



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional PROFMAT



**Grafos, Avaliação e o Sistema Educacional Brasileiro** †

por

**Luiz Augusto de Almeida Mascarenhas Leite**

sob a orientação do

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN/ UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/ 2022  
João Pessoa - PB

---

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

L533g Leite, Luiz Augusto de Almeida Mascarenhas.  
Grafos, avaliação e o sistema educacional brasileiro  
/ Luiz Augusto de Almeida Mascarenhas Leite. - João  
Pessoa, 2022.  
44 f.

Orientação: Napoleón Caro Tuesta.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Teoria dos Grafos. 2. Educação - Avaliação. 3.  
Algoritmo. 4. Escolas públicas. I. Tuesta, Napoleón  
Caro. II. Título.

UFPB/BC

CDU 519.25(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL**

Fone/Ramal: (83) 3216-7563 <http://www.ufpb.br/pos/profmat>

**ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE**  
**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE**  
**MESTRADO PROFISSIONAL REALIZADA NO**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA**  
**NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL**  
**DA PARAÍBA**

No dia vinte e dois de fevereiro de dois mil e vinte e dois (22/02/2022), às 10:00 horas, por meio da plataforma virtual Google Meet, por meio do link: <https://meet.google.com/hnd-bjzv-mrj>, em conformidade com o parágrafo único do Art. 80 da Resolução CONSEPE nº 79/2013, que regulamenta a defesa de trabalho final por videoconferência, seguindo os mesmos preceitos da defesa presencial, em sessão pública, teve início a defesa de trabalho de conclusão de curso intitulado “*Grafos e o sistema educacional brasileiro*”, do aluno **LUIZ AUGUSTO DE ALMEIDA MASCARENHAS LEITE**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação do professor Napoleón Caro Tuesta. A Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, foi composta pelos professores Napoleón Caro Tuesta (presidente), Eduardo Gonçalves dos Santos (membro interno/UFPB) e Antonival Lopes do Nascimento Filho (membro externo). O professor Napoleón Caro Tuesta, em virtude da sua condição de presidente, iniciou os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo do seu trabalho de conclusão. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar, tendo concedido a menção: **APROVADO**. Face à aprovação, declarou o presidente achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de **Mestre** em Matemática, cabendo à Universidade Federal da Paraíba, providências como, de direito, a expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 22 de fevereiro de 2022.

**Banca Examinadora:**

Napoleón Caro Tuesta

Eduardo Gonçalves dos Santos

Antonival Lopes do Nascimento Filho

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Universidade Federal da Paraíba (UFPB) pela infraestrutura que nos foi proporcionada durante todos esses anos de curso.

Agradeço ao departamento de matemática da UFPB, na figura dos professores que conduziu, com maestria, ricos conhecimentos.

Agradeço os meus colegas que, durante esses anos, foram base de apoio, informações, incentivo e companheirismo. E sempre disponíveis para estudarmos e compartilhar conhecimento.

A minha família que sempre me incentivou nos estudos e é a base de tudo que tenho e que sou hoje.

Ao meu orientador e mestre, Professor Dr Napoleón Caro Tuesta. Que além de grande professor me auxiliou com materiais e informações valiosas.

Não poderia de deixar de agradecer a Secretaria de Educação do estado de Pernambuco, pelos dados fornecidos que foram muito úteis para a realização desse trabalho.

Não poderia de deixar de agradecer a Secretaria de Educação do estado de Pernambuco, pelos dados fornecidos que foram muito úteis para a realização desse trabalho.

E finalmente a todos que foram responsáveis indiretamente para que minha trajetória fosse concluída. Desde a equipe da limpeza até as pessoas que me acolhiam quando precisava passar finais de semanas em João Pessoa.

# Dedicatória

*Dedico esse meu trabalho a minha filha  
Alice Rodrigues de Almeida Mascarenhas Leite. Que é o bem mais precioso  
que a vida me deu.*

# Resumo

A avaliação sistêmica de redes públicas é um mecanismo de controle social e democrático da qualidade da educação oferecida pelas escolas públicas. O objetivo geral deste trabalho é criar um modelo baseado na teoria dos grafos que relaciona escolas e a proficiência dos estudantes na avaliação de larga escala. Para isso, foi utilizada a base de dados do Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco (SAEPE), desde o ano de 2010 até o ano de 2019. Esse modelo utiliza as escolas como vértices de um grafo e as arestas ponderadas como a proficiência dos estudantes. E a relação entre os vértices acontece a medida que os estudantes vão concluindo os ciclos educacionais e mudando de instituições de ensino. Esse movimento dos alunos foi inicialmente observado com os dados de 2010, nos anos iniciais de escolarização. O período se encerra em 2019 com o fim do último ciclo da educação básica (terceiro ano do ensino médio). Além disso, utilizamos o algoritmo de Dijkstra para encontrar qual melhor trajetória escolar um estudante deve percorrer dentro de uma rede pública de educação. Por fim, realizamos computacionalmente esse modelo usando dados de um município do Estado de Pernambuco e apresentamos os resultados obtidos.

**Palavras-chaves:** Grafos; Avaliação; Educação; Algoritmo;

# Abstract

The systemic evaluation of public networks is a mechanism for social and democratic control of the quality of education offered by public schools. The general objective of this work is to create a model based on graph theory that relates schools and students' proficiency in large-scale assessment. For this, the database of the Pernambuco State Assessment System (SAEPE) was used, from 2010 to 2019. This model uses schools as vertices of a graph and edges weighted as the proficiency of students. And the relationship between the vertices happens as students complete their educational cycles and change educational institutions. This movement of students was initially observed with data from 2010 in the initial years of schooling. And it ends in 2019 with the end of the last cycle of basic education (third year of high school). In addition, we use Dijkstra's algorithm to find the best school trajectory a student should follow within a public education network. Finally, we performed this model computationally using data from a municipality in the State of Pernambuco. And we present the results obtained.

**Key-words:** Graph Theory; Education; Assessment; algorithm;

# Sumário

<b>1</b>	<b>Sistema Educacional Brasileiro e Avaliação de Larga Escala</b>	<b>1</b>
1.1	Sistema de Educação Básica no Brasil . . . . .	1
1.2	Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco . . . . .	3
1.3	Escala Padronizada . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Teoria dos Grafos</b>	<b>7</b>
2.1	Aspecto Histórico . . . . .	7
2.2	Definição e Exemplos . . . . .	8
2.3	Desenhos dos Grafos . . . . .	10
2.4	Famílias Especiais de Grafos . . . . .	11
2.5	Representação por Matrizes . . . . .	12
2.6	Grau do vértice . . . . .	13
2.7	Isomorfismo . . . . .	13
2.8	Grafos Direcionados ou Digrafos . . . . .	14
2.9	Grafo Valorado ou Ponderado . . . . .	15
2.10	Algoritmo de Dijkstra . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Um estudo de caso</b>	<b>22</b>
3.1	O Modelo . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>32</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>33</b>

# Lista de Figuras

1.1	Tabela de níveis de escolaridade da educação básica . . . . .	2
1.2	Exemplo da escala de proficiência do Saeb/SAEPE . . . . .	5
2.1	Diagrama do grafo G do exemplo 01 . . . . .	10
2.2	Matriz de incidência e adjacência do grafo G . . . . .	13
2.3	Grafos isomorfos . . . . .	14
2.4	Grafo direcionado com graus de entradas e saídas e indicação das fontes e sumidouros . . . . .	15
2.5	Grafo ponderado e a sua matriz de valores . . . . .	16
2.6	Grafo que será usado como exemplo na execução do algoritmo de Dijkstra. . . . .	18
2.7	Primeira etapa . . . . .	18
2.8	Segunda etapa . . . . .	19
2.9	Terceira etapa . . . . .	19
2.10	Quarta etapa . . . . .	20
2.11	Quinta etapa . . . . .	20
3.1	Primeira parte do grafo G. . . . .	26
3.2	Primeira e segunda parte do grafo G. . . . .	27
3.3	Grafo G e suas arestas. . . . .	28

# Introdução

O sistema de ensino brasileiro é de responsabilidade do Governo Federal que, com o Ministério da Educação, organiza e orienta os demais entes federativos e Distrito Federal no programa educacional. Até a lei de diretrizes e base (LDB) de 20 de dezembro de 1996, o sistema educacional brasileiro, estava dividido em duas modalidades de ensino: o federal, que abrangia os territórios federais e os sistemas os sistemas estaduais e do Distrito Federal. Assim, a educação básica integrava os sistemas estaduais e o sistema superior, fazia parte do sistema federal. Além disso, todo o sistema era subordinado às normas fixadas pela União (Saviani,2018).

Com a Leis de diretrizes e base(LDB) de 1996 e a Constituição Federal de 1988, o sistema educacional brasileiro passou a uma forma mais organizada e estruturada. Assim, ficou estabelecido que os municípios seriam responsáveis pela educação infantil e ensino fundamental I. Já os Estados e Distrito Federal teriam a tutela do Ensino Médio bem como o ensino fundamental II. A união por sua vez, teria como responsabilidade o Ensino Técnico e Superior. Vale salientar que essas responsabilidades não são exclusividades, podendo, qualquer dos entes federativos mencionados, adentrar em outras searas. Como por exemplo os colégios de aplicação que são gerenciadas universidades pelas universidades federais e possuem em suas instituições todos os níveis de ensino.

Além da organização das responsabilidades pelas etapas de ensino, temos as faixas etárias em que se espera que os estudantes estejam em cada etapa de ensino. Esse conceito, é definido como “idade escolar” pelo Ministério da Educação e é estruturado da seguinte forma: entre zero e seis anos de idade o aluno deve estar na educação infantil, entre seis e onze anos ele deve estar no Ensino Fundamental I, entre onze e quinze anos ele deve estar no Ensino Fundamental II, entre quinze e dezoito anos ele deve estar no Ensino médio e entre dezoito e vinte três anos no Ensino Superior. Tendo entendido esse panorama organizacional do Sistema de Ensino brasileiro, definiremos, nesse trabalho, os elementos desses cinco conjuntos (as etapas de ensino) como sendo as instituições de ensino isso é: a pré-escola, escolas e universidades. podemos observar que temos cinco grandes grupos das etapas de Ensino como conjuntos bem definidos.

Sabemos que existem várias formas de relacionar conjuntos e elementos dos conjuntos. No nosso caso em particular, estaremos interessados em relacionar os elementos

---

(instituições de ensino) de cada conjunto. É bem intuitivo que existe poucas interações dentro de um mesmo conjunto. Por exemplo, uma escola  $a$  que pertence ao conjunto de escolas do ensino médio não exerce tanta influência em uma escola  $b$  pertencente ao mesmo conjunto. Isso porque suas gestões e são independentes. Contudo, podemos notar que os estudantes que saem de uma instituição de ensino do conjunto da educação infantil após completar seis anos, é direcionado a outra instituição de ensino que é elemento do conjunto do Ensino Fundamental I. Esse por sua vez ao concluir essa etapa, vai para outra instituição de ensino do Ensino Fundamental II. Esse processo segue até que o aluno complete sua trajetória escolar. Assim, fica fácil notar que vai existir forte influências entres instituições que enviam e recebem estudantes. Por exemplo, se  $\frac{2}{3}$  dos estudantes de uma certa escola  $a$  que pertence ao conjunto de escolas do Ensino fundamental 2 for, ao concluir essa etapa de ensino, para uma certa escola  $d$  pertencente ao conjunto de escolas do ensino médio. Então, é de se esperar que haja uma relação entre esses dois elementos.

Teremos como objetivo central desse trabalho criar um modelo de interações entre as instituições de ensino de todos os cinco conjuntos. Para isso iremos utilizar a teoria dos grafos. Porém, para que esse modelo seja compreendido precisaremos discutir sobre o sistema de avaliação dos estudantes do que compões o sistema de educação brasileiro.

Periodicamente os estudantes do sistema de ensino no Brasil, são submetidos a uma avaliação de larga escala. Essas avaliações são realizadas, independentemente, pela união, estados e municípios, a fim de mensurar a proficiências dos estudantes do ensino básico. E com isso, avaliar a qualidade da educação dos sistemas de ensino brasileiro. As séries avaliadas são sempre as últimas etapas de ensino. E as disciplinas avaliadas são sempre Língua Portuguesa e Matemática. Podendo, a depender da etapa e da rede de ensino, incluir também Ciências. Após serem avaliados, os estudantes obtêm um score de proficiência. Esse valor numérico pode ser importante pois é utilizado para comparar uma escola com outra além de comparar anos distintos.

No nosso modelo, utilizaremos o conjunto de instituições de ensino como vértices de um grafo. Contudo, precisaremos definir como eles estarão relacionados uns com os outros. Ou seja, como serão definidas as arestas desse grafo. Para isso utilizaremos alguns dados das instituições de ensino. O primeiro dado será a quantidade de estudantes que sai de uma escola para outra ao final da etapa. Para exemplificar, imagine que tenhamos na escola  $a_f$  do ensino fundamental 2, 400 estudantes concluído essa etapa de ensino. Donde 100 estudantes são transferidos para uma escola  $a_m$ , 150 para uma escola  $b_m$  e 150 para uma escola  $c_m$ . O segundo dado que utilizaremos será o score de proficiência que esse estudante obteve na avaliação de larga escala. Assim, combinaremos os dados anteriores da seguinte forma: tomaremos as médias de proficiência de todos os estudantes que de uma instituição de ensino de uma etapa para a instituição de ensino de outra etapa.

---

Por fim, depois de o modelo pronto faremos um estudo de caso com um município  $X$ , de tal maneira que teremos um grafo formado. Assim poderemos utilizar o Algoritmo de Dijkstra para ver qual trajetória minimiza ou maximiza a proficiência do município  $X$ .

# Capítulo 1

## Sistema Educacional Brasileiro e Avaliação de Larga Escala

### 1.1 Sistema de Educação Básica no Brasil

Existem alguns sistemas de avaliações que são implantados nas redes de ensino. Tirando os órgãos executores, todas elas têm as mesmas estruturas. Que, constitui nas matrizes curriculares, etapas avaliadas e metodologia de avaliação. Esta última, é importante destacar que, em todas, é sempre utilizada a Teoria de Resposta ao Item (TRI). Essa teoria é baseada no modelo psicométrico desenvolvida pelo matemático e estatístico dinamarquês Georg William Rasch(1901-1980), Conhecido como Modelo Rasch. Essa teoria começou a ganhar espaço na década de cinquenta do século passado substituindo o antigo modelo da Teoria Clássica dos Testes (TCT). Com essa mudança os sistemas de avaliações de larga escalas obteve enormes ganhos qualitativos, que pode ser dividido em dois casos:

O primeiro é o poder de comparação de forma temporal. Ou seja, pode-se comprar resultados de anos destinos. Isso trouxe uma grande vantagem. Pois, podemos fazer um estudo cronológico das proficiências dos estudantes, percebendo assim sua evolução (PASQUALI,2003).

O segundo é a comparação de “indivíduos” do mesmo grupo. Assim podemos comprar, respeitando as individualidades, escolas, sistemas ou algum subgrupo. Levando assim ao gestor a entender e até mesmo se apropriar de experiências positivas, para assim melhorar a qualidade do ensino (TOFFOLI,2015).

Outro ganho nessa escolha foi a fidedignidade nos resultados. A teoria de resposta ao item utiliza-se modelos estatísticos, já consolidado, que consegue se aproximar mais da realidade dos resultados. Dando um salto na qualidade, podendo assim o gestor atuar com mais precisão. Por fim e não menos importante, essa teoria tem o “poder” de prever erros ou acertos em itens mesmo não tendo sido avaliados. Podendo ampliar os espectros do currículo, dando assim uma contemplação maior ao

## 1.1. SISTEMA DE EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL

---

conhecimento. Isso é muito vantajoso dado que o conhecimento a ser avaliado é muito amplo (MENDO,2006).

Como no nosso modelo precisaremos comparar proficiências de estudantes de anos distintos, temos que utilizar um banco de dados de um sistema de avaliação externa que utilize a TRI para o cálculo dos scores dos estudantes e que tenha uma sequência de mais de 8 anos de avaliações seguidas. Essa última condição é justificada pois o público-alvo das avaliações de larga escala são: o terceiro, quinto e nono ano da educação fundamental e o terceiro ano do ensino médio. A seguir mostraremos uma figura 1.1 que exemplifica essa condição cronológica.

NÍVEL DE ENSINO	ANO ESCOLAR	IDADE REGULAR	IDADE LIMITE
Ensino Fundamental I	1º ANO	6 anos	5 ou 6 anos
	2º ANO	7 anos	6 ou 8 anos
	3º ANO	8 anos	7 ou 9 anos
	4º ANO	9 anos	8 ou 10 anos
	5º ANO	10 anos	9 ou 11 anos
Ensino Fundamental II	6º ANO	11 anos	10 ou 12 anos
	7º ANO	12 anos	11 ou 13 anos
	8º ANO	13 anos	12 ou 14 anos
	9º ANO	14 anos	13 ou 15 anos
Ensino Médio (EM)	1º ANO EM	15 anos	14 ou 16 anos
	2º ANO EM	16 anos	15 ou 17 anos
	3º ANO EM	17 anos	16 ou 18 anos

Figura 1.1: Tabela de níveis de escolaridade da educação básica

Observe que marcamos em laranja nessa figura, os finais de etapas onde ocorrem as avaliações externas nas redes de ensino. Assim, fica mais claro que, se quiser acompanhar a trajetória de um grupo de estudante que, por exemplo, fizeram uma avaliação no terceiro ano do ensino fundamental I no ano de 2000, temos que ter dados dessas avaliações até o ano de 2009.

Como termos acesso a o banco de dados do Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco (SAEPE) desde o ano de 2008 e ele utilizar a TRI para calcular as proficiências. Optamos por escolher o banco de dados do SAEPE para carregar o

nosso modelo. Para nos apropriarmos um pouco desse sistema de avaliação, dissertaremos, a seguir, um pouco sobre ele.

## 1.2 Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco

O Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE), apesar de ter sido instituído oficialmente no ano 2000, não representa a primeira iniciativa de avaliação da aprendizagem na rede estadual de Pernambuco. Entretanto, é a instituição do SAEPE que representa para Pernambuco a consolidação e sistematização de uma política de avaliação de sistema. Ademais, a instituição do SAEPE também possibilitou a articulação e parcerias com as redes municipais de ensino, em regime de colaboração com a UNDIME (União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação), garantindo dessa maneira, um retrato da rede pública de ensino; e, por fim, integração dos municípios ao Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Em 1989, foi realizada a primeira avaliação da Rede Estadual de Ensino de Pernambuco, cujos objetivos eram: (a) avaliar a implantação do Programa de Alfabetização do Ensino Básico (1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> séries); (b) discutir e analisar indicadores sobre o desempenho dos alunos e as práticas para reconstrução do processo pedagógico; (c) analisar indicadores de desempenho na escrita à luz de conteúdos curriculares; e (d) sistematizar o redirecionamento do processo pedagógico. Como se pode observar, os resultados trazidos por essa avaliação estavam mais voltados a subsidiar a redefinição da prática pedagógica.

Em 2008, o Estado de Pernambuco inicia uma parceria com a Universidade Federal de Juiz de Fora(UFJF), através do Centro de Políticas Públicas e Avaliação Educacional (CAED). Desse ano-marco em diante, o SAEPE é realizado anualmente e compõe, juntamente com o fluxo escolar, o Índice de Desenvolvimento da Educação de Pernambuco (IDEPE) para avaliar o desempenho dos alunos da rede estadual. Assim, só podemos escolher dados coletados a partir de 2008. É importante notar que como precisamos de dados em um intervalo de nove anos de avaliações, ficamos limitados a escolher para os dados do terceiro ano do ensino fundamental I em no máximo 2011, Pois um grupo de estudantes que fez sua primeira avaliação externa cursando o terceiro ano do ensino fundamental I em 2011, está realizando sua última avaliação de larga escala cursando o terceiro ano do ensino médio em 2020(data da última avaliação divulgada até a data de publicação desse trabalho).

Portanto, escolhemos para esse trabalho como dados de início, os resultados divulgados em 2010. Essa escolha não altera a ideia central do modelo.

A exceção do terceiro ano do ensino fundamental I, que avalia apenas fluência em leitura, são avaliados pelo SAEPE duas disciplinas: Matemática e Língua Portuguesa. Assim, esse trabalho utilizou dados das proficiências dos alunos da disciplina

de língua portuguesa. Essa preferência foi feita, pois poderemos contemplar todas as etapas de ensino (já que fluência em leitura é considerado língua portuguesa).

## 1.3 Escala Padronizada

As escalas de proficiência do Saeb, tanto de Matemática como de Língua Portuguesa, foram definidas a partir da distribuição nacional dos resultados dessa avaliação em 1997, de tal modo que, para a oitava série (atual nono ano) do Ensino Fundamental e em cada disciplina, a média nacional (medida do centro da distribuição) fosse igual a 250 pontos e o desvio padrão (medida da dispersão ou "espalhamento" dos resultados individuais em torno da média) fosse igual a 50 pontos. Cabe destacar que não existe nada de "absoluto" acerca dos dois valores (250 e 50).

Na verdade, fazendo uma transformação linear (que consiste, basicamente, em tomar cada um dos valores de uma distribuição - como as diferentes notas dos alunos multiplicá-los por uma constante e adicionar o resultado a outra), é possível obter um número literalmente infinito de diferentes escalas, que diferem umas das outras apenas por sua respectiva média e desvio padrão.

No caso do Saeb, os valores para a média e o desvio padrão escolhidos certamente visaram facilitar a divulgação e apropriação dos resultados. Dessa forma, numa dada disciplina, para o nono ano do Ensino Fundamental, os escores tendem a variar em torno de 250 pontos. Porém, para o quinto ano do Ensino Fundamental, que se encontra na mesma escala (com disciplina permanecendo a mesma), os resultados tendem a ser consideravelmente menores e, por outro lado, para o terceiro ano do Ensino Médio, os resultados tendem a ser maiores do que a média do nono ano. Lembrando que todos esses três anos quintos e nonos anos do Ensino Fundamental e o terceiro ano do Ensino Médio - têm sido sistematicamente avaliados pelo Saeb. O entendimento acerca do nível intervalar que é usado em todos os sistemas de avaliação de larga escala da educação básica no Brasil (inclusive o SAEPE), requer a retomada da origem das escalas do Saeb tendo em vista que um dado relevante acerca dessas escalas ou outras, fruto da transformação linear, é o seu ponto "inicial", ou seja, o seu "zero" ser completamente arbitrário.

Isto é, fazendo transformações lineares semelhantes à transformação comentada, quando tratamos das escalas do Saeb, seria perfeitamente possível, por exemplo, fazer o "zero" de uma nova escala hipotética - de Matemática ou de Língua Portuguesa - coincidir com a média nacional do Saeb de 1997 para o nono ano do Ensino Fundamental, de modo que tais médias nacionais deixariam de valer 250 e passariam a valer 0. E, se isso acontecesse, por exemplo, os resultados do quinto ano tenderiam a assumir valores negativos, visto que tenderiam a ser menores do que os do nono ano (que está centrado no zero), ao passo que os resultados do terceiro ano do Ensino

### 1.3. ESCALA PADRONIZADA

---

Médio tenderiam a tomar valores preponderantemente positivos. Talvez, à primeira vista, tal fato seja apenas um detalhe técnico. Entretanto, as implicações práticas disso não são nada triviais. Isso porque só é possível comparar o tamanho real de duas coisas quando a escala utilizada possui um zero absoluto, ou seja, um zero que, de fato, signifique a ausência da quantidade que está sendo medida. Eis um exemplo simples disso: a variável "idade" possui um zero absoluto, pois o valor zero atribuído a algo ou a alguém significa que esse algo ou alguém acabou de surgir. Dessa forma, se um programa educacional A implementado por uma secretaria de estado tem, digamos, um tempo de "zero ano" de implementação, isso significa que ele acaba de ser implementado. Por outro lado, se um segundo programa B tem dois anos e um terceiro C tem quatro anos, isso significa que o programa C tem o dobro de tempo de implementação do programa B.

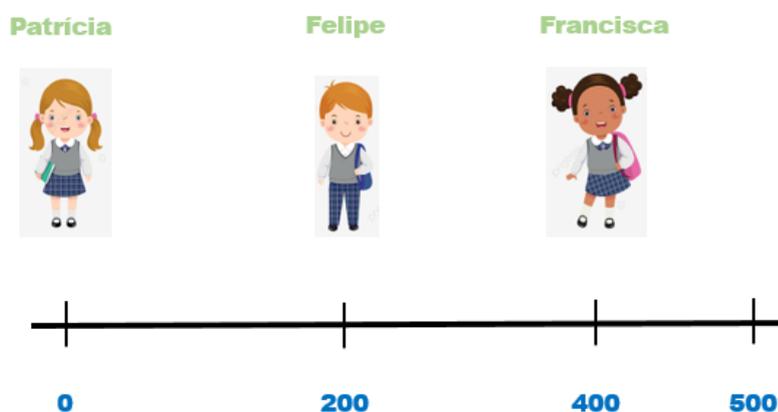


Figura 1.2: Exemplo da escala de proficiência do Saeb/SAEPE

Por outro lado, observando o exemplo da figura 1.2 da escala de proficiência do Saeb/SAEPE, se a aluna Francisca tem uma proficiência em Matemática estimada em 400 pontos e o aluno Felipe, em 200 pontos, não podemos dizer, com base nisso, que Francisca tem o "dobro" da proficiência de Felipe, ou que Francisca possui um conhecimento estimado de Matemática duas vezes maior do que o de Felipe.

De modo análogo, seria perfeitamente possível que, nessa mesma escala, a aluna Patrícia ficasse 200 pontos abaixo de Felipe, ou seja, tivesse uma proficiência estimada em zero na escala do Saeb (Matemática).

Porém, não poderíamos dizer, com isso, que Patrícia tem conhecimento "nulo" em Matemática. Patrícia, inclusive, pode ter acertado algumas questões na prova que fez, mas, pela escala adotada, acabou recebendo a pontuação zero por mera questão de "localização" da sua proficiência na escala.

Por outro lado, ainda que Patrícia tivesse, eventualmente, errado todas os itens da prova que fez, caso ela pudesse ter feito outro modelo de prova, com itens ainda mais fáceis, possivelmente Patrícia teria acertado, ao menos, alguns itens, de modo que, de novo, não poderíamos, nesse caso, dizer que essa aluna tenha conhecimento "nulo", ainda que, numericamente, seu resultado na escala adotada tenha sido igual a zero.

Portanto, nas escalas de proficiência do Saeb, independentemente da disciplina em destaque, não é possível dizer que um indivíduo tem "conhecimento nulo" e tampouco é possível dizer que um sujeito A possui o "dobro" ou o "triplo" do conhecimento do sujeito B. Não obstante, nessas escalas, é sim possível calcular a distância, ou o intervalo, entre a pontuação obtida pelos diferentes sujeitos. Dessa forma, nos exemplos acima, poderíamos perfeitamente dizer que Patrícia encontra-se, na escala de Matemática do Saeb, 200 pontos abaixo de Felipe e que este, por sua vez, está 200 pontos abaixo de Francisca.

Devido a essa possibilidade de se calcular precisamente os intervalos entre dois casos, escalas desse tipo - como as de proficiência do sistema nacional e de outros sistemas avaliativos - são chamadas escalas intervalares.

# Capítulo 2

## Teoria dos Grafos

### 2.1 Aspecto Histórico

O primeiro estudo sobre a teoria dos grafos que se tem conhecimento, foi um artigo publicado por Leonhard Euler (1707-1783) em 1736. Ele tratava de um antigo problema sobre como planejar um passeio pela cidade de Königsberg (Rússia), mas que na época pertencia a Prússia, em que se cruzasse cada uma das pontes uma única vez. Esse problema ficou conhecido como “As setes pontes de Königsberg”. Mais de um século depois da publicação de Euler, Arthur Cayley (1821-1895), foi levado por um interesse em formas analíticas decorrentes do cálculo diferencial para estudar uma classe particular de grafos (as arvores). Esses estudos tiveram muita implicação para a química teórica pois, ele associou seus resultados em árvores a estudos de composições químicas. A fusão dessas ideias deu início às terminologias padrão da teoria dos grafos. Contudo, o termo grafo foi introduzindo pelo matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897) em um artigo publicado em 1878 pelo periódico *Nature*. Já o primeiro livro texto sobre a teoria dos grafos (*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*) foi escrito por Dénes Kőnig (1884-1944) e publicado em 1936. Porém, o livro *Graph Theory* escrito por Frank Harary (1921-2005) em 1969 é considerado o livro texto definitivo sobre o tema e permitiu que matemáticos, químicos, engenheiros e cientistas sociais conversassem entre si (GARDEN,92,203). Desde então a teoria dos grafos encontra cada vez mais aplicações em todos os campos científicos. Na ciência da computação, gráficos são usados para representar redes de comunicação, organização de dados, dispositivos computacionais, o fluxo de computação etc. Na linguística, a sintaxe e a semântica composicional seguem estruturas baseadas em árvores que podem ser modelada em grafos. Na Física e na Química, a teoria dos grafos também é usada para estudar moléculas. Também desempenha um papel importante na modelagem de redes elétricas. Na Biologia, podemos modelar regiões onde algumas espécies habitam bem como suas migrações. Há uso muito intenso na biologia molecular e genômica onde estudam conjuntos de

dados com relações complexas. Em ciências sociais, já é muito usado em análise de redes sociais e até onde o comportamento de uma pessoa pode influenciar no comportamento de outra pessoa. Como observado acima, o crescimento da teoria dos grafos deve-se em grande parte ao seu papel essencial nas ciências aplicadas. Em particular, a busca por algoritmos alimentou muitas pesquisas sobre as estruturas dos grafos. Essas aplicações acontecem porque situações cotidianas podem ser representadas por um diagrama conveniente. Contudo, a ligação dessa teoria com outros ramos da matemática tem cada vez se tornado forte. Podemos notar muitas conexões com a topologia, geometria e probabilidade. Em muitas situações reais nos deparamos com determinados contextos que podemos convenientemente descrever como diagramas, que consistem em conjuntos de pontos juntamente com linhas que unem certos pares desses pontos. Por exemplo, os pontos podem ser pessoas com linha unindo pares de amigos; ou os pontos podem ser centro de comunicação, com linhas que podem ser a linha de transmissão. É importante observar que em nossos exemplos, estamos principalmente interessados se, dados dois pontos, eles são unidos por uma linha. A maneira como isso acontece é irrelevante. A abstração dessas ideias dá origem ao conceito de um grafo. Antes de começarmos as definições formais de grafos é importante salientar que nesse trabalho não iremos explicar toda a sua teoria. Iremos nos deter no estudo das ferramentas que serão necessárias para, no capítulo seguinte, apresentar e mostrar alguns resultados do modelo que é tema desse trabalho. Assim trataremos de alguns conceitos, teoremas e algoritmos.

## 2.2 Definição e Exemplos

Um grafo  $G$  é um par ordenado  $(V(G), E(G))$  que consiste em um conjunto  $V(G)$  de vértices (também chamados de *nós* ou *pontos*) e um conjunto  $E(G)$  de arestas (também chamados de *linhas*, *links* ou *elos*) que disjunta os vértices  $V(G)$ , juntamente com uma *função de incidência*  $\psi_G$  que associa cada aresta de  $G$  a um par não ordenado e não necessariamente distintos de vértices de  $G$ .

Se  $e$  é uma aresta e  $u$  e  $v$  são vértices tais que  $\psi_G(e) = \{u, v\}$ , então dizemos que  $e$  une  $u$  e  $v$ , e os vértices  $u$  e  $v$  são chamados de *extremidades* de  $e$ . Denotaremos o número de vértices e arestas de  $G$  por  $v(G)$  e  $e(G)$ ; esses dois parâmetros básicos são chamados respectivamente de *ordem* e *tamanho* de  $G$ .

A seguir mostraremos dois exemplos de grafos que servirão para esclarecer melhor a definição que acabamos de apresentar. Para simplificar as notações, escreveremos  $uv$  para representar o par não ordenado de  $\{u, v\}$ .

**Exemplo 1.**

$$G = (V(G), E(G)).$$

onde

$$V(G) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

E  $\psi_G$  é definido por

$$\psi_G(a) = uv \quad \psi_G(b) = uu \quad \psi_G(c) = vw \quad \psi_G(d) = wx$$

$$\psi_G(e) = vx \quad \psi_G(f) = wx \quad \psi_G(g) = ux \quad \psi_G(h) = xy$$

**Exemplo 2.**

$$H = (V(H), E(H))$$

onde

$$V(H) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(H) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_{7,8}, e_9, e_{10}\}$$

E  $\psi_H$  é definido por

$$\psi_H(e_1) = v_1v_2 \quad \psi_H(e_2) = v_2v_3 \quad \psi_H(e_3) = v_3v_4 \quad \psi_H(e_4) = v_4v_5 \quad \psi_H(e_5) = v_5v_6$$

$$\psi_H(e_6) = v_0v_1 \quad \psi_H(e_7) = v_0v_2 \quad \psi_H(e_8) = v_0v_3 \quad \psi_H(e_9) = v_0v_4 \quad \psi_H(e_{10}) = v_0v_5$$

Observe nos exemplos que o domínio da função  $\psi$  é o conjunto de arestas do grafo. Já a imagem é o conjunto formado por dois vértices que são conectados pelas arestas. É importante salientar que como esses pares, por definição, não são ordenados. Podemos dizer por exemplo que:

$$\psi_G(e) = vx = xv$$

ou

$$\psi H(e_6) = v_0v_1 = v_1v_0$$

## 2.3 Desenhos dos Grafos

Os grafos recebem esse nome pois pode ser representado graficamente, e é essa representação gráfica que ajudou e continua ajudando a entender muitas de suas propriedades. O vértice do grafo é representado por um ponto, e cada aresta por uma linha que une os pontos representando suas extremidades. Para maior clareza, utiliza-se no lugar dos pontos pequenos círculos.

A seguir utilizaremos a figura 2.1 para representar o diagrama do grafo  $G$  do exemplo 1.

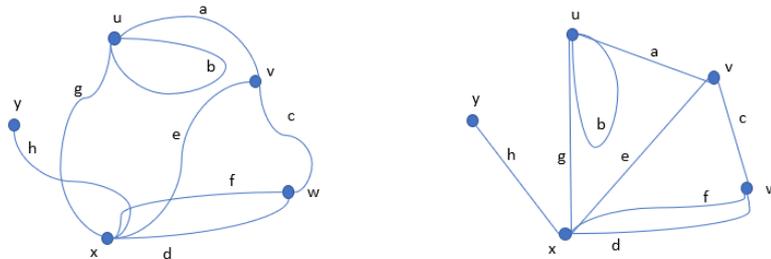


Figura 2.1: Diagrama do grafo  $G$  do exemplo 01

Observe que na figura 2.1 temos o grafo  $G$  desenhado de maneira distintas. Isso acontece porque não existe uma única maneira de representar o diagrama de um grafo. Na figura à esquerda, todas as arestas são representadas por curvas. Já a da direita temos as arestas  $a, c, e, g, h$  representadas por retas. Por tanto, podemos dizer que um diagrama de grafos apenas representa as relações mantidas entre seus vértices e arestas. No entanto, costumamos desenhar um diagrama de um grafo e nos referimos a ele como o próprio grafo. Assim, chamaremos os seus pontos (ou pequenos círculos) de vértices e suas linhas (ou curvas) de arestas.

Como há uma ligação intrínseca entre os grafos e o desenho de sua representação, muitos das definições dos seus elementos e características são sugeridos pela sua representação gráfica. Dizemos que dois vértices ligados por uma aresta são chamados de *adjacentes* e a aresta é *incidente* aos vértices. No grafo  $G$  por exemplo, podemos dizer que os vértices  $u$  e  $v$  são adjacentes e a aresta  $a$  é incidente a eles. O conjunto

de vértices adjacentes a um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é denotado por  $N_G(v)$ . A exemplo, no grafo  $G$  temos o conjunto:

$$N_G(x) = \{y, u, v, w\}.$$

Uma aresta com extremidades idêntica é chamada de *laço*, e uma aresta com extremidade distinta é chamada de *linha*. Dois ou mais elos com o mesmo par de extremidade são considerados *arestas paralelas*. No grafo  $G$  da figura 2.1, a aresta  $b$  é um laço; e as arestas  $d$  e  $f$  são arestas paralelas.

Para simplificar, ao longo desse trabalho, a letra  $G$  denotará um grafo. Além disso, quando não houver ambiguidade, omitiremos a letra  $G$  da simbologia de  $V(G)$  e  $E(G)$  e usaremos apenas  $V$  e  $E$ . Em tais casos denotaremos os números de arestas e vértices de  $G$  por  $n$  e  $m$  respectivamente.

Um grafo é dito *finito* se o conjunto de vértice e de arestas são finitos. Nesse trabalho só trataremos de grafos finitos. Logo quando o termo grafo for usado fica subtendido que se trata de grafo finito. O grafo sem vértice e por tanto sem arestas é definido como *grafo nulo*. Qualquer grafo com apenas um vértice é conhecido como *trivial*. Assim, todos os outros grafos são *não triviais*.

Um grafo é *simples* se não tiver laços ou arestas paralelas. O grafo  $H$  do exemplo 2 é simples, enquanto o grafo  $G$  no exemplo 1 não é um grafo simples.

## 2.4 Famílias Especiais de Grafos

Certos tipos de grafos desempenham um papel importante na teoria. A seguir definiremos alguns deles.

**Grafo completo** É um grafo simples em que quaisquer dois vértices são adjacentes.

**Grafo vazio** É aquele em que nenhum dos vértices são adjacentes (isso é, aquele que o conjunto de arestas é vazio).

**Grafo bipartido** É quando o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos  $X$  e  $Y$  tal que toda aresta de  $G$  tem uma extremidade em  $X$  e outra em  $Y$ . O subconjunto  $X$  é dito um subconjunto independente de vértice do grafo  $G$  pois não existe aresta ligando dois vértices de  $X$ . Denotamos um grafo bipartido  $G$  com bipartição  $(X, Y)$  por  $G[X, Y]$ . Se  $G[X, Y]$  é simples e cada vértice em  $X$  é unido a cada vértice em  $Y$ , então  $G$  é chamado de *grafo bipartido completo*.

**Grafo conexo** Um grafo é conexo se, para cada partição de seu conjunto de vértices definido em dois conjuntos não vazios  $X$  e  $Y$ , há uma aresta com uma

extremidade em  $X$  e outra em  $Y$ ; caso contrário, o grafo é chamado de *grafo desconexo*. É importante observar que o grafo conexo pode ser obtido de um grafo bipartido. Sendo esse um caso particular.

Existe outras famílias de grafos contudo, nesse trabalho não será necessário o entendimento de suas definições para entendimento dos nosso resultado. É importante notar que muitas dessas famílias apresentadas abundam no mundo real e, por esse motivo, é tão intuitivo utilizar esse conceito para modelar problemas do cotidiano (a observar o tema central desse trabalho).

Embora nem todos os grafos sejam planos, cada grafo pode ser desenhado em alguma superfície de modo que suas arestas se cruzem em um ponto que não seja um vértice. Esse desenho é chamado de *grafo planar*. A ideia de planificação de grafo é muito importante na teoria dos grafos e topologia. Contudo, modelo discutido nesse trabalho será em grafo plano. Logo, não utilizaremos esse recurso.

## 2.5 Representação por Matrizes

Embora os desenhos sejam muito convenientes para se representar grafos, eles são bem ineficazes em armazená-los em um computador ou aplicar métodos matemáticos para estudar suas propriedades. Portanto, utilizamos duas matrizes para representar um único grafo. Temos a **matriz adjacência** que como o próprio nome diz, indica que vértices são adjacentes e quantas vezes isso acontece. A outra matriz, é a **matriz de incidência** que mostra quais arestas incide em quais vértices e de que forma isso acontece. Em termos matemáticos definiremos essas matrizes da seguinte forma:

**Matriz incidência** Seja  $G$  um grafo, com o conjunto de vértices  $V$  e o conjunto de aresta  $E$ . Diremos que a matriz  $n \times m$   $M_G := (m_{ve})$  é a matriz incidência de  $G$ , onde  $m_{ve}$  é o número de vezes (0,1 ou 2) que a aresta  $e$  é incidente com o vertice  $v$ .

**Matriz adjacente** Seja um grafo  $G$ , com o conjunto de vértices  $V$ . Diremos que a matriz  $n \times m$   $A_G := (a_{uv})$ , onde  $a_{uv}$  é o numero de arestas que conecta os vértices  $u$  e  $v$ , considerando um laço com sendo duas arestas.

Para que seja melhor entendido este conceito, usaremos a figura 2.2 para ilustrar essas duas matrizes do grafo  $G$  do exemplo 1 desse capítulo.

Um fato importante é que podemos notar é que a matriz adjacência é menor que a matriz incidência. Isso acontece na maioria dos grafos e ocorre pelo fato que a maioria dos grafos possuem muito mais arestas que vértices.

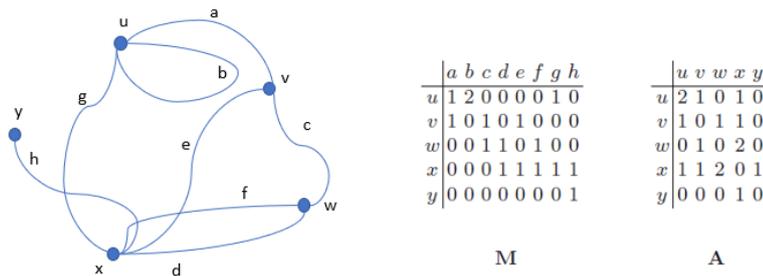


Figura 2.2: Matriz de incidência e adjacência do grafo G

## 2.6 Grau do vértice

O *grau* de um vértice  $v$  de um grafo  $G$ , denotado por  $d_G(v)$ , é o número de aresta(s) que incide(m) em  $v$ , cada laço conta como duas arestas. Em particular se  $G$  for um grafo simples,  $d_G(v)$  é o número de vizinhos de  $v$  em  $G$ . Um vértice de grau zero é chamado de *vértice isolado*. Denotaremos por  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$  o mínimo e o máximo graus dos vértice de  $G$ , e por  $d(G)$  denotaremos seu *grau médio*,  $\frac{1}{n}\sum_v d(v)$ .

## 2.7 Isomorfismo

Podemos dizer que dois grafos  $G$  e  $H$  são *idênticos*, e escrevemos  $G = H$ , se  $V(G) = V(H)$ ,  $E(G) = E(H)$  e  $\psi_G = \psi_H$ . Quando dois grafos são idênticos, podemos claramente representá-los pelo mesmo diagrama. Contudo, existe a possibilidade de dois grafos não serem idênticos, mas terem, em essência, o mesmo diagrama.

Para entender melhor o conceito de isomorfismo, usaremos os diagramas dos grafos  $G$  e  $H$  da figura 2.3. Observe que apesar de não serem idênticos os grafos podem ser representados por diagramas que parecem exatamente iguais, como o segundo desenho de  $H$  mostra; a única diferença são os rótulos dos vértices e arestas. Embora não sejam idênticos, os grafos têm estruturas idênticas. Assim, podemos dizer que eles são isomorfos.

Em geral, dois grafos  $G$  e  $H$  são ditos isomorfos, escritos  $G \cong H$ , se houver duas funções bijetivas  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$  e  $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$  tal que a função  $\psi_G(e) = uv$  se e somente se  $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$  esse par de mapeamento é chamado de isomorfismo entre  $G$  e  $H$ .

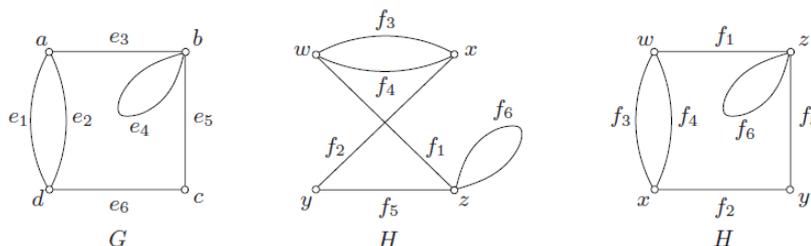


Figura 2.3: Grafos isomorfos

## 2.8 Grafos Direcionados ou Digrafos

Embora muitos problemas utilize a da teoria dos grafos, o conceito de um gráfico às vezes não é adequado. Ao lidar com problemas de direção de tráfego, por exemplo, é necessário saber quais estradas do grafo são de sentido único e que sentido o tráfego é permitido gerando assim um fluxo. Como o nosso problema tratará de fluxo de tráfego, temos que levar à tona o conceito de grafo direcionado. Assim, precisaremos de um grafo que cada vértice tenha uma orientação atribuída.

Formalmente, um *um grafo direcionado* de digrafo  $D$  é um par ordenado  $(V(D), E(D))$  que consiste em um conjunto  $V := V(D)$  de vértices e um conjunto  $A := A(D)$  disjuncto de  $V(D)$ , de *arcos ou arestas direcionadas*, juntos com a função incidência  $\psi_D$  que associa a cada arco de  $D$  um par ordenado de vértices (não necessariamente distintas) de  $D$ . Se  $\psi_D(a) = (u, v)$ , então  $a$  é *divergente* de  $u$ ; também dizemos que  $a$  é *convergente* de  $v$ . O vértice  $u$  é a *cabeça* de  $a$ , e o vértice  $v$  é a *cauda*; ou seja, eles são as extremidades de  $a$ . Outra nomenclatura usada é que  $u$  é *predecessor* de  $v$  e  $v$  é *sucessor* de  $u$ . É importante notar que, diferente da definição inicial de grafos que fizemos na seção 2.2, a parte de vértices tem uma ordem e isso é a diferença fundamental desse novo conceito. Pois essa ordem é que vai determinar o sentido da aresta no grafo. O número de arcos em  $D$  é denotado por  $a(D)$ . O conceito de vizinhança já foi tratado anteriormente. Contudo, existem algumas peculiaridades quando tratamos de grafos direcionais e faremos uma listagem delas a seguir.

**Grau de entrada** , denotado por  $d^-(v)$  é o número de arestas direcionadas que convergem para  $v$ . Se  $d^-(v) = 0$ , então  $v$  é dito fonte de  $D$ .

**Grau de saída** , denotado por  $d^+(v)$  é o número de arestas direcionadas que divergem para  $v$ . Se  $d^+(v) = 0$ , então  $v$  é dito sumidouro de  $D$ .

Seja o grafo  $D$  e um vértice  $v \in D$ , temos que:

$$\sum_v d^+(v) = m = \sum_v d^-(v)$$

onde  $m$  é o número de arestas de  $D$ .

Utilizaremos a figura 2.4 a seguir para ilustrar essas definições.

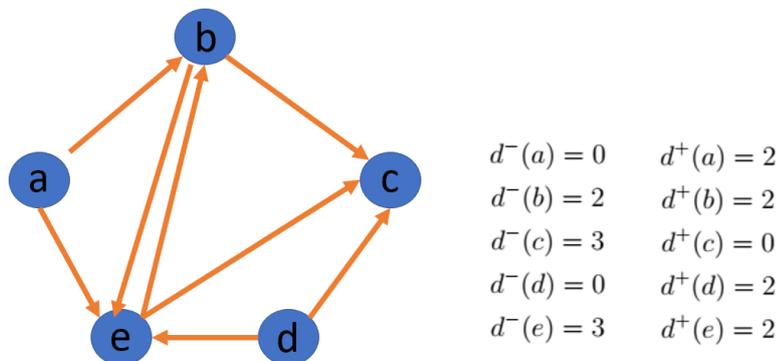


Figura 2.4: Grafo direcionado com graus de entradas e saídas e indicação das fontes e sumidouros

Um vértice  $v$  *alcança* um vértice  $u$ , se existe um arco direcionado de  $v$  para  $u$ . Utilizaremos essa definição, bem como a ideia de grafo conexo, para introduzir mais três conceitos em um digrafo.

**Fortemente conexo**  $D = (V, E)$  é fortemente conexo se, para todo  $u$  e  $v$ ,  $u$  alcança  $v$  e  $v$  alcança  $u$ .

**Unilateralmente conexo**  $D = (V, E)$  é unilateralmente conexo se, para todo  $u$  e  $v$ ,  $u$  alcança  $v$  ou  $v$  alcança  $u$ .

**Fracamente conexo** O digrafo  $D$  é fracamente conexo se, o grafo subjacente (o digrafo sem direção) de  $D$  for conexo.

A partir da definição, é interessante observar que se um digrafo  $D$  tiver pelo menos duas fontes, ele não será unilateralmente conexo e por consequência não será fortemente conexo.

## 2.9 Grafo Valorado ou Ponderado

Um grafo é valorado quando suas arestas ou vértices possuem um peso, isso é, quando é atribuído um valor para cada aresta ou vértice do grafo. Esse valor pode

indicar distância, tempo ou qualquer unidade de medida referente a aplicação. Esse significado de valor é particular de cada problema. Assim, a cada aresta  $e$  de  $G$  seja associado ao um número real  $w(e)$ , denominado de *peso* ou *valor*. Então  $G$ , junto com  $w(e)$  é chamado de *peso do grafo* e denotado como  $(G, w)$ .

Podemos representar um grafo valorado utilizando a matriz adjacência, que, nesse caso, é comumente conhecida como *matriz de valores das ligações* ou simplesmente *matriz de valores*. Cada aresta adjacente vem acompanhada de seus respectivos valores. Observe a figura 2.5 contendo um exemplo de grafo valorado e suas matriz de valores.

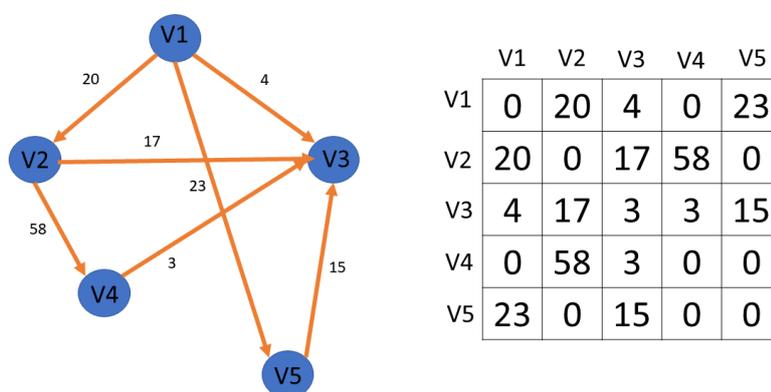


Figura 2.5: Grafo ponderado e a sua matriz de valores

Unindo a ideia de grafo ponderado com a de grafo direcional podemos ter inúmeras aplicações de problemas de fluxos. Na próxima seção discutiremos um algoritmo que usa esses dois conceitos e será muito útil para obter informações do modelo tratado nesse trabalho.

## 2.10 Algoritmo de Dijkstra

Edsger Wybe Dijkstra(1930-2002) foi um cientista da computação holandês, um dos pioneiros em ciências da computação. Físico teórico de formação, trabalhou como programador no Centrum Wiskunde Informatica (Amsterdã) de 1952 a 1962. Também trabalhou como professor e pesquisador em algumas universidades. Porém, foi no ano de 1956 na tentativa de criar um teste para um novo computador chamado de ARMAC que criou um algoritmo para encontrar o caminho mais curto entre vértices

de um digrafo com arestas de pesos não negativos. Curiosamente, esse algoritmo foi criado em vinte minutos enquanto Dijkstra tomava um café. Esse algoritmo ficou conhecido como Algoritmo de Dijkstra e tem inúmeras aplicações na vida real. Como por exemplo na gestão de tráfego das grandes cidade. Vamos utilizá-lo ele para fazermos um estudo de caso do problema central desse trabalho.

Antes de apresentar o pseudocódigo<sup>1</sup> desse algoritmo o descreveremos brevemente para entender sua essência.

Seja  $D(V, A)$  um digrafo e  $s$  um vértice de  $D$ :

1. Atribua valor zero à estimativa do custo mínimo do vértice  $s$  (a raiz da busca) e infinito às demais estimativas;
2. Atribua um valor qualquer aos precedentes (o precedente de um vértice  $t$  é o vértice que precede  $t$  no caminho de custo mínimo de  $s$  para  $t$ );
3. Enquanto houver vértice aberto:
  - seja  $k$  um vértice ainda aberto cuja estimativa seja a menor dentre todos os vértices abertos;
  - feche o vértice  $k$
  - Para todo vértice  $j$  ainda aberto que seja sucessor de  $k$  faça:
    - \* some a estimativa do vértice  $k$  com o custo do arco que une  $k$  a  $j$ ;
    - \* caso esta soma seja melhor que a estimativa anterior para o vértice  $j$ , substitua-a e anote  $k$  como precedente de  $j$ ;

A seguir exemplificaremos o algoritmo de Dijkstra utilizando para isso um Digrafo ponderado  $G$ . Nesse exemplo descobriremos qual o caminho de menor custo entre os vértices  $V1$  e  $V5$ , respeitando todas as condições mostrada no Digrafo  $G$  apresentado na figura 2.6.

Mostraremos, nas ilustrações a seguir, passo a passo como chegar ao caminho de menor custo entre os vértices  $V1$  e  $V5$  utilizando o algoritmo de Dijkstra. Na primeira etapa do algoritmo (figura 2.7), registramos o custo de sair do vértice inicial para ele mesmo (raiz da busca). Que no caso é sempre zero. E atribuiremos que o custo para ir a todos os outros vértices vale infinito (Alguns códigos costumam colocar vazio(null) já que trata de um valor desconhecido. A escolha por infinito é para que entendamos que trata de um custo majorado ou seja, maior que qualquer

---

<sup>1</sup>Pseudocódigo é uma forma genérica de escrever um algoritmo, utilizando uma linguagem simples (nativa a quem o escreve, de forma a ser entendida por qualquer pessoa) sem necessidade de conhecer a sintaxe de nenhuma linguagem de programação.

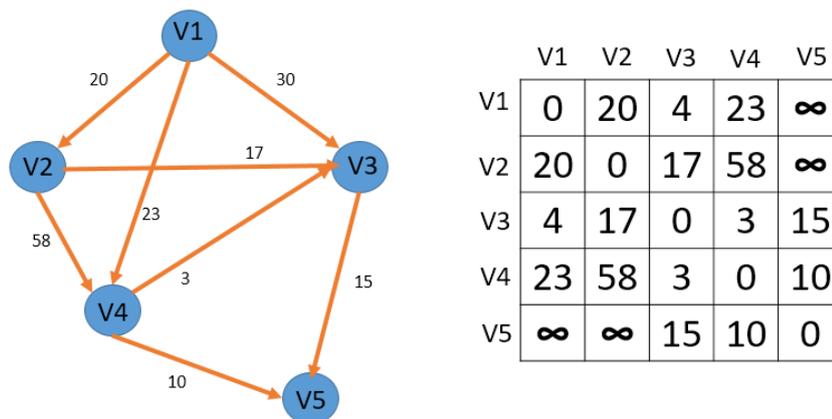


Figura 2.6: Grafo que será usado como exemplo na execução do algoritmo de Dijkstra.

valor conhecido. O importante é que a ideia de valor desconhecido fique claro para o leitor e para a máquina que vai rodar o código.)

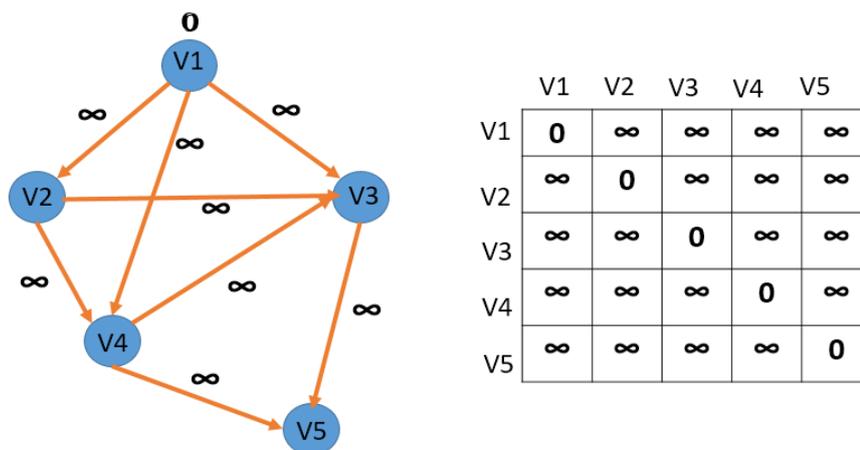


Figura 2.7: Primeira etapa

Na segunda etapa (figura 2.8) começamos a pesquisar as distancias do vértice raiz no caso o  $V1$  para os vértices adjacentes a ele. No nosso exemplo temos que as distancias de  $(V1, V2) = 20$ ,  $(V1, V3) = 30$  e  $(V1, V4) = 23$ . Feito isso, tomamos o caminho de menor custo e repetimos o processo, sempre comprando (caso encontramos um vértice explorado) com os valores já encontrados.

Na terceira etapa (figura 2.9) do nosso exemplo, vamos pesquisar os vértices que

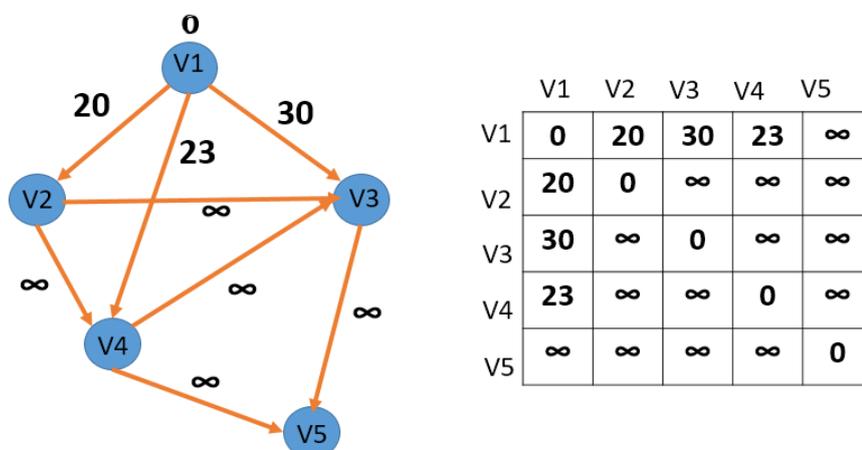


Figura 2.8: Segunda etapa

saem de  $V2$  que é o menor custo conhecido. Logo temos  $(V1, V2, V3) = 37$  que é maior que ir direto de  $V1$  para  $V3$  que custa 30. E  $(V1, V2, V4) = 78$  que é maior que  $(V1, V4)$ . Logo são mantidos os valores da segunda etapa.

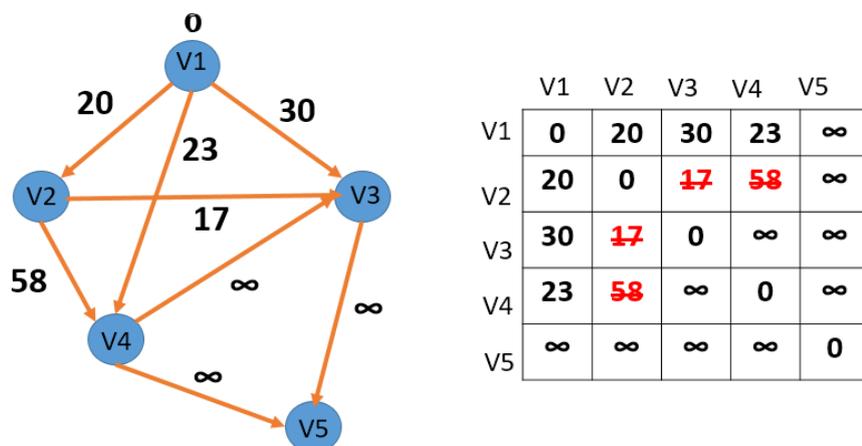


Figura 2.9: Terceira etapa

Na quarta etapa (figura 2.10) vamos fazer uma pesquisa no segundo menor custo conhecido que é  $V4$ . Fazendo a pesquisa partindo de  $V4$  temos  $(V1, V4, V5) = 33$  que é o nosso objetivo. Temos também  $(V1, V4, V3) = 20$  que é menor que  $(V1, V3) = 30$ . Logo substituímos o menor pelo maior.

Na quinta etapa (figura 2.11) vamos fazer a pesquisa do vértice  $V3$ . Assim teremos

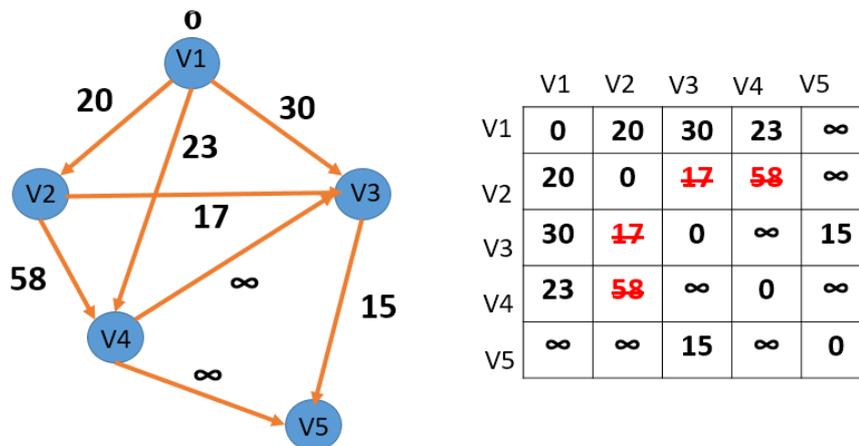


Figura 2.10: Quarta etapa

$(V1, V3, V5) = 45$  que é maior que  $(V1, V4, V5) = 33$  e  $(V1, V4, V3, V5) = 35$  que também é maior que  $(V1, V4, V5)$ . Como não existe mais vértices abertos temos como solução o percurso  $(V1, V4, V5) = 33$  como sendo o menor entre os vértices  $V1$  e  $V5$ .

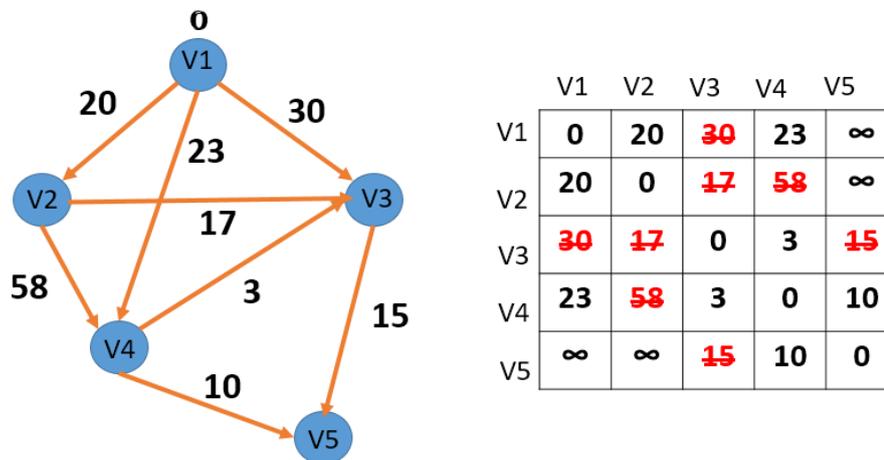


Figura 2.11: Quinta etapa

Dessa forma fica mais compreensivo o funcionamento do algoritmo. Logo podemos entender melhor como será realizado nosso estudo de caso bem como tem com clareza todos os passos que o compilador vai processar. Além disso, o leitor poderá se inteirar de como do mecanismo do processo tenho compreensão da ideia do que foi

## 2.10. ALGORITMO DE DIJKSTRA

---

executado nesse trabalho.

# Capítulo 3

## Um estudo de caso

### 3.1 O Modelo

Neste capítulo mostraremos como uma rede de ensino pode ser modelada em um grafo orientado. Além disso, utilizaremos a rede de ensino pública de um município do Estado de Pernambuco para exemplificar o modelo e obter alguns resultados relevantes. Optamos por reduzir nosso modelo a um município pelos seguintes motivos:

- ◆ na construção, o grafo terá menos vértices e arestas e portanto, mais fácil de visualizar;
- ◆ facilita a compreensão do modelo pelo leitor;
- ◆ as interpretações do modelo ficaram mais simplificada;

É importante compreender que o modelo funciona para qualquer município ou rede de ensino do Brasil. Isso porque, como foi visto no capítulo 1, o ensino brasileiro é padronizado. Assim, independente de nossa escolha não teremos perda de generalidade.

O estado de Pernambuco possui um total de 184 municípios, todos eles possuem sua rede de ensino pública que, como foi dito, obedece aos mesmos padrões. Assim, escolhemos um município de pequeno porte (aproximadamente 25 mil habitantes), para implementar nosso estudo. No nosso estudo de caso, por questões éticas, não divulgaremos o nome do município, o nome das escolas e o nome dos alunos. Contudo, a seguir falaremos sobre os dados coletados.

A primeira amostra de dados foi coletada em 2010 com dados dos estudantes de terceiro ano do Ensino Fundamental (EF). Temos um total de 18 escolas que atendem um total de 354 estudantes que realizaram a avaliação diagnóstica do SAEPE de fluência em Língua Portuguesa. No ano de 2012 temos a base do quinto ano do

### 3.1. O MODELO

---

Ensino Fundamental. Foram coletadas em 15 escolas num total de 333 estudantes que realizaram a avaliação diagnóstica do SAEPE. É importante saber que 84,18% dos estudantes que estavam na base de dados no ano de 2010 também aparecem na base de dados de 2012. No ano de 2016 tomamos a base de dados dos estudantes do nono ano do Ensino fundamental. Esses dados foram coletados em 4 escolas num total de 258 alunos que realizaram a avaliação diagnóstica. Nesse caso, 72,37% dos estudantes que realizaram a avaliação em 2012 reaparecem nos dados de 2016. Por fim, tomamos a base de dados do ano de 2019 dos estudantes do terceiro ano do Ensino Médio (EM). Temos 2 escolas, com um total de 199 estudantes que realizaram a avaliação. Encontramos nessa base 72,48% de estudantes que também realizaram a avaliação em 2016. Na tabela 3.1 abaixo deixamos estruturado como está organizado nossa base de dados.

Etapas de Ensino	Quantidade de Escolas	Quantidade de Estudantes	Ano de Coleta
3º ano do EF	18	354	2010
5º ano do EF	15	333	2012
9º ano do EF	4	258	2016
3º ano do EM	2	199	2019

É importante notar que o percentual de estudantes que reaparecem de um ano para outro é fundamental para o nosso estudo, pois são apenas eles que vão ponderar o nosso grafo. Portanto, deixaremos a tabela 3.1 a seguir para termos esses percentuais destacados.

Sequência Anual	Percentual
2010-2012	84,18%
2012-2016	72,37%
2016-2019	72,48%

tendo entendido esses pontos iniciais iremos agora para a construção do nosso grafo  $G$ . Primeiro definiremos os vértices  $V(G)$  do nosso grafo. O conjunto dos vértices do grafo será definido pelas escolas da rede pública do município em questão. Como mencionado anteriormente, não podemos indicar o nome das escolas assim, colocaremos um código para indicá-las que será feita da seguinte forma:

**Escolas do 3<sup>o</sup> ano do EF no ano de 2010** Cada escola será definida como sendo  $A_n$  com  $n \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq n \leq 18$ ;

**Escolas do 5<sup>o</sup> ano do EF no ano de 2012** Cada escola será definida como sendo  $B_n$  com  $n \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq n \leq 15$ ;

**Escolas do 9<sup>o</sup> ano do EF no ano de 2016** Cada escola será definida como sendo  $C_n$  com  $n \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq n \leq 4$ ;

**Escolas do 3<sup>o</sup> ano do EM no ano de 2019** Cada escola será definida como sendo  $D_n$  com  $n \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq n \leq 2$ ;

Logo, o conjunto de vértices  $V(G)$  do grafo será:

$$V(G) = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{17}, A_{18}, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{14}, B_{15}, C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2\}.$$

Decorre daí que  $v(G) = 39$ .

Para definirmos o conjunto de arestas teremos que respeitar as peculiaridades que é próprio do nosso modelo. pois os conjuntos de vértices  $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{17}, A_{18}\}$  se liga ao conjunto  $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{14}, B_{15}\}$  que por sua vez se liga ao conjunto  $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  que finalmente se liga ao conjunto  $\{D_1, D_2\}$ . Sabemos quais subconjunto de vértices do grafo se ligam. Contudo, a forma que são feitas essas ligações vai depender das informações que iremos extrair do nosso banco de dados. Vai depender em qual escola os estudantes reaparecem. Por exemplo, o conjunto de estudantes que estava na escola  $A_1$  no ano de 2010, estará em um certa escola  $B_n$  em 2012. Para essa tarefa utilizaremos a matriz adjacências da primeira parte do grafo  $G$ . Essa matriz será  $18 \times 15$  e será definida como  $M_{G_i} := e_{A_n B_n}$  onde  $e_{A_n B_n}$  é o número de arestas que conectam os vértices  $A_n$  e  $B_n$ . a seguir podemos visualizar a matriz incidência já com os dados preenchidos.

$$M_{G_i} = \begin{matrix} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9 & B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ B_8 \\ A_9 \\ A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{14} \\ A_{15} \\ A_{16} \\ A_{17} \\ A_{18} \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B_8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{12} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ A_{16} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ A_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_{18} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Na matriz de incidência anterior temos os links existentes entres os conjuntos de vértices que foi obtido a partir do banco das avaliações do SAEPE dos anos de 2010 e 2012. Cada elemento da matriz representa a quantidade de arestas que conecta os vértices. A seguir utilizaremos a figura 3.1 para ilustrar essa parte do grafo  $G$ .

Agora veremos as ligações que existem entre o subconjunto  $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_{14}, B_{15}\}$  com o subconjunto  $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ . Lembrando que o primeiro subconjunto representa em qual instituição de ensino os estudantes do quinto ano no ensino fundamental estavam em 2012 e o segundo subconjunto em qual instituição esses mesmos estudantes reaparecem no ano de 2016. Novamente usaremos a matriz de incidência para mostrar essas ligações. E utilizaremos a matriz adjacências  $15 \times 4$ ,  $M_{G_{ii}} := e_{B_n C_n}$  onde  $e_{B_n C_n}$  é o número de arestas que conectam os vértices  $B_n$  e  $C_n$ . a seguir poderemos visualizar a matriz incidência já com os dados preenchidos.

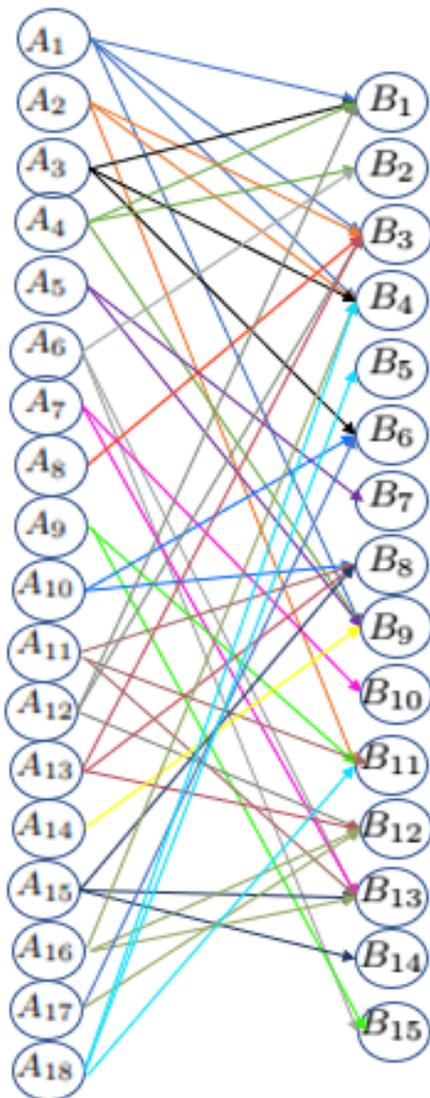


Figura 3.1: Primeira parte do grafo G.

$$M_{G_{ii}} = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \\ B_{10} \\ B_{11} \\ B_{12} \\ B_{13} \\ B_{14} \\ B_{15} \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 26 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Novamente mostraremos a seguir na figura 3.2 o grafo adicionado dessa segunda informações vinda dos dados juntamente com a matriz adjacência.

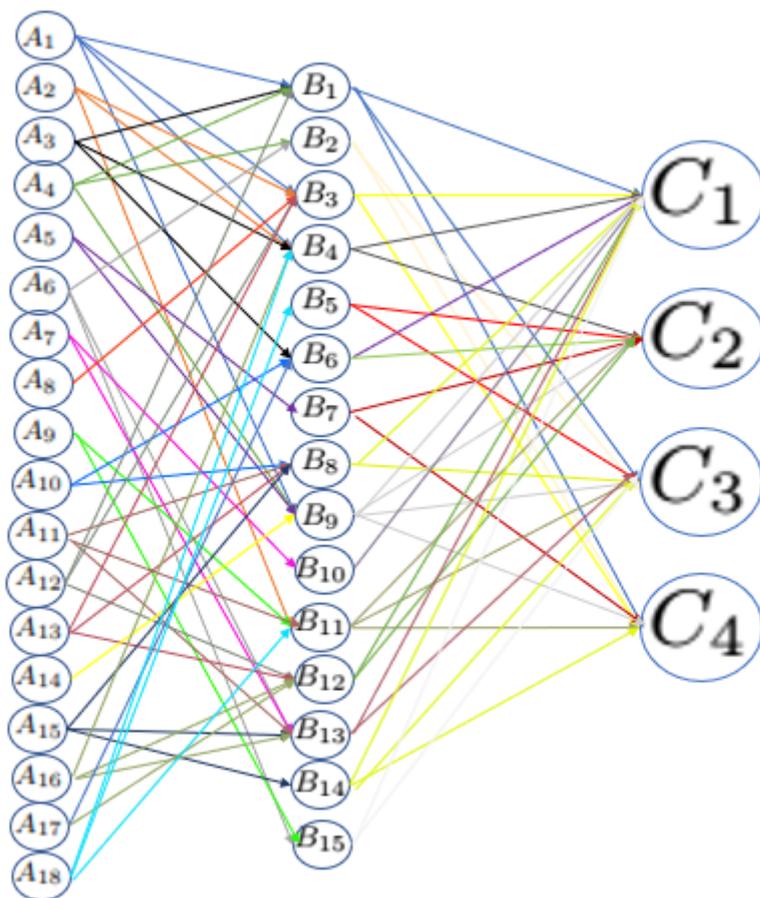


Figura 3.2: Primeira e segunda parte do grafo  $G$ .

Finalmente chegamos na última etapa de construção do grafo  $G$ . Faremos agora as correspondências que existem entre o subconjunto  $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$  e o subconjunto  $\{D_1, D_2\}$  que corresponde ao grupo de estudantes de 2016 e os de 2019 respectivamente. Novamente apresentaremos a matriz adjacência que mostra como são feitas as ligações entre esses dois conjuntos. Assim teremos um a matriz  $4 \times 2$  definida por  $M_{G_{iii}} := e_{C_n D_n}$  onde  $e_{C_n D_n}$  é o número de arestas que conectam os vértices  $C_n$  e  $D_n$ . a seguir podemos visualizar a matriz incidência já com os dados preenchidos.

$$M_{G_{iii}} = \begin{matrix} & D_1 & D_2 \\ C_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ C_2 & \\ C_3 & \\ C_4 & \end{matrix}$$

Mostramos na figura 3.3 o grafo  $G$  completo e todas suas ligações baseadas nos dados analisados.

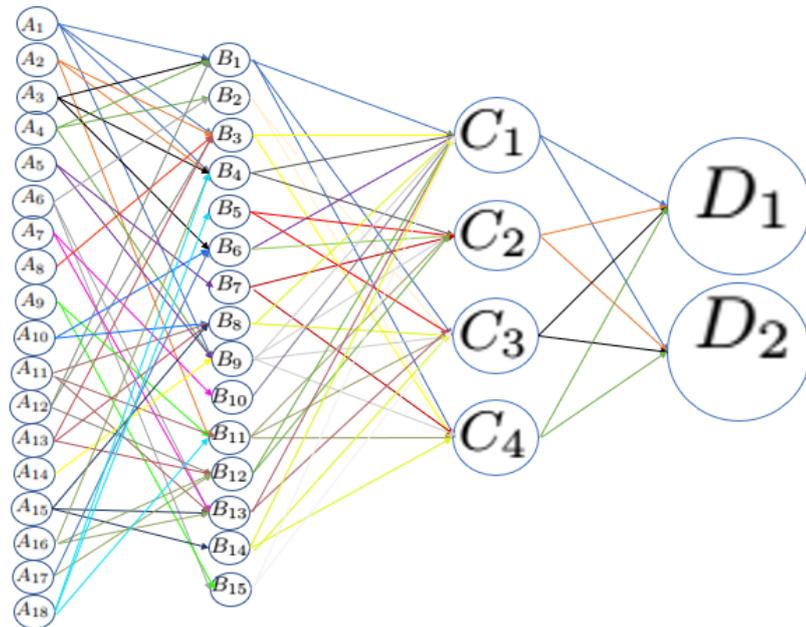


Figura 3.3: Grafo  $G$  e suas arestas.

Agora que temos o grafo bem definido podemos falar um pouco sobre ele. Podemos notar que o grafo  $G$  é um grafo bipartido. Ao dividir o conjuntos de vértices em dois

$$X = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{17}, A_{18}, B_1, B_2, B_3, \dots, B_{14}, B_{15}\}$$

e

$$Y = \{C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2\};$$

onde  $X \cap Y = \emptyset$  e temos uma extremidade em  $X$  e outra em  $Y$ . Apesar de ser

### 3.1. O MODELO

um grafo bipartido não é completo.

Como nosso modelo propõe um grafo direcional, podemos encontrar alguns elementos dentro do que foi visto no capítulo 2. Tomaremos os vértice  $B_5, A_1$  e  $D_2$  e calcularemos seu grau de entrada e de saída. Fazendo isso, temos:

$$d^-(B_5) = 1, d^-(A_1) = 0, d^-(D_2) = 4;$$

e

$$d^+(B_5) = 2, d^+(A_1) = 4, d^+(D_2) = 0;$$

Logo temos que o vértice  $A_1$  é uma fonte e o vértice  $D_2$  é um sumidouro.

Como o objetivo central desse trabalho é saber qual melhor percurso que um estudante deve percorrer para que tenha os melhores resultados nas avaliações de larga escala, precisamos definir uma ponderação as arestas do grafo. Assim, utilizaremos as matrizes adjacências  $M_{G_i} := \{e_{A_n B_n}\}$ ,  $M_{G_{ii}} := \{e_{B_n C_n}\}$  e  $M_{G_{iii}} := \{e_{C_n D_n}\}$  para ponderar as arestas dos grafos. Essas matrizes que a partir de agora serão matrizes de valores das ligações. Esse peso será colocado com a média das proficiências em Língua Portuguesa que o grupo de estudantes, que definimos, tirou na escola (representado pelos vértices) que estavam estudando anteriormente (cauda). E esses vértices será ligada as cabeças pelas arestas direcionados e ponderados. Para facilitar a interpretação, colocaremos a seguir as matrizes de valores separadas como fizemos anteriormente.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$	$B_8$	$B_9$	$B_{10}$	$B_{11}$	$B_{12}$	$B_{13}$	$B_{14}$	$B_{15}$
$A_1$	442,37	0	458,00	472,95	0	0	0	0	443,59	0	0	0	0	0	0
$A_2$	0	0	440,09	403,83	0	0	0	0	0	0	427,83	0	0	0	0
$A_3$	414,43	0	0	410,98	0	434,81	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$A_4$	499,86	439,53	0	0	0	0	0	0	465,27	0	0	0	0	0	0
$A_5$	0	0	0	0	0	0	448,28	0	410,86	0	0	0	0	0	0
$A_6$	0	423,84	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	435,18	0	445,62
$A_7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	488,75	0	0	558,06	0	0
$B_8$	0	0	601,86	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$A_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	572,61	0	0	0	0
$A_{10}$	0	0	0	0	0	593,84	0	604,83	0	0	0	0	0	0	0
$A_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	569,67	0	0	542,90	0	451,44	0	0
$A_{12}$	479,02	0	481,70	0	0	0	0	0	0	0	0	487,32	0	0	0
$A_{13}$	0	0	451,66	0	0	0	0	445,70	0	0	0	414,88	0	0	0
$A_{14}$	0	0	0	0	0	0	0	0	417,32	0	0	0	0	0	0
$A_{15}$	0	0	0	0	0	0	0	478,18	0	0	0	0	493,62	485,15	0
$A_{16}$	0	0	0	484,49	0	0	0	0	0	0	0	0	478,85	461,67	0
$A_{17}$	0	0	0	0	0	451,30	0	0	0	0	0	486,46	0	0	0
$A_{18}$	0	0	0	441,03	466,69	0	0	0	0	0	482,77	0	0	0	0

E a segunda matriz de valor é:

$$M_{G_{ii}} = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \\ B_{10} \\ B_{11} \\ B_{12} \\ B_{13} \\ B_{14} \\ B_{15} \end{matrix} & \left( \begin{array}{cccc} 185,08 & 0 & 184,00 & 182,28 \\ 0 & 0 & 177,61 & 179,26 \\ 163,27 & 0 & 0 & 184,21 \\ 156,69 & 163,35 & 0 & 0 \\ 0 & 157,60 & 160,60 & 0 \\ 175,56 & 180,70 & 0 & 0 \\ 0 & 173,66 & 0 & 171,51 \\ 174,41 & 0 & 169,37 & 0 \\ 185,28 & 188,48 & 197,22 & 185,68 \\ 192,49 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 198,43 & 181,47 & 173,96 \\ 172,57 & 0 & 177,35 & 0 \\ 183,80 & 0 & 184,15 & 0 \\ 171,49 & 0 & 168,09 & 163,72 \\ 163,85 & 0 & 160,37 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Por fim a última matriz de valor do grafo do nosso modelo.

$$M_G = \begin{matrix} & D_1 & D_2 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{matrix} & \left( \begin{array}{cc} 240,93 & 237,99 \\ 244,06 & 254,89 \\ 249,56 & 236,90 \\ 247,04 & 234,45 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Tanto todas as áreas ponderadas podemos utilizar o algoritmo de Djisktra para calcular o melhor caminho que um estudante pode seguir dentre de uma rede de ensino pública. Mas precisamos levar em consideração um detalhe. O algoritmo foi desenvolvido para encontrar o caminho que tem menor custo. Contudo a sabemos que quanto maior a proficiência melhor o desempenho. Assim, no nosso modelo estaríamos interessados no caminho em que os estudantes tem melhores resultados de proficiência. Para resolver esse problema utilizaremos um artifício. No lugar de colocar o valor  $P$  da proficiência (que são as arestas ponderadas) para o computador rodar o algoritmo, colocaremos  $\frac{1}{P}$ , ou seja a inversa do ponderação. Assim quando calcularmos o caminho com menor custo, estaremos achando o de maior custo(resultado que nos interessa).

Feito a análise computacional dos dados, obtivemos o seguinte resultado. O melhor caminho a ser percorrido por um estudante que estuda na rede pública de ensino no município que usamos como exemplo é:

$$A_8 \longrightarrow B_3 \longrightarrow C_4 \longrightarrow D_1$$

# Capítulo 4

## Conclusão

Observamos que os resultados obtidos são muito relevantes, principalmente para os responsáveis pela gestão educacional. Pois, não podemos considerar o resultado encontrado, mas sim, entender os motivos de ter acontecido. Pois, a gestão escolar deve sempre aprimorar a estrutura escolar e, dessa forma, promover a organização, mobilização e articulação das condições essenciais para garantir o avanço do processo socioeducacional das instituições de ensino. Como consequência, a promoção do aprendizado dos estudantes de forma efetiva (LÜCK 2010). Contudo, não foi objeto desse trabalho questões que envolvam gestões educacional. Assim, tais análises ficam para uma pesquisa que aprofunde melhor esse tema.

Outro ponto é que nesse trabalho realizamos o modelo para um município. Contudo, pelas características que expomos, podemos usar o mesmo modelo para outros municípios e até mesmo Estados. Isso porque o sistema educacional brasileiro segue o mesmo padrão independente da unidade federativa. Logo, desde que aja dados suficientes podemos realizar tais estudos em qualquer rede de educação no Brasil. É claro que, quando maior a rede será exigida computadores mais robustos.

Por fim, em nosso modelo, criamos arestas ponderadas com o resultado das proficiências dos estudantes. Porém, esses pesos podem se expendidos a outras informações dos estudantes que são obtidas em questionários socioeconômico que são coletadas juntos das avaliações. Ou até mesmo, poderíamos combinar tais informações. Cada análise dessa geraria informações que poderiam ser úteis na gestão educacional.

# Referências Bibliográficas

- [1] Saviani, Dermeval, Sistema Nacional de Educação e Plano Nacional de Educação: significado, controvérsias e perspectivas. Autores Associados, 2018.
- [2] PASQUALI, L., Psicometria: teoria dos testes na Psicologia e na Educação. Editora Vozes, 2003.
- [3] Garden, M., Fractal Music, Hypercads, and More Mathematical Recreations from Scientific American. WH Freeman and Company, San Francisco, 1992.
- [4] TOFFOLI, Sonia Ferreira Lopes, Avaliações em larga escala com itens de respostas construídas no contexto do Modelo Multifacetado de Rasch. 2015.
- [5] MENDO, Antonio Hernández, Un cuestionario para la evaluación psicológica de la ejecución deportiva: estudio complementario entre TCT y TRI. Revista de Psicología del Deporte, v. 15, n. 1, p. 71-93, 2006.
- [6] BONDY, J. A. e MURTY, U.S.R., Graduate texts in mathematics Graph Theory. Springer, 2008.
- [7] LÜCK, Heloísa, A escola participativa: o trabalho do Gestor Escolar. 8ª. Petrópolis/RJ: Vozes, 2010.