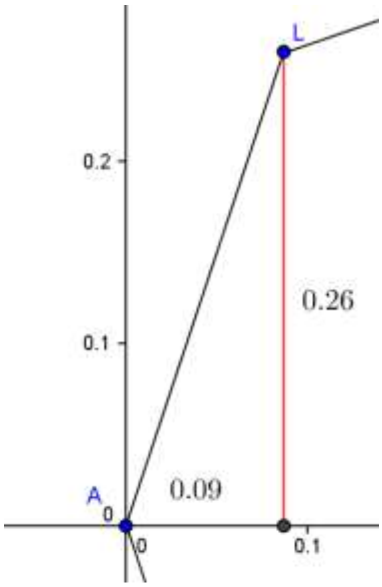


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um triângulo, calculando temos, $A = \frac{0,51 \times 1,03}{2}$ = $\frac{0,5253}{2} = 0,26265.$

Área da função y = 3x entre os pontos A e L, com 0 ≤ x ≤ 0,09.

Figura 72– Função y = 3x

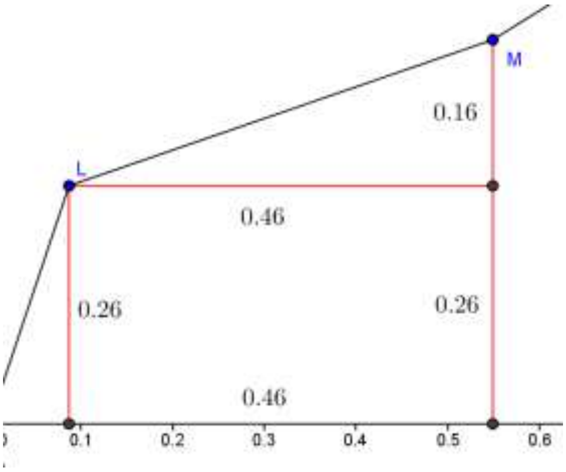


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um triângulo, calculando temos, $A = \frac{0{,}09 \times 0{,}26}{2}$ $= \frac{0{,}234}{2} = 0{,}0117.$

Área da função y = 0,34x + 0,23 entre os pontos L e M, com 0,09 ≤ x ≤ 0,55.

Figura 73– Função y = 0.34x + 0.23

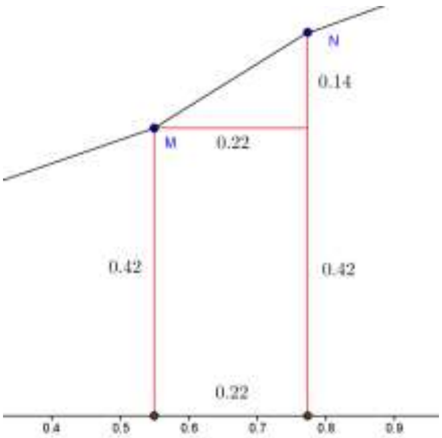


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0{,}46 \times 0{,}26 = 0{,}1196$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0{,}46 \times 0{,}16}{2} = \frac{0{,}0736}{2} = 0{,}0368$; assim temos que a área dessa região é $0{,}1196 + 0{,}0368 = 0{,}1564$.

Área da função y = 0,36x + 0,08 entre os pontos M e N, com 0,55 ≤ x ≤ 0,77.

Figura 74 – Função y = 0.36x + 0.08

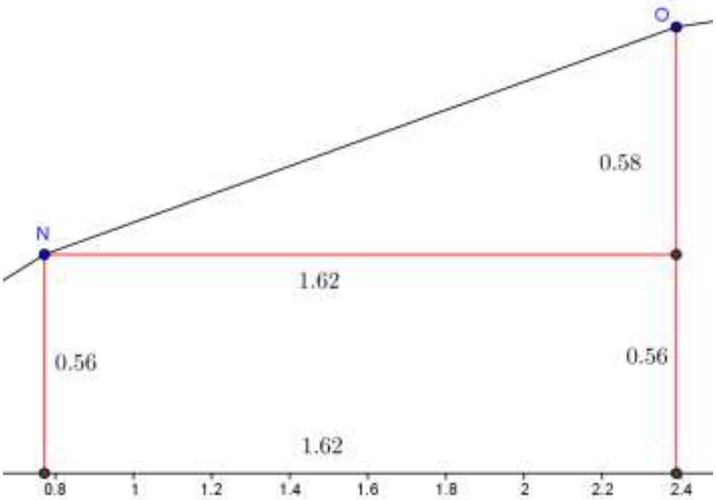


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0{,}22 \times 0{,}42 = 0{,}0924$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0,22 \times 0,14}{2} = \frac{0,0308}{2} = 0,0154$; assim temos que a área dessa região é $0,0924 + 0,0154 = 0,1078$.

Área da função y = 0,36x + 0,28 entre os pontos N e O, com 0,77 ≤ x ≤ 2,39.

Figura 75 – Função y =0.36x + 0.28

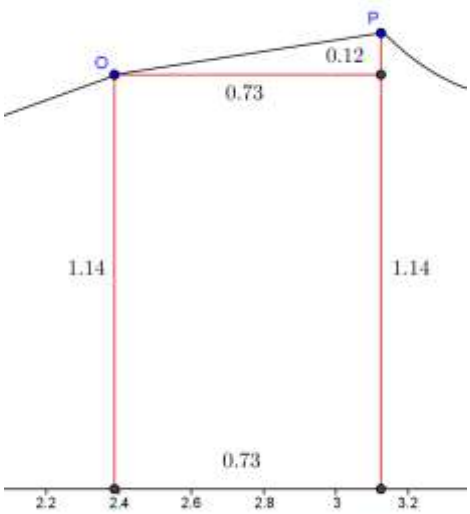


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 1,62 \times 0,56 = 0,9072$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{1,62 \times 0,58}{2} = \frac{0,9396}{2} = 0,4698$; assim temos que a área dessa região é $0,9072 + 0,4698 = 1,377$.

Área da função y = 0,16x + 0,77 entre os pontos O e P, com 2,39 ≤ x ≤ 3,12.

Figura 76 – Função y = 0.16x + 0.77

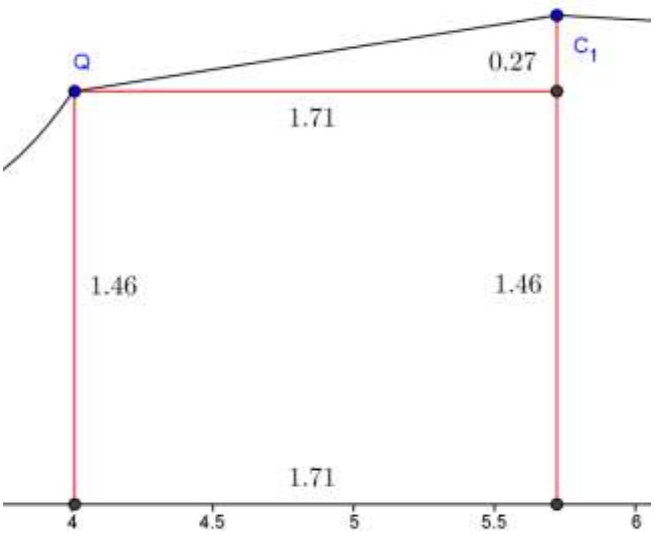


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0{,}73 \times 1{,}14 = 0{,}8322$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0{,}73 \times 0{,}12}{2} = \frac{0{,}0876}{2} = 0{,}0438$; assim temos que a área dessa região é $0{,}8322 + 0{,}0438 = 0{,}876$.

Área da função y = 0,16x + 0,83 entre os pontos Q e C1, com 4,01 ≤ x ≤ 5,72.

Figura 77 – Função y =0.16x + 0.83

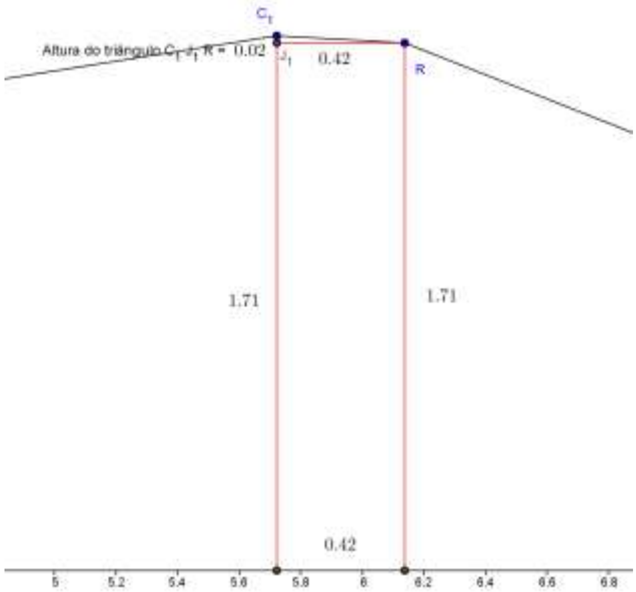


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 1{,}71 \times 1{,}46 = 2{,}4966$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{1{,}71 \times 0{,}27}{2} = \frac{0{,}4617}{2} = 0{,}23085$; assim temos que a área dessa região é $2{,}4966 + 0{,}23085 = 2{,}72745$.

Área da função y = 0,05x + 2,03 entre os pontos C1 e R, com 5,14 ≤ x ≤ 6,14.

Figura 78 – Função y =0.05x + 2.03

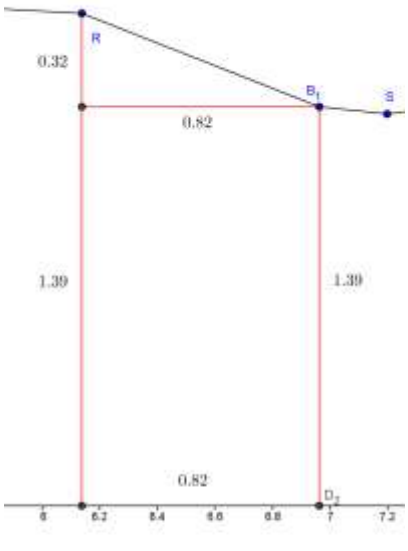


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0{,}42 \times 1{,}71 = 0{,}7182$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0{,}42 \times 0{,}02}{2} = \frac{0{,}0084}{2} = 0{,}0042$; assim temos que a área dessa região é $0{,}7182 + 0{,}0042 = 0{,}7224$.

Área da função y = 0,39x + 4,11 entre os pontos R e B1, com 6,14 ≤ x ≤ 6,96.

Figura 79 – Função y =0.39x + 4.11

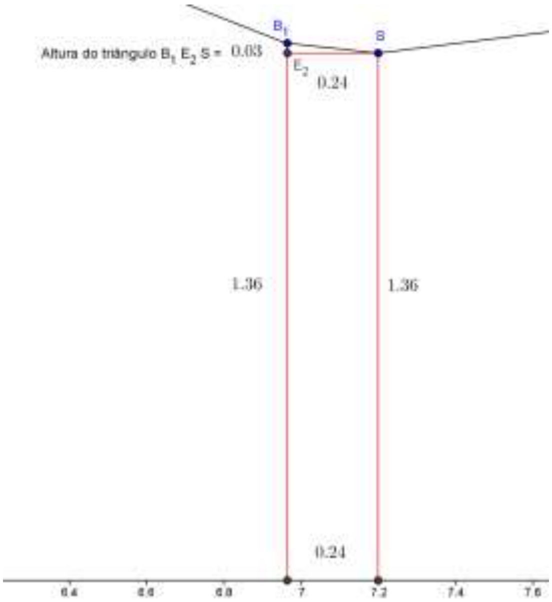


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0{,}82 \times 1{,}39 = 1{,}1398$, já para a área do triângulo temos $A = \frac{0,82 \times 0,32}{2} = \frac{0,2624}{2} = 0,1312$; assim temos que a área dessa região é $1,1398 + 0,1312 = 1,271.$

Área da função y = 0,11x + 2,13 entre os pontos B1 e S, com 6,96 ≤ x ≤ 7,2.

Figura 80 – Função y =0.11x + 2.13

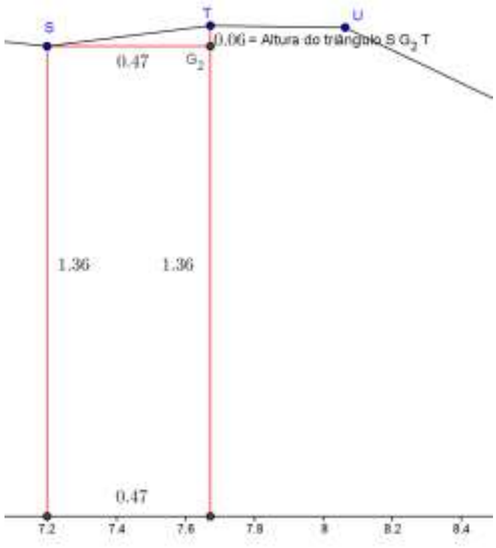


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0,24 \times 1,36 = 0,3264$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0,24 \times 0,03}{2} = \frac{0,0072}{2} = 0,0036$; assim temos que a área dessa região é $0,3264 + 0,0036 = 0,33.$

Área da função y = 0,12x + 0,47 entre os pontos S e T, com 7,2 ≤ x ≤ 7,67.

Figura 81 – Função y =0.12x + 0.47

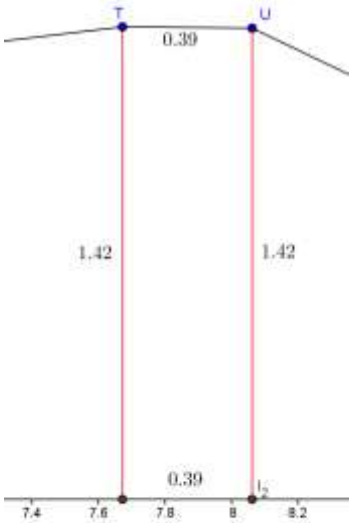


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0,47 \times 1,36 = 0,6392$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0,47 \times 0,06}{2} = \frac{0,0282}{2} = 0,0141$; assim temos que a área dessa região é $0,6392 + 0,0141 = 0,6533$.

Área da função y = 0,01x + 1,5 entre os pontos T e U, com 7,67 ≤ x ≤ 8,06.

Figura 82 – Função y =0.01x + 1.5

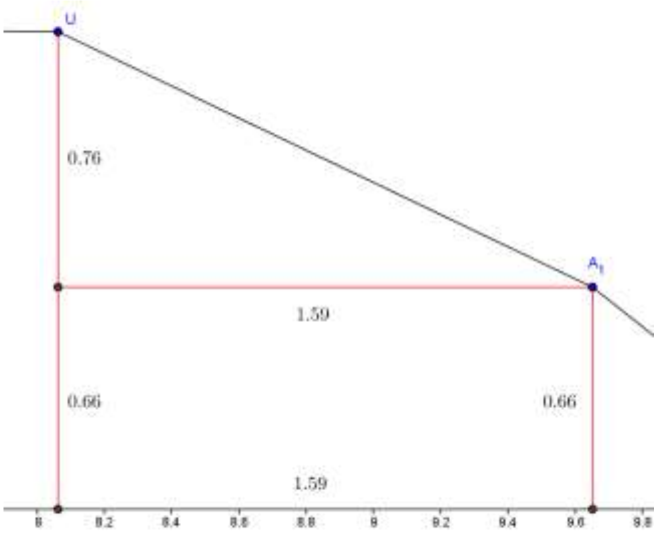


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero, calculando essa área temos $A = 0,39 \times 1,42 = 0,5538$.

Área da função y = 0,48x + 5,26 entre os pontos U e A1, com 8,06 ≤ x ≤ 9,65.

Figura 83 – Função y =0.48x + 5.26

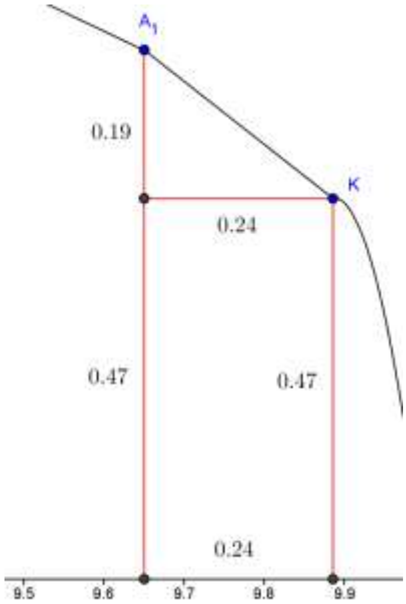


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 1{,}59 \times 0{,}66 = 1{,}0494$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{1{,}59 \times 0{,}76}{2} = \frac{1{,}2084}{2} = 0{,}6042$; assim temos que a área dessa região é $1{,}0494 + 0{,}6042 = 1{,}6536$.

Área da função y = -0,78x + 8,23 entre os pontos A1 e K, com 9,65 ≤ x ≤ 9,89.

Figura 84 – Função y =- 0.78x + 8.23

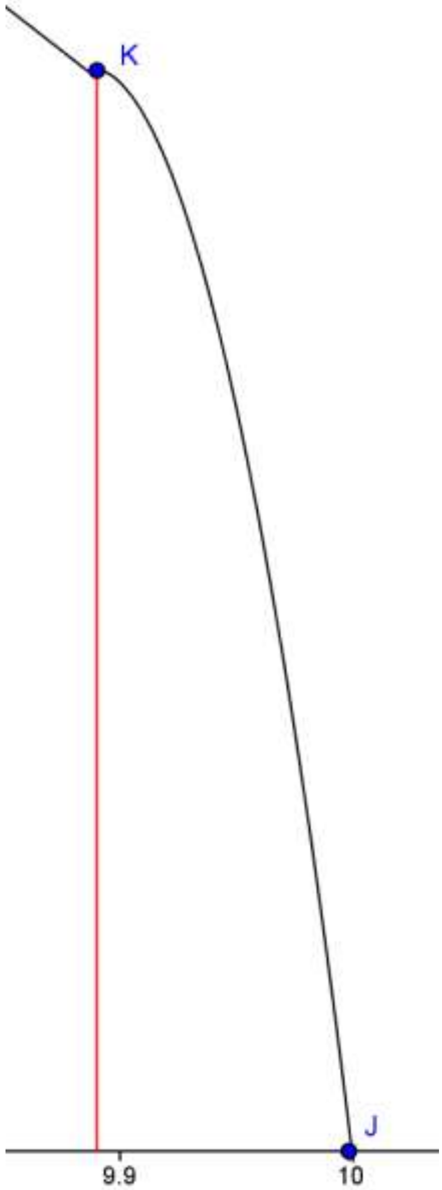


Fonte: o autor (2021)

A área da região é formada por um quadrilátero e um triângulo, calculando a área do quadrilátero temos $A = 0{,}24 \times 0{,}47 = 0{,}1128$; já para a área do triângulo temos $A = \frac{0{,}24 \times 0{,}19}{2} = \frac{0{,}0456}{2} = 0{,}0228$; assim temos que a área dessa região é $0{,}1128 + 0{,}0228 = 0{,}1356$.

Área da função y = -35,81x² + 708,02x – 3499,16 entre os pontos K e J, com 9,89 ≤ x ≤ 10.

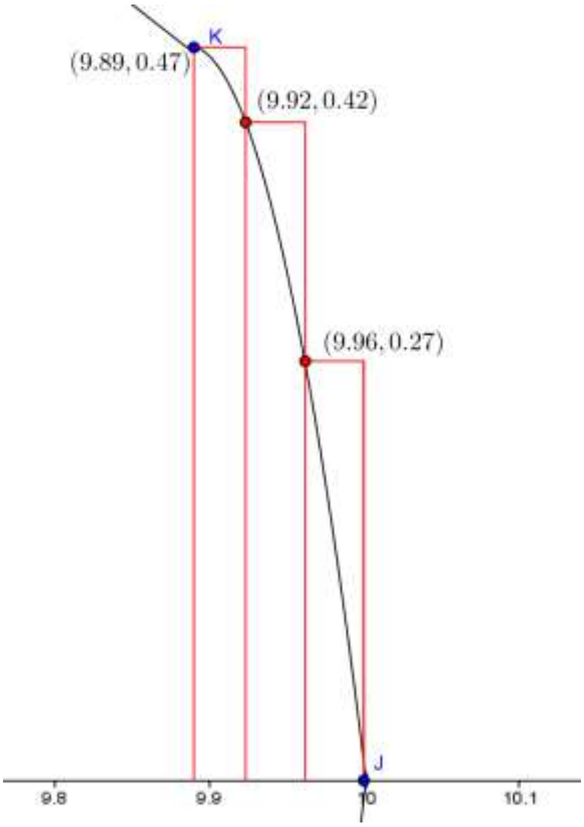
Figura 85 – Função y =-35.81x² + 708.02x - 3499.16



Fonte: o autor (2021)

Note que a região acima é uma região curva, por esse motivo faremos uma aproximação, dividindo a região por retângulos com mesma medida da base, e faremos isso com a diferença de aproximação da área para mais e diferença de aproximação da área para menos, ou seja, os retângulos excedem a região curva ou não a preenche totalmente, em seguida faremos a média aritmética entre essas aproximações para um resultado melhor.

Figura 86 – Função y =-35.81x² + 708.02x - 3499.16 detalhada 1



Fonte: o autor (2021)

Observe que os retângulos têm a mesma medida da base equivalente 10 – 9,89 = 0,11; devido às coordenadas dos pontos J e K, que dividido por 3 é 0,0366; pois foram construídos 3 retângulos, assim para calcularmos a área de cada retângulo, basta multiplicarmos 0,0366 pela altura de cada retângulo respectivamente.

Calcularemos a área de cada retângulo para obtermos a área da região. Chamaremos de A1 a área do primeiro retângulo, A2 a área do segundo retângulo e assim por diante.

$$A1 = 0{,}0366 \times 0{,}47 = 0{,}0172$$

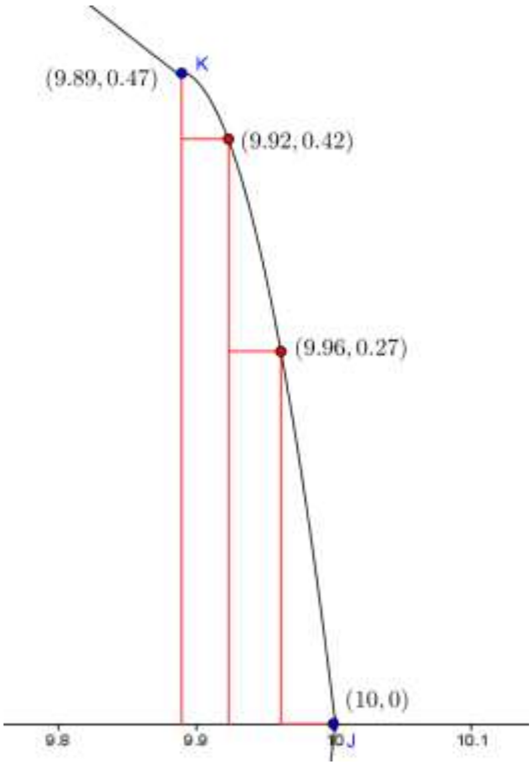
$$A2 = 0{,}0366 \times 0{,}42 = 0{,}0153$$

$$A3 = 0{,}0366 \times 0{,}27 = 0{,}0098$$

Portanto obtemos a área da região pela soma das áreas dos retângulos acima, que dá um total de, $AT = 0{,}0423$.

Como construímos os retângulos a partir da altura sempre para o lado direito como mostra a figura acima, a maioria dos mesmos ficou excedendo a região a ser calculada, desse modo podemos considerar que essa área calculada será maior que a área exata da figura, por isso também construiremos os retângulos a partir da altura sempre para o lado esquerdo como mostra a figura abaixo, dessa forma, note que a maioria dos retângulos fica interno a figura, gerando uma área menor que a área exata da figura, então o cálculo da média aritmética entre essas duas áreas nos darão uma aproximação muito mais precisa.

Figura 87 – Função y =-35.81x² + 708.02x - 3499.16 detalhada 2



Fonte: o autor (2021)

Observe que os retângulos têm a mesma medida da base equivalente 10 – 9,89 = 0,11; devido às coordenadas dos pontos J e K, que dividido por 3 é 0,0366; pois foi construído 3 retângulos, assim para calcularmos a área de cada retângulo, basta multiplicarmos 0,0366 pela altura de cada retângulo respectivamente.

Calcularemos a área de cada retângulo para obtermos a área da região. Chamaremos de A1 a área do primeiro retângulo, A2 a área do segundo retângulo e assim por diante.

$$A1 = 0{,}0366 \times 0{,}42 = 0{,}0153$$

$$A2 = 0{,}0366 \times 0{,}27 = 0{,}0098$$

$$A3 = 0{,}0366 \times 0 = 0$$

Portanto obtemos a área da região pela soma das áreas dos retângulos acima, que dá um total de, $AT = 0{,}0251$.

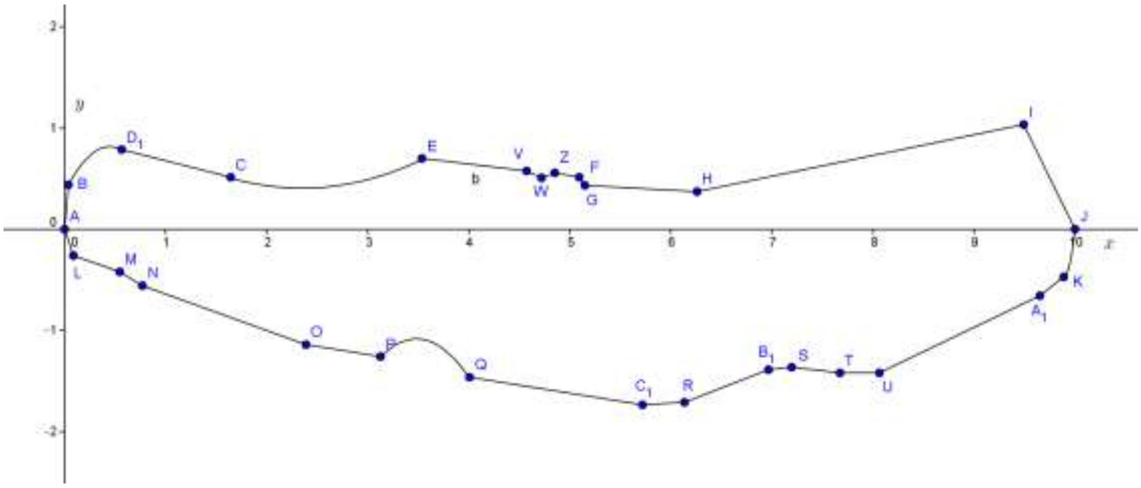
Fazendo a média aritmética temos que a área da região entre a função y = -2,3 x² + 2,05x + 0,36; limitada pelos pontos B e D1 e com 0,04 <x ≤ 0,56 é dada por $0{,}0423 + 0{,}0251 = \frac{0{,}0674}{2} = 0{,}0337$.

Portanto temos que a área total da superfície do lago é dada pela soma das áreas de todas as regiões que foram calculadas anteriormente, assim, precisamos apenas efetuar a soma. Dessa forma temos que á área é 17,76178 unidades métricas quadradas.

Entretanto, não podemos nos esquecer de que utilizamos uma escala com a medida de 10 unidades para representar o comprimento do lago, que também podemos chamar de diâmetro do lago para facilitar nossos trabalhos, entretanto para encontrarmos o valor da área de fato, devemos fazer uma proporção com relação ao comprimento real do lago, que será considerado em metros.

Destacamos aqui então a proporção em relação ao tamanho do lago, para isso, o autor foi pessoalmente até o lago Igapó II e obteve medidas de partes do entorno do mesmo, utilizando de uma trena de 30 metros, dessa forma, escolhemos as partes pertinentes que achamos interessante para medir e para isso bastou localizar cada uma delas no local, então o processo de deu por esticar a trena até aferirmos as regiões desejadas ai quais destacamos a seguir:

Figura 88 – Contorno do lago Igapó II detalhado



Fonte: o autor (2021)

Realizamos a primeira medida de acordo com a figura acima do ponto Q até o ponto C_1 e encontramos a medida de 175 metros, também medimos do ponto U até o ponto A_1 e o valor encontrado foi de 178 metros, por último também medimos do ponto I até o ponto J e obtivemos o valor de 117 metros, ressaltamos aqui que com o auxílio do Geogebra encontramos os valores dos segmentos referentes às medidas encontradas relativas ao comprimento do lago com o tamanho de 10 unidades, para isso, apenas construímos os segmentos desejados e a medida do comprimento já aparece na janela de álgebra.

Como segue:

Segmento QC_1 = 1,73

Segmento UA_1 = 1,76

Segmento IJ = 1,15

A partir desses dados, podemos perceber que o tamanho do lago em metros comparado com a unidade de medida adotada 10 está aproximadamente 100 vezes maior que a nossa medida escolhida, pois 1,73 está para 175; 1,76 está para 178 e 1,15 está para 117; consideraremos então que o tamanho do lago é 100 vezes maior que a medida 10 escolhida, portanto o lago tem seu diâmetro de 1000 metros.

Faremos agora a seguinte observação, fica claro que todas as medidas do lago precisam ser multiplicadas por 100 para obtermos seu tamanho real, porém já efetuamos os cálculos aproximados da área e para que a proporção seja também considera em metros quadrados, a partir disso concluímos que para a proporção da área será necessário multiplicar o resultado encontrado por 10000, pois devemos multiplicar por 100 em relação ao comprimento e por 100 em relação à altura, pois a área foi obtida através das áreas dos retângulos, visto que 100 x 100 = 10000.

Como a área encontrada foi de 17.76178, multiplicando por 10000 temos que a área da superfície do lago Igapó II é de 177617,8 (cento e setenta e sete mil seiscentos e dezessete vírgula oito) metros quadrados, aproximadamente.

Destacamos agora, um aspecto importante sobre a definição de área, percebemos que na Educação Básica, esta definição de área fica por conta de um compilado de fórmulas, como por exemplo, área do quadrado, área do retângulo, área do triângulo.

Definição de área:

Com a realização desta atividade, acreditamos que podemos definir o conceito de área de uma maneira mais precisa, entendemos que a definição de área é exatamente a atividade intuitiva que propomos, ou seja, o desfecho da atividade conclui-se na definição de área.

Observações: Fica evidente que à medida que aumentamos o número de partições (geralmente chamada de n) na região a ser calculada a área que o resultado tende cada vez mais para a área efetiva chamada A, em outras palavras, se pensarmos nessas partições um tanto quanto “grande”, ou seja, imaginar dividir a região infinitas vezes, isso implica que a base de cada retângulo (geralmente chamada de Δx ou dx) se tenderá para a medida zero.

Os conceitos aqui abordados tratam da ideia intuitiva da Integral, visto que na prática não conseguimos fazer divisões infinitas, porém, ao imaginar esse processo no infinito, estamos tratando diretamente com a Integral.

Por esse motivo, justificamos a definição de área A pela Integral definida de uma função positiva, onde A é a área, o s alongado representa o símbolo da Integral, a e b (minúsculos) representam o intervalo da função na qual se deseja calcular a área, $f(x)$ é a função e dx é o intervalo considerado pelo número de partições, no caso da Integral definida, dx tende a zero.

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

5. ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE A PROPOSTA

Discorremos aqui um pouco sobre o encadeamento entre nossas escolhas em relação, por exemplo, às tendências metodológicas que nos propusemos a utilizar, tais como, História da Matemática, Resolução de problemas e o software Geogebra, entre outras questões, e o desenvolvimento que de fato fizemos e que está implicitamente apresentado no decorrer do trabalho.

Nossa ideia é que fique aqui registrado um resumo de como foi o desenvolvimento do trabalho em relação às escolhas que tomamos e as apresentar as consequências dessas escolhas, faremos isso ainda que intuitivamente com o foco de justificar o porquê das escolhas de cada uma das metodologias.

Acreditamos que de certa forma as ideias desse capítulo já estão, ao menos em parte, presente no trabalho no decorrer seu desenvolvimento, porém não está organizada da maneira que desejamos, pois além de justificar os resultados durante o desenvolvimento, pensamos que é possível reunir essas ideias e sistematizar essas questões melhor.

A primeira questão que levantamos é o porquê utilizamos a História da Matemática como tendência metodológica neste trabalho, ainda nessa linha de raciocínio queremos justificar que de fato utilizamos essa tendência.

Entendemos que a História da Matemática se faz presente nesse trabalho a partir do momento em que escolhemos trabalhar com a área da superfície do lago Igapó II dividindo essa região em pequenos retângulos.

Afirmamos isso porque para trabalhar com a área da superfície do lago Igapó II necessariamente precisamos trabalhar com os conceitos do cálculo de áreas, pois é isso que buscamos no decorrer do nosso trabalho, explicar como esse conceito de área está presente em trabalhos de alguns dos grandes matemáticos desde a antiguidade.

Temos com esses fatos, uma das nossas justificativas do motivo de utilizarmos a História da Matemática, ou seja, nossa escolha, outro fator que destacamos é que no desenvolvimento da proposta vimos uma oportunidade de trabalhar com essa tendência, percebemos que era pertinente conciliar os conceitos abordados com essa tendência e decidimos assim fazer.

Destacamos que esse procedimento de divisão de uma região em vários retângulos foi o que primeiramente possibilitou o desenvolvimento dos conceitos de Integral, desde Arquimedes a Newton e Leibniz até como é estruturado hoje.

Entendemos que esse processo de utilizar esses fatos históricos possibilitando uma reconstrução dos conceitos intuitivos de Integral para a Educação Básica é trabalhar com a tendência metodológica História da Matemática, justificando então o porquê desta tendência estar presente nessa proposta.

A História da Matemática permitiu a contextualização sobre o desenvolvimento do cálculo de áreas em figuras planas. Primeiro, destacamos como os egípcios iniciaram esse procedimento através das demarcações das terras, também apresentamos os principais trabalhos sobre área contidos na obra Elementos, destacamos os trabalhos de Arquimedes, em especial a obra Quadratura da Parábola, na qual ele a realiza pelo método da exaustão, conceito este tido como um fundamento para o posterior desenvolvimento do Cálculo, nesse caso já nos referimos ao Cálculo Integral e também Cálculo Diferencial atribuído principalmente a Newton e Leibniz, autores que também consideramos muito importantes, por este motivo também apresentamos um recorte sobre seus trabalhos relacionados ao tema de área, entendemos que através desses recortes apresentamos um panorama geral sobre o conceito da área através da metodologia História da Matemática.

Como um segundo ponto, trazemos o porquê de utilizarmos a Resolução de Problemas como tendência metodológica.

Escolhemos esta estratégia devido às possibilidades que a mesma apresenta no desenvolvimento das atividades, tais como, oportunidade de discussão e reflexão dos alunos sobre os problemas a serem resolvidos, os alunos passam a elaborar estratégias de resoluções para os problemas, escape do apego às regras, entre outras.

Também destacamos as atitudes do professor frente a esta tendência. Ressaltamos que o professor tem papel fundamental nesse processo, um dos pontos que consideramos muito importante são as atitudes, ou seja, as atitudes do professor frente a esta estratégia são determinantes nesse processo e no desenvolvimento das atividades, ressaltamos que as atitudes do professor devem ser coerentes com os propósitos dessa tendência e destacamos algumas dessas atitudes como, por exemplo, perguntas pertinentes, deixar o aluno explorar suas próprias intuições, considerar o pensamento e as resoluções dos alunos, sistematizar os conteúdos a partir das resoluções dos próprios alunos a apresentar para todos, entre outras.

Finalmente, ainda sobre as tendências/metodologias utilizadas, cabe comentar o porquê do uso do software Geogebra.

Optamos pela utilização desse software devido ao dinamismo que este apresenta e pode possibilitar aos alunos, proporcionando assim, muitas alternativas e conjecturas que os alunos podem fazer no desenvolvimento das atividades sem mesmo ser necessário o professor estar direcionando, ao realizar uma tarefa acreditamos que o aluno pode resolver muitas questões e dúvidas além daquilo que está sendo explorado pelo professor, o aluno pode ter autonomia frente a esse software.

O Geogebra nos proporciona também o uso das tecnologias, destacamos que as tecnologias cada vez mais tem sido presente no cotidiano dos alunos e através disso temos a oportunidade de utilizar recursos que os alunos já utilizam e adaptar para o ambiente escolar, já que os alunos hoje de forma geral estão engajados nesse ambiente tecnológico, ressaltamos que é possível fazer o download de software, utilizá-los pela internet, enfim podemos utilizar da tecnologia como um recurso educacional, acreditamos também que este cada vez mais exigido e até mesmo necessário o professor se adaptar ao uso das tecnologias, pois devido aos tempos difíceis causados pela pandemia covid-19, o processo de aprendizagem ficou um tempo através do ensino remoto, concluímos então que de uma maneira outra a tecnologia está presente também na Educação Básica, então podemos escolher as melhores opções e recursos que temos disponíveis.

Resta ainda o questionamento final: Por que escolhemos o lago Igapó II?

Porque este lago faz parte do cotidiano do cidadão londrinense!

A representação, ainda que imaginária, do lago está presente na vida da comunidade de Londrina. É um caso peculiar, pois os cidadãos londrinenses sempre se fazem presentes em suas imediações, tanto para realização de exercícios, esportes ou lazer. Essa proposta pode ser interessante também para estudantes que, ao irem para a escola, passem por esse lago ao longo do caminho. Poderão observar que este lago pode estar inserido também na sua vida acadêmica, inclusive em uma aula de matemática, nas quais muitas vezes o aluno não encontra relações dos conteúdos com seu cotidiano. O trabalho com esse lago possibilita essa relação do conteúdo acadêmico/escolar com o cotidiano do aluno. Consideramos esse fator muito relevante para a realização desse trabalho.

Destacamos aqui também a impossibilidade de aplicação dessa atividade diretamente na sala de aula devido à pandemia da Covid-19. Certamente, teríamos muito a ganhar caso fosse possível realizar a aplicação desta atividade, porém essa proposta deixa essa possibilidade de aplicação.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Traremos agora outras observações a respeito daquilo que foi desenvolvido ao decorrer dessa proposta.

Um dos primeiros pensamentos para o desenvolvimento desta proposta surgiu com o desejo de relacionar algum conteúdo do ensino superior com a Educação Básica. Assim, a ideia de como os conceitos do Cálculo Integral foram desenvolvidos pela humanidade, sempre esteve presente em minhas indagações, dessa forma, decidimos então explorar os conceitos de área através da tendência História da Matemática. Logo consideramos a relação entre os conceitos da Educação Básica com os conceitos do Ensino Superior como um diferencial desta proposta.

Nesta proposta de trabalho não foi possível realizar as aplicações das tarefas devido ao momento de restrição e isolamento que nos encontramos devido à doença covid-19, em consequência disso, não apresentaremos a analise das tais, porém é possível fazer isso em um trabalho futuro.

Um aspecto importante que destacamos aqui é a possibilidade em relação às abordagens, defendemos que essas podem ser feitas de maneira histórica e contextualizada de modo que esse processo didático tenha o papel de incentivar o aluno a questionamentos em relação à origem e evolução dos conceitos matemáticos e ao mesmo tempo também sirva como suporte para que essas indagações e questionamentos que surgirem no decorrer das tarefas possam ser sanadas.

Essa proposta também busca conduzir o aluno a compreensão da ampliação dos conceitos de área, por meio da estratégia Resolução de Problemas, essa tendência também permite o aluno percorrer diferentes caminhos para chegar à resolução, eles podem partir de seus próprios conhecimentos até chegar à sistematização dos conceitos abordados a partir de suas próprias resoluções, conclui-se então que a sistematização se torna muito mais significativa a partir disso.

Acredita-se que esta proposta proporciona uma ampliação do horizonte de conhecimento dos alunos do Ensino Médio. Destacamos também que a atividade presente neste trabalho pode ser inserida nos programas tradicionais de ensino, pois contempla todos os requisitos da grade curricular, consideramos também que a atividade pode ser explorada de modo que sua realização seja de maneira intuitiva.

Acredita-se que se for dada mais atenção aos conceitos aqui abordados e propostos nessa fase de ensino, ou seja, na Educação Básica, possivelmente teremos uma melhoria significativa no sentido de superar as dificuldades que muito se apresenta em relação a esses conceitos no nível superior, pois sabemos que o índice de reprovação nessas disciplinas infelizmente é grande.

Concluímos também que essa proposta de explorar os conceitos intuitivos do cálculo integral pode ser uma estratégia de ensino e aprendizagem que em muito pode contribuir para o ensino de matemática, acreditamos que essa ideia intuitiva também pode tornar esse ensino um pouco mais próximo do entendimento e da realidade dos estudantes.

Concluímos então que é possível abordar os conteúdos no Ensino Superior na Educação Básica, acreditamos que através da ideia intuitiva dos conceitos pode ser o caminho a percorrer e ainda até sistematizar os conteúdos com um rigor maior.

Acreditamos também que o simples fato de considerar a possibilidade de trabalhar tais conceitos nessa fase de ensino já se supera um grande obstáculo em relação às dificuldades do ensino de matemática, considerar essa possibilidade já é um passo, ainda que pequeno, de um caminho que ainda temos a percorrer na busca e melhoria do ensino de Matemática, rendimento e compreensão dos estudantes em relação a esse conceito, nesse sentido consideramos todos os níveis.

Por fim, destaco o quanto foi significativo para mim à realização desta dissertação, sem dúvidas me levou a um nível maior de maturidade e considero além dos aspectos em relação ao professor e ao ensino, certamente me amadureceu como pessoa e me impactará para o resto da vida.

Através desta dissertação pude perceber o quanto podemos fazer como professor em relação ao ensino, ou mesmo ainda tentar fazer, percebi que é possível sim fazer melhor, seja por estratégias escolhidas, por abordagens diferenciadas, o que levarei daqui por diante é que sempre que for trabalhar com algo, mesmo que não for lecionando, me questionarei a respeito do que posso fazer de diferente ou fazer melhor, quais contribuições eu posso apresentar para a realização de determinadas tarefas, acredito que sempre há a possibilidade de nos superarmos.

NOTAS

1. INTRODUÇÃO

2. Contextualização sobre a história do cálculo de área ao longo do tempo

1. Neste capítulo foi utilizada a tradução brasileira de “Os Elementos”, obra atribuída a Euclides e traduzida por Irineu Bicudo.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas. **Associando o Computador à Resolução de Problemas: Análise de uma Experiência**, 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituo de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ALVARENGA, Mario Lopes. **O método de exaustão e sua contribuição para o desenvolvimento do conhecimento matemático**. Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2006. Disponível em: https://hugepdf.com/download/mauro-lopes-alvarenga-universidade-catolica-de-brasilia_pdf Acesso em: 15 set. 2020.

ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte.** 6 ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ASSIS, André Koch Torres. **Arquimedes, o centro da gravidade e a lei da alavanca.** Apeiron Montreal. C. Roy Keys Inc. Montreal, primeira edição, 2008, disponível em: https://www.ifi.unicamp.br/~assis/Arquimedes.pdf Acesso em 10 nov. 2020.

AVILA, G. **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau.** In: Revista do Professor de Matemática, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

AVILA, G. **Limites e Derivadas no Ensino Médio?** In: Revista do Professor de Matemática, n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.37.

BARDI, Jason Socrates. **A Guerra do Cálculo.** Rio de Janeiro: Record, 2008

BARON, Margaret E. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.** A Matemática Grega, Brasília, Universidade de Brasília, 1985, unidade 1.

BARON, Margaret E. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.** Indivisíveis e Infinitésimos, Universidade de Brasília, 1985, unidade 2.

BARON, Margaret E.; BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.** Newton e Leibniz, Brasília, Universidade de Brasília, 1985, unidade 3.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 2° ed. Belo Horizonte: Autentica, 2001.

BOYER, Carl B. **Cálculo - tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.** São Paulo: Atual Editora Ltda, 1995. v. 6.

BOS, H. J. M.. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.** O Cálculo no século XVIII: Fundamentos, Brasília, Universidade de Brasília, 1985, unidade 4.

BRASIL, **Ministério da Educação e do Desporto.** Parâmetros Curriculares Nacionais. SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio** – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

CARVALHO, A. M. F. T.; CARVALHO, T. O.. **'1/x é contínua?': Laços entre Educação Matemática, Psicanálise e hipermodernidade.** In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), 2006, Águas de Lindóia. III SIPEM, 2006.

CORREA, Iran Carlos Stalliviere. **A história da agrimensura.** A Mira. Porto Alegre, 2006. Disponível em: https://www.amiranet.com.br/artigo/a-historia-da-agrimensura-16 Acesso em: 05/03/2021.

EUCLIDES, **Os Elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4ª ed. São Paulo: Atlas, 2002.

LIMA, Renan; PAVANELO, Elisangela. **Sala de Aula Invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I.** Scielo – Scientific Electronic Library Online, Agosto, 2017**.** Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/czkXrB369jBLfrHYGLV4sbb/?lang=pt Acesso em 20 dez. 2020.

MACHADO, Nílson José. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: possível e necessário.** São Paulo: USP, 2008. Disponível em http://www.nilsonmachado.net/sema200 80311.pdf Acesso em 08 ago. 2021.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

MIORIM, Maria A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MOLON, Jaqueline; FIGUEIREDO, Edson Sidney. **Cálculo no Ensino Médio: Uma abordagem possível e necessária com auxílio do Software GeoGebra.** Ciência e Natura. Santa Maria, v. 37, Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 156-178, 2015. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/viewFile/14523/pdf Acesso em: 10/02/2021.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** BOLEMA- Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v.25, n.41, p.73-98, 2011.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Medio.** Curitiba: SEED, 2008.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná**. Secretaria de Estado da Educação do Paraná (SEED): Curitiba, 2008.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN). Parte III: **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, p. 43, 2000.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica,** In: MACHADO, N.; CUNHA, M. (org). Linguagem, Conhecimento, Ação – ensaios epistemologia e didática. Escrituras: São Paulo, 2003. Disponível em: https://www.nilsonjosemachado.net/lca19.pdf Acesso em 20 mar. 2021.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana, PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática.** SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

SANTOS, R. M.; BORGES NETO, H. **Avaliação do desempenho no processo de ensino-aprendizagem de cálculo diferencial e integral I (o caso da UFC)** [1993]. Acesso em: 15 out. 2020. http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/artigos/artigo-avaliacao-do-desempenho-no-processo-de-ensino-aprendizagem.pdf

SBM. Paolo Piccione. Sociedade Brasileira de Matemática. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.** Rio de Janeiro, 2020.

SILVA, Eliane Siviero da. **História da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: uma proposta para o ensino de sistemas de numeração.** GD5° – História da Matemática e Cultura, 2015.

SILVA, Eliane Siviero da; TRIVIZOLI, Lucieli M.. **Potencialidades da história da matemática em uma atividade sobre sistemas de numeração para os anos iniciais do ensino fundamental,** In: EPREM, Encontro Paranaense de Educação Matemática, XIV. Cascavel, 2017.

SILVA, Benedito Antonio da. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do cálculo. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo, v. 13, n. 3, pp. 393-413, 2011. Disponível em: file:///C:/Users/User/Desktop/Regi/calculo%20bas..pdf Acesso em: 22/02/2021.

SMOLE, K.S. e DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas.** Porto Alegre: Editora Artmed, 2001.

TORRES, Terezinha Ione Martins; GIRAFFA, Lucia Maria Martins. **O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE.** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. UFSC, V4.1, p.18-25,: 2009.Acesso em 15 nov. 2020.
file:///C:/Users/User/Desktop/Regi/13057-Texto%20do%20Artigo-40283-1-10-20100329.pdf

ZUIN, Elenice de Souza Lodron, Cálculo, uma abordagem histórica. In: SILVA, Benedito Antônio; ZUIN, Elenice de Souza Lodron; LAUDRES, João Bosco (org); LACHINI, Jonas (org); PINTO, Márcia Maria Fusaro; FROTA, Maria Clara Rezende; IGLIORI, Sônia Barbosa Camargo. **Educação Matemática: a prática sob o olhar de professores de cálculo.** Belo Horizonte- MG: Fumart, 2001. P. 13-38.

.