Universidade do Estado de Mato Grosso
Carlos Alberto Reyes Maldonado
Campus Dep. Est. Renê Barbour
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede

Abordagens no Ensino de Progressões Aritméticas com uso de *Smartphones* e *Applets* no GeoGebra

WANDERSON MATOS E SILVA

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: Prof. Dr. Diego Piasson

Barra do Bugres - MT

Outubro/2021

Abordagens no Ensino de Progressões Aritméticas com uso de *Smartphones* e *Applets* no GeoGebra

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Wanderson Matos e Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Bugres - Outubro/2021.

Prof. Dr. Diego Piasson
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Diego Piasson
Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Prof. Dr. William Vieira Gonçalves

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade do Estado de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dissertação de Mestrado defendida em 30 de Setembro de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Diego Piasson

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva

Prof. Dr. William Vieira Gonçalves

CIP – CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

SILVA, Wanderson Matos e.
S586a Abordagens no Ensino de Progressões Aritméticas com Uso de Smartphones e Applets no Geogebra / Wanderson Matos e Silva – Barra do Bugres, 2021.
81 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim).

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação *Stricto Sensu* (Mestrado Profissional) Mestrado Profissional em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Barra do Bugres, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021.
Orientador: Diego Piasson.

1. Ensino. 2. Geogebra. 3. Padrões Algébricos. 4. Elementos Figurativos. 5. Progressões Aritméticas. I. Wanderson Matos e Silva. II. Abordagens no Ensino de Progressões Aritméticas com Uso de Smartphones e Applets no Geogebra.

CDU 501.2:37

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Walter Clayton de Oliveira - CRB1 2049.

À minha filha Mayra. Que sua geração nos supere.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar muito mais do que uma segunda chance (tenho a sensação que não deveria estar, em vida, aqui hoje). À minha mãe, Maria de Matos Cândido, meu pai, André Bezerra e Silva, e minha esposa, Danielle de Souza Fernandes e Silva, pelos quais obtive um apoio, sem o qual seria impossível concluir esse trabalho.

À alguns "anjos"colocados no meu caminho (por Deus) que me deslocaram de um percurso que levaria a morte.

Ao professor William Vieira Gonçalves que ministrou uma excelente disciplina de geometria analítica, nos ensinando sobre o uso do GeoGebra. Nesse percurso ele me deu mais que alguns conselhos essenciais sobre o *software*, bem como, a indicação do curso "O GeoGebra", o qual me permitiu aprofundar em conhecimento sobre o tema, conhecimentos que tornaram esse trabalho viável.

Aos professores do programa de mestrado, que ao meu ver, são agentes educacionais diferenciados no meio docente. Os melhores professores que conheci até hoje.

Ao meu orientador, professor Dr. Diego Piasson, cuja genialidade e lucidez acadêmica depurou as difusas ideias que tive no decorrer desse trabalho. A extrema paciência que teve comigo demonstra um espírito de bondade pouco observável na docência universitária. Enfim, todo demérito e incoerência que porventura venha a ser encontrado neste trabalho deve-se unicamente a mim. Obrigado pela excelência com a qual conduziu a orientação desta dissertação!

À coordenação local do mestrado, que na pessoa do professor Dr. Junior Cesar Alves Soares, foi extremamente prestativo e atencioso em todas as demandas colocadas.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela oportunidade ímpar concedida a todos nós mestrandos do PROFMAT.

De meus tempos de inspiração poética:

Se o labirinto é fechado e o enigma é sem solução, então farei das bordas do muro minha aconchegante morada e da inútil procura uma doce ilusão.

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma proposta educacional que considera o processo de ensino e aprendizagem de álgebra, em especial, de progressões aritméticas, através de uma perspectiva de influência sensorial. Para esse fim, usamos o *software* GeoGebra para criar um conjunto de objetos de aprendizagem (*applets*) que, pautados no princípio da dinamicidade, permitem estabelecer uma estrutura cognitiva que favorece a compreensão de padrões algébricos vinculados às sequências numéricas em progressão aritmética. Esses padrões são expressados como elementos figurativos/geométricos, dinamizados pelo movimento e por elementos visuais de persuasão didática. Os objetos digitais criados no GeoGebra se constituem em produtos educacionais que são apresentados como resultados deste trabalho.

Palavras chave: Ensino, GeoGebra, padrões algébricos, elementos figurativos, progressões aritméticas.

Abstract

This work presents an educational proposal that considers the teaching and learning process of algebra, in particular, arithmetic progressions, through a perspective of sensory influence. To this end, it undoes the GeoGebra software to create a set of learning objects (applets) that, based on the principle of dynamism, allow the establishment of a cognitive structure that favors the understanding of algebraic patterns linked to numerical sequences in arithmetic progression. These patterns are expressed as figurative/geometric elements, dynamized by movement and visual elements of didactic persuasion. Digital objects created in GeoGebra stand out in educational products that originate as a result of this work.

Keywords: Teaching, GeoGebra, algebraic patterns, figurative elements, arithmetic progressions.

Sumário

Lista de figuras

Lista de quadros

1 Introdução

As constantes transformações, advindas do rápido crescimento tecnológico, associadas as conjunturas histórico-sociais, moldam novos paradigmas educacionais que demandam rápida adaptação da estrutura pedagógica em vigor.

Esse processo de aperfeiçoamento do modelo, implica alterações nas metodologias educacionais que requerem, dos agentes pedagógicos, profunda reflexão sobre suas práticas docentes. Exige-se, nesse contexto, a superação do tradicionalismo e a inserção de novos recursos e metodologias nos processos de ensino e aprendizagem.

Observa-se, atualmente, que grande parte das relações sociais estão estruturadas em um contexto de uso de tecnologias digitais. Dentre essas, destacam-se o uso massivo das tecnologias da informação e comunicação, que se tornaram amplamente acessíveis, como constatou o IBGE (2019), através da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) que, considerando as residências brasileiras no ano de 2019, concluiu que 94% possuíam telefone móvel, 40.6% possuíam microcomputador e 11.3% possuíam *tablet*. Observou-se também, neste mesmo ano, que 82.7% dos domicílios do país utilizavam a internet, sendo que 99.5% utilizavam através do telefone móvel, 45.1% utilizavam pelo computador e 12% pelo *tablet*. Nota-se, portanto, que as tecnologias móveis, estão na vanguarda das tecnologias digitais de comunicação, com destaque para os aparelhos celulares do tipo *smartphones*, reforçada por essa mesma pesquisa, a qual constatou que 81.2% dos domicílios em que havia acesso a internet, o faziam por meio da tecnologia 3G ou 4G.

Há de se questionar, neste ponto, a distribuição ou acesso de estudantes a essas tecnologias. Nesse grupo, segundo a pesquisa (IBGE, 2019), 88.1% faziam uso da internet. Dos estudantes da rede privada 98.4% tinham acesso a internet, sendo que esse percentual cai para 83.7% quando se trata de estudantes da rede pública.

Em termos globais, outro dado interessante segundo a PNAD (IBGE, 2019), é que em 2019, entre pessoas de 10 anos ou mais, 184.4 milhões possuíam telefone móvel celular, número que corresponde a 81% dos indivíduos dessa faixa etária.

Esses dados denotam a abrangência e acessibilidade aos recursos tecnológicos de natureza comunicativa. Carrega, portanto, um potencial educacional, que se explorado adequadamente, pode resultar em grandes benefícios nas metodologias de ensino. A exploração desses recursos, no entanto, demandam a criação de estratégias de cunho tecnológico que supram essa demanda.

Contudo, o desenvolvimento e uso de soluções tecnológicas geram custos financeiros que nem sempre são passíveis de absorção da proposta educacional considerada. Para isso, uma alternativa viável é o reposicionamento de ferramentas que já se encontram satisfatoriamente difundidas em determinado público, como por exemplo, o *smartphone*, e *tablet* (com disseminação factualmente comprovada pela pequisa do IBGE (2019)). Esse processo consiste em ampliar ou ressignificar a utilização de um instrumento para um fim distinto do que foi originalmente criado.

Aplicando esse conceito sob a perspectiva educacional, há superação em dificuldades de natureza financeira originadas no processo de implementação de um projeto tecnológico no âmbito escolar. E considerando os dados citados via IBGE (2019), vemos, dada a difusão, um grande potencial ressignificativo sobre as tecnologias digitais de comunicação, em especial as de natureza móvel, como o *smartphone*.

Também, deve-se considerar que quando um projeto tecnológico educacional é implementado, torna-se necessário a utilização de um protocolo que oriente, que se antagonize ao isolacionismo de práticas docentes, que permita o alcance de metas educacionais preestabelecidas e auxilie no processo de superação das dificuldades de aprendizagem. Este protocolo, atualmente, atende pelo nome de Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é um documento normativo, cuja proposta inicial é a padronização de competências a serem desenvolvidas no percurso de execução do currículo escolar.

Em 2019, quando o mundo foi atingido por uma pandemia originada pelo Coronavírus (Covid-19), exigiu, em escala global, uma reestruturação das relações sociais até então vigentes. Práticas que, originalmente dependiam do convívio entre pessoas foram drasticamente afetadas pelo distanciamento social, o método mais eficaz para diminuir a taxa de transmissibilidade da doença, evitando assim o colapso dos sistemas de saúde ao redor do mundo. A exemplo disso, observamos a busca por uma vacina, cujo objetivo visa diminuir as perdas humanas e, também, recompor as práticas que dependem, em seu cerne, das interações de natureza presencial.

Diante desse cenário, as práticas educacionais, como quase todas as outras, tiveram que lidar com perspectivas estruturais extremamente desafiadoras. Aulas presenciais de um momento para outro, se tornaram uma realidade distante, exigindo novas estratégias e recursos de ensino.

Nesse contexto, as tecnologias digitais foram as que mais se destacaram, principalmente pelo potencial de interação virtual. Plataformas como *Microsoft Teams*, *Google Classroom*, *Skype* e *Meet* se tornaram mais difundidas. Esses e outros recursos tecnológicos, que antes eram usados por afinidade ou dentro de um contexto de investigação educacional, passaram a ser inevitáveis diante da nova realidade.

O fato é que, independente dos momentos de crise, os recursos tecnológicos, em especial, os computacionais, tem mostrado um potencial de uso educacional de grande valia no auxílio dos processos de ensino e aprendizagem. Soma-se a isso, a afinidade natural dos jovens com esses recursos e a necessidade de aprendizagem que, independente da faixa etária, nossa sociedade informatizada impõe sobre seus cidadãos.

Portanto, nesse trabalho é proposta uma abordagem de ensino da Matemática, mais especificamente, de progressões aritméticas, sustentada pelo uso do GeoGebra com *smartphones*. Nesse proposta é dada ênfase ao uso desse recurso no celular, por sua grande presença social e por suas características de mobilidade, integração à rede e seu potencial de ressignificação para uso nos processos de ensino e aprendizagem.

A partir do século XIX as progressões aritméticas passaram a compor o campo da matemática denominado aritmética e, em certos programas de ensino, a abordagem utilizada caracterizava este conteúdo como pertencente ao campo da álgebra básica (NEVES; SOARES, 2020), a qual é vista, atualmente, como estrutura que generaliza a aritmética dos níveis de ensino mais elementares. Essa estrutura, por sua vez, é concebida, nos meios docentes mais conservadores, por ter uma natureza, essencialmente, simbólica, de modo que as progressões aritméticas são abordadas como processo de abstração que generaliza as propriedades numéricas.

Acontece que os alunos, principalmente os do ensino básico, em boa parte de seu percurso escolar (e pessoal), se adaptaram a uma visão de mundo vinculada ao concretismo dos números. Mais do que uma característica escolar, é humana, a necessidade de interação sensorial com os objetos dos quais pretendemos assimilar informações. Quanto mais perceptíveis aos sentidos forem essas interações, maiores são as chances de se compreender a natureza intrínseca ao objeto.

Nesse trabalho, propomos o uso de *applets* no GeoGebra como mecanismos de conversão, do abstrato para o concreto (e vice-versa), com os quais pretendemos ressignificar a compreensão sobre progressões aritméticas, para obter uma estrutura representativa mais eficiente aos processo de ensino e aprendizagem. Os objetos de aprendizagem construídos neste trabalho foram incluídos num livro digital (GeoGebra Book), que pode ser acessado no *link* ⟨https://www.geogebra.org/m/hyykbcha⟩.

O GeoGebra é um aplicativo bastante difundido nos meios escolares. Ele possui a capacidade de controlar entes algébricos que se mostrem relevantes, de modo a elucidar como se dá a relação entre esses elementos num contexto de dinamismo variacional. Esse processo de generalização de relações, torna mais ameno ao desenvolvimento cognitivo dos alunos, quanto maior for o nível de expressividade sensorial. Neste ponto, o sentido visual se destaca, dado que é por meio dele que mais colhemos informações da nossa realidade perceptiva.

Além deste capítulo introdutório, este trabalho contém outros dois. No capítulo 2 é apresentada uma discussão sobre o cenário de aplicação dos recursos tecnológicos, em especial de dispositivos móveis, no âmbito do processo de ensino das sequências numéricas. Para isso foi realizada uma revisão histórica das tecnologias educacionais e uma reflexão sobre as melhores práticas de implementação e uso de tais recursos, com base nas referências escolhidas. No capítulo 3 apresentamos e discutimos uma proposta para o ensino de progressões aritméticas (de ordens diversas) fazendo uso de *applets* no GeoGebra *online*, com foco na usabilidade em dispositivos móveis, em especial o *smartphone*. Nessa proposta, através de objetos de aprendizagem de autoria própria (os *applets*), pretendemos contribuir para o aperfeiçoamento das metodologias educacionais no contexto do conteúdo apresentado. Ao mesmo tempo será feita uma reflexão, pautada em teóricos, que direcionem a perspectiva educacional do processo de construção dos *applets*. Feito isso, daremos prosseguimento nas considerações finais e demais elementos técnicos necessários a finalização deste trabalho.

2 O GeoGebra e os dispositivos móveis no ensino de sequências numéricas

2.1 Representações figurativas num contexto de ensino e aprendizagem de álgebra

Uma das maiores dificuldades no ensino básico, segundo Kieran (2007), está no processo transitório do pensamento aritmético para o algébrico. Os números, no contexto aritmético, sendo vistos como entidades concretas, se descaracterizam ao serem representados por variáveis no âmbito algébrico. As progressões aritméticas, nesse contexto, herdam essa desfiguração representativa, pois possuem conceito concreto quando apresentadas em termos de sequências numéricas, mas se despersonificam ao se dar um tratamento simbólico, o qual é considerado complexo, considerando a falta de percepção dos alunos. Essa absorção, por parte das progressões aritméticas, dos problemas de representação algébrica, nos leva a querermos compreender os mecanismos gerais do processo de generalização e abstração, o qual é feito analisando os processos cognitivos vinculados aos processos de aprendizagem da álgebra.

Esse entrave semiótico, segundo Blanton e Kaput (2005), se acentua ainda mais ao se considerar a experiência de nossos professores, haja vista que sua prática docente, muitas vezes, desconhece as melhores técnicas de mediação do raciocínio algébrico. Ainda segundo os autores, muitos destes, são frutos de uma orientação formativa cuja matemática aprendida é justamente a que precisa ser substituída. Portanto, como medida corretiva, deve-se promover alternativas que se manifestem em apoio a mudanças do perfil metodológico e educacional.

Kieran (2007) afirma que um dos principais obstáculos a serem superados nesse cenário é a visão equivocada de que a álgebra é um conjunto de métodos de manipulação simbólica. Ao contrário, é uma disciplina cujo cerne contém o processo de generalização e identificação de padrões e relações sobre os entes de natureza matemática.

Em consonância com essas dificuldades Kieran (2007) afirma que muitos professores confiam demasiadamente no conteúdo e atividades apresentadas nos livros didáticos, sendo que estes pouco oferecem ao desenvolvimento do pensamento algébrico, focando quase sempre na manipulação de variáveis.

Ao mesmo tempo em que todos esses cuidados devem ser implementados, há de se considerar que o objetivo das práticas educacionais, no ensino de álgebra, não consiste em descaracterizá-la de sua vertente simbólica, mas sim desenvolver um percurso que seja coeso ao processo de assimilação cognitiva. Tanto é, que Vale (2009) orienta que, antes da execução dos métodos formais de manipulação algébrica, se deve "saturar"as experiências informais de aprendizado da álgebra. Para ela, essas experiências devem compor uma diversidade de abordagens e representações, prezando sempre pelo cuidado com a forma pela qual os conceitos são expostos.

Vale (2009) considera que a inicialização algébrica se dê através de elementos visuais/figurativos que se comportem como analogias que explicitem ou aproximem o aluno dos conceitos algébricos. Esse processo, segundo a autora, constitui uma semântica que reduz a distância entre a álgebra e a realidade perceptiva, de tal modo, que essas representações constituem um meio de transferência de significado entre estruturas.

Ela (VALE, 2009) relata a existência de dois modos perceptivos, associados a visualização, no processo de interação com padrões figurativos: a percepção sensorial, que se associa ao concretismo do objeto, isto é, a percepção física de sua existência e, a percepção cognitiva, vinculada a compreensão de suas características e propriedades.

Devemos no perguntar como se dá o processo de conversão da percepção sensorial para a cognitiva. Nesse sentido Vale (2009) destaca a importância da intuição visual. Para ela, é intrínseco a conduta humana atribuir significado ao que se observa. Logo, o processo de transição de um modo perceptivo para outro ocorreria de forma natural, quase de forma automática, dado um ambiente adequadamente planejado.

Nesse ponto é necessário compreendermos como se dá o processo intuitivo no contexto matemático. A intuição, segundo Soares (1995), é um processo de conhecimento imediato, relacionado a realidade. No contexto da intuição visual, poderíamos defini-la como um *insight* de percepção, vinculado a nossa experiência sensorial com os "objetos"em nosso mundo concreto. Soares (1995) explica que pode-se conceber a intuição como consequência das representações do que existe no mundo real· Afirma, ainda, que a intuição é uma ótima ferramenta para, através da visualização, sermos capazes de compreender e deduzir informação/conhecimento de um ente concreto. Ao mesmo tempo

Soares (1995) afirma existir um lado negativo nesse conceito: a intuição não faz o devido uso da formalização, a qual lhe permitiria estabelecer a veracidade de suas conclusões. Com isso a autora elucida o motivo pelo qual a matemática, em especial a álgebra, se afasta de uma perspectiva de concretismo físico, pois a melhor alternativa, segundo ela, para fugir dos erros atribuídos a intuição, seria a inserção de uma linguagem simbólica e desprovida da natureza intuitiva. Seus elementos estariam submetidos a uma hierarquia axiomática. Assim obteríamos um nível de formalização que se afastaria da possibilidade de erros dedutivos. Hora, é justamente esse nível de formalização simbólica, que resulta numa prática educacional, nos níveis básicos de ensino, que culmina nas dificuldades perceptivas de nossos alunos, dado a falta de estímulos aos sentidos.

Perceba que a intuição, ao mesmo tempo que permite a compreensão da realidade, pode nos induzir ao erro se desconexa da formalização lógico-dedutiva. Soares (1995) propõe uma espécie de hibridização conceitual, na qual, num primeiro momento se enfatizaria a experiência sensorial e a prática de atividades com manipulação de objetos. Numa segunda etapa, de um "crivo"dedutivo estabelecido sobre as práticas abstratas e formais da matemática.

Outro conceito importante e que vai nos auxiliar a explorar metodologias de ensino da álgebra, é o de semiótica. É a teoria das representações que considera os signos em todas as suas formas e manifestações. No âmbito da matemática educacional Duval e Moretti (2012) caracterizam a teoria das representações semióticas. Segundo eles há diferença entre um objeto matemático e sua representação, pois os objetos não são acessíveis aos sentidos e, portanto, necessitam de representantes que os sejam.

> A particularidade da aprendizagem das matemáticas considera que essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. Esse uso de muitos sistemas semióticos de representação e de expressão é essencial ou, ao contrário, é apenas um meio cômodo, mas secundário, para o exercício e para o desenvolvimento das atividades cognitivas fundamentais? (DUVAL, 2009, p. 13)

Duval (2009) questiona se as múltiplas representações semióticas são apenas um ponto de intermediação cognitiva de importância secundária ou, se ao contrário, trata-se de um processo crucial para a apreensão conceitual de um objeto. Para ele (DUVAL,

2009) não é possível compreender os eventos relacionados ao conhecimento sem que se considere atividades de representação:

> A noção de representação torna-se, então, essencial como **forma** sob a qual uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento. (DUVAL, 2009, p. 31)

Duval (2009) enfatiza que representações semióticas podem ser convertidas em representações equivalentes que, porém, podem ter significações diferentes para o interlocutor. Essa colocação nos faz questionar se existiria uma dada representação semiótica, cuja significação distinta produzida, poderia facilitar o processo de ensino e aprendizagem de um dado conceito.

> A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro. (DUVAL, 2009, p. 32)

Duval (2009) sugere que o processo de conversão de uma representação para outra, consiste em **"mudar a forma pela qual um conhecimento é representado"**. Portanto, considerando que uma representação semiótica não é única, poderia-se optar por uma que vincule o objeto matemático a um nível de percepção sensorial adequado.

Perceba que há uma hierarquia conceitual onde a representação semiótica engloba a representação figurativa.

Quais características uma representação figurativa ou semiótica deve ter para favorecer o ensino de álgebra? Vale et al. (2006), propõe uma estratégia de uso de padrões como forma de estímulo a aprendizagem de álgebra. Para Vale et al. (2008), no contexto matemático, padrão é um conceito vinculado a sequências, cujo processo de construção depende de regras lógicas. Nunes (2016) cita dois tipos de sequências/padrões que merecem destaque nos níveis básicos de ensino. O padrão de repetição, segundo ela, é uma sequência que depende, necessariamente, de uma unidade de repetição, a qual é caracterizada por sua natureza cíclica dentro do padrão. O padrão de crescimento, conforme a mesma autora, é uma sequência em que cada termo se relaciona com seu índice posicional, o que implica numa mudança dedutível de um termo para outro.

Podemos inferir que a representação figurativa de um dado padrão deve evidenciar a unidade de repetição e/ou relação dedutível da mudança de termo. Neste ponto, seria interessante nos perguntarmos se existem recursos que permitem explorar com mais intensidade essas características, de modo a maximizar nosso intento de favorecer o processo de ensino e aprendizagem de álgebra. Ferrara, Pratt e Robutti (2006), sugere o dinamismo e interatividade tecnológica como instrumento de construção de significados em oposição ao tratamento puramente simbólico da álgebra. Os autores reforçam essa posição ao destacarem a democratização do acesso tecnológico. Outra vantagem, inerente aos recursos tecnológicos atuais, é o poder de processamento, tanto é, que Schwab (2019) exemplifica que um *tablet* em configurações atuais é equivalente a 5 mil computadores *desktop* de 30 anos atrás. Ferrara, Pratt e Robutti (2006) afirma que o conceito de invariância e variação (e por extensão o conceito constante e variável) são facilmente representados pelo "movimento", propiciado pela dinamicidade e interatividade dos recursos tecnológicos.

Considerando que os conceitos "unidade de repetição"e "relação dedutível da mudança de termo"estejam associados com os conceitos de invariância e variação, então teremos como forte aliado ao ensino da álgebra, os recursos tecnológicos. De fato, uma unidade que se repete ciclicamente nos remete ao definição de invariância (ou uma constante). Por outro lado, se os termos "variam"em um padrão lógico dedutível, então temos o conceito de variável. Identificando o que é constante e o que é variável, resta que estabeleçamos a relação lógica entre esses elementos, que é, por essência, o objetivo da álgebra.

Nessa perspectiva, o GeoGebra se apresentada como um recurso viável, pois nele podemos variar parâmetros, de modo a obter uma perspectiva de movimento (real ou relacional) com a qual podemos usufruir, em representações figurativas, do estímulo visual necessário ao processo de generalização algébrica. Com isso, podemos influenciar a intuição visual, através objetos estruturados para esse fim, de modo que o aluno identifique a invariância e a variação, os converta em constante e variável (no sentido algébrico) e, por fim, estabeleça a relação entre eles.

2.2 O GeoGebra e as tecnologias móveis no contexto educacional

O dinamismo histórico aliado ao desenvolvimento tecnológico propiciou uma perspectiva educacional multifacetada. Nesse cenário, se ampliou a disponibilidade de recursos e técnicas de auxílio aos processos de ensino e aprendizagem. Assim, cada vez mais o professor deve buscar novas estratégias para potencializar suas práticas docentes.

> O conhecimento do professor de Matemática não comporta apenas domínio dos conteúdos da disciplina, mas, especialmente, o conhecimento das estratégias de ensino que propiciam ao aluno a aprendizagem de determinado conteúdo. (BISOGNIN; BISOGNIN; LEIVAS, 2016, p. 362)

Todas essas possibilidades exige do professor moderno o domínio de ferramentas que podem ir além das especificidades conceituais de seu campo de atuação. Teorias de mediação pedagógica e de ensino e aprendizagem, embora já consolidadas, requerem além de seu conhecimento, mecanismos de aplicabilidade e implementação que englobem ferramentas de uso já consolidadas e difundidas (pela questão da acessibilidade).

O processo de expansão tecnológica se acentuou significativamente nas últimas décadas. Dentre os avanços, destacam-se os computadores, que se tornaram ferramentas extremamente úteis e eficientes para manipular e processar dados, contribuindo para elevação do conhecimento humano. Por sua vez, a expansão do conhecimento faz surgir outras tecnologias, que rapidamente se integram a sociedade e permitem que a humanidade dê outros passos na evolução do conhecimento.

Para o ensino da matemática, em particular, esse processo de evolução tecnológica permitiu o surgimento de novos recursos educacionais, que dentro de um contexto histórico, muito contribuíram com os processos de ensino e aprendizagem. Com base no trabalho de Borba, Silva e Gadanidis (2015), no Quadro 1, são apresentadas as fases das tecnologias no contexto educacional, as terminologias adotadas para referenciá-las e as linhas teóricas seguidas ao longo de cada fase.

Quadro 1 - Fases da tecnologia educacional

Fases	**Tecnologias**	**Natureza ou base tecnológica das atividades**	**Perspectivas ou noções teóricas**	**Terminologia**
Primeira fase (1985)	Computadores; calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação.	Construcionismo; micromundo.	Tecnologias informáticas (TI).
Segunda fase(início dos anos 1990)	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CCAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa.
Terceira fase (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; fórum; Google.	Educação a distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC).
Quarta fase (2004)	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life;	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos;	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.

Fonte: (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 39)

A fase atual das tecnologias digitais no âmbito educacional, iniciada em 2004, conforme a classificação definida por Borba, Silva e Gadanidis (2015), trás, dentre as principais inovações, as tecnologias de natureza móvel, com destaque para os smartphones. Destacam-se também os recursos digitais que permitem maior interatividade entre usuários, dentre elas, plataformas de compartilhamento de vídeos, redes sociais e teleconferências. Estes, de forma associada e integrados às tecnologias de natureza móvel, adquirem aspectos de uma existência multimodal. Esse novo quadro de interatividade, favorecido por estas tecnologias, permite o enriquecimento de metodologias de ensino, no âmbito da matemática educacional, quer pela inserção de novos conceitos, quer pela intensidade com que estes podem ser aplicados.

Schwab (2019) teorizando sobre uma possível e atual quarta revolução industrial, a descreveu em termos de três parâmetros:

> **Velocidade:** ao contrário das revoluções industriais anteriores, esta evolui em um ritmo exponencial e não linear. Esse é o resultado de um mundo multifacetado e profundamente interconectado em que vivemos;

> além disso, as novas tecnologias geram outras mais novas e cada vez mais qualificadas.
>
> **Amplitude e profundidade:** ela tem a revolução digital como base e combina várias tecnologias, levando a mudanças de paradigma sem precedentes da economia, dos negócios, da sociedade e dos indivíduos. A revolução não está modificando apenas "o que"e o "como"fazemos as coisas, mas também "quem"somos.
>
> **Impacto sistêmico:** ela envolve a transformação de sistemas inteiros entre países e dentro deles, em empresas, indústrias e em toda sociedade. (SCHWAB, 2019, p. 12)

Devemos considerar o impacto que a revolução tecnológica tem sobre as atividades humanas ao redefinir a forma como interagimos com o mundo. Nesse cenário, entes que permeiam nosso contexto social, se transformaram de tal forma que suscitou em nós uma correlata permutação de características. Esse contexto, de imposição tecnológica, gera um estímulo cuja resposta adaptativa deve permear as diferentes composições sociais, dentre elas, as estruturas pedagógicas e, por extensão, as metodologias de ensino da matemática escolar.

Nesse sentido, boas práticas metodológicas devem ser tomadas como referência. Tajra (2019), por exemplo, considerando as teorias de aprendizagem de Paulo Freire, John Dewey, Jean Piaget, Lev Vygotsky e David Ausubel, evidencia a importância do uso de metodologias ativas, cujo significado permeia o conceito de executar estratégias de cunho educacional que visem favorecer o protagonismo do aluno e a contextualização de sua realidade.

Os conteúdos matemáticos, sob uma perspectiva educacional, diferenciam-se dos outros por sua natureza abstrata, porém, ao nosso ver, com nocivo distanciamento dos estímulos sensoriais. Surge, então, a necessidade de aproximar o aluno de tais conhecimentos e estes aos sentidos com os quais interpretamos o mundo que nos cerca. Mundo esse, que sob a ótica atual, é gerido, entre outros aspectos, por interações de natureza tecnológica. Logo, faz-se necessário que educadores promovam uma educação significativa e intermediada pelas tecnologias digitais disponíveis.

> [· · ·] a utilização da informática na educação se torna um meio de aproximação do aluno e da escola com esta sociedade digital, proporcionando uma aprendizagem mais significativa e promovendo a cooperação e a colaboração, familiarizando o aluno com os recursos tecnológicos que poderão ser utilizados em outros contextos e realidades. (SANTOS; RIBAS; OLIVEIRA, 2017, p. 44)

Dentre as tecnologias disponíveis, as de natureza computacional, são as que têm mostrado maior potencial ressignificativo sobre as premissas educacionais, permitindo uma postura de ensino pautada em interações dinâmicas e influentes aos sentidos. Nesse contexto, Borba, Silva e Gadanidis (2015) incita a utilização de um *design* tecnológico voltado à experiência e investigação, dando ênfase ao conceito de *feedback* visual instantâneo. Esse modelo, através de um ambiente de experimentação virtual, possibilita a construção de elementos cognitivos que se manifestam intuitivamente no processo de aprendizagem mediada.

Por sua vez, as tecnologias computacionais móveis, como às embarcadas em *smartphones*, estão redefinindo a natureza interacional das relações humanas. Tanto é que Schwab (2019) afirma haver uma revolução digital que nos permite reinterpretar o envolvimento e processos colaborativos entre indivíduos e instituições. De fato, como Junior (2012) relembra, houve um grande avanço tecnológico que beneficiou a indústria e o comércio; para o autor seria injusto as entidades educacionais não usufruírem dos recursos digitais.

> A tecnologia móvel provocou diversas mudanças na sociedade sendo os celulares as tecnologias que mais avançaram nos últimos anos. Com o surgimento da comunicação sem fio e do acesso remoto a internet (Wi-Fi), a dinâmica da comunicação mudou drasticamente. (DOMENICO et al., 2020, p. 35)

O distanciamento escolar aos recursos tecnológicos é um problema real, não por falta de acesso, mas, segundo Carmo (2016), por uma visão pedagógica tradicional que vê em tais práticas um obstáculo aos métodos convencionais. Nesse sentido Domenico et al. (2020) relata o fato de países com altíssimo desempenho escolar não permitirem, por exemplo, o uso do *smartphone* em sala de aula. Sunaga e Carvalho (2015) afirmam que é preciso reconhecer as potencialidades de tais recursos e fazer sua inserção nas estratégias educacionais. Para os autores o uso de tais recursos promovem maior estímulo ao processo de ensino e aprendizagem, haja vista que a tecnologia faz parte do cotidiano do aluno.

Para Bacich, Neto e Trevisani (2015) a adoção de metodologias de ensino, que contemplem a tecnologia digital, favorece a ampliação de práticas pedagógicas que se mostrem significativas sob o olhar discente. Esse uso tecnológico, segundo os autores, devem ser abordados com criticidade e criatividade, favorecendo assim, a compatibilidade digital com a obtenção de boas habilidades educacionais.

Os dispositivos móveis, com destaque ao *smartphone*, são ferramentas de grande perspectiva educacional. O termo cunhado, como cita Carmo (2016), *mobile learning* (*m-learning*) evidencia a maior vantagem no uso destas tecnologias: a mobilidade. A associação destes dispositivos eletrônicos com a internet sem fio e computação em nuvem propiciam um ambiente dinâmico com o qual podemos estabelecer metodologias de ensino que contemple o dia-a-dia tecnológico dos alunos. Esse fato, inclusive, como cita Assis e Silva (2018), favorece a implementação de estratégias educacionais com ênfase nos dispositivos móveis, haja vista, que os alunos dispõe de seus próprios equipamentos, tanto em sala de aula como fora dela. Essa característica, como afirma Monereo et al. (2010), evidencia um fenômeno que tende a se tornar comum: as paredes das salas de aulas se tornarão difusas. Com isso, o autor quer dizer que a exclusão do fator distância, pela conectividade móvel, favorece um aprendizado dissociado de fronteiras entre a sala de aula e os demais ambientes frequentados pelos alunos.

Contudo, deve-se notar, conforme nos alerta Santrock (2010), que os dispositivos móveis não são, por si só, objetos de aprendizagem, mas, como afirma Monereo et al. (2010), instrumentos de mediação entre alunos, professores e conhecimento. E para esse fim, como menciona Carmo (2016), existem diversas forma de uso, com destaque para os aplicativos, acesso a internet e comunicação instantânea. É importante frisar, que praticamente todos os sistemas operacionais, em celulares, possuem uma loja onde há uma infinidade de aplicativos, boa parcela grátis, que permitem os mais diversos usos educacionais. Também existem plataformas de compartilhamento de conteúdo, que servem muito bem ao processo de mediação pedagógica.

Em consonância com as ideias de (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015) podemos afirmar que são vários os recursos digitais que se destacam como ambientes favoráveis à obtenção de *insights* de percepção matemática. Em particular, os *softwares* de geometria dinâmica, tem se mostrado eficientes ao serem utilizados em propostas de mediação pedagógica pautadas em métodos de ensino e aprendizagem que destacam o pensar intuitivo.

Segundo Silva (2012), no final dos anos 70, a revolução das interfaces gráficas, em oposição aos comandos simbólicos, trouxe nova luz aos *softwares* desenvolvidos. A invenção do *mouse* como recurso para manipular objetos diretamente na tela do computador, permitiu uma nova geração de aplicativos baseados no conceito de usabilidade intuitiva. Dentre estes, se destacam, no cenário educacional, os *softwares* de geometria dinâmica, que em essência, agregam movimento a geometria convencional. Laborde (1994) destaca que a associação do movimento a geometria euclidiana não é uma ideia nova. Nesse sentido, ele menciona o fato de que, embora, "proibido por lei no raciocínio geométrico", o movimento, esteve presente na geometria grega. Para isso, basta notarmos que muitas curvas matemáticas podem ser definidas através do conceito de lugar geométrico, utilizando como recurso, o movimento. Essa nova dimensão geométrica, segundo o autor, só foi possível de ser "materializada", com as inovações tecnológicas de nossa era.

Convém, neste ponto, diferenciarmos uma construção via geometria dinâmica de um desenho geométrico inerte (que também poderia ser obtido por intermédio de um *software* de computador). Borba, Silva e Gadanidis (2015) nos explica que, ao contrário de um desenho, uma construção sempre preserva suas propriedades fundamentais ao ter movimentado um de seus elementos móveis. Laborde (1994) afirma ainda, que se cria uma nova semântica geométrica a partir do movimento, pois as relações que dependem da invariância, só são perceptíveis num contexto de dinamicidade, em que se destaca os elementos variáveis.

Silva (2012) relata que no final dos anos 80 dois *softwares* de geometria dinâmica foram desenvolvidos influenciados por esse novo panorama tecnológico, sendo eles, o *Cabri-Géomètre*, de origem francesa e, o norte-americano *Geometer's Sketchpad*. Estes foram responsáveis, na década de 90, por disseminar, globalmente, esse novo conceito de geometria.

O sobressalto qualitativo, proporcionado pela intensidade de interação do usuário com a interface gráfica, também permitiram a criação de novas ferramentas educacionais como o *Winplot*, aplicativo dirigido ao estudo de funções. Os *softwares* de geometria dinâmica propiciaram, na contramão do ensino estático de geometria, movimento e intuição aos conceitos até então analisados por uma lógica puramente dedutiva. Surgiram também, os sistemas de computação algébrica (CAS), que permitem a manipulação da matemática simbólica, de modo a tornar computacional cálculos até então desenvolvidos sob uma perspectiva "analógica". Destaca-se ainda, a evolução das planilhas eletrônicas, que desde seus primórdios foram incorporando os recursos manifestados nos atuais *softwares* desta natureza, dos quais podemos citar o *Excel*, *LibreOffice Calc*, dentre outros. Também na década de 90, surgiu a linguagem de programação *JAVA*, a qual favoreceu o desenvolvimento de aplicativos multiplataforma, que se caracterizam por serem compatíveis com diferentes arquiteturas de *hardwares* e sistemas operacionais.

É importante destacar, que todas essas tecnologias foram e são amplamente aplicadas ao estudo da matemática, porém, usualmente, de formas individualizadas. O que parecia faltar era um *software* que unisse os diversos recursos disponíveis numa única plataforma. É nesse cenário que surge o GeoGebra, incorporando diferentes tecnologias que possibilitam o tratamento de informação matemática num contexto mais amplo e de múltiplas representações.

O GeoGebra, no decorrer de suas sucessivas versões, tem contribuído para os processos de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Segundo seu site oficial, foi originalmente criado por Markus Hohenwarter em 2001, sendo, atualmente, um projeto internacional, com a participação de desenvolvedores em diversos países. É distribuído de forma livre e adaptado para dezenas de idiomas ao redor do mundo. Sendo construído com a linguagem *JAVA* possui natureza multiplataforma, sendo, por isso, compatível com os sistemas operacionais Windows, Linux, macOS, Android e iOS. O principal diferencial do GeoGebra, em relação aos outros *softwares* disponíveis, é a unificação dos recursos de geometria dinâmica, planilha eletrônica, sistema de álgebra computacional, geometria tridimensional, gráfico de funções, vetores, dentre outros. Dessa forma, se reúne em um único *software*, importantes ferramentas de mediação para o ensino da matemática.

O GeoGebra também dispõe de uma plataforma *on-line* com diversos recursos, incluindo sua versão para navegador. Nesse ambiente é possível criar uma conta pessoal, com a qual o usuário tem acesso, em estilo "rede social", a diversos arquivos compartilhados, podendo também, caso queira, disponibilizar suas construções para qualquer pessoa na internet. Pode-se ainda criar salas de aulas virtuais, com interatividade em tempo real. Também é possível a criação de livros virtuais com conteúdo dinâmico e acesso aos mesmos recursos que o GeoGebra nativamente dispõe. Além do aplicativo para computador, mais recentemente, foi disponibilizado aplicativos para *smartphones*, fato, que associado a sua plataforma *online*, torna móvel essa tecnologia educacional.

Devemos, ainda, destacar que o GeoGebra é um recurso pedagógico consolidado nos meios educacionais. A própria BNCC (BRASIL, 2018), enfatiza a efetividade, dos *softwares* de geometria dinâmica, em atribuir significado e concretismo aos conceitos matemáticos:

> Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de **geometria dinâmica** têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2018, p. 276)

Muito se fala no movimento que o GeoGebra proporciona aos objetos matemáticos, com consequente superação da estática proveniente do método "quadro e giz". Portanto, se insere uma perspectiva de dinamicidade ao processo educacional:

> Com o GeoGebra a aula transfigura-se em formato dinâmico, o aluno visualiza a matemática em movimento. O professor debate em torno dos parâmetros ao movimentar o gráfico. O aluno tem a possibilidade de conceber a essência da matemática. (MOURA; SANTOS; SILVA, 2016, p. 336)

Os programas de inserção tecnológica no ambiente escolar, dos quais podemos destacar o ProInfo (Programa Nacional de Tecnologia Educacional), prioriza a utilização, nos *hardwares* escolares, de *softwares* livres. A exemplo disso, a maior parte dos computadores vinculados a esses programas governamentais possuem como sistema operacional o Linux Educacional. Embora, em suas versões atuais é dada mais liberdade para o professor escolher as aplicações, em versões anteriores era comum o GeoGebra vir pré-instalado. Em todo caso, muitos projetos envolvendo Linux Educacional traz consigo uma coletânea de *softwares* que incluem o GeoGebra:

> A opção pelo software GeoGebra se deu pelo fato de que nos computadores dos laboratórios de informática da rede pública de ensino da regional de educação de Balsas – MA já vem instalado por padrão no Linux Educacional, facilitando o seu uso. (SOUSA, 2018, p. 33)

Outro aspecto a se considerar, é a multiplicidade de funções incorporadas ao GeoGebra e seu uso educacional. Geralmente, os *softwares* matemáticos são especializados. O GeoGebra, além dos recursos de geometria dinâmica, possui a capacidade de plotar gráficos, recurso muito útil nas aulas de matemática:

> [···] o uso de softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, pode colaborar significativamente para a criação de um ambiente didático

> prático e investigativo, auxiliando na interpretação geométrica das funções afim e quadrática, além de facilitar o trabalho de construção de seus gráficos [$\cdots$] (SAMPAIO; GUEDES, 2018, p. 2).

Considerando a efetividade educacional (apontada pelas referências) do GeoGebra, nos resta associá-lo a condições de uso que permitam explorar seu grande potencial pedagógico. Nesse sentido, propomos o estabelecimento de uma estratégia que vincule o *software* as tecnologias móveis estabelecidas socialmente. Essa mobilidade torna viável uma proposta metodológica que considere o uso contínuo do GeoGebra. Desta forma o professor não precisa depender, por exemplo, da aquisição de equipamentos e de agendamento de laboratórios de informática (que já são suficientemente disputados).

2.3 O ensino de sequências numéricas

A partir de pressupostos da psicologia da matemática educacional e baseada na teoria de Tall, sobre os três mundos da matemática, Bisognin, Bisognin e Leivas (2016) discorre sobre eles, explicando que se referem ao desenvolvimento cognitivo de um indivíduo. Estes, segundo a autora, são: mundo conceitual corporificado, mundo proceitual simbólico e mundo formal axiomático.

Bisognin, Bisognin e Leivas (2016) explica que no **mundo conceitual corporificado**, a compreensão de entes matemáticos se dá através da interação com o mundo físico e com nosso agir em relação a ele. Através de nossa reflexão sobre objetos reais ou imaginários podemos construir uma percepção matemática com consequente aprendizado de seus conceitos. Nesse mundo, o aprendizado está relacionado com todas as percepções sensoriais vinculadas aos nossos sentidos, isto é, ao modo como percebemos e imaginamos os conceitos inseridos em nossa realidade.

No **mundo proceitual simbólico** há correspondência entre a percepção matemática do mundo conceitual corporificado com os símbolos utilizados em matemática, ou seja, é um processo de tradução simbólica da assimilação sensorial de entes matemáticos percebidos por meio da visualização ou da manipulação do pensamento (BISOGNIN; BISOGNIN; LEIVAS, 2016).

Por último, Bisognin, Bisognin e Leivas (2016) afirmam que o **mundo formal axiomático** é construído cognitivamente através do método lógico axiomático, isto é, uma construção pautada em definições, axiomas e teoremas.

Ao analisarmos estas três formas do desenvolvimento cognitivo, vinculado ao aprendizado de conceitos matemáticos, percebemos que as metodologias educacionais desta disciplina devem, de alguma forma, priorizar determinados aspectos desses "mundos", sejam eles relacionados a percepção de nossos sentidos (e por extensão, uma aproximação ao mundo real), ou ao simbolismo algébrico e formalização das estruturas (através do sistema lógico e axiomático).

Embora não exista necessariamente uma hierarquia entre esses mundos, há certo consenso que os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, em suas etapas iniciais, devem ser abordados, primeiramente, sobre um aspecto prático, voltado ao mundo real e relacionado com a percepção do cotidiano e, só então, ir evoluindo ao simbolismo e ao método lógico e axiomático. No entanto, certos conteúdos possuem natureza necessariamente vinculada ao simbolismo e a perspectiva axiomática. É o caso da álgebra. Logo, surge um questionamento: como contornar esse formalismo intrínseco ao conteúdo da álgebra e abordá-lo num cenário mais próximo à realidade do aluno? Para Vale et al. (2006, p. 198),

> Os alunos devem começar a aprendizagem da álgebra de modo intuitivo e motivador com o estudo dos padrões no mundo que nos rodeia e o esforço de analisar e descrever esses padrões. (VALE et al., 2006, p. 198)

Uma abordagem muito referenciada no estudo de álgebra é o estudo de padrões dentro de um panorama voltado ao conceito de dinamismo sensorial, isto é, as formas de impressionar os sentidos, com destaque a visualização, de modo a criar uma predisposição cognitiva e emocional, que condicione ao aluno uma facilitação no processo de aprendizado dos conceitos algébricos. Vale et al. (2006) menciona que há vários pesquisadores que aprovam e incentivam um percurso de mediação pedagógica, no ensino da álgebra, que considere suas vertentes de modelação, busca por padrões e estudo de estruturas, isto é, numa perspectiva que pondere os três diferentes "mundos da matemática". Mas, por um lado, se deve dar prioridade, numa fase inicial, às interações sensoriais, sem destituir, no entanto, a caracterização simbólica e axiomática da álgebra, cabendo ao educador medir o adequado uso de cada processo de desenvolvimento cognitivo.

> Ao mediar a transição do pensamento concreto para o abstracto, dá-se significado à álgebra como linguagem formal que ajuda os alunos a compreender melhor a matemática escolar. (NOGUEIRA; VISEU, 2011, p. 262)

Não desconsiderar a estrutura simbólica e axiomática da álgebra, enfatizando seu concretismo físico, nos intui um percurso evolutivo que nos leve de um processo de mediação educacional, voltada a percepção da realidade física, para outro que considere o simbolismo e, deste, às estruturas de natureza axiomáticas.

Alguns autores, como já mencionado, defendem uma abordagem de estudo de padrões como “rito de passagem” do concreto ao abstrato. Barbosa (2011) questiona o papel da visualização como composição cognitiva e heurística na resolução de problemas por alunos do ensino fundamental. Ela chega a conclusão que as estratégias de ensino pautadas sob uma perspectiva numérica (e por extensão algébrica), promovem uma limitação do pensamento resolutivo, que por sua vez sofre considerável grau de superação ao ser abordado dentro de um contexto de visualização. Desta forma, parte das dificuldades, no contexto de mediação educacional, no âmbito do ensino de álgebra, está vinculado a ênfase atribuída ao formalismo simbólico e axiomático. Para se contrapor a esse antagonismo, a autora propõe o uso da natureza visual dos padrões, sejam na esfera numérica, geométrica ou pictórica.

> As tarefas utilizadas neste estudo têm uma forte componente visual. Esta opção teve por base a ideia de que a inclusão de um suporte visual em problemas que envolvem a exploração de padrões, conduz à utilização de múltiplas abordagens para chegar à generalização e, dependendo do modo como os alunos veem um determinado padrão, podem potenciar a descoberta de expressões equivalentes. (BARBOSA, 2011, p. 342)

É notório que dentro de um contexto de múltiplas inteligências, como acontece no ambiente escolar, há diferentes formas de se construir o conhecimento tendo por base as diferentes características de mediação adotadas. Sob esse pressuposto, a adoção de uma perspectiva visual carrega o potencial de agregar ao estudo de padrões uma ampliação nas capacidades cognitivas de generalizar e desenvolver estratégias na resolução de um problema.

Dentro do cenário algébrico, o estudo de sequências, em específico, denota grande possibilidade na abordagem de uma metodologia de mediação pedagógica através do estudo de padrões. Por essa especificidade, esse trabalho se concentra na apresentação e discussão de uma abordagem de ensino que vise facilitar o processo de ensino e aprendizagem de sequências numéricas, sob uma ótica de percepção visual, visando criar uma “ponte” para posterior interpretação simbólica e axiomática da álgebra.

Nessa perspectiva, torna-se necessário considerar o ensino de sequências numéricas à luz da BNCC, documento normatizador do currículo escolar que visa assegurar aos estudantes um conjunto de aprendizagens essenciais que culmine no desenvolvimento de competências e habilidades preestabelecidas.

Nesse sentido, também é necessário considerar a relação entre o conceito de aprendizagem e habilidade e sua relação com a dinâmica escolar.

> Qualquer instituição escolar tem como uma de suas funções (a principal, em minha opinião) desenvolver plenamente o potencial dos estudantes a partir de suas habilidades, levando-os a adquirir as competências necessárias para atuar em um mundo em constante transformação. Isso, aliado à ideia de formar "bons pensadores", torna-se o objetivo central da educação. (BRITO, 2011, p. 42)

É objetivo da escola prover conhecimento através de mediações para aprendizagem, logo é de se esperar que haja correlata mudança comportamental por parte dos alunos. Isto é, aprendizagem implica conhecimento e conhecimento implica em mudança comportamental, sendo esta última manifestada como habilidade desenvolvida. Dessa forma, o sucesso escolar está diretamente vinculado ao desenvolvimento de habilidades, as quais são importantes para a atuação do estudante em uma sociedade em evolução.

Com relação ao objeto do conhecimento denominado sequências numéricas, a BNCC do Ensino Médio, considera o desenvolvimento de habilidades relacionadas as progressões aritméticas, conforme segue:

> (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BRASIL, 2018, p. 544)

Na BNCC, diversos conteúdos são apresentados como forma de estabelecer habilidades voltadas à prática cotidiana. Há de se ressaltar, que a Matemática é uma ciência cujos objetos de estudo são definidos em cadeia, isto é, há dependência hierárquica entre um conceito e os entes "precedentes" utilizados para defini-lo. Desta forma, há uma espécie de reciclagem de conhecimento, onde se utiliza algo já aprendido para moldar novos saberes. Em particular, a BNCC propõe o uso dessa estratégia a fim de desenvolver aprendizagens, relacionadas às progressões aritméticas, tendo como referência o conteúdo de funções afins.

Ainda, analisando esse item estabelecido pela BNCC, percebe-se que certos parâmetros curriculares não consideram todo espectro de habilidades que são relevantes na conjuntura social que se apresenta, conforme destaca Brito (2011). O autor ressalta que, dentro de um contexto de múltiplas habilidades, são as analíticas que denotam maior valor no contexto da educação institucionalizada. Como consequência, embora não seja a regra, muitas habilidades criativas e práticas não são estabelecidas como objetivos. Assim, dentre os alunos que as possuem, poucos são valorizados quanto a essas características, pois dentro do contexto curricular não são consideradas relevantes.

Com as ponderações aqui descritas, no próximo capítulo delinearemos uma proposta educacional, que contemple a correlação entre função afim e progressões aritméticas, com dedução de fórmulas e resolução de problemas, mas com uma perspectiva diferenciada. Prezaremos pelo pensar intuitivo e pela ênfase na experiência visual proveniente de um contexto de múltiplas representações.

3 Proposta para o ensino de progressões aritméticas através de atividades dinâmicas no GeoGebra

Neste capítulo é vislumbrada uma proposta de ensino de conceitos e habilidades relacionadas à progressões aritméticas, a nível de ensino médio. Também são discutidas abordagens envolvendo o conceito de progressão aritmética de ordem superior e suas relações com funções polinomiais. No entanto, as progressões aritméticas de ordem superior, por se tratarem de um conteúdo com desdobramentos no ensino superior, serão tomadas como vislumbre de uma perspectiva mais avançada.

O objetivo principal deste trabalho não é criar um texto base para o ensino de progressões aritméticas, mas sim, servir de referência na concepção de uma abordagem voltada para uma percepção visual do assunto, por meio do uso de construções (*applets*) no *software* GeoGebra.

Para acesso as construções, são deixadas, após a descrição conceitual de cada objeto de aprendizagem, um *hyperlink* e um código *QR*, que poderá ser *scaneado* pelo usuário com o uso de um *smartphone*. Em ambos os casos, haverá o redirecionamento do usuário a um ambiente virtual da página do GeoGebra *on-line*, onde estão armazenadas (postadas) todas as construções. Ressaltamos que, no acesso *on-line*, o usuário poderá interagir com os *applets* criados. Ademais, destacamos que não há necessidade do *software* GeoGebra estar instalado no dispositivo do usuário, sendo necessário apenas uma conexão com a internet através de um navegador qualquer.

Para fundamentar a teoria matemática, que compõe o texto deste capítulo, nos apoiamos em Paiva (1995) e Morgado e Carvalho (2015). Já para a construção do arcabouço teórico em relação ao ensino da Matemática, nos aputamos em Borba, Silva e Gadanidis (2015), Blanton e Kaput (2005), Costa e Carvalho (1997), Duval e Moretti (2012), Ferrara, Pratt e Robutti (2006), Kieran (2007), Polya (1995), Schwab (2019), Soares (1995), Vale (2009), Vale (2017), Vale (2013), Vale et al. (2006), Vale et al. (2008).

3.1 Progressões aritméticas em contexto figurativo usando *applets* no GeoGebra: abordagens e discussões

Iniciamos a discussão desse capítulo apresentando, primeiramente, a definição de progressão aritmética. Para isso nos baseamos em Paiva (1995). Objetivamos fazer corresponder o conceito tradicional de progressão aritmética com a representação visual construída. Em diversos momentos do texto, iremos intercalar o aspecto algébrico com o figurativo, pois a ênfase não é fixar um método de ensino, mas inserir um contexto de múltiplas representações que favoreçam a compreensão da ideia matemática inerente ao conteúdo proposto.

3.1.1 Definição de progressão aritmética

Definição 1. *Progressão aritmética é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual a soma do termo anterior com uma constante, também numérica, denominada razão.*

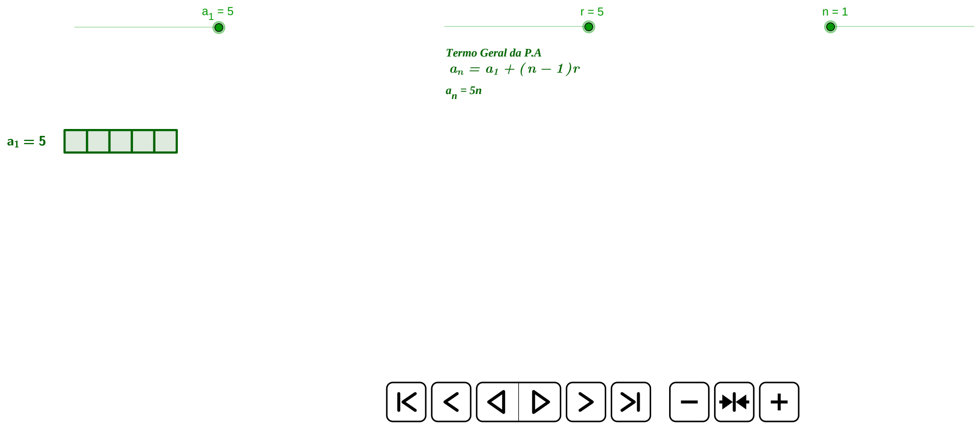
Ao interpretarmos a Definição 1 percebemos que a regra dedutiva dos termos de uma progressão aritmética se aplica somente a partir do segundo termo, necessitando identificar o termo inicial e a razão, para que se possa realizar o processo de incrementação que definirá os termos subsequentes.

Como já dissemos, uma das maiores dificuldades, em contextos de ensino e aprendizagem de álgebra, está no processo de tradução da concepção abstrata para uma ideia tangível a percepção sensorial do aluno. Neste contexto, faremos uso de uma abordagem adotada por Costa e Carvalho (1997) no livro "Padrões numéricos e sequências", no qual é destacado a natureza geométrica e visual da abstração algébrica.

Em diversas atividades do livro representa-se a unidade numérica por um retângulo. Como extensão deste modelo, um número inteiro e positivo n é representado por uma faixa retangular composta por n retângulos adjacentes. Uma limitação desse modelo está no fato de podermos representar somente números inteiros, embora se possa fazer adaptações para abrangermos os números fracionários.

Assim, inspirados pelo trabalho de Costa e Carvalho (1997), uma proposta para auxiliar na tradução dessa concepção abstrata de progressão aritmética para uma forma visual/geométrica, é por intermédio de um *applet* no *software* GeoGebra apresentado na Figura 1[1]

Figura 1 – Interpretação visual de uma progressão aritmética



Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/y4zu4xbb⟩

Para melhor compreensão da representação visual/geométrica de uma progressão aritmética, a partir dessa construção, deve-se imaginar uma escada, cujas camadas que formam os degraus são compostas por blocos retangulares (cada um correspondente a uma unidade numérica). A quantidade de blocos em cada camada (linha horizontal), que forma um degrau, corresponde a um termo da sequência que está sendo representada. Ao degrau superior, fazemos corresponder o termo inicial, a camada contendo o segundo degrau corresponde ao segundo termo, a terceira camada o terceiro termo, e assim por diante. A quantidade de blocos em cada degrau (destacada em cor mais escura) corresponde à razão da progressão aritmética.

Fazendo uso de cor e sombreamento sobre os elementos que figuram os parâmetros construtivos (razão e termo inicial), induzimos o aluno a observar que os termos da pro-

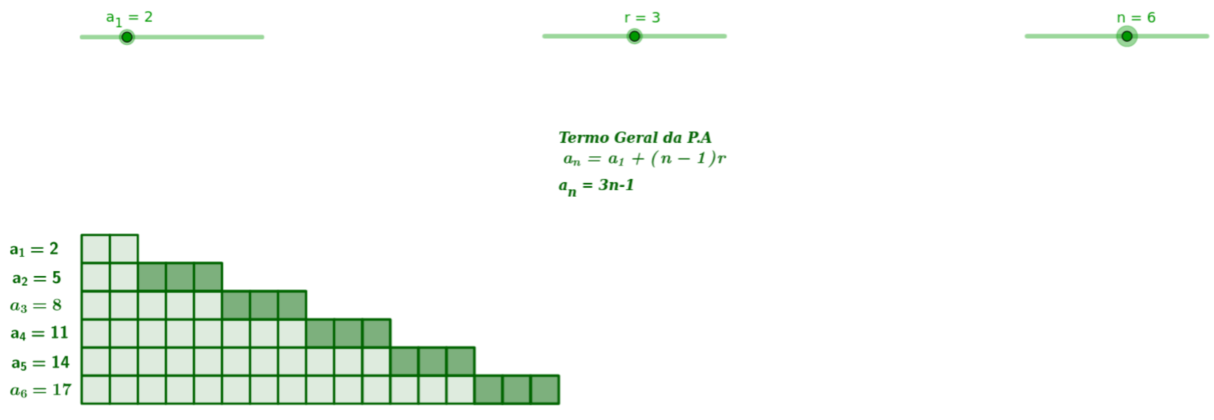
1 Muitas figuras neste trabalho são animadas. Os principais leitores de PDF compatíveis com as animações são: Acrobat Reader, KDE Okular, PDF-XChange, Foxit Reader. Funções dos botões:
Direciona ao primeiro e último quadro.
Retorna e avança um quadro.
Recua e avança os quadros automaticamente.
Pausa a reprodução automática.
Diminui e aumenta a velocidade da reprodução automática.
Retorna a velocidade inicial da reprodução automática.

gressão aritmética são concebidos ao acrescentarmos degraus (um incremento de razão), o que nos remete, justamente, a definição algébrica.

Esse *insight* visual é reforçado pela natureza dinâmica do *software* no qual é possível criar controles deslizantes que funcionam como as variáveis do modelo construído, permitindo alterar, neste caso, a visualização da representação geométrica para outra sequência. É possível, também, selecionar a quantidade de termos (numa faixa de índices predefinida) que a compõem.

O primeiro controle deslizante, nomeado de a_1 ($1 \leq a_1 \leq 5$), corresponde ao termo inicial da progressão aritmética. Ele modifica a quantidade de blocos com o qual é construído o primeiro degrau. O segundo controle deslizante, r ($1 \leq r \leq 5$), representa a razão e define a quantidade de blocos que compõem os outros degraus (que não sejam o superior). Já o último controle deslizante, n ($1 \leq n \leq 10$), controla a quantidade de linhas horizontais que contém os degraus constituintes da escada, isto é, a quantidade de termos da sequência. Lembrando que a_1, r, e, naturalmente, n, são números inteiros positivos. Para exemplificar, apresentamos na Figura 2 uma configuração do *applet* com $a_1 = 2$, $r = 3$ e $n = 6$.

Figura 2 – Interpretação visual de uma progressão aritmética - Exemplo



Fonte: Próprio autor.

Todo esse processo pode tornar intuitivo a definição formal de progressão aritmética. Portanto, no decorrer desse percurso, espera-se que o aluno seja capaz de identificar, algebricamente, a relação de recorrência que expressa essa sequência, isto é, que dado a_1 e a relação $a_n = a_{n-1} + r$; ($n \geq 2$), a progressão aritmética estará apropriadamente definida.

Para visualização do aspecto dinâmico, deixamos junto a primeira imagem um *QR Code*, que direciona ao GeoGebra *on-line*, onde é possível fazer a alteração dos parâmetros mencionados.

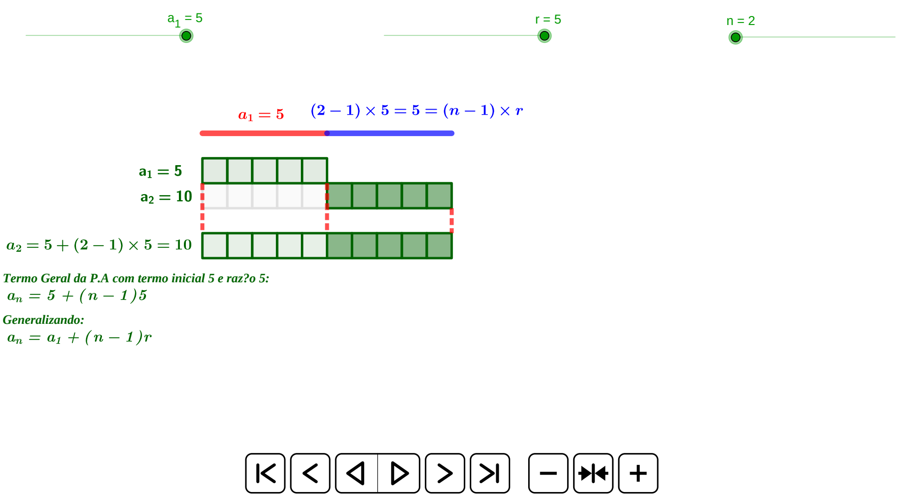
3.1.2 Termo geral de uma progressão aritmética

Teorema 1. *Numa progressão aritmética* $(a_1, a_2, a_3 \cdots, a_n, \cdots)$*, de razão* r*, tem-se:* $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n, n \in \mathbb{N}^*$*. Essa sentença é chamada de fórmula do termo geral da progressão aritmética.*

A partir da construção anterior, o aluno pode compreender a natureza incremental de uma progressão aritmética. Da percepção desse padrão, cria-se os pré-requisitos necessários para posterior dedução do termo geral. Vale (2013) destaca o potencial educacional dos padrões visuais/figurativos como forma de dar significado as expressões numéricas que fujam da pura manipulação simbólica. Essa concepção figurativa auxiliaria os estudantes no processo de generalização intrínseco à álgebra.

A partir desses pressupostos, a próxima construção tenta dar esse vislumbre figurativo como forma de facilitar o processo dedutivo do termo geral de uma progressão aritmética. Nesse percurso, além do produto visual estático, faremos uso dos diversos recursos de dinamização oferecidos pelo GeoGebra *on-line*.

Figura 3 – Dedução do termo geral de uma progressão aritmética



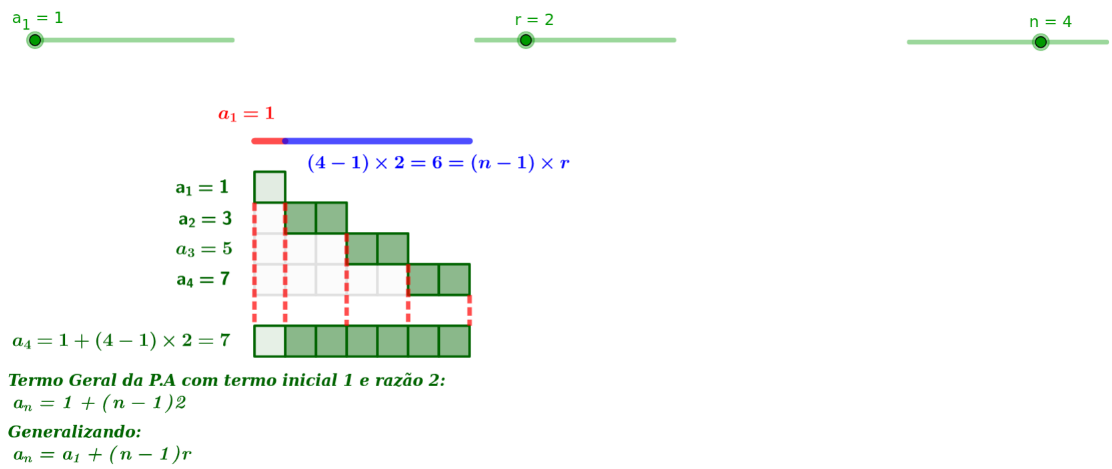
Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/dqzug26v⟩

Neste objeto de aprendizagem (Figura 3) reproduzimos, essencialmente, a atividade mostrada na Figura 1 com pequenas alterações visuais. Sombreamos levemente o termo inicial de forma destacá-lo dos outros elementos presentes. Fazemos o mesmo em cada um dos demais termos, mas apenas com os degraus que representam a razão e, desta vez, com um sombreamento mais escuro (para se diferenciar do termo inicial e se destacar em relação aos demais). Posteriormente, construirmos um termo com a projeção ortogonal dos elementos destacados através do sombreamento. Esse modelo possibilita ao usuário/estudante perceber que o enésimo termo da progressão aritmética é composto por uma faixa de blocos, contendo, em quantidade, o correspondente a um termo inicial mais $n-1$ incrementos, isto é, $a_n = a_1 + (n-1)r$. Neste caso, todos os controles deslizantes são números inteiros variando de 1 a 5.

Neste ponto, é importante que tracemos um paralelo entre as duas representações. Para isso, devemos correlacionar os degraus (a partir do segundo) com os seguintes passos algébricos: $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r$, $a_4 = a_3 + r$, $\cdots$, $a_{n-1} = a_{n-2} + r$, $a_n = a_{n-1} + r$.

No acesso *on-line*, através de controles deslizantes, oferecemos a opção de se alterar os parâmetros da sequência, produzindo certa quantidade de sequências diferentes ente si (pois os controles deslizantes representam variáveis num intervalo finito). Sendo assim, mostrá-se que o processo não é aplicável apenas a uma progressão aritmética específica, o que induz o estudante ao processo de generalização, possibilidade que o objeto de aprendizagem, de forma inerte, não ofereceria. A fim de ilustrarmos melhor, na Figura 4, apresentamos uma imagem do *applet* configurado com $a_1 = 1$ e $r = 2$ e mostrando os quatro primeiros termos da progressão aritmética.

Figura 4 – Dedução do termo geral de uma progressão aritmética



Fonte: Próprio autor.

3.1.3 Progressão aritmética como função afim de domínio discreto

A BNCC (BRASIL, 2018) propõe, para os processos de ensino e aprendizagem de progressões aritméticas, que seja associado este conteúdo com funções afins de domínio discreto. Ela também sugere que isso seja feito com as progressões geométricas. Essa estratégia é eficiente no sentido de apoiar um conhecimento que se supõe estar devidamente assimilado pelos alunos. Dessa forma, pode-se usar os conceitos e propriedades estabelecidas até aqui para o estudo de funções afins, haja vista, que as progressões aritméticas são apenas um delimitação deste conceito.

Antes de estabelecermos essas relações por meio de representações figurativas, são apresentadas as bases teóricas (matemáticas) que sustentam a abordagem.

3.1.3.1 Restrição de uma função

Definição 2. *Dada a função $f : A \to B$, chamamos restrição de f em $X \subset A$, a função $f_1 : X \to B$, tal que $f_1(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.*

Em outras palavras, a restrição de uma função f é outra função que difere de f por ter um domínio restrito a um subconjunto do domínio de f.

3.1.3.2 Definição de função afim

Definição 3. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ é denominada função afim. Sua representação gráfica é uma reta não perpendicular ao eixo X.*

Nesse caso, denominamos a de coeficiente angular, o qual corresponde ao valor da tangente do ângulo de inclinação da reta definida por f, ângulo tomado no sentido anti-horário em relação ao eixo X. Já b, é o coeficiente linear e seu valor corresponde a ordenada do ponto de intersecção da reta definida por f com o eixo Y.

3.1.3.3 Restrição em $\mathbb{N}$ de uma função afim

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax+b$. Tomando uma restrição g de f em $\mathbb{N}$, e fazendo $a = r$ e $b = a_1-r$, então $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é definida por $g(n) = rn+a_1-r = a_1+(n-1)r$, isto é, $g(n) = a_n = a_1 + (n - 1)r$. Em outras palavras, a restrição g de f no domínio discreto $\mathbb{N}$ é uma progressão aritmética.

Assim sendo, se a_i e a_j são termos quaisquer de uma progressão aritmética, então para todo a_k nesta sequência, teremos que (k, a_k) pertence a reta definida pelos pontos $A = (i, a_i)$ e $B = (j, a_j)$, cuja função g que a representa é afim, mas de domínio discreto.

Essa é uma consequência imediata do fato das progressões aritméticas serem restrições em $\mathbb{N}$ de funções reais afins. Logo, dado dois termos de uma progressão aritmética, precisamos determinar a equação da função afim g associada. Para tal, deve-se considerar que, sendo g (progressão aritmética) uma restrição de f, é natural que ela herde as propriedades de f, dentre elas:

1. Propriedades de crescimento/decrescimento:

   (i) Se $a = r > 0$ então g é crescente (progressão aritmética crescente).

   (ii) Se $a = r < 0$ então g é decrescente (progressão aritmética decrescente).

2. Lei de formação:

   (i) Por dois pontos, via sistema linear:

   Se $g(n) = an + b$, $g(n_1) = m_1$ e $g(n_2) = m_2$, então:

$$\begin{cases} an_1 + b = m_1 \\ an_2 + b = m_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m_1 - m_2}{n_1 - n_2} \\ b = \frac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{n_1 - n_2} \end{cases} \tag{3.1}$$

   (ii) Calculando o determinante de uma matriz:

   Se $g(n) = an + b$, $g(n_1) = m_1$ e $g(n_2) = m_2$, então:

$$\begin{vmatrix} n & g(n) & 1 \\ n_1 & m_1 & 1 \\ n_2 & m_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

$$\Rightarrow nm_1 + g(n)n_2 + n_1 m_2 - n_2 m_1 - m_2 n - n_1 g(n) = 0$$

$$\Rightarrow -g(n)(n_2 - n_1) = (m_1 - m_2)n + (n_1 m_2 - n_2 m_1)$$

$$\Rightarrow g(n) = \frac{m_1 - m_2}{n_1 - n_2} n + \frac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{n_1 - n_2} \tag{3.3}$$

Fazendo $a = \dfrac{m_1 - m_2}{n_1 - n_2}$ e $b = \dfrac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{n_1 - n_2}$ na equação 3.3, teremos:

$$g(n) = an + b. \tag{3.4}$$

(iii) Calculando o coeficiente angular (razão) dado um ponto (termo):

Sendo r a razão e $g(n_1) = m_1$ teremos:

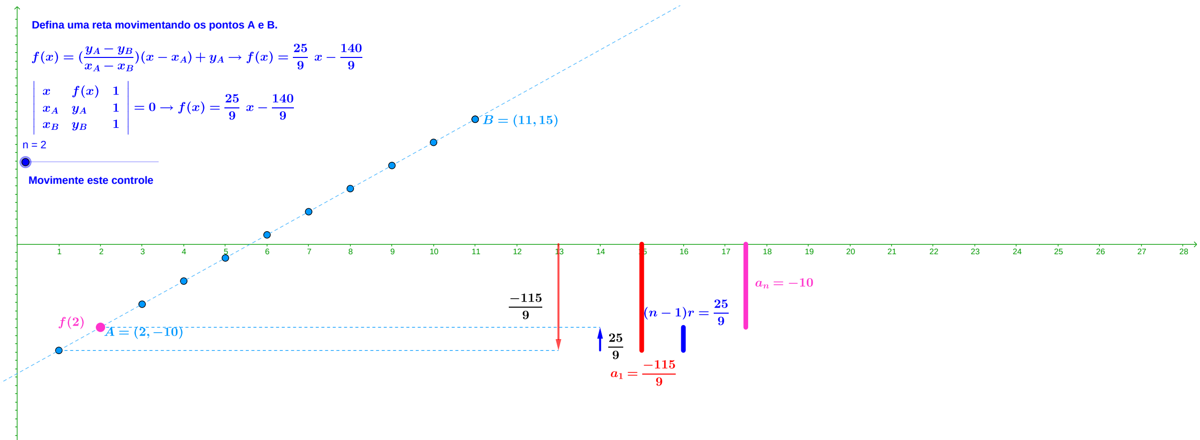
$$r = \frac{g(n) - m_1}{n - n_1}, \tag{3.5}$$

portanto:

$$g(n) = rn + (m_1 - rn_1). \tag{3.6}$$

A partir das propriedades apresentadas, passamos a interpretar o conceito de progressão aritmética como restrição em $\mathbb{N}$, da função afim, numa abordagem figurativa. Para isso, foi desenvolvido o *applet* apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Gráfico de uma progressão aritmética



$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(10)$	$f(11)$
$\frac{-115}{9}$	-10	$\frac{-65}{9}$	$\frac{-40}{9}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{35}{9}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{85}{9}$	$\frac{110}{9}$	15

PA de razão r $= \frac{25}{9}$

Termo Geral da PA:

$a_n = a_1 + (n-1)r = \frac{-115}{9} + (n-1)\frac{25}{9} = \frac{25}{9} n - \frac{140}{9}$

Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/vejjxbyw⟩

Neste *applet*, o usuário/estudante pode definir uma reta qualquer movimentando os pontos A e B no plano cartesiano. Automaticamente, são calculadas e mostradas em um quadro, as imagens da função afim, para valores naturais do domínio (iniciando em $x = 1$ e terminando em $x = x_m$, em que $x_m = max\{x_A, x_B\}$), cujo gráfico contém os pontos A e B. Por meio dos valores no quadro ou pelos pontos sobre o gráfico da f, os quais correspondem a representação geométrica destes, é possível perceber que o incremento $\Delta y = y_i - y_{i-1}$; com $i = n$ $(2 \leq n \leq x_m)$, é constante, ou seja, os valores de f, restritos ao domínio dos números naturais, estão em progressão aritmética de razão $r = \Delta y$.

Mediante um controle deslizante n $(2 \leq n \leq x_m)$, o usuário poderá destacar um ponto, com coordenadas $(n, f(n))$. Esse ponto ficará com a cor preta se $f(n)$ for positivo ou na cor rosa se $f(n)$ for negativo. O movimento, obtido pelos destaques, simula a obtenção dos termos da P.A. , obtidos a partir do anterior mais a razão $r = \Delta y$, ou seja, $a_n = a_{n-1} + r$, para $2 \leq n \leq x_m$.

No gráfico, os valores do primeiro termo e da razão da P.A., $a_1 = f(1)$ e r, são representados por setas verticais nas cores azul (quando o valor é positivo) ou vermelha (quando o valor é negativo). Essas setas possuem comprimento correspondente ao valor absoluto do elemento que representam. Os sentidos, no entanto, variam em função do sinal desses elementos. Se, digamos a_1, tem valor negativo, a seta apontará para baixo, mas caso a_1 possui um valor positivo, a seta apontará para cima.

Há mais três segmentos de reta à direita no *applet*. O primeiro repete, em comprimento, a representação em setas de a_1, incluindo seu esquema de cores. O segundo corresponde, em comprimento, a soma das razões que são representadas por setas no gráfico, repetindo o mesmo esquema de cores dessas setas. O terceiro representa a soma dos dois segmentos anteriores, sendo correspondente, em comprimento, a ordenada do ponto $(n, f(n))$, absorvendo o esquema de cores desse ponto. Por meio destas representações figurativas, o usuário/estudante poderá deduzir, comparando os comprimentos dos elementos geométricos, que $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Neste ponto é importante frisarmos a relação existente entre a expressão do termo geral de uma P.A. com uma função afim. A função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = ax + b \tag{3.7}$$

A diferença entre a equação 3.7 com o termo geral de uma P.A. pode levar o aluno a não correlacionar essa expressão com uma progressão aritmética. Para isso é importante notar que a fórmula usual, para representação de uma P.A., $a_n = a_1 + (n-1)r$ é assim caracterizada para enfatizar que um dado termo é obtido pela sucessiva incrementação da razão ao termo inicial. Ou seja, se faz corresponder o padrão construtivo, de uma progressão aritmética, a expressão de seu termo geral.

Uma atividade interessante, para contornarmos essa dificuldade, é fazer o aluno expandir a expressão do termo geral. Assim teríamos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = a_1 + nr - r = nr + (a_1 - r)$$

$$\Rightarrow a_n = nr + (a_1 - r) \tag{3.8}$$

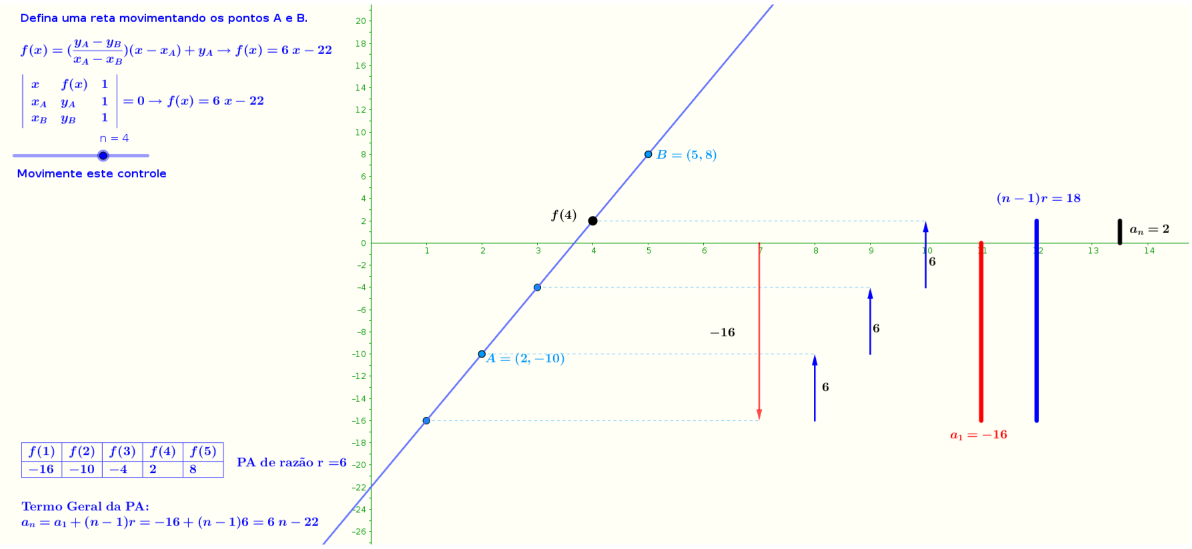
Fazendo $a = n$ e $b = (a_1 - r)$, teríamos $f(x) = ax + b$ e $a_n = ar + b$. Neste caso, a semelhança seria mais nítida, de forma que as expressões difeririam apenas na representação da variável. Para avançar na comparação é importante informar ao aluno que existem diversas convenções matemáticas, dentre elas, representar variáveis contínuas por x e inteiras por n. Também é interessante deixar claro que uma sequência também é uma função, isto é, o aluno pode interpretar a P.A. como um conjunto ordenado, formado pelas imagens da função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, assim definida:

$$a_n = g(n) = ar + b \tag{3.9}$$

Observando a expressão de 3.7 e 3.9 o aluno deverá perceber que a diferença entre as funções f e g está somente no domínio, sendo g uma restrição em $\mathbb{N}$ de f. Em outras palavras, g pode ser calculada fazendo x em $f(x)$ variar em valores de $\mathbb{N}$.

Para deixar mais claras a relações evidenciadas no *applet*, consideramos um caso hipotético, no qual o o usuário movimenta os pontos A e B de modo que suas coordenadas sejam $(2, -10)$ e $(5, 8)$, respectivamente, definindo assim a reta representada pela função afim f dada por $f(x) = 6x - 22$, conforme mostrado na Figura 6. Como consequência, o controle deslizante terá valores variando entre 2 e 5. Escolhemos $n = 4$, ficando o ponto $(4, f(4))$ em evidência (na cor vermelha). Todos os pontos de coordenadas inteiras, com abscissas entre 1 e 5, são destacados sobre a reta do gráfico da f, sendo eles: $(1, -16), (2, -10), (3 - 4), (4, 2), (5, 8)$. Percebe-se que as ordenadas desses pontos estão em progressão aritmética, com $a_1 = -16$ e $r = 6$. Ao lado gráfico, são mostrados três segmentos: o primeiro, em vermelho, representado o valor de $a_1 = -16$; o segundo, em azul, representando o valor de $(n-1).r = (4-1).6 = 18$; e o terceiro, na cor preta, o valor de a_4, que corresponde a soma dos dois anteriores.

Figura 6 – Gráfico de uma progressão aritmética - Exemplo



Fonte: Próprio autor.

Como foi possível perceber, este *applet* procura evidenciar, de forma figurativa, as relações existentes entre P.A. e funções afim, nos termos como vem sendo exigidos pela BNCC. Por meio deste, os usuários/estudantes poderão perceber que, toda função afim tem incremento constante e que os valores dessa função, sobre um domínio discretizado, estão sempre em progressão aritmética.

Também é importante ressaltar que o *applet* mostra o cálculo da expressão algébrica da função afim, por meio de algoritmos da geometria analítica. Perceba, no entanto, que numa sequência didática tradicional, ao se abordar progressões aritméticas, o aluno pode ainda não ter visto esses algoritmos. No entanto, essa inserção foi feita de modo proposital, com o objetivo de introduzir esses conceitos, ao mesmo tempo que permite ao aluno usar o algoritmo via sistema linear (já conhecido) para observar a veracidade da representação algébrica de f.

3.1.4 Média aritmética

Teorema 2. *A sequência (a,b,c) é progressão aritmética se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre a e c, isto é:* $b = \dfrac{a+c}{2}$.

A compreensão de propriedades algébricas, como está apresentada no Teorema 2, acima, esbarra no difícil processo de atribuição de significados ao conjunto de símbolos adotados em sua representação. O perfil estático desse modelo contribui para um aprendizado que se restringe a fontes de pouca excitação aos sentidos e que se perde facilmente em suas limitações interativas.

> De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes", que não sugerem nenhum tratamento. (DUVAL; MORETTI, 2012, p. 268)

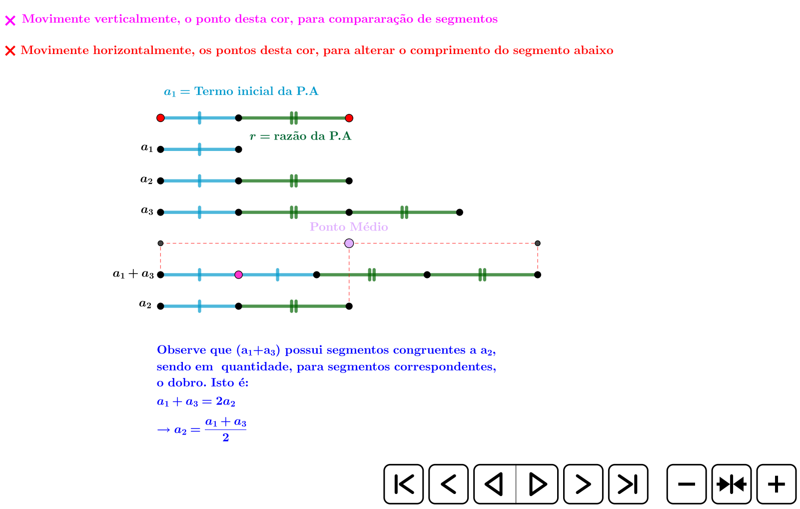
Borba e Penteado (2016) ressaltam a importância de se utilizar a tecnologia para que se possa cobrir o máximo do espectro das representações de um conceito. Isso permitiria que até os menos experientes com os métodos matemáticos pudessem fazer emergir novos aspectos de temas já consagrados em sua estrutura composicional. Os mesmos autores refletem sobre a existência de pedagogias que se adaptam as especificidades tecnológicas de modo obter melhores resultados educacionais. Permitiríamos, assim, a obtenção de uma experiência, em matemática educacional, que culmine no dinamismo observacional, isto é, conceberíamos uma pedagogia de múltiplas ilustrações, adaptáveis aos diversos públicos.

Essas reflexões nos permitem intuir que não existe um método universal de adoção da tecnologia no percurso escolar. Deveríamos, ao contrário, moldar uma estrutura pedagógica multissistêmica que preze pela adaptação das melhores práticas educacionais a constante mutação tecnológica presente em nossas vidas.

Acreditamos que o *software* GeoGebra contempla potencialidades que, associadas a boas metodologias de ensino, permitem a maximização do alcance de objetivos educacionais, através da transferência de significados do estímulo visual para a tradução de sua concepção figurativa. Dentro desta perspectiva, a seguir, procederemos com mais uma apresentação de atividade que explore a associação figurativa como agente facilitador da aprendizagem.

A propriedade destacada no Teorema 2, de que a média aritmética dos extremos é igual ao termo central, é um bom exemplo de que se pode estender o significado para além da estrutura simbólica, ressignificando essa propriedade em termos geométricos, favorecendo um aprendizado pautado pela experiência do sentido visual. A correspondência entre somar termos de uma sequência e somar segmentos sugestiona o processo de transferência da compreensão de um padrão geométrico (mais palpável aos sentidos) para o abstrato algébrico. Para tal, construímos o *applet* representado na Figura 7. Nele são dispostos três segmentos, cujo comprimento estão em progressão aritmética. Para se proceder com o processo dedutivo, soma-se o primeiro e terceiro segmento, os dispondo lado a lado e de forma adjacente. Dessa forma, é possível particionar a soma como dois elementos iniciais e duas razões, ambos representados por segmentos, onde se infere que sua média aritmética é composta por um elemento inicial e uma razão, o que coincide, exatamente, como o segundo termo.

Figura 7 – Média aritmética dos extremos de uma progressão aritmética com três termos



Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/pwqhpvjr⟩

O dinamismo desse objeto de aprendizagem, através do GeoGebra *on-line*, permite que se defina os tamanhos dos segmentos que representam o termo inicial e a razão.

3.1.5 Soma dos termos de uma progressão aritmética

Teorema 3. *A soma S_n dos n primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ é dada por* $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

A demonstração do Teorema 3 usa o truque algébrico de duplicar a soma, organizar aos pares os termos equidistantes (cuja soma é constante numa progressão aritmética) e a partir disso dar o correto tratamento algébrico para se "isolar"a variável procurada

(Soma). Na sequência mostraremos o método de demonstração algébrico que, tradicionalmente, é usado nos níveis básicos de ensino.

Seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma P.A..

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

Posteriormente, duplicamos os valores nos dois membros da equação:

$2S_n = (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n)+(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_3+a_2+a_1)$.

A seguir, organizamos as parcelas em duplas de termos equidistantes (numa sequência com número impar de termos, o termo central ficará "sozinho"), conforme segue:

$2S_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$.

Em relação aos termos equidistantes, temos a seguinte propriedade:

$(a_1+a_n) = (a_2+a_{n-1}) = (a_3+a_{n-2}) = \cdots = (a_{n-2}+a_3) = (a_{n-1}+a_2) = (a_n+a_1)$.

Desse modo, a soma duplicada ficará com todas suas parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$, ou seja:

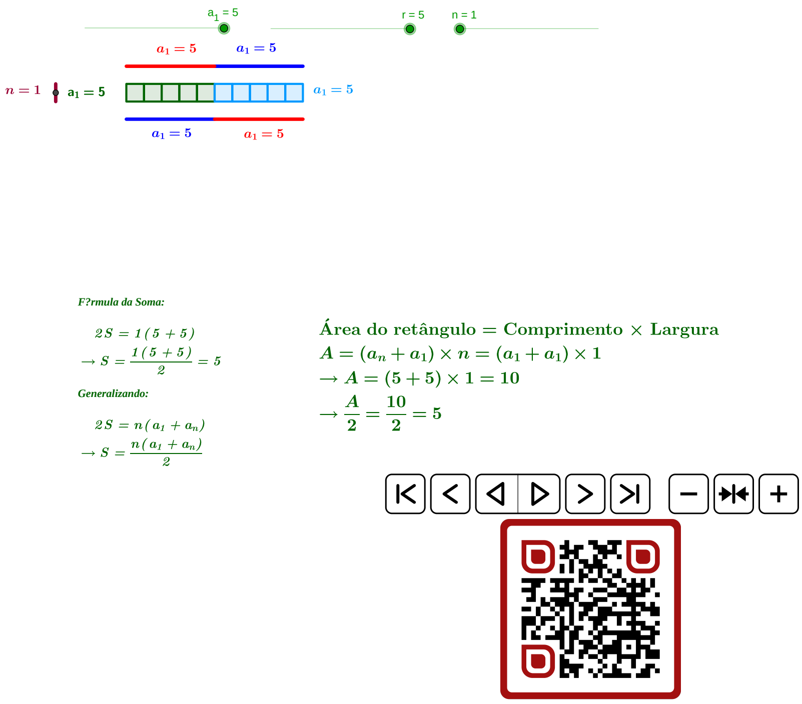
$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$.

Portanto,

$(a_1 + a_n)n \Rightarrow 2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Feita a demonstração algébrica, procedemos com o modelo dinâmico (e figurativo) que elaboramos para facilitar e ampliar as possibilidades de ensino num contexto de mediação educacional. Uma imagem representativa, juntamente com meios para esse objeto, é mostrada na Figura 8.

Figura 8 – Soma dos termos de uma progressão aritmética



Fonte:⟨https://www.geogebra.org/m/rngey2tq⟩

A base do processo de demonstração da expressão do termo geral da soma de n termos de uma P.A., considera a concepção visual/geométrica de uma progressão aritmética, apresentada na construção da Figura 1. O que se faz é duplicar a "progressão aritmética visual" e girar (em 180°) uma dessas figuras (azul) para, posteriormente, encaixar sobre a outra parte, de tal modo que culmine na representação visual de um retângulo. Sombreamos as faixas retangulares que representam os incrementos em cada termo, isto é, a razão, e deixamos em destaque segmentos que mensuram o termo inicial. Em posse destes dados o aluno está apto a resolver o problema, haja vista que o reduzimos encontrar a metade da área de um retângulo. Desta forma, há transferência do significado de um conceito visual/geométrico, já consolidado, para a representação simbólica e abstrata que são próprias da álgebra.

Mesmo que a representação (inerte) consiga gerar significado, o GeoGebra *on-line* permite intensificar o mecanismo de tradução cognitiva, no qual, o movimento funciona como agente facilitador do processo de generalização algébrica. Neste caso, são disponibilizados três controles deslizantes que modificam o termo inicial, a razão e a quantidades de termos (com um limite de 10 termos por conta do espaço ocupado na tela de um *smartphone*).

No ensino médio, muitas vezes, recorre-se a uma progressão aritmética específica, composta por termos que são números dados. Esse procedimento é relativamente intuitivo, pois o aluno poderá ver que a soma dos termos equidistantes é constante e que a correta organização das parcelas duplicadas favorecem a resolução do problema. Refletindo sobre o ensino da Matemática nas escolas, de modo geral, que considera a álgebra como generalização da aritmética, o modelo numérico serve apenas como exemplo facilitador da aprendizagem e não como método de se universalizar propriedades algébricas. Desta forma, o modelo algébrico é pouco vinculado ao concretismo sensorial e, não sendo o modelo numérico um bom método de transferência de significado, recorre-se a elementos de maior impacto aos sentidos, como é o caso das representações figurativas.

> Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer, para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. (DUVAL; MORETTI, 2012, p. 269)

Duval e Moretti (2012) menciona um paradoxo proveniente da seguinte reflexão: por um lado os objetos matemáticos são inacessíveis aos sentidos, daí a necessidade da abstração, por outro lado, a ausência de uma experiência real com esses objetos, que os tornem "palpáveis", condicionam sua compreensão a representantes que gozam dessas características de interação sensorial.

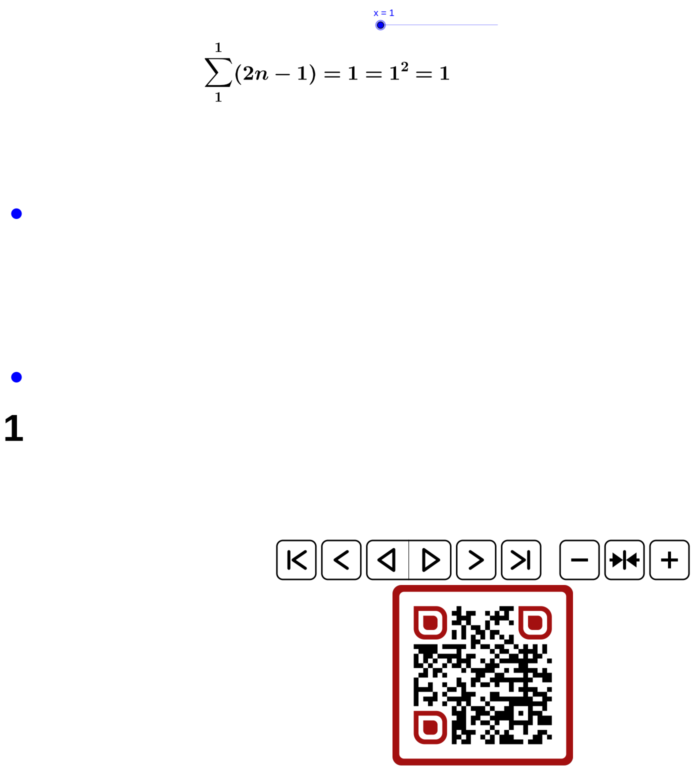
Nesse contexto, os entes figurativos, perceptíveis aos sentidos, que transferem ou representam significados, são ocultados em prol da "pureza"dos próprios significados, isto é, são necessários mas ignorados. Essa dinâmica pode representar um grande desafio para as metodologias de ensino em matemática educacional, pois se o aprendizado provém de interação (qualquer que seja a natureza) então há necessidade de "objetos"que supram essa demanda relacional.

Daí a carência, no processo de ensino e aprendizagem de matemática, de uma perspectiva pedagógica, principalmente em conteúdos de natureza algébrica, das representações semióticas que figurem no aperfeiçoamento do processo cognitivo de atribuir, através da comparação, sentido as informações que representam o conhecimento matemático. É o que estamos tentando fazer com os objetos de aprendizagem apresentados neste trabalho.

Embora a álgebra vise generalizar propriedades matemáticas, as vezes é importante se compreender as especificidades de uma dada estrutura. Exercitar a capacidade de expressar diversas representações, de um mesmo objeto, favorece ao indivíduo obter processos resolutivos que não se restringem, apenas, aos métodos convencionais. Um desenvolvimento cognitivo que habilite atribuir múltiplos sentidos, sugere um cenário mais propicio ao sucesso resolutivo. Sugerimos então, duas atividades, nas quais pretendemos estabelecer padrões específicos e alternativos ao sentido tradicional delimitado pela álgebra.

Para isso recorremos a duas situações particulares. A primeira trata da soma dos termos da progressão aritmética dos números ímpares (Figura 9), enquanto a segunda trata da soma dos termos da progressão aritmética que representa os números naturais (Figura 10).

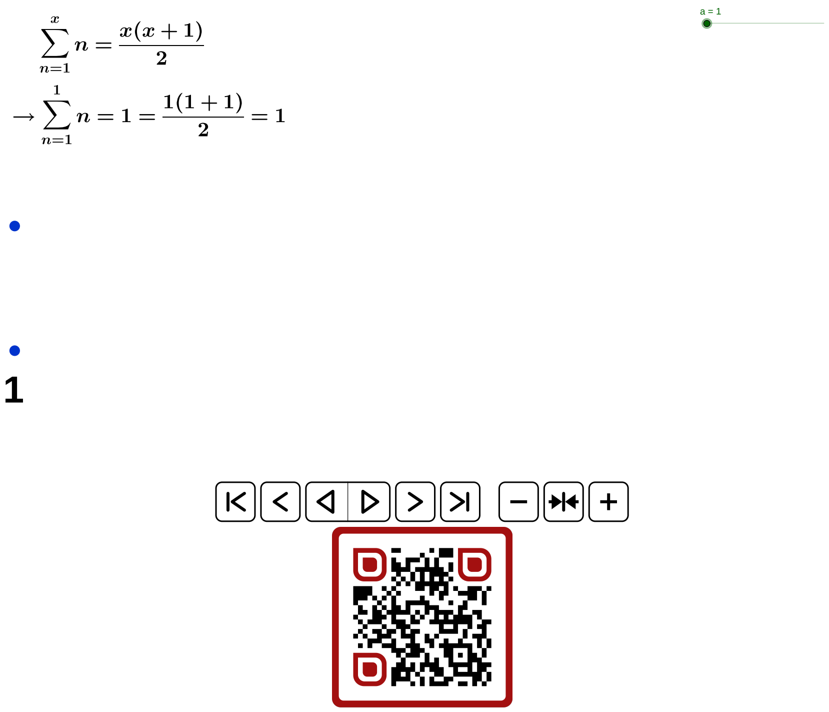
Figura 9 – Números quadrados



Fonte:⟨https://www.geogebra.org/m/affzmn8b⟩

Na construção da Figura 9, utilizamos uma representação numérica vista em diversas atividades do livro "Padrões Numéricos e Sequências", de Costa e Carvalho (1997), no qual a unidade numérica é representada por um pequeno quadrado ou um pequeno círculo. Dessa forma, um número n qualquer pode ser construído por uma configuração geométrica constituída de n círculos (ou quadrados). Adotando o círculo como unidade numérica, acrescentamos, a cada etapa do processo de soma, um número ímpar num padrão geométrico que nos remete ao quadrado.

Figura 10 – Números triangulares



Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/uujdsfff⟩

Seguindo a mesma ideia, na construção indicada pela Figura 10, novamente representamos a unidade numérica como um pequeno círculo. Nesse caso, um número n qualquer é representado por uma sequência linear composta por n círculos igualmente espaçados. Inclinamos o conjunto dessa configuração (considerando uma configuração inicial horizontal), em 120°, tendo como referência uma reta horizontal). Respeitando esses critérios, idealizamos uma sucessão, composta por termos que representam a soma dos números naturais até um valor desejado. Cada termo, com exceção do primeiro, é composto pelo termo anterior (que é apenas um círculo), acrescido, à direita, do elemento visual que representa o número de seu índice posicional. Essa junção de elementos visuais, é feita de tal forma que os círculos da base, de uma representação numérica, estejam na mesma linha horizontal (a mesma usada como referência de inclinação) e espaçados com o mesmo cumprimento utilizado sobre os círculos de uma figuração numérica. Esse método de construção, faz com que cada elemento de soma fique vinculado a um ente visual associado, que nos remete a já conhecida forma geométrica do triângulo equilátero. Essa sequência é conhecida como sequência de números triangulares.

No GeoGebra *on-line* foi acrescentado um controle deslizante que permite ao usuário ir observando os acréscimos inseridos. Esse movimento permite a compreensão do padrão construtivo que culmina nos números triangulares. Também é inserido a expressão algébrica e numérica da referida soma, para que se possa proceder com a associação e/ou transferência dos significados algébricos/aritméticos embutidos.

3.2 Progressão aritmética de ordem superior

Para delinearmos uma proposta de abordagem do conceito de progressão aritmética de ordem superior no ensino médio, tomamos o cuidado de não usarmos pré-requisitos ausentes neste nível de ensino e, também, de não manusear "objetos"estranhos ao currículo da Educação Básica.

Ao se referir às progressões, sejam aritméticas ou geométricas, a BNCC (BRASIL, 2018) sugere uma abordagem em que se utilize funções afins ou funções exponenciais com domínio discreto, isto é, que se considere os termos dessas progressões como valores das funções enunciadas sobre valores nos $\mathbb{N}$. Porém, o estudo de outras funções também configuram no currículo básico, como as funções polinomiais de grau 2 ou superior. Assim, de forma análoga as relações estabelecidas entre função afim (função polinomial do 1º grau) e progressões aritméticas, também podemos estabelecer relações entre funções polinomiais de ordem n com outros tipos de sequências numéricas. Nessa perspectiva, surge a necessidade de lidar com sequências numéricas que representam progressões aritméticas de outras ordens.

Essa abordagem, embora não foi estabelecida para compor a base comum curricular da educação básica, pode se constituir numa forma discretizada de lidar com valores de funções polinomiais, ampliando a compreensão e entendimento destas. Além disso, sequências de ordem superior também são observadas no Triângulo de Aritmética ou Triângulo de Pascal, logo, uma abordagem deste tópico, por meio do uso de elementos figurativos, poderá contribuir para a produção de novos conhecimentos e atribuição de significados.

3.2.1 Definição de progressão aritmética de ordem superior

Antes de apresentamos a definição de uma P.A. de ordem superior, é necessário definir o operador diferença Δ. Este operador é tal que, quando aplicado sobre o termo a_n $(n \geq 2)$ de uma sequência, determina a diferença entre o enésimo primeiro e o enésimo termo da sequência, isto é:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n. \tag{3.10}$$

A partir da caracterização do operador diferença é possível estabelecer a definição de uma progressão aritmética de segunda ordem, conforme segue abaixo.

Definição 4. *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência* (a_n) *na qual as diferenças* $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$*, entre cada termo e o anterior, formam uma progressão aritmética não-estacionária.*

Note que para identificar se uma sequência a_n é uma progressão aritmética de segunda ordem, basta que seja calculado o operador diferença sobre a_n e verificado se a sequência resultante Δa_n é uma progressão aritmética não estacionária. Em caso afirmativo, se $\Delta^2 a_n$ apresentar um valor numérico constante, poderemos concluir que a_n é, de fato, uma progressão aritmética de segunda ordem. No Quadro 2 é apresentado um exemplo numérico.

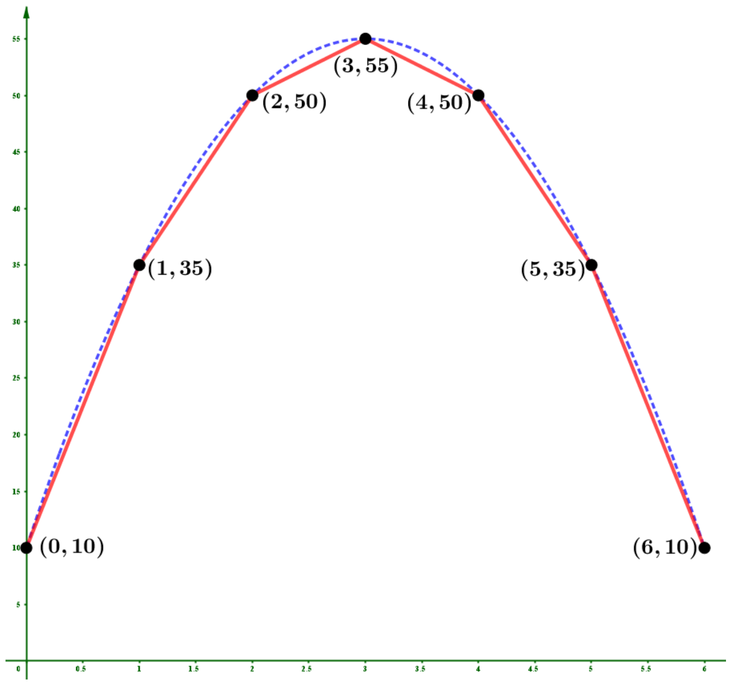
Quadro 2 - Exemplo: PA de segunda ordem

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
10	35	50	55	50	35	10	-25	← PA de segunda ordem
	Δa_0	Δa_1	Δa_2	Δa_3	Δa_4	Δa_5	Δa_6	
	25	15	5	-5	-15	-25	-35	← PA de primeira ordem
		$\Delta^2 a_0$	$\Delta^2 a_1$	$\Delta^2 a_2$	$\Delta^2 a_3$	$\Delta^2 a_4$	$\Delta^2 a_5$	
		-10	-10	-10	-10	-10	-10	← PA estacionária

Fonte: Próprio autor

Uma dúvida que surge neste ponto é: qual será o termo geral da sequência a_n, de ordem 2, apresentada no Quadro 2? Para conjecturar sobre isso, uma boa ideia é dispormos, graficamente, os termos de a_n no plano cartesiano, inserindo pontos na forma (n, a_n). Em seguida, ligando os pontos consecutivos, com segmentos de reta, é possível ter uma ideia sobre o tipo de curva associada a eles na sequência. Na Figura 11 ilustramos essa ideia.

Figura 11 – Representação gráfica de uma PA de segunda ordem



Fonte: Próprio autor

Note que o gráfico, apresentado na Figura 11, nos lembra uma parábola (tracejada em azul). Logo, podemos conjecturar que o termo geral de a_n é um polinômio de segundo grau, isto é:

$$a_n = an^2 + bn + c \tag{3.11}$$

Temos ainda que:

$$\Delta a_n = 25 + (n-1)(-10) = -10n + 35 \tag{3.12}$$

Substituindo 3.11 e 3.12 em 3.10 teremos:

$$-10n + 35 = [a(n+1)^2 + b(n+1) + c] - [an^2 + bn + c]$$

$$\Rightarrow -10n + 35 = 2an + (a+b)$$

De onde concluímos que:

$$\Rightarrow a = -5 \quad \text{e} \quad b = 30 \tag{3.13}$$

Substituindo $a_0 = 10$ e 3.13 em 3.11:

$$10 = -5(0)^2 + 30(0) + c$$

Portanto:

$$c = 10 \tag{3.14}$$

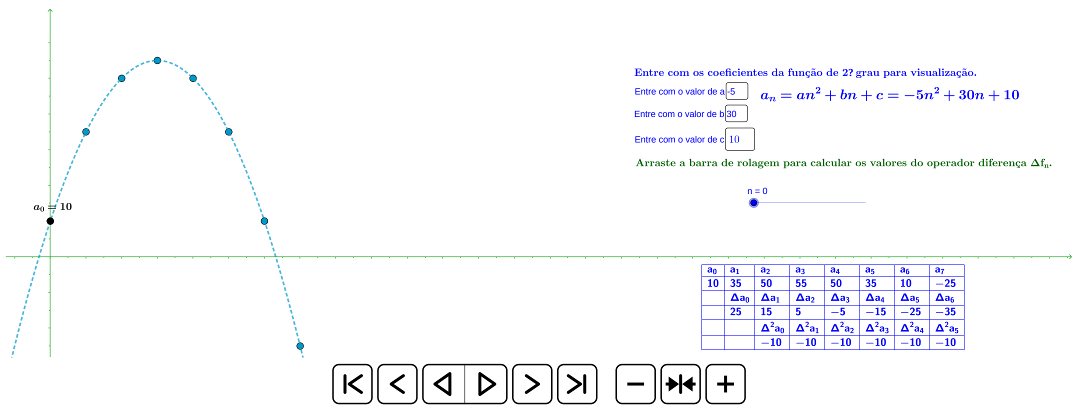
Substituindo 3.13 e 3.14 em 3.10 deduzimos que:

$$a_n = -5n^2 + 30n + 10 \tag{3.15}$$

Esse resultado e uma generalização da relação entre a ordem de uma progressão aritmética e o grau do polinômio que representa seu termo geral é sustenta pelo Teorema 4, o qual apresentamos na Seção 3.2.2.

Em posse desses dados, apresentamos no próximo *applet* (Figura 12) uma forma de representar graficamente uma progressão aritmética de segunda ordem. Para isso, o usuário escolhe os coeficientes do polinômio que representa o termo geral de a_n. Feito isso, é apresentada a parábola (que é associada ao polinômio em sua versão contínua) e os pontos sobre ela, nos quais as ordenadas são a progressão aritmética de segunda ordem cujos termos são posicionados em a_n pelas abscissas dos pontos considerados. É apresentado um controle deslizante $n \quad (0 \leq n \leq 7)$ que ao ser movido vai representando graficamente os valores do operador diferença Δa_n. Também é disponibilizado um quadro, ao moldes do Quadro 2, que calcula a_n, Δa_n e $\Delta^2 a_n$, com os quais o usuário deverá concluir que a_n realmente se trata de uma progressão aritmética de segunda ordem.

Figura 12 – Gráfico da progressão aritmética de segunda ordem



Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/hkv2dumf⟩

Definição 5. *Uma progressão aritmética de ordem* k $(k > 2)$ *é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o anterior formam uma progressão aritmética de ordem* $k - 1$.

Para exemplificar, no Quadro 3 é apresentada uma progressão aritmética de terceira ordem e as progressões resultantes após aplicar o operador diferença sobre cada uma delas.

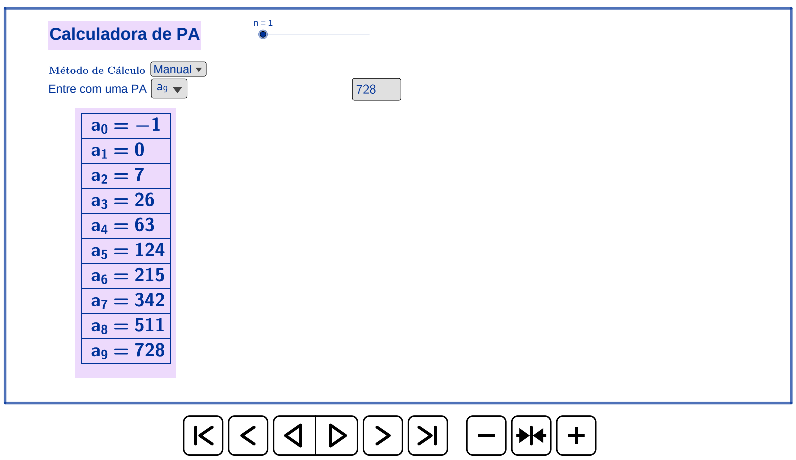
Quadro 3 - Exemplo: PA de terceira ordem

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
-1	0	7	26	63	124	215	342	← PA de terceira ordem
	Δa_0	Δa_1	Δa_2	Δa_3	Δa_4	Δa_5	Δa_6	
	1	7	19	37	61	91	127	← PA de segunda ordem
		$\Delta^2 a_0$	$\Delta^2 a_1$	$\Delta^2 a_2$	$\Delta^2 a_3$	$\Delta^2 a_4$	$\Delta^2 a_5$	
		6	12	18	24	30	36	← PA de primeira ordem
			$\Delta^3 a_0$	$\Delta^3 a_1$	$\Delta^3 a_2$	$\Delta^3 a_3$	$\Delta^3 a_4$	
			6	6	6	6	6	← PA estacionária

Fonte: Próprio autor

A partir do Quadro 3 percebe-se que, para identificar se uma dada sequência numérica é, de fato, uma progressão aritmética de ordem superior, é necessário aplicar o operador diferença sobre os termos da sequência em questão e das sequências resultantes, até que se obtenha uma progressão aritmética estacionária. No entanto, para evitar a repetição enfadonha de uma série de cálculos numéricos, tal como foi feito para a construção do Quadro 3, que pode ser desmotivador durante o processo de aprendizagem, foi criado um *applet* no GeoGebra, o qual está ilustrado e lincado ao código QR da Figura 13.

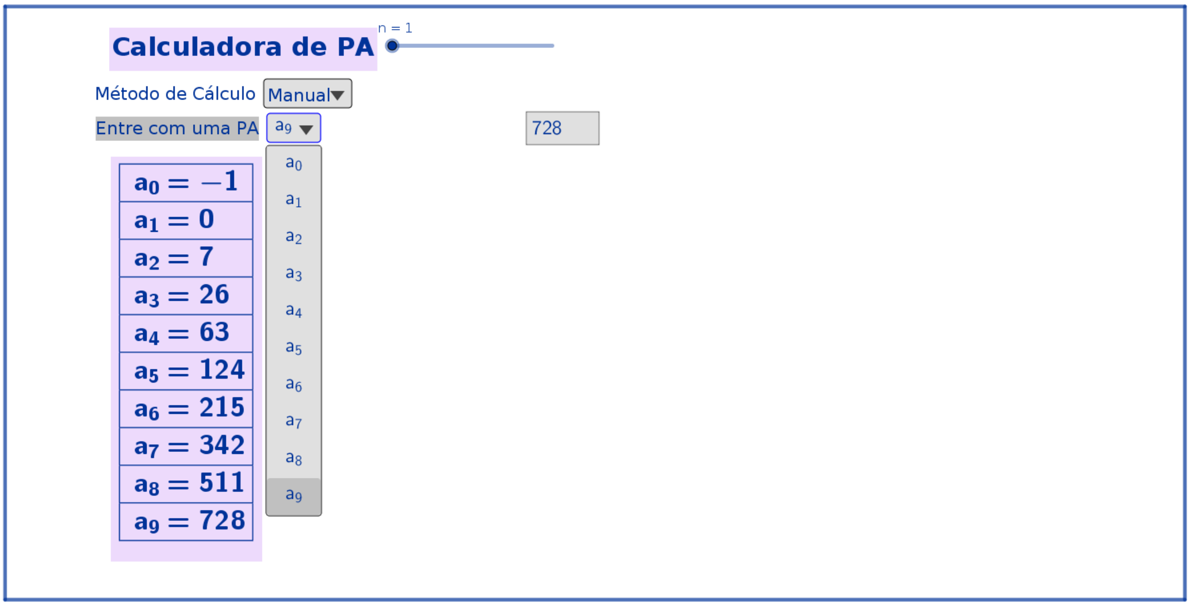
Figura 13 – Calculadora de progressões aritméticas em função dos termos



Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/ctyyzrm8⟩

Uma vez com o *applet* aberto no GeoGebra *on-line*, em posse de uma sequência com dez termos, o aluno poderá inseri-la na tabela, termo a termo, através de um campo de entrada criado para esse fim, conforme ilustrado na Figura 14.

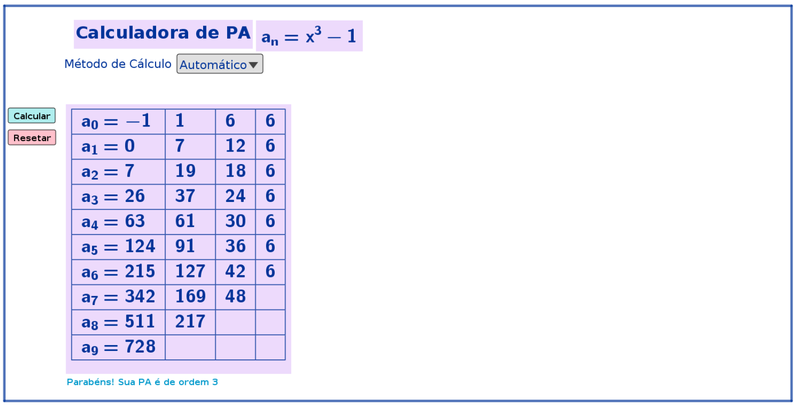
Figura 14 – Calculadora de progressões aritméticas - Campo de entrada



Fonte: Próprio autor.

Uma vez inseridos os termos de uma sequência qualquer no *applet* e deixando marcada a opção de método de cálculo "Automático", ao clicar em "Calcular", são apresentadas, em cada coluna, as diferenças dos termos da sequência de entrada e das sequências decorrentes, até exibir uma progressão aritmética estacionária (constante), caso a sequência de entrada seja uma P.A. de ordem $n \leq 7$. Se a sequência inserida não corresponde a uma P.A. de ordem superior, ou sua ordem é maior que 7, será exibida a mensagem: "Infelizmente sua sequência não é uma PA cuja ordem satisfaça $1 \leq ordem \leq 7$". Na Figura 15 é exibido o resultado para uma P.A. de terceira ordem. A ordem 7 aqui estabelecida, foi o valor limite que impusemos ao *applet* para evitar a construção de um quadro de respostas muito grande, o que dificultaria a visualização em aparelhos celulares.

Figura 15 – Calculadora de progressões aritméticas - Cálculo automático

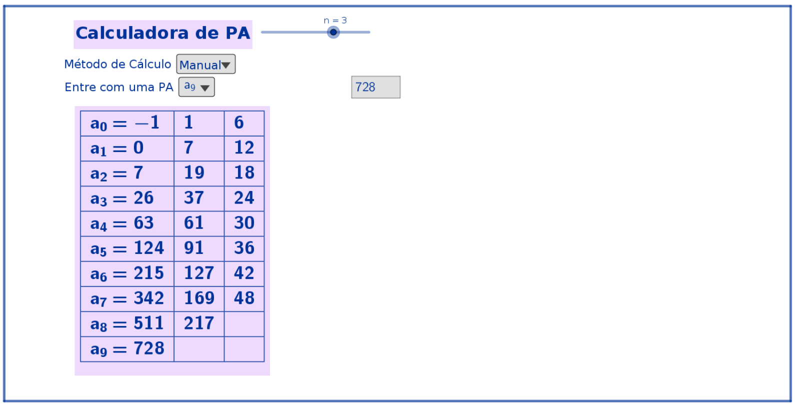


Fonte: Próprio autor.

Todo esse processo é feito de forma automática (Figura 15), bastando ao aluno a inserção dos dados. Ao clicar em "resetar", a calculadora apresenta somente a primeira coluna e o campo de entrada para alterá-la.

Já no método de entrada "Manual" (Figura 16) o objeto de aprendizagem não confirma que se trata ou não de uma progressão aritmética, independente da ordem. Essa tarefa vai caber ao estudante. Neste caso, o usuário insere dez termos da sequência e as diferenças são calculadas coluna por coluna a medida que se altera os valores presentes no controle deslizante. Vejamos a interface deste método de entrada:

Figura 16 – Calculadora de progressões aritméticas - Método de entrada manual



Fonte: Próprio autor.

Também é necessário ao aluno compreender quais mecanismos matemáticos são necessários para gerar progressões aritméticas de ordem superior. Ao mesmo tempo tais métodos não podem ser demasiados formais ao ponto de obscurecer o tema e fugir da conotação presente no ensino básico. Para isso, enunciaremos, a seguir, um teorema de apoio a atividade que construiremos via *software* GeoGebra.

3.2.2 Progressão aritmética de ordem n e seu polinômio representativo

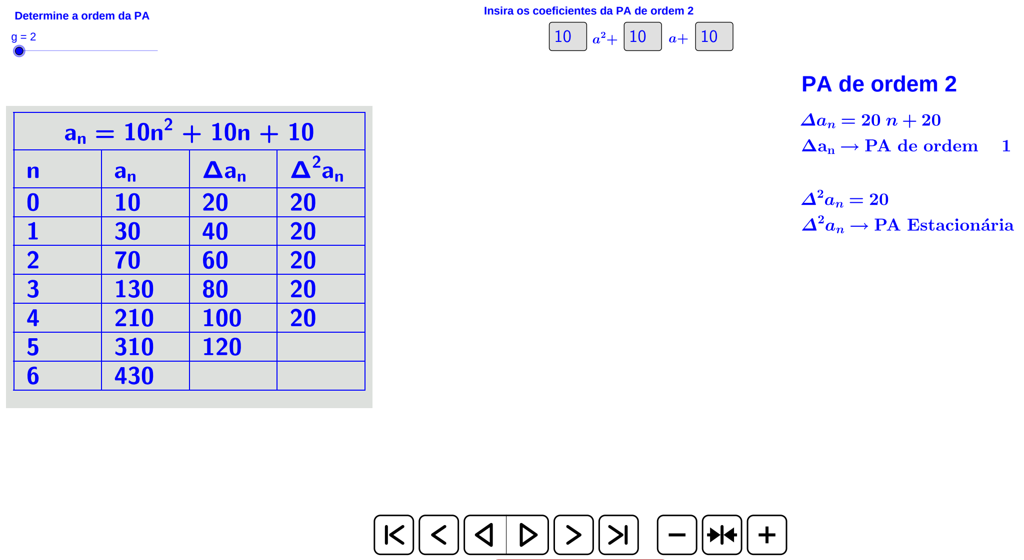
Teorema 4. *Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma progressão aritmética de ordem p e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p, então (a_n) é um polinômio de grau p em n.*

Por exemplo, se $a_n = n^2$, temos que $\Delta a_n = 2n + 1$ (progressão aritmética) e, portanto, podemos concluir que a_n é uma progressão aritmética de segunda ordem. Por outro lado se $a_n = \{-1, 0, 7, 26, 63, 124, 215, \cdots\}$, então $\Delta a_n = \{1, 7, 19, 37, 61, 91, \cdots\}$ e $\Delta^3 a_n = \{6, 12, 18, 24, 30 \cdots\}$ (progressão aritmética), ou seja, a_n é uma progressão de terceira ordem. Pelo Teorema 4, tem-se que seu termo geral é um polinômio de terceiro grau. De fato, para $a_n = \{-1, 0, 7, 26, 63, 124, 215, \cdots\}$, tem-se $a_n = n^3 - 1$, se a_n for ordenada por $\mathbb{N} + \{0\}$, ou $a_n = n^3 - 3n^2 + 3n - 2$ se a_n for ordenada por $\mathbb{N}$.

De posse do resultado do Teorema 4, desenvolvemos um objeto de aprendizagem que auxilia em sua compreensão. Neste ambiente o usuário deve, inicialmente, escolher, por meio de um controle deslizante, o grau de um polinômio a ser inserido. Feito isso, são mostrados campos de entrada que correspondem aos coeficientes do polinômio de grau definido. Com esses dados a aplicação gera um quadro no qual uma das colunas contém os dez primeiros termos da sequência (a_n). De forma automática, nas próximas colunas, são calculados os operadores diferença Δa_n, $\Delta^2 a_n$, $\Delta^3 a_n$, $\cdots$.

O usuário irá perceber que foram inseridas colunas excedentes na mesma quantidade representada pelo grau do polinômio construído. Perceberá também que a última coluna contém uma progressão aritmética estacionária. Notará ainda que, alterando os coeficientes e/ou grau do polinômio, as mesmas características enunciadas anteriormente se manterão constantes. Essas particularidades podem contribuir para verificar que a última coluna é uma progressão aritmética estacionária, a antepenúltima uma progressão aritmética convencional e as anteriores, em grau crescente e sequencial de ordem, progressões aritméticas com ordem superior. Consequentemente, a sequência, cujo termo geral é o polinômio inserido, é uma progressão aritmética de ordem igual ao grau desse polinômio, o que é, em linhas gerais, o conteúdo do Teorema 4. Na Figura 17 é apresentado este *applet*.

Figura 17 – Calculadora de progressões aritméticas em função do termo geral



$a_n = 10n^2 + 10n + 10$			
n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$
0	10	20	20
1	30	40	20
2	70	60	20
3	130	80	20
4	210	100	20
5	310	120	
6	430		

Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/qd8tsphj⟩

3.2.3 Sobre as sequências cujos termos são soma de uma progressão aritmética de ordem p

Teorema 5. *A sequência cujo termo de ordem n é a soma $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de ordem p é uma progressão aritmética de ordem $p+1$. Basta observar que o operador diferença, aplicado a (S_n), fornece $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ e define, portanto, uma progressão aritmética de ordem p.*

A inversão de um problema, as vezes, requer poucos conhecimentos adicionais para seu processo de solução e carrega como vantagem o fato de se conhecer o método da resolução não inversa (direta). Esse procedimento não só permite o aprofundamento dos conhecimentos vinculados ao problema direto, como também permite a ampliação de uma perspectiva cognitiva vinculada a sua inversão. No ensino médio, o algoritmo de soma de uma progressão aritmética é amplamente exposto nos currículos convencionais. O que pouco se observa é a abordagem do problema inverso: dada uma sequência definida por um polinômio de segundo grau, sem o termo independente, qual é a progressão aritmética vinculada, cuja soma resulta nesta sequência?

A resolução desse problema permite, também, que se introduza no currículo, uma exposição introdutória do conceito de progressão aritmética de segunda ordem. Vejamos:

Considere a sequência $a_n = an^2 + bn$. Fazendo $a = \dfrac{r}{2}$ e $b = \dfrac{2b_1 - r}{2}$, teremos $\Delta a_{n-1} = a_n - a_{n-1} = an^2 + bn - a(n-1)^2 - b(n-1) = 2an - a + b = \dfrac{2rn}{2} - \dfrac{r}{2} + \dfrac{2b_1 - r}{2} = nr + b_1 - r = b_{n+1} - r = b_n$. Portanto $\Delta a_{n-1} = b_n$.

Perceba que o operador diferença Δa_{n-1} corresponde a progressão aritmética cuja soma dos n primeiros termos retorna ao elemento a_n:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta a_{k-1} = a_n - a_0 = a_n, \text{ pois } a_0 = 0.$$

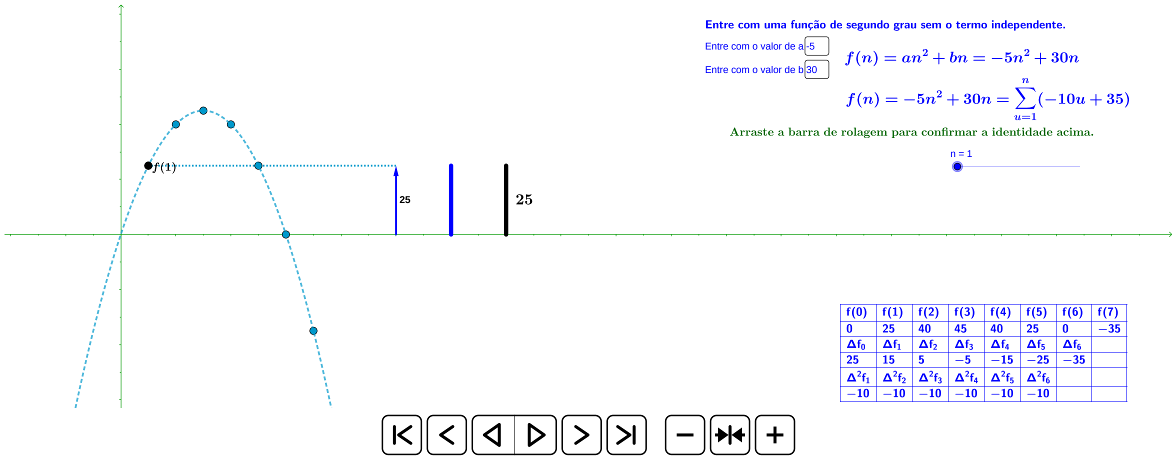
Neste ponto é importante frisar que o objetivo deste trabalho não é converter a álgebra através de representações geométricas e visuais, ao contrário, o que se procura é disponibilizar múltiplas perspectivas, em diferentes abordagens, que favoreçam um aprendizado dinâmico. Inclusive, uma das metas, é facilitar o processo de aprendizagem da álgebra em suas instâncias de simbolismo e estrutura.

A exemplo disso, está a percepção do conceito abstrato de variável e constante. De fato, o GeoGebra permite que se observe o movimento, seja espacial ou relacional, através do controle de parâmetros definidos. Ao se observar o que permanece constante e o que varia, o usuário é capaz de intuir e/ou deduzir propriedades matemáticas que somente são perceptíveis num ambiente dinâmico.

Cabe ressaltar que o movimento corresponde a um elemento figurativo. Isso porque, mesmo sobre a simbologia usual, a dinamicidade é capaz de trazer significados as estruturas algébricas até então estáticas. A mente humana tem dificuldade em generalizar quando se fixa em "objetos"inertes. O movimento, ao contrário, sugestiona as relações entre elementos, em diferentes quadros de visualização.

Com esse conjunto de ideias, justificamos a próxima construção como forma de favorecer o aprendizado das nuances matemáticas presentes nesse conceito tão interessante. Vejamos:

Figura 18 – Problema inverso da soma dos termos de uma progressão aritmética



f(0)	f(1)	f(2)	f(3)	f(4)	f(5)	f(6)	f(7)
0	25	40	45	40	25	0	−35
Δf_0	Δf_1	Δf_2	Δf_3	Δf_4	Δf_5	Δf_6	
25	15	5	−5	−15	−25	−35	
$\Delta^2 f_1$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^2 f_3$	$\Delta^2 f_4$	$\Delta^2 f_5$	$\Delta^2 f_6$		
−10	−10	−10	−10	−10	−10		

Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/y4asq22r⟩

Esse objeto de aprendizagem (Figura 18), disponibilizado no GeoGebra *on-line*, solicita ao usuário que insira os coeficientes de uma sequência f_u definida por um polinômio de segundo grau sem o termo independente. Feito isso ela retorna algebricamente à sequência h_u, cujo termo geral é um polinômio de primeiro grau tal que $\sum_{u=1}^{n} h_u = f_n$.

No contexto gráfico é calculado os valores do operador diferença Δf_{u-1} para $1 \leq u \leq n \leq 7$, com n definido por um controle deslizante. Cada valor é representado por um "vetor"horizontal, sentido para cima, se positivo e, para baixo, se negativo. Posteriormente se obtém o "vetor"resultante cujo valor associado resulta em f_n. Ao mesmo tempo observa-se que cada valor do operador diferença coincide com termos de h_u. Propriedades que são justificados pelo fato de $\sum_{u=1}^{n}(h_u = \Delta f_{u-1}) = f_n$.

Apelidamos essa atividade de "Parábola Discreta"dado que, na contramão de sua correspondente contínua, o domínio desta progressão aritmética de segunda ordem, como é de praxe em sequências, são números naturais.

Neste tópico, nos esforçamos para explorar o conceito de progressão aritmética de ordem superior, com uma linguagem necessariamente presente no ensino médio. No entanto, há uma aparente escassez de "objetos", no currículo deste nível de ensino, que se associe diretamente com o conteúdo abordado. Nossa próxima explanação, em concordância com o objeto de aprendizagem disponibilizado, tentaremos reverter essa carência de identidade.

3.2.4 Progressões aritméticas no Triângulo de Pascal

Como comentado anteriormente, o Triângulo Aritmético ou Triângulo de Pascal é constituído por números que formam progressões aritméticas de ordem superior. Nesta seção, vamos explorar a formação desse objeto matemático à luz das P.A. de diferentes ordens. Para isso, iniciamos com a definição formal do Triângulo de Pascal

Definição 6. *O Triângulo de Pascal é um triângulo formado pelos números binomiais* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, *onde* n *e* k *representam, respectivamente, o número da linha e da coluna (ambos a partir do 0).*

Os números binomiais e, portanto, os elementos do Triângulo de Pascal, são utilizados em diversos ramos da matemática, com destaque aos coeficientes binomiais, contagem e teoria das probabilidades. Um número binomial, cujo valor numérico é dado pela expressão $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, representa o coeficiente de $x^{n-k}y^k$ na expansão binomial de $(x+y)^n$. Também representa a quantidade de subconjuntos com k elementos diferentes de um conjunto com n elementos (Combinação). Já em teoria das probabilidades temos a distribuição binomial onde a probabilidade de se obter k sucessos em n tentativas, considerando que a probabilidade de se obter sucesso em uma tentativa é p, é dado pela expressão $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$, onde vemos a utilização, mais uma vez, dos números binomiais.

O Triângulo de Pascal também é conhecido como Triângulo aritmético. Sua representação pode ser vista na Figura 19, Figura 20 e Figura 21, cujo arranjo dos números em linhas e colunas lembram a forma geométrica de um triângulo. Trata-se de um triângulo numérico cuja construção, além da Definição 6, pode ser efetuada por diferentes métodos.

Um método bastante consolidado é o recursivo, no qual utilizamos a relação de Stifel: $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$. Nesse método construtivo, cada elemento do Triângulo de Pascal é igual a soma do elemento imediatamente acima e seu antecessor (considerando a linha). Para os extremos das linhas, onde não há antecessores ou elementos acima, utilizamos $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1.$

Um outro método construtivo útil e fácil, que não é explorado no no ensino básico, é por meio da formação de progressões de ordem superior, o qual discutiremos aqui. Para tal, considere os dois resultados (Teoremas) que seguem:

Teorema 6. *No Triângulo de Pascal, a soma dos elementos da transversal n desde o primeiro até o elemento da coluna p é igual ao elemento da linha $n+p+1$ e coluna p.*

Na Figura é exemplificada a aplicação desse resultado usando diferentes cores para os valores somados (na diagonal) e o valor da soma.

Figura 19 – Triângulo de Pascal - Soma de elementos da transversal

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Fonte: Próprio autor.

Teorema 7. *No Triângulo de Pascal, a soma dos elementos da coluna p, desde o primeiro até o elemento da linha n, é igual ao elemento da coluna $p+1$ e linha $n+1$.*

Na Figura é exemplificada a aplicação desse resultado usando diferentes cores para os valores somados (na coluna) e o valor da soma.

Figura 20 – Triângulo de Pascal - Soma de elementos da coluna

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Fonte: Próprio autor.

> Analogia é uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos coincidem em certas relações das suas respectivas partes. (POLYA, 1995, p. 29)

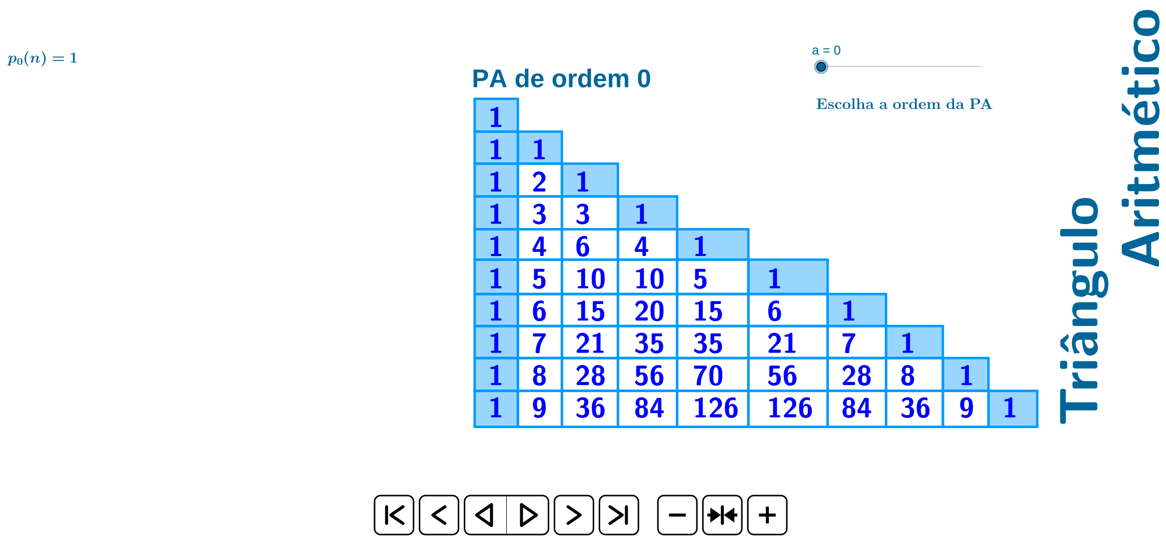
Segundo Polya (1995) uma das formas de reinterpretarmos um problema se dá através do processo de analogia. Esse método consiste na identificação de propriedades comuns entre entes matemáticos de modo a ampliar o entendimento dos conceitos envolvidos. É o que faremos com os dois teoremas acima que, quando associados ao que já vimos, nos sugere uma relação matemática muito interessante.

As propriedades de soma presentes nos Teoremas 6 e 7 e, Figura 19 e Figura 20, quando analisadas sob a luz do Teorema 5, nos revela que o famoso triângulo de Pascal poder ser reconstruído, de tal forma, que usemos para esse fim, o conceito de progressão aritmética de ordens diversas. Isso porque, decorre destes teoremas, o fato das colunas e linhas transversais (no sentido mostrado no Teorema 6) do triângulo de Pascal serem representadas por tais sequências.

Considerando essas relações no Triângulo de Pascal e os resultados sobre P.A. de ordem superiro até aqui discutidas, foi desenvolvido um objeto (representado na Figura 21) para apresentar o padrão visual das progressões aritméticas (de ordens quaisquer) que podem ser usadas como referência na construção do Triângulo de Pascal (ou Triângulo Aritmético). No GeoGebra *on-line* disponibilizamos um controle deslizante variando 0 a 9 com o qual é possível expor e ordenar o padrão de distribuição das progressões aritméticas dentro do triângulo.

Neste objeto da Figura 21, ao mesmo tempo que as ordens das P.A. são reveladas, vão surgindo, do lado esquerdo, as expressões do termo geral de cada sequência. A medida que o valor definido no controle deslizante vai aumentando, percebe-se que essas expressões vão ficando mais complexas. Ressaltamos aqui, que o melhor objetivo para mostrá-las (as ordem das P.A.) é a identificação de seu termo geral como um polinômio de mesmo grau que sua ordem. Isso corrobora com a narrativa de se tratar de um padrão construtivo via essas sequências. Desta forma, não se pretende que o aluno seja capaz de calcular cada uma das expressões, mas sim, que o faça mediante o método estabelecido pelos teoremas 6 e 7.

Figura 21 – Triângulo aritmético



Fonte: ⟨https://www.geogebra.org/m/dymthyau⟩

3.2.5 Teorema da somação

O Teorema 8, a seguir, conhecido como Teorema Fundamental da Somação, permite a simplificação da soma dos termos de uma sequência, desde que essa possa ser expressa como operador diferença de outra sequência também conhecida. Em consequência, determinados somatórios podem ser calculados de forma direta, como uma simples diferença numérica.

Teorema 8. $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1.$

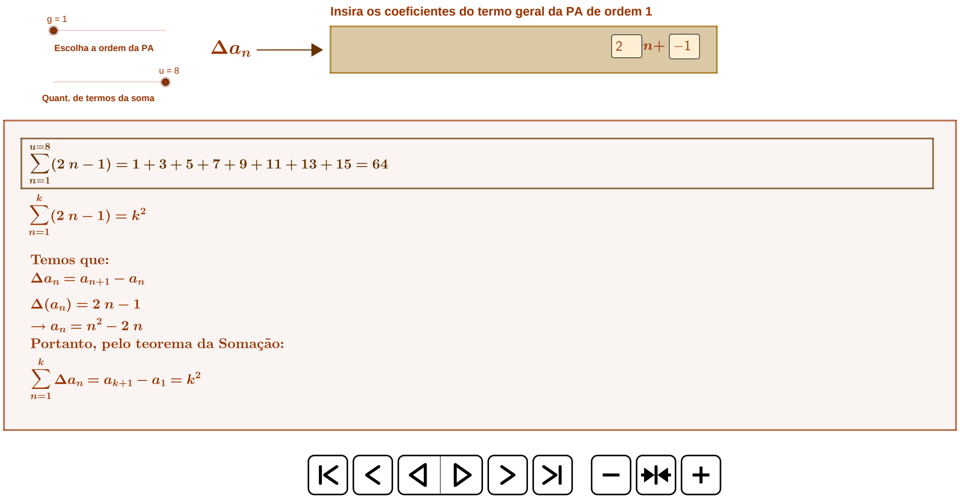
Vale (2017) menciona pesquisas de cunho cognitivo que demonstram a superioridade, em determinados tipos de problemas, das figurações visuais quando comparadas as abordagens convencionais. Ela destaca o fato de tais representações serem negligenciadas nos métodos tradicionais de ensino, o que traria um efeito deletério, dado o potencial único dessa perspectiva. Tanto é, segundo a mesma, que nas atuais pesquisas em educação matemática, esse tema está sendo retomado como forma de transpor uma metodologia de ensino baseada em fórmulas, dando então, um vislumbre mais abrangente ao contexto matemático.

A autora ainda destaca a relação dos estímulos visuais com instâncias da criatividade matemática. Sendo elas a fluência, flexibilidade e originalidade. A fluência compreende a capacidade de formular diferentes cenários resolutivos para um mesmo problema. A flexibilidade relaciona-se a maleabilidade do pensar, isto é, um processo cognitivo dinâmico que se caracteriza pela variedade de ideias para execução de uma mesma atividade. Já a originalidade refere-se a construção de estratégias não usuais, até mesmo inéditas, para a solução de um problema.

Acreditamos que os objetos de aprendizagem aqui explorados contribuem para o alcance dessas perspectivas educacionais em suas diferentes instâncias. A exemplo disso vamos observar como se deu o processo elaborativo da próxima atividade. Ela pode parecer demasiada complexa para se trabalhar no ensino médio, afinal os cálculos, passo a passo, do processo resolutivo, são extenuantes dado seu tamanho. No entanto, o que consideramos essencial são as ideias matemáticas e imagens mentais necessárias para a solução do problema. Tanto é, que o próximo *applet* foi idealizada para que se priorize a reflexão, dado que os extensos cálculos são disponibilizados de forma automática.

Essa ferramenta, ilustrada pela Figura 22 foi concebida para auxiliar o processo de soma dos k primeiros termos de uma progressão aritmética de ordem maior ou igual a 1. Um problema desse tipo pode solicitar o cálculo numérico da soma ou então a expressão algébrica que a representa. A abordagem algébrica possui a vantagem de "carregar"as soluções numéricas. Vejamos:

Figura 22 – Teorema da somação



Fonte:⟨https://www.geogebra.org/m/ywbqwnn8⟩

Para esse processo resolutivo consideramos o termo geral da sequência, a ser somada, como o operador diferença Δa_n de uma sequência auxiliar que deve ser encontrada. Observe que se Δa_n for uma progressão aritmética de ordem p então a_n, também o será, mas com ordem $p+1$. Resulta que se Δa_n possui como termo geral um polinômio de grau p então a_n terá grau $p+1$. É importante destacar que a_n não é única e que para simplificações de cálculo a escolhemos de tal modo que o polinômio que a representa não tenha o termo independente. Note que, encontrando a_n, a solução quase se completa, pois pelo Teorema 8, $\sum_{k=1}^{n}\Delta a_k = a_{n+1} - a_1$. Logo, um objetivo parcial a ser alcançado, é representar o termo geral, da progressão aritmética a ser somada, como o operador diferença de outra sequência com ordem imediatamente superior. Assim, se a sequência a ser somada for a progressão aritmética de primeira ordem $2n+1$, então fazemos $2n+1 = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n = a(n+1)^2 + b(n+1) - an^2 - bn = 2an + a + b$, o que nos leva a $2n+1 = 2an + a + b$, concluindo que $a = 1$ e $b = 0$. Consequentemente $a_n = n^2$ e $\sum_{n=1}^{k}(\Delta a_n = 2n+1) = (k+1)^2 - 1 = k^2 + 2k$.

Perceba que ao igualarmos o termo geral da sequência a ser somada com Δa_n, o que essencialmente fazemos é solucionar um sistema de equação linear, conteúdo necessariamente presente nos currículos escolares do ensino básico.

Podemos, também, retornar sobre outra perspectiva; ao problema emblemático da soma dos termos de uma progressão aritmética de primeira ordem, tal como o caso particular, explorado na Figura 9, sobre os números quadrados.

Perceba que, desta forma, incentivamos o processo de múltiplas representações de um dado objeto matemático. Esse processo pode, se bem organizado, contribuir para uma compreensão mais global de um dado conceito, pois permite sua observação sobre diferentes perspectivas, as quais se completam para aprimorar a relevância do conhecimento adquirido.

Vejamos, na Figura 23, esse exemplo:

Figura 23 – Teorema da somação - um caso emblemático

Fonte: Próprio autor.

4 Considerações Finais

Neste trabalho, objetivamos a criação de um produto educacional constituído por objetos de aprendizagem que podem auxiliar os processos mediativos de ensino de progressões aritméticas. Para fim de desenvolvimento, utilizamos o *software* GeoGebra. Nesse percurso procuramos implementar uma abordagem pedagógica que julgamos favorecer os processos de ensino e aprendizagem.

A volatilidade das estruturas sociais, demandam, dos agentes pedagógicos, uma resposta adaptativa que considere a tecnologia como instrumento resolutivo. Nesse sentido, os recursos tecnológicos mais acessíveis e difundidos, como os aparelhos de *smartphones*, merecem uma ênfase investigativa que deduza seu adequado reposicionamento como ferramenta educacional.

Através de revisão bibliográfica, percebemos que esse aparelho (o *smartphone*) corresponde a uma tecnologia digital suficientemente difundida para que verificássemos sua potencialidade como instrumento de auxílio ao processo de ensino aprendizagem. Sua natureza computacional móvel, com capacidade de conexão a internet, resulta num ambiente ideal para exploração de sua usabilidade como recurso educacional.

Uma vez encontrado o instrumento de ação educacional, deve-se refletir sobre quais formas de utilização permitiriam a maior eficácia no alcance dos objetivos estabelecidos. Em se tratando de tecnologia, encontramos o *hardware*, mas necessitamos identificar um *software* que seja adequado ao uso que pretendemos executar.

A revolução dos computadores e avanço das interfaces gráficas, permitiram a massificação de acesso a essas tecnologias. Agora não é mais necessário ao usuário compreender a semântica linguística computacional, pois com um simples arrastar de *mouse* o usuário executa diversas tarefas. A manipulação física e visualização pictórica tornaram a operação do computador um processo suficientemente intuitivo, dada a interação sensorial do usuário com a máquina. Aproveitando essas inovações, surgiram os softwares de geometria dinâmica, do qual, atualmente, o GeoGebra possui maior destaque.

Guiados por um conjunto de referenciais teóricos, constatamos que as situações de uso tecnológico que envolvem a excitação dos sentidos, em especial o sentido visual, configuram uma estratégia adequada para moldar novas perspectivas educacionais pautadas em tecnologia. Nesse percurso, percebemos que o celular é um ótimo aliado como ferramenta direcionada ao estímulo sensorial, tornando o processo de mediação pedagógica mais agradável e intuitivo. Porém, identificamos, haver certa relutância no uso deste recurso dada a sua natureza de múltiplas funções (não direcionadas para a educação) que poderiam desviar o aluno de seu percurso estudantil. Para contrapor esse fato, verificamos a necessidade docente, não só de saber manipular as ferramentas tecnológicas mas, também, de ampliar seus conhecimentos, para que assim, desenvolvam situações de uso, que sejam adequadas para um bom aproveitamento educacional.

Fischbein (1993) estabeleceu a teoria dos conceitos figurais, na qual uma entidade geométrica possui, simultaneamente duas representações, uma conceitual e outra figural. Assim, por exemplo, uma circunferência pode ser representada conceitualmente por uma equação e, ao mesmo tempo, por uma figura que a represente. O GeoGebra, nesse sentido estabeleceu um novo marco tecnológico, pois produz, ao contrário dos softwares anteriores, os diferentes tipos de representação. Ao percebermos essa dualidade, propiciada pelo GeoGebra, nos perguntamos se seria possível obter outras formas de representação, de conceitos com natureza algébrica, que permitissem superar as metodologias convencionais de ensino deste conteúdo, em específico as progressões aritméticas.

Ao depararmos com a teoria de Tall, sobre os três mundos da Matemática, nos foi elucidado certos aspectos do processo cognitivo vinculado ao aprendizado da Matemática. Através dessa teoria, compreendemos que o aprendizado dessa disciplina se dá sobre a perspectiva do concretismo, da simbologia ou de sua estrutura axiomática. Diversos autores foram unânimes ao considerar que é o concretismo que deve orientar o processo de ensino e aprendizagem, quando se trata das séries provenientes do ensino básico. Com isso, não deduzimos ser maléfico o simbolismo e a axiomática, mas sim que devemos oportunizar aos alunos um processo de amadurecimento cognitivo que lhes permitam transitar de forma coerente por esses "três mundos da matemática".

Neste ponto, uma dúvida nos impactou: como tornar concreta a álgebra, se sua natureza é, essencialmente, abstrata? Isabel Vale, em diversas publicações aqui referenciadas, propõe o uso de padrões. Já Raymond Duval desenvolveu a teoria das representações semióticas, através da qual, um conceito algébrico possui um representante que seja concebível aos sentidos. Nesse trabalho, trazemos como resposta à pergunta colocada, a junção destes dois conceitos, o que gera uma metodologia de uso das múltiplas representações, associadas ao processo de análise de padrões visuais (mesmo que sejam relações algébricas cuja representação semiótica adote a simbologia convencional).

Desta forma, implementamos a construção de objetos de aprendizagem, que funcionem como representações figurativas de conceitos algébricos. Para esse fim, usamos como interface de desenvolvimento, o *software* GeoGebra. A escolha desse aplicativo se deu baseado numa ideia descrita por Laborde (1994). Segundo o autor, na matemática, procuramos estabelecer relações que dependem da invariância. Essa, no entanto, não se faz perceber com objetos estáticos, ao contrário, é a variância que nos permite identificar aquilo que permanece constante. É o movimento que torna o GeoGebra um ótimo recurso para identificar padrões. Ademais, suas múltiplas funções nos permitem moldar objetos, de tal modo que a manipulação de seu *design* culmine num elemento representação semiótica (ou figurativa) que melhor se adéque ao estímulo sensorial humano.

A ênfase algébrica se deu pelo fato desse conteúdo estar distante da interação com os sentidos humanos. Esse aspecto é explicado ao percebermos que a abstração e simbologia adotadas são pouco estimulantes aos alunos, o que culmina no pouco interesse de estudo nessa área. Assim, uma metodologia que procure reverter esse quadro de inacessibilidade sensorial é deveras adequado para essa realidade pedagógica.

A escolha do tema progressões aritméticas, se deu ao notarmos que esse conteúdo é um ótimo representante da álgebra. Isso porque, ao generalizar a aritmética, a álgebra procura estabelecer padrões que uma vez compreendidos se traduz em relações simbólicas. Hora, as sequências numéricas estudadas no ensino médio é um ótimo retrato desse conceito, pois uma vez explicitada numericamente, procuramos identificar o padrão que nos leva a dedução de seu termo geral (e outras características).

Ao unificarmos os conceitos citados desenvolvemos um produto educacional composto por objetos de aprendizagem construídos através do *software* GeoGebra. Esses *applets*, além dos links dispostos por todo capítulo 3, podem ser obtidos ou visualizados num ambiente único (GeoGebra Book), através do *link* ⟨https://www.geogebra.org/m/hyykbcha⟩ ou do *QR Code* a seguir:

Essas construções estão envoltas de uma perspectiva educacional centrada nos conceitos de mediação pedagógica através de representações figurativas com elementos dinâmicos de influência sensorial, com ênfase ao sentido visual.

Ressaltamos que esses *applets* foram desenvolvidos pensando em sua usabilidade através de *smartphones*. Por esse motivo, justificamos a limitação nos valores que parametrizam, via controle deslizante, os objetos de aprendizagem criados, pois quanto maior o intervalo associado a esses parâmetros, maior será a imagem produzida, o que prejudica a interface visual quando acessada por dispositivos com telas menores (como nos *smartphones*).

É importante, neste ponto, revelarmos a motivação para realização deste trabalho e nossa interpretação dos resultados obtidos. Através da experiência e observação do ambiente escolar, percebemos grande dificuldade interpretativa, por parte dos alunos, no processo de formalização conceitual da matemática. Ao mesmo tempo, notamos que essas dificuldades são amenizadas diante de cenários de ensino mais lúdicos e informais. Esse trabalho nos propiciou compreendermos os mecanismos por trás dessa suavização do processo de ensino da matemática. Notamos que não se trata de subvertermos a matemática formal, mas sim, que dentro de um contexto múltiplo em representações, escolhermos aquelas que se mostrem mais palpáveis os sentidos, com destaque para visualização. A ideia é remover a distância, que é imposta ao se estudar objetos estranhos aos sentidos, através de equivalentes conceituais de maior significado ao campo sensorial do aluno.

Acreditamos que esse trabalho possa ajudar a ressignificar o ensino de álgebra tomado como simples manipulação da simbologia usual. Ao mesmo tempo, incentivamos novas propostas educacionais, em consonância com a teoria aqui apresentada, que considerem outros conteúdos algébricos. Sugerimos uma continuação ao estudo de sequências e, também, de forma até mais evolutiva, conceitos com vínculos ao concretismo sensorial negligenciados.

Referências

ASSIS, Patricia Seefelder de; SILVA, Fátima Maria Francisca Machado da. Educação e tecnologias móveis: um caminho para a sabedoria digital. In: *Aprendizagem e Construção do Conhecimento*. São Carlos: CIET:EnPED, 2018. URL: ⟨https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2018/article/view/694⟩, acesso em: 02/09/2021.

BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Mello. Personalização e tecnologia na educação. In: Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. Organizadores: Lilian Bacich, Adolfo Tanzi Neto, Fernando de Mello Trevisani. Penso, 2015.

BARBOSA, Ana. Generalização de padrões em contextos visuais: Um estudo no 6° ano de escolaridade. In: Ensino e aprendizagem da álgebra. Organizadores: Maria Helena Martinho, Rosa Antónia Tomás Ferreira, Isabel do Vale, João Pedro da Ponte. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática, Póvoa de Varzim, p. 327–344, 2011. URL: ⟨http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2011.pdf⟩, acesso em: 26/04/2021.

BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde; LEIVAS, José Carlos Pinto. Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de licenciandos em matemática. *Zetetiké*, v. 24, n. 3, p. 361–377, 2016.

BLANTON, Maria L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in mathematics education*, v. 36, n. 5, p. 412–446, 2005.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. *Fases das tecnologias digitais em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação Matemática*. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016. v. 1.

BRASIL. *Base normal comum curricular (BNCC)*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. URL: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/⟩, acesso em: 02/04/2021.

BRITO, Márcia Regina Ferreira. Psicologia da educação matemática: um ponto de vista. *Educar em Revista*, v. 1, n. 1, p. 29–45, 2011. URL: ⟨https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/22594/14833⟩, acesso em: 27/04/2021.

CARMO, Valeria Oliveira do. *Tecnologias Educacionais*. 1. ed. São Paulo: Cengage, 2016.

COSTA, Maria Cecilia; CARVALHO, Silva. *Padrões númericos e sequências*. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 1997.

DOMENICO, Adriana Sbardelotto di; DALL'AGNOL, Caroline; OLIVEIRA, Siderlene Muniz; REBOLHO, Ariane Sommer; SBARDELOTTO, Eduarda Leandra; LUCINI, Giorgia Fabiani; BROCARDO, Isabella da Silva; SILVA, José Marcos da; LOUREIRO, Matheus de Almeida; VIEIRA, Vanessa Gonçalves. *Tecnologias Móveis: aplicativos e redes sociais inovando o ensino da Matemática das séries iniciais ao ensino superior*. 1. ed. São Paulo: Editora Todas as Musas, 2020.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Tradução de Lênio Fernandes Levy, Marisa Rosâni Abreu da Silveirs. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Méricles. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Revemat: revista eletrônica de educação matemática, Florianópoles, v. 7, p. 266–297, 2012. URL: ⟨https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266⟩, acesso em: 21/07/2021.

FERRARA, Francesca; PRATT, Dave; ROBUTTI, Ornella. The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. *Handbook of Research on the Psychology of mathematics education*, Sense, Roterdham, p. 237–273, 2006.

FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, v. 24, n. 2, p. 139–162, 1993. URL: ⟨http://web.math.unifi.it/users/dolcetti/Fischbein.pdf⟩, acesso em: 18/08/2021.

IBGE. *Pesquisa nacional por amostras de domicílio (2019)*. Rio de Janeiro: IBGE, 2019. URL: ⟨https://www.ibge.gov.br/⟩, acesso em: 02/04/2021.

JUNIOR, Hélio Lemes Costa. *Tempos Digitais*. 1. ed. Porto Velho: Edufro, 2012.

KIERAN, Carolyn. Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. Quadrante, v. 16, n. 1, p. 5–26, 2007. URL: ⟨https://quadrante.apm.pt/article/view/22814⟩, acesso em: 08/08/2021.

LABORDE, Colette. Enseigner la géométrie: Permanences et révolutions. *Bulletin de l'APMEP*, APMEP, Paris, n. 396, p. 523–548, 1994. URL: ⟨https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/AAA/AAA94049/AAA94049.pdf⟩, acesso em: 18/08/2021.

MONEREO, César Coll Carles; A; B; C. *Psicologia da Educação Virtual: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e comunicação*. Tradução de Naila Freitas. 1. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática Discreta*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. v. 1.

MOURA, Daniela Alves Silveira; SANTOS, Alex Silva; SILVA, Jhonatan Júnio. Tecnologia a favor da educação matemática: GeoGebra e suas aplicações. SynThesis - Revista Digital FAPAM, v. 7, n. 7, p. 333–346, 2016. URL: ⟨https://periodicos.fapam.edu.br/index.php/synthesis/article/view/146/144⟩, acesso em: 02/09/2021.

NEVES, Thais Duarte; SOARES, Flávia Santos. As progressões aritméticas e geométricas nos programas de ensino do Colégio Pedro II: alguns apontamentos. In: História da educação matemática: panoramas curriculares e circulação de conhecimento. Organizadores: Thiago Pedro Pinto, Marcelo Bezerra de Morais, Bruno Alves Dassie. Anais do

5º ENOPHEM, 2020. URL: ⟨https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/10786⟩, acesso em: 25/08/2021.

NOGUEIRA, Daniela; VISEU, Floriano. O sentido do símbolo de alunos do 10° ano de escolaridade. In: Ensino e aprendizagem da álgebra. Organizadores: Maria Helena Martinho, Rosa Antónia Tomás Ferreira, Isabel do Vale, João Pedro da Ponte. Actas do encontro de investigação em educação matemática, Póvoa de Varzim, p. 261–279, 2011. URL: ⟨http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2011.pdf⟩, acesso em: 02/04/2021.

NUNES, Sílvia Isabel Clemente. *O desenvolvimento do pensamento algébrico através de padrões pictóricos de crescimento*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, 2016.

PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 1995. v. 2.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SAMPAIO, Ana Patrícia Lima; GUEDES, Aline de Lima. Práticas pedagógicas com o uso do GeoGebra no ensino da matemática. In: *Aprendizagem e Construção do Conhecimento*. São Carlos: CIET:EnPED, 2018. URL: ⟨https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2018/article/view/63⟩, acesso em: 03/09/2021.

SANTOS, Pricila Kohls dos; RIBAS, Elisângela; OLIVEIRA, Hervaldira Barreto de. *Educação e tecnologias*. Porto Alegre: SAGAH, 2017.

SANTROCK, John W. *Psicologia educacional*. Traducao: Denise Durante, Monica Rosemberg, Tais Silva Monteiro Ganeo. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

SCHWAB, Klaus. *A quarta revolução industrial*. Tradução de Daniel Moreira Miranda. São Paulo: Edipro, 2019.

SILVA, Guilherme Henrique Gomes. Ambientes de geometria dinâmica: Potencialidades e imprevistos. *Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia*, RBECT, v. 5, n. 1, p. 16–38, 2012. URL: ⟨https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/900/2084⟩, acesso em: 18/08/2021.

SOARES, Eliana Maria do Sacramento. Formalização e intuição no contexto do conhecimento, do ensino e da atuação social. Zetetiké/UNICAMP, v. 3, n. 3, p. 63–70, 1995. URL: ⟨http://www.lite.fe.unicamp.br/grupos/matema/zete006.html⟩, acesso em: 09/08/2021.

SOUSA, Jakson Ferreira de. *O uso do GeoGebra no ensino da matemática*. Dissertação (Mestrado) — UNIVATES, Lajeado, 2018. URL: ⟨https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/2482/1/2018JaksonFerreiradeSousa.pdf⟩, acesso em: 02/09/2021.

SUNAGA, Alexsandro; CARVALHO, Camila Sanches de. As tecnologias digitais no ensino híbrido. In: Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. Organizadores: Lilian Bacich, Adolfo Tanzi Neto, Fernando de Mello Trevisani. Penso, 2015.

TAJRA, Sanmya Feitosa. *Informática na educação*. 10. ed. São Paulo: Érica, 2019.

VALE, Isabel. Das tarefas com padrões visuais à generalização. In: Atas do seminário de investigação em educação matemática. Organizadores: J. Fernandes, H. Martinho, F. Viseu. Associação de Professores de Matemática (APM), Viana do Castelo, p. 35–63, 2009.

_____. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. REVEMAT, Florianópolis, p. 64–81, 2013. URL: ⟨https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n2p64⟩, acesso em: 21/07/2021.

_____. Resolução de problema um tema em contínua discussão: vantagens das resoluções visuais. In: Perpectiva para resolução de problemas. Organizadores: Loudes de la Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Junior, Márcio Pironel. Livraria da Física, São Paulo, p. 131–162, 2017.

VALE, Isabel; FONSECA, Lina; BARBOSA, Ana; PIMENTEL, Teresa; BORRALHO, António; CABRITA, Isabel. Padrões no currículo de matemática: presente e futuro. In: Investigación en educación. Organizadores: R. González, B. Alfonso, M. Machín, L. Nieto. SEIEM, SPCE, APM, Badajoz, p. 477–493, 2008.

VALE, Isabel; PALHARES, Pedro; CABRITA, Isabel; BORRALHO, António. Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra. In: Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores. Organizadores: Isabel Vale, Teresa Pimentel, Ana Barbosa, Lina Fonseca, Leonor Santos, Paula Canavarro. Actas do encontro de investigação em educação matemática, p. 193–211, 2006. URL: ⟨http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_2005.pdf⟩, acesso em: 01/04/2021.

Apêndice

Interpretação visual de uma
progressão aritmética

Dedução do termo geral de uma
progressão aritmética

Gráfico de uma progressão
aritmética

Média aritmética dos extremos de
uma PA com três termos

Soma dos termos de uma PA

Números quadrados

Números
triangulares

Gráfico da progressão
aritmética de segunda ordem

Calculadora de PA
em função dos termos

Calculadora de PA
em função do termo geral

Problema inverso da soma dos termos de uma PA

Triângulo aritmético

Teorema da somação

Geogebra Book