Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Formação de Professores

Veriano Catinin de Souza

A inserção da ideia intuitiva de infinitesimal no ensino médio a partir de sua construção histórica

São Gonçalo/RJ
2021

Veriano Catinin de Souza

A inserção da ideia intuitiva de infinitesimal no ensino médio a partir de sua construção histórica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr Abel Garcia Lozano

São Gonçalo/RJ

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

D979 Catinin de Souza, Veriano

A inserção da ideia intuitiva de infinitesimal no ensino médio a partir de sua construção histórica / Veriano Catinin de Souza. – São Gonçalo/RJ, 2021-

89 f.

Orientador: Prof. Dr Abel Garcia Lozano

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores, Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, 2021.

1. Infinitesimal.. 2. História do Cálculo.. 3. Ensino de Matemática.. I. Prof. Dr Abel Garcia Lozano. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Faculdade de Formação de Professores. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Assinatura Data

Veriano Catinin de Souza

A inserção da ideia intuitiva de infinitesimal no ensino médio a partir de sua construção histórica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em dd de mm de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr Abel Garcia Lozano (Orientador)
Unidade – UERJ

Prof^{a}. Dr^{a}. Clicia Valladares
Faculdade de Formação de Professores - UERJ

Prof^{a}. Dr^{a}. Eline Flores Victer
PPGEC - Unigranrio

São Gonçalo/RJ

2021

DEDICATÓRIA

À minha família, aos meus alunos e amigos que estiveram presentes nesta longa jornada de minha formação.

AGRADECIMENTOS

A Deus, criador e criativo, que nos permite buscar sentido para nossa existência, nos dando o impulso para investigar os padrões de seus pensamentos.

Aos meus familiares e amigos que sempre acreditaram que eu podia ir sempre um pouco mais do que já tinha alcançado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Abel Garcia Lozano que aceitou o desafio num tempo de pandemia.

Aos professores do Profmat/UERJ/FFP: Profª. Clicia, Profª. Marcele, Profª. Priscila, Profª. Rosa, Prof. Abel, Prof. Cláudio, Prof. Fábio e o Prof. Teles, muito obrigado.

Aos meus colegas de Profmat/UERJ/FFP, por dividirem comigo um ambiente agradável de aprendizagem.

Aos meus colegas de profissão pelos incentivos e os alunos que participaram de maneira informal da concepção das atividades propostas.

A SBM/Profmat e a UERJ/FFP, pelo oferecimento deste curso.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Muito obrigado!!!

Se o continuum e ou não formado de infinitesimais, essa parece a mais excêntrica das questões, e para nós pode ser difícil imaginar as paixões que ela desencadeou. No entanto, quando a luta foi travada, no século XVII, os combatentes de ambos os lados acreditavam que a resposta podia moldar cada faceta da vida no mundo moderno - que então começava a engatinhar. Eles estavam certos: quando a poeira baixou, os defensores dos infinitesimais haviam vencido, seus inimigos estavam derrotados. E o mundo nunca mais foi o mesmo.

(ALEXANDER, 2016, p.325)

RESUMO

CATININ DE SOUZA, V *A inserção da ideia intuitiva de infinitesimal no ensino médio a partir de sua construção histórica.* 2021. 89 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores) – Faculdade de Formação de Professores , Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo/RJ, 2021.

O cenário educacional brasileiro tem sido desafiante para o ensino da matemática. As avaliações mostram uma defasagem entre os conteúdos prescritos e aprendizagem dos alunos em matemática, o que traz consequências para aqueles que ingressam na universidade. Considerando essa realidade desafiante, a presente pesquisa apresenta uma alternativa a introdução da ideia de infinitesimal no ensino da matemática da educação básica e aponta caminhos que possam alicerçar e ampliar os conhecimentos dos alunos do ensino médio. O desenvolvimento da pesquisa tem como base uma análise bibliográfica sobre a história das ideias intuitivas até o século XVII, os problemas fundamentais do Cálculo e os recursos metodológicos do ensino da área em questão. Tendo como referência a Base Nacional Comum Curricular, procuramos assim contribuir para busca de uma abordagem viável para introduzir a ideia de infinitesimal na educação básica. Propomos atividades relacionadas a esta pesquisa histórica para uso inserido nos conteúdos do ensino médio. A pesquisa proporcionou conhecer a gênese dos conceitos que fazem parte de um curso tradicional de Cálculo e elaborarmos atividades inseridas nos conteúdos de matemático do ensino médio.

Palavras-chave: Infinitesimal. História do Cálculo. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

CATININ DE SOUZA, V *The insertion of the intuitive idea of infinitesimal in high school based on its historical construction.* 2021. 89 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Faculdade de Formação de Professores) – Faculdade de Formação de Professores , Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo/RJ, 2021.

The Brazilian educational scenario has been challenging for mathematics teaching. Evaluations show a gap between the prescribed content and student learning in mathematics, which brings consequences for those who enter college. Considering this challenging reality, the present research presents an alternative to the introduction of the idea of infinitesimal in the teaching of mathematics in basic education and points out ways that can support and expand the knowledge of high school students. The development of the research is based on a bibliographic analysis of the history of intuitive ideas until the 17th century, the fundamental problems of Calculus and the methodological resources for teaching the area in question. Having as a reference the Common National Curricular Base, we try to contribute to the search for a viable approach to introduce the idea of infinitesimal in basic education. We propose activities related to this historical research for use inserted in the contents of high school. The research allowed us to know the genesis of the concepts that are part of a traditional Calculus course and to develop activities inserted in the mathematics contents of high school.

Keywords: Infinitesimals. The History of the Calculus. Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> Muito especialmente, a perfeição é como o limite assimptótico dos matemáticos: um ideal nomeável e de que nós podemos aproximar eternamente, mas sem nunca o atingir. *(GUILLEN, 1987, p.32)*

Historicamente o Cálculo[1] está relacionado ao estudo de situações que envolvem descrição e mensuração de variações, movimentos e processos de somas. Com fatiamento em pequenos retângulos podemos calcular através de uma soma a área de segmentos parabólicos, por exemplo. A inclinação da reta tangente a uma curva num ponto informa sobre a taxa de variação instantânea no ponto considerado (BARON, 1985). O Cálculo oferece ferramentas eficazes para lidar com problemas que a matemática elementar não possui.

O Ensino de Cálculo antes da universidade é uma proposta que data historicamente do início da Republica no Brasil. A reforma educacional de Benjamin Constant de 1890 prescrevia o seu ensino como base para o estudo de Mecânica[2] e não apenas como propedêutico. Reformas posteriores confirmaram a presença do tema até os anos sessenta. Atualmente, a BNCC[3] não destaca o Cálculo como um conteúdo específico a ser apresentado na educação básica, mas o documento fala, por exemplo, de variação de área e perímetro (EM13MAT506).

A motivação para realizar essa pesquisa tem origem em temas abordados em diversas disciplinas do Profmat. Todas as disciplinas buscaram fundamentar os conhecimentos necessários para o ensino da matemática. Nessa perspectiva pensamos em usar noções intuitivas de Cálculo, a partir dos infinitésimos, para colocar o aluno do ensino médio diante de algumas questões que só seriam abordadas nos cursos formalizados do ensino superior, com isto buscaremos oferecer um fundamento acessível para o aluno desse segmento. Para isto elegemos algumas questões como princípio norteador desse trabalho. O cálculo e expansão de uma raiz quadrada, a obtenção do valor de pi (π), a variação instantânea de uma função num ponto, a área abaixo do gráfico de uma função contínua num intervalo determinado e um exemplo de cálculo de volume de revolução. Todos construídos a partir da ideia intuitiva de infinitesimal e tendo como suporte de visualização

[1] Vamos usar a palavra 'Cálculo', começando com letra maiúscula, para designar o Cálculo Diferencial e Integral

[2] "Calculo differencial o integral, limitado ao conhecimento das theorias rigorosamente indispensaveis ao estudo da mecânica geral propriamente dita."(DECRETO N.981 - DE 8 DE NOVEMBRO DE 1890.)

[3] Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017)

os softwares: GeoGebra e LaTeX/TikZ[4] .

No contexto do ensino de matemática e do aprendizado dos conteúdos repassados, faz-se necessário, portanto, explorar o raciocínio intuitivo e meios de auxílio para despertar o interesse do estudante. Nosso intuito é recorrer à história do Cálculo (ver capítulo 3 e o apêndice A) como fonte inspiradora para elaborarmos atividades relacionadas aos conteúdos de matemática do ensino médio. Sendo assim, vamos investigar a viabilidade de elaborarmos um conjuntos de situações problema da história do infinitesimal com vista a favorecer o envolvimento do aluno no acesso ao significado de conceitos que dependem da ideia[5] do infinitamente pequeno.

Na experiência como docente observamos que mais do que simplesmente repassar os conteúdos é necessário buscar estratégias que possam promover a reflexão dos estudantes, a interdisciplinaridade, minimizando assim o aspecto mecânico que acompanha as atividades rotineiras das aulas da educação básica. Nas recomendações de ÁVILA (2006) para o ensino do Cálculo no ensino médio ele prescreve que:

> vale a pena falar em acréscimos e decréscimos das variáveis, familiarizando o aluno com a notação Δx (delta x) e Δy (delta y), e com o fato de que o declive da reta é y/x. Vários exemplos concretos ajudam nessa familiarização, inclusive com valores positivos e negativos desses acréscimos. (ÁVILA, 2006, p.31)

Basicamente é assim que pretendemos tratar a inserção intuitiva da ideia do infinitamente pequeno na matemática da Educação Básica. Considerando pequenas variações e buscando compreender as suas implicações.

Nos últimos anos muitas pesquisas foram publicadas sobre o ensino de cálculo (ver apêndice C). No trabalho de SILVA (2015) temos uma apresentação sobre o Método de Arquimedes. Já SANTOS (2015), aponta para a inserção de conceitos básicos de Cálculo no ensino médio, constituindo numa inspiração para a nossa abordagem. Em NETO (2019) encontramos o indicativo da compatibilidade do Cálculo com a matemática da BNCC, mas o seu questionamento é de como ensina-lo.

Diante da diversidade das abordagens sobre propostas de ensino de Cálculo na educação básica, resolvemos direcionar a presente pesquisa para situações problema que possam ser solucionadas através da aplicação da ideia intuitiva de infinitesimal e com o suporte do GeoGebra, um software de matemática dinâmica. O nosso foco é esboçar um caminho que viabilize sua inserção nos conteúdos estudados no ensino médio. Não inten-

[4] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, desenvolvido pelo Austríaco Ph.D. Markus Hohenwarter no ano de 2002. O TikZ é uma importante ferramenta para criar elementos gráficos LaTeX, inclusive dinâmicos quando associado ao pacote animate.

[5] Para Descartes (1595 - 1650) ideia é o objeto interno do pensamento em geral. Nesse sentido, afirma que por ideia, se entende 'a forma de um pensamento'(...). Já para Dewey (1859 - 1952), ideia é uma possibilidade, acima de tudo, uma antecipação de alguma coisa que pode acontecer. (ABBAGNANO, 2000, p.527 e 528)

cionamos propor um Pré-Cálculo para este segmento, nem estudar conceitos formalizados de Cálculo. Nosso ponto de partida é um percurso histórico da ideia de infinitesimal da antiguidade até o século XVII. Neste percurso selecionamos situações problema que envolvem o uso de conceitos iniciais de aproximações, variações, áreas e volumes, tratados de forma intuitiva e sempre que possível representados com o auxílio de tecnologias digitais. O uso dessas ferramentas digitais visa despertar o envolvimento dos discentes nas atividades propostas, viabilizando resultados e produzindo representações gráficas.

A pesquisa será realizada através de um levantamento bibliográfico de obras de Cálculo Diferencial e Integral, sua história e o seu ensino. É também propósito a realização de oficinas com alunos de escolas públicas com a finalidade de observar o impacto efetivo da proposta de inserção da ideia intuitiva de infinitesimal no ensino médio.

Esta dissertação está estruturada em três capítulos. No primeiro buscamos as raízes do pensamento infinitesimal na antiguidade e na idade média. No segundo apresentamos alguns personagens que usaram os infinitesimais como ferramenta de raciocínio para resolver problemas e finalizamos o capítulo descrevendo de forma resumida a história do Cálculo no Brasil. Os capítulos um e dois foram decisivos na formulação das atividades propostas no capítulo três. No último capítulo, apresentamos e comentamos as atividades, selecionadas do percurso histórico, da antiguidade até o século XVII. Em última instância, o que buscamos é apresentar os infinitesimais muito mais como um método em ação [6] para resolver problema do como conteúdo específico[7].

---

[6] Considerando a afirmação de Kolmogorov: *"El nombre 'análisis infinitesimal' no dice nada sobre el objeto de estudio, sino que enfatiza el método. Se trata del método matemático especial de los infinitésimos o, en forma moderna, de los limites."(KOLMOGOROV, 1976, p.92)*
[Numa tradução livre: "*O nome 'análise infinitesimal' nada diz sobre o objeto de estudo, mas enfatiza o método. É o método matemático especial dos infinitesimais ou, na forma moderna, dos limites.*"]

[7] Mais recentemente, "Na década de 1950, o lógico e matemático aplicado americano Abraham Robinson utilizou técnicas da teoria dos modelos para formular uma teoria rigorosa de "infinitesimais", disponibilizando, assim, um meio para o desenvolvimento do Cálculo muito diferente do que havia sido produzido no século XIX. (DEVLIN, 2002, p.70).

1 AS RAÍZES HISTÓRICAS DA IDEIA DE INFINITESIMAL

> *Hay que recordar que el sentido de las cosas se nos escapa, que desborda sin cesar el presente. La comprensión de un fenómeno no puede ser completa sin una vuelta a los orígenes, a las ideas iniciales. Así el historiador se esfuerza por captar, en toda su complejidad cambiante, el pasado del hombre y de las sociedades humanas.*[8] *(COLLETTE, 1986, p.1)*

Neste capítulo, serão apresentados momentos da história da matemática que envolvem a ideia de infinitésimos. Começando nas primeiras civilizações da antiguidade, passando pela época da filosofia grega e por último o período da idade média. Com isto queremos resgatar as raízes da ideia de infinitesimal que irá se desenvolver de forma ampla no século XVII. Desse percurso histórico desejamos resgatar procedimentos que irão transformar-se em algumas atividades para inserir a ideia de infinitesimal no ensino médio.

É comum pensarmos que o Cálculo[9] infinitesimal[10] foi inventado pelos dois grandes matemáticos do século XVII, Newton e Leibniz, mas "na realidade, o cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz" (COURANT, 2000, p.481). Seus primórdios datam de alguns séculos antes de Cristo. Outra impressão comum é a forma ordenada como os conteúdos geralmente são estudados: limite, derivada e integral. O desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal ocorreu em ordem inversa a que encontramos nos textos e cursos dessa disciplina: primeiro surgiu a integração e depois a derivação e por último a formalização do conceito de limite.

Esta busca histórica não está dissociada das questões epistemológicas envolvidas no desenvolvimento das ideias do Cálculo ao longo dos séculos. No livro História do Cálculo, BOYER (1993) afirma que "é uma das ironias da história, então, que o termo 'cálculo' tenha vindo a se ligar firmemente a um ramos da matemática que exige o mais alto grau de sutileza e sofisticação de pensamento"(BOYER, 1993, p.1). Para HELLMAN

---

[8] Deve-se lembrar que o significado das coisas nos escapa, que transborda constantemente do presente. A compreensão de um fenômeno não pode ser completa sem um retorno às origens, às ideias iniciais. Assim, o historiador se esforça para capturar, em toda a sua complexidade mutável, o passado do homem e das sociedades humanas.(Tradução livre)

[9] A palavra cálculo tem em sua origem a conotação de fazer contas por meio de pedrinhas. No francês ela está presente desde o século XV. Etimologicamente refere-se as primitivas formas de realizar operações com pedras e também com o ábaco de colunas. No latim, *calculus* é diminutivo de *calx* que significa pedra.(BOYER, 1993, p.1)

[10] o cálculo infinitesimal é o estudo das variações das funções que estão sujeitas as variações infinitamente pequenas. L'Hôpital, em 1696, defini diferencial de uma quantidade variável como: "A parte infinitamente pequena pela qual uma quantidade variável aumenta ou diminui continuamente chama-se diferencial daquela quantidade". (BARON, 1985, apud, p.7 Vol.4)

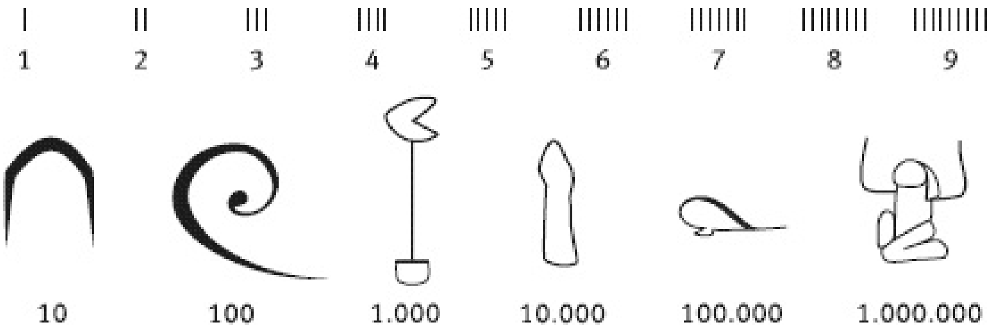
(1999, p.63), as pedrinhas cresceram até se tornarem uma muralha que os estudantes têm de romper na maioria das ciências. A procura pela concepção da ideia de infinitesimal necessita considerar a interseção entre a história, a filosofia e matemática.

1.1 Frações no Egito Antigo

Os egípcios e os mesopotâmicos formaram as duas civilizações mais antigas que nos legaram diversos documentos de conteúdos matemáticos. No dizer de ROQUE (2012b) "às duas civilizações antigas mais conhecidas que possuíam registros escritos"(p.37). Dos primeiros, que habitaram as margens do rio Nilo, temos os papiros e as inscrições em monumentos. Já os mesopotâmicos, nos tabletes feito em barro, perpetuaram sua escrita cuneiforme desenvolvida e usada na região entre os rios Tigre e Eufrates.

A civilização das margens do rio Nilo, usou os hieróglifos em sua escrita e matemática no terceiro milênio antes de Cristo. Na figura 1, o traço, calcanhar, o rolo de corda, a flor de lótus, o dedo dobrado, o girino e um homem ajoelhado indicavam respectivamente os valores 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 e 1000000. Como observamos, o sistema de numeração era decimal. Os números inteiros entre as potências de dez eram obtidos por adições potências de dez menores. Por exemplo: 132 está compreendido entre duas potências de dez, 100 e 1000, logo $132 = 100 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1$.

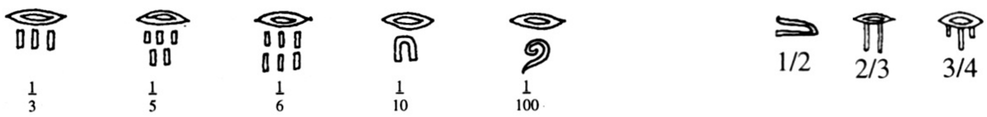
Figura 1 - Hieróglifos do sistema decimal egípcio



Fonte: ROQUE, 2012 p.73

Nos papiros egípcios é possível observar que eles usavam preferencialmente frações de numerador 1, usando um hieróglifo em forma de boca sobre o número correspondente ao denominador, conforme a figura 2.

Figura 2 - Algumas frações escritas em hieróglifos



Fonte: IFRAH, 1997 p. 349

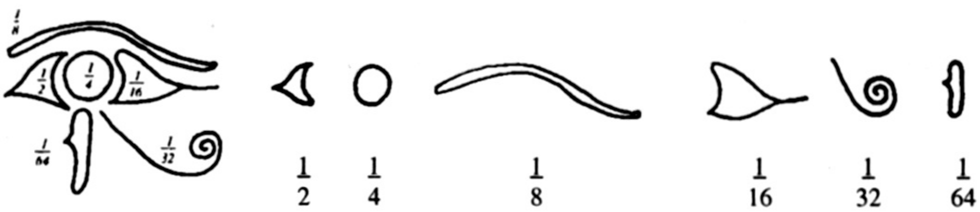
A representação de uma fração de numerador diferente de 1 era feita por adições de frações com numerador unitário. Para algumas outras frações, como $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, usavam-se hieróglifos especiais.

Quando se tratava de parte de quantidade de uma produção agrícola, segundo IFRAH (1997) os escribas utilizavam

> para as medidas de capacidade (tanto para os cereais quanto para cítricos ou líquidos), (...) uma curiosa notação, (..) permitindo indicar as frações do héqat (unidade de medida das capacidades valendo, segundo a estimativa tradicional dada por G. Lefebvre, 4 litros 785 aproximadamente[11]). Essa notação empregava as diferentes partes do olho fardado do deus-falcão Hórus. (IFRAH, 1997, p. 349)

Segundo a lenda, num confronto com deus Set, Hórus teve o seu olho arrancado, cortado em seis pedaços e espalhado pelo Egito, veja a figura 3. A representação fracionária desses pedaços tem a forma $1/2^n$, para $1 \leq n \leq 6$, e foi usada para indicar as frações do héquat.

Figura 3 - Frações do olho de Hórus



Fonte: IFRAH, 1997 p.349

Realizando a soma das seis frações $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64})$ o resultado não é igual a 1, o olho completo de Horus. Parece inevitável pensar que para torná-lo completo[12] (igual a 1) precisamos continuar a soma dos termos, gerando assim uma série infinita: $1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+1/128+1/256+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$.

1.2 Raiz Quadrada na Mesopotâmia

A matemática dos babilônios, diferente da matemática egípcia, usava o sistema de numeração de base sessenta e posicional. BOYER (2012) afirma que eles nos legaram a ideia de algoritmo para aproximar medidas e processos infinitos:

> Os matemáticos mesopotâmios foram hábeis no desenvolvimento de processos algorítmicos, entre os quais um para extrair a raiz quadrada, frequentemente atribuído a homens que viveram bem mais tarde. Às vezes, este é atribuído ao sábio grego Arquitas (428-365 a.C.) ou a Heron de

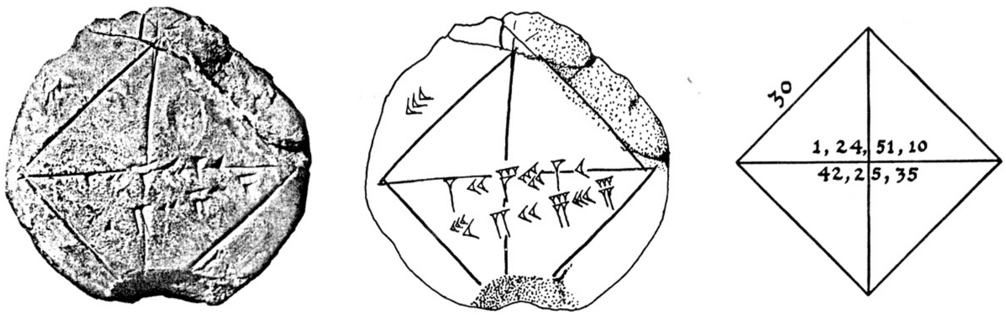
[11] Arredondando, 4,8 litros

[12] Se S é soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ então $2.S=\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{16}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1+S$. Portanto $S=1$.

> Alexandria (100 d.C. aproximadamente); ocasionalmente é chamado algoritmo de Newton. Esse processo babilônio é tão simples quanto eficiente. Seja $x = \sqrt{a}$ raiz quadrada desejada e seja a, uma primeira aproximação dessa raiz; seja b_1 uma segunda aproximação dada pela equação $b_1 = a/a_1$. Se a_1 é pequeno demais, b_1 é grande demais e vice-versa. Logo, a média aritmética $a_2 = 1/2(a_1 + b_1)$ é uma próxima aproximação plausível. Como a_2 é sempre grande demais, a seguinte, $b_2 = a/a_2$ será pequena demais e toma-se a média aritmética $a_3 = 1/2(a_2 + b_2)$ para obter um resultado ainda melhor; o processo pode ser continuado indefinidamente, (...) No algoritmo babilônio para raiz quadrada, acha-se um processo interativo que poderia ter levado os matemáticos da época a descobrir processos infinitos, mas eles não levaram adiante a pesquisa das implicações de tais problemas. (BOYER, 2012, p. 42)

Este algoritmo para aproximar uma raiz de um número racional é o que mais se aproxima do Cálculo Diferencial e Integral (BOYER, 1993, p.2). A sua descrição mais detalhada desse procedimento está no capítulo 3.

Figura 4 - Tablete Babilônico



Fonte: AABOE, 1984, p.35

A figura 4 mostra um tablete babilônico[13] que apresenta o valor da diagonal de um quadrado de lado 30, escrito em cuneiforme e a transliteração para o nosso sistema. Apresentamos a seguir esses números escritos no nosso sistema de numeração decimal:
$(30)_{60} = 30.60^0 = 30.1 = 30$
$(1;24,51,10)_{60} = 1.60^0 + 24.60^{-1} + 51.60^{-2} + 10.60^{-3} = 1 + 24/60 + 51/3600 + 10/216000 = 1,41421296\ldots$
$(42;25,35)_{60} = 42.60^0 + 25.60^{-1} + 35.60^{-2} = 42 + 25/60 + 35/3600 = 42,4263889\ldots$
Aplicando o teorema de Pitágoras a um quadrado de lado L a sua diagonal (d) apresenta a seguinte relação: $d^2 = L^2 + L^2 \Rightarrow d = L\sqrt{2}$, portanto se o lado é L=30 a diagonal $d = 30\sqrt{2} = 42,42640687\ldots$

[13] Com identificação YBC 7289 (Yale Babylonian Collection)

1.3 As Raízes Históricas dos Infinitesimais na Grécia Antiga

Politicamente, no período entre os séculos VI e IV a.C., época dos primeiros filósofos gregos, a “Grécia estava constituída por um conjunto de Estados (cidades) escravistas que levavam a cabo um intenso comércio, tanto entre si, como com outros Estados do Mediterrâneo” (RIBNIKOV, 1991, p. 15). Estas Cidades-Estados gregas eram muito diferentes das cidades mesopotâmicas e egípcias. Os primeiros filósofos e matemáticos têm seus nomes associados a uma dessas localidades: Tales de Mileto (c.624 - 546 a.C.), Pitágoras de Samos (c.570 - c.495 a.C.), Zenão de Eleia (c.490 - c.430 a.C.), Eudoxo de Cnido (c.408 - c.355 a.C.), são alguns exemplos.

O vocábulo Infinito tem sua origem remota no grego, *apeíron* ($\alpha\pi\epsilon\iota\rho\nu$), e no latim, *infinitum* (ABBAGNANO, 2000, p.562). A palavra grega *apeíron* é composta da negação (*a*) de limitado (*peras*), portanto significando aquilo que não é limitado, que é ilimitado. Na filosofia grega, a palavra *apeíron* ganha importância com Anaximandro de Mileto, quando este designa o arqué (o princípio fundamental da formação das coisas), como sendo o indeterminado, o ilimitado, o *apeíron.* Na matemática a concepção do infinito "elaborou dois conceitos diferentes: a) infinito potencial como limite de certas operações sobre as grandezas; b) infinito atual como uma espécie particular de grandeza."(ABBAGNANO, 2000, p.562).

Já o termo infinitésimo, do latim *infinitesimus*, é formado pelo radical *infinit* mais o sufixo *esimus*, que aproxima-se do substantivo português avo das frações. Infinitésimo corresponde a operação de dividir a unidade em infinitas partes, isto é $1/\infty$, obtendo uma quantidade infinitamente pequena[14]. Para ABBAGNANO infinitésimo é "uma grandeza que pode vir a ser menor que qualquer grandeza determinável, ou, em termos menos apropriados, uma grandeza tendente a zero[15]. Este conceito foi conhecido pelos gregos, que o empregaram com frequência; é pressuposto nas argumentações de Zenão de Eléia contra o movimento"(ABBAGNANO, 2000, p.562).

O primeiro período da matemática grega acompanhou as grandes questões da filosofia, isto é, responder qual era a essência das coisas, qual o princípio fundamental formador de tudo (o *arché*). Foi no ambiente das Cidades-Estado que a matemática grega surgiu. Esse momento inicial caracterizou-se por um certo grau de abstração, representando então uma transição da matemática intuitiva e empírica das primeiras civilizações para a matemática dedutiva da época de Euclides, Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) e Apolônio (262 a.C. - 194 a.C.). Questões como, por que os ângulos da base de um

[14] É oportuno lembrar que não é recomendado usar infinitésimo como "aquilo que é muito pequeno"(LALANDE, 1993, p.567)

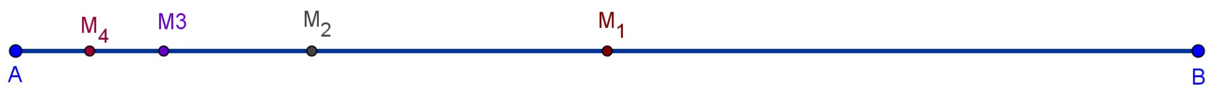
[15] Na afirmação de Anaxágoras: "com relação ao pequeno, não há mínimo, mas há sempre um menor, porque o que existe não pode ser anulado"(ABBAGNANO, 2000, p.562).

triângulo isósceles são iguais? e por que o diâmetro de um círculo divide o mesmo ao meio? foram formuladas pela primeira vez por Tales de Mileto (BOYER, 2012, p. 55). Foi a transição do 'como' do período empírico para o 'por que?' do método dedutivo (DIEUDONNÉ, 1990, p. 43). Historiadores da matemática como BOYER (1993, p.2-3) e EVES (2011, p.60) afirmam que as civilizações antigas tiveram que desenvolver cálculos aritméticos e de medida de grandezas por necessidades da vida cotidiana, mas somente os gregos pensaram em analisar os encadeamentos lógicos de tais processos e criaram assim um modo de pensar completamente novo (RIBNIKOV, 1991, p. 65).

Os Paradoxos de Zenão

Os primeiros problemas que a matemática grega teve que enfrentar, foram: a incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o seu lado e a impossibilidade de construir um contínuo mediante processos discretos ou no dizer de Kline (1972) "o problema da relação entre o discreto e o continuo foi posto em evidência"(KLINE, 1972, p.56). Hípias (460 - 400 a.C.) mostrou, para espanto dos matemáticos da época, que a diagonal do quadrado não pode ser comparada de forma exata com o seu lado. Zenão de Eleia (c.490 - c.430 a.C.), descendente da escola eleática, questionando a possibilidade do movimento, foi um dos primeiros a levantar uma série de questões sobre o infinito. Através dos paradoxos, Zenão revela as contradições que processos infinitos podem gerar. O paradoxo da dicotomia, diz que para percorrer um segmento de extremos A e B, primeiro precisa-se passar pelo seu ponto médio M_1. Para percorrer o segmento AM_1 é preciso alcançar o seu ponto médio M_2. Para percorrer AM_2, primeiro alcançar o seu ponto médio M_3, e assim sucessivamente[16], veja figura 5.

Figura 5 - Paradoxo da Dicotomia de Zenão de Eleia



Fonte: Construído com o GeoGebra

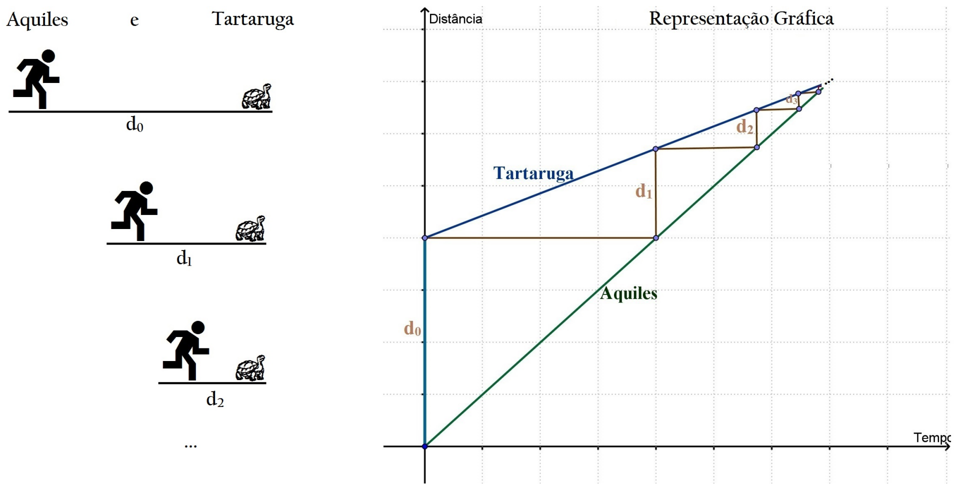
Portanto, não é possível iniciar o movimento para percorrer o segmento AB (figura 5), pois percorre-lo significa ultrapassar infinitos trechos em um tempo finito. Esta ideia não era modelada matematicamente pelos filósofos da época. Os gregos antigos não aceitavam que uma soma infinita de partes pudesse convergir para um valor finito.

No paradoxo de Aquiles, o corredor não consegue acompanhar a tartaruga que está a sua frente, pois quando ele chega na posição inicial da tartaruga, ela se deslocou para além de sua posição inicial (figura 6). Ao chegar na segunda posição da tartaruga, estará

[16] Se consideramos a distância AB igual a 1 o percurso a ser realizado é a soma dos termos da progressão geométrica: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ...$

mais à frente, e assim sucessivamente. Portanto ele nunca conseguirá acompanhá-la, ela sempre terá uma pequena vantagem em relação a Aquiles.

Figura 6 - Paradoxo Aquiles e Tartaruga de Zenão de Eleia



Fonte: Construído no GeoGebra/Paint

Os paradoxos atestam que a discussão filosófica sobre os processos infinitesimais surgiu na Grécia antiga e imersos nos debates sobre lógica e a realidade. Uma questão que foi inaugurada nessa época está relacionada às grandezas: elas são subdivididas indefinidamente ou são formadas por um grande número de partes indivisíveis. Se a filosofia não conseguiu dar conta do infinito, a matemática grega guarda evidências que problemas de Geometria forneceram a intuição necessária para se trabalhar com processos envolvendo uma sequência muito grande de etapas. É o caso do método da exaustão[17] de Eudoxo de Cnido, no século seguinte ao século de Zenão.

1.4 O Método da Exaustão

Foi com Eudoxo que a geometria de figuras curvilíneas (círculos, cone, etc.) tornou-se possível, isto é, "dada uma figura curvilínea A para determinar sua área a(A) se busca uma sucessão de polígonos P_1, P_2, P_3, P_4, ... , P_n, ... que aproximem progressivamente

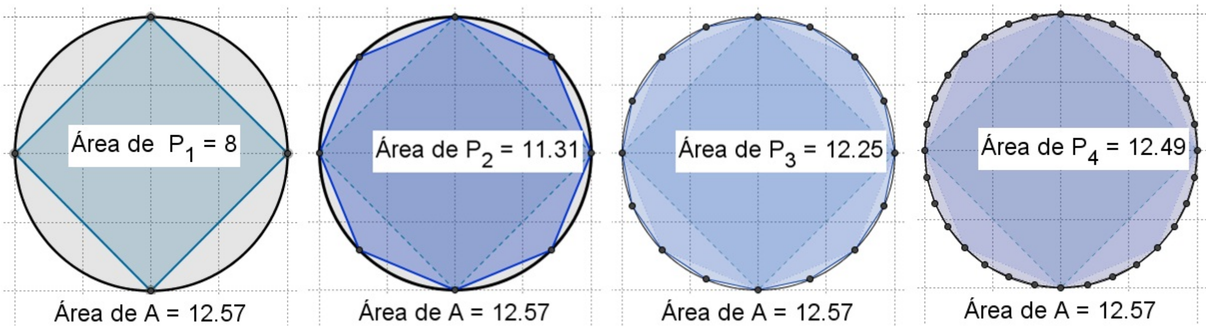
[17] No início do século vinte Amoroso Costa afirmava que: 'quanto à noção de limite, sua origem remonta às especulações geométricas de Eudoxo de Cnido, cujo método de exaustão, freqüentemente (sic) empregado por Arquimedes, é uma das raízes do cálculo infinitesimal na antiguidade. Os gregos já possuíam a concepção de curva como limite de uma sucessão infinita de polígonos. E essa idéia (sic) aparece de novo no Renascimento (...).
No Século XVI, Viète obtém a expressão da área de um círculo sob forma de produto infinito. Daí por diante, a idéia de limite se associa mais ou menos explicitamente ao desenvolvimento do algoritmo infinitesimal, desde os indivisíveis de Cavalieri até às fluxões de Newton e aos infinitamente pequenos de Leibniz."(COSTA, 1981, p.257). Apostol sintetiza ao afirmar que "gradualmente, o método de exaustão foi transformado no que agora chamamos de Cálculo Integral"(APOSTOL, 2001, p.4).

a área de A"(BRANDEMBERG, 2017, p.16). A figura 7 ilustra a aproximação da área do círculo A através dos polígonos regulares inscritos Pi, respectivamente: com quatro lados, oito lados, dezesseis lados e trinta e dois lados. A ideia ilustrada na figura 7 é consequência gráfica da seguinte proposição atribuída a Eudoxo:

> Se, de uma grandeza qualquer, subtrairmos uma parte não menor que sua metade e, se do resto novamente subtrai-se não menos que a sua metade e se esse processo de subtração for continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie prefixada. (BOYER, 2012, p.81)

Podemos entender o significado dessa proposição de forma intuitiva fazendo as diferenças entre a área do círculo $a(A)$ e as áreas dos polígonos $a(P_i)$ inscritos: $a(A) - a(P_i)$. Considerando o raio do círculo igual a 2, no primeiro círculo da figura 7 esta diferença é $a(A) - a(P_1) = 12,57 - 8 = 4,57$, no segundo círculo a diferença é $a(A) - a(P_2) = 12,57-11,31 = 1,26$, no terceiro círculo a diferença é $a(A)-a(P_3) = 12,57-12,25 = 0,32$, no quarto círculo a diferenças é $a(A)-a(P_4) = 12,57-12,49 = 0,08$. É possível observar que as diferença estão cada vez menores, intuitivamente podemos dizer que as diferenças estão se tornando infinitesimais, numa linguagem moderna dizemos que a área do círculo é o limite da área do polígono inscrito P_n, para n suficientemente grande[18] .

Figura 7 - Área do círculo aproximada por polígonos regulares inscritos



Fonte: Construído com o GeoGebra

As duas ideias de infinitos estão presentes: O infinitamente grande, quando aumentamos o número de lados do polígono inscrito, e o infinitamente pequeno, as diferenças tornam-se cada vez menores, tendem para zero. Para aplicar o método de exaustão é necessário conhecer a fórmula e a partir daí realizar a prova, "por si só, não se presta para a descoberta inicial do resultado. Quanto a esse aspecto, o método de exaustão assemelha-se muito ao princípio de indução matemática".(EVES, 2011, p.422)

A história da ideia de infinito na antiguidade clássica continuava desafiando as mentes mais sagazes do período. Na concepção de Dourado, "a complexidade deste conceito era tamanha que até mesmo Aristóteles(384-322 a.C.), que considerava o infinito potencial, afirmava não fazer sentido pensar na sua concretização como um todo completo,

[18] Mais detalhes sobre o método da exaustão aplicado a este problema conferir ASSIS, (2017) p.27-29.

ou seja, um infinito em ato" (DOURADO, 2017, p.5). Para Aristóteles não é possível a existência do infinito atual[19]. Ele negava sua existência física, mas lhe atribuía certa existência matemática, a existência de infinitos potencial (aquilo que pode ser, mas não é), como a sequência de números naturais, cada número é seguido de outro: $1, 2, 3, 4, ...$ Em SILVA (2007) encontramos que "segundo Aristóteles, aos matemáticos bastava a noção de infinito potencial" (p. 51). O infinito potencial da divisão que é obtido pela *potencialidade ilimitável de divisão*, pois sempre podemos encontrar algo além do total. Podemos dividir qualquer coisa que seja contínua sem parar. Para BOYER (2012) "a discussão aristotélica sobre o potencialmente e o realmente infinito na Aritmética e Aeometria influenciou muitos dos que, mais tarde, escreveram sobre fundamentos da matemática" (p.86).

Na época de Euclides de Alexandria ($\cong$ 325 a.C. - 265 a.C.) a matemática grega alcança o seu ápice. Ele nos legou Os Elementos, uma obra composta de 13 livros que tornou-se o modelo de sistema axiomático[20] do pensamento ocidental, expondo com clareza os teoremas e de forma rigorosa suas demonstrações. Os primeiros seis livros tratam da Geometria Plana; os três seguintes sobre teoria dos números; o livro X sobre os irracionais e os três livros restantes sobre Geometria Espacial. O método axiomático usado por Euclides tornara-se um instrumento da filosofia e da matemática séculos mais tarde.

Foi nesta obra, mais precisamente no livro IX e proposição 20, que Euclides provou que a sequência dos números primos[21] é infinita: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, ... Na linguagem euclidiana "os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos" (EUCLIDES, 2009, p.342), uma forma elegante de afirmar que eles são infinitos.

No livro IX e proposição 35, Euclides mostra que "Caso números, quantos quer que sejam, estejam em proporção continuada, e sejam subtraídos tanto do segundo quanto do último iguais ao primeiro, como o excesso do segundo estará para o primeiro, assim o excesso do último para todos os antes dele mesmo" (EUCLIDES, 2009, p.348). Proporção continuada corresponde ao que chamamos atualmente de progressão geométrica, assunto pertinente ao ensino médio. Sendo S a soma dos termos, a_1 o primeiro termo e o último a_{n+1}, então

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1.q - a_1}{a_1} = \frac{a_1.q^n - a_1}{S} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{a_1 - a_1.q^n}{1 - q}, \; para \; q \neq 1.$$

---

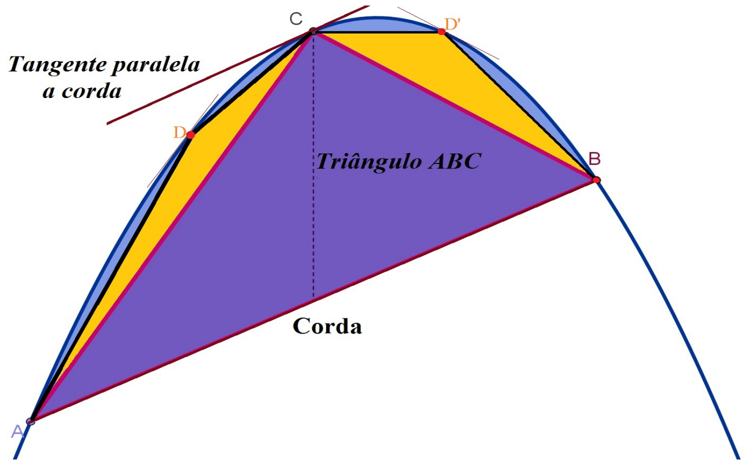
[19] Aquilo que é, isto é, considerando-o como um ente, no dizer ABBAGNANO (2000) é "como uma espécie particular de grandeza"(p.562) e "Cantor utilizou a teoria dos conjuntos como fundamento do conceito de infinito atual"(p.184).

[20] ...é um poderoso instrumento de generalização lógica (ABBAGNANO, 2000, p.103).

[21] No dizer de Euclides, é "um número primo é medido por uma unidade só" (EUCLIDES, 2009, p.269)

Os matemáticos da antiguidade, assim como os filósofos, se contentaram com o infinito em potência, não dando a devida atenção ao infinito em ato. Os primeiros passos na história dos infinitésimos foram dados e explorados por Arquimedes cerca de um século depois.

Figura 8 - A área do segmento parabólico é 4/3 da área do triângulo ABC



Fonte: Construído com o GeoGebra

Arquimedes de Siracusa, matemático, físico, engenheiro e inventor, utilizou a ideia de infinitésimo no cálculo de área e volumes de figuras geométricas. A forma desta ideia de Arquimedes já estava presente em Eudoxo, na escola platônica e em Euclides, o já utilizado método da exaustão (uma grandeza pode ser indefinidamente dividida). O uso extensivo do método da exaustão colocou Arquimedes muito próximo da concepção moderna de infinito na matemática e como o antecessor de Newton e Leibniz, um precursor do Cálculo Infinitesimal.

Um resultado[22] importante obtido por Arquimedes foi a determinar que a relação da área de um segmento parabólico [23] é 4/3 da área do triângulo máximo[24] ABC inscrito nesta região, figura 8. Para obter a quadratura (área) do segmento parabólico Arquimedes utilizou uma sequência de triângulos inscritos. Sua "ideia é construir figuras rectilíneas no interior do segmento parabólico cuja área total difira da do segmento por menos do que qualquer valor dado"(KATZ, 2010, p.144). Começando com o triângulo ABC inscrito no segmento parabólico, define-se dois outros triângulos, ACD e BCD', inscritos nos dois segmentos parabólicos determinados pelos dois lados, AC e BC, do triângulo inicial, figura 8. A área total desses dois triângulos é 1/4 da área do triângulo ABC. Os dois triângulos inscritos, ACD e BCD', determinam 4 novos segmentos cujos triângulos inscritos tem área total igual 1/4 da área dos dois triângulos inscritos, ACD e BCD'. O processo vai

[22] Para mais detalhe sobre este resultado pode-se consultar SILVA(2015)

[23] a região entre o segmento de reta $\overline{AB}$ e o arco de parábola $\widehat{ACB}$ da figura 8

[24] é o maior triângulo inscrito que se pode construir tomando como base a corda e a altura do segmento parabólico, distância entre a corda da parábola e a tangente paralela a corda.

se repetir para os próximos passos, gerando a soma:

$$Soma = Area_{ABC} + \frac{1}{4}.Area_{ABC} + \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.Area_{ABC} + ... + (\frac{1}{4})^{n-1}.Area_{ABC} + ... = \frac{4}{3}.Area_{ABC}$$

Outra contribuição de Arquimedes está relacionada a uma boa estimativa do número π. No dizer de EVES (2011)

> Estreitamente ligado ao problema da quadratura está o do cálculo de π, razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro (...) no Oriente antigo tomava-se frequentemente o número 3 como valor de π. Para a quadratura do círculo egípcia dada no papiro Rhind, temos $\pi = (4/3)^4 = 3,1604...$. Porém, a primeira tentativa científica de calcular π parece ter sido a de Arquimedes"(EVES, 2011, p.141).

O valor de π foi obtido por ele comparando o perímetro de pares de polígonos inscrito e circunscrito numa circunferência. Arquimedes concluiu que π está entre 223/71 e 22/7 (EVES, 2011, p.142).

1.5 Os Infinitesimais no Período Medieval

Como já foi mencionado, Aristóteles admitia o infinito potencial, mas não aceitava a sua concretização como um todo completo, um infinito em ato. O conceito de infinito como absoluto entrou no pensamento medieval através da filosofia cristã e com isto influenciou as ideias matemáticas desse período histórico. Com Agostinho no início e no final com Nicolau de Cusa e Tomás de Aquino, na Suma Teológica.

Agostinho (354 - 430) de Hipona, no segundo volume da obra Cidade de Deus (Civitas Dei), argumenta contra os que afirmam que nem a ciência de Deus é capaz de abarcar o infinito:

> Quanto aos que dizem que nem a ciência de Deus pode abarcar o infinito, só falta, para se afundarem na voragem da sua profunda impiedade, que tenham a ousadia de afirmar que Deus não conhece todos os números. Que eles são realmente infinitos - é absolutamente certo. Porque em qualquer número que julgues ter chegado ao fim, esse mesmo podes tu aumentá-lo, não digo acrescentando-lhe mais um, mas, por maior que seja e por enorme quantidade que expresse, pode, em razão da sua natureza e graças à ciência dos números, duplicar-se e até multiplicar-se. [...] Assim Deus não chegaria a conhecê-los todos devido à sua infinidade e a sua ciência apenas abarcaria uma certa quantidade de números ignorando o resto: Qual é o insensato capaz de sustentar uma afirmação destas? Eles não se atreverão a desprezar os números e a dizer que eles nada têm que ver com a ciência de Deus. Platão, que entre eles goza de grande autoridade, apresenta Deus a formar o mundo com números. E entre nós lê-se o que por Deus foi dito: Tudo dispuseste com medida, número e peso[25] . E a propósito diz o profeta: Produziu o século com

[25] Sabedoria de Salomão, capítulo 11, versículo 20.

> número [26] ; e o Salvador declara no Evangelho: Todos os nossos cabelos estão numerados [27] . Longe de nós, portanto, duvidar de que todo o número não é conhecido daquele de quem canta o salmo: Cuja inteligência não tem medida[28].
>
> A infinidade do número, embora não exista número algum infinito de números, não é, todavia, incompreensível Àquele cuja inteligência não tem número. Pois bem, se tudo o que a ciência abarca está definido e limitado pela compreensão do sábio, certamente que a infinidade é, de certa maneira inefável, finita para Deus porque não é incompreensível para a sua própria ciência. Por isso, se a infinidade dos números não pode ser infinita para a ciência de Deus que a contém, [...] A sua sabedoria, [...] compreende todas as coisas incompreensíveis com uma compreensão tão incompreensível [...]. (AGOSTINHO, 2000, p.1129)

Como podemos observar, Agostinho aceitava o infinito atual como a sequência dos números naturais na mente divina, mas para a mente humana é absolutamente certo que é potencial. Por maior que seja um número pensado podemos aumentá-lo, duplicando ou multiplicando. Ele afirma que é insensatez achar que Deus não conheceria esta infinidade de números. Conforme também observa STRUIK (1989, p.141): “ele aceitou toda a sequência de inteiros como um infinito atual e com uma linguagem tão especial que George Cantor, no século XIX, o coloca na linhagem da sua teoria dos números transfinitos” (STRUIK, 1989, p.141).

A filosofia de Agostinho, de influência platônica, reinou quase que exclusivamente durante boa parte da idade média. Só no meado do século XIII, quando Tomás de Aquino (1225 - 1274), propôs um sistema filosófico fundamentado numa releitura de Aristóteles, ocorreu uma mudança significativa. Para ele, Deus é a plenitude do ser, é único e infinito; já o universo é a multiplicidade do ser, como sombras, como imagens de Deus. Logo, o homem como ser criado, um ser finito, consegue compreender o ser infinito.

Apesar de toda a dificuldade herdada dos gregos para trabalhar com o infinito, o pensamento matemático medieval “tinha imaginação e precisão de pensamento, porém, faltava-lhes técnicas algébricas e geométricas” (BOYER, 2012, p.189). Estas limitações, no entanto, não impediram que um novo assunto fosse reintroduzido no ocidente: as séries infinitas, assunto essencial para o estabelecimento do Cálculo Diferencial e Integral no século XVII. Por volta de 1350, o matemático Richard Suiseth, da Universidade de Oxford, resolveu o seguinte problema que envolve infinito:

> Se durante a primeira metade de um intervalo de tempo dado, uma variação continua com uma certa intensidade, durante a quarta parte seguinte do intervalo continua com o dobro da intensidade, durante a oitava parte seguinte, com o triplo da intensidade e assim *ad infinitum*; então a intensidade média para o intervalo todo será a intensidade de

[26] Isaías, capítulo 40, versículo 26.

[27] Mateus, capítulo 10, versículo 30.

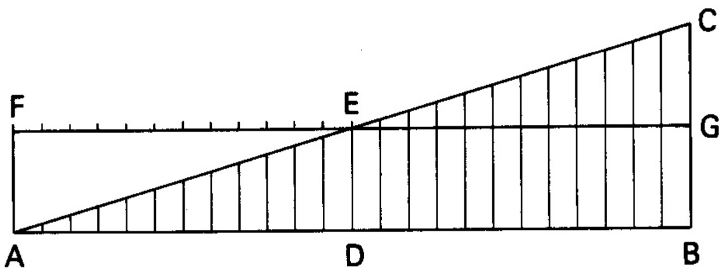
[28] Salmo, capítulo 147, versículo 5.

> variação durante o segundo subintervalo (ou, o dobro da intensidade inicial). (BOYER, 2012, p.189).

A solução desse problema gera a seguinte série: $1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + 5/32 + ... + n/2^n + ... = 2$, escrita na linguagem simbólica atual.

Na mesma época, Nicole Oresme (1323 - 1382), da Universidade de Paris, trabalhou com séries usando o processo gráfico, associadas a movimentos[29]. Isto permitiu quantificar a mudança e variação, provocando um "desvio na visão aristotélica" (BOYER, 1993, p. 8). Na figura 9 descreve um movimento com velocidade uniformemente disformes (segmentos verticais[30]), a partir do repouso, no intervalo de tempo AB. A distância percorrida no intervalo de tempo AB corresponde a área do triângulo ABC ou $S = AB.BC/2 = AB.DE$.

Figura 9 - Representação Gráfica (latitude x longitude)



Fonte: (BOYER, 1993, p.89)

O estudo e a descrição de movimentos são relevantes para o estudo de curvas, visto que elas podem ser definidas como o percurso de um ponto em movimento. Esses temas emergentes do final da idade média serão recorrentes no início da idade moderna.

Cerca de dois séculos após Tomás de Aquino, já no final da idade média, o filósofo alemão Nicolau de Cusa (1401 - 1464), propõe para o infinito qualitativo em ato, o máximo absoluto, Deus. Ele admite que necessitamos de imagens e símbolos para falar das coisas divinas, "já que não se nos entreabre outro caminho de acesso às coisas divinas senão mediante símbolos, poderemos usar mais vantajosamente sinais matemáticos, devido à sua inalterável certeza" (CUSA, 2002, p.64) . Em concordância com Platão, ele vê nas coisas sensíveis uma instabilidade, por isto, os signos matemáticos, por sua incorruptibilidade, são os melhores representantes para as coisas divinas.

Para Nicolau de Cusa, "quanto mais douto alguém for, tanto mais reconhecerá ser

[29] Oreme classificava seus tipos de variação conforme fossem uniformes (isto e, constantes) ou disformes (não constantes), e dividia o último tipo em variações uniformemente disformes e disformemente disformes. (BOYER, 1993, p. 9).

[30] Esta ideia vai ser usada por Galileu no início do século XVII. No dizer de BOYER (1993, p.10), "tanto Oresme como Galileu estavam fazendo uso noção de elementos geométricos, isto é, imaginavam as áreas do triângulo do retângulo formados de segmentos de reta verticais em quantidade indefinidamente grande".

ignorante" (CUSA, 2002, p.44), o conhecimento nos faz reconhecer o que desconhecemos. Para ele

> o intelecto, que não é a verdade, jamais compreende a verdade tão exatamente que ela não possa ser compreendida infinitamente com exatidão. O intelecto está para a verdade como o polígono inscrito num círculo. Quanto mais ângulos tiver, tanto mais semelhante há de ser ao círculo. Contudo, nunca será igual, embora se multipliquem os ângulos ao infinito, a não ser que se resolva na identidade com o círculo. (CUSA, 2002, p.44)

Usando objetos matemáticos - polígonos, círculos e ângulos, ele procura mostrar que a verdade exata é incompreensível, inatingível.

Da sua concepção de Universo, infinito em extensão, deduzia-se que não poderia possuir centro e que a Terra seria animada de um movimento de rotação diurna: É hoje evidente que a Terra na verdade se move, embora não o notemos imediatamente, pois só podemos perceber o movimento pela comparação com algo que permanece imóvel. Ele representou claramente um ponto de transição e lançamento de novas ideias que iriam repercutir no século XVII.

No período medieval, o infinito (infinitude) foi tomado pela *teologia apofática*[31] como atributo próprio somente de Deus e, portanto, fora do alcance da mente humana, totalmente inalcançável pela razão. Por isso, só podemos definir Deus afirmando o que ele *não é*. Na matemática, as séries infinitas, abrem um espaço para uso de procedimentos que conseguem dar conta daquilo que parecia não ser possível: uma soma de infinitas parcelas dar um resultado finito. Sobre esse período histórico, BARON pontua que

> a matemática não era tanto uma atividade e sim objeto de discussões filosóficas. Fortemente influenciada por Aristóteles, a discussão sempre girava em torno da natureza das quantidades infinitas, relacionadas com o mundo físico ou matemático (...). Ele [Aristóteles] rejeita a noção de um continuo composto ou de pontos matemáticos ou de qualquer outra espécie de indivisíveis. Estas idéias (sic) tornaram-se constantes nas discussões entre os filósofos dos séculos XIII e XIV. (BARON, 1985, p.56 vol.2)

Após este período extenso de temas filosóficos e teológicos, a matemática passará por uma transformação considerável. O sistema de numeração decimal, que foi sendo introduzido[32] no ocidente a partir do final do século X, tornou possível ampliar as operações de contar e medir. Com isto, o infinito pode ser concebido como uma repetição ilimitada de uma

[31] ou teologia negativa é o contrário da teologia propositiva ou teologia afirmativa. Ela percebe que a inteligência humana consegue elaborar melhor aquilo que Deus não é.

[32] O sistema de numeração decimal que usamos atualmente teve origem na Índia, no início da era cristã. Passou a ser usado pelos árabes durante a idade média e sua introdução na Europa não foi imediata. IFRAH (1997, p.457-484) descreve a história de sua introdução em dois momentos. A primeira introdução no final do século X, com Gerbert d'Aurillac (950 - 1003). A segunda, no início do século XIII, com a obra de Fibonacci (1170 - 1250), *Liber Abaci*.

operação específica. A utilização de símbolos[33] simplificou a representação das ideias matemáticas e substituiu, em grande parte, as regras pelas fórmulas. Ocorreu também uma ruptura da hegemonia dos cânones de Aristóteles quanto a sua aplicação na descrição do universo, gerando assim novas concepções e busca de novos fundamentos.

[33] No dizer de OSTROWSKI (1981), "A exposição matemática deve a sua especial precisão e acessibilidade nomeadamente a circunstância de haver recurso a *linguagem das fórmulas*. Porém, o leitor moderno raro se apercebe de que, neste ponto, se trata nitidamente duma aquisição feita nos últimos séculos. (...) É facto que deste modo se alcançou uma grande simplificação nas deduções analíticas que, por assim dizer, foram extensamente 'mecanizadas'."(OSTROWSKI, 1981, p.4 e 5)

2 A IDEIA DE INFINITESIMAIS NO SÉCULO XVII

> Num primeiro curso de Cálculo, as apresentações costumam ser feitas de maneira intuitiva e informal, com pouca ou nenhuma demonstração rigorosa. Esse procedimento é seguido, em parte por razões didáticas; mas também por razões ligadas à própria natureza dos tópicos tratados, cujo desenvolvimento histórico ocorreu primeiro de maneira intuitiva e informal, desde o século XVII até aproximadamente 1820. A partir ele então, os avanços da teoria exigiam conceituações precisas das ideias de função, continuidade, derivada, convergência, integral, etc. É precisamente uma apresentação logicamente bem organizada todos esses tópicos do Cálculo que constitui um primeiro curso de Análise.
>
> *Ávila (Curso de Análise para Licenciatura, p,1)*

2.1 A Passagem da Idade Média para a Idade Moderna

O século XVII é um período revolucionário e é precedido por outro século que nos legou transformações significativas através do Renascimento, Humanismo e da Reforma Protestante. No decorrer do século XVI ocorre um retorno às obras clássicas da antiguidade ao mesmo tempo em que se inicia uma certa desconfiança que tais obras pudessem responder as novas questões apresentadas. Na Astronomia, o modelo Geocêntrico de Ptolomeu era complicado demais para dar conta do movimento dos planetas observados e ajudar a expansão marítima, portanto, abriu espaço para que Copérnico em 1543 publicasse a *A Revolução dos Orbes Celestes.* Nesta obra, embora com muita cautela, ele afirma que:

> (...) embora eu saiba que as ideias de um filósofo não estão sujeitas ao julgamento do vulgo, uma vez que a preocupação daquele é inquirir da verdade em todas as circunstâncias até onde tal é permitido à razão humana por Deus, todavia penso que as opiniões totalmente erróneas (sic) devem ser evitadas. Por isso, ao pensar comigo mesmo como aqueles que afirmam ser confirmada pelo julgamento de muitos séculos a opinião de que a Terra está imóvel no meio do céu e aí está colocada servindo-lhe de centro, haviam de considerar uma cantilena absurda defender eu, pelo contrário, que é a Terra que se move; hesitei comigo durante muito tempo se havia de dar a lume os meus Comentários escritos para demonstração desse movimento, ou se seria preferível seguir o exemplo dos Pitagóricos e de alguns outros que procuravam confiar os mistérios da filosofia aos seus familiares, amigos e a ninguém mais, não por escrito mas de viva voz, tal como atesta a carta de Lísis a Hiparco. (COPÉRNICO, 1984, p.5)

Copérnico afirma que, ao contrário de outros filósofos, tornará público os comentários que a Terra não está imóvel no centro do universo. A sua mobilidade será um tema de destaque no julgamento de Galileu no século seguinte. A proposta copernicana desloca o referencial da Terra para o Sol.

Nos anos de 1600, a matemática e filosofia vivenciaram profundas transformações. Nesse período, observou SILVA(2007) que a matemática antiga “estava bastante modificada, em conteúdo, método e, principalmente, espírito no início da Idade Moderna” (p. 77). O uso de símbolos matemáticos neste período possibilitou um avanço extraordinário da Álgebra, “além de uma inusitada disposição dos matemáticos para se envolverem com o infinito sobre diversas formas” (Ibid, p.77). É por exemplo, o caso de Kepler (1571 - 1630), que concebia o círculo como “uma infinidade de triângulos com o vértice no centro; analogamente, a esfera consistia numa infinidade de pirâmides” (STRUIK, 1989, p.160).

Foi no início dos tempos modernos que o uso de símbolos matemáticos começou a desenvolver-se e assumir a configuração que temos hoje. O conteúdo algébrico tomou a forma simbólica e com isto facilitou a criação de métodos para expressar as raízes de equações através de operações algébricas, tornando a resolução de uma equação um processo mecânico de operações com símbolos, um algoritmo. No dizer de SILVA(2007), “estão criadas as condições para que o simbolismo algébrico adquira uma espécie de vida própria, gerando seus próprios conceitos” (p.78).

No começo do século XVII, Galileu Galilei (1564 - 1642), em sua obra Diálogos Sobre as Duas Novas Ciências, registrou o seguinte fato sobre finito e o infinito:

> Salviati - Este é o tipo de dificuldade que deriva do discurso que fazemos com nosso intelecto finito acerca dos infinitos, dando-lhes os mesmos atributos que damos às coisas finitas e limitadas; o que me parece ser inconveniente, posto que acredito que esses atributos de maioria, minoria e igualdade não convém aos infinitos, dos quais não se pode dizer que um é maior, ou menor ou igual a outro. (GALILEU, 1988, p.32-33)

Neste trecho do diálogo, Galileu, aqui representado por Salviati, deixa claro que não podemos usar atributos das coisas finitas para avaliar o infinito.

2.2 Os Indivisíveis

O italiano Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), discípulo de Galileu, atuou como professor de matemática na Universidade de Bolonha, de 1629 até a sua morte 1647. Sua obra não inclui apenas matemática, mas também óptica e astronomia. Porém, a obra que o fez entrar para a história foi o tratado *‘Geometria Indivisibilibus’*, publicado inicialmente no ano de 1635. O método dos indivisíveis, cujas raízes remontam a Antiguidade, não é muito rigoroso, mas extremamente prático principalmente para cálculo de volumes. Na análise feita por Eves (2011),

> O tratado de Cavalieri e demasiado prolixo e pouco claro, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por “indivisível”. Tudo indica que um

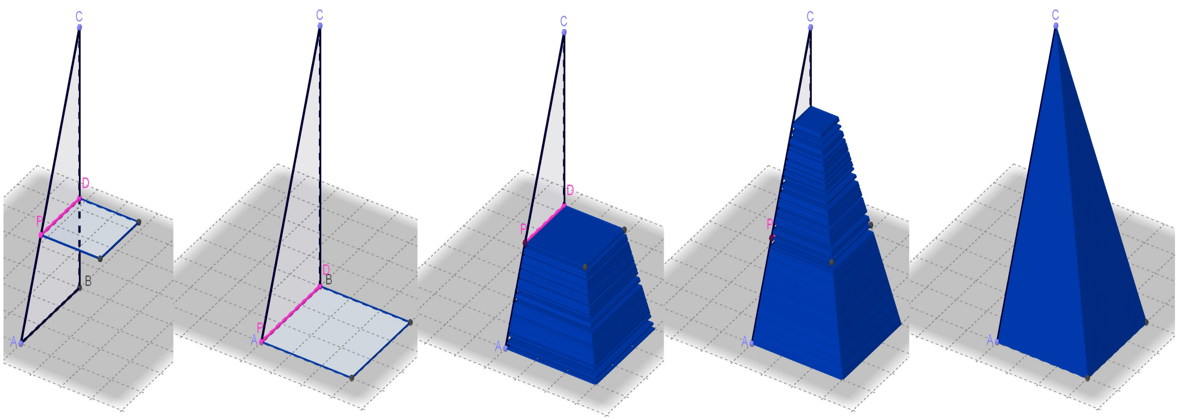
> indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse solido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas. (EVES, 2011, p.425)

Esta ideia que porções planas e porções sólidas são formadas respectivamente por infinitas cordas paralelas e infinitas secções planas paralelas permitiu a generalização de dois princípios, os princípios de Cavalieri :

> 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante. 2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. (EVES, 2011, p 426),

Esses dois princípios aqui apresentados constituem-se numa ferramenta valiosa, até os dias atuais, para calcular áreas e volumes, superadas apenas pelo Cálculo Diferencial e Integral. As ideias fundamentais presentes nos indivisíveis de Cavalieri são: *todas as linhas* de uma figura plana e *todas os quadrados* de uma figura. No dizer de KATZ (2010, p.603) "pode-se pensar em 'todos os quadrados' de um triângulo, por exemplo, como representando uma pirâmide, sendo cada uma das suas secções um quadrado tendo de lado o comprimento de uma particular do triângulo."

Figura 10 - Todos os quadrados de um triângulo



Fonte: Construído com o GeoGebra

A análise dos indivisíveis de Cavalieri nos faz observar de forma implícita o uso da ideia de infinitesimal: infinidade de cordas e infinidade de seções. "Uma parte atômica de uma figura" (EVES, 2011, p. 428) compondo uma porção plana ou um sólido.

2.3 O Método de Fermat

Por volta de 1615, Kepler observou que os volumes de paralelepípedos inscritos numa esfera têm pequenas variações em seus valores quando aproxima do volume máximo. Cerca de uma década após, o matemático francês Fermat (1601-1665) "conseguia transformar a ideia de Kepler num algoritmo" (KATZ, 2010, p.593), inspirado nos métodos desenvolvidos por Viète(1540-1603) para equações polinomiais. Das suas contribuições vamos destacar três procedimentos: os máximos e mínimos, a tangente num ponto e as quadraturas de curvas.

A abordagem de Fermat para encontrar máximos e mínimos numa equação do tipo $\mathbf{b}x - x^2 = c$ (por exemplo[34]) representa um passo a mais no desenvolvimento do Cálculo e no uso da ideia de infinitesimais para solucionar problemas. A solução para encontrar o máximo valor de **c** nesta equação é admitir a existência de duas raízes e que no máximo de **c** o valor destas duas raízes de $\mathbf{b}x - x^2$ são iguais. Este princípio pode ser aplicado assim:

1^o) Admitindo que **m** e **n** são raízes de $\mathbf{b}x - x^2$, nas proximidades do ponto de máximo $\mathbf{b}m - m^2 \approx \mathbf{b}n - n^2$. Logo, $\mathbf{b}m - bn = m^2 - n^2 \Leftrightarrow \mathbf{b}(m-n) = (m+n).(m-n)$. Dividindo por $(m-n)$ encontramos $b = m+n$.

2^o) No ponto de máximo, as raízes são iguais, $m = n = x_{max}$, logo $b = m + n = x_{max} + x_{max} = 2x_{max} \Leftrightarrow x_{max} = b/2$. Portanto, $c_{max} = b.b/2 - (b/2)^2 = b^2/2 - (b^2/4) = b^2/4$.

O método descarta a solução $x = 0$ e não indica se a solução encontrada é máximo ou mínimo. Fermat percebeu que seu método trazia algumas dificuldades para certos polinômios. Para substituir a ideia de usar duas raízes nas proximidades do máximo ou do mínimo ele usava x e $x+e$ (x mais um pequeno acréscimo e) no polinômio considerado. A seguir igualava $P(x)$ e $P(x+e)$ e simplificava. No caso de $\mathbf{b}x - x^2 = c$:

1^o) Fazendo $P(x) = P(x+e)$, então $\mathbf{b}x - x^2 = b(x+e) - (x+e)^2 \Leftrightarrow \mathbf{b}x - x^2 = bx + be - (x^2 + 2xe + e^2)$, cancelando alguns termos: $0 = +be - 2xe + e^2$

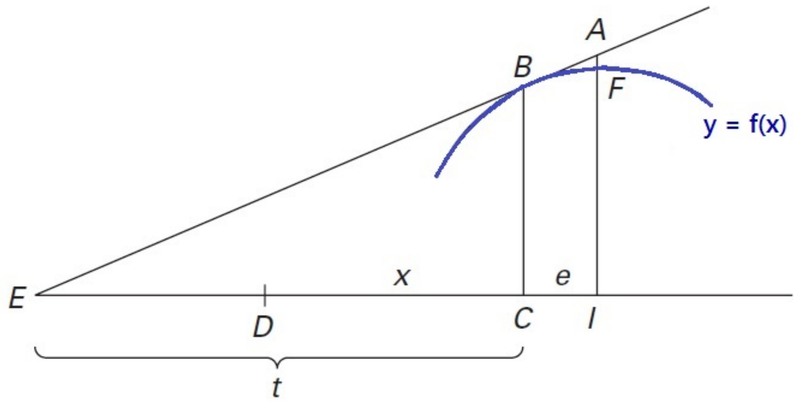
2^o) Dividindo por e: $0/e = be/e - 2x/e - e^2/e \Leftrightarrow 0 = b - 2x - e$. Como e é muito pequeno, $x = b/2$.

Juntamente com o método de máximos e mínimos Fermat também encontra a tangente à uma curva num ponto. A figura 11 mostra a tangente e subtangente (t) juntamente com outros segmentos: $EC = t$, $EI = t+e$, $DC = x$, $DI = x+e$, $BC = f(x)$, $AI = f(x+e)$.

Geometricamente podemos relacionar x e t, partindo da semelhança de triângulos (ΔAEI e ΔBCE): AI/BC = EI/EC. Para valores de e muito pequenos $AI \approx FI$, logo

[34] "Dividir o segmento AC em E, de tal modo que o retângulo AE.EC possa ser máximo"(BARON, Vol.2, p.36). Considerando AC=b, AE=x, EC=b-x e AE.EC=c, a área do retângulo é x.(b - x)=c

Figura 11 - Tangente de Fermat no ponto B da curva y = f(x)



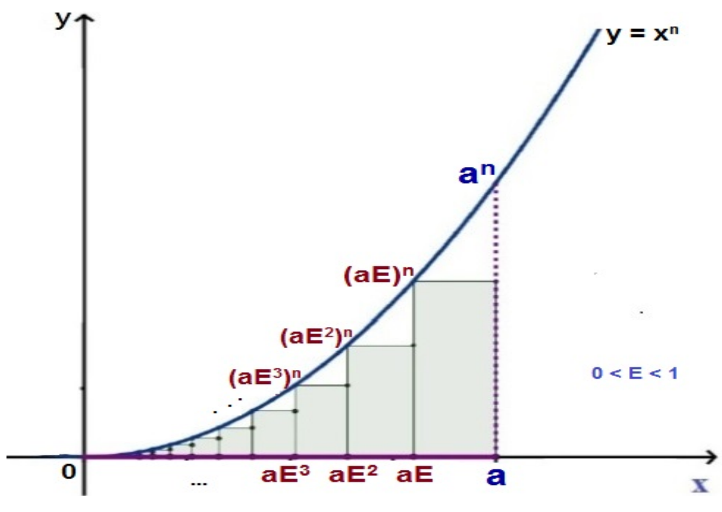
Fonte: KATZ,2010, p.596.

$FI/BC \approx EI/EC$. Substituindo pelas coordenadas da figura: $\dfrac{f(x+e)}{f(x)} \approx \dfrac{t+e}{t} \Longrightarrow$ $t.f(x+e) \approx f(x).(t+e)$.

Com este algoritmo podemos encontrar a relação entre t (subtangente) e x quando consideramos a parábola $f(x) = x^2$. Aplicando o algoritmo: $t.(x+e)^2 = x^2(t+e) \Longrightarrow$ $t(x^2 + 2xe + e^2) = tx^2 + ex^2 \Longrightarrow \cancel{tx^2} + 2txe + te^2 = \cancel{tx^2} + ex^2 \Longrightarrow 2txe + te^2 = ex^2$. Dividindo por e: $2txe/e + te^2/e = ex^2/e \Longrightarrow 2tx + te = x^2$. Como e é muito pequeno podemos desprezar o termo te e simplificar obtendo $2t = x$. Portanto, a relação procurada é $t = \dfrac{x}{2}$.

Além das abordagens de máximos, mínimos e tangentes, Fermat deixou uma técnica para achar a área sob curvas. Por volta de 1640, ele propõe aproximar a área sob uma parábola dividindo o intervalo considerado no cálculo usando uma série geométrica.

Figura 12 - Área sob a curva $y = x^n$ no intervalo [0, a]



Fonte: Construído com o GeoGebra

Considerando a curva $y = x^n$ e o intervalo [0, a], com $n \in \mathbb{N}$, de acordo com BOYER (2012, p.247) "Fermat subdividia o intervalo desde x=0 até x=a em uma infinidade de subintervalos tomando os pontos com abscissa a, aE, aE^2, ...", formando uma progressão geométrica (PG) com razão 0<E<1.

A figura 12 mostra a sequência de pontos (abscissas) a partir de a: a, aE, aE^2, aE^3, ...,onde $0 < E < 1$. O intervalo [0, a] foi subdividido em infinitos subintervalos e sobre cada subintervalo foi construído um retângulo de altura igual a ordenada da curva no extremo da esquerda dos subintervalos. A área sob a curva é soma infinita das áreas desses retângulos. Esta soma de áreas é soma dos termos de uma PG infinita e decrescente. A área sob a curva $y = x^n$, no intervalo [0, p] é dado por $S = \dfrac{p^{n+1}}{n+1}$. Na linguagem atual do Cálculo Integral é $\int_0^p x^n dx = \dfrac{p^{n+1}}{n+1}$. Para mais detalhes, consulte o item 3.5 Integral de Fermat.

2.4 Os Infinitesimais

Uma das figuras mais importante do pensamento infinitesimal do século XVII foi John Wallis (1616 - 1703), professor em Oxford, onde desenvolveu com proficiência as ideias anteriores sobre o uso de infinitésimos no cálculo de área. Sua obra Aritmética dos Infinitos, de 1655, usa a nova Geometria Cartesiana e apresenta um processo equivalente à integração, em casos algébricos simples.

Outra contribuição marcante de Wallis, foi expressar o valor de π (Pi) a partir do produto infinito de frações: $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{1}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{3}.\dfrac{4}{5}.\dfrac{6}{5}.\dfrac{6}{7}.\dfrac{8}{7}.\dfrac{8}{9}....$. Segundo STRUIK (1989),

> O título do seu livro mostra que Wallis tencionava ultrapassar Cavalieri na sua *Geometria Indivisibilibus*; era a nova *arithmetica* (álgebra) que Wallis queria aplicar, não a antiga Geometria. Neste processo, Wallis estendeu a álgebra numa verdadeira análise — foi o primeiro matemático a fazê-lo. Os seus métodos de relacionação com processos infinitários eram muitas vezes grosseiros, mas ele obteve novos resultados. Introduziu séries infinitas e produtos infinitos [...]. (STRUIK, 1989, p.170)

Wallis representa uma nova abordagem para a questão do infinito envolvendo Álgebra simbólica, que se tornará a forma prática de representar as ideias matemáticas. O uso exaustivo de símbolos, inclusive para representar exclusivamente o infinito[35] (∞), levou o seu rival Thomas Hobbes (1588 - 1779) a criticá-lo com acidez. Alexander (2016) descreve as circunstâncias recheada com citações da crítica de Hobbes:

> Sobre o uso feito por Wallis de símbolos algébricos, alguns (tais como ∞) de sua própria invenção, ele opina que “símbolos são os pobres, deselegantes, embora necessários, andaimes de uma demonstração; não deveriam aparecer em público mais que as deformadas necessidades que

[35] Isto é "representar muitas linhas (ou paralelogramos) constituindo uma superfície plana: assim se B é base de um triângulo e A a sua altura, ∞ será o número de linhas na superfície".(BARON, 1985, p.23 Vol.2)

> cada um faz nos seus aposentos". "O livro sobre as seções cônicas" de Wallis, segundo Hobbes, "está tão coberto pela crosta de símbolos que não tive a paciência de examinar se está bem ou mal demonstrado." Pode ser que Wallis tivesse essas ironias em mente quando se queixou, anos mais tarde, daqueles que zombam dos símbolos e insistem em provas clássicas revestidas da "pomposa ostentação de linhas e figuras". Quando Wallis tentava responder a algumas das críticas mais substanciais de Hobbes, este fazia pouco, como um professor autoritário disciplinando uma criança mal comportada: "Você oscila e se perde, sim", escreveu ele com impaciência, "e joga tanta tinta fora que não consigo perceber para onde você vai, e nem preciso." Mas de nada adianta: "Seu livro Aritmética do infinito é um nada do começo ao fim." (ALEXANDER, 2016, p.250)

Na citação acima pode-se observar que existe claramente uma oposição a forma como os infinitésimos de Wallis estão sendo recepcionados no século XVII. O embate entre Wallis e Hobbes não ocorre apenas por questões de uso de símbolos. Os princípios filosóficos dos dois são totalmente diferentes gerando assim o confronto de ideias. Segundo BOYER(1959, p.179), Hobbes tinha uma visão exagerada da "matemática como uma idealização da percepção sensorial, ao invés de um ramo da lógica formal abstrata", por conseguinte não estava disposto a considerar a sobreposição do uso de símbolos nas demonstrações e detrimentos de argumentos geométricos [36] tradicionais. Wallis, por sua vez estava familiarizado com métodos analíticos da época. Essa nova abordagem permitia "libertar a aritmética completamente da representação geométrica, (...) fazendo uso gratuito de analogia e indução incompleta (...), bem como dos conceitos de infinito e infinitesimais, que ainda não tinha sido rigorosamente estabelecido" (Ibid, p.169). A falta de rigor na construção das novas ideias abriu espaço para Hobbes tentar ridicularizar o seu trabalho, valendo-se da forma irônica, para não dizer mordaz, quando afirma não encontrar nada na Aritmética do Infinito.

2.5 O Método de Fluxões de Newton

Na segunda parte do século XVII, Newton e Leibniz tornaram-se um marco na história do Cálculo. Analisando a história da matemática pode-se inferir que eles não o inventaram sozinhos, mas desempenharam, juntamente com outros matemáticos de sua época, um papel decisivo nesta área. Principalmente pelas soluções encontradas para os dois grandes problemas que chamavam atenção dos estudiosos na metade do século XVII:

> em primeiro lugar, o problema das tangentes: determinar as retas tangentes a uma curva dada, o problema fundamental do Cálculo Diferen-

[36] Na sua obra Leviatã, página 37, da editora Martins Fontes, 2003, ele afirma que "em geometria (que é a única ciência que prouve a Deus conceder até aqui à humanidade) os homens começam por estabelecer as significações das suas palavras, e a esse estabelecimento de significações chamam definições e colocam-nas no início do seu cálculo."

> cial. Em segundo lugar, o problema da quadratura: determinar a área dentro de uma curva dada, o problema fundamental do Cálculo Integral. (COURANT, 2000, p.481)

Newton e Leibniz merecem um destaque especial na história do Cálculo, pois foram os pioneiros em estabelecer a estreita ligação entre estes dois problemas, unificando os novos métodos que se tornaram instrumentos poderosos da Ciência. Isto foi possível, em parte, graças a três fatores: à nova simbologia, à Geometria Analítica de Descartes e Fermat e algoritmos (regras de cálculo).

Newton, nascido prematuramente em 25 de dezembro de 1642, foi educado pela avó e a conselho do tio, estudou em Cambridge. Como registra BOYER (2012)

> Porém, no início de seu primeiro ano ele comprou e estudou um exemplar de Euclides, e logo depois leu a Clavis de Oughtred, a Geometria a Renato Des Cartes [Sic] de Van Schooten, a Óptica de Kepler, as obras de Viète, e o que talvez tenha sido o mais importante de todos, *Arithmetica Infinitorum* de Wallis. Além disso, a esse estudo devemos acrescentar as aulas que Barrow deu como *Lucasian* professor, e a que Newton assistiu, depois de 1663. Também veio a conhecer obras de Galileu, Fermat, Huygens e outros.(p.271)

Na época de Newton, a Universidade de Cambridge não oferecia o curso de matemática para alunos de graduação. Sua formação matemática foi basicamente através das leituras e estudos de seus antecessores, ampliando a partir daí sua visão em relação à realidade.

Os seus manuscritos que foram preservados registram e atestam "um período inacreditável de esforço concentrado, que dominou sua vida durante o ano e meio seguinte, excluindo praticamente tudo mais" (COHEN, 2002, p.452). Em pouco tempo ele dominou todo o conhecimento matemático até o século XVII, tornando-se tributário dos seus antecessores. Como ele mesmo afirmou, 'se vi mais longe que algum ser humano é porque estava sobre ombros mais altos'. Suas realizações matemáticas têm muito da influência de dois grandes matemáticos do século XVII: John Wallis e Isaac Barrow. Wallis, um dos matemáticos mais capazes, notáveis e originais de seus dias (**??**, 1992, p.39), com sua obra *Arithmetica Infinitorum* e Barrow com suas aulas de matemática.

A física ensinada na universidade começava a ser modificada pelas novas ideias mecanicistas de Descartes, que concebia o mundo constituído de partículas invisíveis e o conhecimento da realidade como explicação do movimento e interação entre essas partículas. Uma concepção nova e diferente das herdadas de Aristóteles, para quem a ideia de natureza baseava-se em distinções de qualidades. Descartes olha para o mundo de forma mecanicista, como se ele fosse uma máquina ou um relógio e como tal se propõe estudá-lo. Newton não gostava de certas hipóteses necessárias da concepção cartesiana da natureza, no dizer de (BOORSTIN, 1987, p.367), sua preferência era o caminho apertado da matemática. Para isto, ele teve que ampliar os conhecimentos matemáticos da época, criando novos conceitos e novas ideias para sustentar suas afirmações.

No verão de 1665, ele recebeu o grau de Bacharel em Artes e, devido à peste, Newton voltou para casa, em Lincolnshire, e lá permaneceu por cerca de dois anos (1665 e 1666). Foram dois anos de total dedicação aos estudos (como leitura de Wallis) e também de grandes descobertas, entre elas destacamos: a lei da gravidade, a natureza das cores, teorema binomial e o Cálculo. Em 1667 com a abertura da Universidade, ele é eleito membro do Trinity College de Londres e dois anos após é nomeado professor de matemática. A influência de Newton sobre a ciência se inicia ainda no século XVII, durante o seu período de vida. Ele "provavelmente exerceu maior influência sobre o pensamento científico do que qualquer figura secular depois de Aristóteles" Boorstin (1986, p.366), chegando até Einstein (1879 -1955) no século XX, para não dizer que continuamos a ensinar muitas das suas ideias, em matemática e física, tanto no ensino médio como na universidade. Os coeficientes binomiais para potências inteiras já eram conhecidos por outros matemáticos antes da época de Newton. Mas coube a ele o desenvolvimento do teorema binomial (enunciado em 1676) na sua forma generalizada, isto é, $(a+b)^{\frac{m}{n}}$.

Em 1669, dois anos após ter retornado à Cambridge para obter o grau de mestre, sucede o seu professor Isaac Barrow (1630-1677) no Trinity Colege, por indicação do próprio Barrow. Nesta função permaneceu até 1796, quando passou a exercer função pública. Foi também nesse ano de retorno a Cambridge que ele comunica a descoberta do Método da Fluxão. Para desenvolver o seu método, lança mão de três conceitos importantes:

- *O fluente (uma quantidade que flui) que é uma variável;*
- *O fluxo do fluente (variável) que é a taxa de variação do fluente. O fluxo do fluente (variável) x é representado por $\dot{x}$ e o fluxo do fluente (variável) y é representado por $\dot{y}$;*
- *O Momento de um fluente que é um incremento infinitesimal do fluente. O momento de x é o produto $\mathbf{o}\dot{x}$, onde $\mathbf{o}$ indica um intervalo de tempo muito pequeno e $\dot{x}$ é fluxo do fluente x. O momento de y é o produto $\mathbf{o}\dot{y}$, onde $\mathbf{o}$ indica um intervalo de tempo muito pequeno e $\dot{y}$ é fluxo do fluente y.*

No seu trabalho A Quadratura das Curvas, Newton mostra que seu ponto de partida não é os indivisíveis, mas sim a ideia de movimento:

> Não considerarei aqui as quantidades matemáticas como sendo compostas de partes extremamente pequenas, mas como sendo geradas por um movimento contínuo. Linhas são descritas, e ao descrevê-las são geradas. Não por um alinhamento de partes, mas por um movimento contínuo de pontos. As superfícies são geradas pelo movimento de linhas, os sólidos pelo movimento de superfícies, os ângulos pela rotação dos seus lados, o tempo por um fluxo contínuo, etc. Essa gênese está baseada na natureza e pode ser vista dia a dia no movimento dos corpos.
> E desta maneira os antigos nos ensinaram a gerar retângulos justapondo-se linhas retas móveis ao longo de retas imóveis numa posição ou situação normal a elas. (apud, BARON, p.31, Vol.3)

Para ele uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto P(x, y). Na sua construção, as coordenadas x e y variam continuamente com o tempo, e este fluindo uniformemente. O seu objetivo era “encontrar as taxas de mudanças de x e y em relação ao tempo, isto é, suas fluxões” (MAOR, 2003, p.104).

De acordo com o que foi exposto acima vamos encontrar uma relação entre a fluxão de y e a fluxão de x na equação $\mathbf{y} = x^2$.

i) Para intervalos infinitamente pequenos, o fluente x torna-se $x+o\dot{x}$ e o fluente y torna-se $y + o\dot{y}$. Substituímos x por $x + o\dot{x}$ e y por $y + o\dot{y}$ na equação $\mathbf{y} = x^2$:
$y + o\dot{y} = (x + o\dot{x})^2 \Rightarrow y + o\dot{y} = x^2 + 2ox\dot{x} + oo\dot{x}^2 \Longleftrightarrow y + o\dot{y} = y + 2ox\dot{x} + oo\dot{x}^2$, após substituir x^2 por y.

ii) Cancelando y: $\cancel{y} + o\dot{y} = \cancel{y} + 2ox\dot{x} + oo\dot{x}^2$, encontramos $o\dot{y} = 2ox\dot{x} + oo\dot{x}^2$. Dividindo, membro a membro, por o chegamos a $\dot{y} = 2x\dot{x} + o\dot{x}^2$.

iii) Desprezando o termo $o\dot{x}^2$ (infinitamente pequeno), encontramos $\dot{y} = 2x\dot{x}$.

Portanto, a relação entre a fluxão de y e a fluxão de x é: $\mathbf{\dot{y} = 2x\dot{x}}$ e a razão entre a fluxão de y e fluxão de x (taxa de variação de y em relação a x) é $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$, cujo o significado geométrico é a inclinação da curva em cada um dos seus pontos (a inclinação da reta tangente a curva no ponto (x, y)). Em cada ponto (x, y) a curva tem inclinação igual ao dobro de cada abscissa x.

Ribnikov (1991, p.193) assinala que é possível calcular as fluxões de funções irracionais usando a regra de função composta. Como exemplo ele cita a função $z = \sqrt{ax - y^2}$. Se $z = \sqrt{ax - y^2}$, então $z^2 = ax - y^2$. Aplicando o método a cada termo da equação: $2z\dot{z} = a\dot{z} - 2y\dot{y} \Longrightarrow \dot{z} = \dfrac{a\dot{z} - 2y\dot{y}}{2z} \Longrightarrow \dot{z} = \dfrac{a\dot{z} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{ax - y^2}}$.

Com esse método também é possível chegar aos pontos de máximo e de mínimo, a concavidade e aos pontos de inflexão de uma curva a partir de sua equação. A importância dessa invenção de Newton,

> é que ela forneceu um procedimento geral - um algoritmo -para se encontrar a taxa de mudança de praticamente qualquer função. A maioria das regras da diferenciação, que agora são parte dos cursos padrão de cálculo, foram descobertas por ele. Por exemplo, se $y = x^n$, então $y' = n.x^{n-1}$ (onde n pode ter qualquer valor, positivo ou negativo, inteiro ou fracionário e até mesmo irracional). Seus predecessores abriram o caminho, mas foi Newton quem transformou suas ideias em uma ferramenta poderosa, universal, que logo seria aplicada com enorme sucesso em todos os ramos da ciência (MAOR, 2003, p.106).

Em it De analysi, escrito que circulou entre amigos e alunos de Newton, aparece pela primeira vez a sua ideia central do Cálculo Infinitesimal. Nesse mesmo escrito consta pelo menos um resultado que apresenta o cálculo de uma área como o inverso do que chamamos diferenciação (Boyer, 2002, p.273). A grande realização de Newton foi a sua capacidade de explorar a relação entre inclinação e área de uma curva.

Como vimos acima, uma das grandes contribuições de Newton para a matemática foi o método dos fluxos, o seu trabalho de cálculo usando métodos infinitesimais. Segundo Newton, a taxa de variação de um fluente x é o fluxo de x, que ele indicou por $\dot{x}$ (notação pontuada). Nesta ideia de taxa de variação, estava uma das bases da fundação do Cálculo na segunda metade do século XVII e início de século XVIII.

2.6 As diferenciais de Leibniz

Ainda no século XVII, nasceu em Leipzig, Gottfrid Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Era filho de um jurista, membro da universidade local. Inicialmente estudou com o pai e aprendeu sozinho grego e latim. De acordo com Eves (2011, p. 442) aos doze anos ele dominava todo o conhecimento corrente da época. Foi por essa época, que ele elaborou a ideia de *characteristica generalis*, antecessora da lógica simbólica do século XIX.

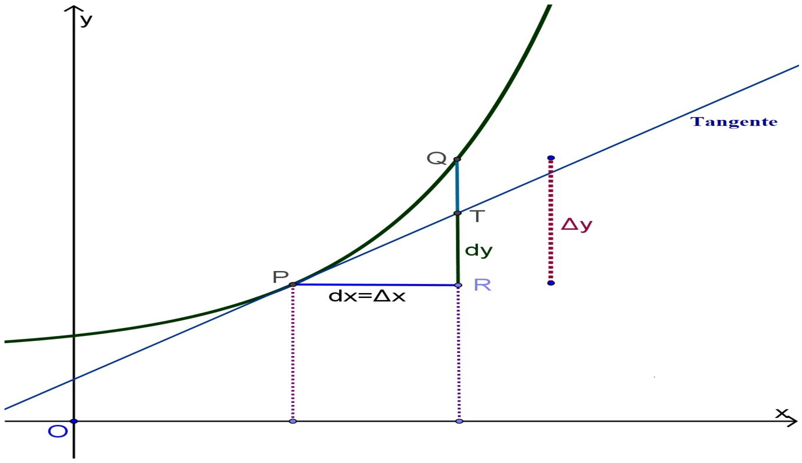
Com quinze anos iniciou a faculdade de direito em Leipzig ao mesmo tempo em que lia as obras dos gigantes da primeira metade do século XVII. Estas leituras o despertaram para a necessidade de aprender matemática. Então viaja para a universidade de Jena com a finalidade de assistir às conferências de Ehrard Wigel sobre matemática. Em 1663 recebe o título de Bacharel e 1666 tenta o doutoramento, mas a sua tese é recusada. Após esse incidente, Leibniz vai para a universidade de Atdorf, onde é reconhecido e ganha o grau de doutor em filosofia no ano de 1667, com uma tese *Ars Combinatoria* (A arte das combinações - tentativa de criar um método universal de raciocínio, através de uma espécie de cálculo). A sua formação em matemática ainda era precária no início de sua carreira como professor de Direito em Altdorf.

Leibniz, ao contrário de Newton, teve uma vida intensa e agitada e sua obra intelectual foi extensa, versando sobre filosofia, teologia, direito e matemática. Leibniz veio a exercer, por cerca de quarenta anos, a carreira de diplomata junto à Corte de Hanover. A sua primeira missão diplomática foi em Paris, de 1672 a 1676. Foi nesse período que Huygens, que na época morava em Paris, tornou-se seu orientador em matemática. Em 1663, fez uma viagem a Londres, na qual tomou conhecimento da obra de Barrow e, talvez, da primeira versão do Cálculo de Newton. Foi este último fato que motivou a controvérsia sobre quem foi o inventor do Cálculo Diferencial e Integral. Ele retornou a Londres em 1676, já nessa época com o desenvolvimento dos principais aspectos e notação do seu cálculo.

Se para Newton a ideia central do Cálculo era a de taxa de variação, para Leibniz era a diferencial. Na figura 13 temos o triângulo PRT em que Leibniz estabelece a proporção $\frac{RT}{PR}$ ou $\frac{dy}{dx}$ como a inclinação da reta tangente para a curva em P.

Considerando a função $y = f(x)$ e um ponto P no seu gráfico. Traçamos uma tangente em P e consideremos um ponto pertencente a tangente. O triângulo retângulo PRT (triângulo característico) tem seus lados indicados por dx e dy, que são acréscimos das coordenadas x e y, respectivamente. Para dx e dy suficientemente pequenos a tangente e gráfico de $y = f(x)$ seriam quase idênticos na vizinhança de P. Com isto ele conseguia

Figura 13 - O Triângulo Característico



Fonte: Maor, 2003, p.115

calcular a inclinação da reta tangente como a razão $\frac{dy}{dx}$.

Embora sem dar uma definição precisa, a diferencial para Leibniz era uma diferença entre dois valores infinitamente próximos de uma variável. Muito mais preocupado do que Newton com a simbologia, fórmulas e regras, ele criou as notações: dx, dy, ... para as diferenciais de x, y, ..., respectivamente. E num artigo de 1682 estabeleceu regras como:

- $dc = 0$, *diferencial de uma constante é zero;*
- $d(u + v) = du + dv$, *diferencial da soma;*
- $d(u.v) = u.dv + v.du$, *diferencial do produto. Para a constante c, u e v funções.*

Ele também criou o símbolo $\int$, um S alongado, para indicar a soma de todas as áreas infinitesimais. Mostrou que $\int ydx$ corresponde a uma área e que $d \int ydx = ydx$, apresentando d com inverso de $\int$.

Das duas notações de derivada do século XVII, a 'pontuada' de Newton $(\dot{y}/\dot{x})$ continuou a ser usada na Inglaterra por mais de um século e ainda hoje por alguns físicos. Em outros países da Europa continental prevaleceu a notação diferencial de Leibniz. Esta última mostrou-se superior à primeira, pois, didaticamente oferece vantagens na apresentação das ideias, na manipulação e compreensão do significado expresso. Um exemplo dessa vantagem é quando trabalhamos com uma função composta do tipo $y = h(x)$, onde $y = f(u)$ e $u = g(x)$, y é uma função indireta de x. A derivada de y pode ser encontrada pela regra da cadeia $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$. Outra vantagem da notação diferencial está no estabelecimento da regra da derivada da função inversa de $y = f(x)$, sendo f uma função bijetora, que de modo simples, pode ser expressa como o inverso da derivada da função original: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

O século XVII é um intervalo de tempo singular na História da matemática e na História em geral. Para Whitehead é surpreendente o grau de abstração que a matemática alcançou:

> Nada é mais impressionante do que o fato de que, à medida que a ma-

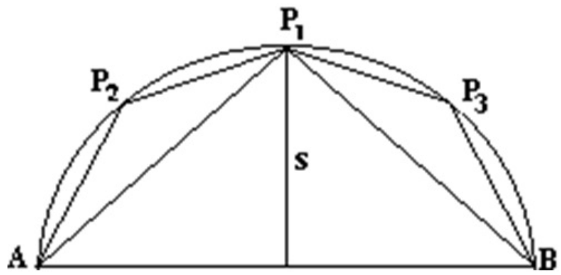
> temática se retirou para as mais altas regiões do pensamento abstrato, voltou a terra com um correspondente aumento de importância para a análise dos fatos concretos. A história da ciência do século XVII aparece como se fôsse(sic) algum vívido sonho de Platão ou de Pitágoras. Quanto a essa característica, o século XVII apenas veio primeiro que os séculos seguintes.(WHITEHEAD, 1946, p.45)

As abstrações matemáticas, aplicadas a problemas reais, tornaram-se os elementos que fundamentaram a passagem para o mundo moderno. As grandes ideias desse período histórico alicerçaram a sociedade industrial e foram estabelecidas em bases matemáticas. Nos séculos seguintes, para além das aplicações, ocorreu uma busca exacerbada pelo rigor e fundamentação do Cálculo Diferencial e Integral.

2.7 O Cálculo no Extremo Oriente

O Cálculo Diferencial e Integral é praticamente uma invenção ocidental, embora algumas ideias tenham ocorrido também no oriente em épocas diferentes. No Japão, o Cálculo aparece associado ao cálculo do comprimento de um arco circular. Tal comprimento era encontrado por Seki Kowa (1642-1708), no século XVII, como a soma das cordas obtidas bissectando os arcos sucessivamente, figura 14.

Figura 14 - O Cálculo no Oriente



Fonte: BOYER, 1993, p.81

Os pontos P_i estão dividindo o arco em $2n$ partes iguais e como consequência 2n cordas iguais. Segundo BOYER (1993, p.82), um discípulo de Seki, de nome Takebe, por volta de 1722, fazia uso da fórmula: $(\frac{1}{2}arco)^2 = sd[1 + \frac{2^2}{3.4}.(\frac{s}{d})^2 + \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}.(\frac{s}{d})^2 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}.(\frac{s}{d})^2 + ...]$, onde **s** é altura do arco **AB** e **d** é o diâmetro. Na Índia, as ideias do Cálculo não estão associadas à Geometria, mas a aritmética. O grande matemático hindu Bhaskara, que viveu no século XII, afirmou na sua obra Vija-Ganita que:

> Dividendo 3. Divisor 0. Quociente a fração 3/0. Essa fração cujo o denominador é cifra, chama-se quantidade infinita. Nessa quantidade, que consiste no que tem cifra como divisor, não há alteração mesmo que muito seja acrescentado ou retirado; como nenhuma alteração se dá no Deus infinito e imutável. (BOYER, 2012, p.160)

Esta afirmação retórica, transcrita em símbolos, corresponde a fração $\frac{a}{0} = \frac{a}{0} + k = \infty$. Na notação de limite atual, assume a forma $\lim_{h\to 0} \frac{a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a}{h} + k = \infty$, para h positivo. Dele também é afirmação $\frac{a.0}{0} = a$ que equivale ao limite: $\lim_{h\to 0} \frac{a.h}{h} = a$. Bhaskara conseguia chegar a solução de equações envolvendo essas ideias de limites associados à aritmética do zero (**??**, 1992, p.85), como neste caso: $\frac{x.0+\frac{x.0}{2}}{0} = 63$, o resultado encontrado por ele era 42. Para simular sua solução substituiremos 0 por $\lim_{h\to 0} h = 0$ e simplificaremos, como segue: $\lim_{h\to 0} \frac{x.h+\frac{x.h}{2}}{h} = 63 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{h.(x+\frac{x}{2})}{h} = 63 \Rightarrow \lim_{h\to 0} x + \frac{x}{2} = 63 \Rightarrow x + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 42$.

Este resultado é compatível com o esperado, mas em outros casos Bhaskara não obteve êxito. Isto ocorreu em virtude da falta de rigor no estabelecimento das regras de operação como os limites implícitos em tais equações. No oriente também ocorreram ideias relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral, o que não encontramos é um tema de continuidade dessas ideias. No caso da Índia, a ideia de limite, vinculava-se ao problema da divisão de um número diferente de zero por zero (BOYER, 1993, p.83-86). O que até certo ponto representa um avanço em relação ao ocidente. Enquanto isto, a divisão por zero[37] tinha sido rechaçada por Aristóteles. Os gregos eram resistentes à aritmética do zero, enquanto para Bhaskara foi admitida e usada como outro resultado qualquer.

2.8 A Difusão do Cálculo Diferencial e Integral

A história do Cálculo após o século XVIII tem a marca dos Bernoulli. Esta família de matemáticos se estabeleceu em Basiléia por volta de 1583, após a fuga da perseguição religiosa na Espanha. Tanto em quantidade como em tempo de atuação, a linhagem dos Bernoulli se destaca na história da matemática. BOYER (2012, p.292) afirma que mais de uma dezena dos membros da família Bernoulli se tornaram importantes: como matemáticos e formadores de outros matemáticos. Euler (1707 - 1783) por exemplo foi

[37] Bertrand Russell afirma que "não há cardinalidade indutiva correspondente a $m/0$. Podemos chamá-lo o infinito dos racionais. É uma instancia do gênero de infinito tradicional em Matemática, que é representado por ∞. Trata-se de gênero inteiramente diferente do verdadeiro infinito cantoriano, (...). O infinito dos racionais não exige, para sua definição ou uso, quaisquer classes infinitas ou inteiros infinitos.(...) Observar-se-á que somente o zero e o infinito, entre as razões, não são relações de um-para-um. Zero é uma relação de um-para-muitos, e infinito é de muitos-para-um. (RUSSELL, 1981, p.68)

aluno de Johann Bernoulli[38] em 1723, na Universidade de Basileia.

Os primeiros a se destacarem na matemática foram Jacob Bernoulli (1654 - 1705) e seu irmão mais novo Johann Bernoulli (1667 - 1748). O primeiro estudou teologia e após se licenciar, em 1676, foi para Genebra, onde atuou como tutor. Mais tarde, viajou para França, onde trabalhou durante dois anos com os seguidores de Descartes. Em 1681, foi para a Holanda, onde conheceu vários matemáticos. Estudou com os mais célebres cientistas e matemáticos da Europa, dividindo o seu interesse entre matemática e Astronomia. Esteve também na Inglaterra, onde fez amizade com Boyle e Hooke. Após regressar à Suíça, ensinou mecânica na Universidade de Basel a partir de 1683. Como resultado dessas viagens, Jacob Bernoulli manteve correspondências com diferentes matemáticos de sua época. Em 1682 começou a publicar na *Acta Eruditorum* de Leipzig, que resultaram em pelo menos dois artigos importantes para a história do Cálculo. Num artigo de maio de 1690, ele introduz pela primeira vez o termo integral, para designar o processo de *Sommatorius*. Posteriormente, Leibniz aceitaria a expressão *Calculus Integralis* no lugar de *Calculus Sommatorius*. Num outro artigo de 1696 ele apresenta a resolução da equação que tem o seu nome, a Equação de Bernoulli: $y' = p(x).y + q(x).y^n$.

Johann Bernoulli, 12 anos mais novo que Jakob, estudou medicina e mais tarde junto com o mais velho, estudaram o recém-inventado Cálculo durante seis anos, a partir das obras de Wallis, Barrow e os artigos de Leibniz. O resultado desses estudos tornou o Cálculo mais compreensível. Foram os pioneiros em tentar compreender, divulgar e aplicar as novas ideias do Cálculo Diferencial e Integral, constituindo-se assim numa ponte entre os séculos XVII e XVIII. Os seus trabalhos abrangem também o campo da Teoria das Probabilidades, da Geometria, o uso das coordenadas polares, o estudo de várias curvas (a curva de descida mais rápida) e séries infinitas. Johann, viveu e atuou como matemático no final do século XVII e na primeira metade do século XVIII. No ano de 1695 conseguiu iniciar sua carreira como professor em Groningen, e após a morte do irmão Jakob, em 1705, Johann assume o seu lugar em Basiléia e lá permanecendo os quarenta e três anos seguintes. Nos seus oitenta anos de existência, sua influência despertou pelo menos dois talentos: um foi o seu filho Daniel Bernoulli e o outro foi Euler, o matemático mais produtivo do século XVIII. O seu trabalho estava intimamente associado com o do irmão mais velho. Para STRUIK (1989, p.194), é difícil distinguir os resultados produzidos pelos dois irmãos. A invenção do Cálculo das variações, por exemplo, é atribuída aos dois, isto

[38] Foi “o primeiro a empregar letras para representar funções [em 1694] (...). Quatro anos mais tarde, Johann Bernoulli propõe que se represente uma função do argumento x por X ou por ξ(...) ele abandona esta ideia em 1718, para representar uma função pela letra φ, à qual passa a acrescentar o argumento, do lado direito e sem parêntesis. Quer dizer, ele escreve φx em lugar de φ(x), conforme escreveríamos hoje em dia.(...) Foi Leonhard Euler (1707-1783), em 1735, o primeiro a colocar o argumento dentro de parêntesis. E também a Johann Bernoulli que se deve o emprego da palavra função para exprimir dependências funcionais gerais, a saber, no ano de 1698, numa carta dirigida a Leibniz(...)” (OSTROWSKI, 1981, p.44)

porque eles no final da última década do século XVII apresentaram uma contribuição para problema da descida mais rápida de um ponto material que se move entre dois pontos por ação da gravidade.

Confirmado a importância dos Bernoulli na difusão do Cálculo, citaremos um trecho de *Lectiones mathematicae de methodo integralium*, de 1742, de Johann Bernoulli, a partir da versão de BARON(1985):

> Mostramos agora, inversamente, como são determinadas as integrais diferenciais, isto é, aquelas quantidades das quais originam-se as diferenciais (...). Uma das mais importantes aplicações do Cálculo Integral é a determinação de áreas. As áreas são consideradas como sendo divididas em um número infinito de partes, sendo que cada uma pode ser considerada como a diferencial da área, de modo que, se formarmos a integral dessa diferencial, que é a soma dessas partes, obteremos daí também a quadratura necessária.
> Para as áreas planas, essas partes infinitesimais podem ser imaginadas de várias maneiras, dependendo do que for mais conveniente para a área plana em questão. (BARON, 1985, apud, Vol.3, p.12-13)

Está explicito que a integral é o inverso da diferencial, o que mostra uma diferença radical em relação a Leibniz, que define a integral como uma soma de retângulos infinitesimais. A definição de Johann Bernoulli perdurará até o século XIX.

2.9 Crítica de Hobbes e BerKeley aos Infinitesimais

É muito comum na história do pensamento ocidental o destaque para o questionamento que George Berkeley[39](1685 - 1753) fez ao Cálculo Infinitesimal de Newton. Mas, é oportuno destacar que o nascimento das ideias básicas do Cálculo Diferencial e Integral ocorre num ambiente de disputas e rivalidades conforme ALEXANDER (2016) e BARDI (2008). O conflito de ideias começa com Wallis e Hobbes, com o primeiro usando, de maneira original os infinitésimos com o recurso da indução de Bacon (1561 - 1626) e

[39] "Agora, como nosso juízo está esgotado e intrigado pela percepção de objetos extremamente minúsculos até mesmo a imaginação, faculdade que deriva do Juízo, está bastante intrigada e esgotada para formar idéias claras sobre as *menores partículas de tempo*, ou sobre os menores incrementos aí gerados: e tanto mais, para compreender os momentos, ou aqueles incrementos das quantidades fluentes em *statu nascenti*, em sua origem primeira ou princípio de existência, *antes que elas se tornem partículas finitas*. E parece ainda mais difícil conceber as velocidades abstraídas de tais entidades nascentes imperfeitas. Mas as velocidades das velocidades, a segunda, terceira, quarta e quinta velocidades, etc., ultrapassam, se não estou errado, toda compreensão humana. Quanto mais o cérebro analisa e persegue essas idéias fugitivas mais ele se perde e se confunde; os objetos, primeiramente velozes e diminutos, logo desaparecem de vista. Certamente, para qualquer Razão, uma segunda ou terceira fluxão parece um mistério obscuro. A Celeridade incipiente de uma Celeridade incipiente; o aumento nascente, ou seja, algo que não tem magnitude: não importa a forma como isso seja considerado, será impossível ter uma concepção clara a respeito. Se não estou errado; chamo a atenção de todos os leitores pensantes para julgarem essa questão. E, se uma segunda fluxão for inconcebível, o que devemos pensar de terceiras, quartas e quintas fluxões, etc?" (BARON, 1985, apud, p.19 e 20, Vol.4, sic)

o segundo insistindo no estilo dedutivo herdado da tradição euclidiana e aristotélica de produzir matemática. Hobbes defendia o modelo da Geometria Euclidiana como fonte de sustentação do estado (ALEXANDER, 2016, p. 262). A crítica feita aos infinitésimos de Wallis tem uma dimensão filosófica. O emprego do método indutivo e a aceitação dos novos resultados na matemática ainda são julgados a partir do paradigma filosófico adotado desde a antiguidade.

Uma vez lançada partes das ideias básicas do Cálculo, o segundo momento das rivalidades ocorre entre o inglês Newton (1642 - 1727) e o alemão Leibniz (1646 - 1716). Desta vez, por conta da prioridade da invenção do Cálculo. Este segundo momento do conflito foi além das fronteiras dos dois países aqui representados, Inglaterra e Alemanha. Segundo BOYER (2012), “em consequência da deprimente disputa de prioridade, os matemáticos ingleses ficaram até certo ponto afastados dos que trabalhavam no continente durante boa parte do século dezoito” (p.280). As marcas das contendas ficaram registradas até nas preferências das notações simbólicas: na Inglaterra, deu-se primazia a notação de Newton, enquanto o continente europeu, as notações de Leibniz.

No início do século XVIII, os infinitésimos estavam em pleno uso no desenvolvimento e aplicação do Cálculo, que fora inventado na segunda metade do século anterior. É neste momento que a crítica de Berkeley procura ridicularizar o Cálculo de Newton. Ele questiona:

> e o que são fluxos? As velocidades de incrementos evanescentes. E que são esses mesmos incrementos evanescentes? Não são nem quantidades finitas, nem quantidades infinitamente pequenas, nem nada. Não poderíamos chamá-las de fantasmas de quantidades mortas? (apud BOYER, 2012, p.284)

A crítica de Berkeley levou a uma busca para fundamentar a nova invenção em bases mais sólidas. A teoria dos limites foi a resposta que os matemáticos do século XIX encontraram para responder os ecos dos questionamentos do século XVIII. A partir de então, o Cálculo passa a ser fundamentado a partir da definição formal de limite, os famosos épsilons e deltas de Cauchy-Bolzano-Weierstrass (KOLMOGOROV,1976, p.83, KATZ, 2010, p.909 e 938). Mais recentemente, nos anos sessenta do século XX, Abraham Robinson’s propõe a *Nonstandard Analysis* (Análise Não-Padronizada) a partir de uma concepção formal dos infinitesimais (DEVLIN, 2002, p.70).

O que é possível observar neste breve percurso histórico e filosófico, que este trabalho demarcou, pode ser caracterizado, de forma resumida, na afirmação de Caraça (1984):

> na História da Ciência 2.000 anos e, ao longo desses vinte séculos, arrasta-se o calvário duma ideia - a ideia de infinito! Ideia perante a qual os gregos recuaram e que é retomada e utilizada agora, como elemento activo(sic) desta nova operação. (CARAÇA, 1984, p.234)

Ao longo do tempo, a ideia de infinito tornou-se ativa no pensamento ocidental. Deixou de ser apenas figura de linguagem para tornar-se constituinte de teorias importantes dos tempos modernos. Especificamente sobre a história do Cálculo, fica evidente que ele

> não se desenvolveu na antiguidade, ficou esperando mais de dezoito séculos para desabrochar por inteiro, o que só aconteceu nos tempos modernos. Foi se desenvolvendo aos poucos durante todo o século XVII; e foi só no final desse século que o Teorema Fundamental foi claramente reconhecido como elemento importante de ligação entre a derivada e a integral.(ÁVILA, 2002, p.86)

Em poucas palavras CARAÇA (1984) e ÁVILA (2002) nos fazem pensar sobre o tempo que foi necessário para transpor as barreiras epistemológicas para alcançar o Teorema Fundamental do Cálculo. Sem a história, os livros e as vezes as aulas, parecem nos fazer crer que as ideias surgem espontaneamente, ocultando processo elaboração.

2.10 O Cálculo Diferencial e Integral no Brasil

A matemática no Brasil começou de forma incipiente e fruto das atividades educacionais dos jesuítas e mais tarde dos militares. Os jesuítas visando à catequese e os militares a defesa e proteção do território. René Taton, em sua História Geral da das Ciências, afirma que

> a atividade intelectual do Brasil foi assaz reduzida durante o período colonial, em parte devido à sua estrita submissão à metrópole e à dispersão dos centros urbanos. No Brasil não houve universidades, nem prelo. O ensino limitava-se ainda, no século XVIII, ao de nível secundário, ministrado pelos jesuítas, sob a forma tradicional, exclusivamente literária. (TATON, 1960, p.97)

A citação acima resume os fatores que atrasaram a inserção do Brasil no mundo do conhecimento. A ausência de universidades e de uma imprensa nacional dificultaram a produção e divulgação de conhecimentos no Brasil.

A situação brasileira era de dependência econômica, política e cultural em relação a Portugal. A Universidade de Coimbra era a ‘universidade dos brasileiros’, pois por ela passaram mais de dois milhares de jovens nascidos no Brasil. Esta situação só começa a mudar por volta de 1800, com as reformas ocorridas na Metrópoles e na vinda da família real para o Brasil.

> Só o fim do século XVIII assistira, no Brasil, a um florescimento científico, consecutivo à modernização dos estudos em Portugal e à renascença da Universidade de Coimbra, sob a influência do Marquês de Pombal. Vários brasileiros, que fizeram seus estudos em Coimbra, de lá trouxeram o gosto pela ciência. (...) Porém, o Brasil era ainda severamente mantido sob a tutela de Lisboa; daí por que o governo português proibiu a entrada de Humboldt em território brasileiro, em 1800. Obrigando Dom João VI a refugiar-se no Brasil, a ocupação de Portugal pelos franceses transformara a vida da colônia. Aberto ao comércio exterior, o país

> recebeu, então, as influências estrangeiras. Grande número de estabelecimentos científicos e culturais foram fundados: Imprensa Real, Jardim Botânico, Museu Real, Colégio Médico-Cirúrgico, Academia Militar etc.; grande impulso receberam os estudos científicos e técnicos — citemos, por exemplo, a tradução portuguesa dos Complementos de Álgebra de Lacroix (Rio de Janeiro, 1813). (TATON, 1960, p.98)

Com essas ações, o Brasil penetra no circuito da ciência moderna, porém com um certo atraso em relação a Europa.

No princípio do século XIX, a França, sob o comando de Napoleão Bonaparte, conquistou a maior parte das nações europeias. Pressionado pela invasão napoleônica, que impôs o bloqueio do comércio continental com a Inglaterra, dom João, príncipe regente de Portugal, mudou-se para o Brasil com sua família (TATON, 1960), seus dependentes, com aparelho burocrático: ministros, conselheiros, juízes da Corte Suprema, funcionários do Tesouro, patentes do Exército e da Marinha, membros do alto clero e também o tesouro real, os arquivos do governo, uma máquina impressora e várias bibliotecas que seriam a base da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro (FAUSTO, 2001, p.67). Aqui chegaram em janeiro de 1808. Como consequência o Brasil tornou-se a nova sede do Reino Português e para atender as novas demandas algumas medidas importantes foram tomadas: a abertura dos portos às nações amigas, a revogação dos decretos que proibiam a manufatura na Colônia e várias iniciativas na área educacional. Estas decisões visavam criar uma infraestrutura semelhante à da Metrópole.

A família real aportou na Bahia em janeiro de 1808, sendo logo solicitada ao príncipe regente a fundação de uma universidade literária. O pedido não foi atendido, mas o príncipe decidiu criar um Curso de Cirurgia, Anatomia e Obstetrícia, em fevereiro de 1808, "atendendo ao pedido do cirurgião-mor do reino, José Correa Picanço, um dos portugueses brasileiros formados em Coimbra" (MENDONÇA, 2000, p.134). Após um breve período na Bahia, a Corte é transferida para o Rio de Janeiro. A preocupação com a segurança militar da Colônia culminou com a criação de uma série de instituições de ensino. Nas palavras de Mendonça:

> As instituições criadas por D. João VI, no âmbito do que se pode chamar de ensino superior, estavam, na sua grande maioria, diretamente articuladas à preocupação com a defesa militar da Colônia, tomada a sede do governo português. Ainda no ano de 1808, cria-se, no Rio de Janeiro, a Academia de Marinha, e, em 1810 a Academia Real Militar, para a formação de oficiais e de engenheiros civis e militares. Também em 1808, criaram-se os cursos de anatomia e cirurgia, para a formação de cirurgiões militares, que se instalaram, significativamente, no Hospital Militar (como também era o caso do curso da Bahia, citado anteriormente). A esses cursos, de início simples aulas ou cadeiras, acrescentaram-se, em 1809, os de medicina e, em 1813, constituiu-se, a partir desses cursos, a Academia de Medicina e Cirurgia do Rio de Janeiro.(MENDONÇA, 2000, p.134)

Estas medidas refletem a preocupação de criar uma infra-estrutura que garantisse a sobrevivência da Corte na Colônia. Mendonça (op. cit.) ainda nos informa que outros cursos forma criados:

> Na Bahia, a cadeira de economia (1808), e os cursos de agricultura (1812), de química (1817) e de desenho técnico (1817). No Rio, o laboratório de química (1812) e o curso de agricultura (1814).(...) Em Pernambuco, em 1809 (matemática superior), em Vila Rica, em 1817 (desenho e história), e em Paracatu, Minas Gerais, em 1821 (retórica e filosofia), visando suprir lacunas do ensino ministrado nas aulas régias.(MENDONÇA, 2000, p.134)

Considerando as iniciativas acima, observa que uma grande parte da estrutura do ensino superior do Brasil do século XIX foi desse período da Corte na Colônia. Como consequência, o Cálculo Diferencial e Integral foi introduzido no Brasil no início do século XIX, época em que a Europa já contava com mais de um século de discussão sobre esse novo ramo da matemática. A questão que nos interessa é como se estabeleceu o ensino do Cálculo em nosso país.

A presença da família real no Brasil, no final da primeira década do século XIX, representou para o ensino da matemática, um marco fundamental. Para VALENTE (1999, p.91), duas foram as instituições, que por esse tempo, começaram suas atividades: a Academia Real dos Guardas-Marinha (1808), que veio junto com a Corte Portuguesa, e a Academia Real Militar, criada em 1810. Este último fato histórico marca a criação de uma instituição de ensino superior, a Academia Real Militar, e com isto, a educação superior foi institucionalizada no Brasil, fruto de uma ação política que atendia a fins militares. A Academia Real Militar, fundada em 1810, passou a se chamar Escola Central em 1858 e em 1874 teve o seu nome mudado para Escola Politécnica e por último, Escola Nacional de Engenharia.

Com a criação da Academia Militar, passam a existir atividades educacionais de nível superior no Brasil. Mas como nos informa SILVA (1992), "a Academia Real Militar era uma instituição de ensino e regime militar e consistia de um curso Matemático, nos moldes do existente na Faculdade de matemática da Universidade de Coimbra, Portugal, com duração de quatro anos, e de um curso militar,(...)"(p.144). As atividades que se iniciaram em solo brasileiro foram modeladas pelas ideias permitidas pela metrópole.

A estrutura da Real Academia Militar em solo brasileiro, oferecia um curso de matemática de 4 anos, mais o curso militar de 3 anos, totalizando 7 anos. O funcionamento desse curso contava com um corpo docente constituído "por onze Lentes e cinco substitutos, quase todos egressos da Faculdade de Matemática de Coimbra"(op. cit, p.66). Os conteúdos estudados tinham como referência as obras dos grandes matemáticos do início do século XIX: Monge, Legendre, Lacroix, Laplace e outros.

Os conteúdos aqui ensinados eram inspirados na matemática portuguesa, que por sua vez tinha sido modelada pela reforma promovida pelo Marquês de Pombal, no ano de 1772. A partir desta reforma, criaram-se em Coimbra duas faculdades, Matemática e

Filosofia, e a contratação de quatro professores, dois italianos e dois portugueses, com o propósito de tirar Portugal da situação de estagnação científica. O fruto principal dessas mudanças fora a formação de cerca de duas dezenas de doutores em matemática até 1800 e quase uma centena até o final no século XIX. Muitos desses formandos tornaram-se professores de Academias Militares e Politécnicas. Isto é um resultado considerável, levando em conta a instabilidade política do século XIX, que em vários períodos interrompeu as atividades acadêmicas na universidade.

O ensino do Cálculo no Brasil começa na primeira década do século XIX com um curso em Pernambuco, considerado um curso avulso criado para "suprir lacunas do ensino ministrado nas aulas régias"(MENDONÇA, 2000, p.134). A partir de 1810, com a criação da Academia Militar, o Cálculo Diferencial e Integral passou definitivamente a fazer parte do currículo de uma instituição de ensino superior no Brasil. Como afirma Gomide (1979):

> Ao ser criada a Academia Real Militar no Rio, o Curso Matemático tinha a duração de quatro anos. Ensinava-se Desenho e Geometria Descritiva, Aritmética, Álgebra até equações de 3º e 4º graus, Álgebra Superior, Trigonometria incluindo Trigonometria Esférica, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Mecânica, Astronomia, Hidrostática e Hidrodinâmica, Óptica, Geodésia. São adotadas como texto, ou adaptadas, obras de Euler, Legendre, Monge, Laplace e os textos correntes na França. (GOMIDE, 1979, p.42)

Pelos textos adotados fica claro a marcante a influência francesa[40] no ensino do Cálculo no Brasil do século XIX.

Quanto aos alunos das instituições militares, estes eram oriundos da classe média, "filhos de pequenos comerciantes, filhos de modestos funcionários da Corte e filhos de alguns militares"(SILVA, 1992, p.159). A elite econômica do Brasil império, proprietárias de grandes fazendas ou de engenhos, preferiam enviar seus filhos para uma Faculdade de Direito. O perfil social dos alunos só começa a mudar no final do século XIX, quando as elites começaram a procurar o curso de engenharia e não apenas o curso de direito.

O regulamento da Academia Militar de 1842 institui a defesa de tese (ver Anexo C), com a finalidade da obtenção do grau de doutor em ciências matemáticas. "Entre 1848 e 1858 foram apresentadas mais de vinte dissertações de matemática"(GOMIDE, 1979, p.42). Entre as teses apresentadas na Escola Militar, destacamos: a 'Dissertação sobre o modo de indagar novos astros sem auxilio das observações diretas', apresentada por Joaquim Gomes de Souza (1829 - 1863) e a 'Dissertação sobre o methodo dos limites e dos infinitamente pequenos' de João Ernesto Viriato de Medeiros, defendida em 1850 com o objetivo de obter o grau de doutor em ciências matemáticas. O título anuncia que

[40] Em nossa busca por textos originais conseguimos adquirir numa livraria (sebo) do Rio de Janeiro o texto francês (em dois volumes): SRTURN, Ch. Cours d'analyse. Paris: Imprimerie Gauthier-Villars et Fils. 5. ed. 1877. A primeira edição desta obra é de 1857. BOYER (2012) classifica este livro como "um dos sucessores de vida mais longa do texto do curso dado por Cauchy na Ècole Polytechnique"(p. 399).

se trata de uma tese sobre o Cálculo Diferencial e Integral, um dos primeiros trabalhos sobre o assunto produzido no Brasil. Para Silva (1992, p.168), trata-se de um trabalho expositivo, de cunho histórico, no qual o autor rememora, sem apresentar novidades, um pouco da história dos séculos XVII e XVIII, a respeito da noção de limite e dos infinitamente pequenos.

> o Cálculo Diferencial e Integral que durante vários anos, a partir de 1811, foi ensinado em nosso país, fazia uso da derivada de uma função como sendo o quociente de diferenças infinitesimais e o de integral de uma função como uma soma de infinitesimais, noções essas que eram a natureza dos conceitos básicos do Cálculo idealizado por Leibniz. Como é sabido, a comunidade matemática europeia desde o século XIX havia percebido quão frágeis eram as bases lógicas para os infinitésimos e, na impossibilidade estabelecê-las (o que foi feito em 1960 pelo lógico A. Robinson) abandonou seu uso indiscriminado na matemática.
>
> Porém, em nosso país, para o fim a que se destinava O ensino do Cálculo, a saber, para uso da engenharia civil, continuou sendo ministrado à moda Leibniz. Dessa forma, não se fez uso, por muito tempo, de conceitos como: conjunto, medida de um conjunto. função, derivada de uma função em um ponto segundo Cauchy, integral de uma função segundo Riemann, função continua, função analítica, dentre outros assuntos já incorporados a partir de 1820, à literatura matemática europeia.(SILVA, 1992, p.78)

Na primeira metade do século XIX, ocorreu uma busca do rigor na análise matemática, com o objetivo de encaminhá-la em bases sólidas e confiáveis.

Durante a segunda metade do século XIX não houve grandes avanços na matemática brasileira e em especial na inserção do Cálculo nas instituições de ensino superior. Ocorrera uma acomodação da elite intelectual, que não se esforçou em promover uma reforma que atualizasse e permitisse o progresso mais rápido do ensino superior no Brasil. Conforme Silva, “no período de 1870 a 1920, nenhum professor da escola Politécnica do Rio de Janeiro doutorou-se em matemática no exterior” (SILVA, 1992, p.51). Enquanto na área tecnológica, o Brasil estava realizando um esforço de atualização, importando a primeira ferrovia ainda na década de 1850. Nesse mesmo período o ensino superior engatinhava e o país não contava com uma universidade. Acrescenta-se a isto, os 350 anos de escravidão negra no Brasil, fator que vai gerar um contingente de marginalizados dos bens culturais da civilização ocidental. As limitações do ensino superior brasileiro geraram dificuldades na inclusão dos negros e das classes sociais menos favorecidas. O capital cultural no Brasil e também em outros países ainda é monopólio de poucos.

Enquanto na Europa o Cálculo estava sobre as bases do rigor, aqui a preocupação expressa era oferecer opções literárias nacionais para o seu estudo. É o que constatamos num parecer sobre o trabalho apresentado pelo Exm. Sr. Conselheiro Dr. Américo Monteiro de Barros, intitulado “Integração das equações diferenciaes” (ver o anexo B), de 1886, emitido pela comissão especial da Escola Politécnica. Os destaques iniciais da comissão foram as dificuldades do estudo do Cálculo, onde ela enumerou dois obstáculos:

dificuldade em si da matéria e a falta de compêndios. Do parecer da comissão, destacamos que "o estudo do calculo integral superior, por si sendo eminentemente difficil, torna-se ainda mais pela falta de compendios onde se encontre esta matéria exposta de um modo completo, sem todavia ter a extensão que deve comportar um tratado"(BARROS, 1890).

Este breve parecer mostra que o binômio, o Cálculo-difícil e a falta de clareza na exposição da matéria, é tão antigo quanto os primeiros passos do Cálculo Infinitesimal no Brasil. A comissão termina com a expectativa de que outro compêndio, de Cálculo das Variações (hypertranscendente theoria), seja apresentado.

2.11 Os Infinitesimais na Educação Básica no Brasil

Como já mencionamos anteriormente, o ensino de Cálculo no Brasil iniciou nas Escolas Militares, no início do século XIX, com a chegada da família real. As primeiras aulas oficiais de Cálculo Infinitesimal foram ministradas pela primeira vez no Curso Mathematico da Academia Real Militar do Rio de Janeiro, criada por D. João VI. A finalidade do Cálculo era compor a formação de profissionais da área militar e engenheiros.

Posteriormente, no final do século XIX, o Cálculo passa a compor o currículo das Escolas politécnicas no final do século XIX e no início do século XX. No ensino médio, o Cálculo já aparece citado como um conteúdo prescrito pela reforma de Benjamim Constant, em 1890. Neste momento da história, a justificativa era dar base para o estudo da Mecânica.

A reforma de Francisco Campos de 1931 estruturou o ensino secundário em dois ciclos: o primeiro de cinco anos de duração (fundamental) e outro (complementar) de dois anos. Esta reforma, segundo (ROMANELLI, 2001, apud, p.135),

> criou uma situação completamente nova para a escola secundária. Até o final da década de 1920 (...) imperava o sistema de “preparatórios” e de exames parcelados para ingresso no ensino superior, sendo o currículo seriado, quando existente, pouco procurado. (...) a Reforma Francisco Campos teve o mérito de dar organicidade ao ensino secundário, estabelecendo definitivamente o currículo seriado, a freqüência(Sic) obrigatória, dois ciclos, um fundamental e outro complementar, e a exigência de habilitação neles para o ingresso no ensino superior. Além disso, equiparou todos os colégios secundários oficiais ao Colégio Pedro II, mediante a inspeção federal e deu a mesma oportunidade às escolas particulares que se organizassem, segundo o decreto, e se submetessem à mesma inspeção. Estabeleceu normas para admissão do corpo docente e seu registro junto ao Ministério da Educação e Saúde Pública. Estabeleceu também as normas para a realização da inspeção federal, criou a carreira do inspetor e organizou a estrutura do sistema de inspeção e equiparação de escolas.

Entre muitas mudanças propostas para educação, na exposição de motivos do Decreto nº 21241, de 4 de abril de 1932, diz que "a finalidade do ensino secundário não há de ser a matrícula nos cursos superiores; o seu fim, pelo contrário, deve ser a formação do homem para todos os grandes setores da atividade nacional"(ROMANELLI, 2001, apud, p.135). O que mostra uma opção que procura conciliar a terminalidade e a continuidade e não apenas propedêutica. O ensino de noções de Cálculo estava presente como um conteúdo[41] de matemática da quinta série, acompanhando as mudanças no ensino de matemática que estavam ocorrendo em outros países. O foco dos conteúdos considerados deixa de ter parâmetros e pressupostos para o ensino superior, que determinava o leque e o enfoque das disciplinas do ensino secundário até então - preparar os jovens para a faculdade. O dilema, oferecer uma formação básica para o cidadão ou prepara-lo para um etapa seguinte, tem se propagado ao longo da história até os dias de hoje -preparar os jovens para o ENEM(Exame Nacional do Ensino Médio).

A partir dos anos sessenta as noções de Cálculo deixaram de fazer parte do ensino médio no Brasil. Segundo NETO (2019, p.22) "os currículos de Matemática passam a sofrer alterações relevantes, inspiradas num movimento, em âmbito internacional, (...) trazendo grandes prejuízos ao ensino do Cálculo e da Geometria, por exemplo"[42]. Alguns livros preservaram um espaço, geralmente no volume destinado ao terceiro ano, para tratar do assunto. A abordagem comum da matéria é muito semelhante à do curso universitário (limite, derivada e as vezes integral), mas de forma abreviada.

Diante desse quadro, vamos propor a inserção da ideia intuitiva de infinitesimal no ensino médio, com o propósito de viabilizar uma primeira abordagem de temas básicos do Cálculo. A proposta visa apresentar algumas atividades que envolva estudo de variações, áreas e volumes com contornos não retilíneos, associados as funções elementares.

---

[41] Noção de limite. Derivada de x. Derivada de seno de x, co-seno de x, tangente de x e cotangente de x. Interpretação geométrica da noção de derivada. Aplicação da noção de derivada ao estudo da variação de algumas funções simples.
Processos elementares de desenvolvimento em série; convergência de uma série.
Desenvolvimento em série do seno, co-seno e tangente.
Problema inverso da derivação. Primitivas imediatas. Aplicação ao cálculo de certas áreas.

[42] O movimento a que se refere o autor é o Movimento Matemática Moderna (MMM), que enfatizava as estruturas matemáticas, a partir da teoria dos conjuntos.

3 UMA PROPOSTA DE INSERÇÃO DOS INFINITESIMAIS NO ENSINO MÉDIO

> Nas aplicações das matemáticas, um número real Y é quase sempre substituído por um número racional X, que é um valor aproximado deste; quer dizer que a diferença $Y - X$ está compreendida entre $-\epsilon$ e $+\epsilon$, em que ϵ é um número positivo a que se chama aproximação de Y por X. *(DIEUDONNÉ, 1990, p.60)*

Como parte integrante desta pesquisa apresentaremos neste capítulo um conjunto de atividades, destinadas a proporcionar aos alunos do ensino médio questões contextualizadas no ambiente histórico da matemática que se relacionam com a ideia intuitiva de infinitesimal. Como norteador metodológico serão desenvolvidas, situações de ensino que suscite nos envolvidos uma participação ativa e construtiva da ideia intuitiva do infinitamente pequeno na matemática. As questões propostas estão relacionadas aos conteúdos prescritos para este segmento da educação básica brasileira e a ideia de infinitesimal é um suporte para a resolução do que está sendo proposto.

Nosso propósito é sugerir atividades que possa fazer parte das aulas de matemática do ensino médio e a ideia intuitiva de infinitesimal esteja presente. Para isto vamos iniciar com atividades que envolve aproximações de números reais, seguida de áreas abaixo do gráfico de uma função elementar, um caso de volume de revolução e por último, casos de taxa de variação. O desenvolvimento das atividades pressupõe que os conteúdos, em que vamos inserir os infinitesimais, são conhecidos pelos participantes ou estão sendo estudados por eles. O software GeoGebra será usado como ferramenta de visualização gráfica e sempre que possível como calculadora para aproximar resultados.

3.1 O Algoritmo Babilônico da Raiz Quadrada

Nos capítulos um e dois enfocamos o ambiente histórico do surgimento das ideias de infinitesimal, da antiguidade até o século XVII. Desse levantamento histórico vamos selecionar o cálculo de uma raiz quadrada não exata, aproximando[43] um número irracional por um número racional (DIEUDONNÉ, 1990). Didaticamente vamos interpretar geometricamente a raiz quadrada como o lado de um quadrado. Uma boa aproximação será aquela que é corresponde ao lado do quadrado de área mais próxima possível ou igual

[43] (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.529)

do valor do radicando.

Esta atividade tem por objetivo mostrar como podemos fazer aproximações de números reais por números racionais caracterizando de forma intuitiva que um número real é uma série infinita[44]. Vamos usar o algoritmo babilônico da raiz quadrada para calcular o valor aproximado de uma raiz quadrada não exata.

Lembremos que, dado um número real a$\geq$0, existe um único número real não negativo x tal que x^2 = a, por definição, este número real x$\geq$0 não negativo é a raiz quadrada de a: $\sqrt{a}$ = x. Aplicando esta definição podemos dizer que $\sqrt{2,25}$ é um número entre 1 e 2, pois 1^2 < 2,25 < 2^2. De fato $\sqrt{2,25}$ = 2,25, dado que 1,5^2 = 1,5×1,5 = 2,25. Neste caso temos um resultado racional (1,5) para a raiz quadrada de 2,25.

Nossa questão inicial é como encontrar um valor aproximado (racionais) para algumas raízes quadradas que aparece com frequência no contexto da matemática da educação básica. Nossa primeira busca será encontrar um processo que proporcione encontrar o valor aproximado de $\sqrt{5}$, usando relação de recorrência.

No livro História da Matemática, BOYER (2012) faz o seguinte comentário sobre os babilônicos:

> Os matemáticos mesopotâmios foram hábeis no desenvolvimento de processos algorítmicos, entre os quais um para extrair a raiz quadrada, frequentemente atribuído a homens que viveram bem mais tarde. Às vezes, este é atribuído ao sábio grego Arquitas(428-365 a.C.) ou a Heron de Alexandria (100 d.C. aproximadamente); ocasionalmente é chamado algoritmo de Newton. Esse processo babilônico é tão simples quanto eficiente. Seja $x = \sqrt{a}$ raiz quadrada desejada e seja a_1, uma primeira aproximação dessa raiz; seja b_1 uma segunda aproximação dada pela equação $b_1 = a/a_1$. Se a_1 é pequeno demais, b_1 é grande demais e vice-versa. Logo, a média aritmética $a_2 = 1/2(a_1 + b_1)$ é uma próxima aproximação plausível. Como a_2 é sempre grande demais, a seguinte, $b_2 = a/a_2$ será pequena demais e toma-se a média aritmética $a_3 = 1/2(a_2 + b_2)$ para obter um resultado ainda melhor; o processo pode ser continuado indefinidamente, (...) No algoritmo babilônico para raiz quadrada, acha-se um processo iterativo que poderia ter levado os matemáticos da época a descobrir processos infinitos, mas eles não levaram adiante a pesquisa das implicações de tais problemas. (BOYER, 2012, p.42)

Esse dispositivo babilônico é muito eficiente para aproximar a raiz quadrada de um número real positivo. Nós podemos usá-lo com a notação de recorrência e associado a uma interpretação geométrica e gráfica-funcional.

Dado um número real positivo **a**, a raiz quadrada de **a** é obtida através da sequência de passos:

1º) Assumimos inicialmente uma aproximação x_1 para $x = \sqrt{a}$ e calculamos $y_1 = a/x_1$.

2º) Com esses dois valores iniciais, aplicamos sucessivamente as relações de recorrências

[44] Para KOLMOGOROV(1976, p.49) "um número real se pode definir ... como uma fração decimal finita ou infinita".

para calcular respectivamente x_{n+1} e y_{n+1}, aproximações sucessivas de $\sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \ e \ y_n = \frac{a}{x_n}\ , \ para \ \ n \ inteiro \ posisitivo$$ [45]

Para cada iteração (x_n, y_n), encontramos um valor mais aproximado para a raiz quadrada de **a**.

Para exemplificar, calcularemos o valor aproximado de $\sqrt{5}$ usando o método babilônico descrito acima.

1º) Considerando que $x_1 = 2$ é um valor aproximado para então $y_1 = a/x_1 = 5/2$.

Esta primeira aproximação nos informa que $2 < \sqrt{5} < 5/2$

2º) Com esses dois valores iniciais, $x_1 = 2$ e $y_1 = \dfrac{5}{2}$ vamos usar as relações de recorrências para calcular valores mais próximos de $\sqrt{5}$:

$x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{1+1} = \dfrac{x_1 + y_1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{2 + 5/2}{2} = \dfrac{9/2}{2} = \dfrac{9}{4} = 2,25$ e com este valor de x_2 podemos calcular $y_2 = \dfrac{a}{x_2} = \dfrac{5}{9/4} = \dfrac{20}{9} = 2,2222...$ observe que com esta iteração encontramos duas aproximações, $x_2 = 2,25 \ e \ y_2 = 2,22$, melhores que as duas iniciais, ou seja $20/9 < \sqrt{5} < 9/4$.

3º) Com esses dois novos valores, $x_2 = \dfrac{9}{4}$ e $y_2 = \dfrac{20}{9}$ vamos usar as relações de recorrências para calcular mais duas aproximações de $\sqrt{5}$.

$x_{2+1} = \dfrac{x_2 + y_2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \dfrac{9/4 + 20/9}{2} = \dfrac{161/36}{2} = \dfrac{161}{72} = 2,236111...$ e $y_3 = \dfrac{a}{x_3} = \dfrac{5}{161/72} = \dfrac{360}{161} = 2,2360111$

...

Com esta última iteração encontramos duas aproximações[46] , $x_2 = 2,236111... \ e \ y_1 = 2,236024...$, melhores que as anteriores, ou seja $360/161 < \sqrt{5} < 161/72$ ... .

Comparando o valor obtido pelo método babilônico com o valor da $\sqrt{5} = 2,2366797...$ obtido com uma calculadora, verifica-se que o erro está na quarta casa decimal. Já é uma boa aproximação para a raiz quadrada de cinco e pode ser melhorada com mais iterações.

O algoritmos babilônico para obter a raiz de um número real **a** > 0 pode ser interpretado geometricamente considerando o fato que a raiz quadrada de **a** corresponde geometricamente a encontrar o lado de um quadrado[47] de área **a**.

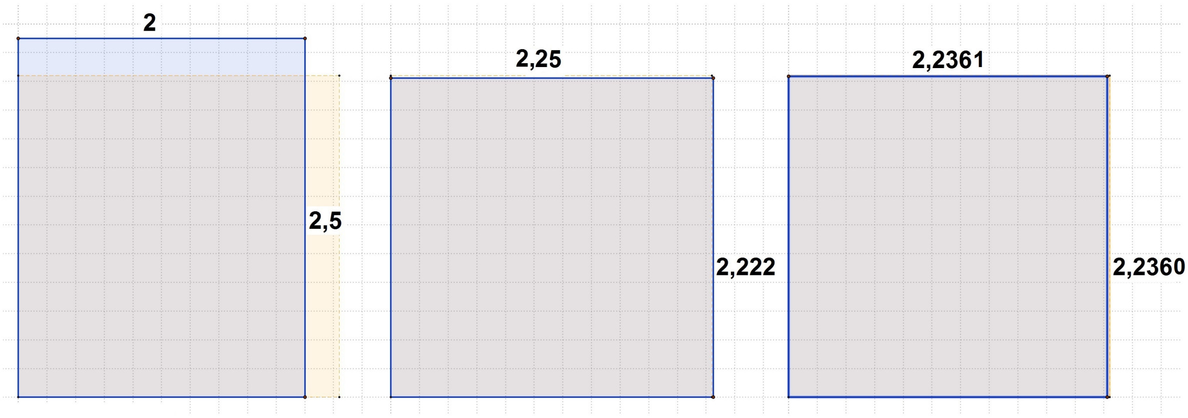
---

[45] Outra forma de escrever a sequência: $x_1 = 1^{\underline{a}}$ aproximação da $\sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$.

[46] Uma aproximação x para $\sqrt{5}$ é uma forma de substituir a igualdade $\sqrt{5} = x$ pela desigualdade $x - \epsilon < \sqrt{5} < x + \epsilon$ ou simplesmente $|x - \sqrt{5}| < \epsilon$

[47] Esta ideia está presente em (FREUDENTHAL, 1975, p.51-53)

Figura 15 - Uma interpretação Geométrica do algoritmo babilônico da raiz quadrada

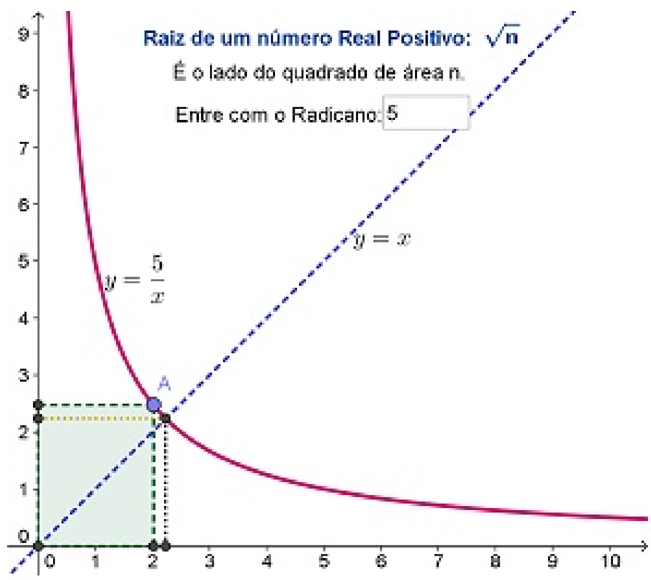


Fonte: Construído com GeoGebra.

Na figura 15, partimos de um retângulo de lados 2 e 2,5 (as duas aproximações iniciais, o 'chute' e a comparação), que tem área 5. A seguir consideramos um retângulo de lado igual a média aritmética de 2 e 2,5 e o outro lado igual ao quociente entre 5 e média aritmética(2,25). No terceiro retângulo um lado é igual a média aritmética de 2,25 e 2,2222 e o outro lado igual ao quociente entre 5 e média aritmética (2,2361). O processo continua e a cada passo o retângulo aproxima-se de um quadrado.

O método babilônico também pode ser interpretado graficamente como o ponto de intersecção entre o gráfico (hipérbole) de x.y = **a** e o gráfico de y = x, isto é, o ponto em que o retângulo de área **a** tem lados iguais. No caso da raiz de 5, temos: $x.y = 5 \Rightarrow y = 5/x$ (modelo funcional).

Figura 16 - Uma interpretação gráfica do algoritmo babilônico da raiz quadrada



Fonte: Construído com GeoGebra.

No gráfico da figura 16, apresentamos um esboço feito com o GeoGebra, onde a raiz quadrada corresponde ao ponto de intersecção entre o ramo da hipérbole $y = 5/x$ e a reta $y = x$.

Por último, podemos resumir os passos do algoritmo da raiz quadrada na forma tabular (planilha), veja a tabela da figura 17.

Figura 17 - Uma apresentação tabular do algoritmo babilônico da raiz quadrada

Forma Geral	**Cálculo da Raiz Quadrada de 5**	**Comentário**
$\sqrt{a} \cong x_1$	$\sqrt{5} \cong 2$	1^a aproximação da raiz. Chute um número qualquer
$y_1 = \frac{a}{x_1}$	$y_1 = \frac{5}{2} = 2,5$	Correção da 1^a aproximação da raiz.
$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}$	$x_2 = \frac{2 + 5/2}{2} = 9/4 = 2,25$	2^a aproximação da raiz, pela média aritmética de x_1 e y_1.
$y_2 = \frac{a}{x_2}$	$y_2 = \frac{5}{9/4} = 20/9 = 2,222...$	Correção da 2^a aproximação da raiz.
$x_3 = \frac{x_2 + y_2}{2}$	$x_3 = \frac{9/4 + 20/9}{2} = 161/72 = 2,2361...$	3^a aproximação da raiz, pela média aritmética de x_2 e y_2.
$y_3 = \frac{a}{x_3}$	$y_3 = \frac{5}{161/72} = 360/161 = 2,23602...$	Correção da 3^a aproximação da raiz.
$x_4 = \frac{x_3 + y_3}{2}$	$x_4 = \frac{161/72 + 360/161}{2} = 2,236067...$	4^a aproximação da raiz, pela média aritmética de x_3 e y_3.
$y_4 = \frac{a}{x_4}$	$y_4 = \frac{5}{2,236067978} = 2,23606797...$	Correção da 4^a aproximação da raiz.
...	...	...

Fonte: Construído com LaTeX.

O uso do algoritmo babilônico da raiz quadrada é um método antigo de aproximar um número real por um número racional. Este procedimento de cálculo permite observa uma convergência para a raiz quadrada usando um raciocínio recorrente e com diferentes representações[48]: algébrica, gráfica-geométrica e tabular. Com exemplos concretos pode-se verificar que este algoritmo fornece rapidamente boas aproximações para $\sqrt{a}$.

3.2 O Método de Newton para Raiz de um Polinômio

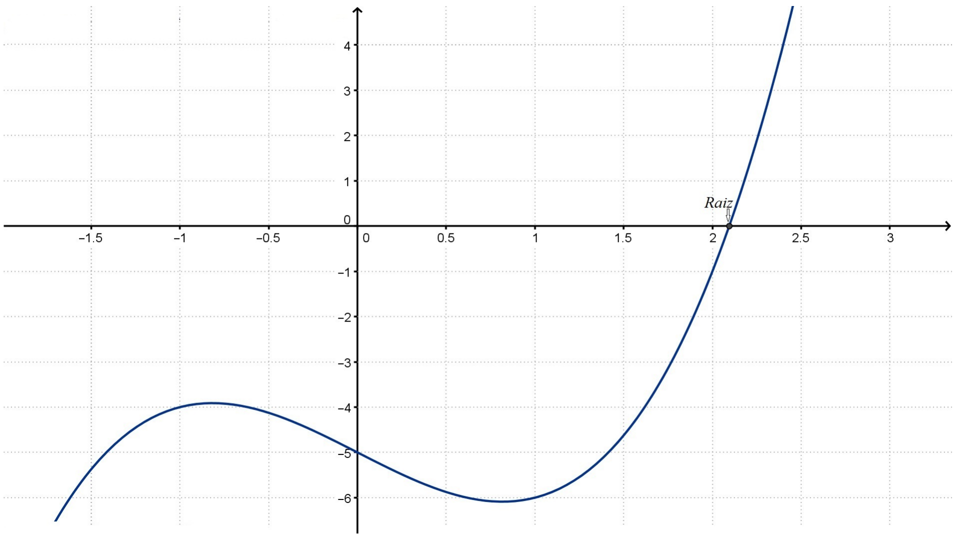
Na matemática do ensino médio o processo de cálculo de uma raiz de um polinômio é muito comum. Quando buscamos uma raiz de polinômio, e esta é irracional, uma

[48] (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.528)

aproximação numérica é desejável. Para aproximar uma raiz real de um polinômio podemos contar com o método interativo de Newton, que permite convergir rapidamente para o valor procurado. Este método foi apresentado na segunda metade do século XVII. O método de Newton será adaptado e apresentado a seguir no cálculo de uma das raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 2x - 5$, apoiado pela representa gráfica feita com o GeoGebra.

1º) Iniciaremos representando graficamente o polinômio $f(x) = x^3 - 2x - 5$ no plano cartesiano, veja a figura 18:

Figura 18 - Representação Gráfica da Função $y = x^3 - 2x - 5$



Fonte: Construído com GeoGebra.

2º) inspecionando o gráfico podemos inferir que a raiz $x_1 = 2 + a$, onde $0 < a < 1$. Substituindo $x_1 = 2 + a$ em f(x): $f(x_1) = (2 + a)^3 - 2.(2 + a) - 5 = 8 + 12a + 6a^2 + a^3 - 4 - 2a - 5 = -1 + 10a + 6a^2 + a^3 = 0$.

Como $0 < a < 1$, os termos de potências de expoente 2 e 3 serão desprezados. Com isto temos: $-1 + 10a = 0 \Rightarrow a = 1/10 = 0,1$. Seque que, a primeira aproximação para a raiz é $x_1 = 2 + 0,1 = 2,1$.

3º) Calculando uma segunda aproximação para a raiz considerando a primeira. Substituindo $x_2 = 2,1+b$ em $f(x)$: $f(x_2) = (2,1+b)^3 - 2.(2,1+b) - 5 = 0,061 + 11,23b + 6,3b^2 + b^3$. Desprezando os termos de potências de expoente 2 e 3: $0,061 + 11,23b = 0 \Rightarrow b = -0,061/11,23 = -0,005431878896$. Logo, uma segunda aproximação para a raiz é $x_2 = 2,1 + (-0,005431878896) = 2,094568121$.

4º) Calculando mais uma aproximação para a raiz considerando o resultado anterior. Substituindo $x_3 = x_2 + c$ em $f(x)$: $f(x_3) = (x_2 + c)^3 - 2.(x_2 + c) - 5 = 0,000185723 + 11,16164684c + 6,283704363c^2 + c^3$. Desprezando os termos de potências de expoente 2 e 3: $0,000185723 + 11,16164684c = 0 \Rightarrow c = -0,000185723/11,16164684 = -0,0000166393904$. Segue uma terceira aproximação para a raiz: $x_3 = 2,094568121 + (-0,0000166393904) = 2,09455148$. Substituindo x_3 em $f(x)$ encontramos 0,000000005, um valor muito próximo de zero. O procedimento pode continuar, gerando assim outras aproximações.

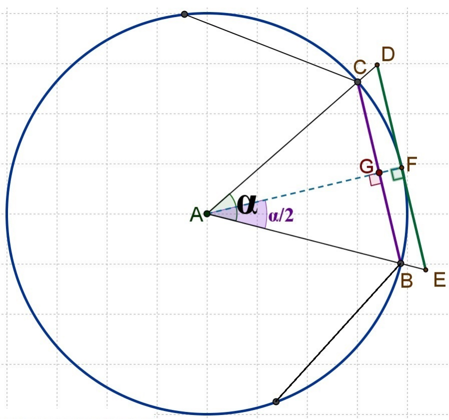
A atividade que foi apresentada pode ser inserida em pelo menos dois momentos no ensino médio. No estudo de funções polinomiais, no primeiro ano, e na abordagem de equações algébricas no terceiro ano. Nos dois momentos que podemos usá-lo, a representação gráfica auxilia na escolha de um ponto de partida. Conhecer este método preenche uma lacuna para o cálculo de uma raiz aproximada de uma equação de grau superior a dois.

3.3 Calculando o valor aproximado de Pi(π)

O número *pi*(π) esta presente na Geometria e Trigonometria da educação básica. O seu valor já estava implícito em cálculos efetuados muito antes do terceiro século antes de Cristo. Porém, foi Arquimedes (287 - 212 a.C.) que chegou a uma boa aproximação do valor para a razão entre uma circunferência e o seu diâmetro (π) na antiguidade clássica[49], fazendo uma aproximação da circunferência através de polígonos regulares inscritos e circunscritos. Usando polígonos de 96 lados, inscritos e circunscritos numa circunferência, ele chegou a $223/71 < \pi < 220/70$.

A seguir, apresentamos uma versão da ideia de Arquimedes para calcular *pi* associada a noções básicas de trigonometria. Inscrevendo e circunscrevendo polígonos regulares numa circunferência, à medida que aumentamos o número de lados do polígono o seu contorno tende a circunferência, ao mesmo tempo que o comprimento de cada lado se torna muito pequeno.

Figura 19 - Polígono Regular Inscrito num Círculo



Fonte: Construído com GeoGebra.

Se considerarmos um polígono regular de **n** lados inscrito numa circunferência de raio **r**, veja a figura 19. O ângulo central α, onde $\alpha = 360^o/n$, oposto ao lado BC do

[49] Corresponde, aproximadamente, ao período do VIII a.C. a V d.C

polígono inscrito, pode ser relacionado com o perímetro do polígono através da razão trigonométrica do seno de $\alpha/2$. Do mesmo modo, o lado DE do polígono circunscrito pode ser relacionado com o perímetro do polígono através da razão trigonométrica da tangente de $\alpha/2$.

No triângulo retângulo ABC a altura incide no ponto médio do lado BC, dividindo-o em dois triângulos retângulos congruentes. No triângulo retângulo ABG o seno do ângulo agudo $\alpha/2$ é expresso por: $\text{sen}(\alpha/2) = \frac{BG}{AB} = \frac{BC/2}{r} = \frac{BC}{2r}$, logo $BC = 2.r.sen(\alpha/2) = 2.\text{r.sen}(180^o/n)$.
O lado BC do triângulo ABC é um lado do polígono regular de **n** lados inscrito na circunferência de raio **r**. Portanto, o perímetro do polígono regular é: $p_n = 2.n.r.sen(180^o/n)$.

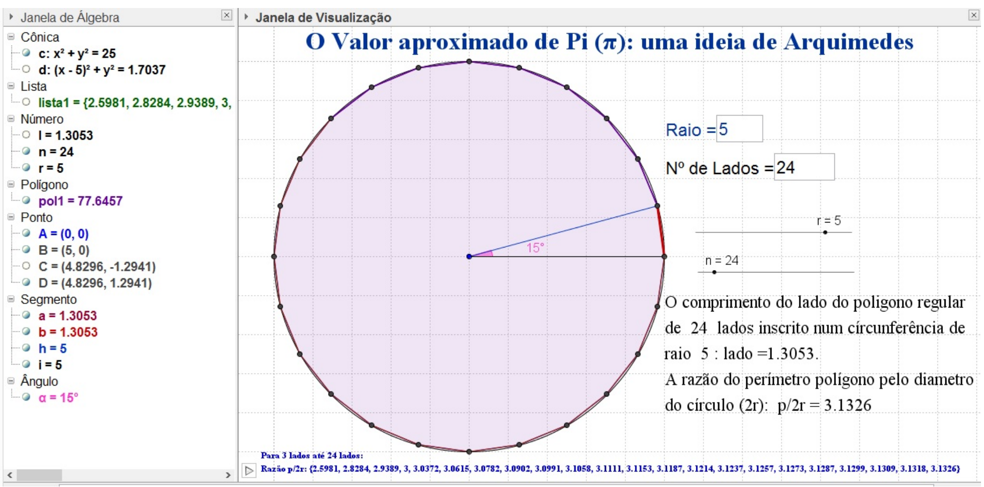
Aplicando a fórmula acima para o caso do polígono inscrito de 96 lados, o perímetro é $p_{96} = 2.96.r.sen(\frac{180^o}{96}) \cong$ 6,2821r.

Para o polígono circunscrito, procedemos de modo semelhante considerando o triângulo retângulo AEF da figura 19. A tangente trigonométrica do ângulo $(\alpha/2)$ é $\text{tg}(\alpha/2) = \frac{EF}{AF} = \frac{DF/2}{r} = \frac{DF}{2r}$. logo $\text{DF} = 2.\text{r.tg}(\alpha/2) = 2.\text{r.tg}(180^o/n)$.

O lado do DE do triângulo ADE é um lado do polígono regular de **n** lados circunscrito na circunferência de raio **r**. Portanto, o perímetro do polígono regular é: $P_n = 2.n.r.tg(180^o/n)$.

Aplicando a fórmula acima para o caso do polígono circunscrito de 96 lados, o perímetro é $P_{96} = 2.96.r.tg(\frac{180^o}{96}) \cong$ 6,2854.r. O comprimento da circunferência é um valor compreendido entre os perímetros dos polígonos regulares inscrito e circunscrito, isto é $6,2821.r < c < 6,2854.r$. Dividindo a desigualdade por 2r encontramos $3,1410 < c/(2r) < 3,1427$. Uma boa aproximação para o valor de Pi ($\text{c}/(2\text{r}) = \pi$).

Figura 20 - Janelas do Cálculo Aproximado de Pi no GeoGebra



Fonte: Cópia da Interface do GeoGebra.

Utilizando as fórmulas[50], $p_n = 2.n.r.sen(180^o/n)$ e $p_n = 2.n.r.tg(180^o/n)$, com o auxílio do GeoGebra é possível criar um uma forma dinâmica de verificar a aproximação do valor de Pi a partir de polígonos regulares inscritos e circunscritos, veja a figura 20. Esta figura expõe uma aproximação (3,1326) do valor de Pi(π) quando consideramos um polígono regular de 24 lados inscrito na circunferência de raio r=5cm. Nesta simulação é possível visualizar e comparar resultados alterando o número de lados dos polígonos regulares inscritos. A medida que aumentamos o número de lados observaremos que a razão, perímetro/diâmetro, converge para o número π.[51]

O que apresentamos até aqui exemplifica que um número real é uma sequência infinita: $k, a_1a_2a_1a_3....$ Uma forma de trabalhar com esses números é aproxima-los por um número racional. O apendice B apresenta um esboço histórico do valor calculado de π ao longo do tempo, ou seja, as aproximações racionais do valor de π.

A ideias de Arquimedes aqui apresentada para o cálculo de $Pi(\pi)$ foi adaptada ao contexto da trigonometria. Tal opção tornou possível relacionar o perímetro dos polígonos, inscritos e circunscritos, em função do raio e do número de lados.

3.4 Uma Soma Infinita

A atividade que agora vamos apresentar é uma questão vinculadas ao estudo de séries geométricas decrescentes, assunto que faz parte da BNCC [52]. Nosso contexto histórico é a Grécia Antiga.

Na Grécia Antiga o filósofo Zenão de Eleia (c.450 a.C) propôs diversos paradoxos[53] sobre o movimento. Um deles e denominado paradoxos de Aquiles que Devlin (2002) descreve assim:

> Aquiles vai competir com a tartaruga numa extensão, digamos, de 100 metros. Uma vez que Aquiles é capaz de correr a uma velocidade dez vezes superior à da tartaruga, é dado um avanço de 10 metros à tartaruga. Dá-se início à corrida e Aquiles começa a perseguir a tartaruga. Durante o tempo que Aquiles demorou a percorrer os 10 metros necessários para atingir o ponto de onde a tartaruga tinha partido, a tartaruga tinha avançado exactamente 1 metro e, por isso, encontrava-se 1

[50] (EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.541)

[51] Sobre o número de casas de π visite https://www.atractor.pt/mat/fromPI/.

[52] (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (BRASIL, 2017, p.541)

[53] "O que é contrário à 'opinião da maioria', ou seja, ao sistema de crenças comuns a que se fez referência, ou contrário a princípios considerados sólidos ou a proposições científicas."(ABBAGNANO, 2000, p.742)

> metro à sua frente. Depois de Aquiles ter percorrido esse metro, a tartaruga encontrava-se dez centímetros à frente. Quando Aquiles atinge esse ponto, a tartaruga encontrava-se 1 centímetro à frente. E por aí adiante até ao infinito. A argumentação continua, a tartaruga mantém-se sempre à frente, embora a distâncias cada vez mais pequenas; Aquiles nunca conseguirá ultrapassar a sua adversária e ganhar a corrida. (DEVLIN, 2002, p.81)

A descrição acima apresenta Aquiles percorrendo em cada etapa as seguintes distâncias: 10, 1, 1/10, 1/100, ... e sempre resta uma distância muito pequena para Aquiles alcançar a tartaruga. O percurso percorrido por Aquiles desde o início da corrida é: S = 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + ..., uma soma infinita de parcelas.

Para mostrarmos que o corredor consegue acompanhar a tartaruga devemos realizar a soma S = 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + ..., com S medido em metros:
1^o) Para isto vamos multiplicar os dois membros da igualdade por 10:
10.S = 100 + 10 + 10/10 + 10/100 + 10/1000 + ...
$10.S = 100 + \underbrace{10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + ...}$
2^o) Substituindo 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + ... por S:
10.S = 100 + S ⇒ 9.S = 100 ⇒ S = 100/9.
Esta soma infinita tem um resultado finito, o que mostra que Aquiles alcançara a tartaruga depois de percorrer 100/9 metros.

Sobre a forma como realizamos este cálculo, Keith Devlin faz um comentário interessante:"(...) a chave para encontrar o valor de uma série foi desviar a atenção do processo de adição dos termos individuais para a identificação e manipulação do padrão global (...) esta é a chave para lidar com o infinito em matemática"(DEVLIN, 2002, p.82). Um outro fator que tornou possível encontrar o resultado é a característica geométrica da série: cada termo sucessivo é o anterior multiplicado por um valor constante q entre zero e 1. Isto é
$S = a + a.q + aqq + aqqq + aqqqq + ... \Rightarrow S = a + a.q + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ...$
1^o) Multiplicando os dois membros da igualdade por q:
$qS = qa + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ...$
Na igualdade original $S = a + \underbrace{a.q + aq^2 + aq^3 + aq^4 + ...}$ temos uma parte correspondente a qS.
2^o) Substituindo qS em S:
$S = a + Sq \Rightarrow S - qS = a \Rightarrow S(1-q) = a \Rightarrow S = a/(1-q)$.

O procedimento que apresentamos acima pode nos auxiliar a encontrar a geratriz de uma dízima periódica do tipo 0,aaaaa... , um assunto do cotidiano da matemática escolar do ensino médio.
1^o) Esta representação decimal implica 0,aaaaa... = a/10 + a/100 + a/1000 + a/10000 + ... Para simplificar a escrita vamos chamar 0,aaaa... de S.
Multiplicando por 10 os dois membros da igualdade:

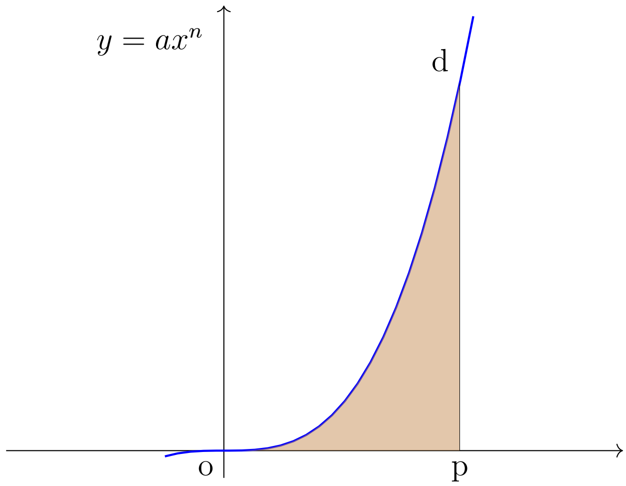
10.S = 10a/10 + 10a/100 + 10a/1000 + 10a/10000 + ...
10.S = a + $\underbrace{a/10 + a/100 + a/1000 + ...}$
2^o) Substituindo a/10 + a/100 + a/1000 + ... por S:
10.S = a + S ⇒ 9.S = a ⇒ S = a/9. Portanto, a geratriz da dízima 0,aaaa... é a/9.[54] De forma análoga podemos obter outras regras para obter a geratriz de uma dízima.

3.5 Área sob o gráfico de y = ax^n (Integral de Fermat)

Nosso propósito agora é generalizar uma regra para o cálculo da área de uma função polinomial do tipo **y = f(x)** = ax^n num intervalo [a, b]. Para isto, utilizaremos uma ideia do matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665).

No gráfico ao lado temos uma representação da área abaixo do gráfico da função real **f(x)** = ax^n no intervalo [0, p], onde $n \in \mathbb{N}$.

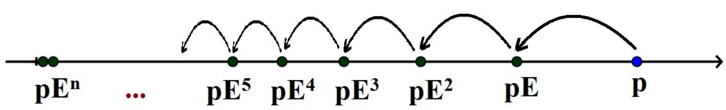
Figura 21 - Esboço Genérico do Gráfico da Função $y = ax^n$



Fonte: Construído no LaTeX/TikZ.

A figura é limitada pelos segmentos **op**, **pd** e o arco da curva **od**. Vamos começar dividindo o intervalo [0, p] em **n** subintervalos usando uma progressão geométrica decrescente de razão $0 < E < 1$, mas considerando E muito próximo de 1 e fazendo **n** tender a infinito.

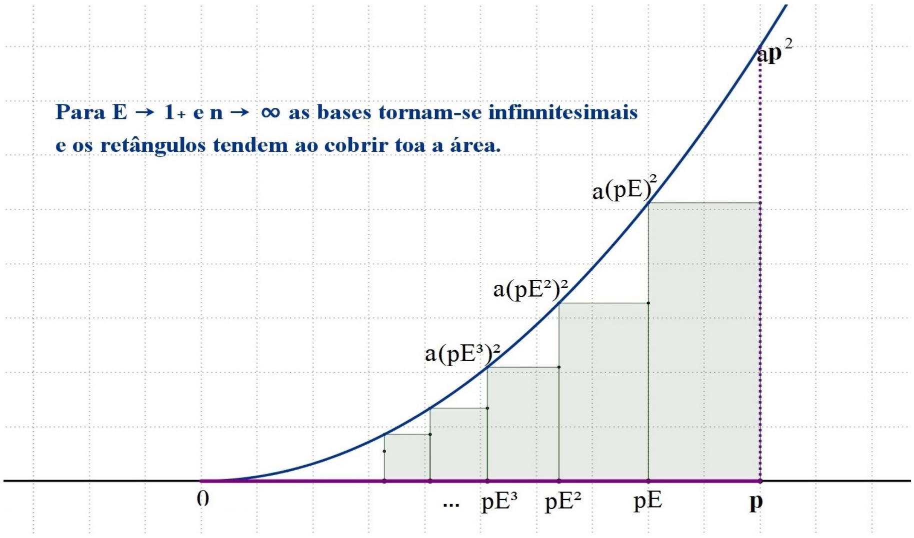
Considerando p como primeiro termo, o segundo termo é pE, o terceiro é pE^2, o quarto é pE^3, e assim sucessivamente:$(p, pE, pE^2, pE^3, ..., pE^n)$.



[54] Aplicando este resultado a dízima 0,555..., escrevemos que 0,555... = 5/9.

Sobre cada subintervalo vamos construir um retângulo de base no subintervalo e altura igual a ordenada da função aplicada no extremo da direita.
A área abaixo do gráfico da função no intervalo [0, p] será aproximada pela soma das áreas dos retângulos construídos com as bases nos subintervalos:

Figura 22 - A Integral de Fermart da Função $y = ax^n$



Fonte: Construído no GeoGebra.

$S_n = (p - pE).ap^n + (pE - pE^2).a(pE)^n + (pE^2 - pE^3).a(pE^2)^n + (pE^3 - pE^4).a(pE^3)^n + (pE^4 - pE^5).a(pE^4)^n + ... + (pE^{n-1} - pE^n).a(pE^{n-1})^n$.

Esta soma é a soma dos termos de uma progressão geométrica (P.G.) de razão $E^1.E^n$. Aplicando a fórmula da soma de uma P.G. infinita e decrescente ($S_n = a_1/(1-q)$): $S_n = \dfrac{(p - pE).ap^n}{1 - E^{1+n}} = \dfrac{(1 - E).ap^{n+1}}{1 - E^{1+n}}$. A expressão $1 - E^{1+n}$ pode ser escrita como $(1 - E).(1 + E + E^2 + E^3 + \cdots + E^n)$, logo $S_n = \dfrac{ap^{n+1}}{1 + E + E^2 + E^3 + \cdots + E^n}$.

Para E muito próximo de 1 ($E \cong 1$) a expressão $1 + E + E^2 + E^3 + \cdots + E^n$ torna-se aproximadamente uma soma de n+1 parcelas 1: $\cong 1 + 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n$. Portanto, a área assim calculada é: $S_0^p = \dfrac{ap^{n+1}}{n+1}$, onde S_0^p representa a área abaixo do gráfico de $y = ax^n$ no intervalo [0, p].

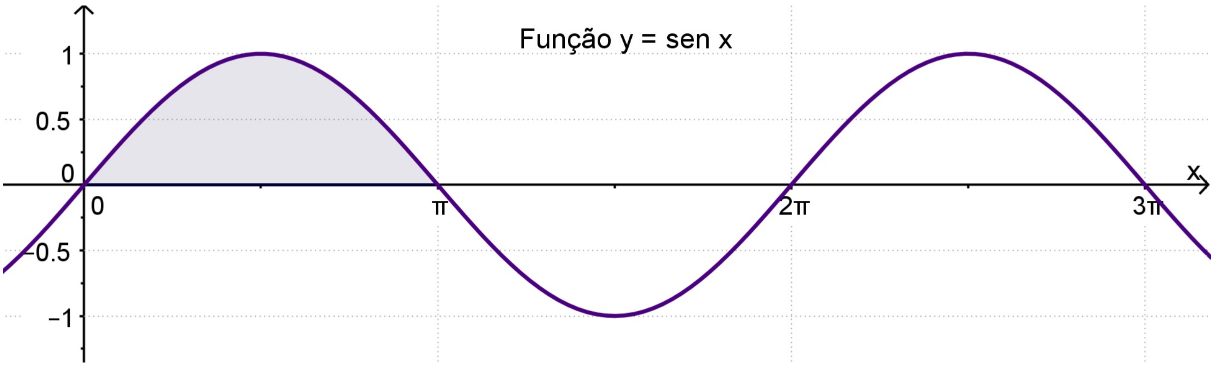
O resultado acima pode ser expresso usando a linguagem atual do Cálculo Diferencial e Integral: $\int_0^p ax^n dx = \dfrac{ap^{n+1}}{n+1}$, onde $\int_0^p ax^n dx$ indica, neste caso, a área abaixo do gráfico da função $y = ax^n$ no intervalo [0, p]. Com esta generalização podemos calcular $\int_0^3 x^2 dx = \dfrac{3^{2+1}}{2+1} = \dfrac{3^3}{3} = \dfrac{27}{3} = 9$. O valor encontrado corresponde a área sob o gráfico de $y = x^2$ no intervalo $[0, 2]$.

3.6 Área sob o gráfico de $y = sen(x)$ no intervalo [0, π]

Esta atividade deve ter como contexto o estudo das funções trigonométrica[55]. É preciso também conhecimentos de algumas relações trigonométricos. A características da função que vamos enfocar é a área sob o seu gráfico. Vamos recortar a figura formada abaixo do gráfico em retângulos verticais de bases muito pequenas.

A função seno associa cada x∈**R** com o seu seno. Esta função tem como gráfico uma senoide variando de -1 a 1 no eixo y, veja figura 23.

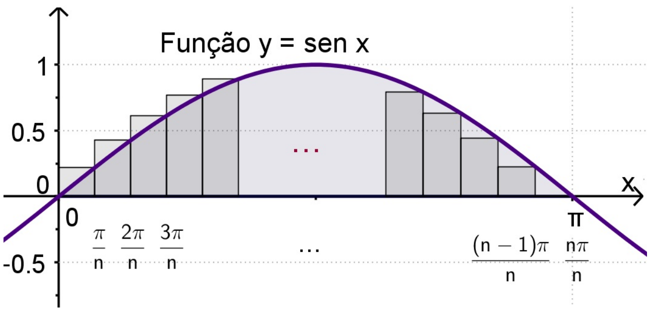
Figura 23 - Gráfico da Função $y = sen(x)$



Fonte: Construído no GeoGebra.

Nosso objetivo é calcular a área abaixo do gráfico de **y = sen x** no intervalo [0, π]. Vamos começar dividindo o intervalo [0, π] em n subintervalos e comprimento h = (π - 0)/n = π/n, veja a figura 24.

Figura 24 - Divivão do Intervalo [0, π] em n pate iguais



Fonte: Construído no GeoGebra.

Sobre cada um dos subintervalos vamos construir um retângulo com base no subintervalo e altura igual ao seno da abscissa do extremo superior do subintervalo. A O conjunto de abscissas dos extremos superiores dos subintervalos é conjunto $\{\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ \dots \ , \frac{(n-1)\pi}{n}, \frac{n\pi}{n}\}$.

[55] (EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p.531)

A área abaixo do gráfico de $\mathbf{y = sen\ x}$ no intervalo $[0, \pi]$, será aproximada pela soma das áreas dos retângulos. Assim temos:

$$S_n = \frac{\pi}{n}sen(\frac{\pi}{n}) + \frac{\pi}{n}sen(\frac{2\pi}{n}) + \frac{\pi}{n}sen(\frac{3\pi}{n}) + \ ... \ + \frac{\pi}{n}sen(\frac{(n-1)\pi}{n}) + \frac{\pi}{n}sen(\frac{n\pi}{n})$$

$$S_n = \frac{\pi}{n}[sen(\frac{\pi}{n}) + sen(\frac{2\pi}{n}) + \ sen(\frac{3\pi}{n}) + \ ... \ + sen(\frac{(n-1)\pi}{n}) + sen(\frac{n\pi}{n})]$$

Da trigonometria temos que

$$sen(\alpha) + sen(2\alpha) + sen(3\alpha) + \ ... \ sen(n\alpha) = \frac{sen\frac{n\alpha}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}}.sen(\frac{(n+1)\alpha}{2}. \text{ Logo}$$

$$S_n = \frac{\pi}{n}[\frac{sen(\frac{n}{2}\frac{\pi}{n})}{sen\frac{\pi}{2n}}sen(\frac{(n+1)\pi}{2n})] = \frac{\pi}{n}[\frac{1}{sen\frac{\pi}{2n}}(cos(\frac{\pi}{2n})] = \frac{\pi}{n}[\frac{(cos(\frac{\pi/n}{2})}{sen(\frac{\pi/n}{2})}].$$

Mas $cos(\frac{\pi/n}{2}) = \sqrt{\frac{1+cos(\pi/n)}{2}}$ e $sen(\frac{\pi/n}{2}) = \sqrt{\frac{1-cos(\pi/n)}{2}}$, é o arco metade de π/n.

$$S_n = \frac{\pi}{n}[\frac{\sqrt{\frac{1+cos(\pi/n)}{2}}}{\sqrt{\frac{1-cos(\pi/n)}{2}}}] = \frac{\pi}{n}[\frac{\sqrt{1+cos(\pi/n)}}{\sqrt{1-cos(\pi/n)}}], \text{ racionalizando o denominador:}$$

$$S_n = \frac{\pi}{n}[\frac{\sqrt{(1+cos(\pi/n))^2}}{\sqrt{1^2 - cos^2(\pi/n)}}] = \frac{\pi}{n}[\frac{1+cos(\pi/n)}{\sqrt{sen^2(\pi/n)}}] = \frac{\pi}{\mathbf{n}}[\frac{\mathbf{1+cos(\pi/n)}}{\mathbf{sen(\pi/n)}}].$$

Fazendo a análise variacional da expressão obtida para a soma dos **n** retângulos: quando **n** é muito grande, π/n tende para zero e isto implica que $cos(\pi/n)$ tende a 1 e $sen(\pi/n)$ tende a π/n. Substituindo $cos(\pi/n)$ por 1 e $sen(\pi/n)$ por π/n, $S_n = \frac{\pi}{n}[\frac{1+1}{\pi/n}]$, encontramos o valor $S_n = \mathbf{2}$ para a área abaixo do gráfico de y = sen x no intervalo [0, π].

3.7 Calculando o Volume de um Cone de Revolução

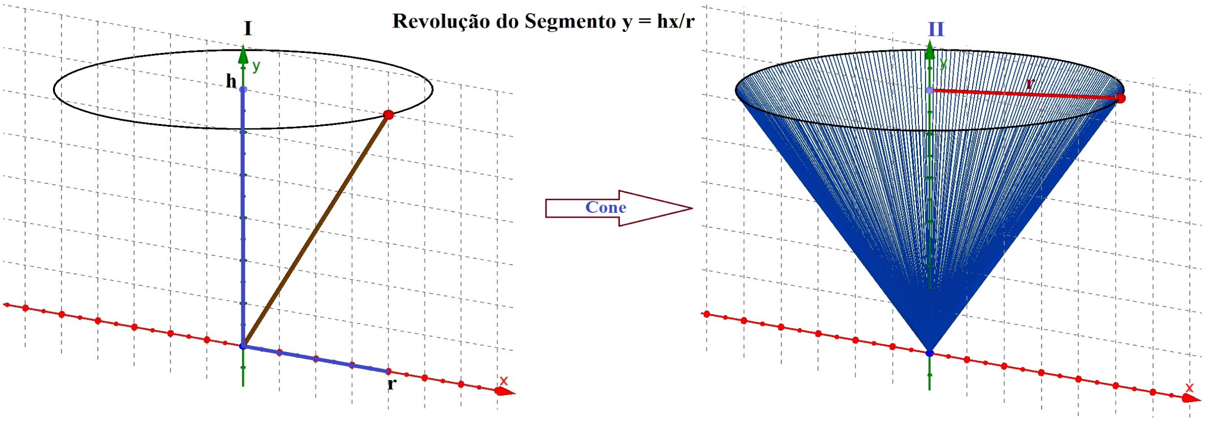
A Base Nacional Comum Curricular fala em investigar processos de obtenção da medida do volume de cone[56]. A atividade que se segue é uma extrapolação da ideia de infinitesimal do plano $\mathbb{R}^2$ para o espaço $\mathbb{R}^3$ e visa a obtenção da medida do volume de um cone de revolução. Para isto vamos rotacionar o segmento y = $\frac{h}{r}$x, considerando $h > 0$, $r > 0$ e x $\in$ [0, r], em torno do eixo y. A rotação gera um cone e nosso propósito é calcular o volume deste sólido gerado, aproximando-o por anéis cilíndricos de alturas infinitesi-

[56] (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. (BRASIL, 2017, p.533)

mais. Na realização da atividade, vamos supor conhecimento do cálculo do volume de um cilindro e isto pode ser contextualizado no estudo de Geometria do Ensino Médio.

1º) O esboço do gráfico, veja a figura 25 I.
Girando o segmento em torno do eixo y a figura definida é um cone de revolução de raio r e altura h, veja a figura 25 II.

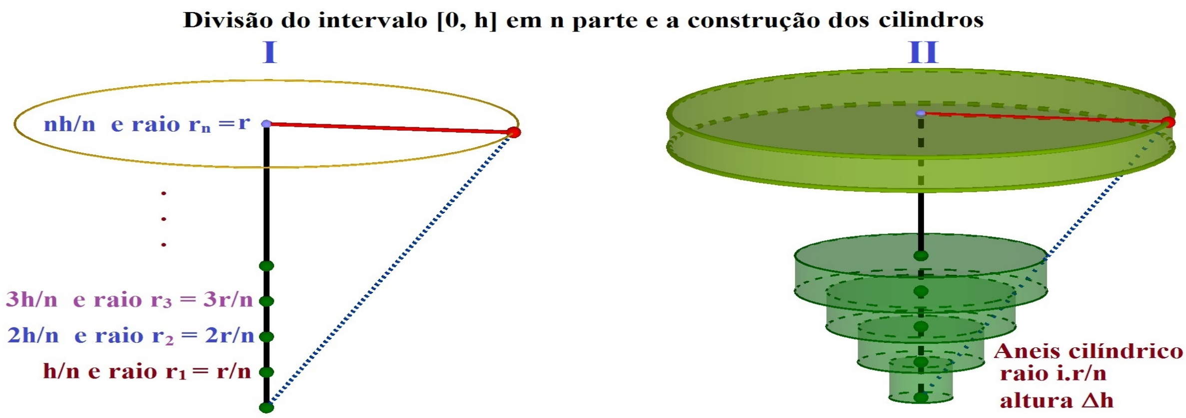
Figura 25 - Gráfico do Segmento $y = hx/r$ e sua rotação em torno do eixo y.



Fonte: Construído no GeoGebra.

2º) Dividindo o intervalo $[0, h]$ em **n** subintervalos de comprimento igual a $\Delta h = \frac{h}{n}$, veja a figura 26 I.

Figura 26 - A rotação $y = hx/r$ em torno do eixo y e construção de anéis cilíndricos.



Fonte: Construído no GeoGebra.

3º) Construindo cilindros com eixo em cada subintervalo i e raio ir/n, com i $\in$ {1,2, 3, .., n}. O volume de cada um dos n cilindro é $V_i = \pi(\frac{ir}{n})^2\Delta h.$, veja a figura 26 II.

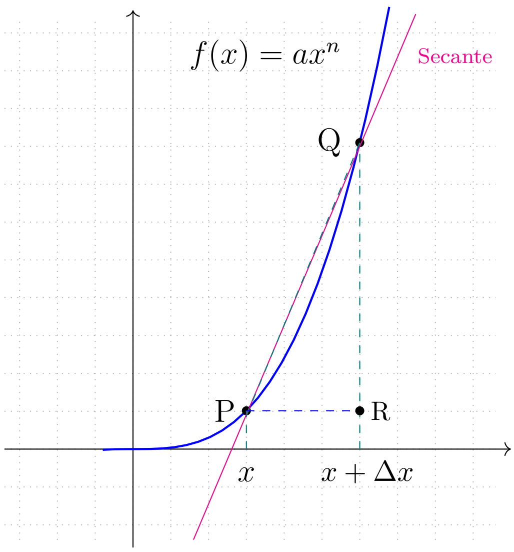
4º) Aproximando o volume do **cone** pela a soma dos volumes dos cilindros.
V $= \pi(\frac{r}{n})^2\Delta h + \pi(\frac{2r}{n})^2\Delta h + \pi(\frac{3r}{n})^2\Delta h + ... + \pi(\frac{nr}{n})^2\Delta h$

V $= [\frac{r^2}{n^2} + \frac{2^2.r^2}{n^2} + \frac{3^2.r^2}{n^2} + ... + \frac{n^2.r^2}{n^2}]\pi r\Delta h = [\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^2}]\frac{\pi r^2 h}{n}$. Mas a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1}{6}$. Logo,
V $= [\frac{n(n+1)(2n+1}{6}]\frac{\pi r^2 h}{n^3} = [\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}]\pi r^2 h = [\frac{2n^2}{6n^2} + \frac{3n}{6n^2} + \frac{1}{6n^2}]\pi r^2 h = [\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}]\pi r^2 h$.
Quando o número de subdivisão (n) aumenta indefinidamente $1/2n$ e $1/6n^2$ tende para zero e os cilindros se aproximam do contorno do cone. Portanto, do volume do cone é $V_{n\to\infty} = [\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2n}} + \cancel{\frac{1}{6n^2}}]\pi r^2 h = [\frac{1}{3} + 0 + 0]\pi r^2 h = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

3.8 Inclinação do gráfico de y = ax^n num ponto

Considerando uma representação genérica do gráfico de $y = ax^n$, $a > 0$ e $x > 0$, nosso propósito é calcular a inclinação da reta tangente no ponto $P(x, f(x))$. Para isto, vamos tomar um segundo ponto $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ e traçar uma secante PQ. A inclinação desta reta **secante**, é dada pela razão $QR/PR = \Delta y/\Delta x$, veja a figura 27.

Figura 27 - Reta Secante PQ



Fonte: Construído no LaTeX/TikZ.

A secante $\overleftrightarrow{PQ}$ da figura 27 tem inclinação QR/PR, onde: $P = (x, f(x))$, $R = (x+\Delta x, f(x)$ e $Q = (x+\Delta x, f(x+\Delta x)$. Podemos transforma esta reta secante numa reta tangente no ponto P, ao considerar um pequeno acréscimo Δx em x (Δx infinitesimal). Expressando analiticamente esta ideia proposta em quatro passos:

1^o) Considerando a função $y = ax^n$, quando produzimos um pequeno acréscimo Δx em x, temos um incremento Δy correspondente em y: $y + \Delta y = a(x + \Delta x)^n$.

2^o) Subtraindo membro a membro a expressão original ($y = ax^n$) da expressão com o pequeno acréscimo ($y + \Delta y = a(x + \Delta x)^n$).

$$
\begin{array}{rcl}
y + \Delta y & = & a(x+\Delta x)^n \\
- \quad y & = & ax^n \\
\hline
\Delta y & = & a[(x+\Delta x)^n - x^n]
\end{array}
$$

Logo[57] $\Delta y = a[(x+\Delta x) - x][(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}.x^1 + (x+\Delta x)^{n-3}.x^2 + (x+\Delta x)^{n-4}.x^3 + ... + (x+\Delta x)^0.x^{n-1})]$. Simplificando:
$\Delta y = a\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}.x^1 + (x+\Delta x)^{n-3}.x^2 + (x+\Delta x)^{n-4}.x^3 + ... + x^{n-1})]$.
3^o) Dividindo o primeiro e segundo membro por Δx chegamos a expressão da inclinação da reta secante.
$\Delta y/\Delta x = a[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}.x^1 + (x+\Delta x)^{n-3}.x^2 + (x+\Delta x)^{n-4}.x^3 + ... + x^{n-1})]$

4^o) Vamos analisar a tendência da expressão anterior quando consideramos Δx muito pequeno: se Δx *tende para* 0, então $(x+\Delta x)$ *tende para* x. Portanto,
$\Delta y/\Delta x = a[(x)^{n-1} + (x)^{n-2}.x^1 + (x)^{n-3}.x^2 + (x)^{n-4}.x^3 + ... + x^{n-1})]$
$\Delta y/\Delta x = a[x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1}]$, temos n parcelas iguais a x^{n-1} no colchete: $\Delta y/\Delta x = a.n.x^{n-1}$.

O desenvolvimento acima mostrou que a inclinação da reta tangente em um ponto $P(x, ax^n)$ é $\Delta y/\Delta x = a.n.x^{n-1}$. Usando a notação comum do Cálculo Diferencial podemos escrever assim: $\dfrac{dy}{dx} = anx^{n-1}$ ou simplesmente $y' = anx^{n-1}$. Os símbolos $\dfrac{dy}{dx}$ (notação de Leibniz), y' ou $f'(x)$ (notação de Newton)são usados no Cálculo para indicar a derivada da função $y = f(x)$. Logo a derivada da função $f(x) = 5x^2$ é $f'(x) = 5.2.x^{2-1} = 10.x$.

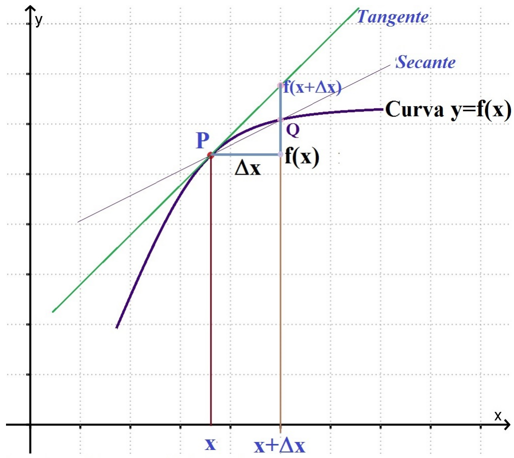
Este último resultado está associado a descoberta da lei da queda dos corpos, feita por Galileu (1564 - 1642) no início do século XVII (KOLMOGOROV, 1976, p.65): o espaço percorrido por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo gasto para percorrê-lo. Mais precisamente, se o corpo é abandonado na posição de repouso, no tempo t = 0, sendo t medido em segundos, então o espaço percorrido pelo corpo em t segundos é dado pela função $y = g.t^2/2$, onde g é a aceleração da gravidade (g é aproximadamente $10m/s^2$) e y é medido em metros, desprezando a resistência do ar. Desta forma o espaço percorrido y depende do tempo da queda t, ou seja, y é uma função de t (t é a variável independente e y é a variável dependente desta função). Sabendo que a taxa de variação do espaço em relação ao tempo, encontre a velocidade[58] em função do tempo t.

[57] Usando a fatoração: $A^m - B^m = (A-B)(A^{n-1}B^0 + A^{n-2}B^1 + A^{n-3}B^2 + A^{n-4}B^3 + ... + A^{n-n}B^{n-1})$

[58] (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc. (BRASIL, 2017, p.529)

Generalizado, o cálculo da inclinação da reta tangente num ponto P de uma curva y = f(x) cuja representação gráfica aparece na figura 28.

Figura 28 - Reta Tangente em P



Fonte: Construído no GeoGebra.

1^o) Iniciamos com o cálculo da inclinação da reta secante PQ, veja a figura 28: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

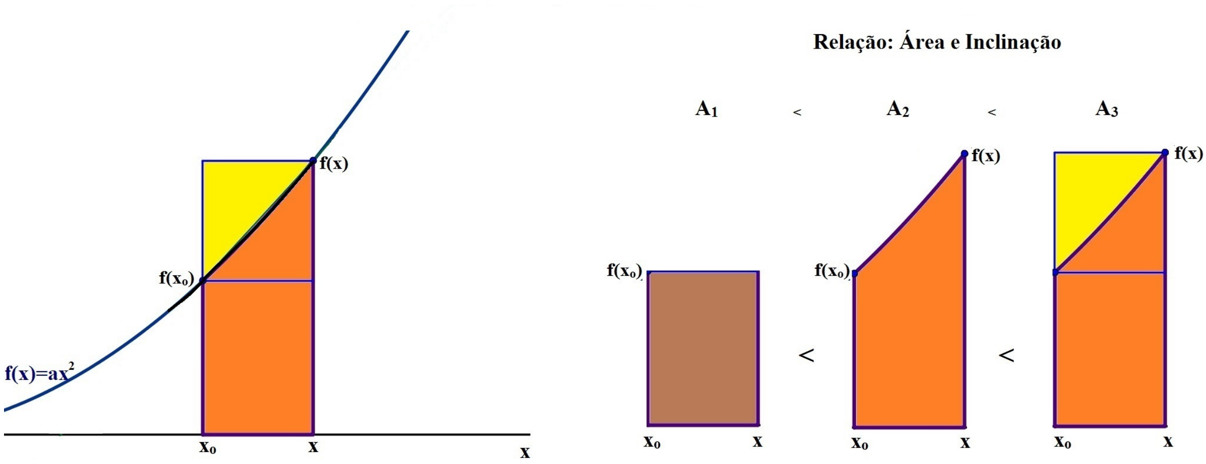
2^o) A inclinação da reta tangente se aproxima da inclinação da reta secante quando Δx é infinitesimal ($\Delta x \to 0$). Usando a linguagem simbólica: $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Esta expressão é a razão incremental de f relativamente ao ponto (abcissa) considerado.

3.9 Uma Relação Infinitesimal entre área e inclinação no gráfico y = ax^2

A figura 29 representa uma parte do gráfico de y = ax^2 nas proximidades do intervalo $[x_o, x]$. Vamos comparar as áreas das três figuras construídas sobre o intervalo considerado: dois retângulos e a figura sob o gráfico no intervalo $[x_o, x]$.

As áreas dos retângulos são: $(x - x_o)f(x_o)$ e $(x - x_o)f(x)$. A área da figura sob a curva $y = ax^2$ no intervalo $[x_o, x]$ já foi calculada em atividades anteriores e é igual a $\dfrac{ax^3}{3} - \dfrac{ax_o^3}{3}$. Comparando as áreas podemos escrever que: $(x - x_o)f(x_o) < \dfrac{ax^3}{3} - \dfrac{ax_o^3}{3} < (x - x_o)f(x)$. Dividido por $(x - x_o)$: $f(x_o) < \dfrac{\frac{ax^3}{3} - \frac{ax_o^3}{3}}{x - x_o} < f(x)$. Quando x se aproxima de x_o f(x) é aproximadamente

Figura 29 - A Área e a Tangente



Fonte: Construído no GeoGebra.

f(x_o), com isto é possível escrever que f(x)= $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\frac{ax^3}{3} - \frac{ax_o^3}{3}}{x - x_o}$. Esta relação, para x muito próximo de x_o, indica que a função f(x) corresponde a inclinação da função que calcula a área sob o seu gráfico. Com isto verificamos que existe uma relação entre calcular a área e a inclinação da reta tangente. Tal relação[59], foi observada na segunda metade do século XVII. Este resultado, pouco formalizado, cria um ambiente para falarmos do teorema fundamental do cálculo. Mostrar um pouco do ambiente histórico e como ele foi importante na constituição do que chamamos de Cálculo Diferencial e Integral.

Neste capítulo, apresentamos atividades para encontrar aproximações de alguns números reais, calcular áreas e volumes com fronteiras não poligonais, investigar taxas de variação, inclinação da reta tangente num ponto específico do gráfico de uma função e por último sinalizar que existe uma relação entre área e taxa de variação. Estas atividades foram inseridas em conteúdo do ensino médio, de modo a não ampliar o rol de assuntos deste segmento da educação básica.

A abordagem das atividades é intuitiva, mas antecipa ideias do Cálculo que envolve recursos para descrever fenômenos que envolve mudança, movimento. No dizer de APOSTOL,

> O cálculo não é apenas um instrumento técnico, mas também contém uma coleção de ideias fascinantes e envolventes que ocuparam o pensamento humano durante séculos. Essas ideias estão relacionadas à velocidade, área, volume, taxa de crescimento, tangente a uma curva, e com outros conceitos referentes a outros domínios. O cálculo nos obriga a parar e pensar cuidadosamente sobre o significado desses conceitos. Outro aspecto notável do cálculo é seu poder unificador. Muitos desses conceitos podem ser formulados de maneira que se reduzam a dois ou-

[59] "Newton e Leibniz descobriram a propriedade notável que constitui o que é comumente conhecido como o teorema fundamental do cálculo"(BOYER, 1959, p.10).

> tros problemas, mais especializados, de natureza puramente geométrica. (APOSTOL, 2001, p.1 e 2)

Apostol refere-se à redução a dois problemas geométricos básicos, são eles: determinar um número que mede a área (por extensão o volume) e determinar um número que mede a inclinação de uma curva. Nesse contexto do Cálculo os infinitésimos desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento de métodos que solucionaram problemas de diversas áreas do conhecimento. A história da matemática e do mundo ocidental moderno é, em grande parte, a história do desenvolvimento e aplicação do Cálculo (ALEXANDER, 2016). Nas atividades propostas usamos os dois métodos infinitesimais, cálculo de área e inclinação da tangente, como eixos norteadores da nossa proposta de atividades.

Como já foi exposto, a presença do Cálculo no ensino médio no Brasil vem sendo discutida desde a reforma de Benjamin Constant do final do século XIX. Ao longo desse tempo muito se escreveu sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo (ver apendice C). A presente pesquisa sugeri a viabilidade de trabalharmos noções intuitivas do Cálculo Infinitesimal no ensino médio, inseridas na diversidade de temas que estão presentes no currículo da educação básica brasileira. O que pensamos ser possível e viável é introduzir nos conteúdos tradicionais a ideia de infinitésimos de forma entrelaçada, como método, minimizando o formalismo, mas que possibilite a análise de situações problema que já fazem parte do universo curricular dos alunos do ensino médio (ÁVILA, 2006). Como exemplo simples podemos citar o cálculo da velocidade instantânea de um objeto que cai em queda livre e tem a sua posição descrita pela função $y = 5t^2$.

CONCLUSÃO

> Ninguém jamais viu os últimos cinco que eu fiz porque nenhuma lente é suficientemente poderosa para torná-los suficientemente grandes para serem considerados verdadeiramente as menores coisas jamais feitas. (...). O que eu estou fazendo agora é quase tão pequeno como o nada. No número 1 caberia um milhão deles ao mesmo tempo e haveria espaço (...) Só Deus sabe onde é que a coisa vai parar e chegar ao fim. *The Third Policeman p.67.*
>
> *Flann O'Brien(1911-1966), escritor irlandês*

O resultado dessa pesquisa tem duas dimensões. Uma foi a experiência de trilhar o percurso histórico das ideias do Cálculo da antiguidade até o século XVIII. A outra foi o desafio de selecionar algumas atividades que viabilize a inserção da ideia intuitiva de infinitesimal no ensino médio.

O percurso histórico que fizemos mostrou que a ideia de infinitesimal surgiu no ambiente cultural das primeiras civilizações, na antiguidade. Continuou adjacente às ideias de infinito durante a idade média e no início dos tempos modernos e tornou-se uma ferramenta de raciocínio para idealizar resolução de problemas antigos e enfrentar os novos que eram formulados. Foi durante o século XVII que o infinitesimal se tornou um conceito, ainda que controverso, que permitia abordar uma classe nova de problemas emergentes, resultante das indagações produzidas no contexto do nascimento da ciência moderna. Com isto, o Cálculo se constituiu como a área da matemática que reuniu esses novos métodos.

No século XVIII, o Cálculo experimentou uma difusão considerável, tanto em termos de aplicações como também se constituindo um conteúdo da matemática superior, em diferentes lugares. No século XIX tem início a busca do rigor na Análise Matemática. O Cálculo então passa a ser fundamentado a partir da definição formal de limite, os famosos épsilons e deltas de Cauchy-Bolzano-Weierstrass.

No Brasil, o Cálculo foi introduzido no início do século XIX com o início da educação superior em solo brasileiro. Na primeira reforma educacional do período da república o Cálculo fez parte da escola secundária. Nas reformas posteriores aos anos sessenta deixou de ser obrigatório nas escolas civis, permanecendo nas militares. Olhando para a história do Cálculo e o seu ensino, propomos não um curso formalizado de Cálculo para o ensino médio, mas inspirado na história, inserir nos conteúdos ordinários problematizações que possam ser tratadas com uso intuitivo dos infinitesimais. Foi isto que intencionamos com as três partes das atividades: aproximando números reais por racionais, calculando área sob o gráfico de funções elementares e medindo sua variação num ponto, apresentados no capítulo três.

Procuramos um enfoque minimalista na apresentação das atividades: alguns números reais, área sob um gráfico e inclinação da reta tangente num ponto específico do gráfico de uma função. A abordagem dos temas apresentados e desenvolvidos são alicerçados em conhecimentos da matemática elementar, com recorrência as tecnologias digitais de aprendizagem. Com essas ferramentas buscamos os resultados a que nos propomos.

As circunstâncias da realização dessa pesquisa foram de distanciamento físico por conta da pandemia de 2020, um contexto que lembra a época que Isaac Newton vivenciou nos anos de 1665 e 1666. Isto dificultou o nosso acesso aos alunos da escola pública, onde já tínhamos iniciado uma oficina sobre as atividades apresentadas no capítulo três. Quanto aos resultados, penso que eles abrem uma trilha para um primeiro contato com as ideias básicas do Cálculo, emolduradas pelo contexto histórico antigo e moderno, expresso com a linguagem dos dias atuais. Outro aspecto que a pesquisa proporcionou foi pensar na ideia de infinitesimal como fonte para deduzir certos resultados que usamos na educação básica. Por último nosso contato com a diversidade de documentos históricos originais que temos disponíveis atualmente para consulta foi inspirador. Penso que investigar mais sobre esses originais pode trazer contribuições para compreendermos como ocorreu a construção de partes da matemática que nos é apresentada de forma consolidada. Em última instância, pode auxiliar o professor a responder à questão recorrente de sala de aula: de onde veio isto? Quem inventou? Para que serve?.

Nesta pesquisa, a ideia de infinitesimal nos proporcionou conhecer a gênese dos conceitos que fazem parte de um curso tradicional de Cálculo. Foi fonte para elaborarmos estratégias para abordar certos tipos de problemas. Proporcionou um contato com a história do pensamento matemático, o seu desenvolvimento e perceber a sua importância no contexto do conhecimento humano.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1984. 170 p.

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Martins Fonte, 2000. 1014 p.

AGOSTINHO, S. *A Cidade de Deus Vol.2*. 2. ed. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 2000. 1443 p.

ALEXANDER, B. *Infinitesimal*: a teoria matemática que revolucionou o mundo. São Paulo: Zahar, 2016. 371 p.

APOSTOL, T. M. *Calculus*: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. vol.1. 2. ed. Barcelona: EDITORIAL REVERTÉ, 2001. 834 p.

ASSIS, E. M. d. N. *Limites: História e Aplicações*. 69 p. Dissertação (Mestrado) — Profmat/UFV, Florestal-MG, 2017.

ÁVILA, G. O ensino do cálculo e da análise. *Revista Matemática Universitária: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)*, Rio de Janeiro, n. 33, p. 83–95, 2002.

ÁVILA, G. Limites e derivadas no ensino médio? *Revista do Professor de Matemática: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)*, Rio de Janeiro, n. 60, p. 30–38, 2006.

BARDI, J. S. *A Guerra do Cálculo*. Rio de Janeiro: Record, 2008. 303 p.

BARON, M. E. *Origens e desenvolvimento do cálculo, 5 vol.* Brasília: UnB, 1985. 296 p.

BARROS, A. M. *Integração das equações diferenciaes*. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1890. 469 p.

BOORSTIN, D. J. *Os descobridores*: de como o homem procurou conhecer-se a si mesmo e ao mundo. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 1987. 646 p.

BOYER, C. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, 1959. 368 p.

BOYER, C. *Cálculo*. São Paulo: Atual, 1993. 91 p.

BOYER, C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012. 504 p.

BRANDEMBERG, J. C. *Uma História da Integral*: de arquimedes a lebesque. São Paulo: Livraria da Física, 2017. 124 p.

BRASIL. Base nacional comum curricular : educação é a base. *Brasil. Ministério da Educação*, Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2019.

CARAÇA, B. d. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1984. 320 p.

COHEN, I. B. *Newton*: textos, antecedentes e comentários. Rio de Janeiro: Contraponto-EDUERJ, 2002. 523 p.

COLLETTE, J.-P. *Historia de las matemáticas*. México: Siglo XXI, 1986. 348 p.

COPÉRNICO, N. *As revoluções dos orbes celestes*. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1984. 661 p.

COSTA, M. A. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. 3. ed. São Paulo: Convívio/EDUSP, 1981. 331 p.

COURANT, R. *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000. 624 p.

CUSA, N. d. *A Douta Ignorância*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002. 248 p.

DEVLIN, K. *Matemática*: a ciência dos padrões. Porto: Porto Editora, 2002. 291 p.

DIEUDONNÉ, J. *A formação da matemática contemporânea*. 1. ed. Porto: Publicações Dom Quixote, 1990. 292 p.

DOURADO, T. A. S. *O pequeno livro da grande história da teoria dos infinitos*. São Paulo: Livraria da Física, 2017. 136 p.

EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: UNESP, 2009. 594 p.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. São Paulo: UNICAMP, 2011. 848 p.

FAUSTO, B. *História concisa do Brasil*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2001. 328 p.

FREUDENTHAL, H. *Perspectivas de Matemática*. Rio de Janeiro: ZAHAR, 1975. 221 p.

GALILEU, G. *Duas Novas Ciências*. 2. ed. São Paulo: Nova Stella, 1988. 320 p.

GOMIDE, E. F. Ciências matemáticas. *História das ciências no Brasil, EDUSP*, Sâo Paulo, p. 35–60, 1979.

GUILLEN, M. *Pontes para o infinito*: o lado humano das matemáticas. Lisboa: Gradiva, 1987. 204 p.

HELLMAN, H. *Grandes debates da ciência*: dez das maiores contendas de todos os tempos. São Paulo: UNESP, 1999. 277 p.

IFRAH, G. *História Universal dos algarismos*: vol 1. 11. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 735 p.

KATZ, V. *História da matemática*. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 2010. 1119 p.

KLINE, M. *El pensamiento matemático*: de la antigüedad a nuestros días. Madrid: Alianza Editorial, 1972. 535 p.

KOLMOGOROV, A. N. *La matemática*: su contenido, método e significado, vol.1. Madrid: Alianza Editorial, 1976. 449 p.

LALANDE, A. *Vocabulário técnico e crítico de filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 1993. 1336 p.

MAOR, E. *e: A história de um número*. Rio de Janeiro: Record, 2003. 294 p.

MENDONÇA, A. W. P. C. A universidade no brasil. *Revista Brasileira de Educação/ANPED*, São Paulo, n. 14, p. 131–150, Mai./Jun./Jul./Ago 2000.

NETO, A. A. C. *Cálculo integral para o ensino médio*. 59 p. Dissertação (Mestrado) — Profmat/UFAL, Maceió, 2019.

OSTROWSKI, A. *Lições de cálculo diferencial e integral*: funções de uma variável vol.1. 4. ed. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1981. 415 p.

RIBNIKOV, K. *Historia de las Matemáticas*. Moscou: Editorial Mir, 1991. 488 p.

ROMANELLI, O. d. O. *História da Educação brasileira*. 25. ed. Petrópolis: Vozes, 2001. 267 p.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.

RUSSELL, B. *Introdução à Filosofia da Matemática*. 4. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981. 196 p.

SANTOS, A. A. *Uma proposta para inserção de conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio*. 63 p. Dissertação (Mestrado) — Profmat/UFJF, Juiz de Fora, 2015.

SILVA, C. P. d. *A matemática no Brasil*: uma história de seu desenvolvimento. Curitiba: UFPR, 1992. 242 p.

SILVA, J. J. d. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007. 239 p.

SILVA, R. P. d. *Arquimedes e o método*. 91 p. Dissertação (Mestrado) — Profmat/UFAL, Maceió, 2015.

STRUIK, D. J. *História concisa da matemática*. Lisboa: Gradiva, 1989. 400 p.

TATON, R. *História geral das ciências Vol.7*. São Paulo: Difusão Européa do Livro, 1960. 184 p.

VALENTE, W. R. *Uma história da matemática no Brasil*. São Paulo: Annablume/FAPESP, 1999. 214 p.

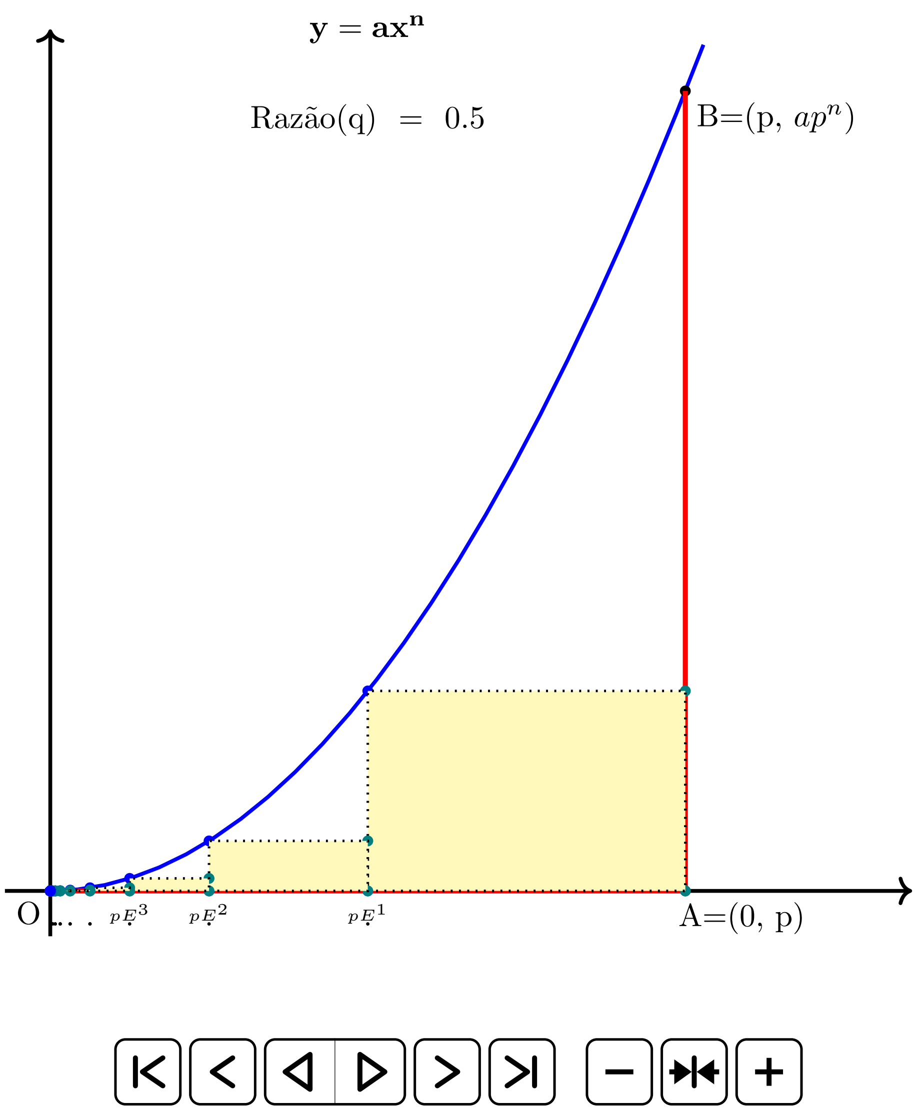
WHITEHEAD, A. N. *A ciência e o mundo moderno*. São Paulo: Brasiliense, 1946. 233 p.

APÊNDICE A – Algumas Visualizações Dinâmicas

I - Visualização da Ideia de Integral de Fermat

Usando o LaTeX com os pacotes TikZ e animate, foi possível criar no texto em pdf uma visualização dinâmica da Integral de Fermat, de uma função do tipo: $y = ax^n$, com $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Para visualizar a animação da figura 29 basta apertar nos botões (*controls*) que estão no rodapé, mas o funcionamento deste recurso depende do tipo de leitor de pdf que está sendo utilizado.

Figura 30 - Visualizando a Integral de Fermat

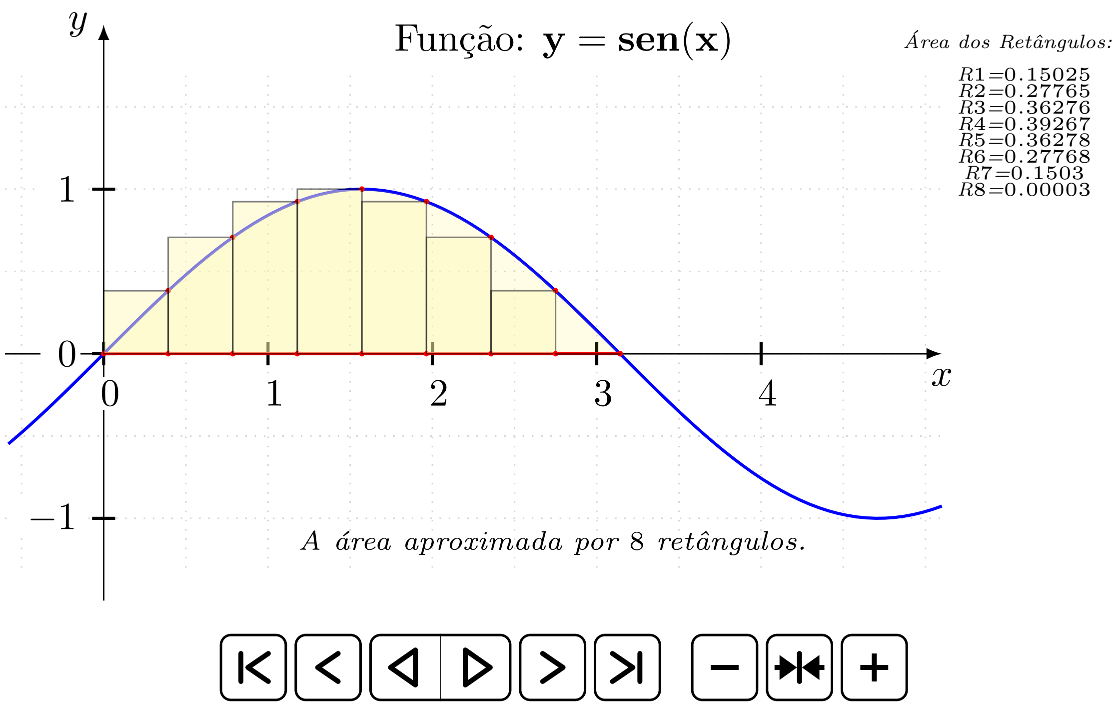


Fonte: Construído no LaTeX/TikZ/animate

II - Aproximação da área sob o gráfico de y=sen(x), x $\in$ [0, π]

Com o uso o LaTeX e os pacotes TikZ e animate, construímos no texto em pdf uma visualização dinâmica da aproximação da área sob o gráfico $y = sem(x)$, no intervalo $[0, \pi]$. Para visualizar esta animação da figura 30 basta apertar nos botões (*controls*) que estão no rodapé, mas o funcionamento deste recurso depende do tipo de leitor de pdf que está sendo utilizado.

Figura 31 - Visualizando a aproximação da área sob o gráfico de y=sen(x), x $\in$ [0, π]

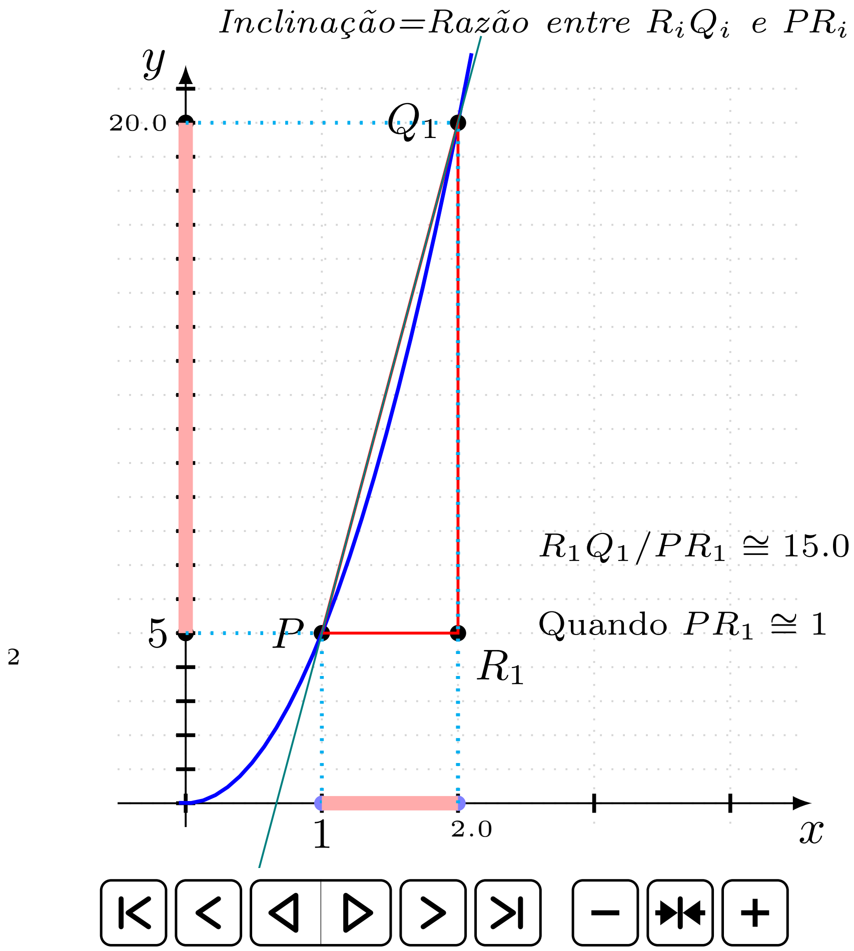


Fonte: Construído no LaTeX/TikZ/animate

III - Inclinação da reta tangente ao gráfico de y=5x^2 no ponto x=1, a partir de uma reta secante

Construímos, com o uso do LaTeX e os pacotes TikZ e animate, no texto em pdf uma visualização dinâmica (aproximada) da inclinação da reta tangente ao gráfico de y=5x^2 no ponto x=1. Esta função é usada em Física para descrever o espaço percorrido por um corpo que cai em queda livre, considerando o valor da aceleração da gravidade igual a 10m/s^2. Considerando que a função y=5x^2 descreve um movimento queda livre, a inclinação da reta tangente é interpretada velocidade instantânea em x=1. Para visualizar a animação da figura 31 basta apertar nos botões (*controls*) na parte inferior, mas o funcionamento deste recurso depende do tipo de leitor de pdf que está sendo utilizado.

Figura 32 - Visualizando a inclinação da reta tangente ao gráfico de y=5x^2 no ponto x=1, a partir de uma reta secante



Fonte: Construído no LaTeX/TikZ/animate

APÊNDICE B – O Valor de Pi: da Antiguidade ao Século XVIII

Época	Alguns eventos da Cronologia de Pi[60]	Expressão
1650 a.C.	No **Papiro de Rhind**: "a área de um circulo é igual a de um quadrado cujo lado é o diâmetro de círculo diminuído de sua nona parte"	Pi = 256 / 81 = 3,1604...
Oriente antigo	Tomava-se frequentemente o número 3 como valor de Pi. Na **Bíblia** encontramos: "Fez também o mar de fundição, de dez côvados de uma borda até a outra, redondo, e de cinco côvados de altura; cingia-o ao redor um cordão de trinta côvados" (2Cr 4:2).	$\frac{30}{10} = 3$
c.240 a.C.	**Arquimedes**: comparando o perímetro de par de polígonos regulares inscrito e circunscrito.	Pi está entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$ (3,140845 < Pi < 3,142857)
c.150 d.C.	Claudio **Ptolomeu**: em sua famosa obra Almagesto, usa o sexagesimal 3 8′ 30″ para o valor de Pi.	$3\ 8'\ 30'' = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = \frac{377}{120} \cong 3,1416...$
c.480	O chinês **Tsu Ch'ung-chih** deu a interessante aproximação racional 355/113.	$\frac{355}{113}$ = 3,1415929 ...
c.530	O hindu **Āryabhata** deu 62832/20000 como valor aproximado de Pi. É provável que ele usou um polígono regular inscrito de 384 lados.	62832/20000 = 3,1416
c.1150	O hindu, **Bhāskara**, deu várias aproximações de Pi: 3927/1250 como um valor acurado, 22/7 como um valor impreciso e raiz de 10 para trabalhos corriqueiros.	3927/1250 = 3,1416 22/7 = 3,1428 $\sqrt{10}$ = 3,1623
1429	O astrônomo persa **Al-Kashi** calculou Pi até a décima sexta casa decimal pelo método clássico.	Pi = 3.1415926535897932
1579	O francês **François Viète** encontrou corretamente até a nona casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de 6.2^16 = 393216 lados.	$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$
1585	O holandês **Adriaen Anthoniszoon** redescobriu a antiga razão chinesa 355/113, como a média aritmética dos numeradores e dos denominadores 377/120 e 333/106.	(377+333)/2/(120 +106)/2 = 355/113
1593	O holandês **Adrianus Romanus**, determinou corretamente até a décima quinta casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de 2^30 lados.	3,141592653589793
1610	O holandês **Ludolph van Ceulen** gastou grande parte de sua vida para calcular até a trigésima quinta casa decimal pelo método clássico, usando polígonos de 2^62 lados.	3,14159265358979323846264338327950288

[60] Fonte: EVES (2011, p.141-145), KATZ (2010, p.28)

1621	O físico holandês **Willebrord Snell**, aperfeiçoou trigonometricamente o método clássico calculando Pi com 35 casas decimais usando polígonos de apenas 230 lados - o método clássico fornece apenas 15 casas.	3,14159265358979323846264338327950288
1630	O austríaco **Grienberger** calculou até a trigésima nona casa decimal usando o método de Snell.	3,141592653589793238462643383279502884197
1650	O matemático inglês **John Wallis** obteve uma expressão para Pi. Esta expressão foi convertida em frações contínuas por Lord Brouncker.	$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8....}{1.3.3.5.5.7.7....}$
1677	O escocês **James Gregory** obteve a série infinita $arctg(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots$, para $-1 \leq x \leq +1$.	Quando x=1, temos: $\pi/4 = 1-1/3+1/5-1/7+...$
1699	O inglês **Abraham Sharp** encontrou acertadamente as primeiras 71 casas decimais de usando a série de Gregory para $x = \sqrt{1/3}$.	3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640
1706	O inglês **John Machin** obteve cem casas decimais usando a série de Gregory e as que convergem rapidamente para Pi, obteve com Pi com cem casas decimais.	3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679
1719	O francês **De Lagny** obteve corretamente 112 casas decimais usando a série de Gregory para $x = \sqrt{1/3}$.	3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513 2
1737	O símbolo π encontrou aceitação geral depois que **Euler** o adotou em 1737. Ele fora usado anteriormente pelos matemáticos ingleses: William Oughtred, Isaac Barrow e David Gregory para designar a circunferência de um círculo e 1706 William Jones para a razão entre a circunferência e o diâmetro.	O símbolo para Pi = π
1754	O francês **Jean Etienne Montucla**, um dos primeiros historiadores da matemática, escreveu uma história do problema da quadratura.	
1755	A **Academia de Ciências da França** declinou examinar qualquer solução mais do problema da quadratura.	
1767	O suíço **Johann Heinrich Lambert** provou que e irracional.	π não é um quociente de dois números inteiros.
1777	O francês conde de **Buffon** usou métodos probabilísticos para aproximar Pi.	$p = \frac{2l}{\pi.a}$

APÊNDICE C – Algumas Dissertações do Profmat Relacionadas com Ensino de Cálculo no Ensino Médio

1. ALVES, Anderson Rafael. Limites e Derivadas: Uma abordagem para o Ensino Médio. Bauru: UNESP/Profmat, 2018. 131p
2. MACHADO, Ari Júnior dos Santos. Limites e Derivadas para o Ensino Médio. Belém-PA: UFPA/Profmat. 2013. 56p.
3. SILVA, João Paulo Neves e. GeoGebra: explorando possibilidades de abordagem interativa dos conteúdos de função quadrática, limites e derivada. Cuiabá: UFMT/Profmat, 2019.108p.
4. SILVA, José Carlos. Limites de Funções Reais de Variável Real no Ensino Médio: Um Estudo Visando os Concursos da Efomm e da Escola Naval. Rio de Janeiro: CPII/Profmat, 2017. 126p.
5. ALVES, Érika Figuerêdo. Máximos e Mínimos na Perspectiva do Ensino de Matemática na Atualidade. Campos, RJ: UENF/Profmat, 2018. 224p.
6. ALVES, Leopoldo José. Estudo do Conceito de Limites de Funções reais no Ensino Médio: uma proposta de atividades utilizando o software WxMAXIMA. Catalão, GO: UFCAT/Profmat, 2018. 120p.
7. AMORIN, Luiz. Cálculo no Ensino Médio: progressões geométricas e o que vai para baixo do tapete. Rio de Janeiro: IMPA/Profmat, 2013.97p
8. ARAUJO JUNIOR, Francisco de Paula Santos de. Máximos e Mínimos Aplicados em Geometria. Teresina: UESPI/Profmat, 2018. 77p
9. ARAÚJO, Everton Alves de. Proposta de Ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio via GeoGebra. Juazeiro, BA:UNIVASF/Profmat, 2015.140p
10. ARAÚJO, Francisco Valdiney Fernandes. Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: conceitos e aplicações. Natal: UFERSA/Profmat, 2020.112p
11. ARAUJO, Kécia Silva. Uma proposta de abordagem dos conteúdos de sequências e séries no Ensino Médio. Parnaíba: UFPI/Profmat, 2016.43p.
12. ASSIS, Eliane Maria do Nascimento. Limites: história e aplicações. Florestal, MG: UFV/Profmat, 2017.69p
13. BANHATO, Matheus Pierry. Máximos e mínimos com proposta de aplicação para funções quadráticas. São José do Rio Preto: UNESP/Profmat, 2015. 100p.
14. BELTRAMI, Reginaldo Silva. Algumas Técnicas Utilizando o Software GeoGebra no Processo de Resolução de Problemas Geométricos do Ensino Básico: situações de máximos e mínimos e lugares geométricos. Boa Vista-RR: UFRR/Profmat, 2016.140
15. COIMBRA, Jayro Mendes. O Ensino de Cálculo na Educação Básica. Rio de Janeiro: UERJ/Profmat, 2015. 47p.

16. COSTA Francisco Cezar da. Problemas de Máximos e Mínimos: Aplicações do Ensino Médio ao Superior. Acarape, CE: UNILAB/Profmat. 2020. 72p.

17. COSTA, Julia M. Ramos. O Ensino de Sequências e Séries no Ensino Médio. Campos, RJ: UENF/Profmat, 2013.58p.

18. COSTA, Marcos Antônio da. Máximos e Mínimos: Uma Abordagem para o Ensino Médio. Goiânia: UFG/Profmat, 2013. 53p.

19. COSTA, Paulo César. Aplicações De Derivada No Ensino Médio: Uma Abordagem De Forma Intuitiva. Vitória da Conquista, BA: UESB/Profmat, 2018. 112p.

20. DIAS, Tiago de Oliveira. Cálculo no Ensino Médio: uma proposta alternativa para o atual currículo da educação básica no Brasil. Viçosa, MG: UFV/Profmat, 2014.69p

21. DUARTE, José Luís. Problemas de Máximos e Mínimos no Ensino Médio. Ilha Solteira: UNESP/Profmat, 2014. 66p.

22. FEBRONIO DE MATTOS, William. Uma contribuição para o ensino de cálculo no ensino médio, utilizando a classe das cônicas. São Carlos: USP/Profmat, 2016.108p

23. FERREIRA, Thed Freitas. Otimização: estudo de máximos e mínimos de funções que definem problemas cotidianos. São Cristóvão, SE: UFS/Profmat, 2018. 107p.

24. FERREIRA, Thed Freitas. Otimização: estudo de máximos e mínimos de funções que definem problemas cotidianos. São Cristóvão, SE: FUFS/Profmat, 2018. 107p.

25. FLORET, Rejane T. de Souza. Uma proposta para introdução de noções de Cálculo no ensino médio. Rio de Janeiro: UERJ/Profmat, 2014.67p

26. GODINHO, Leandro Machado. Cálculo no Ensino Médio: uma proposta para o ensino de derivada na primeira série. Rio de Janeiro: UERJ/Profmat, 2014.88p.

27. GUIMARÃES, Maria Elisa de Castro. Introduzindo os Conceitos de Limite, Derivada E Integral no Ensino Médio. Fortaleza: UFC/Profmat, 2019.105p

28. LEMOS, Aldenor Lopes Filho. Aplicações do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. Teresina: UFP/Profmat, 2013.44p

29. LUÍS, Fábio. Cálculo no Ensino Médio: área sob o gráfico de uma curva. Rio de Janeiro: IMPA/Profmat, 2013.59p

30. MARCOLINO, Fabiano Rodrigues. Problemas de máximos e mínimos: Abordagem na Educação Básica. Brasília: UnB/Profmat, 2016. 67p.

31. MELO, André Luiz Ferreira. A importância do Ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio. Floriano: IFPI/Profmat 2013.49p.

32. MOLON, Jaqueline. Cálculo no Ensino Médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra. Santa Maria, RS: UFSM/Profmat, 2013. 195p.

33. NEVES, Paulo de Tarso Smith. Introdução ao Ensino do Cálculo e Aplicações da Derivada no Ensino Médio. Macapá: UNIFAP/Profmat, 2016. 74p

34. NUNES, Rafael Skaetta. Máximos e Mínimos na Geometria Euclidiana. Rio de Janeiro: UERJ/Profmat, 2015. 47p.

35. OLIVEIRA, Carlos Eduardo Gomes. A Matemática Fundamental como Pré-Cálculo no ensino médio. Campos, RJ: UENF/Profmat, 2015.93p

36. PAIVA, Maryna de Oliveira. Aplicações do Estudo da Derivada no Nível Básico de Ensino Associado à Resolução de Questões de Máximos e Mínimos. Brasília: UnB/Profmat. 2015. 83p

37. PERDIGÃO-NASS, Daniel. Cálculo no Ensino Médio: uma proposta fundamentada. Brasília: UnB/Profmat, 2017.92p

38. RAMOS, Sandra Rodrigues da Silva. Máximos e Mínimos: Uma proposta para o cálculo em funções cúbicas sem o uso de derivadas. Maringá, PR:UEM/Profmat, 2019. 72p

39. RAMOS, Sandra Rodrigues da Silva. Máximos e Mínimos: Uma proposta para o cálculo em funções cúbicas sem o uso de derivadas. Maringá, PR:UEM/Profmat, 2019. 72p

40. RIBEIRO, Helena Corrêa. Cálculo: uso e recursos computacionais para inserir conceitos de limites, derivadas e integrais no ensino médio. Curitiba: UTFPR /Profmat, 2018. 98p

41. ROCHA, Joice Stella de Melo. O Ensino de Cálculo no Ensino Médio. São João Del Rei: UFSJ/Profmat, 2018.62p

42. RODRIGUES, Mariana Manfroi. Um Estudo de Máximos e Mínimos para Aplicação na Otimização de Embalagens. Dourados-MS: UEMS/Profmat, 2016. 44p.

43. SANTOS , Irlã Silva. Máximos e Mínimos com uso de Ferramentas do Ensino Médio e Noções de Cálculo Diferencial. Juazeiro do Norte: UFCA/Profmat, 2017. 58p.

44. SANTOS, Ariosvaldo Andrade. Uma proposta para inserção de conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. Juiz de Fora: UFJF/Profmat, 2015.63p

45. SANTOS, Ednaldo Sena dos. Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana. João Pessoa: UFPB/Profmat. 2013. 77p.

46. SILVA, Gabriel Felipe da. A Didática de Resolução de Problemas para Conceituar Intuitivamente a Derivada no Ensino Médio Utilizando Equações Da Reta. Joinville, SC: UDESC/Profmat, 2019.159p

47. SILVA, Elion Souza da. Problemas de Máximos e Mínimos e Desigualdades Geométricas Fortaleza: UECE/Profmat, 2013. 46p.

48. VIANNA, Bruno. Cálculo no Ensino Médio: Despertando Ideias Sobre o Infinito. Rio de Janeiro: IMPA/Profmat, 2013.139p

49. VIEIRA, Fernando Henrique da Silva. Uma Proposta de Aplicação do Conteúdo de Sequências e Séries no Ensino Médio Com Auxílio do GeoGebra. Maringá, PR:UEM/Profmat, 2017.68p.

ANEXO A – Apresentação do Livro The History of the Calculus and its Conceptual Development

Foreword

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS and Mathematical Analysis in general is one of the great achievements of the human mind. Its place between the natural and humanistic sciences should make it a singularly fruitful medium of higher education. Unfortunately, the mechanical way in which calculus sometimes is taught fails to present the subject as the outcome of a dramatic intellectual struggle which has lasted for twenty-five hundred years or more, which is deeply rooted in many phases of human endeavors and which will continue as long as man strives to understand himself as well as nature. Teachers, students, and scholars who really want to comprehend the forces and appearances of science must have some understanding of the present aspect of knowledge as a result of historical evolution. As a matter of fact, reaction against dogmatism in scientific teaching has aroused a growing interest in history of science; during the recent decades very great progress has been made in tracing the historical roots of science in general and mathematics in particular.

The present volume, which fortunately can appear in a second printing, is an important contribution towards clarification of the many steps which led to the development of the concepts of calculus from antiquity to the present day; beyond that, it gives a connected and highly readable account of this fascinating story. The book ought to reach every teacher of mathematics; then it certainly will have a strong influence towards a healthy reform in the teaching of mathematics.

R. COURANT
Chairman of the Mathematics Department
Graduate School, New York University

Apresentação

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL e Análise Matemática em geral são uma das grandes conquistas da mente humana. Seu lugar entre as ciências naturais e humanísticas deve torná-lo um meio singularmente frutífero de educação superior. Infelizmente, a maneira mecânica em que o cálculo às vezes é ensinado falha em apresentar o assunto como o resultado de uma dramática luta intelectual que durou dois mil e quinhentos anos ou mais, que está profundamente enraizado em muitas fases de empreendimentos humanos e que continuará enquanto o homem tentar compreender a si mesmo bem como a natureza. Professores, alunos e acadêmicos que desejam realmente compreender para além das forças e aparências da ciência deve ter alguma compreensão do aspecto atual do conhecimento como resultado do desenvolvimento. Na verdade, a reação contra o dogmatismo no ensino científico tem despertado um interesse crescente na história da Ciência; durante as últimas décadas, um grande progresso foi feito no rastreamento das raízes históricas da ciência em geral e da matemática em particular.

O presente volume, que felizmente pode aparecer em uma segunda impressão, é uma contribuição importante para o esclarecimento das muitas etapas que levaram ao desenvolvimento dos conceitos de cálculo desde a antiguidade até os dias atuais; além disso, dá uma conexão e um relato altamente legível dessa história fascinante. O livro deve atingir todos os professores de matemática; então certamente irá ter uma forte influência no sentido de uma reforma saudável no ensino de matemática.

R. COURANT
Presidente do Departamento de Matemática
Escola de Pós-Graduação, Universidade de Nova York

Fonte: BOYER (1959).

ANEXO B – Parecer sobre o livro Integração das equações diferenciaes

Parecer sobre o trabalho apresentado pelo Exm. Sr. Conselheiro Dr. Americo Monteiro de Barros, intitulado « Integração das equações differenciaes. » (*)

O estudo do calculo integral superior, por si sendo eminentemente difficil, torna-se ainda mais pela falta de compendios onde se encontre esta materia exposta de um modo completo, sem todavia ter a extensão que deve comportar um tratado. Em geral, emprehendendo-se este estudo é necessario recorrer a tratados e memorias para adquirir-se uma instrucção sufficiente de todas as questões que o calculo integral superior apresenta. Ora este modo de estudo, além de difficil, por serem as materias estudadas sem ligação, é ordinariamente impossivel para quem começa. Uma das mais importantes e espinhosas questões do calculo integral é incontestavelmente a theoria das equações differenciaes; graças aos esforços do nosso illustre collega, o Exm. Sr. Conselheiro Dr. Americo Monteiro de Barros, este estudo tornou-se relativamente facil pelo excellente trabalho que acaba de apresentar. Nelle todas as materias concernentes ao assumpto são tratadas de um modo completo para quem desejar emprehender o estudo desta elevada theoria; a exposição é feita com a maior clareza e methodo, encontrando-se sempre applicações escolhidas, que contribuem poderosamente a firmar a comprehensão das theorias; além disso grande numero de questões a resolver, pela solução das quaes o estudante se certificará se realmente apoderou-se das materias estudadas. Os esforços do nosso illustrado collega são credores de um voto de louvor e agradecimento pelo util trabalho que apresenta, o qual além de ser digno da consideração do Governo Imperial, merece todos os favores do art. 110 dos Estatutos da Escola Polytechnica.

Terminando fazemos votos para que o nosso illustre collega prosiga neste affanoso mister, apresentando brevemente, com o methodo e clareza do presente trabalho, um compendio de calculo das variações, que torne mais accessivel o estudo desta hypertranscendente theoria.

Rio, 28 de outubro de 1886.

A Commissão especial.— *M. P. Reis.— Paulo de Frontin.— E. G. Moreira Maia.*

(*) Este parecer foi unanimemente approvado pela Congregação da Escola.

Fonte: Barros, Américo Monteiro. Integração das equações diferenciaes. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, 1890.

ANEXO C – Algumas Teses da Escola Militar

- DISSERTAÇÃO SOBRE O MODO DE INDAGAR NOVOS ASTROS SEM AUXÍLIO DAS OBSERVAÇÕES DIRETAS - 1848 - Joaquim Gomes de Souza.
- DISSERTAÇÃO SOBRE O METHODO DOS LIMITES E DOS INFINITAMENTE PEQUENOS - 1850 - João Ernesto Viriato de Medeiros
- OS PRINCIPIOS FUNDAMENTAES DO EQUILIBRIO DOS CORPOS FLUCTUANTES MERGULHADOS EM DOUS MEIOS RESISTENTES E SOBRE A ESTABILIDADE EM A CONSTRUCÇÃO NAVAL - 1852 - Joaquim Alexandre Manso Sayão
- ESTUDO SOBRE O MOVIMENTO DE UM PONTO MATERIAL SUBMETIDO A UMA FORÇA CENTRAL.- 1855 - José Joaquim de Oliveira
- EQUAÇÕES GERAES DA PROPAGAÇÃO DO CALOR NOS CORPOS SOLIDOS SUPPONDO VARIAVEL A CONDUCTIBILIDADE COM A DIREÇÃO E POSIÇÃO - 1855 - Augusto Dias Carneiro
- DAS TANGENTES, DA CURVATURA E DO RAIO DE CURVATURA E DOS CONTACTOS DAS CURVAS PLANAS - 1855 - D. Jorge Eugenio de Dossio e Seilbtz.
- DISSERTAÇÃO SOBRE O PARALLELISMO DAS LINHAS E SUPERFICIES CURVAS - 1855 - Francisco da Costa Araujo e Silva.
- O MOVIMENTO DOS PROJECTIS TANTO NO VACUO COMO NO AR - 1855 - José Antonio da Fonseca Lessa.
- SOBRE MAXIMOS E MINIMOS - 1855 - Gabriel Militão de Villa-Nova Machado.
- THEORIA GEOMETRICA DAS SOMBRAS - 1855 - José Francisco de Castro Leal
- CONSIDERAÇÕES SOBRE O MOVIMENTO DAS MACHINAS LOCOMOTIVAS NOS CAMINHOS DE FERRO - 1855 - Theodoro Antonio de Oliveira.
- DISSERTAÇÃO SOBRE A THEORIA DOS MOMENTOS DE INERCIA – 1857 – Bento José Ribeiro Sobragy.
- ATTRACÇÃO DOS SPHEROIDES E EM PARTICULAR DA ATTRACÇÃO DOS ELLIPSOIDES - 1858 - Manoel Ignacio de Andrade Souto-Maior Pinto Coelho.
- DETERMINAÇÃO DAS ORBITAS DOS COMETAS - 1858 - Manoel Monteiro de Barros Junior.
- A DESCOBERTA DE NEWTON E SOBRE O PROBLEMA DE KEPLER - 1858 - Americo Monteiro de Barros.
  Fonte: SILVA (1992, p.162-202)

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

UERJ