



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

MAURÍCIO JOSÉ NASCIMENTO MACÊDO

**EVIDENCIANDO A IMPORTÂNCIA DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NO
DESENVOLVIMENTO DA ASTRONOMIA**

**JUAZEIRO DO NORTE
2022**

MAURÍCIO JOSÉ NASCIMENTO MACÊDO

EVIDENCIANDO A IMPORTÂNCIA DE CONCEITOS MATEMÁTICOS NO
DESENVOLVIMENTO DA ASTRONOMIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Steve da Silva Vicentim

JUAZEIRO DO NORTE

2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Cariri**

S586b José Nascimento Macêdo, Maurício

Evidenciando a importância de conceitos matemáticos no desenvolvimento da
Astronomia / Maurício José Nascimento Macêdo. – 2022.

XVII, 201 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Dr. Steve da Silva Vicentim

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e
Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro
do Norte, 2022.

Inclui referências: p. 177 – 187.

1. Astronomia. 2. Engenharia Didática. 3. Matemática. 4. Sequência Didática.
I. da Silva Vicentim, Steve (Orientador). II. Universidade Federal do Cariri, Centro
de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede
Nacional. III. Título.

CDD 511.12



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Evidenciando a Importância de Conceitos Matemáticos no
Desenvolvimento da Astronomia

MAURÍCIO JOSÉ NASCIMENTO MACÊDO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Aprovada em 04 de março de 2022.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Steve da Silva Vicentim

Orientador

Prof. Dr. Valdir Ferreira de Paula Junior

UFCA

Profa. Má. Gabriela Fasolo Pivaro

EEPCBMA

Para minha mãe e meu pai.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo.

A minha família: minha mãe Josefa Alves do Nascimento Macêdo, meu pai José Alves de Macêdo, meus irmãos e demais familiares que me apoiaram.

Ao meu professor de Matemática durante todo ensino fundamental: José Francisco do Nascimento, por ser o meu grande incentivador.

A todos os meus amigos, pelo apoio e incentivo, em especial à Rito de Cássio da Silva e sua mãe dona Vanda, pelo apoio incondicional nessa jornada, dando-me estadia e conforto durante todas as viagens à Juazeiro do Norte.

A todos os meus professores, em especial ao meu orientador Steve da Silva Vicentim.

A todos os meus colegas de curso.

Ao PROFMAT por me oportunizar cursar um mestrado.

À UFCA por todo o apoio.

“Se não existe vida fora da Terra, então o Universo é um grande desperdício de espaço.”

Carl Sagan

RESUMO

A Astronomia é a ciência natural que estuda os corpos celestes e os fenômenos que neles ocorrem. Como ocorre em outras ciências, por exemplo na Matemática, na Astronomia é comum um certo distanciamento do cotidiano dos estudantes. Os conhecimentos e práticas na Astronomia tiveram sua origem desde as primeiras civilizações, perpassando por diversas etapas de evolução, com isso houve uma aproximação com outras áreas, especialmente a Matemática. Para a compreensão de aspectos astronômicos como distâncias e tamanhos relativos de astros, bem como as órbitas dos planetas, os estudiosos da antiguidade já utilizavam resultados matemáticos, especialmente da Geometria, como a semelhança de triângulos e propriedades da elipse. Dada a relação existente entre as duas ciências, buscamos neste trabalho evidenciar aspectos matemáticos que influenciaram na evolução da Astronomia. Nessa pesquisa apresentamos como produto educacional uma sequência didática baseada na Engenharia Didática. As atividades sugeridas podem ser aplicadas em sala de aula como forma de fomentar a interdisciplinaridade e a curiosidade dos estudantes tanto em Matemática, quanto em Astronomia. Por fim, esperamos que o trabalho contribua positivamente no ensino de Matemática e de ciências, de modo a tornar as aulas mais atraentes e participativas aos estudantes.

Palavras-chave: Astronomia. Engenharia Didática. Matemática. Sequência Didática.

ABSTRACT

Astronomy is the natural science that studies celestial bodies and the phenomena that occur in them. As in other sciences, for example in mathematics, in Astronomy, a certain distance from the daily life of students is common. The knowledge and practices in Astronomy had their origin since the first civilizations, passing through different stages of evolution, with this there was an approximation with other areas, especially Mathematics. To understand astronomical aspects such as distances and relative sizes of stars, as well as the orbits of the planets, scholars of antiquity already used mathematical results, especially geometry, like the similarity of triangles and ellipse properties. Given the relationship between the two sciences, we sought in this work to highlight mathematical aspects that influenced the evolution of Astronomy. In this research we present as an educational product a didactic sequence based on Didactic Engineering. The suggested activities can be applied in the classroom as a way to foster interdisciplinarity and students' curiosity both in Mathematics, as in astronomy. Lastly, we hope that the work contributes positively to the teaching of Mathematics and Science, in order to make classes more attractive and participatory to students.

Keywords: Astronomy. Didactic Engineering. Following Teaching. Math.

Sumário

| | |
|---|-------------|
| LISTA DE FIGURAS | xiii |
| 1 INTRODUÇÃO | 18 |
| 2 CONCEITOS MATEMÁTICOS PRELIMINARES AO ESTUDO DA ASTRONOMIA | 21 |
| 2.1 Postulados e conceitos iniciais de Geometria Euclidiana | 21 |
| 2.1.1 Segmentos de Reta | 22 |
| 2.1.2 Semirreta | 22 |
| 2.1.3 Ângulos | 23 |
| 2.2 Congruência de triângulos | 24 |
| 2.2.1 Casos de congruência de triângulos | 25 |
| 2.2.2 Existência do ponto Médio | 28 |
| 2.3 Paralelismo | 31 |
| 2.3.1 Ângulos formados por duas retas distintas e uma transversal | 32 |
| 2.4 Segmentos comensuráveis e incomensuráveis | 33 |
| 2.5 Proporcionalidade e Teorema de Tales | 35 |
| 2.6 Semelhança de Triângulos | 39 |
| 2.6.1 Casos de semelhanças de triângulos | 41 |
| 2.7 Circunferência e Círculo | 45 |
| 2.7.1 Arco de circunferência | 47 |
| 2.7.2 Setor circular | 47 |
| 2.7.3 Ângulos na circunferência | 48 |
| 2.7.3.1 Ângulo central | 48 |
| 2.7.3.2 Ângulo inscrito | 49 |
| 2.8 Trigonometria no triângulo Retângulo | 55 |
| 2.8.1 Relações entre seno, cosseno e tangente | 57 |
| 2.9 Elipse | 59 |
| 3 CONCEITOS BÁSICOS DE ASTRONOMIA | 72 |
| 3.1 O universo | 72 |

| | | |
|---------|---|----|
| 3.1.1 | Galáxia | 72 |
| 3.1.2 | Sistemas planetários, Sistema Solar | 75 |
| 3.1.2.1 | Estrela | 75 |
| 3.1.2.2 | Planeta | 77 |
| 3.1.2.3 | Planeta Anão | 78 |
| 3.1.2.4 | Satélite Natural | 78 |
| 3.1.2.5 | Cometa | 79 |
| 3.1.2.6 | Asteroide | 80 |
| 3.2 | O planeta Terra | 80 |
| 3.2.1 | Estrutura | 80 |
| 3.2.1.1 | O interior do planeta | 80 |
| 3.2.1.2 | O exterior do planeta | 81 |
| 3.2.1.3 | As placas tectônicas | 82 |
| 3.2.2 | O satélite natural da Terra, a Lua | 83 |
| 3.2.3 | Eclipses | 85 |
| 3.2.3.1 | Eclipse Solar | 86 |
| 3.2.3.2 | Eclipse Lunar | 87 |
| 3.3 | Cálculo de distâncias | 88 |
| 3.3.1 | Paralaxe | 88 |
| 3.3.1.1 | Paralaxe geocêntrica | 90 |
| 3.3.1.2 | Paralaxe heliocêntrica | 90 |
| 3.3.2 | Unidades de distâncias astronômicas | 91 |
| 3.3.2.1 | A unidade astronômica | 91 |
| 3.3.2.2 | O ano Luz | 92 |
| 3.3.2.3 | O Parsec | 93 |

4 ASTRONOMIA: ASPECTOS HISTÓRICOS 95

| | | |
|-------|--|-----|
| 4.1 | A Astronomia na Europa Neolítica | 95 |
| 4.2 | A Astronomia na China Antiga | 96 |
| 4.3 | A Astronomia no Egito Antigo | 97 |
| 4.4 | A Astronomia na Mesopotâmia | 98 |
| 4.5 | A Astronomia na Grécia Antiga | 98 |
| 4.5.1 | Tales de Mileto e os fundamentos da Astronomia | 99 |
| 4.5.2 | Anaximandro de Mileto e as primeiras experiências científicas | 99 |
| 4.5.3 | Pitágoras de Samos e a esfericidade da Terra | 100 |
| 4.5.4 | Filolau de Cretona e o movimento terrestre | 101 |
| 4.5.5 | Eudoxo de Cnidos e a Esfera Homocêntrica | 102 |
| 4.5.6 | Aristóteles de Estagíra e a sistematização do conhecimento astronômico | 103 |
| 4.5.7 | Aristarco de Samos: distâncias relativas: Terra à Lua e Sol à Terra | 104 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.5.8 | Eratóstenes de Cirênia e a circunferência (diâmetro) da Terra | 104 |
| 4.5.9 | Hiparco de Nicéia e a relação dos tamanhos da Terra e a Lua | 104 |
| 4.5.10 | Ptolomeu e o Almagesto | 106 |
| 4.6 | A idade medieval | 108 |
| 4.6.1 | Nicolau Copérnico | 108 |
| 4.6.2 | Thomas Digges | 110 |
| 4.6.3 | Giordano Bruno | 111 |
| 4.6.4 | Tycho Brahe | 111 |
| 4.6.5 | Johannes Kepler | 111 |
| 4.6.6 | Galileu Galilei | 113 |
| 4.6.7 | Isaac Newton | 115 |
| 5 | ARISTARCO, ERATOSTENES E HIPARCO: CÁLCULO DE DISTÂNCIAS E TAMANHOS RELATIVOS | 118 |
| 5.1 | Aristarco: distâncias relativas Terra à Lua e Sol à Terra | 118 |
| 5.2 | Eratóstenes e a circunferência (diâmetro) da Terra | 123 |
| 5.3 | Hiparco: distância da Terra à Lua | 127 |
| 6 | NEWTON E AS LEIS DE KEPLER | 137 |
| 6.1 | Segunda Lei de Kepler Generalizada | 137 |
| 6.2 | Primeira Lei de Kepler Generalizada | 141 |
| 6.3 | Terceira Lei de Kepler | 148 |
| 7 | PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA | 155 |
| 7.1 | Atividade I - Aspectos históricos da Astronomia e a relevância da Matemática para as descobertas | 157 |
| 7.2 | Atividade II - Eratóstenes e a circunferência da Terra, explorando comprimento de arco e ângulos formados entre retas | 158 |
| 7.3 | Atividade III - Cálculo das distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol, pelo método de Aristarco, explorando trigonometria no triângulo retângulo e semelhança de triângulos | 161 |
| 7.4 | Atividade IV - Hiparco e distância da Terra à Lua, comprimento de arco e trigonometria no triângulo retângulo | 163 |
| 7.5 | Atividade V - Segunda Lei de Kepler e congruência e área de triângulos | 165 |
| 7.6 | Atividade VI - Relação entre a órbita circular e órbita elíptica, Terceira Lei de Kepler, explorando a relação entre e área da elipse e do círculo | 167 |
| 7.7 | Atividade VII - Observação das fases da Lua | 169 |
| 7.8 | Atividade VIII - faces da Lua - sempre a mesma face voltada para a Terra | 172 |
| 8 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 175 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A | CONCEITOS ASTRONÔMICOS NA CONTEMPORANEIDADE E PERSPECTIVAS PARA O FUTURO | 188 |
| A.1 | Obtenção de dados e a evolução dos observatórios: telescópios e radiotelescópios | 188 |
| A.2 | Buscando sinais fora da Terra | 193 |
| A.3 | O Destino do ser humano no Universo | 197 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Reta determinada pelos pontos distintos A e B . | 21 |
| 2.2 | Segmento de extremidades A e B . | 22 |
| 2.3 | Semirreta de origem A . | 22 |
| 2.4 | Transporte do segmento AB . | 22 |
| 2.5 | Ângulo de vértice O . | 23 |
| 2.6 | Ângulos de vértice O e O' . | 23 |
| 2.7 | Transporte do ângulo \widehat{AOB} . | 23 |
| 2.8 | Ângulos de mesmo vértice. | 24 |
| 2.9 | Triângulos congruentes. | 25 |
| 2.10 | Triângulos congruentes, caso LAL . | 25 |
| 2.11 | Triângulos congruentes, exemplo do caso LAL . | 26 |
| 2.12 | Triângulos congruentes, caso ALA . | 26 |
| 2.13 | Triângulos congruentes, exemplo do caso ALA . | 27 |
| 2.14 | Triângulos congruentes, caso LLL . | 27 |
| 2.15 | Triângulos congruentes, exemplo do caso LLL . | 28 |
| 2.16 | Ponto médio a partir do segmento AB . | 28 |
| 2.17 | Ângulo externo \widehat{ACX} . | 29 |
| 2.18 | Ângulo externo \widehat{ACX} projeção B' . | 29 |
| 2.19 | Ângulo externo \widehat{ACX} projeção A' . | 30 |
| 2.20 | Retas paralelas. | 31 |
| 2.21 | Retas concorrentes. | 31 |
| 2.22 | Reta transversal. | 31 |
| 2.23 | Ângulos formados por duas retas distintas e uma transversal. | 32 |
| 2.24 | Ângulos formados por duas retas paralelas distintas e uma transversal. | 32 |
| 2.25 | Segmento unitário u . | 33 |
| 2.26 | Segmento AB dividido em n segmentos. | 34 |
| 2.27 | Segmentos AB e CD múltiplos de w . | 34 |
| 2.28 | Retângulo $ABCD$. | 35 |
| 2.29 | Representação geométrica do Teorema: caso I. | 36 |
| 2.30 | Representação geométrica do Teorema: caso II. | 37 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.31 | Representação geométrica do Teorema de Tales, exemplo. | 38 |
| 2.32 | Triângulos semelhantes. | 39 |
| 2.33 | Triângulo ABC com a reta paralela ao lado BC | 40 |
| 2.34 | Triângulo ABC com a reta paralela ao lado BC com os ângulos correspondentes. | 40 |
| 2.35 | Triângulo ABC com a reta paralela ao lado BC com os ângulos. | 41 |
| 2.36 | Triângulos semelhantes, caso AA. | 42 |
| 2.37 | Triângulos semelhantes, exemplo do caso AA. | 42 |
| 2.38 | Triângulos semelhantes, caso LAL. | 43 |
| 2.39 | Triângulo ADE sobre ABC e o triângulo $A'B'C'$ | 43 |
| 2.40 | Triângulos semelhantes, exemplo do caso LAL. | 44 |
| 2.41 | Triângulos semelhantes, caso LLL. | 44 |
| 2.42 | Triângulos semelhantes, exemplo do caso LLL. | 45 |
| 2.43 | Circunferência. | 45 |
| 2.44 | Circunferência: cordas. | 46 |
| 2.45 | Arco de circunferência. | 47 |
| 2.46 | Setor circular. | 47 |
| 2.47 | Ângulo central. | 48 |
| 2.48 | Comprimento do arco e área do setor setor circular, exemplo. | 49 |
| 2.49 | Ângulo inscrito. | 49 |
| 2.50 | Ângulo inscrito, exemplo. | 50 |
| 2.51 | Teorema das Cordas. | 50 |
| 2.52 | Representação de \overline{BC} e \overline{AD} | 51 |
| 2.53 | Representação do Exemplo 12. | 51 |
| 2.54 | Representação da circunferência Γ e dos segmentos BD , AD e CD | 52 |
| 2.55 | Representação da circunferência Γ com os segmentos BC e AB | 52 |
| 2.56 | Representação da circunferência Γ com os ângulos α e β | 53 |
| 2.57 | Representação de \overline{BD} , \overline{AD} e \overline{CD} | 53 |
| 2.58 | Representação da circunferência de raio CG | 54 |
| 2.59 | Representação dos triângulos TQC e QVC | 54 |
| 2.60 | Triângulos Retângulos. | 55 |
| 2.61 | Triângulos Retângulo ABC | 56 |
| 2.62 | Triângulos Retângulo ABC de hipotenusa medindo 5 cm. | 58 |
| 2.63 | Representação da elipse ξ | 59 |
| 2.64 | Representação da elipse ξ e seus elementos. | 60 |
| 2.65 | Princípio de Cavaliere para áreas | 60 |
| 2.66 | Representação da elipse de semieixos a e b | 61 |
| 2.67 | Representação da elipse ξ de focos F_1 e F_2 | 62 |
| 2.68 | Representação da elipse de diâmetro GP | 63 |
| 2.69 | Elipse de diâmetros conjugados GP e DK | 63 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.70 | Elipse com paralelogramo de base \overline{DK} e altura \overline{PF} | 66 |
| 2.71 | Representação de HI paralelo à KD na elipse ξ | 67 |
| 2.72 | Representação do triângulo PHI | 68 |
| 2.73 | Representação de PK perpendicular à AY na elipse ξ | 70 |
| 3.1 | Galáxia elíptica gigante NGC 1316. | 73 |
| 3.2 | Galáxia espiral barrada, NGC 1300. | 73 |
| 3.3 | Galáxia espiral não barrada, a Galáxia do Rodamoinho. | 73 |
| 3.4 | Galáxia irregular, NGC 1427A. | 74 |
| 3.5 | Via Láctea vista do Espaço. | 74 |
| 3.6 | Via Láctea no céu vista do deserto do Atacama. | 74 |
| 3.7 | Concepção artística da estrela SO25300.5 + 165258. | 75 |
| 3.8 | Sol - Nasa 2020. | 76 |
| 3.9 | Anã branca Sirius B. | 76 |
| 3.10 | Bellatrix - gigante azul da constelação de Orion. | 77 |
| 3.11 | Planetas gasosos - de baixo para cima: Saturno, Jupter, Netuno e Urano. | 77 |
| 3.12 | Planetas gasosos - da esquerda para direita: Mercúrio, Vênus, Terra e Marte. | 78 |
| 3.13 | Planetas Anões | 78 |
| 3.14 | Lua em 2010. | 79 |
| 3.15 | Núcleo do cometa Halley em 1986, pela espaçonave européia Giotto. | 79 |
| 3.16 | Camadas internas do planeta Terra. | 80 |
| 3.17 | Exterior do planeta Terra. | 81 |
| 3.18 | Tipos de placas tectônicas. | 82 |
| 3.19 | Placas tectônicas. | 83 |
| 3.20 | Rotação e translação da Lua. | 84 |
| 3.21 | Fases da Lua. | 84 |
| 3.22 | Tipos de sombras projetadas pela Terra. | 85 |
| 3.23 | Tipos de sombras projetadas pela Lua. | 86 |
| 3.24 | Eclipse solar com a Terra interceptando a umbra da Lua. | 86 |
| 3.25 | Eclipse solar com a Terra não interceptando o cone de sombra da Lua. | 87 |
| 3.26 | Eclipse lunar. | 87 |
| 3.27 | Vistas dos tipos de Eclipses no Céu. | 88 |
| 3.28 | Paralaxe. | 89 |
| 3.29 | Paralaxe geocêntrica. | 90 |
| 3.30 | Paralaxe heliocêntrica. | 91 |
| 3.31 | Terra e Marte em pontos opostos. | 92 |
| 3.32 | O parsec. | 93 |
| 4.1 | Stonehenge. | 96 |
| 4.2 | Nabta Playa. | 97 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.3 | Terra segundo Tales. | 99 |
| 4.4 | Mapa de Anaximandro. | 100 |
| 4.5 | Sistema Cósmico Pitagórico. | 101 |
| 4.6 | Sistema Astronômico de Filolau. | 102 |
| 4.7 | Esfera Homocêntrica. | 102 |
| 4.8 | Sistema planetário de Aristóteles. | 103 |
| 4.9 | Ciclo da precessão. | 105 |
| 4.10 | Epiciclo e deferente. | 107 |
| 4.11 | Sistema Planetário de Ptolomeu. | 108 |
| 4.12 | Sistema Planetário de Copérnico. | 109 |
| 4.13 | Sistema Planetário de Digges. | 110 |
| 4.14 | Os cinco sólidos de Platão, limitados em uma esfera que representava a órbita de Saturno. | 112 |
| 4.15 | Telescópio de Galileu. | 114 |
| 4.16 | Dispersão da luz branca. | 115 |
| 4.17 | Telescópio Newtoniano. | 116 |
| 5.1 | Esboço dos astros Terra, Lua e Sol. | 118 |
| 5.2 | Triângulo retângulo dos astros Terra, Lua e Sol. | 119 |
| 5.3 | Tamanho da Lua. | 120 |
| 5.4 | Objeto posicionado a frente da Lua. | 120 |
| 5.5 | Triângulos resultantes: distância da Terra à Lua. | 121 |
| 5.6 | Lua entre o Sol e a Terra. | 122 |
| 5.7 | Triângulos resultantes: distância da Terra ao Sol. | 122 |
| 5.8 | Representação das cidades de Siena e Alexandria. | 124 |
| 5.9 | Imagem após o traçado da reta paralela. | 125 |
| 5.10 | Imagem restrita. | 125 |
| 5.11 | Arco de Siena à Alexandria. | 126 |
| 5.12 | Eclipse Lunar. | 127 |
| 5.13 | Arco da órbita lunar. | 128 |
| 5.14 | Parte geométrica do Esboço de Hiparco. | 128 |
| 5.15 | Triângulo Retângulo em que Lua e Terra são vértices. | 129 |
| 5.16 | Distância da Terra à Lua. | 130 |
| 5.17 | Triângulo ABH | 131 |
| 5.18 | Esquema referente as distâncias durante o eclipse solar. | 132 |
| 5.19 | Linhas paralelas. | 133 |
| 5.20 | Triângulos Semelhantes. | 134 |
| 6.1 | Diagrama: trajeto de P passando pelos pontos A, B, C | 138 |
| 6.2 | Diagrama de Brackenridge: Força momentânea agindo sobre B, B_1 na direção S | 138 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6.3 | Diagrama de Brackenridge: trajeto de P passando pelos pontos A, B, C, D, \dots | 138 |
| 6.4 | Representação dos triângulos ASB e BSC_1 , de bases iguais à b e altura h . | 139 |
| 6.5 | Representação do paralelogramo B_1BC_1C . | 139 |
| 6.6 | Perpendicular de C para SB . | 140 |
| 6.7 | Diagrama da aproximação parabólica. | 141 |
| 6.8 | Áreas do setor circular SPQ e do triângulo SPQ . | 142 |
| 6.9 | Diagrama da força centrípeta tendendo para o centro da elipse. | 143 |
| 6.10 | Diagrama da lei da força centrípeta tendendo para o centro da elipse. | 145 |
| 6.11 | Diagrama da lei da força centrípeta tendendo para o centro da elipse, recorte. | 146 |
| 6.12 | Diagrama da lei da força centrípeta tendendo para o centro da elipse, recorte 2. | 147 |
| 6.13 | Diagrama do movimento circular uniforme. | 149 |
| 6.14 | Diagrama do movimento circular uniforme: velocidade e aceleração. | 149 |
| 6.15 | Diagrama do movimento elíptico. | 152 |
| | | |
| 7.1 | Representação geométrica da medição. | 159 |
| 7.2 | Medição da sombra do bastão posicionado perpendicular ao solo. | 160 |
| 7.3 | Caixa de observação das fases da Lua. | 171 |
| 7.4 | Esquema de observação das fases da Lua. | 171 |
| 7.5 | Rodos fixados. | 173 |
| | | |
| A.1 | Telescópio SALT. | 189 |
| A.2 | Telescópio ELT. | 189 |
| A.3 | Estrutura de um radiotelescópio. | 190 |
| A.4 | Radio telescópio FAST. | 191 |
| A.5 | Telescópio Hubble. | 192 |
| A.6 | Barra de Órion. | 192 |
| A.7 | Representação artística da Equação de Drake. | 195 |
| A.8 | Kepler-1649c. | 197 |
| A.9 | Réplica do Sputnik 1. | 197 |
| A.10 | Vostok 1. | 198 |
| A.11 | Representação artística da Apollo 18 acoplada na Soyuz 19. | 199 |
| A.12 | Primeiro módulo da ISS, em 1998. | 199 |

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A Astronomia é a ciência natural que se ocupa do estudo dos corpos celestes e fenômenos que têm origem fora da Terra. Para isso, faz uso de conceitos matemáticos aplicados à Física e à Química. Nessa perspectiva, estuda a formação, desenvolvimento e movimento dos astros; colocando-se como um dos ramos mais fascinantes e importantes para responder questionamentos relacionados à vida no universo.

No ensino das Ciências Naturais existe uma espécie de distanciamento entre os conceitos teóricos e a realidade [1]. Isso se deve, muitas vezes, à fragilidades decorridas de conceitos matemáticos que não foram bem desenvolvidos. Ao estudar conceitos básicos de ciências, muito próximos da realidade cotidiana, percebe-se certas deficiências e falta de relação dessas ideias com os respectivos conceitos matemáticos aplicados [2].

Embora o estudo dos fenômenos astronômicos ocorra a partir da conceituação e coleta de informações, desde os primórdios os cientistas se valiam de aplicações matemáticas, mais especificamente da Geometria, para estimar ou calcular distâncias e o tamanho dos astros. Na atualidade não é diferente. A aplicabilidade da Matemática na astronomia é um artifício para grandes descobertas. Entre elas, novas galáxias e sistemas planetários ou na previsão de fenômenos celestes.

A Matemática e a Astronomia são duas ciências marcantes na evolução da humanidade, tendo ao longo da História motivado grandes descobertas e inspirado a curiosidade humana [3]. A Astronomia, muitas vezes, sendo a aplicação direta da Matemática, uma ciência que apresenta diversificadas características que torna, às vezes, difícil a sua compreensão. Por conta disso, as pessoas apresentam dúvidas e resistência em desenvolver alguns de seus conceitos e aplicações, levando a um distanciamento e aversão em aprendê-la [4].

Por outro lado, o Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - Profmat é um programa que busca aprimorar a formação dos professores, o que melhora o ensino na Educação Básica, o que torna as aulas mais atrativas e dinâmicas aos estudantes. A busca por motivação no ensino de Matemática pode se dar por diferentes maneiras, entre elas está a aplicação em outras ciências, no caso a Astronomia, que desperte a curiosidade do estudante, sendo uma grande fonte de informação a ser explorada.

Desse modo, o presente trabalho tem como objetivo evidenciar a importância de conceitos matemáticos no desenvolvimento da Astronomia. Para isso, iremos apresentar conceitos preliminares de Matemática e de Astronomia; evidenciar descobertas e resultados alcançados na antiguidade; expor os procedimentos aplicados pelos gregos antigos Aristarco, Eratóstenes e Hiparco no cálculo de distâncias relativas e tamanho dos astros: Terra, Lua e Sol; apresentar procedimentos matemáticos utilizados por Newton na dedução das Leis de Kepler; propor uma sequência didática, baseada na engenharia didática, que explore conceitos matemáticos aplicados à Astronomia.

A pesquisa se deu por meio de abordagem bibliográfica de coleta e mineração de dados. As informações foram coletadas em documentos como artigos e livros, em portais renomados no meio acadêmico e em sites internacionais como o site da Administração Nacional da Aeronáutica e do Espaço (*National Aeronautics and Space Administration - NASA*). Além disso, possui uma abordagem descritiva qualitativa, que tem por objetivo explicar a relação entre as variáveis. Nesse tipo de pesquisa, o pesquisador não interfere nos fatos, mas sim se limita a: observá-los, explicá-los, analisá-los e interpretá-los [5].

Dentre as referências analisadas, foram selecionadas as que mais se adequaram aos objetos de estudo do trabalho ora apresentado. Para a realização da pesquisa ainda exploramos a História da Matemática e da Astronomia como fonte de informações. De acordo com [6] é importante a exploração de fontes históricas no ensino, pois estas possibilitam situar os estudantes na sequência temporal dos fatos, bem como nos contextos individuais e sociais.

O trabalho será estruturado da seguinte forma:

O Capítulo 1 é a presente Introdução, que apresenta a justificativa, os objetivos e a estrutura do trabalho.

Já no Capítulo 2, temos os conceitos matemáticos pré-requisitos para o estudo da Astronomia; entre eles congruência e semelhança de triângulos, retas coplanares, circunferência e círculo, trigonometria no triângulo retângulo e elementos de elipse.

No Capítulo 3, expomos alguns conceitos básicos de Astronomia; entre eles universo, galáxia, planeta, bem como distâncias astronômicas e unidade astronômica.

O Capítulo 4, traz aspectos históricos da Astronomia, destacando desde os primórdios da Europa, China, Egito e Grécia Antiga; como também as descobertas da Idade Média.

Já no Capítulo 5, apresentamos os procedimentos utilizados por Aristarco, Eratóstenes e Hiparco, no cálculo de distância e tamanhos relativos entre Terra, Sol e Lua. Para isso, descrevemos o passo a passo e os resultados encontrados na época.

O Capítulo 6 descreve como Isaac Newton deduziu as Leis de Kepler por meio de elementos da elipse: área, perímetro e comprimentos de suas cordas.

O Capítulo 7, refere-se a uma proposta de sequência didática, que teve motivação nas descobertas apresentadas nos capítulos anteriores do trabalho, especialmente nos Capítulos 3, 4, 5 e 6. A sequência de atividades se justifica diante da proposta do Profmat, que entre outras coisas, traz sequências didáticas como possíveis produtos educacionais resultante de Trabalhos

de Conclusão de Curso.

Tais atividades serão baseadas na Engenharia Didática, que ocupa-se em estudar processos de ensino-aprendizagem e tem como principal característica o caráter experimental empírico. Assim, são apresentados os passos que possibilitem ao professor e aos estudantes explorarem conceitos da Matemática e da Astronomia, numa perspectiva interdisciplinar.

Os conceitos explorados nas sugestões de atividades são relacionados aos resultados mostrados durante o corpo do trabalho. Entre os temas explorados podemos destacar a semelhança de triângulos e proporcionalidade para cálculo de distâncias relativas e tamanhos da Terra, Sol e Lua; exploração das propriedades da elipse nas Leis de Kepler, usadas por Newton; e aspectos históricos que interliguem a Matemática e a Astronomia.

Por fim, no Capítulo 8, temos as Considerações Finais, onde concluímos que os conhecimentos matemáticos podem e devem ser trabalhados juntamente a outras áreas, em particular da Astronomia.

No Apêndice A trazemos algumas perspectivas para o futuro acerca da Astronomia, como a evolução dos observatórios e telescópios, emissão de sinais e vida extraterrestre, e a colonização e exploração do universo pelo ser humano.

Por fim, ao analisarmos o trabalho em sua conjuntura geral é possível apontar sua relevância tanto para no aspecto de aplicação em sala de aula, no caso da sequência didática, quanto como fonte de consulta, nas demais etapas, dada a diversidade e relevância das informações expostas.

Capítulo 2

CONCEITOS MATEMÁTICOS PRELIMINARES AO ESTUDO DA ASTRONOMIA

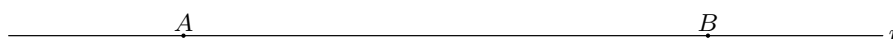
Neste capítulo apresentamos conceitos matemáticos importantes na construção dos capítulos seguintes do presente trabalho; entre os quais: congruência e semelhança de triângulos, ângulos entre retas e na circunferência, trigonometria no triângulo retângulo e propriedades da elipse. Para isso, nos baseamos nas seguintes bibliografias: [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] e [15].

2.1 Postulados e conceitos iniciais de Geometria Euclidiana

Os conceitos abordados nesta seção servem de base para construção de resultados apresentados nas seções a frente, como no caso do estudo de ângulos entre retas paralelas com uma transversal, que se estuda na Seção 2.3.

Postulado 1 (Postulado de Determinação). *Dois pontos distintos determinam uma e somente uma reta passando por eles.*

Figura 2.1: Reta determinada pelos pontos distintos A e B .



Fonte: Adaptado de [7].

Assim, dois pontos distintos A e B determinam a reta que chamamos de r e que representamos por \overleftrightarrow{AB} . Desse modo

$$(A \neq B, A \in r, B \in r) \implies r = \overleftrightarrow{AB}.$$

Ao dizermos que duas retas são *coincidentes*, equivale dizer uma única reta.

2.1.1 Segmentos de Reta

Sejam A e B dois pontos distintos, chamamos de segmento de reta a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles.

Se $A \neq B$, o segmento de reta cujas extremidades são os pontos A e B é representado por AB . Seja X um ponto entre A e B , conforme a Figura 2.2

Figura 2.2: Segmento de extremidades A e B .



Fonte: Adaptado de [7].

Assim,

$$AB = \{A, B\} \cup \{X | X \text{ está entre } A \text{ e } B\}.$$

Usaremos \overline{AB} para indicar o comprimento de AB .

Se os pontos A e B coincidirem ($A = B$), então dizemos que AB é um segmento nulo e $\overline{AB} = 0$.

2.1.2 Semirreta

Sejam A e B dois pontos distintos, chamamos de semirreta a reunião do segmento AB com conjunto dos pontos X de modo que B está entre A e X , representamos por \overrightarrow{AB} .

Na Figura 2.3 o ponto A é a origem de \overrightarrow{AB} :

Figura 2.3: Semirreta de origem A .



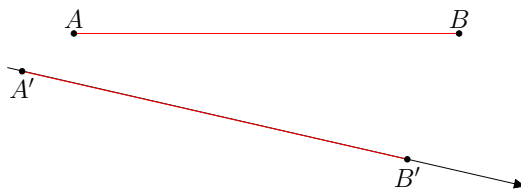
Fonte: Adaptado de [7].

Assim,

$$\overrightarrow{AB} = AB \cup \{X | B \text{ está entre } A \text{ e } X\}.$$

Postulado 2 (Postulado do transporte de segmentos). *Seja AB um segmento e uma semirreta de origem A' , conforme a Figura 2.4, existe sobre esta semirreta um único ponto B' de modo que $A'B'$ e AB possuem o mesmo comprimento.*

Figura 2.4: Transporte do segmento AB .

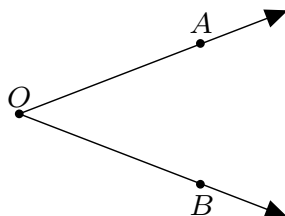


Fonte: Adaptado de [7].

2.1.3 Ângulos

Chamamos de ângulo à reunião de duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} com a mesma origem O , que não estão contidas numa mesma reta.

Figura 2.5: Ângulo de vértice O .



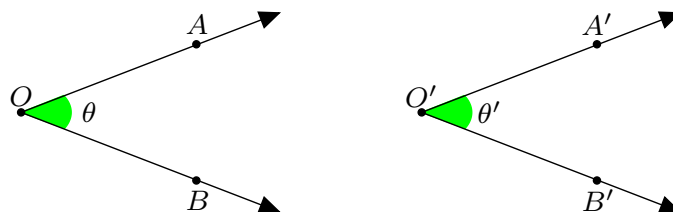
Fonte: Adaptado de [7].

Representamos por

$$A\hat{O}B = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}, \text{ onde: } \begin{cases} O \text{ é o vértice; e} \\ OA \text{ e } OB \text{ são os lados do ângulo.} \end{cases}$$

Observação: Sejam $A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}'B'$ dois ângulos, conforme a Figura 2.6. Então existe uma relação de equivalência entre eles de modo que é possível compará-los e somá-los.

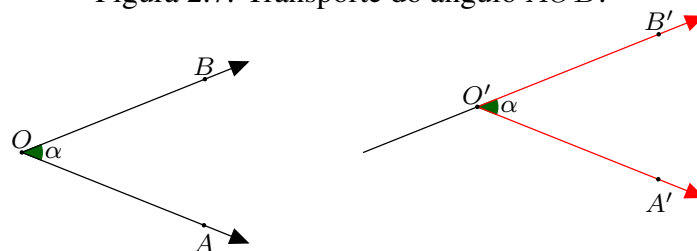
Figura 2.6: Ângulos de vértice O e O' .



Fonte: Adaptado de [7].

Postulado 3. Sejam o ângulo $A\hat{O}B$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano. Existe sobre este plano, e em um dos semiplanos que $\overrightarrow{O'A'}$ permite determinar, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\hat{O}'B'$ que possui a mesma medida de $A\hat{O}B$, conforme a Figura 2.7.

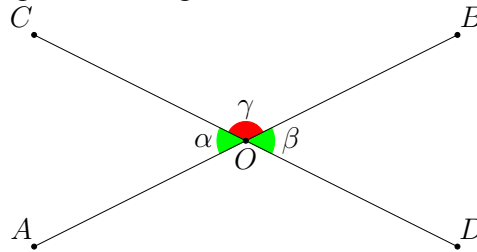
Figura 2.7: Transporte do ângulo $A\hat{O}B$.



Fonte: Adaptado de [7].

Ao considerarmos a posição das semirretas passando por um ponto, podemos definir alguns tipos especiais de ângulos. Considere a Figura 2.8, a seguir:

Figura 2.8: Ângulos de mesmo vértice.



Fonte: Adaptado de [7].

Na Figura 2.8, temos que:

- i) \widehat{AOC} e \widehat{BOD} são chamados de opostos pelo vértice, pois são formados por dois pares de semirretas opostas;
- ii) \widehat{AOB} , assim como \widehat{COD} , é chamado de ângulo raso, pois é formado por duas semirretas opostas, sua medida é 180° ;
- iii) \widehat{AOC} e \widehat{COB} são ditos suplementares, pois a soma destes resulta em um ângulo raso: $\alpha + \gamma = 180^\circ = \beta + \gamma$.

Proposição 1. *Se dois ângulos α e β são opostos pelo vértice, então eles possuem a mesma medida.*

Demonstração: Consideremos os ângulos opostos pelo vértice $\widehat{AOC} = \alpha$ e $\widehat{BOD} = \beta$, e o ângulo $\widehat{BOC} = \gamma$, representados na Figura 2.8. Teremos que

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \gamma = 180^\circ \\ \beta + \gamma = 180^\circ \end{array} \right\} \implies \alpha + \gamma = \beta + \gamma \implies \alpha = \beta.$$

□

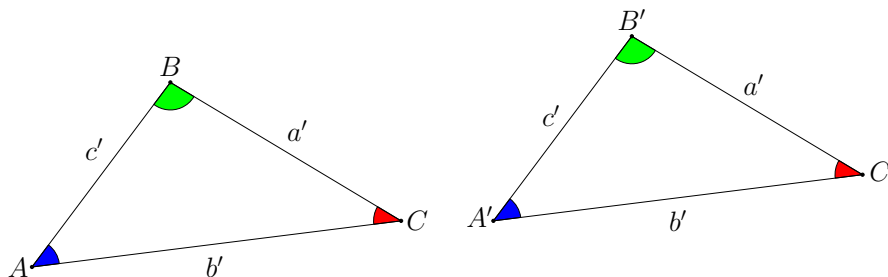
2.2 Congruência de triângulos

Nesta seção abordamos o conceito de congruência de triângulos e seus respectivos casos. Tal assunto é aplicado diretamente na dedução da Segunda Lei de Kepler no Capítulo 6, Seção 6.1, Teorema 15.

Dados dois triângulos quaisquer, dizemos que estes são *congruentes* se existe uma correspondência biunívoca entre vértices do primeiro e do segundo triângulo, tal que

- i) os ângulos internos em vértices correspondentes possuem mesma medida;
- ii) os lados opostos aos vértices correspondentes também possuem mesma medida.

Figura 2.9: Triângulos congruentes.



Fonte: Adaptado de [8].

Na Figura 2.9, temos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, indica-se

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C';$$

o símbolo “ \equiv ” lê-se congruente.

A correspondência vértice a vértice é

$$A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'.$$

Desse modo, temos

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'};$$

assim como

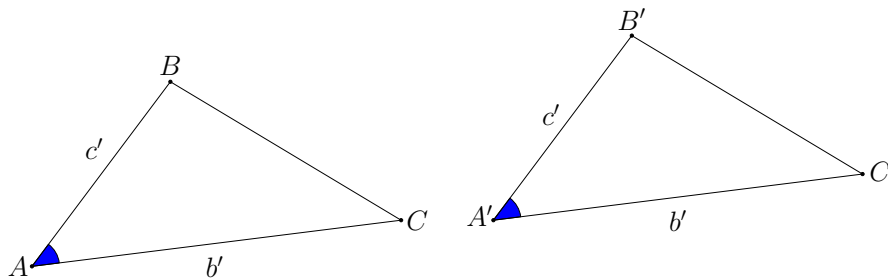
$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'}, \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

2.2.1 Casos de congruência de triângulos

Existem três possíveis casos que garantem a congruência entre dois triângulos. Estes casos podem ser detalhados a seguir:

Postulado 4 (caso LAL). *Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se estes triângulos possuem dois pares de lados correspondentes vértice a vértice iguais e o par de ângulos entre esses dois pares de lados iguais também iguais, então os triângulos são congruentes.*

Figura 2.10: Triângulos congruentes, caso LAL.



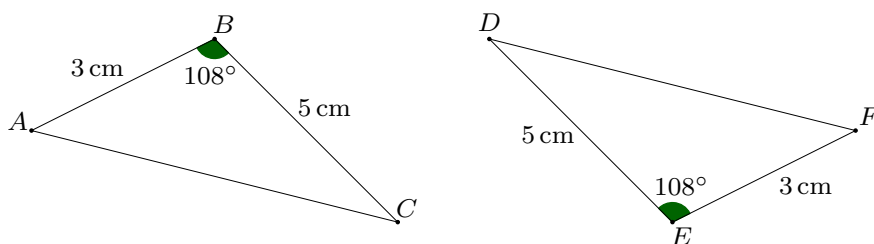
Fonte: Adaptado de [8].

Conforme a Figura 2.10, temos que

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

Exemplo 1. Consideremos os triângulos ABC e EFG , representados na Figura 2.11.

Figura 2.11: Triângulos congruentes, exemplo do caso LAL .



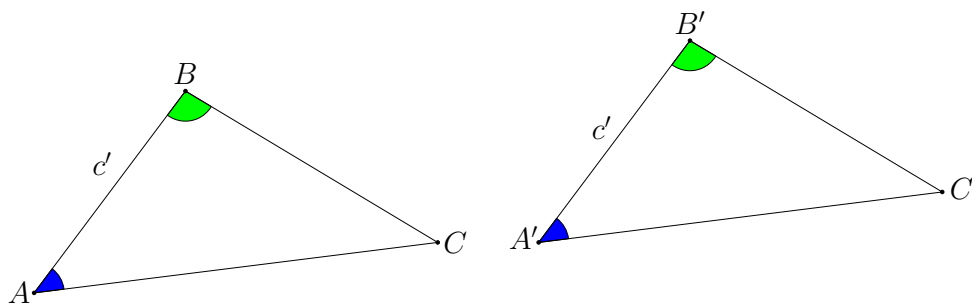
Fonte: O autor.

Conforme a Figura 2.11, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{EF} = 3 \text{ cm} \\ \overline{BC} = \overline{DE} = 5 \text{ cm} \\ \widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 108^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF.$$

Proposição 2 (caso ALA). Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se estes triângulos possuem dois pares de ângulos correspondentes vértice a vértice iguais e o par de lados entre esses dois pares ângulos iguais também iguais, então os triângulos são congruentes.

Figura 2.12: Triângulos congruentes, caso ALA.



Fonte: Adaptado de [8].

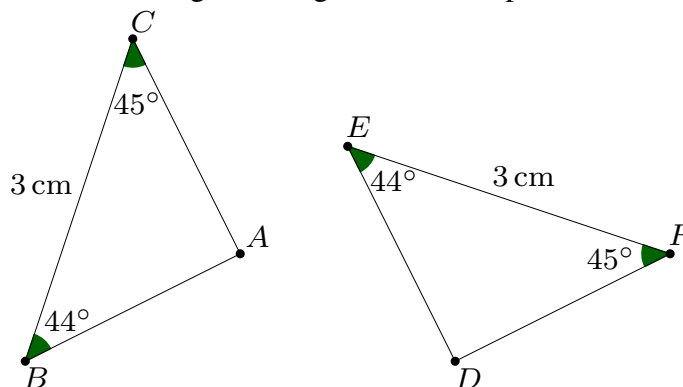
Conforme a Figura 2.12, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \\ \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

Demonstração: Consultar [7, p. 39, 2º de caso de congruência: ALA].

Exemplo 2. Consideremos os triângulos ABC e EFG , representados na Figura 2.13.

Figura 2.13: Triângulos congruentes, exemplo do caso ALA .



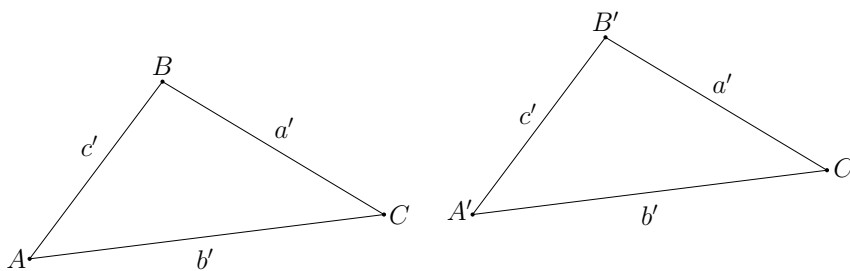
Fonte: O autor.

Conforme a Figura 2.13, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} = \overline{EF} = 3 \text{ cm} \\ \widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 44^\circ \\ \widehat{ACB} = \widehat{DFE} = 45^\circ \end{array} \right\} \implies \Delta ABC \equiv \Delta DEF.$$

Proposição 3 (caso LLL). Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se estes triângulos possuem três pares de lados correspondentes vértice a vértice iguais, então os triângulos são congruentes.

Figura 2.14: Triângulos congruentes, caso LLL .



Fonte: Adaptado de [8].

Conforme a Figura 2.14, temos que

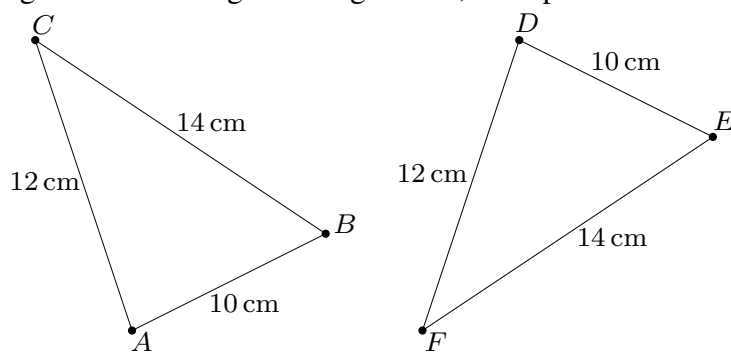
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array} \right\} \implies \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

Demonstração: Consultar [7, p. 41, 3º caso de congruência: LLL].

□

Exemplo 3. Consideremos os triângulos ABC e EFG , representados na Figura 2.15

Figura 2.15: Triângulos congruentes, exemplo do caso LLL.



Fonte: O autor.

Conforme a Figura 2.15, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{DE} = 10 \text{ cm} \\ \overline{BC} = \overline{EF} = 14 \text{ cm} \\ \overline{AC} = \overline{DF} = 12 \text{ cm} \end{array} \right\} \implies \Delta ABC \equiv \Delta DEF.$$

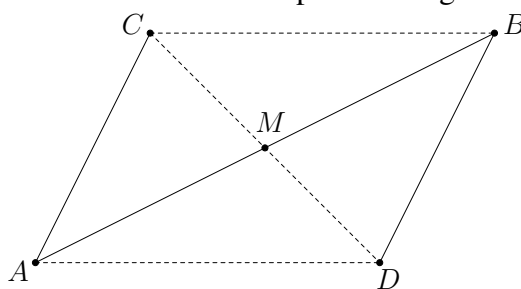
2.2.2 Existência do ponto Médio

Seja AB segmento de reta, a partir dos Postulados 2 e 3 podemos construir

$$C\hat{A}B = D\hat{B}A \text{ e } \overline{AC} = \overline{DB},$$

onde C e D estão em semiplanos opostos em relação à \overleftrightarrow{AB} , conforme a Figura 2.16.

Figura 2.16: Ponto médio a partir do segmento AB .



Fonte: Adaptado de [7].

Na Figura 2.16, o ponto M representa a intersecção dos segmentos AB e CD , ou seja,

$$CD \cap AB = \{M\}.$$

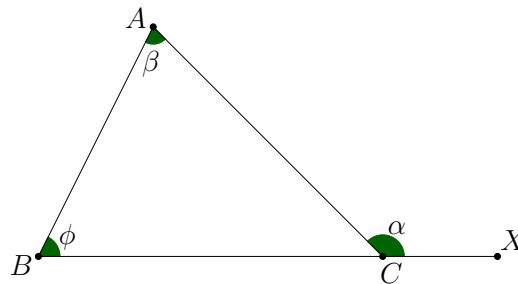
O que resulta na sequência de congruências de triângulos:

- ✓ $\Delta CAB \equiv \Delta DBA$ (Caso LAL , AB é comum);
- ✓ $\Delta CAD \equiv \Delta DBC$ (Caso ALA , com soma de ângulos ou pelo caso LLL);
- ✓ $\Delta AMD \equiv \Delta BMC$ (Caso ALA).

Da última congruência decorre que $\overline{AM} = \overline{BM}$, ou seja, M é o ponto médio de \overline{AB} .

Teorema 1. *Em qualquer triângulo ABC , a medida de cada ângulo externo α é sempre maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes à α .*

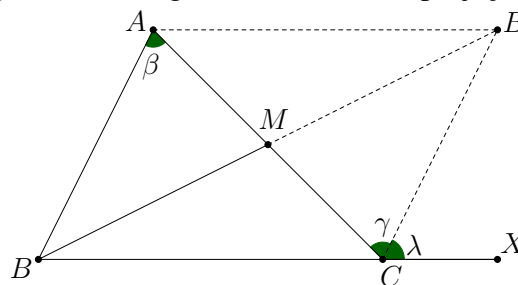
Figura 2.17: Ângulo externo \widehat{ACX} .



Fonte: Adaptado de [8].

Demonstração: Considerando a Figura 2.17, sejam M o ponto médio de \overline{AC} e os ângulos $\gamma = \widehat{ACB'}$ e $\lambda = \widehat{B'CX}$. Prologuemos \overline{BM} até o ponto B' , de modo que $\overline{BM} = \overline{MB'}$ e tracemos os segmentos AB' e CB' , conforme a Figura 2.18.

Figura 2.18: Ângulo externo \widehat{ACX} projeção B' .



Fonte: Adaptado de [8].

Consideremos os triângulos AMB e CMB' . Note que

$$\overline{AM} = \overline{MC}, \overline{BM} = \overline{MB'} \text{ e } \widehat{AMB} = \widehat{CMB'}.$$

Desse modo, pelo caso LAL , Postulado 4,

$$\triangle AMB \cong \triangle CMB'.$$

Assim

$$\lambda = \widehat{B'CM} = \widehat{BAM} = \beta,$$

desse modo,

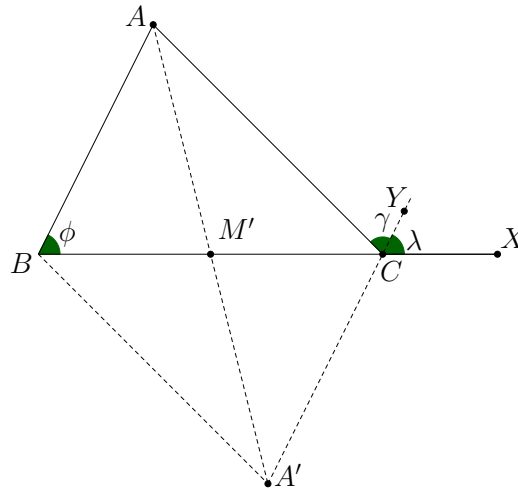
$$\alpha = \lambda + \gamma > \lambda = \beta,$$

portanto,

$$X\hat{C}A > B'\hat{C}A = B'\hat{C}M = B\hat{A}M = B\hat{A}C.$$

Para o ângulo $A\hat{B}C = \phi$, seja M' o ponto médio de \overline{BC} .

Figura 2.19: Ângulo externo $A\hat{C}X$ projeção A' .



Fonte: Adaptado de [8].

Prologuemos $\overrightarrow{AM'}$ até o ponto A' , de modo que $\overline{AM'} = \overline{M'A'}$ e tracemos os segmentos BA' e CA' . Seja ainda Y um ponto de $\overline{A'C}$ e os ângulos $\gamma = A\hat{C}Y$ e $\lambda = Y\hat{C}X$, conforme a Figura 2.19.

Consideremos os triângulos $AM'B$ e $CM'A'$. Note que

$$\overline{AM'} = \overline{M'C}, \overline{AM'} = \overline{M'A'} \text{ e } A\hat{M}'B = C\hat{M}'A'.$$

Desse modo, pelo caso LAL , Postulado 4,

$$\Delta BM'A \equiv \Delta CM'A'.$$

Assim

$$\phi = A\hat{B}M' = A\hat{C}M' = \lambda,$$

desse modo,

$$\alpha = \lambda + \gamma > \lambda = \phi,$$

portanto,

$$X\hat{C}A > X\hat{C}Y = A'\hat{C}M' = A\hat{B}M'.$$

□

2.3 Paralelismo

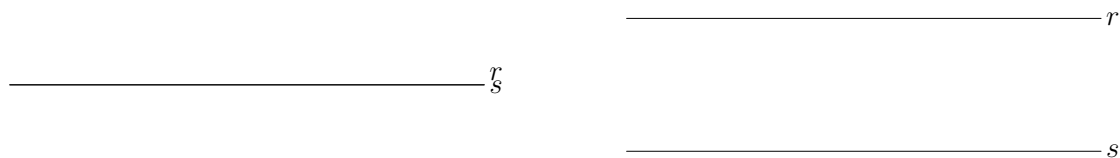
Nesta seção apresentamos o conceito de paralelismo e alguns resultados diretamente aplicados no Capítulo 5, seção 5.2, na qual Eratóstenes explica a circunferência do planeta Terra.

Duas retas r e s , pertencentes ao mesmo plano, são ditas *paralelas* quando, pelo menos, uma das seguintes condições é satisfeita:

- i) as retas são coincidentes ou iguais;
- ii) as retas não possuem ponto em comum.

Notação: $r // s$.

Figura 2.20: Retas paralelas.

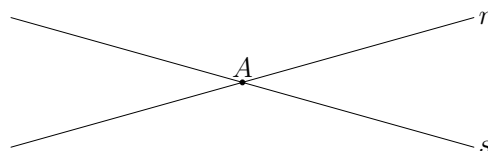


Fonte: Adaptado de [7].

Postulado 5. *Por um ponto A passa uma única reta s paralela a uma reta r dada.*

Duas retas distintas r e s , pertencentes a um mesmo plano, possuem um único ponto em comum são ditas *concorrentes*.

Figura 2.21: Retas concorrentes.

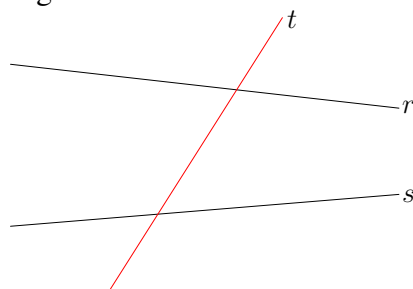


Fonte: Adaptado de [7].

Na Figura 2.21, as retas r e s são concorrentes no ponto A .

Se tomarmos duas retas distintas r e s , coplanares, paralelas ou não, e t uma reta concorrente com r e s , dizemos que t é uma reta *transversal* de r e s , conforme a Figura 2.22.

Figura 2.22: Reta transversal.



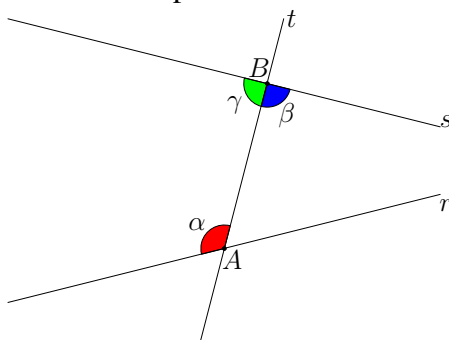
Fonte: Adaptado de [7].

2.3.1 Ângulos formados por duas retas distintas e uma transversal

Postulado 6 (Euclides). *Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.*

Dadas num plano as retas r , s e t , com t transversal à r e s , sejam A e B os pontos de intersecção de t com r e s , respectivamente, conforme a Figura 2.23.

Figura 2.23: Ângulos formados por duas retas distintas e uma transversal.



Fonte: Adaptado de [8].

Na Figura 2.23, definimos que:

- i) α e β são alternos internos;
- ii) α e γ são ditos colaterais internos.

Corolário 1. *A partir da Figura 2.23, temos que:*

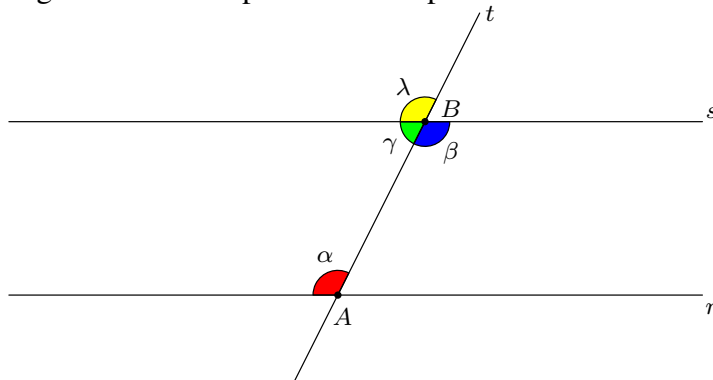
$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ.$$

Demonstração: Consultar [7, p. 61-64, construção da paralela].

□

Agora consideremos o caso em que $r \parallel s$, conforme a Figura 2.24.

Figura 2.24: Ângulos formados por duas retas paralelas distintas e uma transversal.



Fonte: Adaptado de [8].

Na Figura 2.24, definimos que:

- i) α e β são alternos internos, $\alpha = \beta$;
- ii) α e γ são ditos colaterais internos;
- iii) α e λ são ditos correspondentes.

Proposição 4 (Ângulos Correspondentes). *A partir da Figura 2.24, temos que:*

$$r \parallel s \implies \alpha = \lambda.$$

Demonstração: Pelo Corolário 1, temos que

$$\alpha = \beta \text{ e } \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Desse modo, temos

$$\alpha + \gamma = 180^\circ, \tag{2.1}$$

note também que:

$$\lambda + \gamma = 180^\circ. \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2), temos

$$\alpha + \gamma = 180^\circ = \lambda + \gamma \implies \alpha = \lambda. \tag{2.3}$$

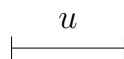
Portanto, ângulos correspondentes possuem a mesma medida.

□

2.4 Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

De início, consideremos um segmento de reta AB . Para medi-lo adotaremos uma unidade padrão u denominada segmento unitário, representada na Figura 2.25.

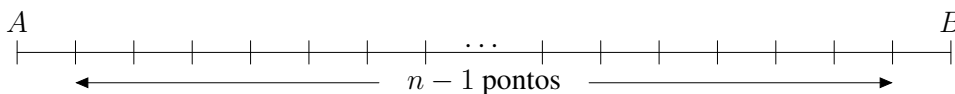
Figura 2.25: Segmento unitário u .



Fonte: O autor.

Por definição, a medida de u vale 1. Consideremos $n - 1$ pontos interiores à AB que o decompõe em n segmentos justapostos, então a medida de AB será igual à soma das medidas desses n segmentos, conforme a Figura 2.26.

Figura 2.26: Segmento AB dividido em n segmentos.



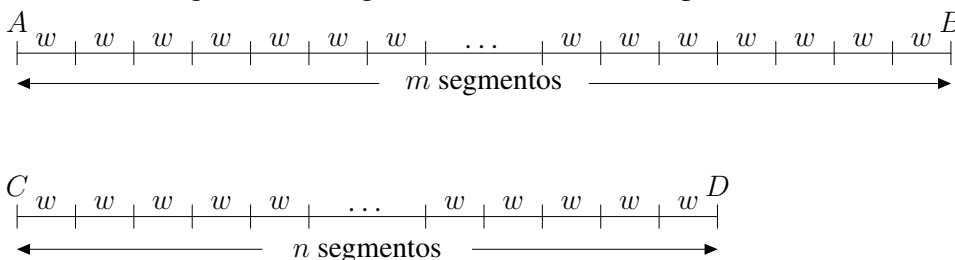
Fonte: O autor.

Se estes segmentos interiores à AB possuem todos a mesma medida $u = 1$, então dizemos que um segmento CD de comprimento $u = 1$ cabe n vezes em AB . Desse modo, a medida de AB que representaremos por \overline{AB} , será igual a:

$$\overline{AB} = n \cdot u = n \cdot 1 = n.$$

Pode ocorrer de o segmento CD não caber uma quantidade exata de vezes em AB . Se isso ocorre \overline{AB} não será um número natural, mas sim um número fracionário. Para isso, procuramos um pequeno segmento w que caiba n vezes em CD e m vezes em AB , conforme a Figura 2.27.

Figura 2.27: Segmentos AB e CD múltiplos de w .



Fonte: O autor.

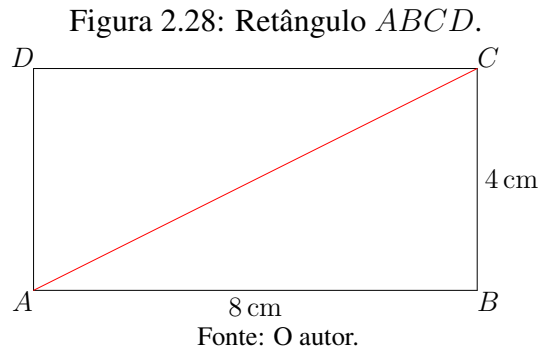
Desse modo, observa-se que a medida de w cabe uma quantidade inteira n de vezes em CD e uma quantidade inteira m de vezes em AB , em que $\overline{CD} = u$ e $\overline{AB} = n$. Sempre que for possível decompor as medidas dos dois segmentos, AB e CD , em um segmento menor w , dizemos que AB e CD são *comensuráveis*, caso contrário dizemos que são *incomensuráveis*.

Em outras palavras, se a razão entre $\overline{AB} = n$ e $\overline{CD} = u$ resulta em número racional, então esses segmentos são ditos *comensuráveis*, ou seja,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{mw}{nw} = \frac{m}{n} \implies \overline{AB} \text{ e } \overline{CD} \text{ são comensuráveis,}$$

em que $m, n \in \mathbb{Z}_+; n \neq 0$.

Exemplo 4. Consideremos o retângulo $ABCD$ de base $\overline{AB} = 8$ cm e altura $\overline{BC} = 4$ cm, representado na Figura 2.28.



Note que pelo Teorema de Pitágoras podemos determinar o comprimento da diagonal AC do retângulo $ABCD$, de fato,

$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 4^2 \implies \overline{AC} = 4\sqrt{5} \text{ cm}.$$

Desse modo, temos

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \implies \overline{BC} \text{ e } \overline{AB} \text{ são comensuráveis};$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{4\sqrt{5} \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q} \implies \overline{AC} \text{ e } \overline{AB} \text{ são incomensuráveis};$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{4\sqrt{5} \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = \sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \implies \overline{AC} \text{ e } \overline{BC} \text{ são incomensuráveis}.$$

2.5 Proporcionalidade e Teorema de Tales

Esta seção serve de base para construção de resultados apresentados nas seções a frente, como no caso do estudo semelhança de Triângulos, que se estuda na Seção 2.6.

Teorema 2 (Teorema de Tales). *Sejam duas retas r e s , transversais a um feixe de retas paralelas entre si. Consideremos dois segmentos AB e CD sobre r e os segmentos correspondentes $A'B'$ e $C'D'$ sobre s . Teremos que*

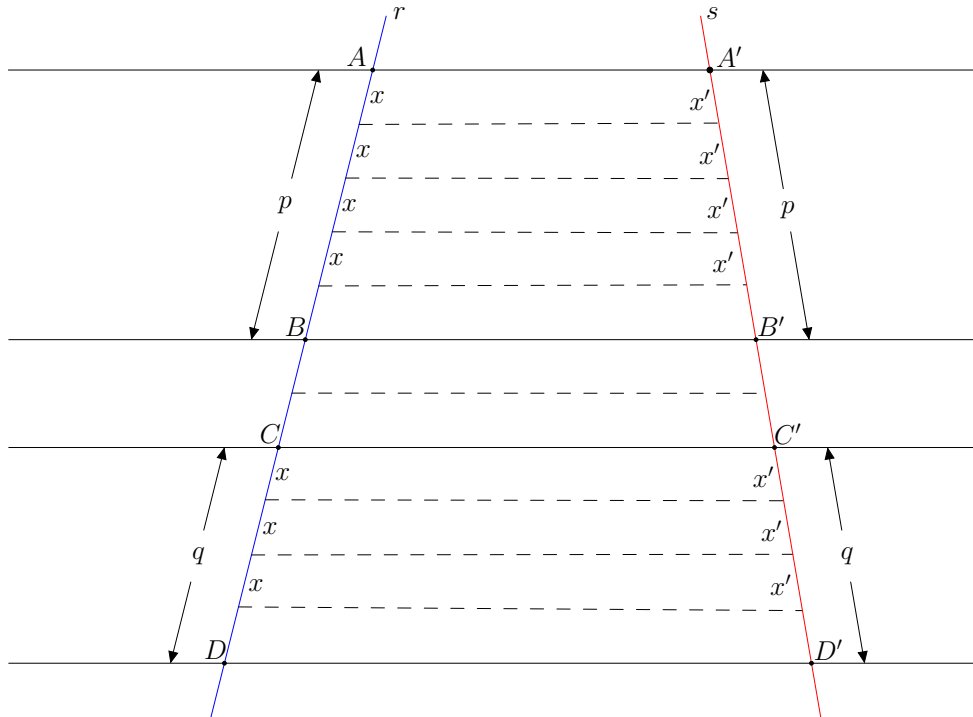
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

Demonstração: Inicialmente devemos considerar dois casos:

- i) AB e CD são comensuráveis;
- ii) AB e CD não são comensuráveis.

Se o primeiro ocorre, significa que existe x que é submúltiplo racional de \overline{AB} e \overline{CD} .

Figura 2.29: Representação geométrica do Teorema: caso i.



Fonte: Adaptado de [7].

Dessa forma, temos

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = p \cdot x \\ \overline{CD} = q \cdot x \end{array} \right\} \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p \cdot x}{q \cdot x} = \frac{p}{q}. \quad (2.4)$$

Ao conduzirmos retas do feixe pelos pontos de divisão dos segmentos AB e CD , conforme a Figura 2.29, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A'B'} = p \cdot x' \\ \overline{C'D'} = q \cdot x' \end{array} \right\} \implies \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p \cdot x'}{q \cdot x'} = \frac{p}{q}. \quad (2.5)$$

De (2.4) e (2.5), temos

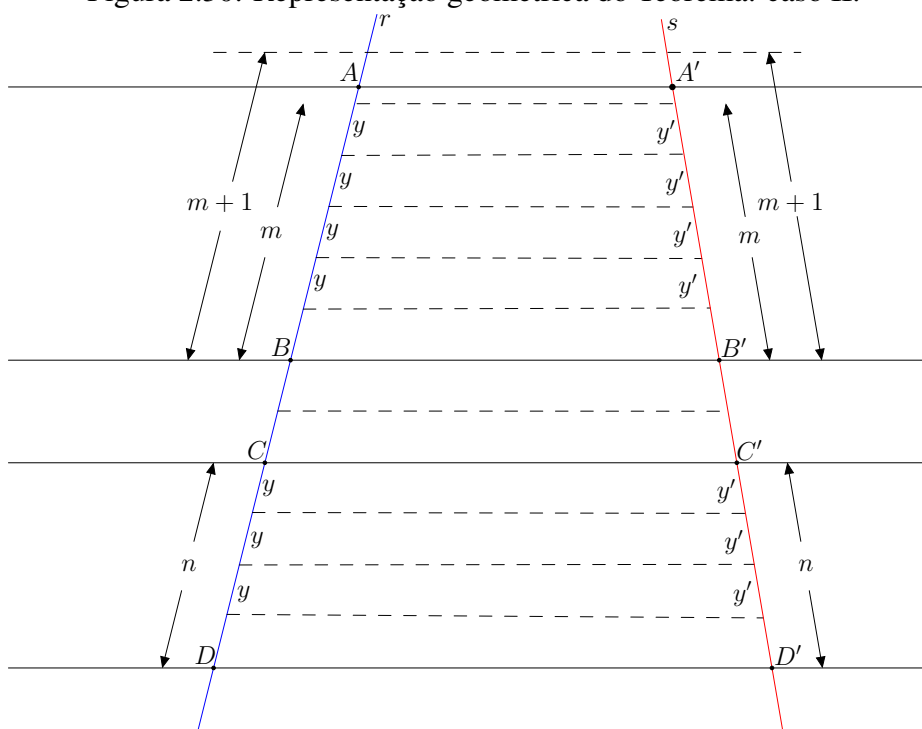
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

Para o caso ii), em que AB e CD não são comensuráveis, temos que não existe um segmento que é submúltiplo comum de \overline{AB} e \overline{CD} .

De início, iremos considerar um segmento y submúltiplo de \overline{CD} , ou seja, y cabe um certo número inteiro n de vezes em \overline{CD} :

$$\overline{CD} = n \cdot y. \quad (2.6)$$

Figura 2.30: Representação geométrica do Teorema: caso II.



Fonte: Adaptado de [7].

Como \overline{AB} e \overline{CD} são incomensuráveis, marcamos sucessivamente y em \overline{AB} , para um certo número inteiro m de vezes, de modo que

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m + 1) \cdot y \quad (2.7)$$

De (2.6) e (2.7), temos que

$$\left. \begin{array}{l} n \cdot y = \overline{CD} = y \cdot n \\ m \cdot y < \overline{AB} < (m + 1) \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m \cdot y}{n \cdot y} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{(m + 1) \cdot y}{n \cdot y}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m + 1}{n} \quad (2.8)$$

Ao conduzirmos retas do feixe pelos pontos de divisão dos segmentos AB e CD , conforme a Figura 2.30, temos:

$$\overline{C'D'} = n' \cdot y' \quad (2.9)$$

Da mesma forma:

$$m \cdot y' < \overline{A'B'} < (m + 1) \cdot y' \quad (2.10)$$

De (2.9) e (2.10), temos que

$$\left. \begin{array}{l} n \cdot y' = \overline{C'D'} = y' \cdot n \\ m \cdot y' < \overline{A'B'} < (m+1) \cdot y' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{m \cdot y'}{n \cdot y'} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{(m+1) \cdot y'}{n \cdot y'}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \quad (2.11)$$

Note que y é um submúltiplo de \overline{CD} que pode variar, ao dividir y , quando variamos a quantidade n . Assim, podemos aumentar o valor de n modo que $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ sejam cada vez mais próximos, ou seja,

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \left] \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right[\rightarrow k \in \mathbb{R}.$$

Desse modo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \in \left] \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right[\rightarrow k \text{ em 2.8 e } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \in \left] \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right[\rightarrow k \text{ em 2.11.}$$

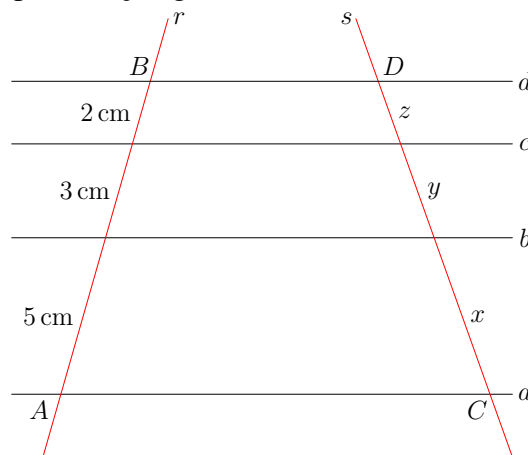
Portanto,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}. \quad (2.12)$$

□

Exemplo 5. *Sejam r e s , transversais ao feixe de paralelas a, b, c e d conforme a Figura 2.31. Determinar x, y e z , sabendo que $x + y + z = 15$ cm.*

Figura 2.31: Representação geométrica do Teorema de Tales, exemplo.



Fonte: O autor.

De início, note que

$$\overline{AB} = 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 10 \text{ cm}.$$

Como $\overline{CD} = 15$ cm, pelo Teorema 2, temos

$$\frac{10 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm}}{x} = \frac{3 \text{ cm}}{y} = \frac{2 \text{ cm}}{z} \implies \begin{cases} 10x = 75 \text{ cm} \implies x = 7,5 \text{ cm}; \\ 10y = 45 \text{ cm} \implies y = 4,5 \text{ cm}; \\ 10z = 30 \text{ cm} \implies z = 3 \text{ cm}. \end{cases}$$

2.6 Semelhança de Triângulos

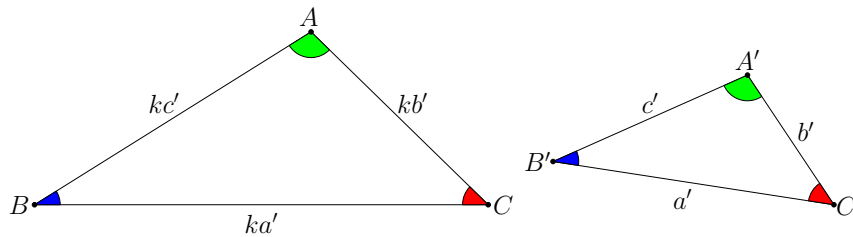
Nesta seção apresentamos o conceito de semelhança de triângulos e seus respectivos casos. Tais resultados possuem aplicação, principalmente, no Capítulo 5, Seções 5.1 e 5.3, onde Aristarco e Hiparco propõem a medição das distâncias relativas entre Terra, Sol e Lua.

Dados dois triângulos quaisquer, dizemos que estes são semelhantes se existe uma correspondência biunívoca entre vértices do primeiro e do segundo triângulo, tal que:

- i) os ângulos dos vértices correspondentes são iguais;
- ii) a razão entre os comprimentos dos lados correspondentes é sempre a mesma.

Na Figura 2.32 os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, e denota-se $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, o símbolo “ \sim ” lê-se semelhante.

Figura 2.32: Triângulos semelhantes.



Fonte: Adaptado de [8].

A correspondência vértice a vértice é

$$A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'.$$

Desse modo, temos que

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'};$$

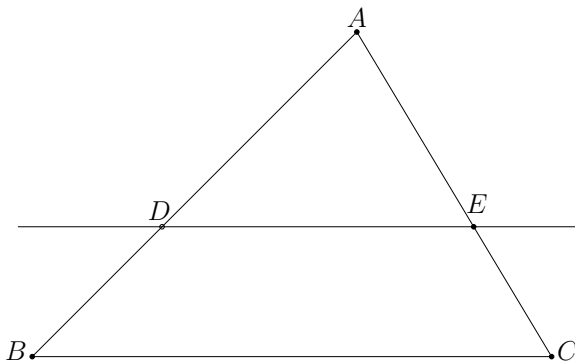
além disso, existe $k > 0$ de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

O valor positivo k , denomina-se *razão de semelhança* entre os triângulos ABC e $A'B'C'$. Veja que se $k = 1$, os triângulos são congruentes.

Teorema 3 (Teorema Fundamental da semelhança). *Dado um triângulo qualquer, se traçarmos uma reta paralela a um de seus lados interceptando os outros dois em pontos distintos, conforme a Figura 2.33, então o triângulo resultante da reta, cujos vértices são os pontos de intersecção e o vértice oposto à reta, é semelhante ao primeiro triângulo.*

Figura 2.33: Triângulo ABC com a reta paralela ao lado BC .

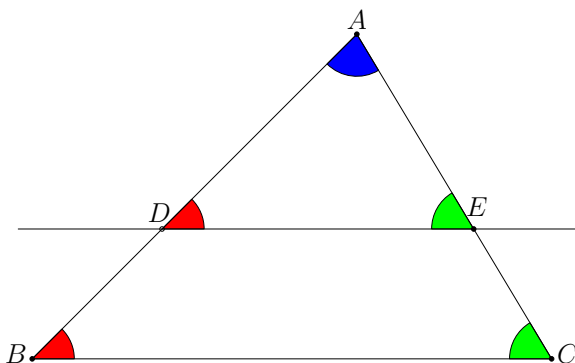


Fonte: Adaptado de [7].

Demonstração: Para mostrarmos a semelhança entre os triângulos ADE e ABC , devemos mostrar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e os lados opostos a estes ângulos são proporcionais.

- i) Os ângulos devem ser congruentes: como $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{DE}$, temos que os ângulos \widehat{ABC} e \widehat{ADE} são correspondentes, assim como \widehat{ACB} e \widehat{AED} .

Figura 2.34: Triângulo ABC com a reta paralela ao lado BC com os ângulos correspondentes.



Fonte: Adaptado de [7].

Portanto, pela Proposição 4

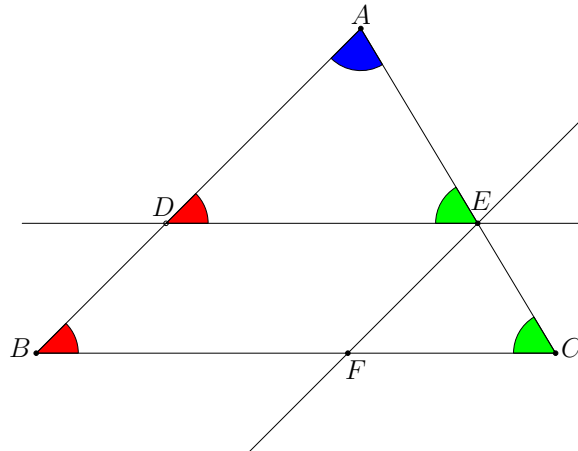
$$\widehat{ABC} = \widehat{ADE} \text{ e } \widehat{ACB} = \widehat{AED} \quad (2.13)$$

- ii) Os lados devem ser proporcionais. De início, observemos que pelo Teorema 2

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \quad (2.14)$$

Por E tracemos \overleftrightarrow{EF} paralela a reta \overleftrightarrow{AB} , interceptando \overline{BC} em F , conforme a Figura 2.35.

Figura 2.35: Triângulo ABC com a reta paralela ao lado BC com os ângulos.



Fonte: Adaptado de [7].

Como $\overline{BD} \parallel \overline{EF}$ e $\overline{DE} \parallel \overline{BF}$, temos que $BFED$ é um paralelogramo¹. O que leva à

$$BFED \text{ paralelogramo} \implies \overline{DE} = \overline{BF} \quad (2.15)$$

Pelo Teorema 2 e de (2.15), temos que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \implies \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \quad (2.16)$$

De (2.14) e (2.16), temos que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \quad (2.17)$$

De (2.13) e (2.17), concluímos que os triângulos ABC e ADE são semelhantes.

□

2.6.1 Casos de semelhanças de triângulos

Existem três possíveis casos que garantem a semelhança entre dois triângulos. Estes casos podem ser detalhados nas três proposições a seguir:

Proposição 5 (critério AA). *Dados sobre um plano os triângulos ABC e $A'B'C'$, de modo que*

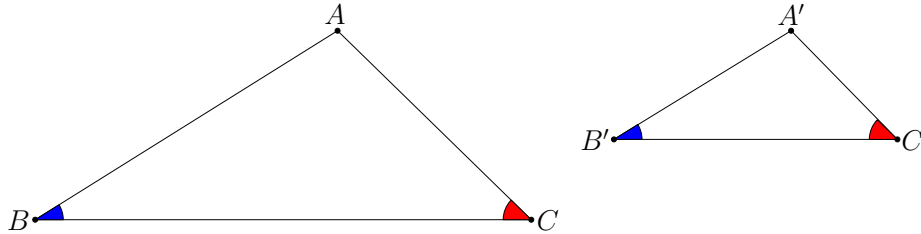
$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \text{ e } \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}.$$

¹Um quadrilátero plano convexo é um paralelogramo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos [7, p. 97].

Então ABC e $A'B'C'$ são semelhantes com correspondência vértice à vértice $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, em particular

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Figura 2.36: Triângulos semelhantes, caso AA.



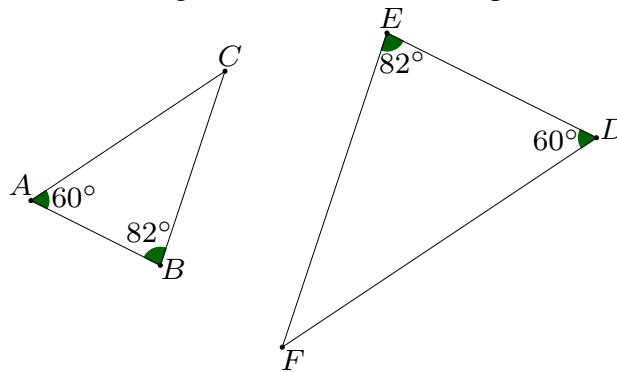
Fonte: Adaptado de [8].

Demonstração: Consultar [7, p. 198, 1º caso de semelhança: AA].

□

Exemplo 6. Consideremos os triângulos ABC e EFG , representados na Figura 2.37

Figura 2.37: Triângulos semelhantes, exemplo do caso AA.



Fonte: O autor.

Conforme a Figura 2.37, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 60^\circ \\ \widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 82^\circ \end{array} \right\} \implies \Delta ABC \sim \Delta DEF.$$

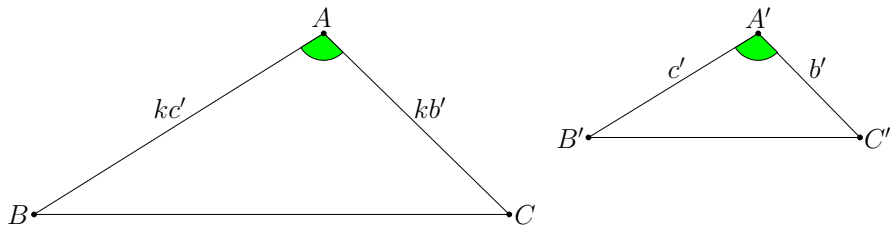
Proposição 6 (critério LAL). Dados sobre um plano os triângulos ABC e $A'B'C'$, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k \text{ e } \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}.$$

Então ABC e $A'B'C'$ são semelhantes com correspondência vértice à vértice $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, em particular

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k, \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \text{ e } \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}.$$

Figura 2.38: Triângulos semelhantes, caso LAL.



Fonte: Adaptado de [8].

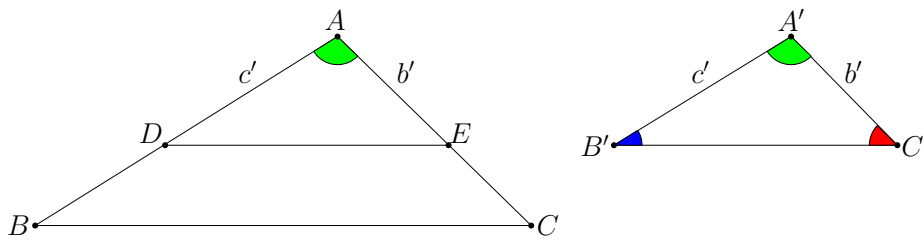
Demonstração: Inicialmente, vamos supor que os triângulos ABC e $A'B'C'$ não sejam congruentes. Logo, os lados correspondentes vértice a vértice têm medidas distintas.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Tomemos um ponto D sobre \overline{AB} de modo que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$. Desse modo,

$$\overline{AD} = \overline{A'B'} = \frac{\overline{AB}}{k} \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = k. \quad (2.18)$$

Tracemos a paralela à \overline{BC} , passando por D , interceptando \overline{AC} no ponto E , determinando o triângulo ADE , conforme a Figura 2.39.

Figura 2.39: Triângulo ADE sobre ABC e o triângulo $A'B'C'$.



Fonte: Adaptado de [7].

Pelo Teorema 2

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{1}{k},$$

assim,

$$\overline{AE} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AC} = \overline{A'C'}.$$

Note que

$$\overline{AD} = \overline{A'B'}, \overline{AE} = \overline{A'C'} \text{ e } \widehat{DAE} = \widehat{B'A'C'}.$$

Desse modo, pelo caso LAL , Postulado 4, temos que

$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C' \quad (2.19)$$

Note também que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = k$$

além disso,

$$\overrightarrow{DE} // \overrightarrow{BC}.$$

Pelo Teorema 3, temos que

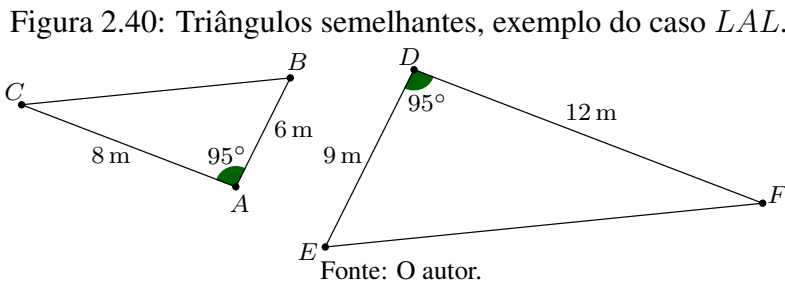
$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \tag{2.20}$$

De (2.19) e (2.20), temos que

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \equiv \Delta A'B'C' \implies \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \tag{2.21}$$

□

Exemplo 7. Consideremos os triângulos ABC e EFG , representados na Figura 2.40



Conforme a Figura 2.40, temos que:

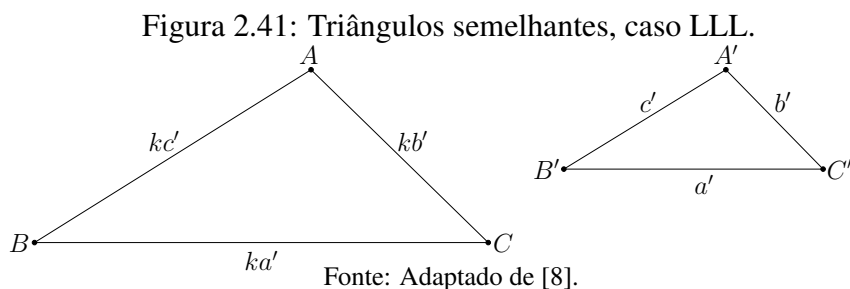
$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{6 \text{ m}}{9 \text{ m}} = \frac{8 \text{ m}}{12 \text{ m}} = \frac{2}{3} \\ \widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 95^\circ \end{aligned} \right\} \implies \Delta ABC \sim \Delta DEF.$$

Proposição 7 (critério LLL). Dados sobre um plano os triângulos ABC e $A'B'C'$, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k.$$

Temos que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes com correspondência vértice à vértice $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$, em particular

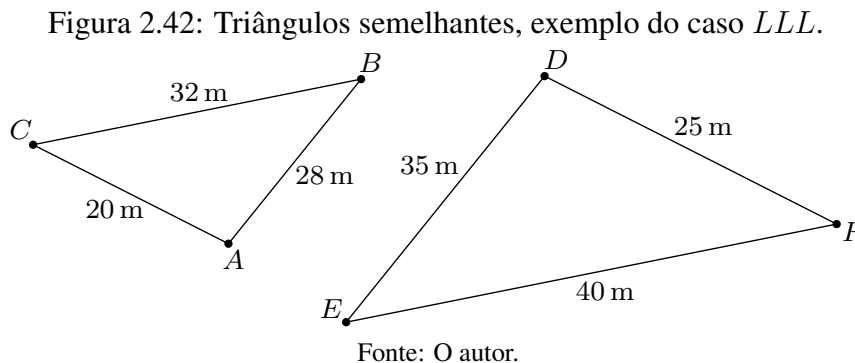
$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}, \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \text{ e } \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}.$$



Demonstração: Consultar [8, p. 130, Proposição 4.6].

□

Exemplo 8. Consideremos os triângulos ABC e EFG , representados na Figura 2.42



Conforme a Figura 2.42, temos que:

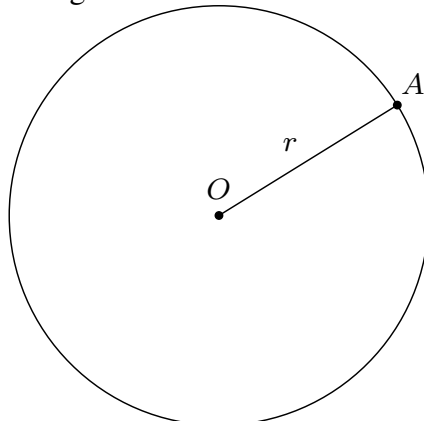
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{28 \text{ m}}{35 \text{ m}} = \frac{20 \text{ m}}{25 \text{ m}} = \frac{32 \text{ m}}{40 \text{ m}} = \frac{4}{5} \implies \Delta ABC \sim \Delta DEF.$$

2.7 Circunferência e Círculo

Nesta seção são abordados conceitos que são diretamente aplicados nos capítulos 5 e 6, por exemplo na Seção 5.3 temos a aplicação de comprimento de arco e circunferência para estabelecer a relação entre a duração de um eclipse lunar e a duração órbita lunar; já na Seção 6.3, Teorema 18, é exposto o procedimento de Newton para explicar órbitas circulares a partir de comprimento de arco.

Seja O um ponto pertencente a um plano. Chamamos de circunferência o conjunto dos pontos equidistantes de O . Um segmento cujo comprimento é igual a essa distância é denominada de raio e O é o centro da circunferência.

Figura 2.43: Circunferência.

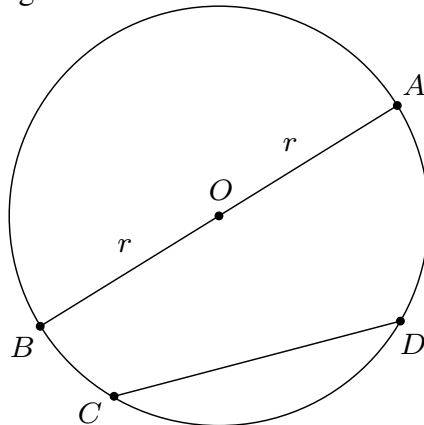


Fonte: Adaptado de [7].

Na Figura 2.43, $r = \overline{OA}$ representa o raio da circunferência de centro O .

O segmento formado por dois pontos quaisquer da circunferência recebe o nome de corda. Se uma corda passa pelo centro ela é chamada de diâmetro e seu comprimento é o dobro do raio.

Figura 2.44: Circunferência: cordas.



Fonte: Adaptado de [7].

Na Figura 2.44, AB e CD são cordas: segmentos cujos extremos são pontos da circunferência. A primeira delas recebe a denominação de diâmetro, pois passa pelo centro e sua medida é o dobro do comprimento do raio, ou seja: $\overline{AB} = 2r$.

A união da circunferência e sua região interior é denominada círculo.

Em [8, p. 203, Definição 5.19], define-se: “o número real π como a área de um círculo de raio 1”.

A partir desta definição e fazendo algumas adequações, chega-se a fórmula para área A de um círculo de raio r , dada por:

$$A = \pi r^2.$$

Já [7, p. 282, Propriedade 3], define o número real π como sendo a razão entre o comprimento e o diâmetro de um círculo. De modo equivalente, o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por

$$C = 2\pi r.$$

Exemplo 9. Dada uma circunferência de raio 2 cm, temos que

$$A = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ cm}^2 \text{ e } C = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \text{ cm}$$

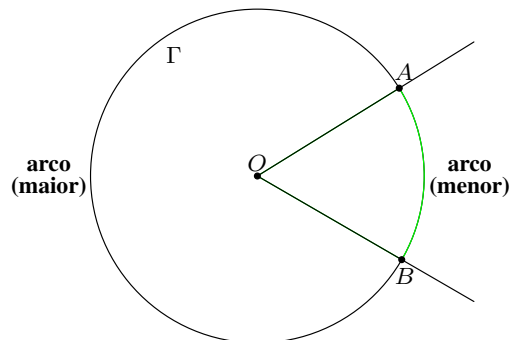
Essas duas formas não são as únicas maneiras de definir o valor de π . Além delas podemos obter tal resultado por meio do Método Monte Carlo que se vale de um modelo estatístico de amostragem aleatória. O valor de π também pode ser obtido através de séries infinitas, o primeiro a fazer isso foi o francês François Viète (1540 – 1603); depois John Wallis (1616 – 1703), Leibniz (1646 – 1716) e Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) também estabeleceram seus métodos. Ainda é possível exprimir o valor de π por meio do Cálculo Numérico, como no

Método de Newton-Raphson; pelo Algoritmo de Gauss-Legendre; e pelo Método de cálculo isolado das decimais.

2.7.1 Arco de circunferência

Sejam A e B pontos de uma circunferência Γ de centro O , de modo que A e B não determinem um diâmetro da circunferência.

Figura 2.45: Arco de circunferência.



Fonte: Adaptado de [7].

Na Figura 2.45, temos que

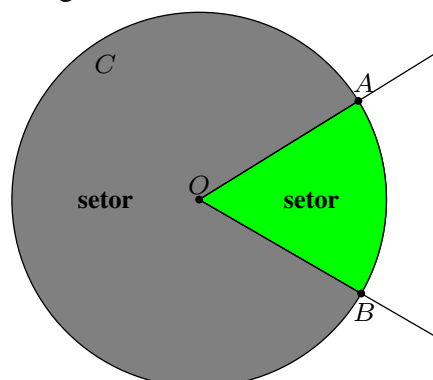
- i) **arco menor** \widehat{AB} : região sobre a circunferência delimita pelos pontos A e B , que estão no interior do ângulo $A\hat{O}B$;
- ii) **arco maior** \widehat{AB} : região sobre a circunferência delimita pelos pontos A e B , que estão no exterior do ângulo $A\hat{O}B$.

Sempre que vamos representar um arco de extremidades A e B , denotamos por \widehat{AB} .

2.7.2 Setor circular

Sejam A e B pontos da circunferência de um círculo C de centro O , de modo que A e B não determinem um diâmetro da circunferência.

Figura 2.46: Setor circular.



Fonte: Adaptado de [7].

Na Figura 2.46, temos que

- i) **setor circular menor** AOB : região do círculo delimita pelos raios \overline{OA} e \overline{OB} e pelo arco menor \widehat{AB} ;
- ii) **setor circular maior** AOB : região do círculo delimita pelos raios \overline{OA} e \overline{OB} e pelo arco maior \widehat{AB} .

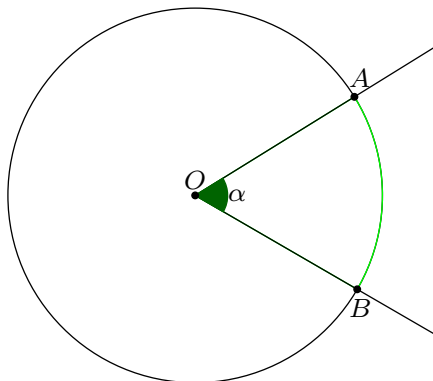
2.7.3 Ângulos na circunferência

Na circunferência, temos dois tipo especiais de ângulos determinados por arcos. Estes ângulos dependem da posição do vértice.

2.7.3.1 Ângulo central

Chamamos de ângulo central, aquele que possui vértice no centro da circunferência.

Figura 2.47: Ângulo central.



Fonte: Adaptado de [7].

Na Figura 2.47 $\widehat{AOB} = \alpha$ é ângulo central da circunferência de centro O .

Quando o ângulo central \widehat{AOB} determina em uma circunferência de centro O um arco \widehat{AB} , dizemos que \widehat{AB} é o arco correspondente ao ângulo \widehat{AOB} .

A partir da medida do ângulo central, podemos determinar o comprimento do arco e a área do setor circular: seja α a medida em graus² do ângulo central correspondente a um arco e/ou a um setor circular.

Como um arco completo de circunferência mede 360° e sabendo que o comprimento da circunferência de raio r vale $2\pi r$ unidades de comprimento (u. c.), por proporcionalidade, temos

$$\frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{C_{\text{arco}}}{\alpha} \implies C_{\text{arco}} = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ} \text{ u. c.} \quad (2.22)$$

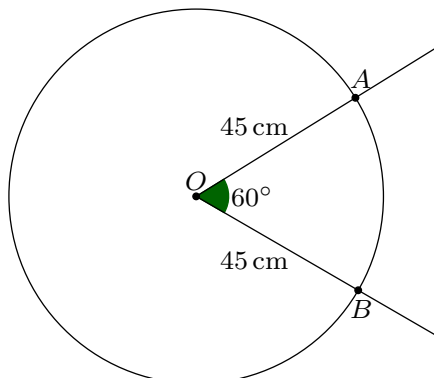
²A medida de um ângulo também pode ser dada em radianos, onde um radiano equivale a 180° . Notação: $1\pi \text{ rad} = 180^\circ$.

Já a área do círculo correspondente vale πr^2 unidades de área (u. a.), assim temos

$$\frac{\pi r^2}{360^\circ} = \frac{A_{\text{setor}}}{\alpha} \implies A_{\text{setor}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} \text{ u. a.} \quad (2.23)$$

Exemplo 10. Determinar o comprimento do arco e a área do setor circular, cujo ângulo central é 60° e o raio é 45 cm, conforme a Figura 2.48.

Figura 2.48: Comprimento do arco e área do setor circular, exemplo.



Fonte: O autor.

Aplicando (2.22) e (2.23), temos

$$C_{\text{arco}} = \frac{\pi \cdot 45 \text{ cm} \cdot 60^\circ}{180^\circ} = 15\pi \text{ cm} \quad \text{e} \quad A_{\text{setor}} = \frac{\pi \cdot (45 \text{ cm})^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} = 337,5\pi \text{ cm}^2. \quad (2.24)$$

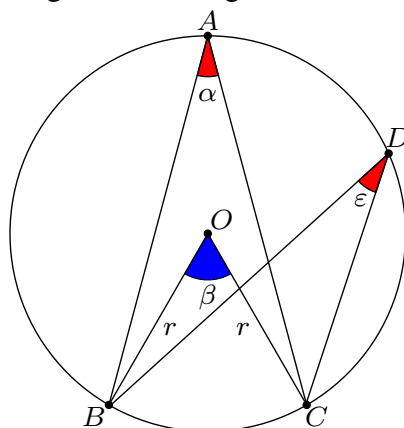
2.7.3.2 Ângulo inscrito

Chamamos de ângulo inscrito, aquele que possui vértice em um ponto pertencente à circunferência e seus lados são cordas.

Na Figura 2.49, temos que

- ✓ $\widehat{BAC} = \alpha$ é um ângulo inscrito que contém o centro O ;
- ✓ $\widehat{BDC} = \varepsilon$ é um ângulo inscrito que não contém o centro O .

Figura 2.49: Ângulo inscrito.



Fonte: Adaptado de [7].

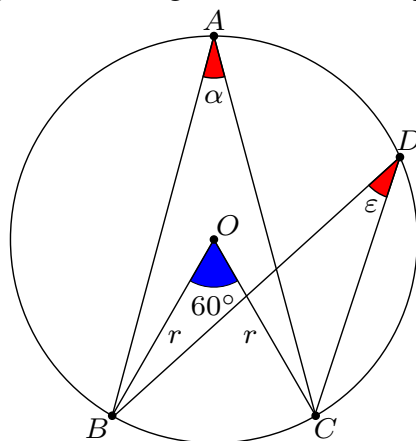
Teorema 4. Se AB e CD são cordas de um círculo de centro O , então a medida do ângulo central $\widehat{B\hat{O}C}$ é o dobro do ângulo inscrito $\widehat{B\hat{A}C}$.

Demonstração: Consultar [8, p. 87-88, Proposição 3.19].

□

Exemplo 11. Determinar o valor de α e ε na Figura 2.50, sendo $\widehat{B\hat{O}C}$ ângulo central.

Figura 2.50: Ângulo inscrito, exemplo.



Fonte: O autor.

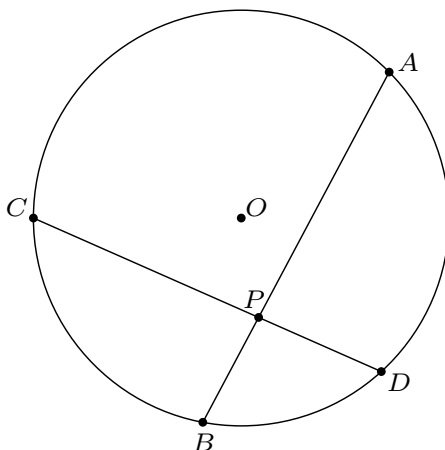
Note que α e ε são ângulos inscritos. Portanto,

$$\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ = \varepsilon.$$

Teorema 5 (Teorema das Cordas). Sejam AB e CD cordas de uma circunferência centrada em O , que se cruzam num ponto P , conforme a Figura 2.51. Temos que:

$$\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

Figura 2.51: Teorema das Cordas.



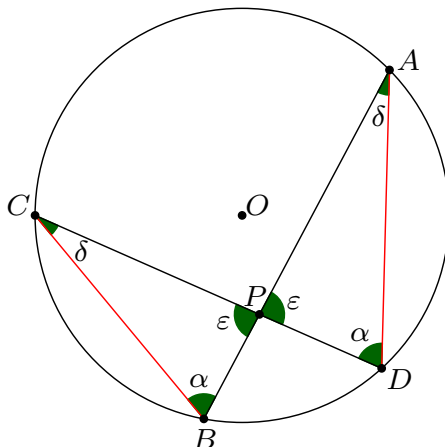
Fonte: Adaptado de [8].

Demonstração: Na partir da Figura 2.51, consideremos \overline{BC} e \overline{AD} . Em seguida, observe que

- i) $\widehat{BPC} = \widehat{APD}$, pois são opostos pelo vértice;
- ii) $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$, visto que são ângulos inscritos do mesmo arco \widehat{BD} ;
- iii) $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$, visto que são ângulos inscritos do mesmo arco \widehat{CA} .

O que resulta na Figura 2.52, a seguir.

Figura 2.52: Representação de \overline{BC} e \overline{AD} .



Fonte: Adaptado de [8].

Note que os triângulos BPC e DPA são semelhantes, pelo caso AA, Proposição 5.

Portanto,

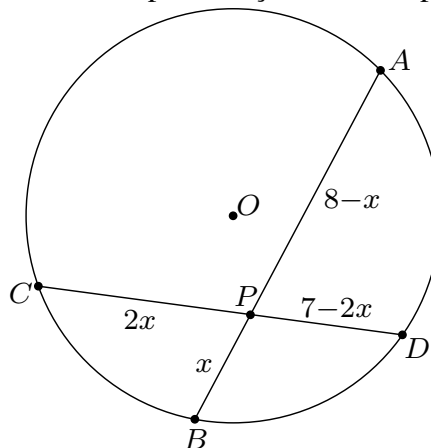
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} \implies \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

□

Exemplo 12. Sejam AB e CD cordas de uma circunferência, que se cruzam em um ponto P . Sabe-se que $\overline{AB} = 8$ e $\overline{CD} = 7$. Determinar \overline{BP} , sabendo que $\overline{CP} = 2 \cdot \overline{BP}$.

Seja $x = \overline{BP}$, a partir do enunciado podemos esboçar a Figura 2.53.

Figura 2.53: Representação do Exemplo 12.



Fonte: O autor.

Aplicando o Teorema 5, temos

$$2x \cdot (7 - 2x) = x \cdot (8 - x) \implies 14x - 4x^2 = 8x - x^2$$

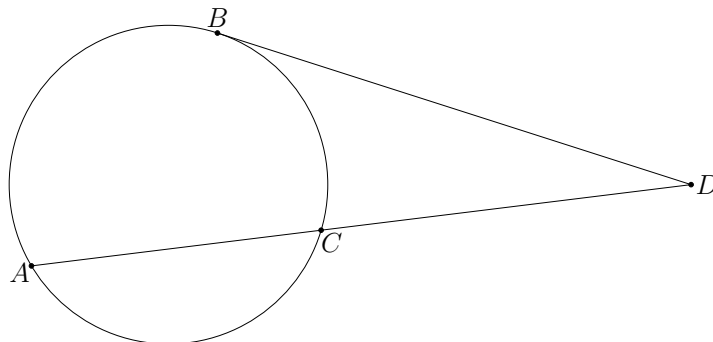
$$\implies 3x^2 - 6x = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \text{ (não serve)} \\ x = 2 \end{cases}$$

Portanto, $\overline{PB} = 2$.

Teorema 6 (Euclides). *Seja D um ponto exterior a uma circunferência Γ . A partir de D tracemos dois segmentos, o primeiro tangente³ à Γ no ponto B e o segundo secante à Γ , interceptando a circunferência nos pontos A e C , com $B \notin AC$. Teremos que*

$$\overline{BD}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{AD}.$$

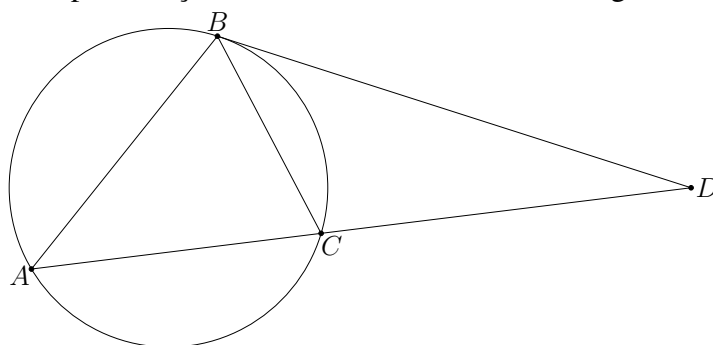
Figura 2.54: Representação da circunferência Γ e dos segmentos BD , AD e CD .



Fonte: O autor.

Demonstração: A partir da Figura 2.54 tracemos os segmentos BC e AB , conforme a Figura 2.55.

Figura 2.55: Representação da circunferência Γ com os segmentos BC e AB .



Fonte: O autor.

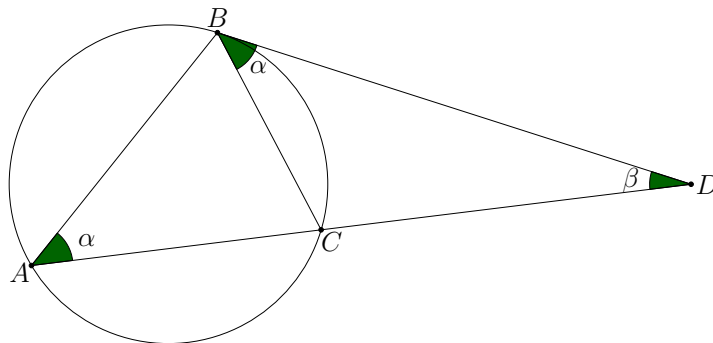
Tomemos os triângulos ABD e BCD . Perceba ainda que o arco \widehat{BC} determina dois ângulos inscritos \widehat{CAB} e \widehat{CBD} . Pelo Teorema 4, temos:

³Dadas uma reta e uma circunferência, elas serão: tangentes se intersectam em um único ponto; e secantes se intersectam em dois pontos distintos.

$$D\widehat{A}B = C\widehat{A}B = \frac{\widehat{BC}}{2} = C\widehat{B}D.$$

Além disso, o ângulo \widehat{D} é comum aos dois triângulos. Desse modo, os triângulos ABD e BCD possuem dois pares de ângulos congruentes, conforme a Figura 2.56

Figura 2.56: Representação da circunferência Γ com os ângulos α e β .



Fonte: O autor.

Desse modo, pelo caso AA , Proposição 5, temos

$$\triangle ABD \sim \triangle BCD.$$

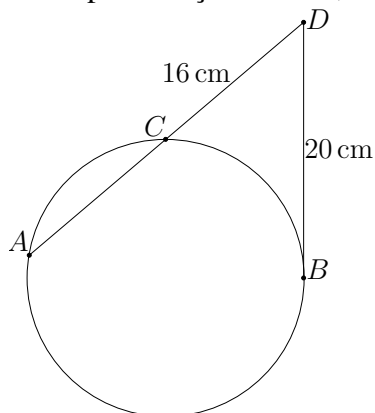
Portanto,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \implies \overline{BD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{CD} \quad (2.25)$$

□

Exemplo 13. Determinar \overline{AD} , sabendo que \overline{BD} é tangente ao círculo da Figura 2.57

Figura 2.57: Representação de \overline{BD} , \overline{AD} e \overline{CD} .



Fonte: O autor.

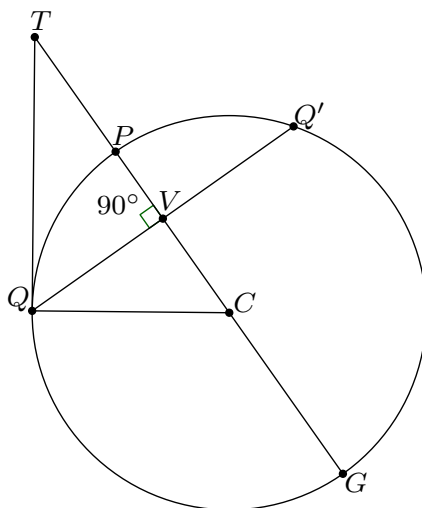
Aplicando o Teorema 6, temos

$$20^2 = 16 \cdot \overline{AD} \implies \overline{AD} = 25 \text{ cm}.$$

Teorema 7 (Apolônio). *Consideremos uma circunferência Γ de centro C e diâmetro GP . Seja QQ' uma corda perpendicular à GP no ponto V e T um ponto exterior que determina o prolongamento de GP e a tangente TQ , conforme a Figura 2.58. Temos que*

$$\overline{CP}^2 = \overline{CV} \cdot \overline{CT}.$$

Figura 2.58: Representação da circunferência de raio CG .



Fonte: O autor.

Demonstração: De início, pelo fato de QT ser tangente à Γ , temos que

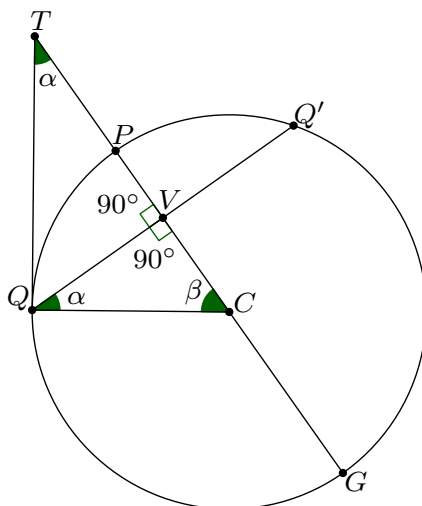
$$TQ \perp CQ.$$

Agora consideremos os triângulos TQC e QVC . Perceba que esses triângulos possuem dois pares de ângulos congruentes entre si. Desse modo, temos

$$T\hat{Q}C = Q\hat{V}C \text{ e } T\hat{C}Q = V\hat{C}Q.$$

Conforme a Figura 2.59, podemos perceber as relações entre os ângulos.

Figura 2.59: Representação dos triângulos TQC e QVC .



Fonte: O autor.

Pelo caso *AA*, Proposição 5, temos que

$$\Delta TQC \sim \Delta QVC.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{CT}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CV}} \implies \overline{CQ}^2 = \overline{CV} \cdot \overline{CT}.$$

Como $\overline{CP} = \overline{CQ}$, temos que

$$\overline{CP}^2 = \overline{CV} \cdot \overline{CT}.$$

□

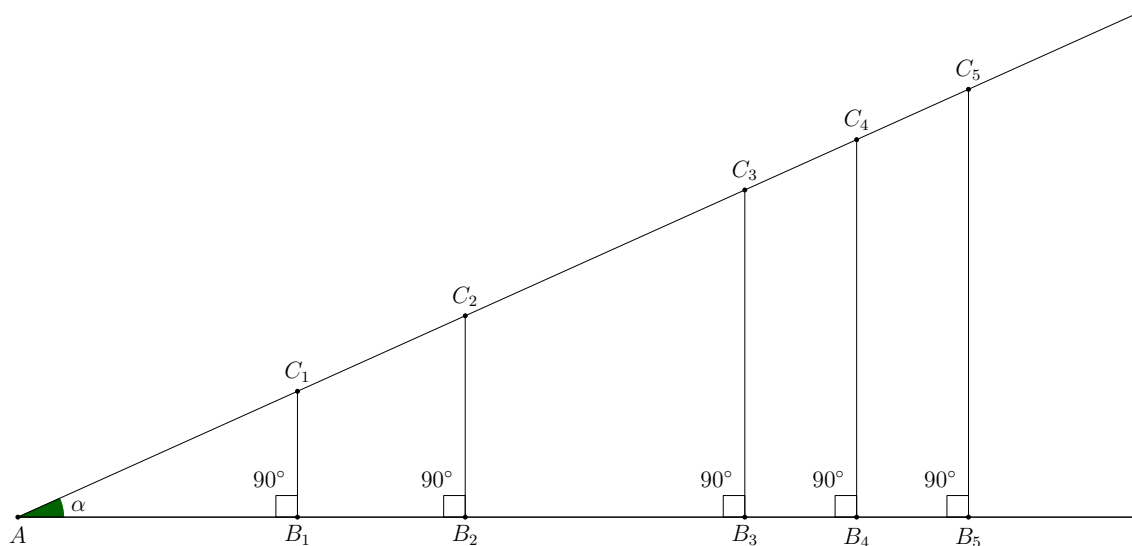
2.8 Trigonometria no triângulo Retângulo

Nesta seção são apresentados resultados que são diretamente aplicados nos Capítulos 3 e 5, por exemplo nas Seções 5.1 e 5.3 são usadas as relações trigonométricas seno e cosseno para se estabelecer a distância relativa entre a Terra e a Lua, métodos de Aristarco e Hiparco; já na Seção 3.3 é explorada a relação trigonométrica tangente para o estudo do conceito de paralaxe.

Seja α um ângulo agudo⁴ de vértice A . Marquemos sobre um de seus lados os pontos

$$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, \dots$$

Figura 2.60: Triângulos Retângulos.



Fonte: Adaptado de [10].

⁴Ângulo cuja medida é menor que 90° .

Em seguida, a partir destes pontos tracemos

$$B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4, B_5C_5, \dots$$

perpendiculares ao outro lado, conforme a Figura 2.60.

A partir da Figura 2.60, consideremos os triângulos

$$C_1AB_1, C_2AB_2, C_3AB_3, C_4AB_4, C_5AB_5, \dots$$

Note que pelo caso *LAL*, Proposição 6, esse triângulos são todos semelhantes entre si. Desse modo, temos que

✓ o cateto oposto à α e a hipotenusa são diretamente proporcionais

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AC_4}} = \frac{\overline{B_5C_5}}{\overline{AC_5}} = \dots \quad (2.26)$$

✓ o cateto adjacente à α e a hipotenusa são diretamente proporcionais

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{AB_4}}{\overline{AC_4}} = \frac{\overline{AB_5}}{\overline{AC_5}} = \dots \quad (2.27)$$

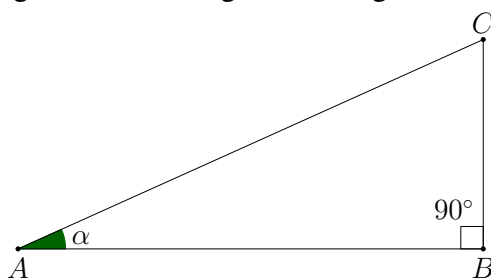
✓ o cateto oposto e o cateto adjacente à α são diretamente proporcionais

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AB_4}} = \frac{\overline{B_5C_5}}{\overline{AB_5}} = \dots \quad (2.28)$$

De (2.26), (2.27) e (2.28) podemos observar que as relações estabelecidas dependem exclusivamente da medida do ângulo α , dado que as razões estabelecem uma mesma proporção.

Agora consideremos o triângulo retângulo da Figura 2.61.

Figura 2.61: Triângulos Retângulo ABC .



Fonte: Adaptado de [10].

Considerando o ângulo α , definimos as relações a seguir:

i) **seno**: razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa. Representa-se:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}. \quad (2.29)$$

ii) **cosseno**: razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa. Representa-se:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad (2.30)$$

iii) **tangente**: razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo. Representa-se:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}. \quad (2.31)$$

Perceba que tais relações, estabelecidas por meio da proporção, dependem apenas da medida do ângulo α .

2.8.1 Relações entre seno, cosseno e tangente

Proposição 8. *Considerando o triângulo retângulo da Figura 2.61, temos que*

i) $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$, conhecida como relação fundamental;

ii) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$.

Demonstração:

i) Aplicando 2.29 e 2.30, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha &= \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \right)^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \right)^2 \\ &= \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \\ &= \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Observando a Figura 2.61, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2. \quad (2.33)$$

De (2.32) e (2.33), temos que

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AC}^2} = 1. \quad (2.34)$$

ii) Aplicando 2.29 e 2.30, temos que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad (2.35)$$

De (2.31) e (2.35), temos que

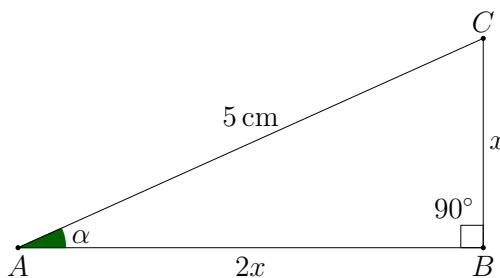
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \overline{AC} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \overline{AC} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \overline{BC} \quad (2.36)$$

□

Exemplo 14. Em um triângulo retângulo de hipotenusa 5 cm o cateto adjacente, a um dos ângulos agudos α , é o dobro do cateto oposto. Determinar o valor de $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$.

Seja x a medida do cateto oposto à α . Assim, o cateto adjacente mede $2x$.

Figura 2.62: Triângulos Retângulo ABC de hipotenusa medindo 5 cm.



Fonte: Adaptado de [10].

Da definição de seno e cosseno, temos

$$\sin \alpha = \frac{x}{5} \text{ e } \cos \alpha = \frac{2x}{5}.$$

Pela relação fundamental, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{2x}{5}\right)^2 = 1 &\implies \frac{x^2}{25} + \frac{4x^2}{25} = 1 \\ &\implies \frac{5x^2}{25} = 1 \\ &\implies x^2 = 5 \implies \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \text{ (não serve } x > 0.) \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{x}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}; \\ \operatorname{cos} \alpha &= \frac{2x}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

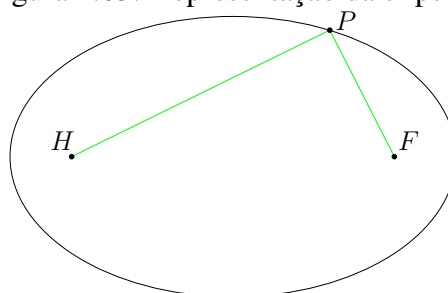
2.9 Elipse

Nesta Seção é apresentado o conceito de elipse e alguns resultados a respeito, que são diretamente aplicados no Capítulo 6. Na Seção 6.3, por exemplo, é explorado o conceito de área da elipse para estabelecer a relação entre órbita circular e elíptica; já na Seção 6.2 aplica-se os conceitos iniciais e propriedades de elipse para deduzir a primeira Lei de Kepler.

Chamamos de Elipse o conjunto ξ de todos os pontos pertencentes a um plano cuja a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

Consideremos sobre um plano dois pontos distintos H e F de modo que a distância $d(F, H) = 2c$ e $2a > 2c$, em que a e c são números reais positivos.

Figura 2.63: Representação da elipse ξ .



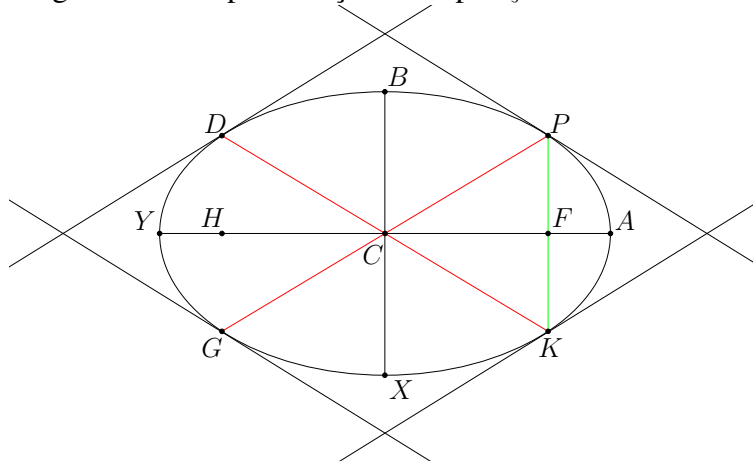
Fonte: O autor.

A partir da Figura 2.63 e considerando $2a$ a constante da definição de elipse, teremos que P é um ponto pertencente a essa elipse se, e somente se,

$$d(P, H) + d(P, F) = 2a.$$

Sejam F e H focos de uma elipse ξ . Tomemos as retas tangentes passando pelos pontos da elipse G, P, K e D , conforme a Figura 2.64.

Figura 2.64: Representação da elipse ξ e seus elementos.



Fonte: O autor.

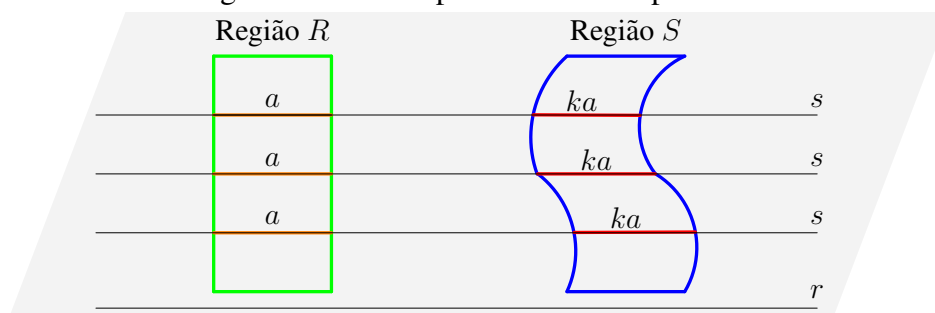
Na Figura 2.64, temos:

- i) C é o centro de ξ e $\overline{HC} = \overline{FC}$.
- ii) A, X, Y e B são os vértices de ξ .
- iii) GP e KD são os diâmetros de ξ e contêm C .
- iv) YA e XB são chamados eixo maior e eixo menor da elipse, respectivamente.
- v) CA e CB são ditos semi eixo maior e semi eixo menor da elipse, respectivamente.
- vi) $\overline{HF} = \overline{HC} + \overline{FC}$ é chamada distância focal.
- vii) $\overline{YA} = \overline{PH} + \overline{PF} = k$, em que P é um ponto de ξ e k é constante.
- viii) Se KD for paralelo as tangentes que passam por G e P e se GP for paralelo as tangentes que passam em K e D , então KD e GP são ditos diâmetros conjugados.
- ix) KP denomina-se *Latus Retum* da elipse, em que $BX \parallel KP$.

O Teorema a seguir foi adaptado de [12, p. 2] e será usado para demonstrar a Proposição 9.

Teorema 8 (Princípio de Cavaliere para áreas). *Sejam R e S duas regiões limitadas em um plano, e seja uma reta r desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r , as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante, conforme a Figura 2.65. Então a razão entre as áreas de R e S é essa mesma constante.*

Figura 2.65: Princípio de Cavaliere para áreas



Fonte: O autor.

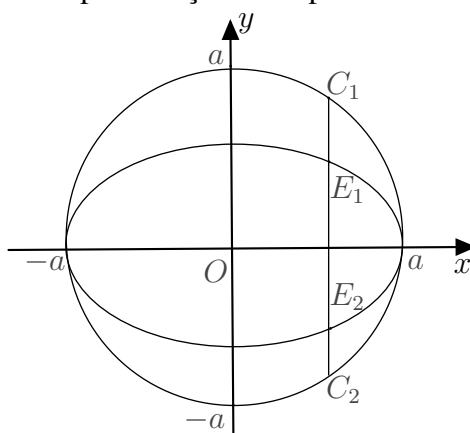
Demonstração: Consultar [12, p. 2, Princípio de Cavaliere para áreas].

□

Proposição 9. Se A é a área de uma elipse de semieixos a e b , então $A = \pi ab$.

Demonstração: Consideremos, em um sistema de coordenadas O_{xy} , e suponhamos $a \geq b > 0$ e $x \geq 0$, onde região semi-elíptica (metade da elipse) R é dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ⁵; e a região semicircular S é dada por $x^2 + y^2 \leq a^2$ ⁶; e a região semicircular S' é dada por $x^2 + y^2 \leq a^2$, conforme a Figura 2.66.

Figura 2.66: Representação da elipse de semieixos a e b .



Fonte: O autor.

Perceba que para $0 \leq x \leq b$, existem y_1 e y_2 na circunferência, tais que:

$$y_1 = -\sqrt{a^2 - x^2} \text{ e } y_2 = \sqrt{a^2 - x^2} \implies y_2 - y_1 = 2\sqrt{a^2 - x^2} \quad (2.37)$$

Do mesmo modo, para $0 \leq x \leq b$, existem y'_1 e y'_2 na elipse, tais que:

$$\begin{aligned} y'_1 = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ e } y'_2 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} &\implies y'_2 - y'_1 = 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \\ &\implies y'_2 - y'_1 = \frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

De (2.37) e (2.38), temos

$$\frac{y'_2 - y'_1}{y_2 - y_1} = \frac{\frac{2b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}.$$

⁵No sistema de coordenadas cartesianas O_{xy} a equação de uma elipse, de centro (x_0, y_0) e de eixo maior a e eixo menor b , é dada por $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

⁶No sistema de coordenadas cartesianas O_{xy} a equação de uma circunferência, de centro (x_0, y_0) e de raio a , é dada por $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$.

Pelo Teorema 8, temos

$$\frac{A_R}{A_S} = \frac{b}{a} \implies \frac{A_R}{\frac{\pi a^2}{2}} = \frac{b}{a} \implies A_R = \frac{\pi a^2 b}{2a} = \frac{\pi ab}{2}.$$

Duplicando esse resultado, temos

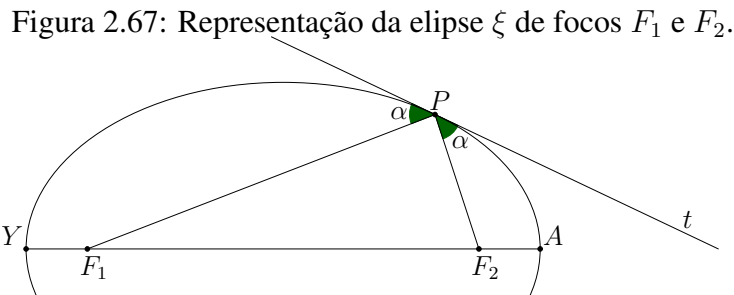
$$A_{\text{elipse}} = 2 \cdot \frac{\pi ab}{2} = \pi ab.$$

□

Exemplo 15. Dada uma elipse de semieixos 4 cm e 5 cm, temos que sua área é dada por

$$A_{\text{elipse}} = 4 \cdot 5 \cdot \pi = 20\pi \text{ cm}^2$$

Propriedade 1 (Propriedade refletora dos focos). Dada uma elipse ξ de focos F_1 e F_2 , se t é uma reta tangente a ξ no ponto P , então o ângulo formado por t e PF_1 é igual ao ângulo formado por t e PF_2 , conforme a Figura 2.67.



Fonte: Adaptado de [11].

Demonstração: Consultar [11, Propriedade Refletora da Elipse].

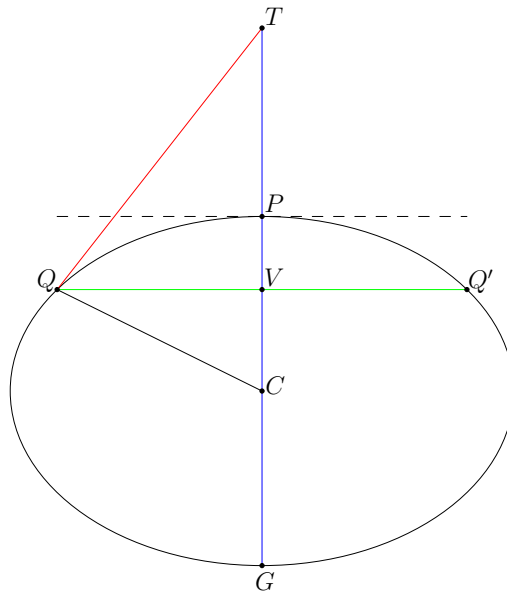
□

De [13] e [16, p. 68, Proposição XVII], temos o seguinte teorema.

Teorema 9 (Apolônio). Consideremos uma elipse ξ de centro C e diâmetro GP . Seja QQ' uma corda paralela à tangente que passa em P e que cruza GP em V . Seja também T um ponto exterior à ξ que determina o prolongamento de GP e a tangente TQ , conforme a Figura 2.68. Temos

$$\overline{CP}^2 = \overline{CV} \cdot \overline{CT}.$$

Figura 2.68: Representação da elipse de diâmetro GP .



Fonte: Adaptado de [13] e [16].

Demonstração: Consultar [16, p. 68, Proposição XVII].

□

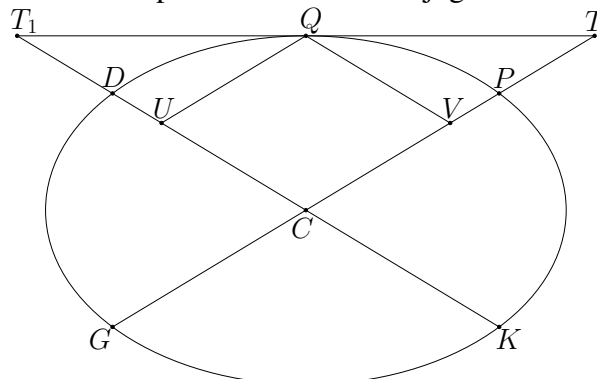
De [13] e [16, p. 72, Proposição XX], temos o seguinte Teorema.

Teorema 10 (Primeiro Teorema das Cordas para Elipse). *Sejam PG , KD diâmetros conjugados de uma elipse, e QV paralelo à KD , deslizando de modo que Q coincida com D e V com C . Temos que*

$$\frac{\overline{QV}^2}{\overline{PV} \cdot \overline{VG}} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CP}^2}.$$

Demonstração: Consideremos os pontos T e T_1 , exteriores à elipse, nos quais resultam os prolongamentos de GP e KD , de modo que T_1T tangencie a elipse no ponto Q , conforme a Figura 2.69.

Figura 2.69: Elipse de diâmetros conjugados GP e DK .



Fonte: Adaptado de [13] e [16].

Além disso, seja U um ponto de modo que

$$\overline{QU} // \overline{GP} \text{ e } \overline{KD} \cap \overline{GP} = \{U\}.$$

Como $\overline{QU} // \overline{GP}$ e $\overline{QV} // \overline{KD}$, temos que $CVQU$ é um paralelogramo. Desse modo, temos que

$$\overline{CU} = \overline{QV} \text{ e } \overline{CV} = \overline{QU} \quad (2.39)$$

Pelo Teorema 9, temos

$$\overline{CP}^2 = \overline{CV} \cdot \overline{CT} \text{ e } \overline{CD}^2 = \overline{CU} \cdot \overline{CT}_1 \quad (2.40)$$

De (2.39) e (2.40), temos

$$\begin{cases} \overline{CP}^2 = \overline{CV} \cdot \overline{CT} = \overline{QU} \cdot \overline{CT} \\ \overline{CD}^2 = \overline{CU} \cdot \overline{CT}_1 = \overline{QV} \cdot \overline{CT}_1 \end{cases} \quad (2.41)$$

Desse modo,

$$\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CP}^2} = \frac{\overline{QV} \cdot \overline{CT}_1}{\overline{CV} \cdot \overline{CT}}$$

Note que

$$U\widehat{Q}T_1 = V\widehat{Q}T \text{ e } T_1\widehat{U}Q = T\widehat{V}Q$$

Desse modo, pelo caso *ALA*, Proposição 2, temos

$$\Delta QUT_1 \equiv \Delta QTV.$$

Assim,

$$U\widehat{T}_1Q = V\widehat{T}Q \quad (2.42)$$

Como $CUQV$ é um paralelogramo

$$Q\widehat{U}C = Q\widehat{V}C \quad (2.43)$$

De (2.42) e (2.43), temos

$$T_1T // UV \quad (2.44)$$

Assim, Teorema 3,

$$\Delta T_1CT \sim \Delta UCV \quad (2.45)$$

De (2.44) e (2.45), caso AA, Proposição 5, temos

$$\Delta CT_1T \sim \Delta VQT$$

Portanto,

$$\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CP}^2} = \frac{\overline{QV} \cdot \overline{CT_1}}{\overline{CV} \cdot \overline{CT}} = \frac{\overline{QV} \cdot \overline{QV}}{\overline{CV} \cdot \overline{VT}} \quad (2.46)$$

Perceba também que

$$\begin{aligned} \overline{CV} \cdot \overline{VT} &= \overline{CV} \cdot (\overline{CT} - \overline{CV}) \\ &= \overline{CV} \cdot \overline{CT} - \overline{CV}^2 \\ &= \overline{CP}^2 - \overline{CV}^2 \\ &= (\overline{CP} + \overline{CV}) \cdot (\overline{CP} - \overline{CV}) \\ &= \overline{VP} \cdot \overline{GP} \end{aligned} \quad (2.47)$$

De (2.46) e (2.47), temos que

$$\frac{\overline{CD}^2}{\overline{CP}^2} = \frac{\overline{QV} \cdot \overline{QV}}{\overline{CV} \cdot \overline{VT}} \implies \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CP}^2} = \frac{\overline{QV}^2}{\overline{VP} \cdot \overline{VG}} \quad (2.48)$$

□

De [13] e [15, p. 256, Lema 12], temos o Lema a seguir.

Lema 1. *Os paralelogramos circunscritos sobre os diâmetros conjugados de uma elipse são todos congruentes.*

Demonstração: Consultar [13] e [15, p. 256, Lema 12].

□

De [13] e [16, p. 74, Proposição XXIV], temos o seguinte Teorema.

Teorema 11. *Seja ξ uma elipse de semieixo maior a e semieixo menor b . Temos que a área do paralelogramo circunscrito à ξ , cujos lados tocam os diâmetros conjugados, é $4ab$.*

Demonstração: Basta considerar o Lema 1, que diz que todos paralelogramos circunscritos, cujos lados tocam os diâmetros conjugados têm áreas iguais. Assim se pegarmos o caso particular

do retângulo de base $2a$ e altura $2b$, teremos

$$A = 4ab.$$

Como todos têm mesma área, o resultado segue. □

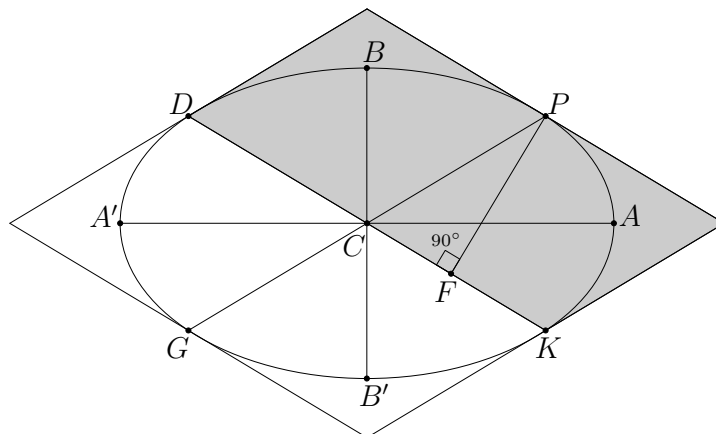
De [13] e [14, p. 74, Proposição X, Problema V], temos o seguinte Teorema.

Teorema 12 (Segundo Teorema das Cordas para Elipse). *Sejam PG e DK diâmetros conjugados de uma elipse ξ , de semieixo maior $\overline{AC} = a$ e semieixo menor $\overline{BC} = b$. Baixemos a perpendicular de P até o segmento DK , interceptando DK em F . Teremos que*

$$\overline{CD} \cdot \overline{PF} = ab = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = k,$$

em que k é constante.

Figura 2.70: Elipse com paralelogramo de base \overline{DK} e altura \overline{PF} .



Fonte: Adaptado de [13] e [14].

Demonstração: Pelo Teorema 11, temos que

$$\overline{DK} \cdot \overline{PF} = 2ab \tag{2.49}$$

Note que

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{DK} = \overline{CD} \tag{2.50}$$

De (2.49) e (2.50), temos que

$$\overline{CD} \cdot \overline{PF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DK} \cdot \overline{PF} = \frac{1}{2} \cdot 2ab = ab \tag{2.51}$$

Temos ainda que

$$\overline{CA} = a \text{ e } \overline{CB} = b \quad (2.52)$$

De (2.51) e (2.52), temos que

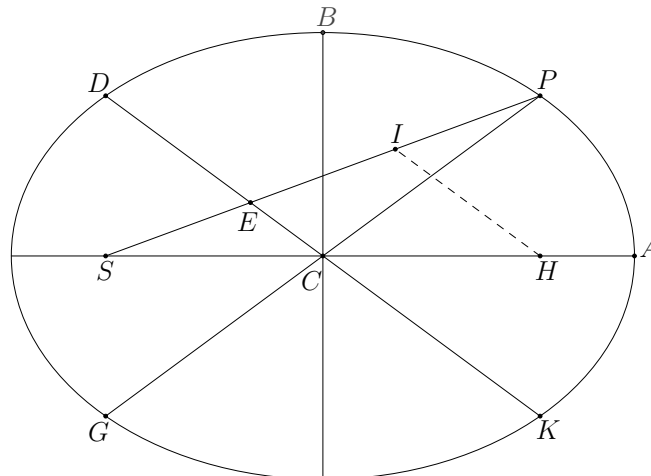
$$\overline{CD} \cdot \overline{PF} = ab = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = k \quad (2.53)$$

□

O Teorema a seguir foi adaptado de [13]; [15] e [14, p. 79, Proposição XI, Problema VI].

Teorema 13. *Sejam PG e DK diâmetros conjugados de uma elipse ξ de focus S e H , \overline{AC} o semieixo maior e \overline{BC} o semieixo menor. Além disso, seja P um ponto de ξ , tal que PS cruza o eixo menor e DK , conforme a Figura 2.71 e E é a interseção de DK e PS . Teremos, então que $\overline{EP} = \overline{AC}$.*

Figura 2.71: Representação de HI paralelo à KD na elipse ξ .



Fonte: Adaptado de [13] e [14].

Demonstração: Note que

$$\overline{EI} + \overline{PI} = \overline{EP} \quad (2.54)$$

Além disso,

$$\overline{HI} \parallel \overline{EC} \implies \begin{cases} \widehat{SEC} = \widehat{SIH} \\ \frac{\overline{IH}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{SI}}{\overline{SE}} \end{cases}$$

Portanto, pelo caso LAL , Proposição 6, temos

$$\Delta SEC \sim \Delta SIH$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{SE}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SH}} = \frac{1}{2} &\implies \overline{SE} = 2 \cdot \overline{SI} = \overline{SI} + \overline{SI} \\ &\implies \overline{ES} = \overline{EI} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} 2\overline{EP} &= \overline{EP} + \overline{EP} \\ &= \overline{EI} + \overline{PI} + \overline{EI} + \overline{PI} \\ &= \underbrace{\overline{ES} + \overline{EI} + \overline{PI} + \overline{PI}}_{\overline{PS}} \\ &= \overline{PS} + \overline{PI} \end{aligned}$$

Portanto,

$$2\overline{EP} = \overline{PS} + \overline{PI} \quad (2.56)$$

Pelo fato dos triângulos SEC e SIH serem semelhantes

$$IH \parallel EC \subset DK \quad (2.57)$$

Como DK é um diâmetro conjugado,

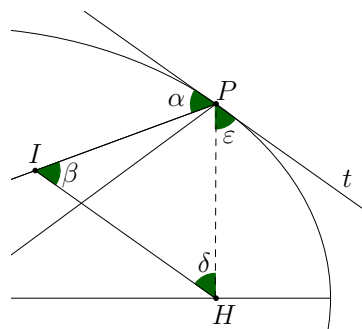
$$DK \parallel t \quad (2.58)$$

De (2.57) e (2.58), temos que

$$t \parallel HI.$$

Agora considere na Figura 2.72, o triângulo PHI e a reta tangente t , paralela à HI .

Figura 2.72: Representação do triângulo PHI .



Fonte: Adaptado de [13].

Note que

$$PI \text{ e } PH \text{ são transversais à } IH // t$$

Desse modo

- ✓ $\alpha = \beta$, alternos internos;
- ✓ $\varepsilon = \delta$, alternos internos;
- ✓ $\varepsilon = \alpha$, reflexões dos focos na tangente, Propriedade 1.

Assim,

$$\beta = \alpha = \varepsilon = \delta$$

Logo, o triângulo PIH é isósceles. Portanto,

$$\overline{PI} = \overline{PH}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} 2\overline{AC} &= \overline{AC} + \overline{AC} \\ &= \overline{PS} + \overline{PH} \\ &= \overline{PS} + \overline{PI} \end{aligned}$$

Portanto,

$$2\overline{AC} = \overline{PS} + \overline{PI} \tag{2.59}$$

De (2.56) e (2.59)

$$2\overline{AC} = 2\overline{EP} \implies \overline{AC} = \overline{EP} \tag{2.60}$$

□

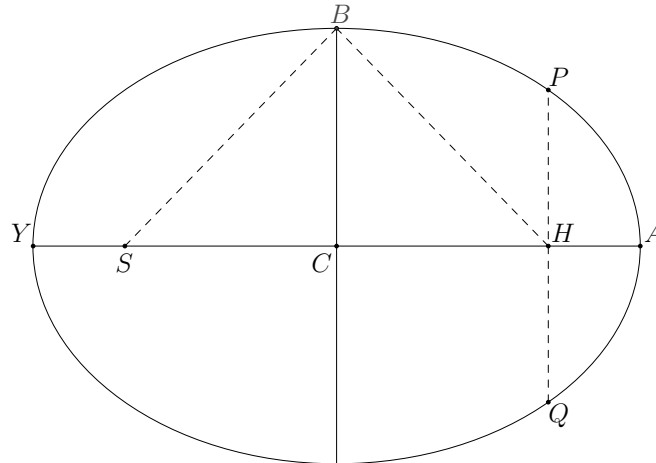
De [13] e [14, p. 74, Proposição X, Problema V], temos o Teorema a seguir.

Teorema 14 (Teorema do Latus Retum). *Sejam $a = \overline{AC}$ o semieixo maior e $b = \overline{BC}$ semieixo menor de uma elipse ξ . Temos então, que o comprimento do latus reto é dado por:*

$$L = \frac{2b^2}{a} = \frac{2\overline{BC}^2}{\overline{AC}}.$$

Demonstração: De início, consideremos PQ perpendicular ao eixo maior, contendo o foco H , conforme a Figura 2.73.

Figura 2.73: Representação de PK perpendicular à AY na elipse ξ .



Fonte: Adaptado de [13] e [15].

Pelo Teorema 10, temos que

$$\frac{\overline{PH}^2}{\overline{AH} \cdot \overline{HY}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2} \implies \frac{\overline{AH} \cdot \overline{HY}}{\overline{PH}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} \quad (2.61)$$

Note que

$$\begin{aligned} \overline{BS} = \overline{BH} &\implies 2\overline{AC} = \overline{BH} + \overline{BS} \\ &= \overline{BH} + \overline{BH} \\ &= 2\overline{BH} \end{aligned}$$

Portanto,

$$2\overline{AC} = 2\overline{BH} \implies \overline{AC} = \overline{BH} \quad (2.62)$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{BC}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{BH}^2 = \overline{AC}^2.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2 \\ &= (\overline{AC} - \overline{CH}) \cdot (\overline{AC} + \overline{CH}) \\ &= \overline{AH} \cdot (\overline{AC} + \overline{CS}) \\ &= \overline{AH} \cdot \overline{AS} \\ &= \overline{AH} \cdot \overline{AY} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{BC}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AY} \quad (2.63)$$

Substituindo (2.63) em (2.61), temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AH} \cdot \overline{AY}}{\overline{PH}^2} &= \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} \implies \frac{\overline{BC}^2}{\overline{PH}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} \\ &\implies \frac{\overline{BC}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \\ &\implies \overline{BC} \cdot \overline{BC} = \overline{PH} \cdot \overline{AC} \\ &\implies \overline{PH} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Portanto,

$$L = 2 \cdot \overline{PH} = 2 \cdot \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}} \quad (2.65)$$

□

Exemplo 16. *Dada uma elipse cujos semieixos medem $a = 5$ cm e $b = 4$ cm, determine:*

a) *A área do paralelogramo circunscrito à elipse sabendo que seus lados tocam os diâmetros conjugados da elipse.*

b) *O comprimento do Latus Retum da elipse.*

Solução:

a) Seja A a área do paralelogramo. Pelo Teorema 11, temos:

$$A = 4 \cdot 4 \cdot 5 = 80 \text{ cm}^2.$$

b) Seja L o comprimento do Latus Retum. Pelo Teorema 14, temos

$$L = \frac{2 \cdot 4^2}{5} = 6,4 \text{ cm}.$$

Capítulo 3

CONCEITOS BÁSICOS DE ASTRONOMIA

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos importantes de Astronomia, desde definições básicas como universo, galáxia e planeta; como também resultados aplicados, no caso cálculo de distâncias e unidades astronômicas.

3.1 O universo

Em astronomia, denomina-se *universo*¹ tudo aquilo que existe fisicamente, a junção de espaço e tempo bem como as distintas formas de matéria e energia. Quando falamos em *universo*, por vezes, também podemos associar seu significado aos termos *mundo*, *cosmos* ou *natureza*. O universo apresenta-se de forma oscilante, uma característica pulsante, em constante expansão.

O universo é regido pelas leis físicas, e segundo a teoria do *Big bang*² teve sua origem a cerca de 13,79 bilhões anos, apresentando atualmente tamanho observável com um raio de cerca de 91 bilhões de anos luz. Como já dito, é constituído por diversas formas e combinações de matéria e energia no espaço-tempo. Tal disposição se dá nas diferentes formas representadas por galáxias, estrelas, planetas e outros astros.

3.1.1 Galáxia

Denomina-se galáxia o grupo isolado no espaço cósmico formado por estrelas, nebulosas, aglomerados, poeira e gás. As galáxias apresentam diferentes formatos entre si, porém grande parte possuem formatos mais ou menos regulares. Edwin Powell Hubble³(1889-1953) identificou

¹Do latim *universum*, derivada da contração *unvorsum*, que combina os termos *un* que significa um e *vorsum* que significa algo rodado.

²Teoria mais aceita para origem do universo, defende que este, em seu estado inicial, possui forma bastante condensada e que sofreu uma violenta expansão [17].

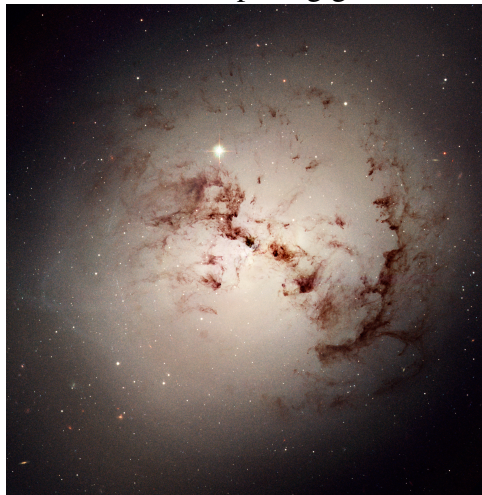
³Descobriu que muitas das nebulosas tratavam-se de sistemas estelares exteriores à nossa Via-Láctea, estabeleceu que estas galáxias estavam uniformemente distribuídas e instituiu um sistema de classificação das galáxias.

três tipos principais: elípticas, espirais e irregulares; sendo que as espirais se subdividem em dois tipos: ordinárias e barradas [18].

Segundo [19] e [17]:

- ✓ **Galáxias Elípticas:** são aquelas que possuem uma distribuição suave de luz e têm a aparência de uma elipse, formato elipsoidal. Na Figura 3.1, temos a galáxia NGC 1316, seu diâmetro é cerca de 70 milhões de anos luz.

Figura 3.1: Galáxia elíptica gigante NGC 1316.



Fonte: [20].

- ✓ **Galáxias Espirais:** são aquelas que possuem formato de disco achatado, com estrelas formando uma estrutura espiral sobre ele. Se apresenta, a partir do núcleo, duas regiões em forma de barra, denomina-se galáxia espiral barrada; caso não apresente essa barra são ditas ordinárias ou normais.

Figura 3.2: Galáxia espiral barrada, NGC 1300.



Fonte: [21].

Figura 3.3: Galáxia espiral não barrada, a Galáxia do Rodamoinho.



Fonte: [22]

Na Figura 3.2, temos a galáxia espiral barrada NGC 1300; já na Figura 3.3, temos a Galáxia do Rodamoinho, que é não barrada.

- ✓ **Galáxias Irregulares:** são aquelas que possuem uma morfologia perturbada e sem nenhum padrão. Caracterizam-se pela assimetria, núcleos descentralizados e estrutura irregular e caótica, não apresenta formato elíptico e nem espiral. Na Figura 3.4, temos a Galáxia irregular NGC 1427A.

Figura 3.4: Galáxia irregular, NGC 1427A.



Fonte: [23].

A galáxia na qual nos encontramos chama-se *Via Láctea*, que devido a sua aparência leitosa recebe tal nome. A *Via Láctea* conta com um diâmetro de caraca de 100 mil anos-luz e espessura em torno de 16 mil anos-luz, apresentando formato espiral, conforme a Figura 3.5. Ao observar o céu é possível notar facilmente uma faixa luminosa que o atravessa, esta trata-se do plano horizontal da espiral, conforme a Figura 3.6.

Figura 3.5: Via Láctea vista do Espaço.



Fonte: [24].

Figura 3.6: Via Láctea no céu vista do deserto do Atacama.



Fonte: [25].

De acordo com [17], ao observarmos por meio de um binóculo, o aspecto leitoso que observamos a olho nú desaparece, surgindo assim inúmeras estrelas isoladas. A partir de um telescópio podemos observar os aglomerados estelares e as nebulosas, inclusive o sistema solar.

Estes elementos dão forma a *Via-Láctea*, que compreende em torno de 100 bilhões de estrelas e uma massa total na ordem de 1 trilhão de massas solares.

3.1.2 Sistemas planetários, Sistema Solar

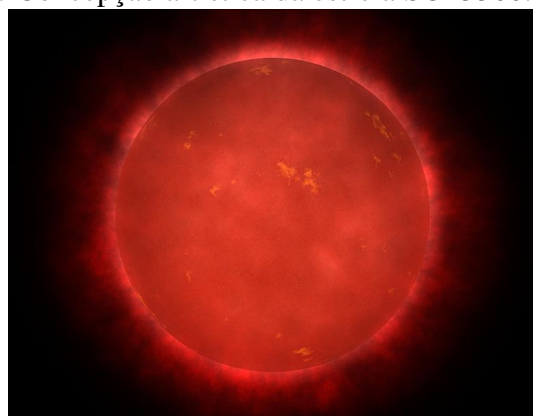
Nas várias galáxias distribuídas pelo universo há uma variedade colossal de astros que se apresentam e formam-se a partir de diferentes elementos químicos, sofrendo transformações ao longo de suas existências. Entre estes podemos destacar as estrelas, planetas, satélites naturais, cometas e asteroides. Os astros se agrupam por conta da gravidade⁴, os astros não estelares normalmente orbitam uma estrela ou grupo de estrelas, formando o que é chamado de sistema planetário, temos em particular o Sistema Solar.

3.1.2.1 Estrela

Chama-se de *estrela* um objeto celeste de formato esférico, formado por uma elevada quantidade de plasma e que apresenta grande luminosidade, que resulta da fusão de gases. Este mantém-se íntegro graças gravidade e pressão de radiação, em que prevalecem temperaturas e pressões altíssimas, principalmente nas regiões próximas do seu centro, que liberam considerável quantidade de energia por meio de reações termonucleares, se expandindo do centro para o espaço [17]. As estrelas podem ser separadas em grupos, dentre eles estão:

- ✓ **Anã vermelha:** é um tipo de estrela mais comum, apresenta brilho fraco e pouca massa, com temperatura inferior a 3,5 mil K⁵, já sua massa está entre 0,075 e 0,5 vezes a massa solar. Na Figura 3.7, temos a representação artística da estrela SO25300.5 + 165258.

Figura 3.7: Concepção artística da estrela SO25300.5 + 165258.



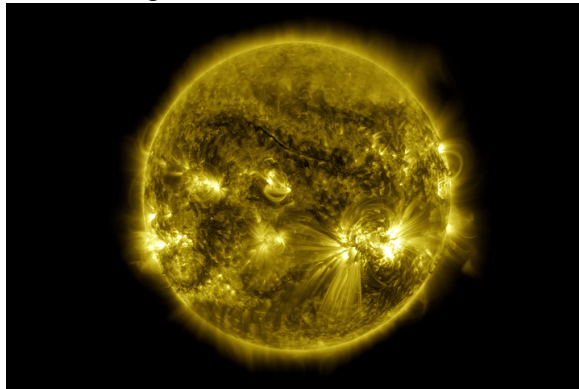
Fonte: [26].

⁴Em um agrupamento de astros o centro de massa do sistema está próximo do corpo de maior massa e/ou gravidade, mas ele não é estacionário. Sempre existe, mesmo que pequena, uma vibração.

⁵A unidade de temperatura Kelvin se baseia no ponto de fusão da água que ocorre à 273,16 K e no seu ponto de ebulição que é 373,16 K, correspondem respectivamente a 0 e 100 graus Celsius; assim $T_K = T_C + 100$, onde T_K é a temperatura em Kelvin e T_C é a temperatura em Celsius.

- ✓ **Anã amarela:** estrelas muito antigas, com origem há bilhões de anos. Com o passar do tempo, irão se tornar uma gigante vermelha. Estas apresentam massa entre 0,8 e 1,2 vezes a massa solar, com temperatura entre 5,3 mil K e 6 mil K. A nossa estrela, o Sol, está nessa categoria e apresenta temperatura cerca de 5,8 mil K. Na Figura 3.8, temos a representação do Sol.

Figura 3.8: Sol - Nasa 2020.



Fonte: [27].

- ✓ **Anã branca:** formam-se a partir de núcleos estrelas que ejetaram suas camadas externas, que já não produzem mais fusões nucleares, rotacionando em altas velocidades em torno de seus eixos. São o resultado evolutivo de estrelas com massas até 10 vezes a massa solar, altamente densas e brilho fraco. Na Figura 3.9, temos a representação da estrela Sirius B, que é uma anã branca.

Figura 3.9: Anã branca Sirius B.



Fonte: [28].

- ✓ **Anã azul:** trata-se de estrelas que ainda não existe, devido a idade do universo. Se desenvolverão possivelmente a partir de uma anã vermelha, quando esta esgotar seu abastecimento de combustível de hidrogênio.
- ✓ **Gigantes azuis:** extremamente brilhantes, apresentam temperaturas superiores a 20 mil K, massa elevada, podendo chegar à 18 vezes a massa solar. Na Figura 3.10, temos a representação da estrela Bellatrix, que é uma gigante azul.

Figura 3.10: Bellatrix - gigante azul da constelação de Orion.



Fonte: [29].

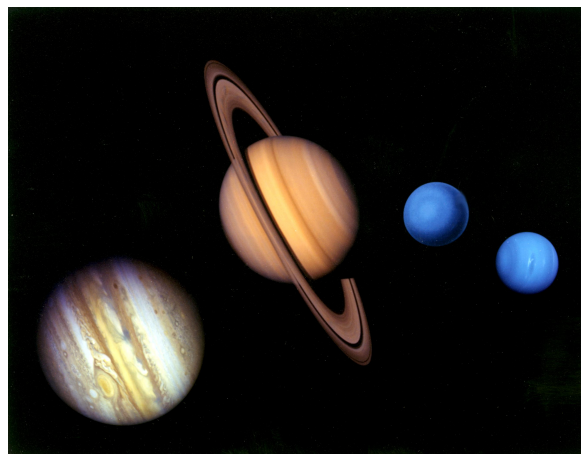
- ✓ **Super gigantes azuis:** raras, extremamente quentes e luminosas. Apresentam até 50 vezes a massa solar, com temperaturas entre 20 mil e 50 mil K.

3.1.2.2 Planeta

Chama-se *planeta* um corpo celeste que não possua luz própria, sendo relativamente frio, compacto e com a massa necessária para se torná esférico, ou seja, forma determinada pelo equilíbrio hidrostático⁶; que orbite uma estrela; e que possua massa predominante entre os objetos que possuem órbitas vizinhas. Os planetas podem ser separados em:

- ✓ **Gigante gasoso:** possui grandes dimensões, diâmetro e massa; apesar de apresentar um pequeno núcleo sólido, é composto principalmente de gases: oxigênio, hélio e hidrogênio. No sistema solar há quatro desses planetas: Júpiter, Saturno, Urano e Netuno [30], representados na Figura 3.11.

Figura 3.11: Planetas gasosos - de baixo para cima: Saturno, Jupter, Netuno e Urano.



Fonte: [31].

⁶A força gravitacional supera força dos elementos que constituem o corpo.

- ✓ **Terrestre ou telúrico:** possui estrutura física rochosa, portanto mais densa. No sistema solar, são os planetas mais próximos do Sol, por isso chamados interiores: Mercúrio, Vênus, Terra e Marte [30], representados na Figura 3.12.

Figura 3.12: Planetas gasosos - da esquerda para direita: Mercúrio, Vênus, Terra e Marte.



Fonte: [32]

3.1.2.3 Planeta Anão

Chama-se *planeta anão* um astro que orbite em torno do Sol; possua massa suficiente para que a sua própria gravidade supere as forças de corpo rígido, de modo que esteja em equilíbrio hidrostático e possua uma forma quase esférica; não apresente as vizinhanças da sua órbita desimpedidas⁷[33].

Figura 3.13: Planetas Anões



Fonte: [34]

A União Astronômica Internacional (UAI) classifica cinco astros como planetas anões: Plutão, Ceres, Haumea, Makemake e Éris. Os mesmos estão representados, nessa mesma ordem, na Figura 3.13.

3.1.2.4 Satélite Natural

Chama-se *satélite natural* um corpo celeste que orbite em torno de um planeta ou outro astro por conta da gravitação. Além disso, o termo *satélite natural* pode se referir à planetas

⁷não é um astro dominante, podendo sofrer influência de algum astro próximo por conta do seu tamanho, por exemplo de uma satélite natural que possua massa muito próxima.

anões que orbitem uma estrela, ou até uma galáxia anã que orbite uma galáxia maior [35]. No Sistema Solar, até o momento, já foram descobertos cerca de 170 satélites naturais, orbitando ao redor dos planetas e mais seis dos planetas anões. Destes, apenas a Lua orbita a Terra, representada na Figura 3.14.

Figura 3.14: Lua em 2010.



Fonte: [36].

3.1.2.5 Cometa

Chama-se *cometa* um corpo celeste do sistema solar que apresenta fraca luminosidade, que pode aumentar conforme se aproxima do Sol; apresenta aspecto nebuloso ou difuso, constituído por um aglomerado de pequenas partículas sólidas e um envoltório gasoso. Possuem suas estruturas compostas principalmente por bolas de neve, rocha e poeira congeladas.

Ao observá-los nota-se, na maioria das vezes, dependendo da sua proximidade com o Sol, a presença de um núcleo, uma cabeleira e uma cauda. Suas órbitas são irregularidades, os levando para muito próximo ao Sol e os jogando para além da órbita do planeta-anão Plutão. Entre os cometas mais conhecidos está Halley, representado na Figura 3.15 [35].

Figura 3.15: Núcleo do cometa Halley em 1986, pela espaçonave europeia Giotto.



Fonte: [37].

3.1.2.6 Asteroide

Chama-se *asteroide* um pequeno corpo celeste que orbite em torno do Sol. Alguns asteroides são agrupados em famílias, segundo as suas órbitas. Certos asteroides, como os do grupo Apolo, parecem ter sido antigos cometas que perderam a cobertura gasosa. Os asteroides possuem dimensões inferiores a 1 003 km, o diâmetro do maior deles - Ceres, descoberto em 1801 pelo astrônomo italiano Giuseppe Piazzi (1746 – 1826).

3.2 O planeta Terra

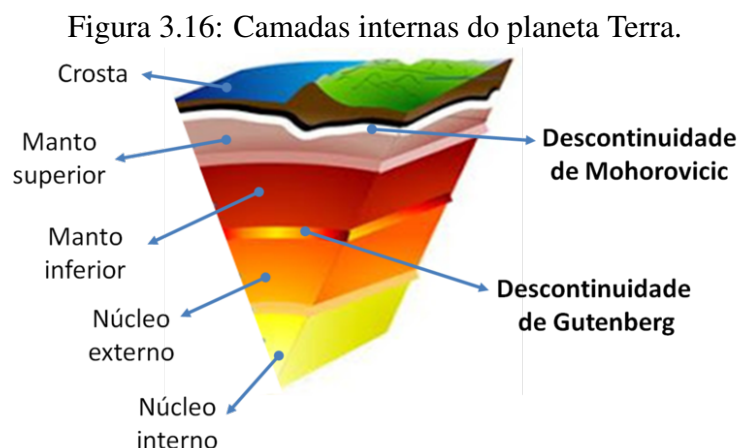
O planeta Terra é o terceiro mais próximo do Sol. Teve sua origem há cerca de 4,56 bilhões de anos, apresentando uma estrutura predominantemente rochosa, assim como os demais planetas telúricos. Dentre os planetas do Sistema Solar é o único que possui abundância de água, sendo sua superfície envolta por cerca de 71% pelo líquido. Sua atmosfera é rica de oxigênio, o gás que permite a existência de vida. Sua rotação demora em torno de 23 horas, 56 minutos e 4 segundos; já a translação é de 365 dias e 4 horas [17] e [35].

3.2.1 Estrutura

O planeta Terra possui uma forma esférica achatada, apresentando um diâmetro maior na linha do equador do que no eixo que liga os polos norte e sul, excedendo em 43 km. O seu diâmetro na linha do equador é de 12 756 km, obtido a partir da circunferência terrestre, que é cerca de 40 075 km. A massa do planeta é em torno de $5,97 \times 10^{24}$ kg, composta predominantemente por ferro (32%), oxigênio (30%), silício (15%) e magnésio (14%).

3.2.1.1 O interior do planeta

O interior do planeta Terra é dividido em camadas de acordo com sua composição química: crosta, manto, núcleo externo e núcleo interno, conforme a Figura 3.16.



Fonte: [38].

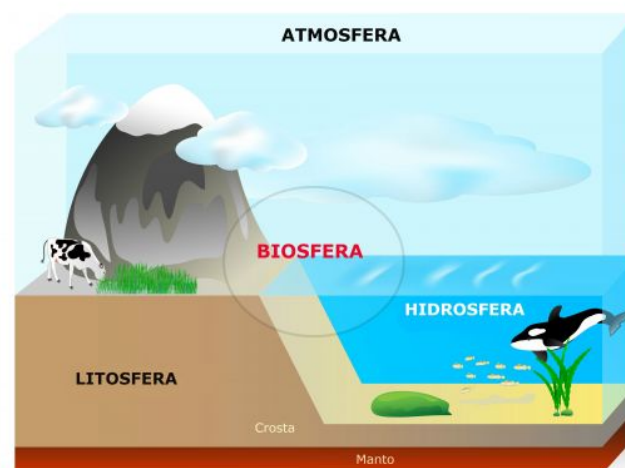
- ✓ **crosta:** é a camada mais fria e sólida, também a menos densa, formada por minerais relativamente leves. Sua espessura é de cerca de 6 km nos oceanos e varia entre 30 e 50 km no continente [35].
- ✓ **manto:** é a camada situada entre as descontinuidade de Mohorovicic⁸ e de Gutenberg ou Wiechert⁹, sua espessura varia entre 35 e 2 890 km da superfície. Subdivide-se em manto superior, constituído de silicatos "compactos" como olivina, e o manto inferior, constituído provavelmente de sulfetos e óxidos [17].
- ✓ **núcleo externo:** localizado sob o manto, trata-se de um líquido de baixa viscosidade, composto de níquel e ferro [39]. Sua espessura está entre 2 890 e 5 100 km da superfície.
- ✓ **núcleo interno:** envolto pelo núcleo externo, trata-se uma camada sólida, composta majoritariamente de ferro, que gira mais rápido que o resto do planeta [35]. Sua espessura está entre 5 100 e 6 378 km da superfície, ou seja, seu raio é cerca de 1 278 km.

O que explica essa divisão interna, do planeta, é o fato que, durante sua formação, a Terra passou por um processo chamado *diferenciação planetária*, que fez com que maior parte dos elementos mais densos, como o ferro e o níquel, afundassem na jovem Terra líquida. Ao passo que isso ocorreu, os elementos menos densos, como o magnésio e o oxigênio, foram lançados para as partes exteriores [39] e [35].

3.2.1.2 O exterior do planeta

A parte exterior do planeta corresponde ao Sistema Terrestre, que abrange: a litosfera, a atmosfera, a hidrosfera e a biosfera, conforme a Figura 3.17.

Figura 3.17: Exterior do planeta Terra.



Fonte: [40].

⁸Recebe esse nome em homenagem ao seu descobridor, o geofísico e sismologista, Andrija Mohorovičić.

⁹Recebe esse nome em homenagem aos sismólogos alemães Beno Gutenberg e Emil Wiechert.

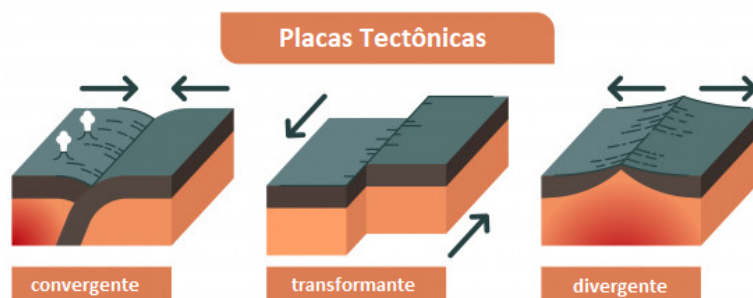
- ✓ **Listosfera:** parte sólida da superfície terrestre, formada por rochas e minerais, envolve a crosta e parte do manto superior. Sua espessura pode variar de acordo com parte do planeta, sendo maior em regiões montanhosas. Corresponde ao relevo submarino, aos continentes e às ilhas.
- ✓ **Atmosfera:** envoltório gasoso de um planeta ou satélite, em corpos cuja massa seja suficiente para atrair os gases por meio da gravidade, é a camada exterior de onde provêm radiações emergentes. A atmosfera é responsável por proteger o planeta de agentes externos, bem como regular o clima no planeta.
- ✓ **Hidrosfera:** corresponde à camada aquosa do planeta, nos diferentes estados físicos: líquido, sólido e gasoso [17]. Influencia, entre outras coisas, no clima. A hidrosfera compreende: rios, lençóis subterrâneos, geleiras e vapor de água presente na atmosfera.
- ✓ **Biosfera ou ecosfera:** parte do planeta onde tem ou é possível existir vida. A biosfera se concentra na parte inferior da atmosfera, na maior parte da hidrosfera e em uma estreita faixa da Litosfera [17].

3.2.1.3 As placas tectônicas

A camada externa mais rígida do planeta Terra, a *litosfera*, é fragmentada em pedaços denominados *placas tectônicas*. Estas podem ser de dois tipos: *continentais* e *oceânicas*, sendo as primeiras mais antigas e espessas [39]. Esses fragmentos se movimentam entre si nas suas fonteiras ou limites, conforme representado na Figura 3.18, podem se dar de modo:

- ✓ **Convergente:** encontro de duas placas que se movem em direções opostas.
- ✓ **Divergente:** quando duas placas se afastam entre si.
- ✓ **Transformante:** quando duas placas se deslizam uma pela outra lateralmente.

Figura 3.18: Tipos de placas tectônicas.



Fonte: [41].

O movimento das placas tectônicas ocorrem sobre a região sólida do manto terrestre, em uma camada menos rígida denominada *astenosfera*, que encontra-se entre a litosfera e o manto.

Quando duas placas resvalam entre si, produzem-se rupturas das rochas, em geral, designadas por falhas [39] e [17].

Durante o choque entre placas é comum ocorrer a criação e a destruição de parte das placas oceânicas. As bordas das placas oceânicas sofrem submersão geralmente em placas continentais, às vezes também, em placas oceânicas mais novas. As placas sujeitas a pressão podem se fundir, gerando o magma, ou seja, atividade vulcânica. Também é comum a liberação de energia elástica, o que provoca os terremotos [39].

Figura 3.19: Placas tectônicas.



Fonte: [42].

Na Figura 3.19, destaca-se a distribuição das placas tectônicas pelo planeta. Conforme já dito, as regiões que limitam as placas são as que geram maior impacto sísmico. Por outro lado, outras regiões que estão sobre essas placas, distantes dos limites, como no caso do Brasil, não costumam sofrer grandes tremores ou erupções.

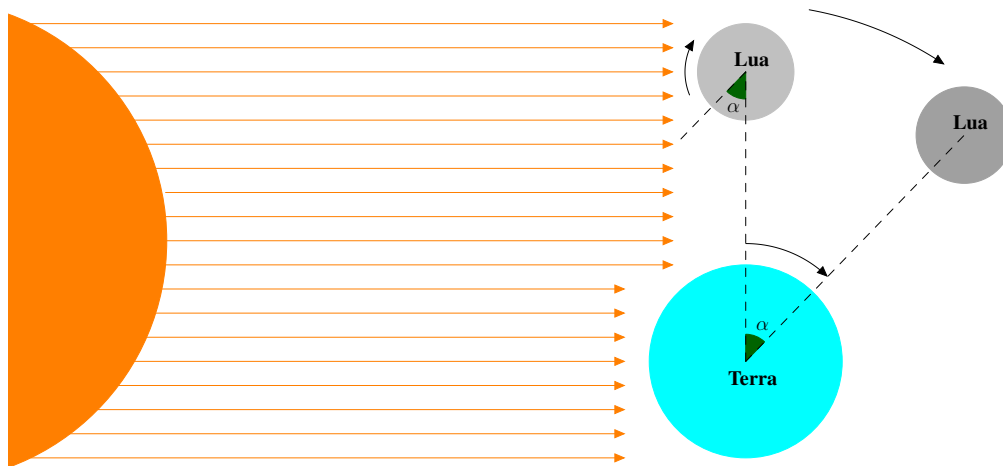
3.2.2 O satélite natural da Terra, a Lua

A Lua é o único satélite natural orbitando o planeta Terra, formada há cerca de 4,5 bilhões de anos, possui formato esférico. O astro tem cerca de 27% do diâmetro da Terra e cerca de 0,012 a massa terrestre. Sua atmosfera é quase insignificante, cuja massa está em torno de 10 mil kg, formada basicamente por: hélio, neônio, hidrogênio e argônio.

A superfície lunar é marcada pela presença de inúmeras crateras, planícies e montanhas. A maioria das crateras lunares apresentam um formato circular, que resultam muito provavelmente do bombardeamento de meteoritos. Já as planícies lunares se apresentam em grandes extensões, em tons variados de cinza [35].

O ciclo de translação em torno da Terra dura 27 dias e 8 horas, e demora o mesmo período para fazer o movimento de rotação em torno do próprio eixo, ou seja, a velocidade angular de rotação é igual a de translação, conforme a Figura 3.20, por isso tem sempre a mesma face voltada para a Terra e a outra oculta. A Lua não possui luz própria, mas sim reflete a luz solar [17].

Figura 3.20: Rotação e translação da Lua.



Fonte: O autor.

De acordo com o sua posição, a luz emitida pela Lua tem características distintas, que denomina-se fases da Lua, conforme representado na Figura 3.21.

- ✓ **Lua cheia:** o reflexo da luz solar reflete em por toda a superfície visível da Lua;
- ✓ **Lua nova:** o relexo da luz solar ilumina a face oculta da Lua, que não reflete luz na Terra;
- ✓ **Lua em quarto crescente:** apenas parte da superfície visível é iluminada, neste caso, a quantidade de luz vai aumentando ao longo dos dias.
- ✓ **Lua em quarto minguante:** apenas parte da superfície visível é iluminada, neste caso, a quantidade de luz vai diminuindo ao longo dos dias.

Figura 3.21: Fases da Lua.



Fonte: [43].

Como já dito, um aspecto curioso é o movimento sincronizado entre Lua e Terra. Um dos efeitos mais conhecidos é a produção das marés pela Lua nos oceanos da Terra, graças a interação gravitacional entre os dois astros. Por conta da atração entre os dois corpos as marés mais altas no globo terrestre sempre acontecem em regiões opostas [35].

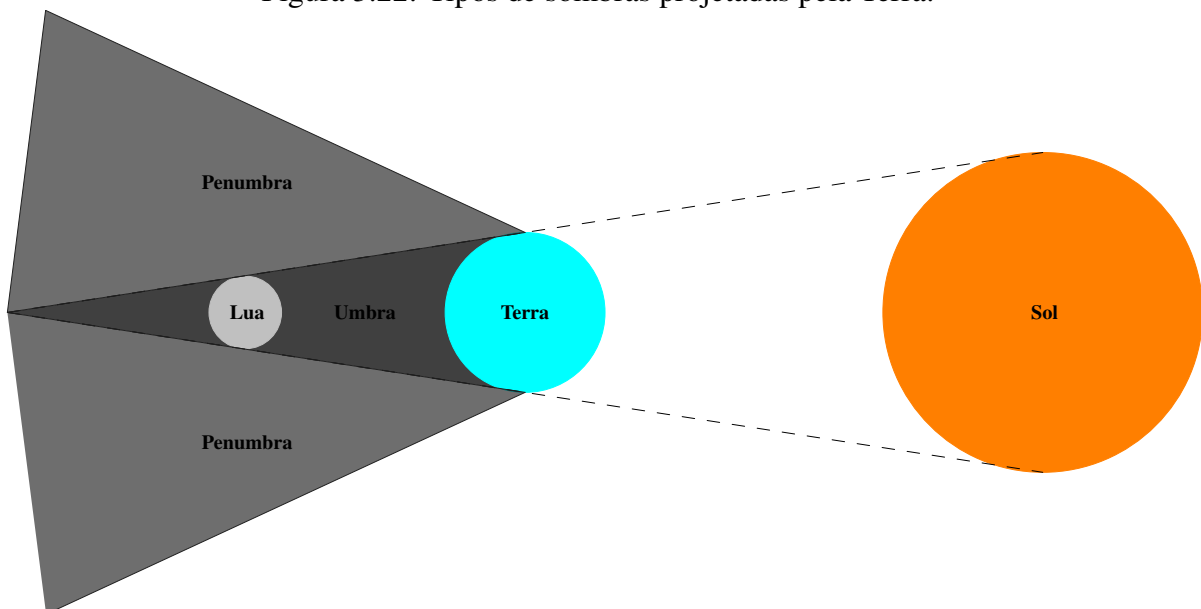
A interação Lua e Terra não se limita aos efeitos sobre a estrutura e à fenômenos na superfície dos astros. Estudos mostram que a Lua está se afastando da Terra cerca de 3,8 cm por ano, o que não muda muita coisa, visto que a distância entre o planeta e o seu satélite é em torno de 384 400 km. Isso vem ocorrendo por causa do movimento das marés na direção oeste, em contraste com o movimento das massas de terra, que se movem para leste, logo a Terra vem perdendo velocidade de rotação [35].

3.2.3 Eclipses

Chama-se *eclipse* o fenômeno no qual ofusca-se o brilho ou luz de um astro, total ou parcialmente, pela interposição de outro astro entre ele e o observador. Outra forma de eclipse ocorre quando um astro, sem luz própria, deixa de ser iluminado ao penetrar no cone da sombra de outro astro, como no caso em que a Lua penetra a sombra da Terra [17].

A sombra projetada pelo planeta Terra tem duas partes distintas: *umbra* e *penumbra*. A *umbra* corresponde à parte da sombra onde toda luz está bloqueada pela Terra. Para a *penumbra* é a parte em que a Terra bloqueia parte da luz solar [35].

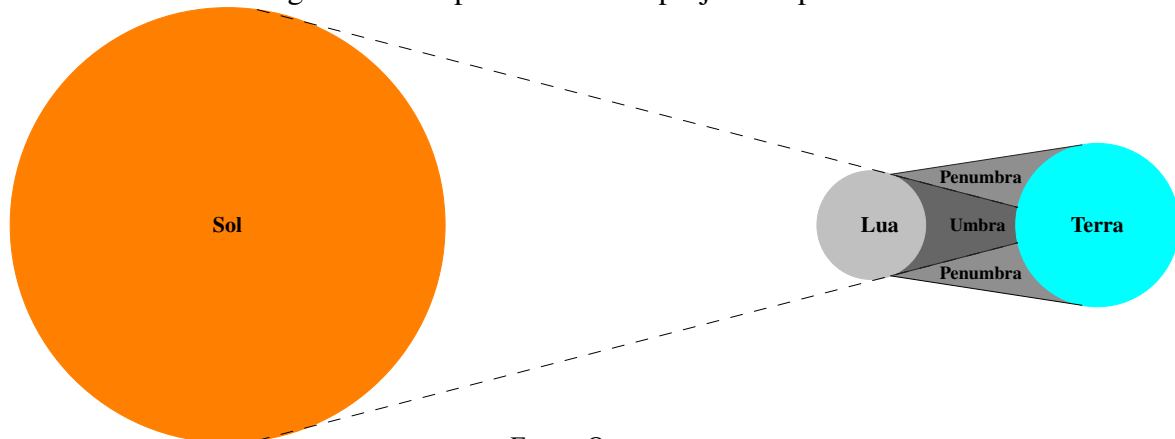
Figura 3.22: Tipos de sombras projetadas pela Terra.



Fonte: O autor.

Da mesma forma a Lua pode projetar sombras sobre a Terra.

Figura 3.23: Tipos de sombras projetadas pela Lua.



Fonte: O autor.

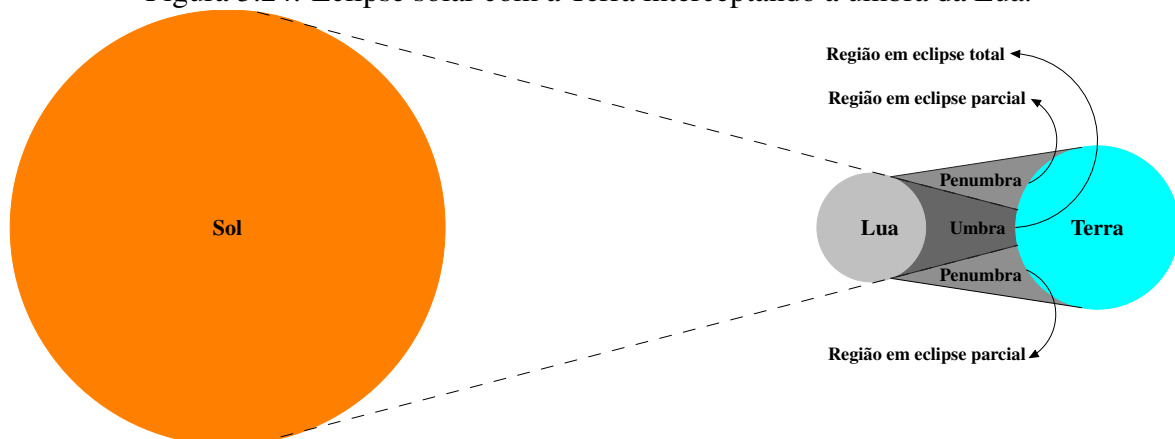
O tipo de sombra projetada, conforme exibido nas Figuras 3.22 e 3.23, projeta diferentes formas ou ausência de luz na superfície do astro que sofre a incidência. Para cada uma dessas projeções classificam-se os tipos de eclipses, que podem ser solar ou lunar.

3.2.3.1 Eclipse Solar

O *eclipse solar* ocorre quando a Lua está entre o Sol e os observadores que estão em uma região da superfície terrestre interceptada pelo cone de sombra da Lua. Quando isso ocorre o Sol deixa de ser total ou parcialmente visível.

- ✓ **Eclipse solar total:** ocorre quando toda luminosidade do Sol é ofuscada pela Lua. Neste caso, a Terra intercepta a porção da umbra da sombra da Lua, conforme representado na Figura 3.24.
- ✓ **Eclipse solar parcial:** ocorre quando parte da luminosidade do Sol é ofuscada pela Lua. Neste caso, a Terra não é atingida pela umbra da sombra da Lua, conforme representado na Figura 3.24.

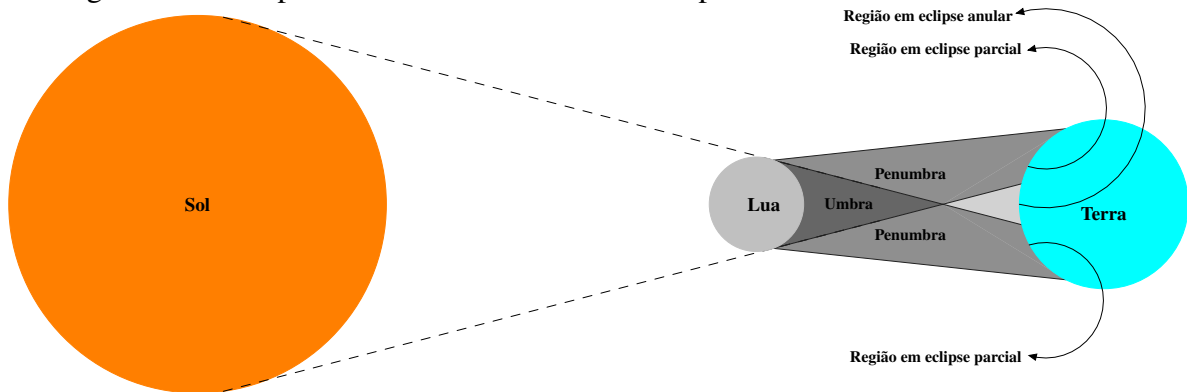
Figura 3.24: Eclipse solar com a Terra interceptando a umbra da Lua.



Fonte: O autor.

- ✓ **Eclipse solar anular:** ocorre quando um anel de luminosidade solar pode ser observado ao redor da Lua. Isso ocorre por conta do vértice do cone de sombra da Lua não está atingindo a Terra, conforme representado na Figura 3.25.
- ✓ **Eclipse solar híbrido:** ocorre quando a curvatura terrestre provoca um efeito que faz com que, em algumas partes da superfície da Terra, se observe um eclipse solar total e em outras um eclipse solar anular, conforme representado na Figura 3.25.

Figura 3.25: Eclipse solar com a Terra não interceptando o cone de sombra da Lua.

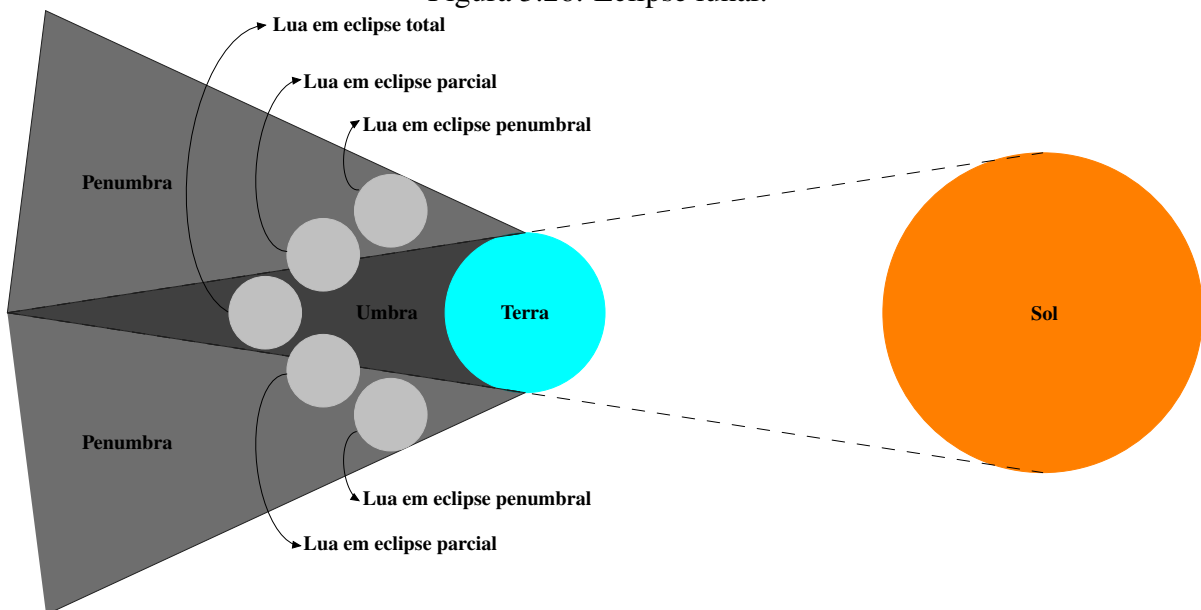


Fonte: O autor.

3.2.3.2 Eclipse Lunar

O *eclipse lunar* é o fenômeno no qual a Lua penetra no cone de sombra da Terra. Quando isso ocorre a Lua deixa de ser visível para todos os observadores terrestres que a têm acima do horizonte durante aquele intervalo de tempo, conforme representado na Figura 3.26.

Figura 3.26: Eclipse lunar.

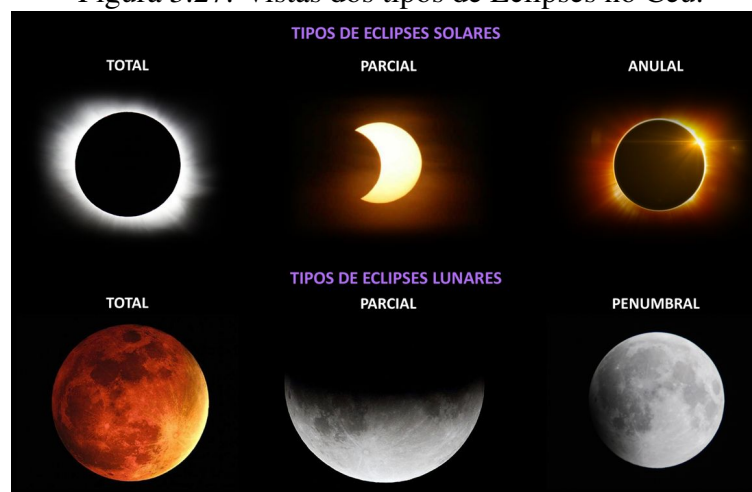


Fonte: O autor.

- ✓ **Eclipse lunar penumbral:** ocorre quando a Lua cruza apenas a penumbra da Terra.
- ✓ **Eclipse lunar total:** ocorre quando a face da Lua fica totalmente dentro da umbra da Terra.
- ✓ **Eclipse lunar parcial:** ocorre quando a face da Lua fica parcialmente dentro da umbra da Terra.

Na Figura 3.27, podemos observar, de forma resumida, a configuração do Sol e da Lua no Céu durante os seus respectivos eclipses.

Figura 3.27: Vistas dos tipos de Eclipses no Céu.



Fonte: [44].

3.3 Cálculo de distâncias

As distâncias relativas entre os astros do cosmos, assim como o tamanho destes, sempre foram motivos de muita curiosidade por parte do ser humano. Desde antes de Cristo já se exploravam maneiras de calcular os tamanhos relativos e as distâncias relativas entre a Terra, o Sol e a Lua [45]. Entre os mais bem sucedidos estão os gregos antigos como Aristarco, Eratostenes e Hiparco, que estudaremos nos Capítulos 4 e 5.

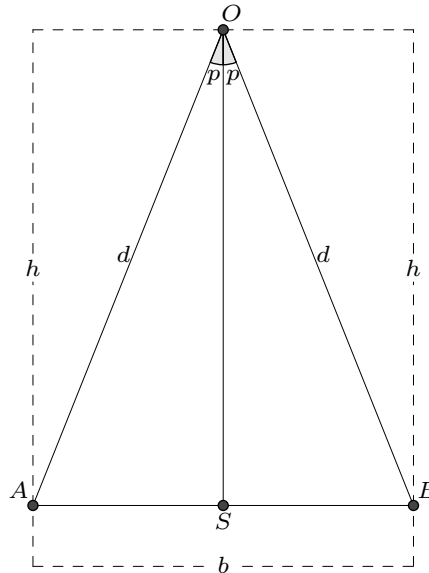
Para a exploração de distâncias astronômicas e tamanho dos astros são necessários alguns conceitos, dentre os quais: *paralaxe*, *unidade astronômica*, *ano luz* e *parsec*.

3.3.1 Paralaxe

O método da *paralaxe* consiste na observação de um ângulo sob o qual um observador ou objeto situado em uma determinada estrela veria uma base, que é um comprimento convencionalmente escolhido. Em geral, os astrônomos empregam como base o semi-eixo ou raio médio da órbita terrestre [17].

De acordo com [46], em Astronomia, a paralaxe p trata-se da metade do deslocamento angular descrito a partir observador O ao longo dos extremos da base b , no caso a metade desse valor é o semi-eixo ou raio médio.

Figura 3.28: Paralaxe.



Fonte: Adaptado de [17].

Na Figura 3.28, podemos notar que AOB , trata-se de um triângulo isósceles, de base AB . O método da paralaxe explora a triangulação¹⁰ para determinar distâncias.

Por outro lado, do fato do triângulo AOB ser isósceles e que o segmento OS , que parte de O e intersecta a base AB , é a bissetriz de \widehat{AOB} , temos que OS também é a altura relativa à base AB . O que determina os triângulos retângulos ASO e BSO .

Ao aplicarmos as relações trigonométricas, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \widehat{AOS} &= \frac{\overline{AS}}{\overline{AO}} \implies \operatorname{sen} p = \frac{\frac{b}{2}}{d} \\ &\implies \operatorname{sen} p = \frac{b}{2d} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Também que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \widehat{AOS} &= \frac{\overline{AS}}{\overline{OS}} \implies \operatorname{tg} p = \frac{\frac{b}{2}}{h} \\ &\implies \operatorname{tg} p = \frac{b}{2h} \end{aligned} \quad (3.2)$$

De (3.1) podemos estabelecer que ao conhecermos o ângulo p é possível relacionar as distâncias relativas entre si. Isso torna o método prático, porém devem ser tomados alguns

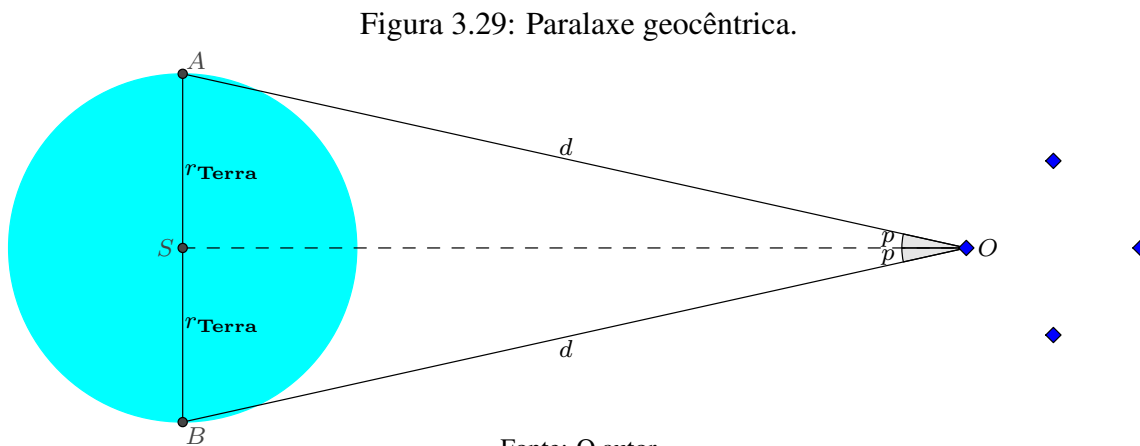
¹⁰Na atualidade, o cálculo distâncias entre astros é feito por meio de radares.

cuidados, pois quando usado para medir as distâncias entre astros requer adaptação, isto porque os corpos celestes encontram-se muito distantes.

Para isso, escolhe-se uma linha de base muito grande, quando deseja-se calcular essas distâncias: da Terra à Lua ou aos planetas mais próximos, geralmente usa-se o diâmetro da Terra. Já a distância de estrelas próximas, usa-se o diâmetro da órbita da Terra [46]. Os dois casos denominam-se respectivamente: *paralaxe geocêntrica* e *paralaxe heliocêntrica*.

3.3.1.1 Paralaxe geocêntrica

Para determinar certas distâncias relativas e a posição da Lua em relação à estrelas distantes são marcados pontos opostos na superfície da Terra, determinado o diâmetro do planeta como linha de base.



A partir da Figura 3.29 e das implicações em (3.1), temos que

$$\text{sen } p = \frac{r_{\text{Terra}}}{d} \implies d = \frac{r_{\text{Terra}}}{\text{sen } p}. \quad (3.3)$$

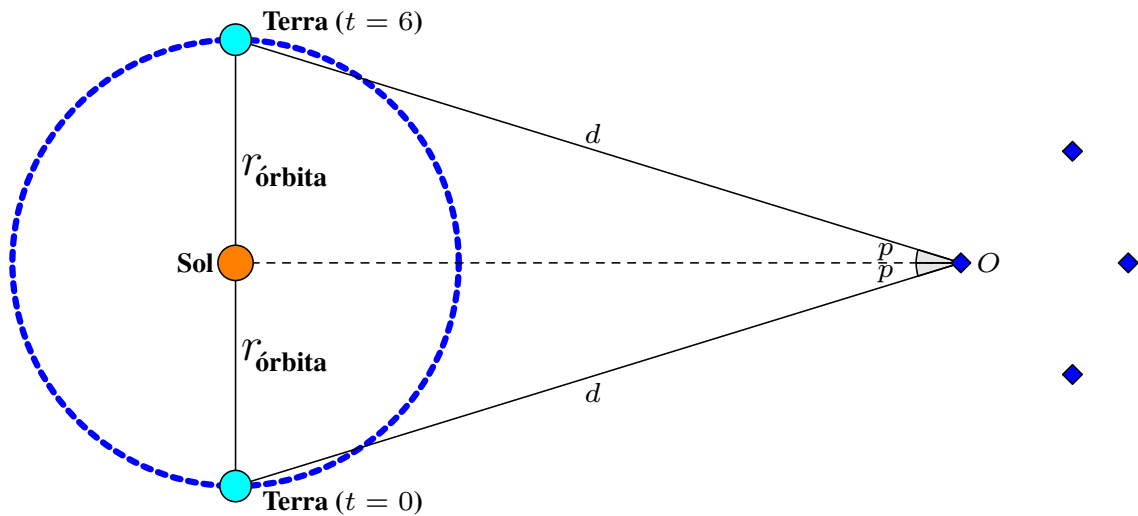
Para p muito pequeno, temos

$$\text{sen } p = \frac{r_{\text{Terra}}}{d} \implies d = \frac{r_{\text{Terra}}}{\text{sen } p} \cong \frac{r_{\text{Terra}}}{p}. \quad (3.4)$$

3.3.1.2 Paralaxe heliocêntrica

Para determinar certas distâncias relativas da Terra à estrelas mais próximas são marcados pontos opostos sobre a órbita da Terra, em torno do Sol, para assim usar o diâmetro desta órbita como linha de base. Nesse processo, ao passo que a Terra se move ao longo da órbita solar, as estrelas que estão mais próximas parecem se mover em relação as que estão mais distantes.

Figura 3.30: Paralaxe heliocêntrica.



Fonte: Adaptado de [46].

A partir da Figura 3.30 e das implicações em (3.1), temos que

$$\text{sen } p = \frac{r_{\text{órbita}}}{d} \implies d = \frac{r_{\text{órbita}}}{\text{sen } p}. \quad (3.5)$$

Para p muito pequeno, temos

$$\text{sen } p = \frac{r_{\text{órbita}}}{d} \implies d = \frac{r_{\text{órbita}}}{\text{sen } p} \cong \frac{r_{\text{órbita}}}{p}. \quad (3.6)$$

3.3.2 Unidades de distâncias astronômicas

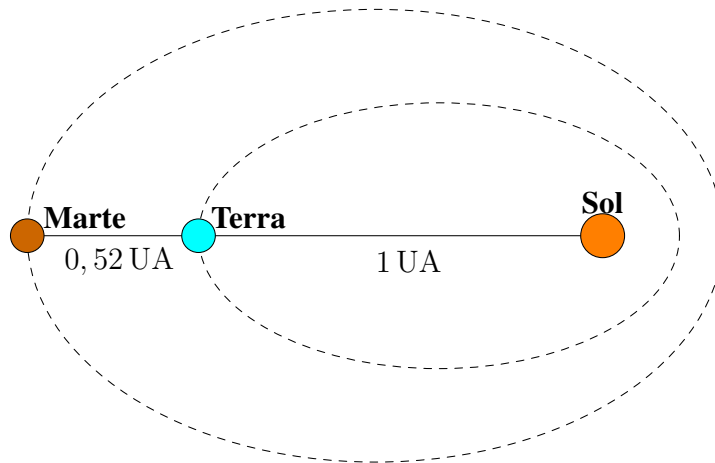
Na determinação de distâncias astronômicas, assim como outras, trabalha-se com uma unidade base. Para isso, utiliza-se elementos que remetem ao próprio sistema solar, como a distância média entre Terra e Sol; bem como propriedades físicas, como a distância percorrida pela luz em um determinado intervalo de tempo.

3.3.2.1 A unidade astronômica

A determinação de distâncias, descrição de órbitas e tamanho dos astros dentro do Sistema Solar são representadas por meio da distância média da Terra ao Sol, que denomina-se *Unidade Astronômica* (UA).

A técnica empregada para obter-se o valor da unidade astronômica consiste no uso de radares. De início, suponhamos que seja enviado um sinal de radar ao planeta Marte, estando o mesmo em um ponto oposto ao Sol em relação a posição da Terra, conforme a Figura 3.31. Pela terceira lei de Kepler, a qual veremos no Capítulo 6, Teorema 19, a distância entre o Sol e Marte é de 1,52 UA, ou seja, a distância entre os dois planetas é de 0,52 UA.

Figura 3.31: Terra e Marte em pontos opostos.



Fonte: O autor.

Além disso, a distância entre os dois planetas nessa posição é cerca de 77 790 890 km. Desse modo:

| distância (UA) | → | distância (km) |
|----------------|---|----------------|
| 1 UA | → | x |
| 0,52 UA | → | 77 790 890 km |

o que nos leva à

$$\begin{aligned} \frac{1 \text{ UA}}{0,52 \text{ UA}} &= \frac{x}{77\,790\,890} \\ \Rightarrow x &= \frac{77\,790\,890 \text{ km}}{0,52} \\ \Rightarrow x &\cong 1,496 \cdot 10^8 \text{ km} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Portanto, uma unidade astronômica equivale a cerca de $1,496 \cdot 10^8$ km.

3.3.2.2 O ano Luz

O *ano luz* (AL) trata-se da distância percorrida pela luz no vácuo, em um período de ano. A luz no vácuo tem uma velocidade em torno de $2,9979 \cdot 10^5$ km/s e um ano 365,25 dias.

Desse modo um ano luz corresponde à uma distância

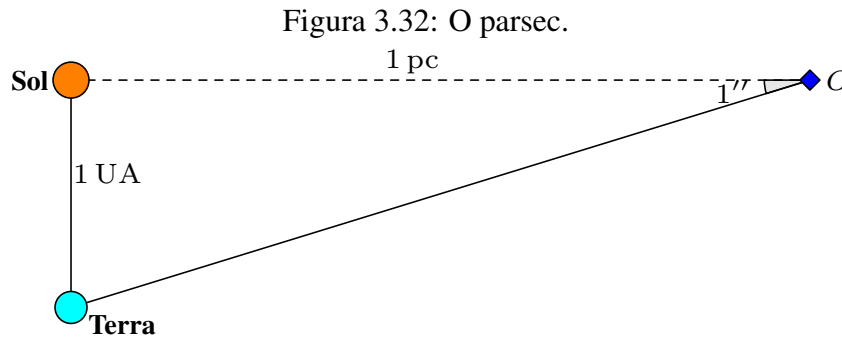
$$\begin{aligned} \text{AL} &= 2,9979 \cdot 10^5 \text{ km/s} \cdot 365,25 \text{ dias} \\ &= 2,9979 \cdot 10^5 \text{ km/s} \cdot (365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) \text{ s} \\ &= 2,9979 \cdot 10^5 \text{ km/s} \cdot 31\,557\,600 \text{ s} \\ &= 2,9979 \cdot 10^5 \text{ km/s} \cdot 3,15576 \cdot 10^7 \text{ s} \\ &\cong 9,46065 \cdot 10^{12} \text{ km} \end{aligned} \tag{3.8}$$

De (3.7) e (3.8), temos que

$$\frac{AL}{UA} \cong \frac{9,46065 \cdot 10^{12} \text{ km}}{1,496 \cdot 10^8 \text{ km}} \implies AL \cong 3,32396 \cdot 10^4 \text{ UA} \quad (3.9)$$

3.3.2.3 O Parsec

O *parsec* (pc) é uma unidade de medida astronômica que consiste medir a distância do observador a um objeto que encontra-se sob uma paralaxe heliocêntrica de $1''$, no caso seria do Sol a uma estrela. Como a paralaxe heliocêntrica se baseia no raio da órbita terrestre, que é a unidade astronômica (UA), o parsec pode ser entendido como a distância na qual o observador deveria está para ver 1 UA, sob um ângulo de $1''$.



Fonte: Adaptado de [46].

Desse modo, de 3.2 e da Figura 3.32, temos

$$\text{tg } 1'' = \frac{UA}{pc} \implies pc = \frac{UA}{\text{tg } 1''} \cong \frac{UA}{1''} \quad (3.10)$$

Além disso,

$$1'' = \frac{1}{3600^\circ} = \frac{1}{3600} \cdot \frac{2\pi}{360} \cong 4,8481 \cdot 10^{-6}. \quad (3.11)$$

De (3.10) e (3.11), temos

$$pc \cong \frac{UA}{1''} \cong \frac{UA}{4,8481 \cdot 10^{-6}} \cong 206\,265 \text{ UA}, \quad (3.12)$$

de (3.7) e (3.12), temos

$$\begin{aligned} pc &\cong 206\,265 \text{ UA} \\ &\cong 206\,265 \cdot 1,496 \cdot 10^8 \text{ km} \\ &\cong 3,0857244 \cdot 10^{13} \text{ km} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Além disso, de (3.13) e (3.8), temos

$$\frac{\text{pc}}{\text{AL}} \cong \frac{3,0857244 \cdot 10^{13} \text{ km}}{9,46065 \cdot 10^{12} \text{ km}} \implies \text{pc} \cong 3,26164 \text{ AL} \quad (3.14)$$

e concluímos que

$$\text{pc} \cong 206\,265 \text{ UA} \cong 3,0857244 \cdot 10^{13} \text{ km} \cong 3,26164 \text{ AL}.$$

Capítulo 4

ASTRONOMIA: ASPECTOS HISTÓRICOS

Entre as ciências da natureza a Astronomia foi a que primeiro atingiu um alto grau de organização quando comparada à outras ciências como a Física e Meteorologia, que não atingiram o mesmo nível de realização. Isso se deu especialmente devido ao assunto da Astronomia primitiva se basear no Sol, a Lua, os planetas e as estrelas, movendo-se em padrões complexos; o assunto era matematizado com relativa facilidade, dado que na antiguidade, principalmente na Grécia Antiga, a Astronomia era tida como um ramo da Matemática [50].

Os conhecimentos astronômicos da antiguidade são estudados pela *Arqueoastronomia*. Tal ciência tem por objetivo estudar os conhecimentos astronômicos dos povos antigos, especialmente daqueles do período pré-histórico. A *Arqueoastronomia* desenvolveu-se graças às pesquisas iniciadas em 1890 pelo astrônomo inglês Sir Norman Lockyer (1836 – 1920), que pode ser considerado como o moderno fundador dessa ciência em virtude dos seus estudos dos monumentos egípcios e dos megalíticos ingleses [17].

4.1 A Astronomia na Europa Neolítica

As evidências mais fortes do interesse em Astronomia por parte das sociedades antigas encontra-se nos antigos alinhamentos de círculos de pedras espalhados por toda a Europa, particularmente no Reino Unido. O mais notável é *Stonehenge* na Inglaterra, representado na Figura 4.1. O monumento possui um diâmetro em torno de 100 m, construído cerca de 3 200 a. C.. Os blocos de pedra, os maiores em geral com 50 toneladas, foram deslocados de uma região situada a 30 km ao norte de *Stonehenge*.

Os arqueólogos acreditam que *Stonehenge* era um altar destinado à adoração do Sol, pois ele se encontra orientado de modo que o Sol nasce, durante o solstício de verão (no hemisfério norte), no eixo de sua entrada. Alguns arqueoastrônomos defendem que o monumento funcionava como um antigo observatório. As pedras maciças estariam posicionadas de acordo com o

movimento anual do Sol, com objetivo de marcar o início das estações. Outra possível finalidade seria prever eclipses da lunares [17].

Figura 4.1: Stonehenge.



Fonte: [51].

Stonehenge não é única dessas construções, o mais curioso: essas estruturas estão espalhadas por todo mundo; inclusive, existem algumas mais antigas como *Gobekli Tepe* na Turquia (9 000 a. C.) e *Napta* no Egito (4 500 a. C.). O que chama atenção na Europa pré-histórica é a quantidade dessas estruturas, nas ilhas britânicas são cerca de 1 000. Outros exemplos desse tipo de estrutura são: *Drombeg* na Irlanda, *Xaghra Circle* em Malta e *Callanish* na Escócia.

4.2 A Astronomia na China Antiga

Na China antiga a tradição de observar os céus era muito presente. Desde o início, os chineses mostraram familiaridade com os cosmos; já por volta de 2300 a. C. dividiram os céus em quatro grandes seções e vinte e oito pequenos grupos ou constelações. Tal distribuição tratava-se, possivelmente, das coordenadas da Lua durante o ciclo mensal [52].

A medição do tempo era uma das principais atividades astronômicas. Para eles, manter um calendário preciso possuía o significado de paz e prosperidade. Para isso, o Sol e a Lua eram indispensáveis. O sistema de calendários usados por eles se baseava nas fases da Lua e na posição do Sol. Com isso, mediam as posições das estrelas, em cada uma das vinte e oito constelações, determinado os períodos e ocorrência dos fenômeno.

Através de centenas de mudanças políticas e sociais, os chineses foram creditados por manterem a vigilância contínua mais longa do céu desde o advento das inscrições de ossos de oráculos por volta de 2400 a. C. Infelizmente, pelos padrões modernos, a grande maioria dos registros astronômicos antes de 720 a. C. é tão breve que muitos mal mencionam a data do evento, sem falar em detalhes sobre como um eclipse pode parecer. Por volta de 720 a. C., foram observadas a ocorrência de cerca de 37 eclipses solares [53].

Apesar das constantes e insistentes observações, não existem registos científicos formais dessas observações. Assim, como outras culturas antigas, os chineses usavam técnicas e faziam anotações, muito mais com a finalidade de prever eventos e associar a crenças do que propriamente formular um ideal científico. Os resultados obtidos tinham um caráter mais religioso e político do que propriamente científico, embora esse se manifestasse em certas ocasiões, de forma empírica, até.

4.3 A Astronomia no Egito Antigo

Os registros matemáticos astronômicos no Egito antigo são bem raros. A Astronomia egípcia começa desde os tempos da pré-história, por volta de 5000 a. C. já haviam desenvolvido um calendário. O ano egípcio se baseava no Sol, possuía 365 dias, com 12 meses de 30 dias mais 5 dias adicionais, destinados a cerimônias.

Foram capazes de desenvolver um sistema de constelações. As grandes construções do Egito antigo se baseiam nas estrelas. Como por exemplo a grande pirâmide de *Gizé*, construída por volta de 2550 a. C., com cerca de 46 andares e 146,6 m de altura. Tal monumento possui eixos aéreos voltados para a estrela de Siriús e para a constelação de Orion.

Os egípcios também construíram enormes estruturas que tinham por finalidade determinar a ocorrência de Solstícios e das estações chuvosas. Essas estruturas tratavam-se de um calendário solar e tinham o formato de círculo de pedras. A mais antiga com esse formato localizava-se no deserto da Núbia, *Nabta Playa*, representada na Figura 4.2; construída por volta de 5500 – 4500 a. C, possuía um diâmetro 3,6 metros [54].

Figura 4.2: Nabta Playa.



Fonte: [55].

Após o declínio da civilização egípcia antiga, a cidade de Alexandria se tornou um dos mais importantes centros de astronomia, especialmente dos gregos. Entre eles estavam Eratóstenes que calculou o diâmetro terrestre e Tales de Mileto que trouxe os fundamentos da geometria e da astronomia.

4.4 A Astronomia na Mesopotâmia

Os astrônomos mesopotâmicos, mais especificamente os babilônicos, foram os primeiros a reconhecer padrões nos fenômenos astronômicos. Os mesmos descobriram que tais fenômenos se repetiam em determinados períodos de tempo. Para registrar os acontecimentos eles se utilizavam de tábuas *cuneiformes*¹. Com isso, estudaram a variação da luz solar, o planeta Vênus, a posição das estrelas e os eclipses.

Para prever os eclipses por exemplo, faziam traçados referentes ao movimento do Sol, Lua, estrelas e planetas. Eles também dividiram o céu em 12 constelações, elaborando o calendário lunar, cujos meses se alternavam em 29 e 30 dias, totalizando 354 dias [17]. Também desenvolveram as *clepsidras*, instrumentos que possuíam a função de medir o tempo. A medida do tempo se dava pelo escoamento da água no instrumento.

Se deve aos mesopotâmicos o feito extraordinário da divisão da circunferência em 360 partes iguais. Conforme [49], com o desenvolvimento astronômico, os babilônicos adotaram uma unidade de medida de distâncias, *milha babilônica*², usada para medir distâncias muito longas. Para medir o tempo eles passaram a contar o tempo necessário para se percorrer uma milha babilônica. Nessa maneira de medir o tempo, um dia era formado por 12 milhas de tempo e cada milha de tempo possuía 30 partes iguais, obtendo assim $30 \times 12 = 360$ partes iguais para o ciclo completo.

Embora, provavelmente, exista grande quantidade de estudos por parte dos mesopotâmicos, tais estudos não se mostraram voltados para uma teoria científica astronômica. Utilizavam, na maioria das vezes, conhecimentos empíricos e aritméticos, que não envolviam cosmologia, geometria ou filosofia. Aparentemente, os *Caldeus*, como eram conhecidos os astrônomos babilônicos, estavam mais preocupados em estudar movimentos e trajetórias dos objetos [56].

Apesar disso, os resultados e conhecimentos mesopotâmicos seriam de suma importância para os gregos e helenísticos desenvolverem suas teorias. Entre as influências estão a elaboração de calendários, o uso do sistema sexagesimal, um catálogo de 36 estrelas que relacionavam os meses do ano e os registros de solstícios e eclipses.

4.5 A Astronomia na Grécia Antiga

Embora outras grandes culturas tenham trabalhado fortemente a observação dos céus, ao experimentar e teorizar sobre tal, foi na Grécia antiga que a Astronomia ganhou um caráter científico. Não somente na Grécia se deu o processo, mas também tendo a mesma como principal centro de pensadores. Estudiosos estes, que estenderam seus experimentos.

Os experimentos e conhecimentos dos gregos, também se relacionavam com outras culturas como os mesopotâmicos e os egípcios. Muitas das experiências praticadas pelos gregos

¹Escrita em cunhas ou tabuas, de barro ou argila, que registravam os conhecimentos dos mesopotâmicos, criada pelos sumérios cerca de 3 500 a. C, era composta por mais de dois mil símbolos.

²cerca de sete milhas atuais.

se basearam em teorias e resultados dessas culturas, bem como as próprias observações e resultados.

Como se sabe as culturas mais antigas tiveram papel influente no desenvolvimento da Matemática, tendo esta influenciado na Astronomia da época, especialmente com conhecimentos relacionados a geometria e trigonometria.

4.5.1 Tales de Mileto e os fundamentos da Astronomia

Tales de Mileto ($\sim 624 - 546$ a. C.) foi o primeiro cientista Jônico³, introduzindo os fundamentos da Astronomia. Tales buscava compreender as origens do universo, refutando a mitologia. Baseou-se, para isso, em conhecimentos adquiridos em viagem à Mesopotâmia e ao Egito. Conta-se que Tales previu um eclipse solar, por meio observações feitas das posições da Lua, da Terra e do Sol, feitas a olho nu. Acreditava que a água era o princípio para tudo que existe. Defendia, ainda, que a Terra flutuava sobre as águas, conforme a Figura 4.3.

Figura 4.3: Terra segundo Tales.



Fonte: [57].

4.5.2 Anaximandro de Mileto e as primeiras experiências científicas

Anaximandro de Mileto ($\sim 610 - 547$ a. C.) foi colega de Tales, o primeiro a fazer experiências científicas no campo da Astronomia. Para ele o princípio de tudo era o infinito - o *apeiron*. Por meio de uma vareta vertical, determinou a duração do ano e das estações. Também foi o primeiro, na Grécia, a fazer um relógio de sol - *Gnômon*, um mapa do mundo (conhecido) e de um globo celeste, conforme a Figura 4.4.

³Nome dado aos componentes da escola Jônica, fundada pelo próprio Tales, localizada na cidade de Mileto, na Jônia.

Figura 4.4: Mapa de Anaximandro.



Fonte: [58].

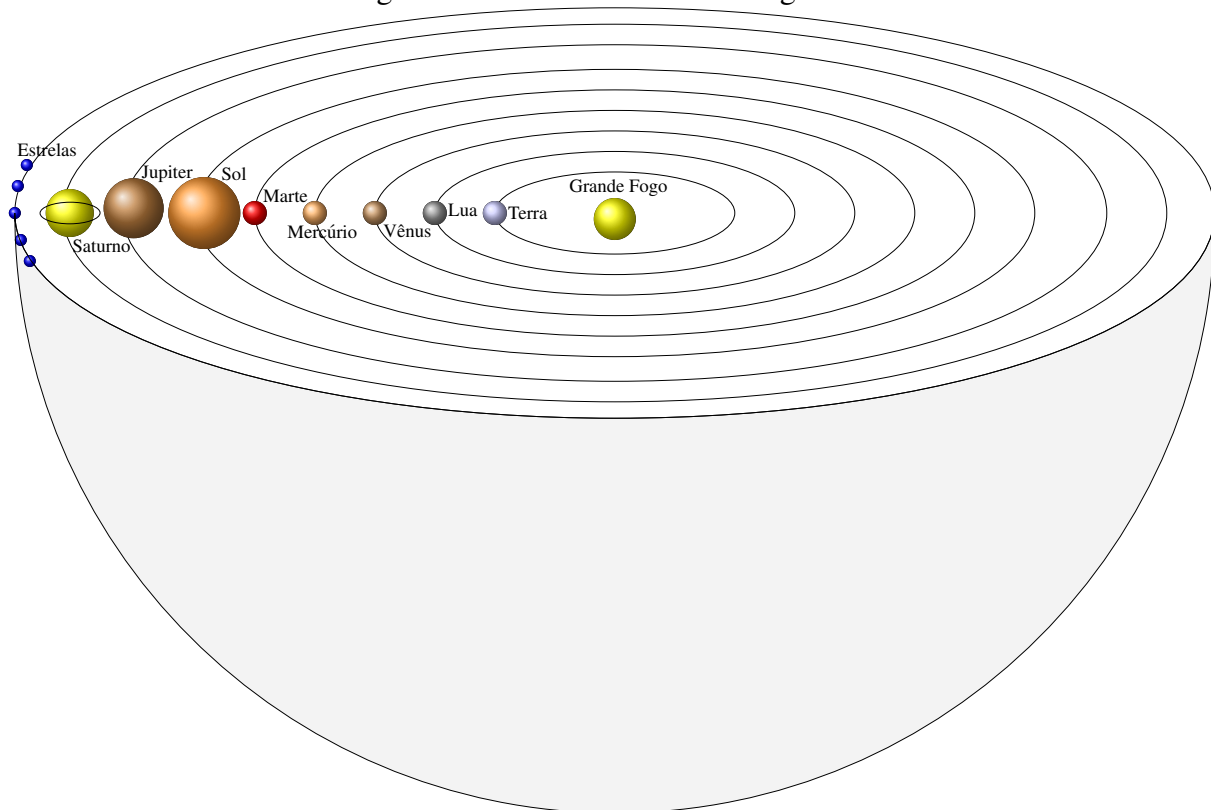
Anaximandro afirmava que a Terra não era suspensa ou sustentada nos céus, sendo o centro do universo, equidistante de todos pontos da esfera celeste. Para ele, a Terra era um cilindro suspenso livremente. Defendia que o Sol, a Lua e as estrelas eram buracos ou bolas que se moviam no arqueamento do céu, sobre rodas cósmicas [46].

Segundo ele o Sol estava em uma dessas rodas, deixava escapar fogo e mudava de posição a medida que girava. Em outra bola estava a Lua, essa mesma bola era responsável pelas fases lunares e os eclipses que correriam quando houvesse alguma obstrução. As estrelas eram furos menores, em uma terceira roda mais próxima da Terra.

4.5.3 Pitágoras de Samos e a esfericidade da Terra

Pitágoras de Samos (~ 542 – 497 a. C.) apresentou uma nova perspectiva em relação aos seus antecessores. A cosmologia Pitagórica rompeu com a ideia de Terra plana ou cilíndrica. Trazia a teoria de que a Terra e os demais planetas, a Lua e Sol estariam sobre esferas co-cêntricas ao arredor de um fogo central, conforme a Figura 4.5.

Figura 4.5: Sistema Cósmico Pitagórico.



Fonte: Adaptado de [59].

Pitágoras e seus seguidores, *Os Pitagóricos*, acreditavam que o cosmo era regido pelas relações matemáticas, inclusive o termo cosmo advém dessa crença. Pitágoras acreditava e ensinava que o “Céu todo era uma harmônia e um número”. O número deca⁴ designa o universo, que era considerado um sistema ou um organismo, não somente um aglomerado de seres.

4.5.4 Filolau de Cretona e o movimento terrestre

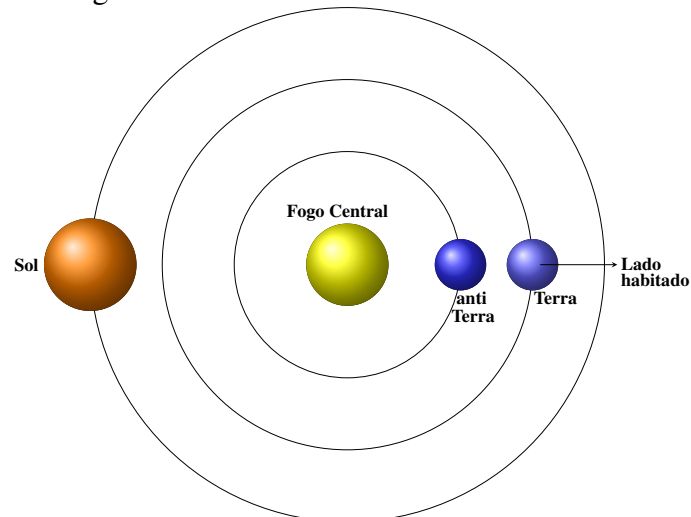
Filolau de Cretona (~ 470 – 390 a. C.) introduziu a teoria do movimento terrestre. Para ele, a Terra girava em torno do seu próprio eixo, rolando no espaço. Filolau deu continuidade a ideia a qual afirmava que a Terra, o Sol, a Lua e os planetas conhecidos na época giravam em torno de um fogo central. Filolau argumentava que tal fogo não era percebido porque o lado habitado da Terra ficava oposto a este, conforme a Figura 4.6.

Filolau propôs que o ciclo da Terra era cerca de 24 horas, do Sol durava um ano, da Lua uma mês e de Marte cerca de dois meses. Filolau ainda acreditava existir um décimo⁵ astro, um planeta invisível ao qual chamou de Anti-Terra, tal astro protegia a Terra de ser queimada pelo Fogo Central.

⁴Consiste na soma dos quatro primeiros números naturais, considerado a mais importante unidade da natureza, constituía uma estrutura perfeita e acabada de cada elemento.

⁵Como já se viu, *Os Pitagóricos* acreditavam que o número 10 era considerado a unidade da natureza.

Figura 4.6: Sistema Astronômico de Filolau.

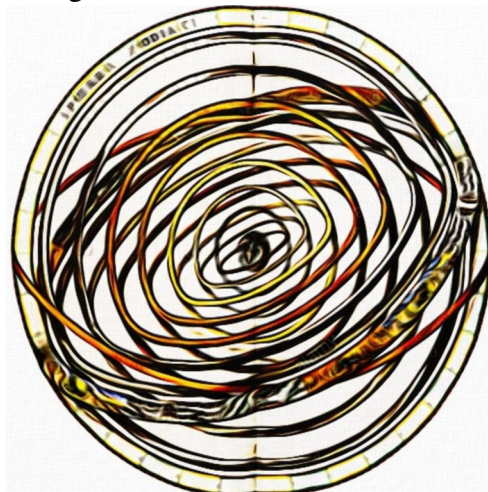


Fonte: Adaptado de [60].

4.5.5 Eudoxo de Cnidos e a Esfera Homocêntrica

Eudoxo de Cnidos (408 – 344 a. C.) foi o primeiro a propor que a duração do ano era de 365 dias e 6 horas. Explicou os movimentos do Sol, da Terra, da Lua e dos planetas por meio de um complexo sistema com 27 esferas co-cêntricas, a Esfera Homocêntrica. Todos os astros giram em torno da Terra, fixa no centro, conforme a Figura 4.7.

Figura 4.7: Esfera Homocêntrica.



Fonte: [61].

Os cinco planetas estariam ligados cada um a quatro esferas, cada uma dessas esferas desempenhavam papéis distintos, uma do movimento diurno juntamente com as estrelas, uma das variações na longitude, uma das variações na latitude e uma do movimento retrógrado. No Sol e na Lua tinha-se apenas três, pois os mesmos não apresentavam movimento retrógrado⁶.

⁶Movimento que um planeta executa em uma direção oposta a de outros corpos do seu sistema planetário, a partir de um ponto de referência.

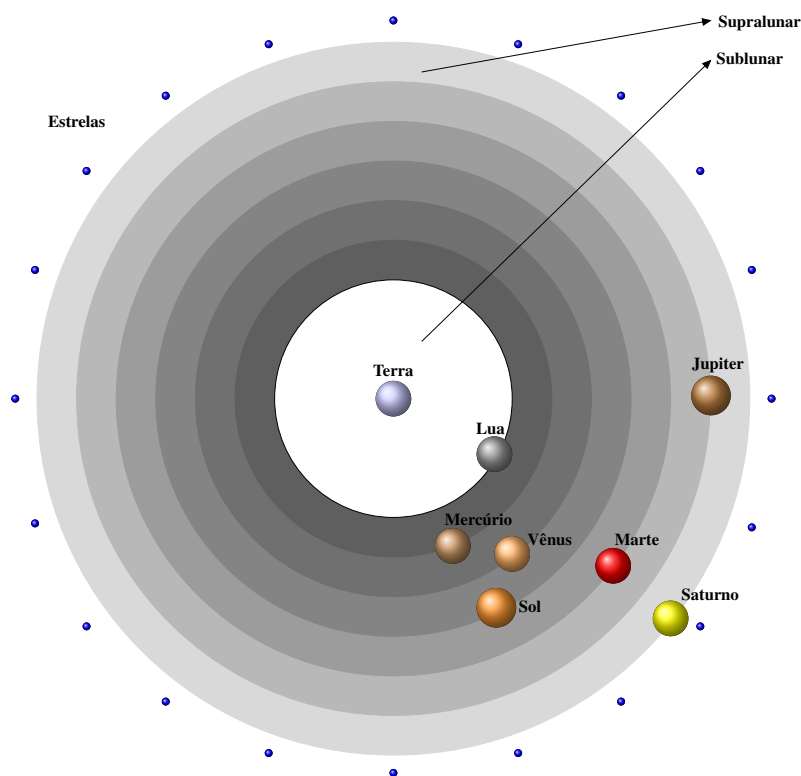
As estrelas estariam em uma esfera (a última e maior do sistema). Tais esferas giravam com velocidades diferentes em torno de eixos inclinados distintos.

4.5.6 Aristóteles de Estagíra e a sistematização do conhecimento astronômico

Aristóteles de Estagíra (384 – 322 a. C.) foi responsável por sistematizar o conhecimento astronômico de sua época. Aristóteles, entre outras coisas, explicou as fases da Lua, dizendo que as mesmas dependiam do quanto a face da Lua iluminada pelo Sol encontrava-se voltada para a Terra.

Aristóteles também explicou os eclipses lunar e solar. No caso do Sol ocorria quando a Lua encontrava-se entre a Terra e o Sol; já no da Lua, a Terra estava entre a Lua e o Sol, com a Terra a projetar uma sombra na Lua. Aristóteles defendeu a esfericidade da Terra, pelo fato de a sombra da Terra projetada na Lua, durante o eclipse Lunar, possuir o formato arredondado.

Figura 4.8: Sistema planetário de Aristóteles.



Fonte: Adaptado de [62].

Aristóteles adotou a divisão dicotômica do Universo entre Céu e Terra. Considerava a Lua o astro mais próximo da Terra, sendo a órbita lunar a fronteira entre o Céu e a Terra. Desse modo, os corpos celestes (astros) eram supralunares e os corpos terrestres, sublunares [63].

Por outro lado, rejeitou a hipótese da Terra possuir movimento em relação as estrelas. Para ele, se a Terra estivesse em movimento, os corpos (sobre a Terra) cairiam para trás. Afirmava,

assim, que as estrelas deveriam apresentar movimento aparente entre si. Dizia, ainda, que o Universo era esférico e finito, conforme a Figura 4.8 [46].

4.5.7 Aristarco de Samus: distâncias relativas: Terra à Lua e Sol à Terra

Aristarco de Samus (310 – 230 a. C) foi o primeiro estudioso a propor um modelo heliocêntrico⁷ consistente e que se assemelhava ao atual, tendo antecipado Nicolau Copérnico em cerca de 2000 anos. Apesar de correta, a suposição de Aristarco não recebeu muitas atenções na época.

A grande contribuição de Aristarco foi o modelo de cálculo para distâncias relativas, que exploraremos no Capítulo 5. Aristarco determinou a distância da Terra ao Sol em função da distância da Terra à Lua. Para determinar as distâncias relativas Aristarco usou conhecimentos da Trigonometria e utilizou-se das fases da Lua, em quarto minguante e em quarto crescente.

Além disso, Aristarco também mediu os tamanhos dos diâmetros do Sol e da Lua em relação ao da Terra. Embora seus resultados sejam bem diferentes, inclusive abaixo dos atuais, chegou a conclusão que o diâmetro Terra era cerca de 3 vezes o da Lua e que o do sol era cerca de 20 vezes o da Lua.

Por fim, explicou que o Sol não poderia estar na órbita da Terra, pois um corpo tão grande não poderia girar em torno de um corpo tão pequeno, a Terra. Tais avanços, tornou Aristarco muito próximo dos cientistas da atualidade.

4.5.8 Eratóstenes de Cirênia e a circunferência (diâmetro) da Terra

Eratóstenes de Cirênia (276 – 194 a. C.) foi o primeiro estudioso a medir o diâmetro da Terra, conforme exploraremos no Capítulo 5. Para isso, Eratóstenes se valeu do solstício de verão nas cidades de Siena⁸ e Alexandria, ao meio dia, notando que ocorria uma leve diferença na inclinação do Sol nos dois locais.

Ao observar o Sol nas duas cidades, mediu a sombra de uma pequena vareta posicionada perpendicularmente ao solo e a partir de proporcionalidade determinou o comprimento da circunferência da Terra.

4.5.9 Hiparco de Nicéia e a relação dos tamanhos da Terra e a Lua

Hiparco de Nicéia (190 – 120 a. C.) conhecido como o pai da Trigonometria, foi o fundador da Astronomia científica, para muitos, o maior astrônomo da era pré-cristã. Hiparco criou o astrolábio, instrumento usado para medir a distância de qualquer astro em relação ao horizonte, também estabeleceu o sistema de localização pelo cálculo de longitude e latitude, dividindo o globo terrestre em 360°.

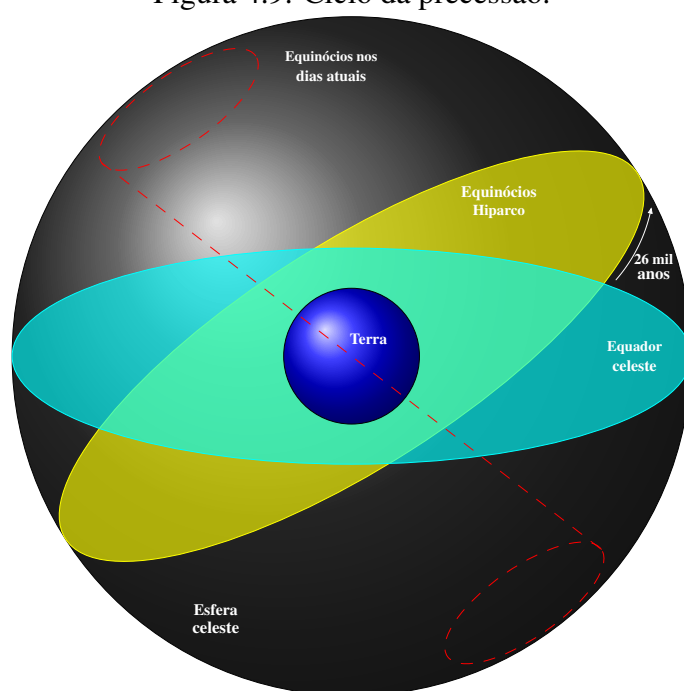
⁷Modelo no qual o Sol é o centro.

⁸Cidade egípcia, atualmente chamada de Aswã.

Hiparco foi responsável pela construção de um observatório na ilha de Rodas⁹. Neste local, fez observações que resultaram em um catálogo da posição no Céu e a magnitude¹⁰ de cerca de 85 estrelas. Hiparco descobriu que o Sol não está sempre na mesma posição do zodíaco quando ocorrem os equinócios. Porém, Hiparco não interpretou a causa pela precessão¹¹ do eixo da Terra.

Para Hiparco a Terra não girava, por isso não possuía polos ou eixo de rotação. Segundo ele quem girava era a esfera das estrelas, em torno de nós. Essa esfera possuía um eixo, polos e equador. Dessa maneira, a precessão dos equinócios era interpretada como devido a um deslocamento do eixo da esfera das estrelas ou do eixo da esfera que transportava o Sol [64].

Figura 4.9: Ciclo da precessão.



Fonte: Adaptado de [65].

Deduziu, de forma precisa, a direção dos polos celestes e a precessão. Chegou a conclusão que o ciclo demorava 26 mil anos, devido a influência gravitacional da Lua e do Sol. Para deduzir tal processo, Hiparco fez comparações das posições das várias estrelas catalogadas com as que foram catalogadas por Timocharis e Aristyllus de Alexandria¹² a aproximadamente 150 anos antes, conforme a Figura 4.9.

Determinou, ainda, que a duração do ano com um erro muito pequeno de 6 minutos. Para isso, observou os equinócios e solstícios consecutivos, embora os resultados fossem inconclusivos.

⁹Ilha situada no Mar Egeu, famosa pelo Colosso de Rodas, uma das sete maravilhas do mundo antigo.

¹⁰A magnitude especificava a intensidade do brilho da estrela, em uma escala de 1 a 6, a olho nu. A mais brilhante estaria na escala 1, assim como a menos brilhante estaria na 6.

¹¹Processo no qual o corpo sofre a mudança no eixo de rotação.

¹²Timocharis e Aristyllus de Alexandria foram os primeiros a medir a distância das estrelas no céu, por meio de ponto fixos ou coordenadas elípticas.

Ele não conseguiu distinguir entre possíveis erros observacionais e variações no ano tropical¹³. No entanto, ao comparar suas próprias observações dos solstícios as observações feitas nos séculos V e III a. C, Hiparco obteve uma estimativa do ano tropical de apenas 6 minutos a mais [66].

Hiparco também determinou o tamanho relativo da Lua e a distância da Terra à Lua. Para isso, utilizou diferentes métodos, chegando à $59r_{\text{Terra}}$ e $67\frac{1}{3}r_{\text{Terra}}$ para a distância da Terra à Lua, conforme exploramos no Capítulo 5. Tal resultado é muito próximo do aceito atualmente, que está entre $57r_{\text{Terra}}$ e $64r_{\text{Terra}}$.

4.5.10 Ptolomeu e o Almagesto

Cláudio Ptolomeu ($\sim 90 - 168$ a. C.) é para muitos o mais marcante nome da Astronomia grega, estudiosos da área dividem a ciência em pré e pós Ptolomeu. Ptolomeu é um marco para Astronomia assim como Euclides¹⁴ é para Matemática; além de suas teorias e descobertas, compilou conhecimentos dos seus antecessores, especialmente de Hiparco. Foi o autor de *Matematike Syntaxis*, mais conhecida como *O Almagesto*, do árabe¹⁵, uma obra dividida em 13 volumes, que tratava de conhecimentos matemáticos e astronômicos.

Tal obra se baseava em resultados como o sistema sexagesimal babilônico e uma retomada a resultados de Hiparco, trazendo junto conhecimentos alcançados por Ptolomeu, como uma famosa tabela de cordas trigonométricas. Descrito como o Manual da Astronomia ou da Matemática Aplicada, *O Almagesto* continha uma descrição matemática dos céus e no terceiro livro, *Hipóteses planetárias*, aborda princípios da física e um modelo geocêntrico [67].

No sistema planetário de Ptolomeu, Sistema Ptolomaico, rompeu com paradigmas dos seus antecessores. De início, diferentemente de Aristóteles e Eudoxo, refutou a ideia da Terra ser o centro das órbitas planetárias, embora acreditasse que a Terra era o centro do universo. Para Ptolomeu a Terra não possuía movimento em relação aos outros astros, ou seja, era estacionária.

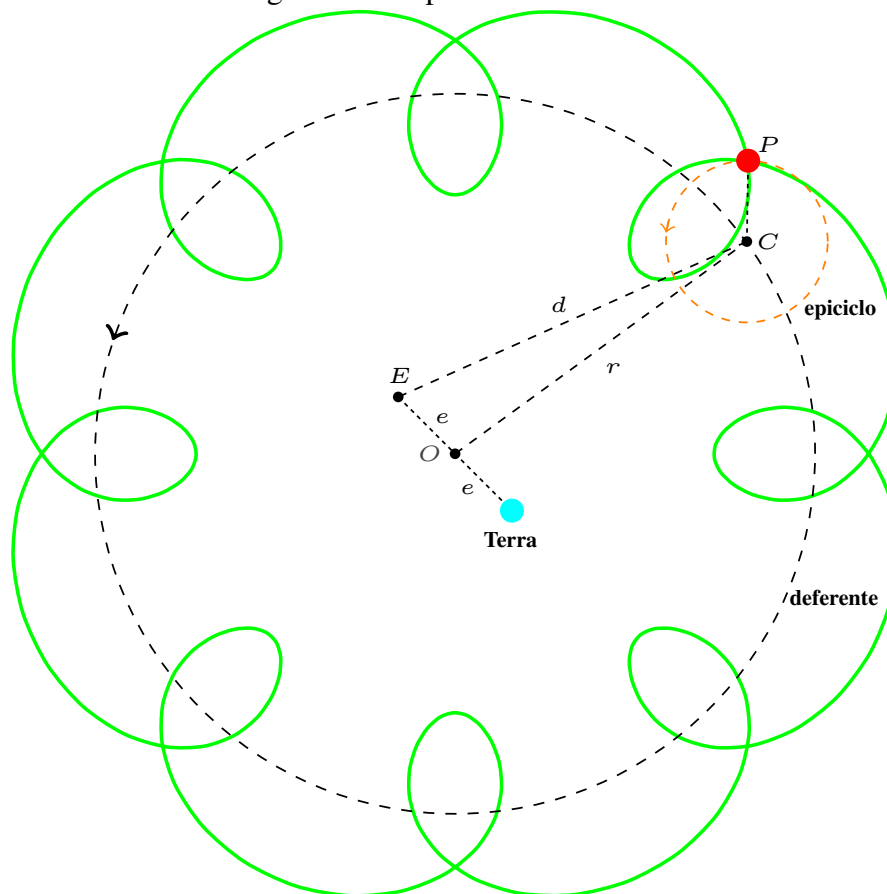
O Sistema Ptolomaico, assim como nos demais, os astros possuíam órbitas circulares. Porém, tal sistema tinha uma peculiaridade: cada astro possuía órbita circular, esta também tendo órbita circular em torno de um ponto fixo, ligeiramente afastado da Terra. Tais órbitas, receberam, respectivamente, os nomes de *epiciclo* e *deferente*. Desse modo, cada astro tinha um deferente e um epiciclo, conforme a Figura 4.10.

¹³Ano tropical, refere-se ao início das estações, corresponde à 365, 2422 dias solares médios; o que equivale à 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos.

¹⁴Euclides foi o responsável pela sistematização de grande parte de conhecimentos matemáticos da antiguidade, em uma obra chamada *Os Elementos*.

¹⁵Os árabes foram responsáveis por traduzir a obra posteriormente.

Figura 4.10: Epiciclo e deferente.



Fonte: Adaptado de [63].

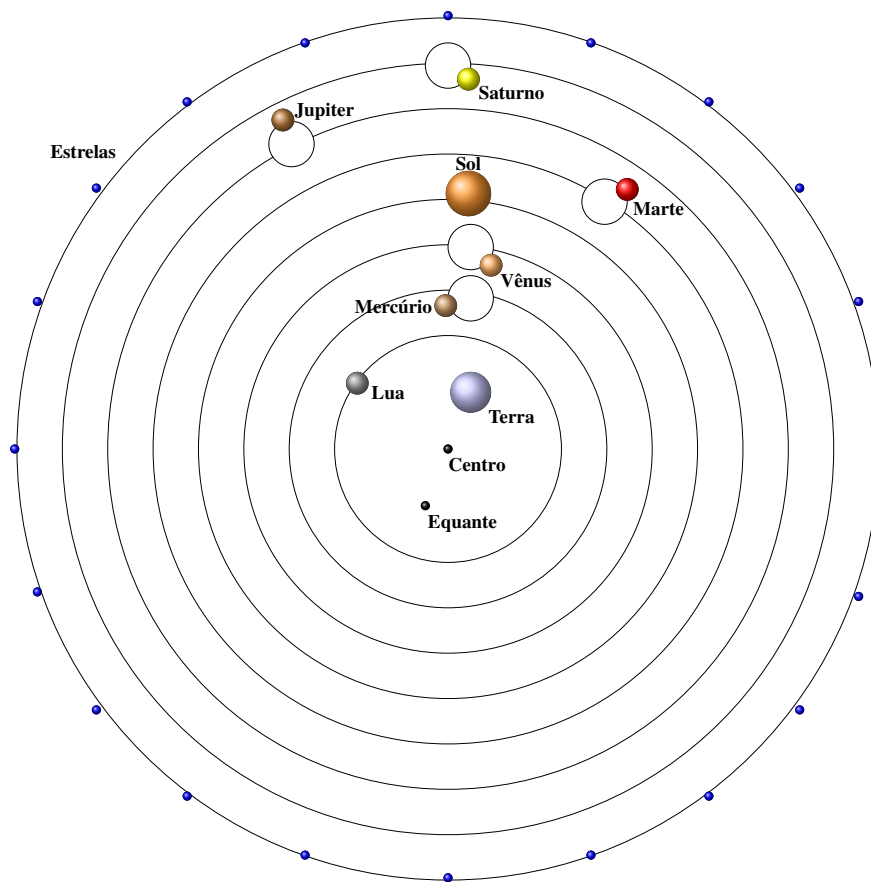
Na Figura 4.10, temos:

- ✓ O é o centro do deferente;
- ✓ E é ponto oposto, em relação ao centro do deferente, à Terra, denominado equante;
- ✓ C é o centro do epiciclo;
- ✓ d é a distância entre E e C ;
- ✓ r é o raio deferente;
- ✓ P é um astro, pode ser inclusive um planeta.

A representação de Ptolomeu, além de trazer a novidade do epiciclo e do deferente, possuía um caráter geométrico. A distância r , entre o centro O do deferente e o centro C do epiciclo, é constante, mas a velocidade de C ao redor de O não é constante; este move-se mais rápido quando se aproxima da Terra e diminui a velocidade a medida que se afasta.

Nesse sistema os cinco planetas orbitavam sobre seus próprios epiciclos e estavam sobre seus respectivos deferentes, conforme a Figura 4.11.

Figura 4.11: Sistema Planetário de Ptolomeu.



Fonte: Adaptado de [59].

Somado a estes fatos ao da Terra estar fora do centro, as distâncias da Terra aos demais astros seria variável. Tais fatos levaram a nomenclatura *sistema de epiciclos excêntricos*¹⁶.

4.6 A idade medieval

As ideias propostas por Cláudio Ptolomeu foram um marco na história da Astronomia, tendo perdurado por mais de 1 400 anos. Embora tenham sido aceitas e utilizadas por muito tempo, parte desses conceitos começaram a incomodar alguns estudiosos da era medieval, que vieram a propor novas teorias como a infinitude do universo e os modelos planetários heliocêntricos.

4.6.1 Nicolau Copérnico

Nascido em Torún na Polônia, Nicolau Copérnico (~ 1473 – 1543) foi um astrônomo e matemático que se dedicou principalmente em desenvolver um modelo alternativo ao sistema planetário de Ptolomeu. Leitor do *Almagesto*, Copérnico se incomodava com algumas questões propostas na obra. Copérnico não concordava, por exemplo, com o fato da Terra ser estática.

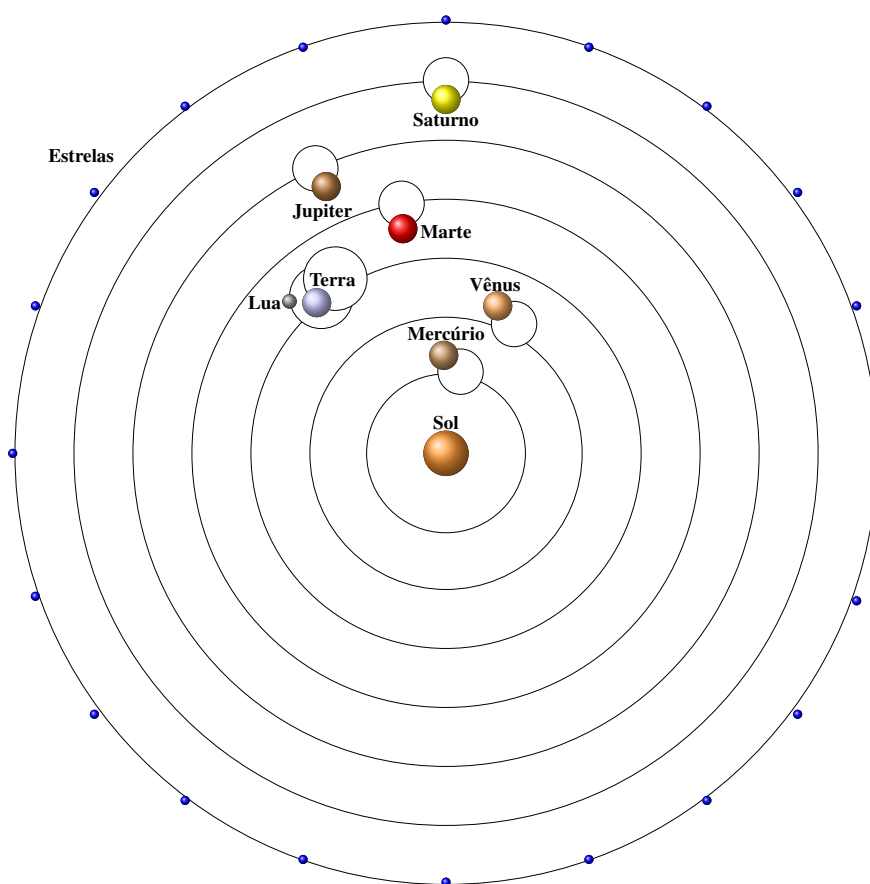
¹⁶Ptolomeu cita Apolônio de Perga como um dos criadores do sistema de epiciclos excêntricos para representar os movimentos do Sol, Lua e planetas, no lugar das esferas de Eudóxio e Aristóteles [17].

Em sua obra magna *Revolotionibus Orbinum Coelestium*, Copérnico traz uma reformulação do modelo planetário que durava por mais 14 séculos. Diferentemente de Ptolomeu defendia que os astros orbitassem em torno do Sol, não da Terra. O Sol não seria o centro do universo, mas estaria próximo.

Embora não fosse o primeiro a propor um modelo Heliocêntrico, Copérnico foi o primeiro a propor tal modelo de forma minuciosa e técnica. Na obra de Copérnico, publicada apenas quando estava prestes a morrer, abordam-se várias hipóteses sobre os astros, por meio de cálculos e observações. A partir daí, ele explicou o movimento e a posição da Terra, Lua, Sol e dos planetas.

Também propôs retomar a ideia dos gregos antigos, que acreditavam no movimento uniforme e com trajetória circular dos corpos celestes. Copérnico sentia um incomodo muito grande com a quantidade de círculos do sistema ptolomaico, embora aceitasse a ideia dos epiciclos para explicar a variação das distâncias e das posições dos astros. Mas o que incomodava, de fato, era o equante.

Figura 4.12: Sistema Planetário de Copérnico.



Fonte: Adaptado de [68].

Copérnico buscou explicar, de forma mais simples, o movimento dos astros, conforme a Figura 4.12. Para isso, se baseou no movimento da Terra. Atribuiu três tipos de movimento à Terra: rotação diária, volta anual e inclinação anual de seu eixo. Assim, considerou a translação

da Terra ao redor do Sol, as estações do ano pela precessão e o movimento retrogrado dos planetas.

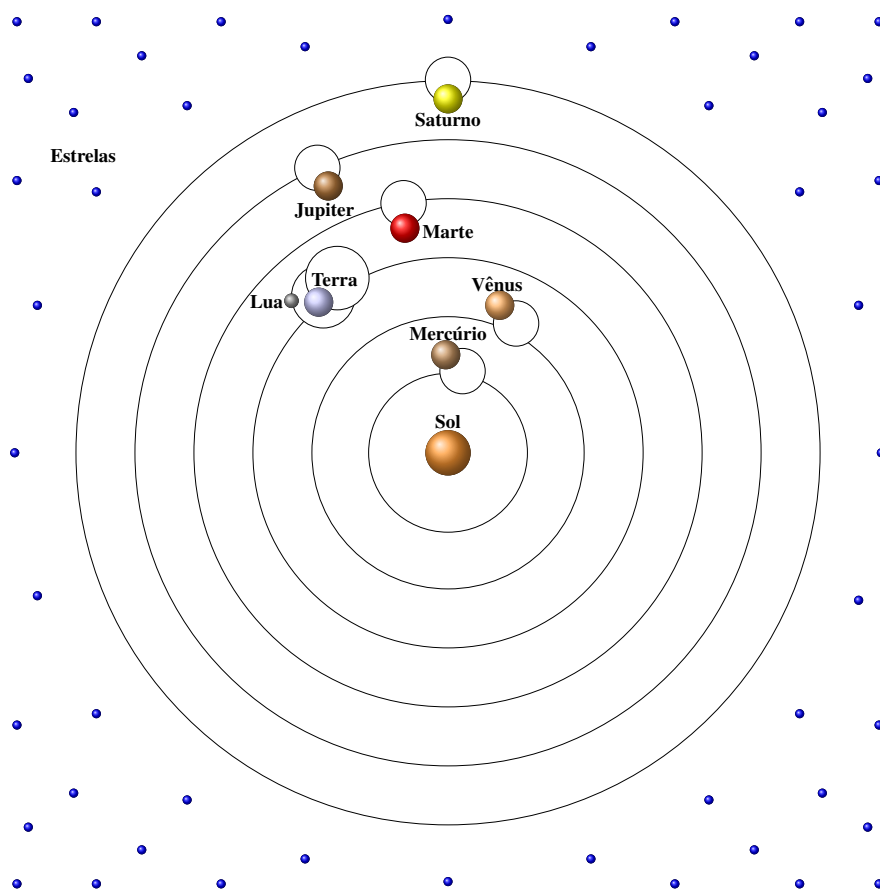
Embora apresentasse tais argumentos, Copérnico não tinha provas para o que afirmava, inclusive ele mesmo não estava seguro. Para dar mais consistência ao que propôs, apelou para a questão estética ao afirmar que o Sol em repouso, no meio era o mais belo templo do Universo. Dizia ainda que o Sol ao centro, iluminava toda família de planetas que lhe orbitava [63].

4.6.2 Thomas Digges

Natural de Wootton, Reino Unido, Thomas Digges (1546 – 1595) foi o responsável por explicar a obra de Copérnico, *De Revolutionibus*. Em sua obra *A perfit Description of the caelestiall orbes*, de 1576, propõe um modelo que era similar ao apresentado por Copérnico, diferindo apenas na distribuição das estrelas [69].

Assim como Copérnico, acreditava no modelo Heliocêntrico, embora se deixasse levar muito pela concepção religiosa. Digges acreditava na existência de um céu imóvel situado no espaço. Para ele, o céu era preenchido por uma infinidade de estrelas dispersas por todo o espaço, numa altitude elevada, remetendo a ideia de infinito, conforme a Figura 4.13.

Figura 4.13: Sistema Planetário de Digges.



Fonte: Adaptado de [70].

Digges descrevia as estrelas como luzes gloriosas, que ultrapassavam excelência do Sol,

tanto em qualidade como em quantidade. Para ele nas estrelas habitavam os anjos celestes, a corte de Deus, habitação dos eleitos. Para mais detalhes consultar [17].

4.6.3 Giordano Bruno

Giordano Bruno (1550 – 1600) foi o grande defensor das ideias, expostas na obra de Copérnico. Suas principais obras datam de 1584: *De l'infinito universo e mondi*; *De la causa, principio e uno*; e *La cena de le ceneri* [17].

Diferentemente de Copérnico e Digges, Bruno não se remetia tanto aos aspectos religiosos, rompeu com a parte mística, não falando de Santos ou anjos. Tal aspecto o fez ser acusado de heresia e depois de panteísmo. Por isso foi queimado vivo.

Bruno defendeu que o Universo era infinito, que passava por diferentes transformações de forma continua. Isso ia contra a ideia pregada pela igreja católica, que defendia o universo como um sistema rígido de seres, estruturados em uma certa ordem desde a eternidade[39].

Além de defender a infinitude do Universo, sem limites, Bruno afirmava que as estrelas eram sóis ao redor dos quais giravam planetas. Para ele, tais planetas eram habitados e os habitantes destes, acreditavam estar no centro do Universo. Bruno acreditava que tudo possuía vida.

4.6.4 Tycho Brahe

Tycho Brahe (1546 – 1601) foi um astrônomo observacional da era que precedeu a invenção do telescópio, em seu observatório chamado *Uranienborg*, na ilha de Ven, entre a Dinamarca e Suécia, estudou a posição das estrelas e dos planetas. Deu prosseguimento a pesquisas e resultados alcançados por Copérnico.

Suas observações alcançaram um nível de precisão sem igual para a época. Entre outras coisas, estudou de forma detalhada as fases da lua e reuniu muitos dados que foram de suma importância para Johannes Kepler elaborar sua teoria, possibilitando a descoberta das leis dos movimentos dos planetas.

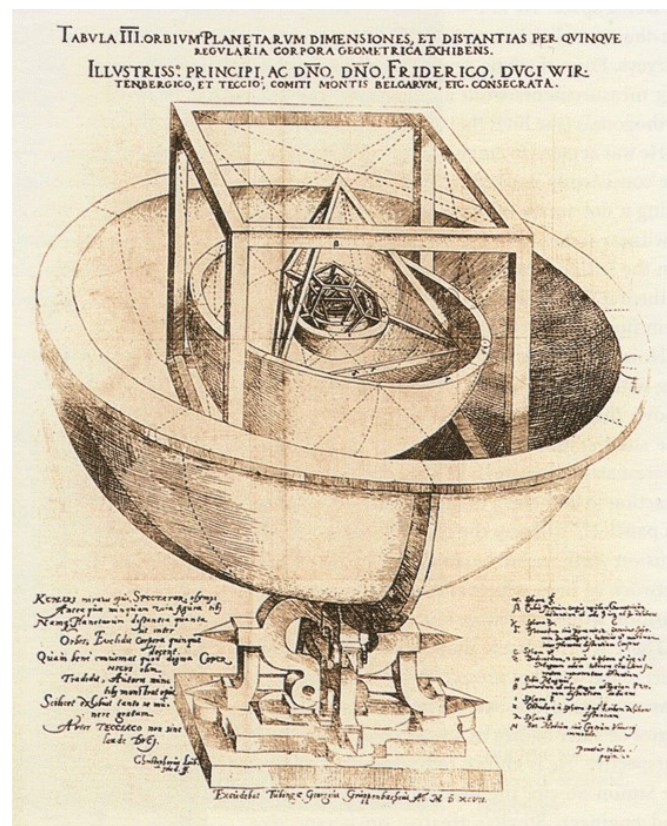
Diferentemente de Thomas Digges e Giordano Bruno, Tycho Brahe não defendia o sistema de Copérnico. Tycho Brahe propôs um sistema no qual os planetas orbitavam o Sol, ao passo que o Sol girava em torno da Terra [17].

4.6.5 Johannes Kepler

Johannes Kepler (1571 – 1630) foi um dos grandes responsáveis pela chamada revolução científica no século XVII, tem como feito principal a elaboração das três leis fundamentais da mecânica celeste, as leis Kepler. Kepler foi assistente de Tycho Brahe e responsável por dar continuidade em suas pesquisas sobre observação dos astros, embora tivesse uma visão um pouco distinta a respeito do sistema planetário.

Kepler leu as ideias de Copérnico, se tornando um admirador e defensor do modelo heliocêntrico. Kepler foi o autor da segunda¹⁷ defesa publicada do sistema proposto por Copérnico. Na obra intitulada *Mysterium Cosmographicum*, publicada em 1597, Kepler propõe que as relações das distâncias entre os seis planetas conhecidos até aquele momento poderiam ser explicadas por meio dos cinco sólidos de Platão, limitados em uma esfera que representava a órbita de Saturno, o último dos planetas, conforme a Figura 4.14 [71].

Figura 4.14: Os cinco sólidos de Platão, limitados em uma esfera que representava a órbita de Saturno.



Fonte: [72].

Kepler herdou de Tycho Brahe os dados e o posto de matemático imperial, com a missão de concluir os trabalhos iniciados pelo seu mestre. A partir de então, Kepler se dedicaria pelos próximos 20 anos a obter informações sobre o movimento dos planetas, especialmente de Marte. Entre outras coisas, determinou diferentes posições da Terra por meio dos períodos de Marte.

Kepler possuía uma visão mística do cosmos, para ele o Sol representava um símbolo de Deus, a fonte da força que impulsionava o sistema. De início, Kepler supôs que o poder emanado do Sol diminuía de acordo com a distância, ocasionado um movimento mais rápido ou lento a medida que os planetas se aproximava ou distanciava do Sol [71].

A partir de medições do afélio¹⁸ e periélio¹⁹ da Terra e Marte, chegou a uma fórmula que

¹⁷Thomas Digges foi o primeiro a publicar uma defesa do modelo de Copérnico, em um apêndice de 1576.

¹⁸Ponto mais distante do Sol, na órbita de um planeta.

¹⁹Ponto mais próximo do Sol, na órbita de um planeta.

relacionava a taxa de movimento de um planeta a sua distância ao Sol, como sendo grandezas inversamente proporcionais. Para garantir a veracidade de tal afirmativa, Kepler necessitava de de inúmeros cálculos. Foi quando ele formulou a proporção de maneira geométrica, levando a segunda lei do movimento planetário: *os planetas varrem áreas iguais em tempos iguais*.

A partir daí, usando a lei da taxa geométrica se dedicou a calcular a órbita de Marte. Inicialmente obteve a órbita da Terra, conseguindo ajustá-la ao círculo excêntrico. Para a órbita de Marte não obteve o mesmo resultado. De início, tentou representar a órbita marciana a ajustando a um modelo oval. Após inúmeras tentativas, não obteve sucesso. Foi quando, por volta de 1605, teve a ideia de usar a elipse, chegando na posição do Sol como um dos focos de uma elipse [46].

A partir daí, Kepler estabeleceu que a órbita de Marte tratava-se de um elipse. Assim, concluindo a Primeira Lei de Kepler para o movimento planetário: *todos os planetas movem-se em elipses, com o Sol em um dos focos*. Apesar disso, Kepler não fez uma análise matemática para os demais planetas. Mais tarde em 1609, Kepler publicou uma obra intitulada *New Astronomy*, na qual aborda a primeira e a segunda lei do movimento planetário.

Já a terceira e última das leis do movimento planetário, propostas por Kepler, só foi estabelecida em 1618 cerca de 22 anos depois de ser proposta. A obra originalmente estaria em uma obra de título *Prodromus Dissertationum* de 1596, teve sua publicação em *Harmonices Mundi Libri V* de 1619 [17]. Tal resultado tratava-se da proporcionalidade dos quadrados das revoluções dos cubos das distâncias, foi assim enunciada: *O quadrado do período sideral de um planeta é diretamente proporcional ao cubo do comprimento do semieixo maior de sua órbita* [35].

4.6.6 Galileu Galilei

Galileu Galilei (1564 – 1642) foi um físico e matemático italiano responsável por desenvolver o moderno espírito científico, defendendo a harmônica entre experiência e teoria. Galilei foi responsável por estudos relacionados ao movimento acelerado e do pêndulo. Entre outras coisas desenvolveu o compasso geométrico²⁰ e um termômetro, além de ter sido o precursor do relógio de pêndulo.

Certo dia, assistindo a um serviço na Catedral de Pisa, se distraiu ao observar um grande lustre de bronze suspenso. A lâmpada posta para fora a fim de iluminar mais facilmente, solta, oscilava para cá e para lá, com amplitude que decrescente de forma gradativa. Ao usar as batidas de seu pulso para medir o tempo, verificou que o período de uma oscilação da lâmpada não dependia da amplitude do arco descrito na oscilação [49].

Posteriormente, por meio de experiências, mostrou que o período de um pêndulo em movimento não dependia do peso de sua massa oscilante, mas sim apenas do comprimento de sua haste. Segundo relatos históricos foi daí que despertou o interesse de Galileu pela ciência e

²⁰Instrumento que permitia encontrar a medida de ângulos e áreas.

pela Matemática. Posteriormente, teve a oportunidade de assistir a um curso de geometria na Universidade de Pisa. Como consequência pediu a família permissão para abandonar a medicina, passando dedicar-se à ciência e à Matemática, campos estes que possuía forte talento.

Em torno de 1607 um aprendiz do oculista holandês Hans Lippershey descobriu que colocando-se duas lentes a uma distância apropriada da outra, os objetos vistos através do par de lentes pareciam maiores. O patrão arranjou as duas lentes num tubo e exibiu o instrumento como um brinquedo na vitrina de sua loja. Certa vez, um funcionário do governo comprou objeto presenteando o príncipe Maurício de Nassau. Nassau, também comandante das forças armadas dos Países Baixos, de imediato vislumbrou a possibilidade de usar o instrumento para fins militares.

A invenção dos óculos de alcance chegaram a Galileu em 1609, que logo construiu um outro par muito superior ao de Lippershey. Do alto da igreja mais alta da cidade de Veneza, fez uma demonstração de seu instrumento, representado na Figura 4.15. Através do objeto os senadores venezianos puderam ver as velas de um navio que se aproximava, cerca de duas horas antes que ele fosse visível a olho nu. Galileu presenteou com esse exemplar o doge de Veneza²¹. Assim, como Nassau, reconheceu potencialidades do instrumento em operações navais e militares [49].

Figura 4.15: Telescópio de Galileu.



Fonte: [73].

Galileu construiu outros quatro telescópios²², cada um mais potente do que o outro. O último deles possuía um potência cerca de 30 vezes de ampliação. Este instrumento possibilitou à Galileu observar: duas pequenas estrelas a leste do planeta Júpiter e uma a oeste, na noite de 7 de janeiro de 1610. Na noite seguinte, observou que as três estrelas estavam a oeste do planeta,

²¹O doge era o principal dirigente da republica veneziana.

²²Como veio a se chamar o novo instrumento - do grego tele, “distante”, skopos, “observar” [49].

e três noites depois notou que existia uma quarta estrela pequena girando em torno de Júpiter. Com isso, havia descoberto quatro satélites luminosos de Júpiter, o que confirmava a teoria de Copérnico dos corpos pequenos girando em torno de outros maiores [49].

Por meio do telescópio Galileu também conseguiu observar manchas no Sol, montanhas na Lua, as fases de Vênus e os anéis de Saturno. Tais descobertas, fizeram com que surgissem oposições fanáticas de muitos homens da Igreja. Os opositores, adeptos das ideias Aristotélicas, defendiam entre outras coisas que o Sol não possuía manchas e a Terra como centro do Universo. Certa vez, Galileu foi acusado de colocar os quatro satélites de Júpiter dentro do seu telescópio.

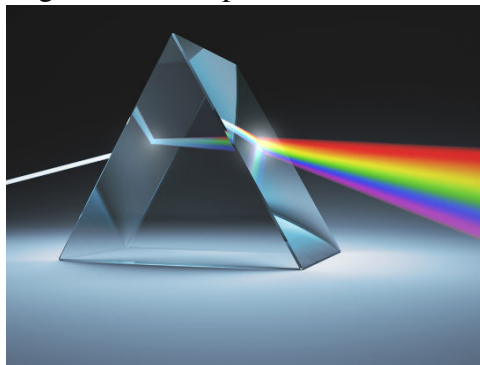
Tais fatos e a publicação de um livro no qual defendia a teoria de Copérnico, levaram Galileu a ser convocado comparecer diante da Inquisição. Nessa época, Galileu encontrava-se já doente e envelhecido, mesmo assim foi forçado, sob ameaça de tortura, a retratar-se de suas descobertas científicas. A renegação de sua própria consciência destruiu a vida do velho sábio, ficou cego e morreu em janeiro de 1642. Mesmo momentos antes da morte ainda encontrava-se sob a vigilância da Inquisição, prisioneiro na sua própria casa [46].

4.6.7 Isaac Newton

Isaac Newton (1643 – 1727) foi um físico, matemático e astrônomo sem igual, tendo realizado trabalhos que serviram de legado e base à ciência moderna. Embora Newton seja mais lembrado pelas suas leis da mecânica e pelo desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, na Astronomia teve importante contribuição.

Newton se dedicou, entre muitas coisas, a óptica e a natureza da luz. A partir de muitas observações e experiências mostrou que a luz branca é formada a partir da junção de cores: vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, anil e violeta. Tais cores separáveis por meio de um prisma, rompendo com a ideia aristotélica de que a luz branca era uma entidade simples, conforme a Figura 4.16 [17].

Figura 4.16: Dispersão da luz branca.



Fonte: [74].

A partir disso, Newton concluiu que no *telescópio refrator* sempre ocorria uma dispersão na luz em diferentes cores ao atravessar o prisma. Afim de corrigir isso, Newton propôs e

construiu o *telescópio refletor* ou *telescópio newtoniano*, que possuía cerca de 15 centímetros de comprimento.

Para construção do *telescópio newtoniano*, Newton acoplou um espelho plano a um tubo, com inclinação de 45° , refletindo a imagem para uma ocular colocada no lado. Esse telescópio, representado na Figura 4.17, era capaz de gerar imagens nove vezes maiores do que um refrator, que era quatro vezes mais longo [46].

Figura 4.17: Telescópio Newtoniano.



Fonte: [75].

Apesar dos resultados apresentados sobre ótica, foi na mecânica celeste que Newton apresentou o trabalho mais relevante, a lei da gravitação universal. O enunciado de tal lei diz que: *Dois corpos se traem com uma força proporcional ao produto entre suas duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.*

Tal resultado possibilitou um entendimento novo a respeito dos corpos celestes e suas órbitas, traz como e por quê os planetas descrevem órbitas ao redor do Sol segundo as Leis de Kepler. Para obter tal resultado, Newton imaginou que a força centrípeta na Lua era proporcionada pela atração gravitacional da Terra e se valendo da terceira lei de Kepler chegou ao novo resultado [46].

Por volta de 1679, mostrou que a lei das áreas de Kepler era uma consequência da força centrípeta, e que a órbita era uma elipse, conforme exploraremos no Capítulo 6. Já em 1684, Edmond Halley (1656 – 1742) em visita Newton perguntou-lhe a respeito das órbitas planetárias, como já desvendo o problema muitos anos antes, mesmo não tendo a demonstração do resultado em mãos a enviou logo depois [49].

Ao receber tal demonstração, Halley incentivou Newton a escrever um trabalho completo sobre a nova Física e sua aplicação à Astronomia. As descobertas alcançadas por Newton foram publicados na obra *Philosophiae naturalis principia mathematica*, conhecida simplesmente por *Principia*, sendo o tema central da obra.

Os resultados apresentados em *Principia* fez da obra o marco da nova ciência, uma nova visão de mundo, inaugurando a chamada era da razão ou iluminismo. A Gravitação Universal foi um dos maiores feitos intelectuais da história, por isso um sucesso. Explicava, entre outras

coisas, o movimento dos planetas e satélites do Sistema Solar, o movimento dos cometas e as marés dos oceanos [63].

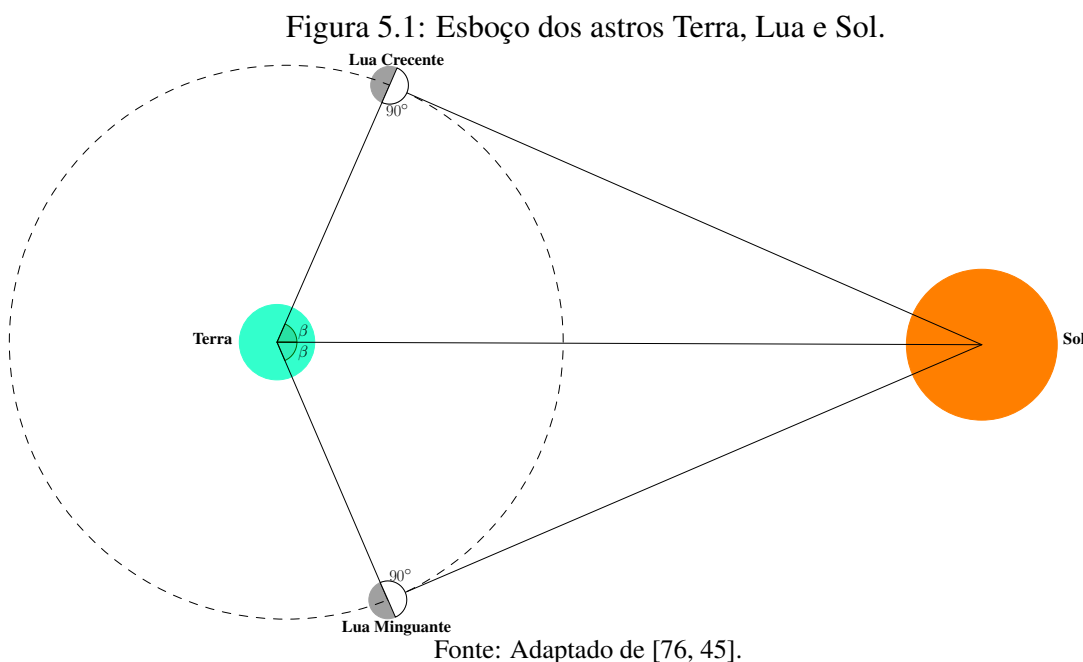
Capítulo 5

ARISTARCO, ERATOSTENES E HIPARCO: CÁLCULO DE DISTÂNCIAS E TAMANHOS RELATIVOS

Neste capítulo apresentamos a descrição de resultados alcançados por Aristarco, Eratóstenes e Hiparco. Tais estudos evidenciam a importância da Geometria e da Trigonometria, principalmente para medir distâncias e calcular o tamanho dos astros [45].

5.1 Aristarco: distâncias relativas Terra à Lua e Sol à Terra

De início, Aristarco propôs a existência de um triângulo retângulo, formado a partir de pontos nas superfícies da Terra, Lua e Sol. Este seria retângulo no ponto sobre superfície da Lua.

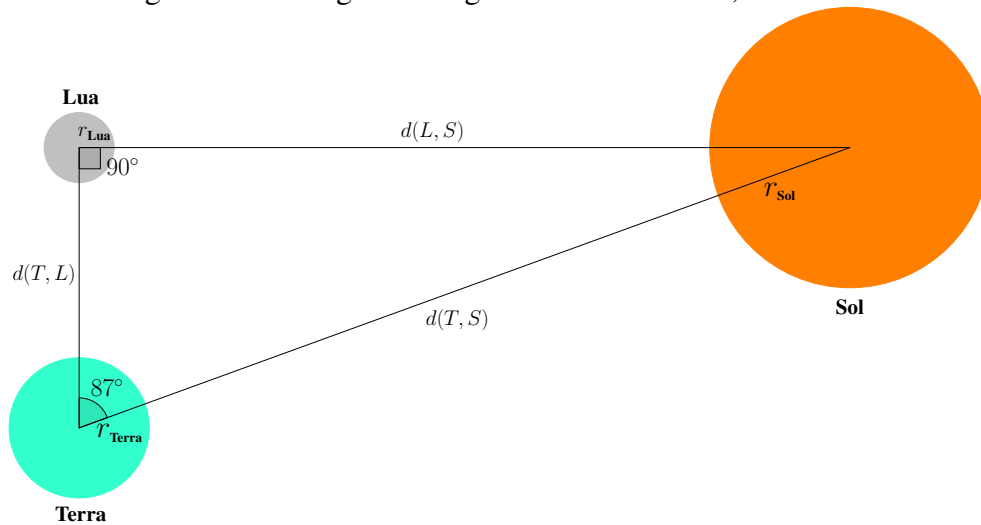


Aristarco utilizou-se das fases da Lua, em quarto minguante e em quarto crescente para justificar a existência desse triângulo, conforme a Figura 5.1.

Nessas fases, o Sol ilumina exatamente metade da Lua, o que fazia com que os raios solares fossem perpendiculares a linha imaginária que ligava a Terra à Lua. Assim, a Lua, a Terra e o Sol formavam um triângulo retângulo, com o ângulo reto na Lua.

Aristarco ainda determinou o valor do ângulo β ao observar a luz solar no horizonte, fazendo uma separação angular, concluindo que $\beta \cong 87^\circ$. O que resulta na Figura 5.2.

Figura 5.2: Triângulo retângulo dos astros Terra, Lua e Sol.



Fonte: Adaptado de [45].

Em que

- ✓ r_{Terra} = raio da Terra;
- ✓ r_{Lua} = raio da Lua;
- ✓ r_{Sol} = raio do Sol;
- ✓ $d(T, L)$ = distância da Terra à Lua;
- ✓ $d(T, S)$ = distância da Terra ao Sol;
- ✓ $d(L, S)$ = distância da Lua ao Sol.

A partir daí, Aristarco fez:

$$\frac{d(T, L)}{d(T, S)} = \cos 87^\circ.$$

Aristarco usou $\cos 87^\circ \cong 0,05$ e obteve:

$$\frac{d(T, L)}{d(T, S)} \cong 0,05.$$

Daí,

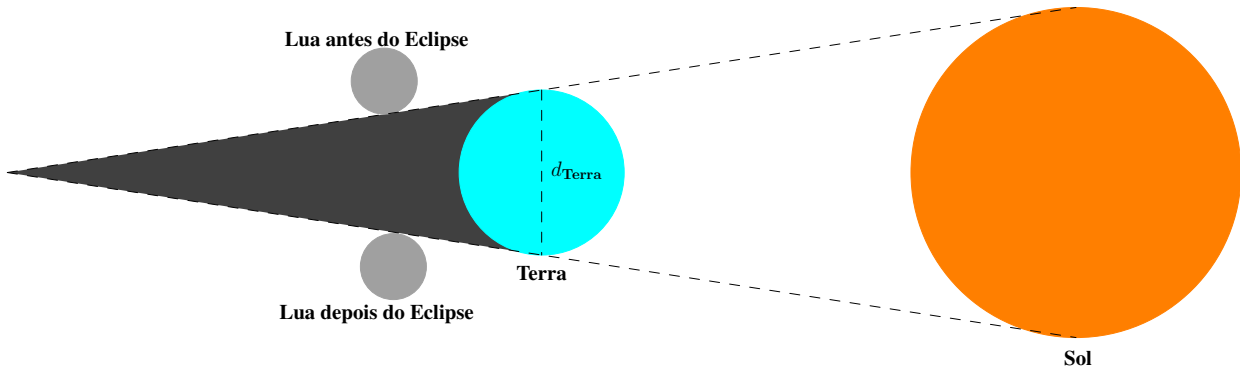
$$\begin{aligned} \frac{d(T, L)}{d(T, S)} \cong 0,05 &\implies d(T, L) \cong 0,05 \cdot d(T, S) \\ &\implies d(T, S) \cong 20 \cdot d(T, L) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Embora, esse resultado não estivesse correto¹, o procedimento de Aristarco estava certo.

¹A proporção correta seria $d(T, S) = 400 \cdot d(T, L)$.

Para determinar o tamanho relativo da Terra em relação à Lua, Aristarco se valeu da sombra projetada pela Terra, durante um Eclipse Lunar, conforme a Figura 5.3.

Figura 5.3: Tamanho da Lua.



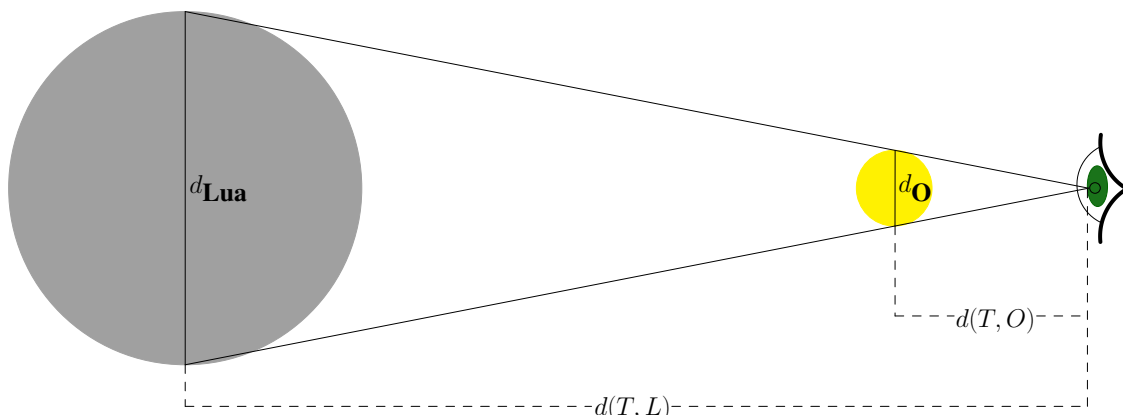
Fonte: Adaptado de [45].

Aristarco observou que o tempo necessário para a Lua desaparecer totalmente, na sombra projetada pela Terra, era aproximadamente, 3 vezes²³ o tempo necessário para ela sair totalmente da sombra. Com isso ele concluiu, que o diâmetro da Terra era cerca de 3 vezes maior que o da Lua, ou seja:

$$d_{\text{Terra}} = 3d_{\text{Lua}} \quad (5.2)$$

Para determinar a distância da Terra à Lua Aristarco utilizou semelhança de triângulos. Inicialmente, tomou um objeto que teria cerca de 1 cm de diâmetro. Ao posicionar o objeto, a uma distância aproximada de 110 cm, percebeu que o mesmo cobria a imagem da Lua no Céu, conforme a ilustração da Figura 5.4.

Figura 5.4: Objeto posicionado a frente da Lua.



Fonte: Adaptado de [45].

²Na realidade, esse número é 4 vezes.

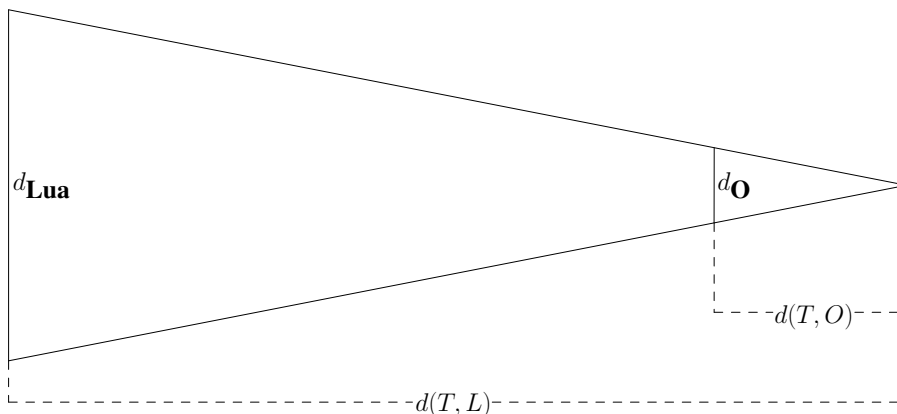
³na verdade, ele chegou a conclusão que $d_{\text{Lua}} = 0,35d_{\text{Terra}}$.

Em que

- ✓ d_{Lua} = diâmetro da Lua;
- ✓ d_{O} = diâmetro do objeto;
- ✓ $d(T, L)$ = distância da Terra à Lua;
- ✓ $d(T, O)$ = distância da Terra ao objeto, no horizonte.

O que podemos representar, geometricamente, pela Figura 5.5.

Figura 5.5: Triângulos resultantes: distância da Terra à Lua.



Fonte: Adaptado de [45].

Pelo Teorema 3 os dois triângulos são semelhantes. Daí, Aristarco aplicou:

| | triângulo maior | triângulo menor |
|-----------|------------------|-----------------|
| bases → | d_{Lua} | d_{O} |
| alturas → | $d(T, L)$ | $d(T, O)$ |

O que nos leva à

$$\frac{d_{\text{Lua}}}{d(T, L)} = \frac{d_{\text{O}}}{d(T, O)}.$$

Como o diâmetro da Lua era $\frac{1}{3}$ do diâmetro da Terra, e a razão $\frac{d_{\text{O}}}{d(T, O)} = \frac{1}{110}$, temos

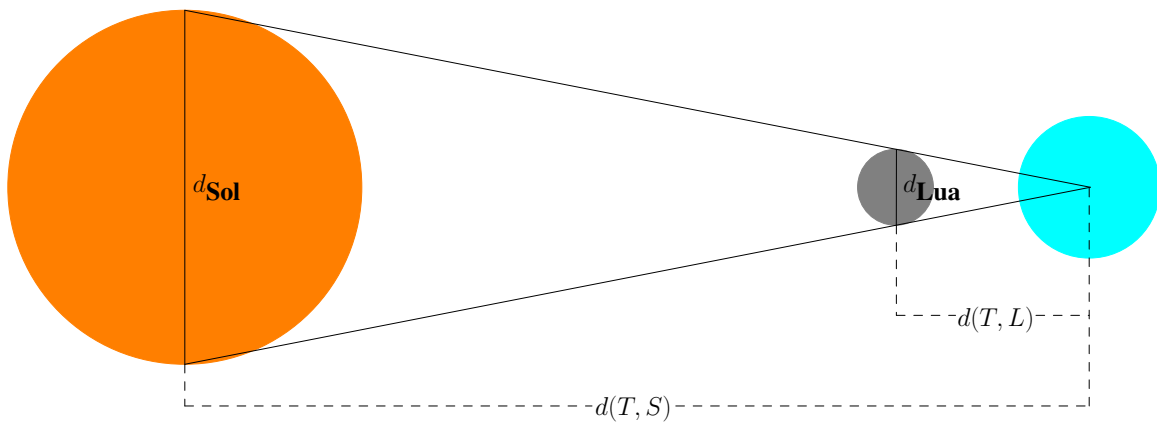
$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{3}d_{\text{Terra}}}{d(T, L)} = \frac{1}{110} &\implies d(T, L) = \frac{1}{3} \cdot 110 \cdot d_{\text{Terra}} \\ &\implies d(T, L) \cong 37 \cdot d_{\text{Terra}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Com isso, também foi possível estimar a distância da Terra ao sol. Tal resultado pode ser concluído a partir de (5.1) e (5.3). O que levou a distância entre Terra e Sol ser:

$$\begin{aligned} d(T, S) = 20 \cdot d(T, L) &\implies d(T, S) = 20 \cdot 37 \cdot d_{\text{Terra}} \\ &\implies d(T, S) = 740 \cdot d_{\text{Terra}} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Finalmente, para determinar o diâmetro do Sol, Aristarco recorreu a um Eclipse solar, conforme a Figura 5.6. Aristarco observou que a Lua ficava alinhada com a Terra e o Sol, como já sabia o raio lunar e as respectivas distâncias, Terra à Lua e Terra ao Sol ele pode aplicar os conhecimentos geométricos novamente.

Figura 5.6: Lua entre o Sol e a Terra.



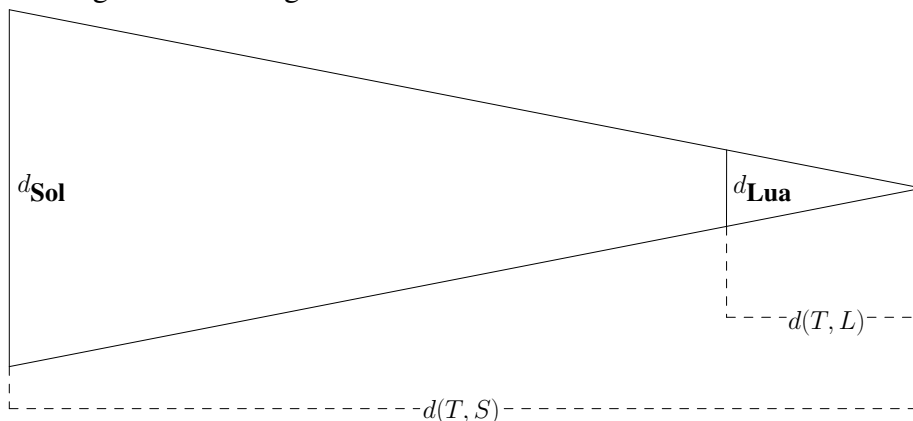
Fonte: Adaptado de [45].

Em que

- ✓ d_{Lua} = diâmetro da Lua;
- ✓ d_{Sol} = diâmetro do Sol;
- ✓ $d(T, L)$ = distância da Terra à Lua;
- ✓ $d(T, S)$ = distância da Terra ao Sol.

O que podemos representar, geometricamente, pela Figura 5.7.

Figura 5.7: Triângulos resultantes: distância da Terra ao Sol.



Fonte: Adaptado de [45].

Pelo Teorema 3 os dois triângulos são semelhantes. Assim, temos

$$\frac{d_{\text{Sol}}}{d(T, S)} = \frac{d_{\text{Lua}}}{d(T, L)} \quad (5.5)$$

Como

$$d(T, L) = 37 \cdot d_{\text{Terra}}, \quad d_{\text{Lua}} = \frac{1}{3} \cdot d_{\text{Terra}} \quad \text{e} \quad d(T, S) = 740 \cdot d_{\text{Terra}} \quad (5.6)$$

segue-se, de (5.5) e de (5.6), que

$$\frac{d_{\text{Sol}}}{740 \cdot d_{\text{Terra}}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d_{\text{Terra}}}{37 \cdot d_{\text{Terra}}}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d_{\text{Sol}}}{740 \cdot d_{\text{Terra}}} &= \frac{\frac{1}{3} \cdot d_{\text{Terra}}}{37 \cdot d_{\text{Terra}}} \implies d_{\text{Sol}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot d_{\text{Terra}}}{37 \cdot d_{\text{Terra}}} \cdot 740 \cdot d_{\text{Terra}} \\ &\implies d_{\text{Sol}} \cong 6,7 \cdot d_{\text{Terra}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

O que conclui que o diâmetro do Sol era cerca de 6,7 vezes o diâmetro da Terra.

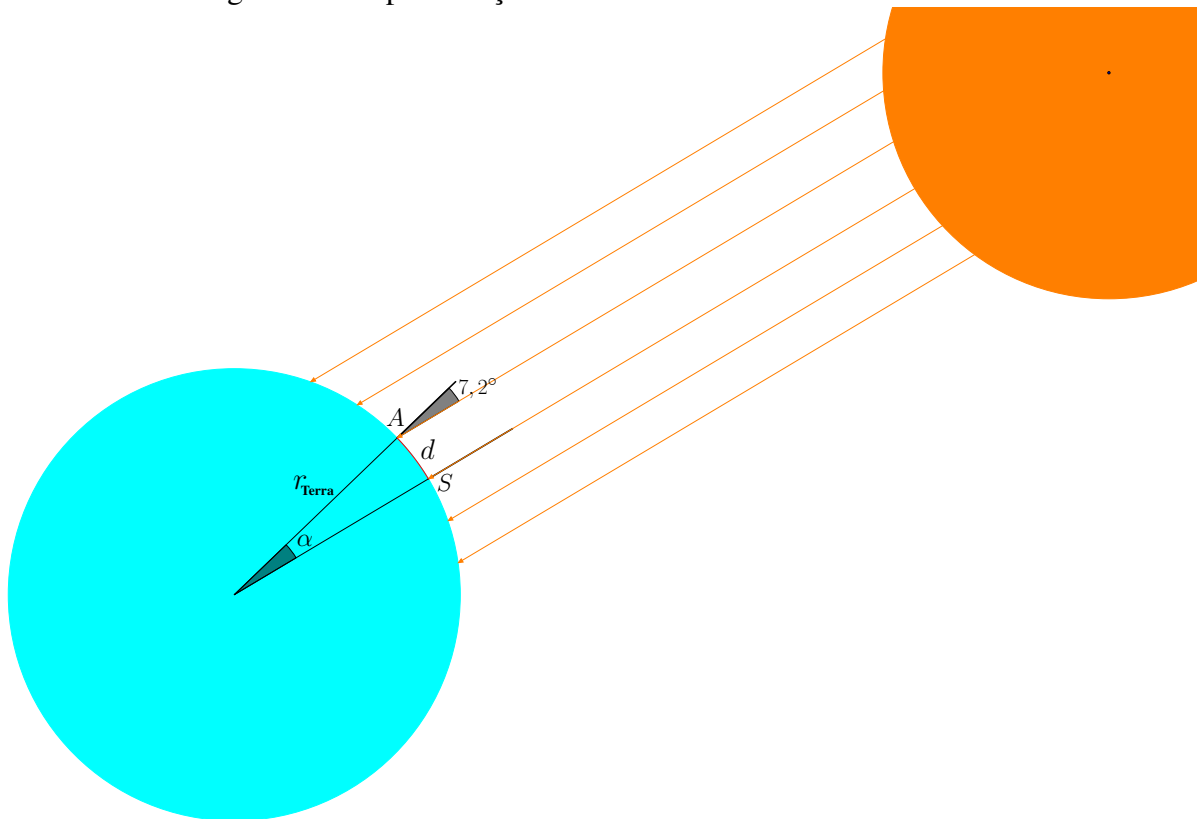
A partir dos tamanhos relativos encontrados, chegou a conclusão que o Sol não poderia estar na órbita da Terra, dada a grande superioridade no tamanho da estrela em relação ao planeta.

5.2 Eratóstenes e a circunferência (diâmetro) da Terra

Eratóstenes notou que em Siena, no primeiro dia do verão, ao meio dia, a luz solar atingia o fundo de um poço bem fundo, o que o levou a deduzir que o Sol estava perpendicular a Terra naquele ponto.

Por outro lado, em Alexandria situada ao norte de Siena, não ocorria o mesmo. Ao medir o tamanho da sombra de um bastão posto verticalmente, Eratóstenes observou que em Alexandria o Sol estava 7,2 graus mais ao sul, conforme a Figura 5.8.

Figura 5.8: Representação das cidades de Siena e Alexandria.



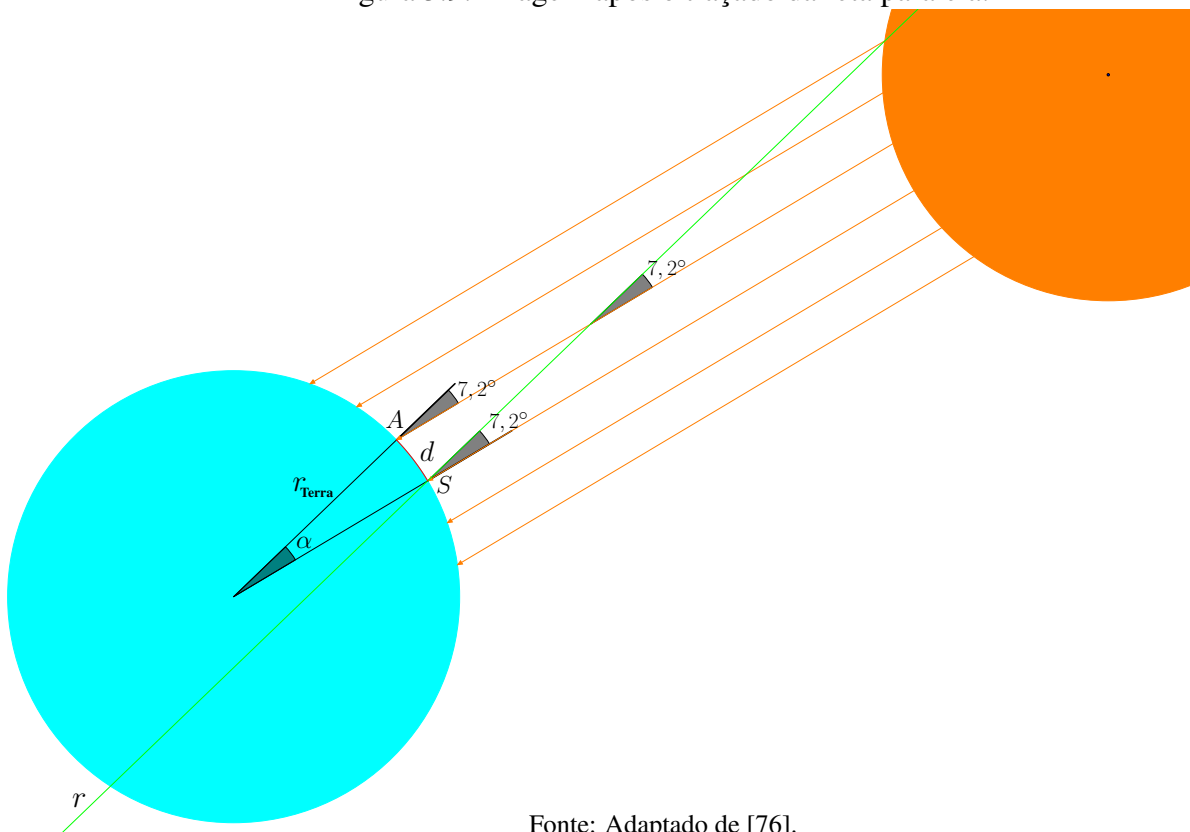
Fonte: Adaptado de [76].

Em que

- ✓ r_{Terra} = raio da Terra;
- ✓ A é o ponto que representa onde situava-se Alexandria;
- ✓ S é o ponto que representa onde situava-se Siena;
- ✓ α o ângulo correspondente ao setor circular determinado pelos pontos A e S;
- ✓ d representa a distância entre A e S, sobre o arco \widehat{AB} .

Para determinar o ângulo central α , Eratóstenes traçou uma reta r , passando pelo ponto que representa Siena, paralela ao bastão posto em Alexandria, conforme a Figura 5.9. Nesse procedimento, encontraram-se os ângulos abaixo da reta r , correspondentes com o ângulo de $7,2^\circ$, o que fez concluir que esses ângulos também mediam $7,2^\circ$.

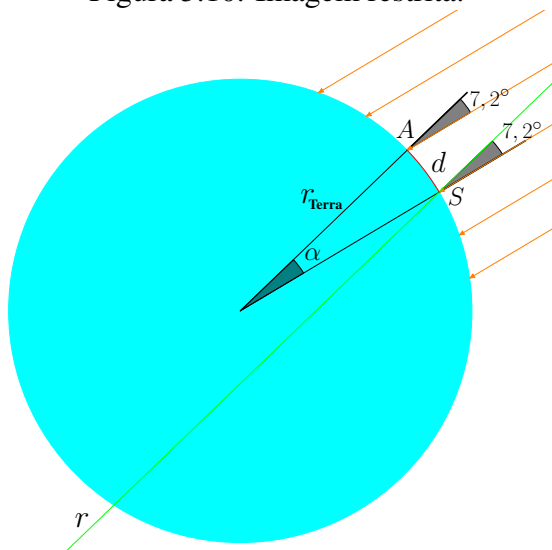
Figura 5.9: Imagem após o traçado da reta paralela.



Fonte: Adaptado de [76].

Restringindo a imagem, temos

Figura 5.10: Imagem restrita.

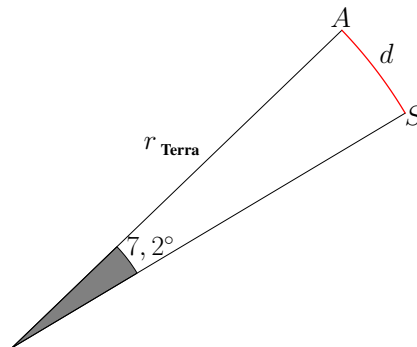


Fonte: Adaptado de [76].

Na imagem da Figura 5.10, observa-se que a reta r é paralela à r_{Terra} e o seguimento que parte do centro passando por S , é transversal aos dois anteriores. Com isso, os ângulos α e $7,2^\circ$ são correspondentes, ou seja, pela Proposição 4, $\alpha = 7,2^\circ$. Geometricamente, temos a

Figura 5.11.

Figura 5.11: Arco de Siena à Alexandria.



Fonte: Adaptado de [76].

Como uma circunferência completa possui um arco de medida 360° , Eratóstenes aplicou proporcionalidade.

| | Arco de A à S | circunferência da Terra |
|-------------------|---------------|-------------------------|
| medida em graus → | $7,2^\circ$ | 360° |
| comprimento → | d | C_{Terra} |

O que resulta em:

$$\begin{aligned}
 \frac{7,2^\circ}{d} &= \frac{360^\circ}{C_{\text{Terra}}} \implies 7,2^\circ \cdot C_{\text{Terra}} = 360^\circ \cdot d \\
 &\implies C_{\text{Terra}} = \frac{360^\circ \cdot d}{7,2^\circ} \\
 &\implies C_{\text{Terra}} = 50 \cdot d \qquad (5.8)
 \end{aligned}$$

Na época, a distância d conhecida entre Alexandria e Siena era de 5 000 estádios⁴. Substituindo esse valor em (5.8), temos

$$\begin{aligned}
 C_{\text{Terra}} = 50 \cdot d &\implies C_{\text{Terra}} = 50 \cdot 5\,000 \text{ estádios} \\
 &\implies C_{\text{Terra}} = 250\,000 \text{ estádios} \qquad (5.9)
 \end{aligned}$$

Não se sabe, ao certo, o valor do estádio utilizado por Eratóstenes, já que os gregos usavam diferentes tipos de estádios. Se supormos que Eratóstenes utilizava um estádio equivalente a $\frac{1}{6}$ km, o valor encontrado para a circunferência da Terra seria:

$$\begin{aligned}
 C_{\text{Terra}} = 250\,000 \text{ estádios} &\implies C_{\text{Terra}} = 250\,000 \cdot \frac{1}{6} \text{ km} \\
 &\implies C_{\text{Terra}} \cong 41\,666,67 \text{ km} \qquad (5.10)
 \end{aligned}$$

⁴Estádio era a unidade de medida usada para medir a distância, usada na Grécia antiga. A distância de 5 000 estádios equivale à distância de 50 dias de viagem de Camelo, que possui uma velocidade média de 16 km/h.

Tal valor é bem próximo do valor correto que é 40 070 km.

Para obter o diâmetro d_{Terra} da Terra, Eratóstenes usou a fórmula do comprimento da circunferência:

$$C_{\text{Terra}} = \pi \cdot d_{\text{Terra}} \implies d_{\text{Terra}} = \frac{C_{\text{Terra}}}{\pi} \quad (5.11)$$

Substituindo o valor de C_{Terra} , encontrado em (5.10), temos,

$$\begin{aligned} d_{\text{Terra}} = \frac{C_{\text{Terra}}}{\pi} &\implies d_{\text{Terra}} \cong \frac{41\,666,67 \text{ km}}{\pi} \\ &\implies d_{\text{Terra}} \cong 13\,262,90 \text{ km} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Se considerarmos o valor encontrado em (5.12), teríamos para o raio da Terra r_{Terra} :

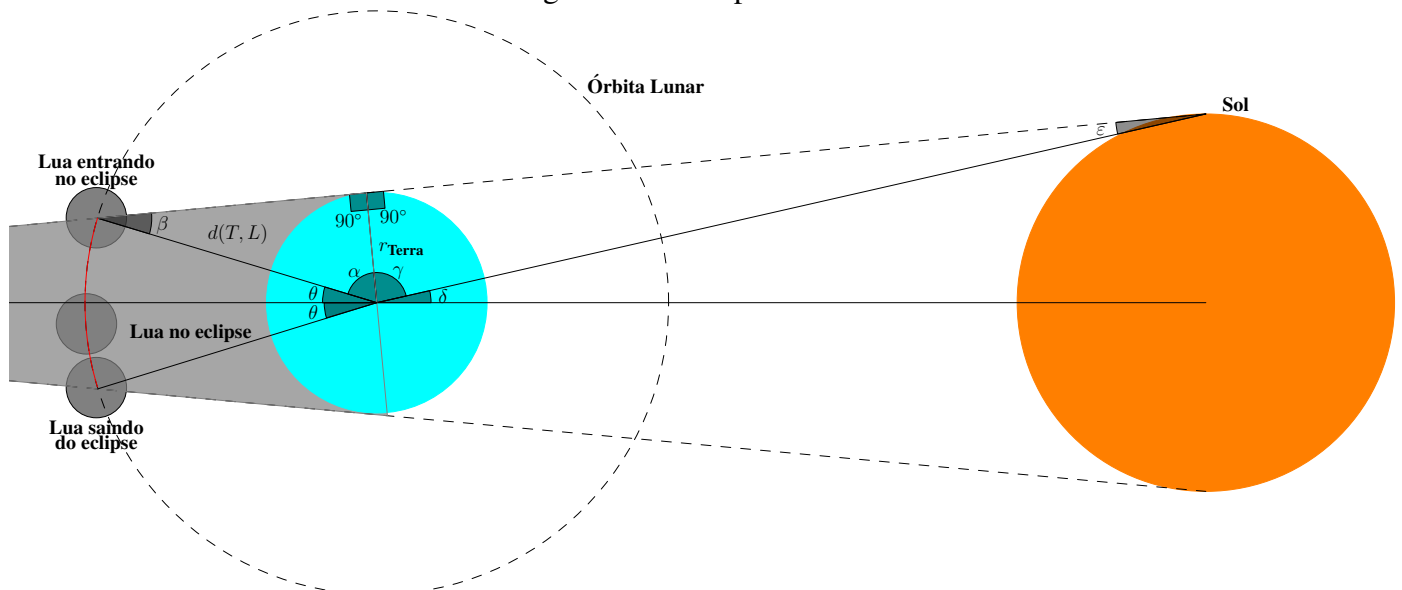
$$\begin{aligned} r_{\text{Terra}} = \frac{d_{\text{Terra}}}{2} &\implies r_{\text{Terra}} \cong \frac{13\,262,90}{2} \\ &\implies r_{\text{Terra}} \cong 6\,631,45 \text{ km} \end{aligned} \quad (5.13)$$

O valor 6 631,45 km é bem próximo do valor conhecido atualmente, que é de 6 378 km. O resultado encontrado por Eratóstenes em (5.12), veio a completar a Teoria de Aristarco, para os resultados (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) e (5.7).

5.3 Hiparco: distância da Terra à Lua

Para encontrar o tamanho e a distância relativa entre a Terra e a Lua, Hiparco considerou um Eclipse Lunar, conforme a Figura 5.12.

Figura 5.12: Eclipse Lunar.

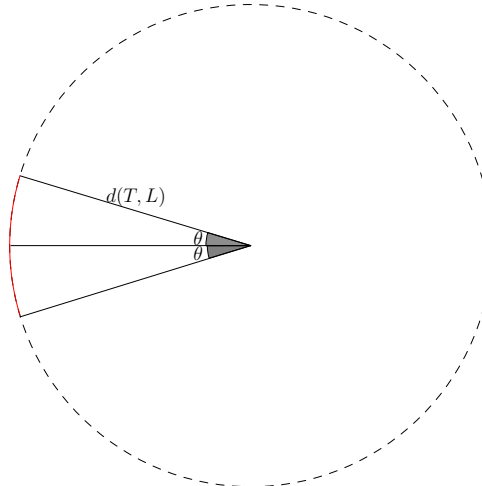


Fonte: Adaptado de [77].

Hiparco observou que durante o eclipse, a sombra da Terra era cerca de 2,6 vezes o tamanho da Lua. Com aproximações, chegou no valor correto $\frac{8}{3}$ que representa a razão entre o tamanho da Terra e o tamanho da Lua.

Para a distância entre Terra e $d(T, L)$, Hiparco considerou o arco determinado sobre a circunferência referente a órbita da Lua, cujo centro coincidia com o da Terra, conforme a Figura 5.13.

Figura 5.13: Arco da órbita lunar.



Fonte: Adaptado de [77].

Além disso, Hiparco sabia que a órbita completa da Lua durava cerca de 27,3 dias e como a duração do Eclipse era cerca de 100 min pode aplicar a proporção. Assim:

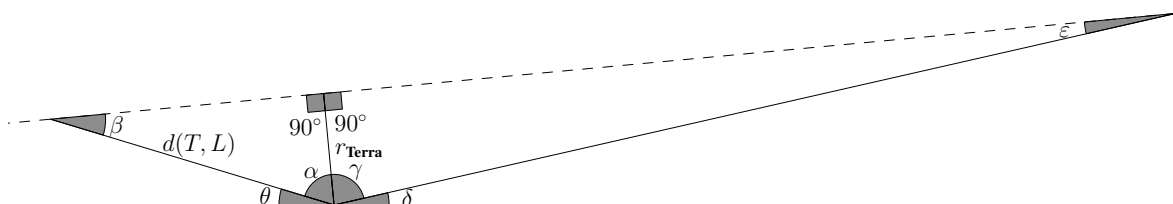
| | Arco do Eclipse | Círculo da órbita completa |
|---------------|-----------------|----------------------------|
| tempo gasto → | 100 min | 27,3 dias |
| ângulo → | 2θ | 360° |

Como 1 dia = 24 horas e 1 hora = 60 min, temos

$$\begin{aligned} \frac{100}{2\theta} &= \frac{27,3 \cdot 24 \cdot 60}{360^\circ} \implies \theta = \frac{100 \cdot 360^\circ}{2 \cdot 27,3 \cdot 24 \cdot 60} \\ &\implies \theta \cong 0,5^\circ \end{aligned} \tag{5.14}$$

Da Figura 5.12, pode-se observar

Figura 5.14: Parte geométrica do Esboço de Hiparco.



Fonte: Adaptado de [77].

Da Figura 5.14, temos que

$$\alpha + \gamma + \beta + \varepsilon = 180^\circ \quad (5.15)$$

$$\alpha + \gamma + \theta + \delta = 180^\circ \quad (5.16)$$

Por (5.15) e (5.16), temos

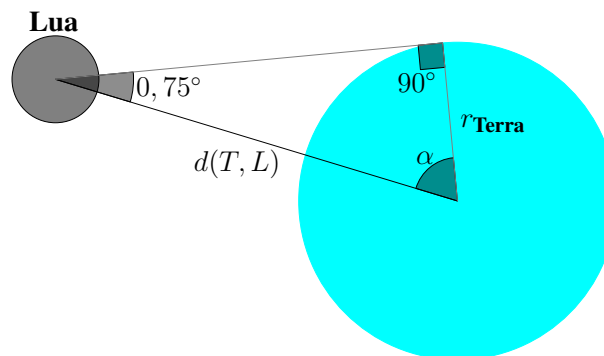
$$\begin{aligned} \alpha + \gamma + \beta + \varepsilon = \alpha + \gamma + \theta + \delta &\implies \cancel{\alpha} + \cancel{\gamma} + \beta + \varepsilon = \cancel{\alpha} + \cancel{\gamma} + \theta + \delta \\ &\implies \beta + \varepsilon = \theta + \delta. \end{aligned}$$

Hiparco ainda considerou que $\varepsilon \cong 0^\circ$, visto que o mesmo estava muito distante e estimou $\delta \cong 0,25^\circ$. Como $\theta \cong 0,5^\circ$, temos que

$$\begin{aligned} \beta + \varepsilon = \theta + \delta &\implies \beta + \varepsilon \cong 0,5^\circ + 0,25^\circ \\ &\implies \beta \cong 0,75^\circ \end{aligned} \quad (5.17)$$

Com base no resultado obtido em (5.17) e na Figura 5.12, obtemos o triângulo:

Figura 5.15: Triângulo Retângulo em que Lua e Terra são vértices.



Fonte: Adaptado de [77].

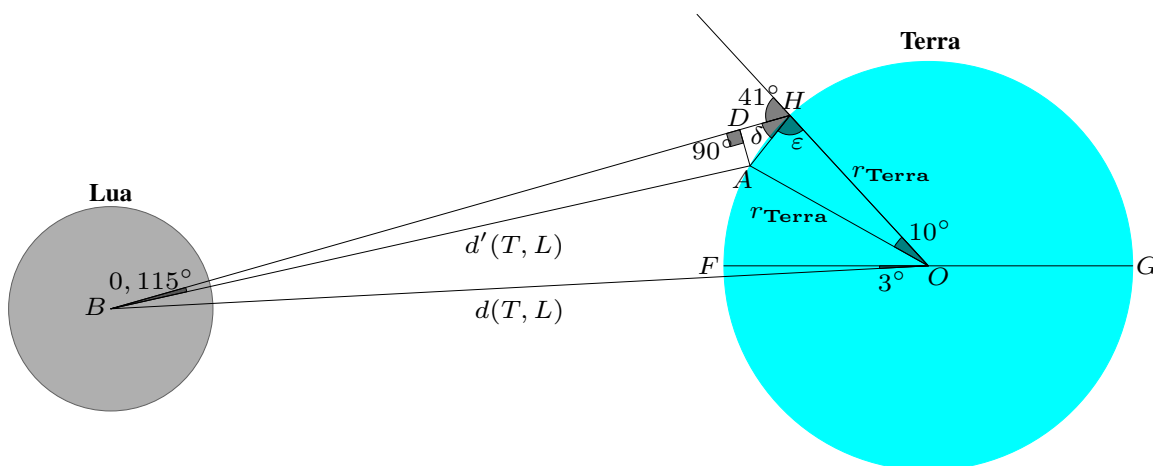
A partir da Figura 5.15, Hiparco aplicou a definição de seno:

$$\begin{aligned} \text{sen } 0,75^\circ = \frac{r_{\text{Terra}}}{d(T, L)} &\implies d(T, L) = \frac{r_{\text{Terra}}}{\text{sen } 0,75^\circ} \\ &\implies d(T, L) \cong 76r_{\text{Terra}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Em um outro método Hiparco calculou a distância com maior precisão. Hiparco considerou dois pontos sobre os o planeta Terra, em diferentes meridianos, um na cidade de Alexandria e outro à norte em Helesponto. A latitude em Alexandria era cerca de 31° e em Helesponto era de 41° , havendo uma diferença de latitude de 10° .

Esse método se deu durante um eclipse solar. Nesse fenômeno, Hiparco observou que os tamanhos aparentes da Lua e do Sol no céu eram iguais, o que incluía a paralaxe. Após algumas medições, chegou a conclusão que a paralaxe lunar era aproximadamente $0,115^\circ$ e que a inclinação da Lua estava 3° abaixo do equador terrestre, conforme a Figura 5.16.

Figura 5.16: Distância da Terra à Lua.



Fonte: Adaptado de [78].

Em que

- ✓ B : centro da Lua;
- ✓ O : centro da Terra;
- ✓ A : Alexandria;
- ✓ H : Helesponto;
- ✓ r_{Terra} : raio da Terra;
- ✓ $d(T, L)$: distância da Terra à Lua;
- ✓ $d'(T, L)$: distância da Lua ao ponto A ;
- ✓ AD perpendicular ao segmento AH ;
- ✓ FG : Equador terrestre.

Segundo o que dizia Hiparco, bastava determinar o comprimento de $d'(T, L)$ que teríamos uma boa aproximação para $d(T, L)$. Como a distância entre a Terra e Lua era proporcionalmente muito grande em relação ao raio terrestre, Hiparco usou a aproximação:

$$d(T, L) \cong d'(T, L) + r_{\text{Terra}} \quad (5.19)$$

A partir da Figura 5.16, Hiparco calculou a distância de A à H .

| | | |
|---------------------------|----------------|----------------------------|
| | \widehat{AB} | Círculo Terrestre completo |
| comprimento \rightarrow | $d(A, H)$ | $2\pi r_{\text{Terra}}$ |
| ângulo \rightarrow | 10° | 360° |

o que leva à

$$\begin{aligned} \frac{d(A, H)}{10^\circ} &= \frac{2\pi r_{\text{Terra}}}{360^\circ} \implies d(A, H) = \frac{2\pi r_{\text{Terra}} \cdot 10^\circ}{360^\circ} \\ &\implies d(A, H) = \frac{\pi r_{\text{Terra}}}{18} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ainda da Figura 5.16, podemos observar que o triângulo AHO é isósceles de base AH . Assim, $\widehat{AHO} = \widehat{HAO} = \varepsilon$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° , temos

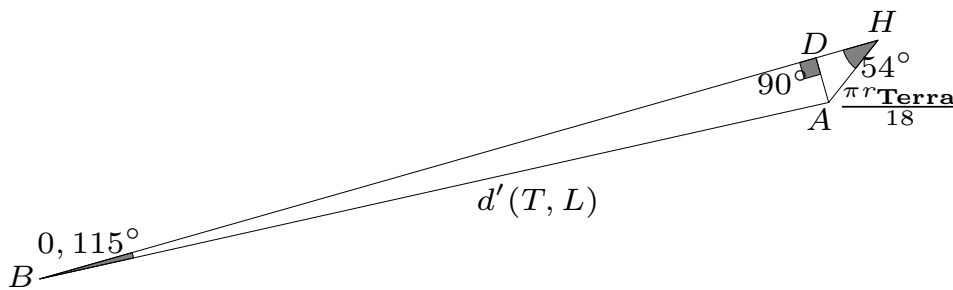
$$\varepsilon + \varepsilon + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow \varepsilon = 85^\circ$$

Como $\varepsilon = 85^\circ$ e um ângulo de meia volta mede 180° , temos que

$$41^\circ + \delta + 85^\circ = 180^\circ \Rightarrow \delta = 54^\circ \quad (5.21)$$

Delimitando na Figura 5.16 o triângulo ABH e aplicando os valores obtidos em (5.20) e (5.21), temos

Figura 5.17: Triângulo ABH .



Fonte: Adaptado de [78].

Na Figura 5.17, inicialmente, observemos o triângulo ADH . A partir deste triângulo, determinemos o comprimento do segmento AD , em função do r_{Terra} e do $\text{sen } 54^\circ$. Isto é, no triângulo ADH , temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{AH}} = \text{sen } \widehat{AHD} &\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\frac{\pi r_{\text{Terra}}}{18}} = \text{sen } 54^\circ \\ &\Rightarrow \overline{AD} = \text{sen } 54^\circ \cdot \frac{\pi r_{\text{Terra}}}{18} \end{aligned} \quad (5.22)$$

De modo semelhante, determinemos o comprimento de AB , no triângulo ABD , em função do comprimento de AD e de $\text{sen } 0,115^\circ$. Desse modo

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \text{sen } 0,115^\circ &\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{d'(T, L)} = \text{sen } 0,115^\circ \\ &\Rightarrow d'(T, L) = \frac{\overline{AD}}{\text{sen } 0,115^\circ} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Substituindo (5.22) em (5.23), temos

$$\begin{aligned} d'(T, L) &= \frac{\overline{AD}}{\text{sen } 0,115^\circ} \implies d'(T, L) = \frac{\text{sen } 54^\circ \cdot \frac{\pi r_{\text{Terra}}}{18}}{\text{sen } 0,115^\circ} \\ &\implies d'(T, L) \cong 70r_{\text{Terra}} \end{aligned} \quad (5.24)$$

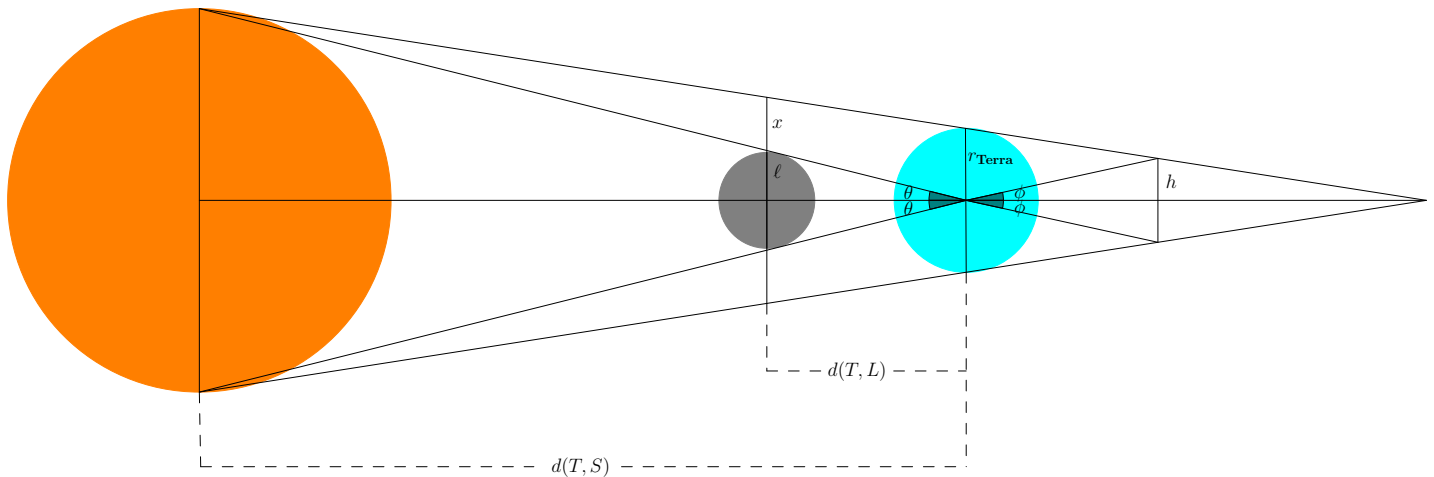
Por fim, basta substituir o resultado de (5.24) em (5.19) e teremos

$$\begin{aligned} d(T, L) &\cong d'(T, L) + r_{\text{Terra}} \implies d(T, L) \cong 70r_{\text{Terra}} + r_{\text{Terra}} \\ &\implies d(T, L) \cong 71r_{\text{Terra}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Segundo Hiparco estaria entre $62r_{\text{Terra}}$ e $74r_{\text{Terra}}$.

Em um terceiro método, o mais preciso deles, Hiparco descobriu que a distância da Terra à Lua era cerca de 59 vezes o raio da Terra. Esse método também se deu a partir de um eclipse solar. Nele Hiparco estimou a distância da terra ao sol $d(T, S)$, por meio da paralaxe de 7° , obtendo uma distância mínima da Terra ao Sol cerca 490 vezes o raio da Terra. Tal estimativa se deu graças a grande distância entre a Terra e o Sol, que ele estimava ser a maior possível.

Figura 5.18: Esquema referente as distâncias durante o eclipse solar.



Fonte: Adaptado de [78].

No diagrama, da Figura 5.18, temos

- ✓ r_{Terra} = raio da Terra;
- ✓ ℓ = raio da Lua;
- ✓ r_{Sol} = raio do Sol;
- ✓ $d(T, L)$ = distância da Terra à Lua;
- ✓ $d(T, S)$ = distância da Terra ao Sol;
- ✓ h a linha que é paralela simultaneamente ℓ e a r_{Terra} .

A partir do triângulo retângulo que possui catetos ℓ e $d(T, L)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{d(T, L)} = \operatorname{tg} \theta &\implies \ell = d(T, L) \cdot \operatorname{tg} \theta \\ &\implies \ell \cong d(T, L) \cdot \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (5.26)$$

Tal resultado ocorre pois o valor do ângulo θ está próximo de 0° , consequentemente seu cosseno de 1.

Já no triângulo oposto ao triângulo anterior, cujo o ângulo sobre a Terra mede ϕ e o cateto oposto a ϕ vale h , com h e r_{Terra} . Assim, temos

$$\frac{h}{d(T, L)} = \operatorname{tg} \phi \implies h = d(T, L) \cdot \operatorname{tg} \phi \quad (5.27)$$

Substituindo a segunda implicação de (5.26) em (5.27), temos

$$\begin{aligned} h = d(T, L) \cdot \operatorname{tg} \phi &\implies h = \frac{\ell}{\operatorname{tg} \theta} \cdot \operatorname{tg} \phi \\ &\implies h = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\operatorname{tg} \theta} \cdot \ell \\ &\implies h \cong \frac{\phi}{\theta} \cdot \ell \end{aligned} \quad (5.28)$$

Substituindo a última implicação de (5.26) em (5.28), temos

$$h \cong \frac{\phi}{\theta} \cdot \ell \implies h \cong \frac{\phi}{\theta} \cdot d(T, L) \cdot \operatorname{sen} \theta \quad (5.29)$$

Na ultima implicação, ressaltamos como os ângulos são consideravelmente próximos e pequenos, suas tangentes também são próximas. Além disso, em ângulos de baixo valor, uns próximos aos outros, a razão entre tangentes se aproxima da razão entre os ângulos, ver tabela de razões trigonométricas.

Agora considere o diagrama da Figura 5.19, cujas linhas em vermelho são paralelas.

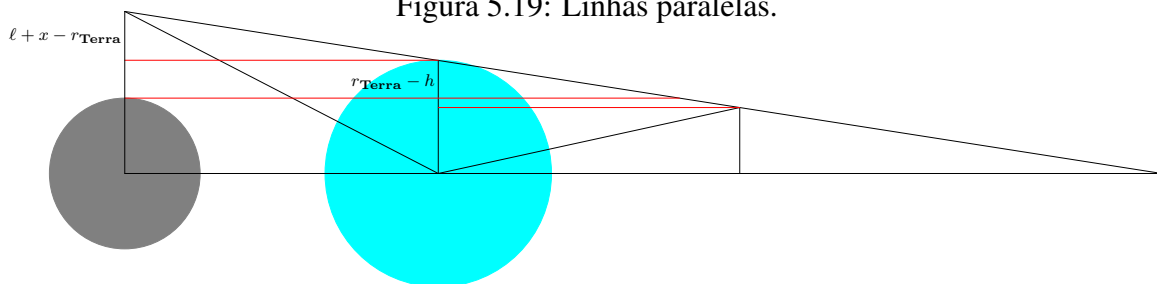


Figura 5.19: Linhas paralelas.

Fonte: Adaptado de [78].

Por meio de aproximações, temos

$$\begin{aligned} \ell + x - r_{\text{Terra}} &= r_{\text{Terra}} - h \\ \implies \ell + x &= r_{\text{Terra}} + r_{\text{Terra}} - h \\ \implies \ell + x &= 2r_{\text{Terra}} - h. \end{aligned}$$

Para $r_{\text{Terra}} = 1$, temos

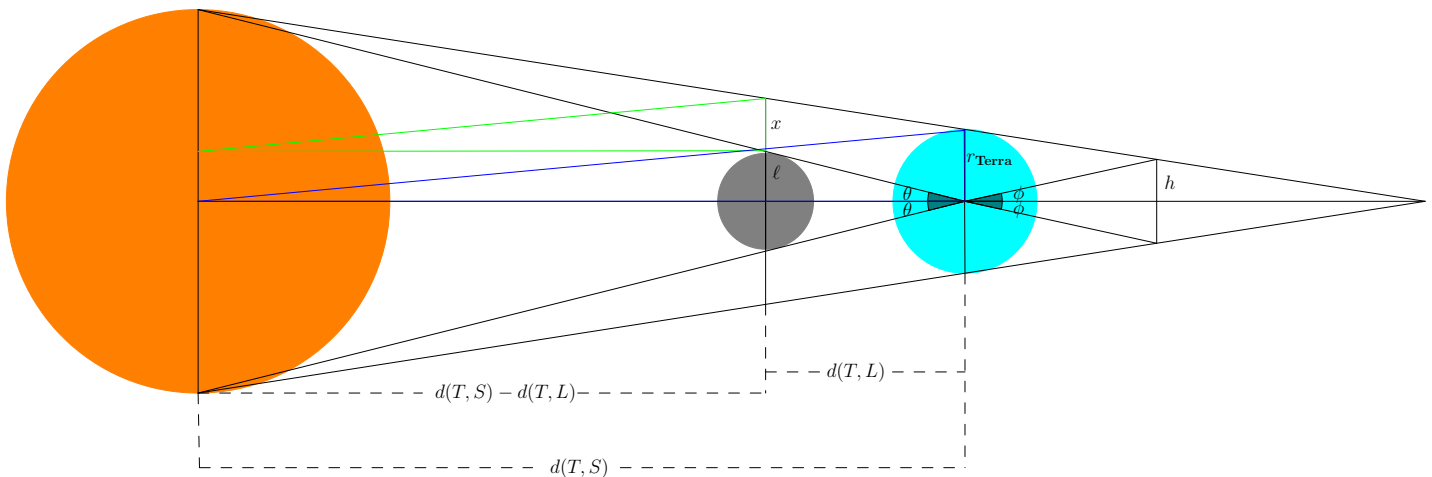
$$\ell + x = 2r_{\text{Terra}} - h \implies \ell + x = 2 - h \quad (5.30)$$

Substituindo a última implicação de (5.26) e de (5.29) em (5.30), temos

$$\begin{aligned} \ell + x &= 2r_{\text{Terra}} - h \\ \implies d(T, L) \cdot \text{sen } \theta + x &\cong 2 - \frac{\phi}{\theta} \cdot d(T, L) \cdot \text{sen } \theta \\ \implies x &\cong 2 - \left(1 + \frac{\phi}{\theta}\right) \cdot d(T, L) \cdot \text{sen } \theta \end{aligned} \quad (5.31)$$

A partir da ilustração da Figura 5.18, identificamos os triângulos retângulos em azul e verde, na ilustração a seguir

Figura 5.20: Triângulos Semelhantes.



Fonte: Adaptado de [78].

Os triângulos em azul e verde, possuem as hipotenusas paralelas, assim, como os catetos entre si. Portanto, possuem os ângulos dois a dois iguais entre si. Logo, pelo caso LAL , Proposição 6, são semelhantes. Desse modo, temos

| | Triângulo em azul | Triângulo em verde |
|----------------------|--------------------|---------------------|
| altura \rightarrow | r_{Terra} | x |
| base \rightarrow | $d(T, S)$ | $d(T, S) - d(T, L)$ |

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 \frac{r_{\text{Terra}}}{d(T, S)} &= \frac{x}{d(T, S) - d(T, L)} \\
 \implies 1 \cdot [d(T, S) - d(T, L)] &= x \cdot d(T, S) \\
 \implies d(T, S) \cdot [1 - x] &= d(T, L) \\
 \implies d(T, S) &= \frac{d(T, L)}{1 - x}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Substituindo o valor de x obtido em (5.31), em (5.32), temos

$$\begin{aligned}
 d(T, S) &\cong \frac{d(T, L)}{1 - \left[2 - \left(1 + \frac{\phi}{\theta}\right) \cdot d(T, L) \cdot \text{sen } \theta\right]} \\
 \implies d(T, S) &\cong \frac{d(T, L)}{\left[\left(1 + \frac{\phi}{\theta}\right) \cdot d(T, L) \cdot \text{sen } \theta\right] - 1} \\
 \implies d(T, S) &\cong \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{\phi}{\theta}\right) \cdot \text{sen } \theta\right] - \frac{1}{d(T, L)}} \\
 \implies \left[\left(1 + \frac{\phi}{\theta}\right) \cdot \text{sen } \theta\right] - \frac{1}{d(T, L)} &\cong \frac{1}{d(T, S)} \\
 \implies \frac{1}{d(T, L)} &\cong \left[\left(1 + \frac{\phi}{\theta}\right) \cdot \text{sen } \theta\right] - \frac{1}{d(T, S)} \\
 \implies d(T, L) &\cong \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{\phi}{\theta}\right) \cdot \text{sen } \theta\right] - \frac{1}{d(T, S)}}
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Hiparco, a época, usou:

- ✓ $\theta \cong 0,277^\circ$;
- ✓ $\phi \cong 1,385^\circ$;
- ✓ $d(T, S) = 490r_{\text{Terra}} = 490$.

Substituindo esses valores em (5.33), temos

$$\begin{aligned}
 d(T, L) &\cong \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{\phi}{\theta}\right) \cdot \text{sen } \theta\right] - \frac{1}{d(T, S)}} \\
 \implies d(T, L) &\cong \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1,385^\circ}{0,277^\circ}\right) \cdot \text{sen } 0,277^\circ\right] - \frac{1}{490}} \\
 \implies d(T, L) &\cong 67\frac{1}{3} \\
 \implies d(T, L) &\cong 67\frac{1}{3}r_{\text{Terra}} \tag{5.34}
 \end{aligned}$$

Do resultado obtido em (5.34), se desconsiderarmos do denominador a fração $\frac{1}{490}$, razão entre r_{Terra} e $d(T, S)$, teremos

$$\begin{aligned}
 d(T, L) &\cong \frac{1}{\left(1 + \frac{\phi}{\theta}\right) \cdot \text{sen } \theta} \\
 \implies d(T, L) &\cong \frac{1}{\left(1 + \frac{1,385^\circ}{0,277^\circ}\right) \cdot \text{sen } 0,277^\circ} \\
 \implies d(T, L) &\cong 59 \\
 \implies d(T, L) &\cong 59r_{\text{Terra}} \tag{5.35}
 \end{aligned}$$

A partir dos resultados obtidos em (5.34) e (5.35), concluiu que a distância da Terra à Lua estava entre $59r_{\text{Terra}}$ e $67\frac{1}{3}r_{\text{Terra}}$. Tal resultado é muito próximo do aceito atualmente, que está entre $57r_{\text{Terra}}$ e $64r_{\text{Terra}}$.

O valor aceito atualmente é calculado de forma mais precisa e até rápida, por meio da instalação de um espelho na superfície da Lua; a medição ocorre por meio de ondas de rádio emitidas da Terra que batem no espelho refletindo de volta.

Capítulo 6

NEWTON E AS LEIS DE KEPLER

Os resultados apresentados a seguir são baseados em [79], [15], [80], [81] e [14]. Trata-se das primeiras provas para as Leis de Kepler, por meio do conhecimento científico existente na época de Newton, inclusive alguns resultados precedem o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, que hoje usamos para demonstrar tais resultados de maneira mais rigorosa. O que iremos apresentar aqui tem o objetivo de destacar como se garantiu matematicamente a validade das leis de Kepler nessa época.

6.1 Segunda Lei de Kepler Generalizada

De [79] e [15, p. 80, Teorema 1], temos o Teorema.

Teorema 15 (Segunda Lei de Kepler Generalizada - Lei das áreas). *As áreas descritas pelos corpos giratórios, por raios atraídos a um centro de força imóvel S , estão no mesmo plano e são proporcionais aos tempos em que são descritas.*

Demonstração: Inicialmente, Newton assume uma força impulsiva \vec{F}^1 , atuando sobre o planeta P , em intervalos de tempo iguais e com \vec{F} direcionada ao centro imóvel S .

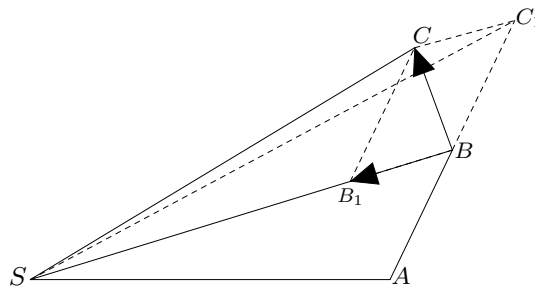
Durante o primeiro dos intervalos de tempo considerado, no trajeto entre A e B , o planeta move-se até C , devido a força exercida por \vec{BS}^2 . Caso contrário iria para C_1 , conforme o diagrama da Figura 6.1, a seguir.

¹Na Física o agente que modifica a velocidade ou o estado de repouso ou movimento uniforme de um objeto, ‘empurrando-o’ ou ‘puxando-o’, recebe o nome de *força*. Usa-se a notação: \vec{F} [81]. O conceito de força é caracterizado como uma grandeza vetorial que possui módulo, sentido e direção.

²Chama-se de vetor o conjunto dos segmentos orientados que possuem mesma direção (estão sobre uma mesma reta), mesmo sentido (para onde se caminha na reta) e mesmo módulo (comprimento). Notação: \vec{v} .

³Um segmento no qual o primeiro ponto é a origem e o segundo é a extremidade é denominado segmento orientado. Notação: \overrightarrow{AB} , onde A é a origem e B é a extremidade.

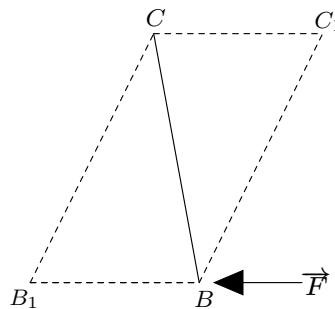
Figura 6.1: Diagrama: trajeto de P passando pelos pontos A, B, C .



Fonte: Adaptado de [15] e [79].

No diagrama a seguir, Figura 6.2, a força momentânea \vec{F} impulsiona o ângulo sobre B e está dirigida no sentido do ponto S .

Figura 6.2: Diagrama de Brackenridge: Força momentânea agindo sobre B, B_1 na direção S .

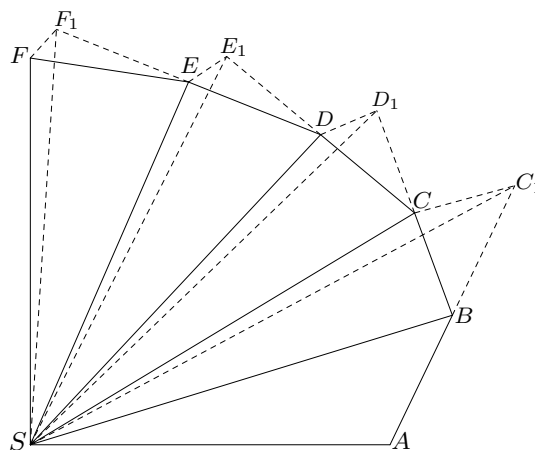


Fonte: Adaptado de [15] e [79].

Isso ocorrendo sucessivas vezes, ao passar pelos pontos A, B, C, D, \dots ; formando assim, o polígono $ABCD \dots$, a medida que aumentamos o número de lados do polígono nos aproximamos da órbita do astro P .

O diagrama a seguir, chamado diagrama de Brackenridge, descreve tal procedimento.

Figura 6.3: Diagrama de Brackenridge: trajeto de P passando pelos pontos A, B, C, D, \dots

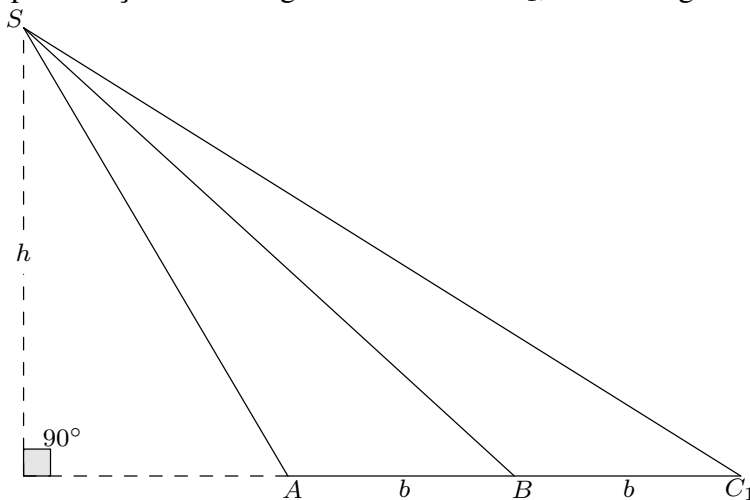


Fonte: Adaptado de [15] e [79].

Como já dito, na Figura 6.3, temos que BC_1 seria a direção natural do astro, se não houvesse a força impulsiva atuando sobre B .

Por conta dos intervalos de tempos serem iguais, temos que $\overline{AB} = \overline{BC_1}$. Assim, SB trata-se de uma mediana⁴ do triângulo SAC_1 , conforme a Figura 6.4.

Figura 6.4: Representação dos triângulos ASB e BSC_1 , de bases iguais à b e altura h .



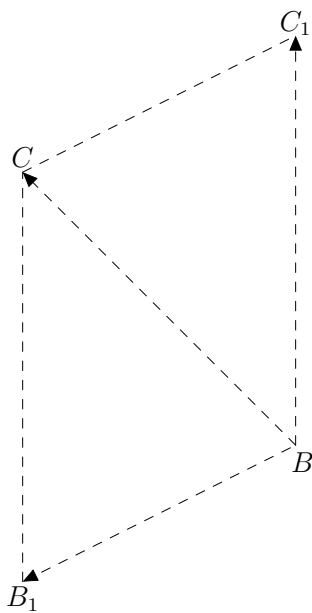
Fonte: o autor.

O que leva à

$$A_{\Delta(ASB)} = A_{\Delta(BSC_1)} \tag{6.1}$$

Consideremos também o diagrama a seguir, Figura 6.5

Figura 6.5: Representação do paralelogramo B_1BC_1C .



Fonte: o autor.

⁴Em um triângulo, a mediana de um lado é o segmento que une vértice oposto ao ponto médio desse lado.

Desse modo, temos que

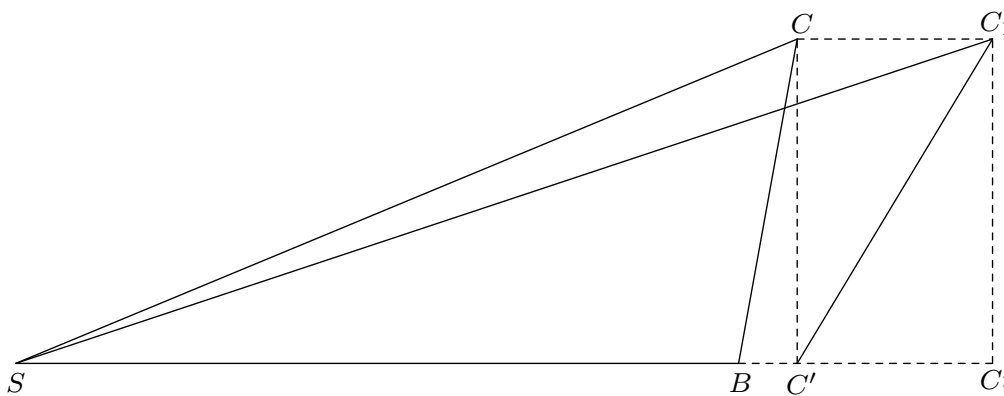
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC_1}.$$

Pela regra do paralelogramo⁵, os deslocamentos são combinados; como $C_1C \parallel BB_1$ e $BB_1 \subset BS$, temos que

$$C_1C \parallel BS.$$

Agora consideremos no diagrama a seguir, Figura 6.6, uma perpendicular de C para SB , com o ângulo \widehat{SBC} não obrigatoriamente reto.

Figura 6.6: Perpendicular de C para SB .



Fonte: Adaptado de [15] e [79].

Consideremos o seguimento $C'C$, perpendicular à SB , deslizando para a direita ao longo de CC_1 , ao parar em C_1 descreve o retângulo $CC'C_1C_1$.

Assim, os triângulos BSC e BSC_1 , possuem a mesma altura $C'C$ e a base BS em comum.

O que leva à

$$A_{\Delta(BSC)} = A_{\Delta(BSC_1)} \tag{6.2}$$

Logo, de (6.1) e (6.2), temos que

$$A_{(\Delta ASB)} = A_{(\Delta BSC_1)} = A_{(\Delta BSC)}.$$

Analogamente, podemos fazer o mesmo processo para os demais triângulos CSD, DSE, \dots ; ou seja, todos têm áreas de mesma medida. Segundo dizia Newton, a medida que aumentamos a quantidade de triângulos, a largura diminui até tender ao infinito [79].

⁵Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores com a mesma origem, representados pelos lados adjacentes de um paralelogramo. A regra do paralelogramo estabelece que $\vec{u} + \vec{v}$ é representado pela diagonal do paralelogramo. Para isso, o seguimento orientado correspondente a diagonal deve ter a mesma origem dos segmentos orientados que representam \vec{u} e \vec{v} . Ao considerarmos na Figura 6.5, que \vec{u} é representado por $\overrightarrow{BB_1}$ e \vec{v} é representado por $\overrightarrow{BC_1}$, teremos que $\vec{u} + \vec{v}$ será representado por \overrightarrow{BC} .

Assim, concluiu que qualquer setor varrido por um raio pode ser dividido em tantos setores menores quanto se desejar, cada um deles definido sobre um incremento fixo de tempo. Cada dois setores, também podem ser divididos em novos iguais, a partir de incrementos de tempo iguais. Por fim, ao juntarmos todos eles, temos setores de área iguais.

□

6.2 Primeira Lei de Kepler Generalizada

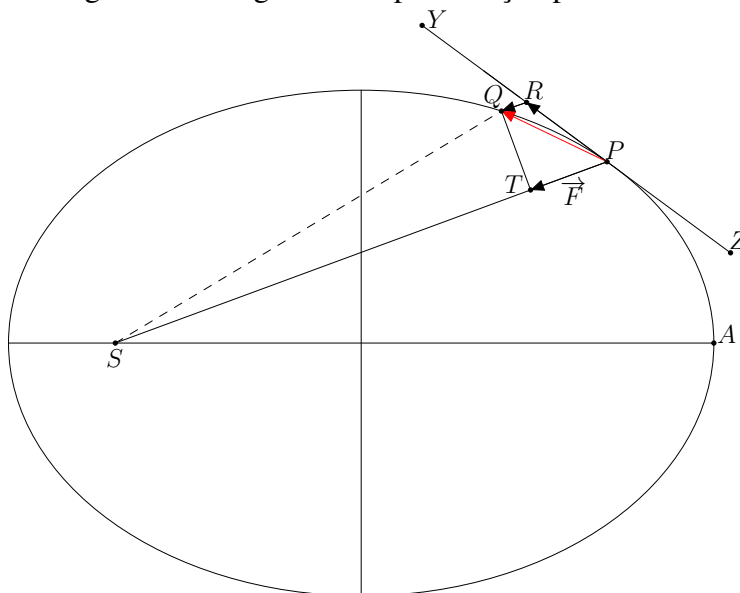
De [79] e [15, p. 91, Teorema 3], temos o seguinte Teorema:

Teorema 16 (Aproximação Parabólica). *Consideremos um corpo P , girando em torno do centro imóvel S , que descreve uma curva cujo sentido vai de A para Q , de modo a tangenciar uma linha que passa pelos pontos colineares Z, P, R e Y no ponto P . Tracemos de um ponto Q qualquer, pertencente à curva AQ um segmento RQ , paralelo à distância SP , de modo que RQ encontre a tangente em R e QT seja perpendicular à SP . Assim, temos que a força centrípeta descreverá um sólido da forma*

$$\frac{\overline{SP}^2 \times \overline{QT}^2}{\overline{RQ}},$$

desde que o sólido seja formado a partir da mesma magnitude de \vec{F} , adquirida quando os pontos P e Q coincidem. Veja a Figura 6.7, a seguir:

Figura 6.7: Diagrama da aproximação parabólica.



Fonte: Adaptado de [15] e [79].

Demonstração: O objeto P tem sua trajetória natural ao longo de ZY , porém este sofre a atuação da força \vec{F} , dirigida ao centro S . Neste caso, o deslocamento real do corpo P passará por Q .

E como a área é proporcional ao tempo, temos que

$$\frac{\overline{QR}}{t^2} \sim \frac{\overline{QR}}{\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{SP} \cdot \overline{QT}\right)^2} \quad (6.6)$$

Por (6.5) e (6.6), temos

$$\vec{F} \sim \frac{\overline{QR}}{t^2} \sim \frac{\overline{QR}}{\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{SP} \cdot \overline{QT}\right)^2}$$

Desse modo,

$$F \sim \frac{\overline{QR}}{t^2} \sim \frac{\overline{QR}}{\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{SP} \cdot \overline{QT}\right)^2} \sim \frac{\overline{QR}}{\overline{SP}^2 \cdot \overline{QT}^2}.$$

Portanto,

$$\vec{F} \sim \frac{\overline{QR}}{\overline{SP}^2 \cdot \overline{QT}^2} \quad (6.7)$$

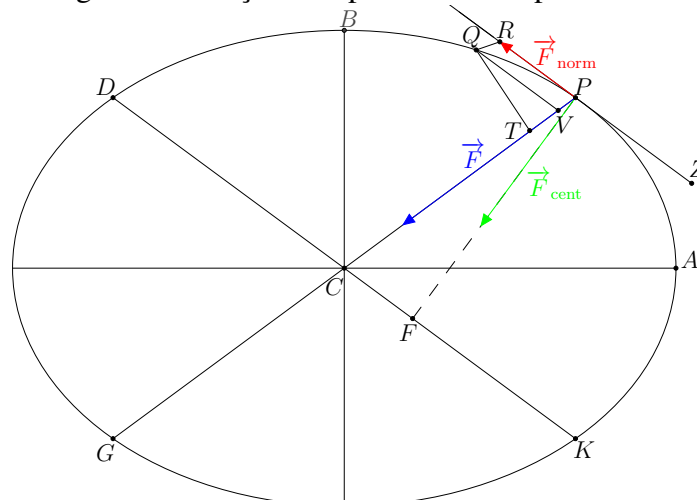
□

De [79] e [15, p. 103, Problema 2], temos o Teorema.

Teorema 17 (Lei das órbitas elípticas). *Se um corpo gira, então sua órbita é uma elipse.*

Demonstração: Inicialmente, tomemos uma elipse centrada em C , que é o centro de força, em vez S . Imaginemos agora, um planeta movendo do ponto A para o P , em seguida para Q , conforme a Figura 6.9.

Figura 6.9: Diagrama da força centrípeta tendendo para o centro da elipse.



Fonte: Adaptado de [15] e [79].

Consideremos a linha que passa pelos pontos colineares Z, P e R a reta tangente em P à curva descrita pelo trajeto planetário; o segmento de extremidades P e G , que passa pelo

centro C o diâmetro; e o segmento de extremidades D e K , que passa pelo centro o diâmetro conjugado.

Assim como ocorre no Teorema 16, RQ é o deslocamento em virtude da força central. Além disso,

$$RQ \parallel PG, PF \perp DK \text{ e } DK \cap PF = F.$$

De acordo com o Teorema 10, temos que

$$\frac{\overline{PV} \cdot \overline{VG}}{\overline{QV}^2} = \frac{\overline{PC}^2}{\overline{CD}^2} \quad (6.8)$$

Como $PVQR$ é um paralelogramo $\overline{PV} = \overline{QR}$. Além disso, \overline{VG} se aproxima de $2 \cdot \overline{PC}$ a medida que Q se aproxima de P . Fazendo as substituições necessárias em (6.8), temos:

$$\frac{\overline{QR} \cdot 2 \cdot \overline{PC}}{\overline{QV}^2} = \frac{\overline{PC}^2}{\overline{CD}^2}$$

multiplicando por \overline{QV}^2 , encontramos:

$$\begin{aligned} \cancel{\overline{QV}^2} \cdot \frac{2 \cdot \overline{PC} \cdot \overline{QR}}{\cancel{\overline{QV}^2}} &= \overline{QV}^2 \cdot \frac{\overline{PC}^2}{\overline{CD}^2} \\ \implies 2 \cdot \overline{PC} \cdot \overline{QR} &= \frac{\overline{QV}^2 \cdot \overline{PC}^2}{\overline{CD}^2} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Temos ainda que os triângulos PFC e QVT são semelhantes, pois são retângulos e $\widehat{PCF} = \widehat{QVT}$, ângulos entre os diâmetros conjugados. Logo,

$$\frac{\overline{QV}^2}{\overline{QT}^2} = \frac{\overline{PC}^2}{\overline{PF}^2} \iff \overline{QV}^2 = \frac{\overline{QT}^2 \cdot \overline{PC}^2}{\overline{PF}^2} \quad (6.10)$$

Substituindo o valor de \overline{QV}^2 encontrado (6.10) em (6.9), temos

$$2 \cdot \overline{PC} \cdot \overline{QR} = \frac{\overline{QT}^2 \cdot \overline{PC}^2}{\overline{PF}^2} \cdot \frac{\overline{PC}^2}{\overline{CD}^2} \quad (6.11)$$

Reorganizando (6.11), temos

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{PC}^2 \cdot \overline{QT}^2} = \frac{1}{2 \cdot \overline{CD}^2 \cdot \overline{PF}^2} \cdot \overline{PF} \quad (6.12)$$

De (6.7) e (6.11), temos

$$\vec{F} \sim \frac{\overline{QR}}{\overline{PC}^2 \cdot \overline{QT}^2} = \frac{1}{2 \cdot \overline{CD}^2 \cdot \overline{PF}^2} \cdot \overline{PF} \quad (6.13)$$

Pelo Teorema (12), temos que

$$\overline{CD} \cdot \overline{PF} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = k \quad (6.14)$$

em que k é uma constante.

De (6.13) e (6.14), temos

$$\vec{F} \sim \frac{\overline{QR}}{\overline{PC}^2 \cdot \overline{QT}^2} = \frac{1}{2 \cdot \overline{CD}^2 \cdot \overline{PF}^2} \cdot \overline{PF} = \left(\frac{1}{2 \cdot \underbrace{\overline{CA}^2 \cdot \overline{CB}^2}_{k^2}} \right) \cdot \overline{PC} \quad (6.15)$$

Desse modo,

$$\vec{F} \sim \frac{\overline{QR}}{\overline{PC}^2 \cdot \overline{QT}^2} = \frac{1}{2k^2} \cdot \overline{PC} \quad (6.16)$$

Portanto, pelo Teorema 16, a força varia conforme a distância \overline{PC} do planeta P ao centro de força C varia.

□

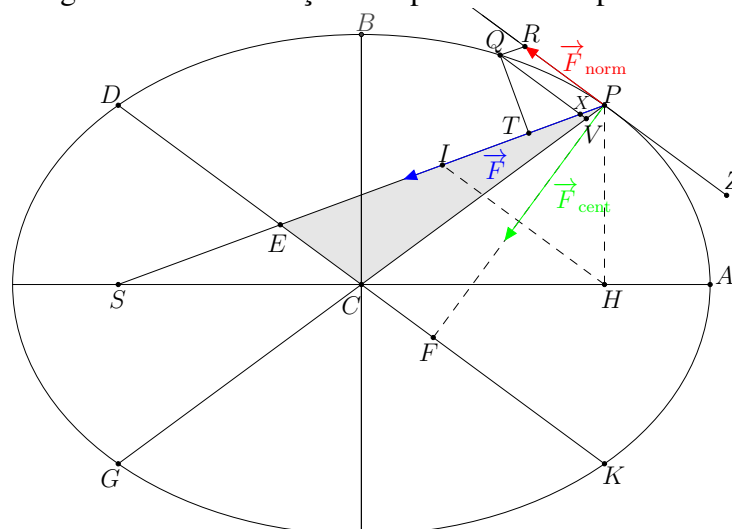
De [79] e [15, p. 106, Problema 3], temos o Corolário.

Corolário 2. *Se um corpo gira em uma elipse: é necessário obter a lei da força centrípeta \vec{F} que tende para ao foco S da elipse.*

Demonstração: O diagrama a seguir, Figura 6.10, é semelhante ao apresentado no Teorema 17, diferentemente do caso anterior, temos S como o centro de força, além disso

$$ZR \parallel HI \parallel DK, \quad SP \cap HI = I.$$

Figura 6.10: Diagrama da lei da força centrípeta tendendo para o centro da elipse.



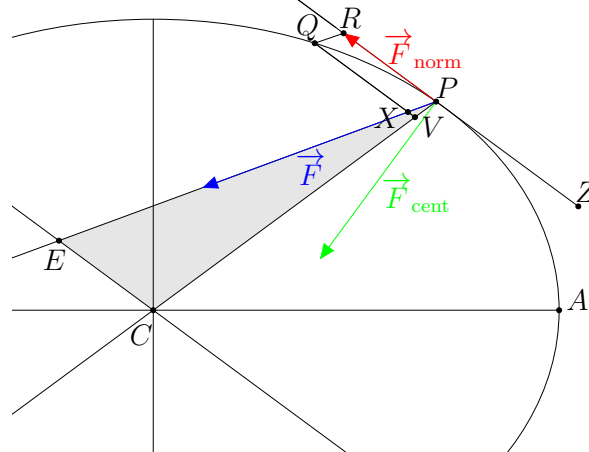
Fonte: Adaptado de [15] e [79].

Também temos que

$$V \in PG \text{ e } X \in PS.$$

Para maiores detalhes consideremos do diagrama, Figura 6.11, a seguir:

Figura 6.11: Diagrama da lei da força centrípeta tendendo para o centro da elipse, recorte.



Fonte: Adaptado de [15] e [79].

Primeiramente devemos encontrar um expressão que represente \overline{QR} , a fim de utilizarmos o Teorema 16. Note que os triângulos PEC e PXV são semelhantes, pois possuem ângulos correspondentes iguais, uma vez que $CE \parallel VX$. Também temos que $\overline{QR} = \overline{PX}$, pois são lados opostos do paralelogramo $QRPX$, portanto:

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{PV}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{PV}}.$$

Multiplicando $\frac{\overline{PE}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{PV}}$ por \overline{PV} , temos

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{PC}} \cdot \overline{PV} = \frac{\overline{QR}}{\overline{PV}} \cdot \overline{PV} \implies \overline{QR} = \overline{PV} \cdot \frac{\overline{PE}}{\overline{PC}} \quad (6.17)$$

Pelo Teorema 13, temos que $\overline{PE} = \overline{AC}$. Assim,

$$\overline{QR} = \overline{PV} \cdot \frac{\overline{PE}}{\overline{PC}} = \overline{PV} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} \quad (6.18)$$

Assim como no Teorema 17, temos da equação (6.8) que

$$\overline{PV} = \frac{\overline{QV}^2}{\overline{VG}} \cdot \frac{\overline{PC}^2}{\overline{CD}^2}.$$

Tomando $L = \frac{2\overline{BC}^2}{\overline{AC}}$, temos que

$$\vec{F} \sim \frac{\overline{QV}^2}{\overline{QX}^2} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{VG}} \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{\overline{SP}^2};$$

em que L é uma constante da elipse, igual ao comprimento do Latus Retum, conforme o Teorema 14.

Além disso, conforme Q se aproxima de P , \overline{QV} e \overline{VG} se aproximam respectivamente de \overline{QX} e de $2\overline{PC}$, respectivamente. Se fizermos essas aproximações no limite, temos:

$$\begin{aligned} \vec{F} \sim \frac{\overline{QV}^2}{\overline{QX}^3} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{VG}} \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{\overline{SP}^2} &\cong \frac{\overline{QX}^2}{\overline{QX}^2} \cdot \frac{\overline{PC}}{2\overline{PC}} \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{\overline{SP}^2} \\ &= \frac{\cancel{\overline{QX}^2}}{\cancel{\overline{QX}^2}} \cdot \frac{\cancel{\overline{PC}}}{2\cancel{\overline{PC}}} \cdot \frac{2}{L} \cdot \frac{1}{\overline{SP}^2} \\ &= \frac{1}{L \cdot \overline{SP}^2} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Logo,

$$\vec{F} \sim \frac{1}{L \cdot \overline{SP}^2} \quad (6.24)$$

De (6.7) e (6.24), ao aproximarmos os resultados no limite, teremos:

$$\begin{aligned} \vec{F} &\sim \frac{\overline{QR}}{\overline{SP}^2 \cdot \overline{QT}^2} = \frac{1}{L \cdot \overline{SP}^2} \\ \implies \frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2} &= \frac{1}{L \cdot \overline{SP}^2} \cdot \cancel{\overline{SP}^2} \\ \implies \frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2} &= \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Portanto, ao considerarmos o foco S como centro da força, teremos

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QT}^2} = \frac{1}{L} \quad (6.26)$$

□

6.3 Terceira Lei de Kepler

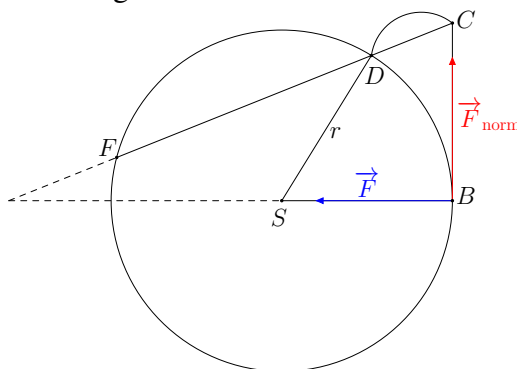
De [79] e [15, p. 86, Teorema 2], temos o Teorema.

Teorema 18 (Movimento circular uniforme). *Nos lugares em que os corpos orbitam uniformemente em circunferências, a força centrípeta \vec{F} é proporcional ao quadrado do comprimento arco BD , descrito simultaneamente, dividido pelo raio de seu respectivo círculo.*

Demonstração: No diagrama a seguir, Figura 6.13, S é o centro da circunferência e também o centro da força \vec{F} . Já B é a localização inicial do planeta; BC é o movimento tangencial, onde não há incidência da força centrípeta.

Neste caso, a força \vec{F} gravitacional que atrai o planeta para o centro S coincide com a força centrípeta \vec{F}_{cent} , já que o movimento é circular e uniforme, \vec{F} é perpendicular a força \vec{F}_{norm} ⁶, do movimento tangencial.

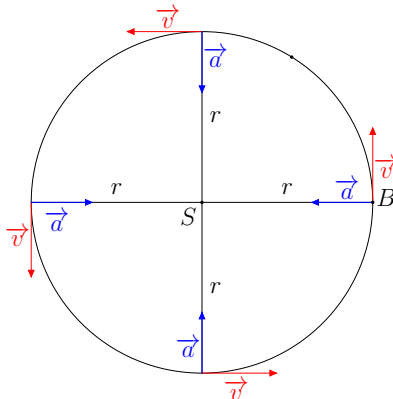
Figura 6.13: Diagrama do movimento circular uniforme.



Fonte: Adaptado de [15] e [79].

A velocidade v resulta da razão entre o deslocamento d , no caso r , e o tempo t , sendo assim diretamente proporcional ao deslocamento. Já a força gravitacional \vec{F} é o produto da massa m do planeta e aceleração gravitacional a , portanto é diretamente proporcional a aceleração. Assim, o movimento circular uniforme representado na Figura 6.13 é equivalente ao representado na Figura 6.14, a seguir.

Figura 6.14: Diagrama do movimento circular uniforme: velocidade e aceleração.



Fonte: Adaptado de [15] e [79].

⁶Em uma circunferência o raio é sempre perpendicular à uma reta tangente, ou seja, a força \vec{F} sempre é perpendicular ao movimento tangencial no movimento circular uniforme, daí a o motivação das forças gravitacional e centrípeta coincidirem.

Podemos observar que

$$v = \frac{r}{t} \implies t = \frac{r}{v} \quad (6.27)$$

$$a = \frac{v}{t} \quad (6.28)$$

De (6.27) e (6.28), temos que

$$\begin{aligned} a = \frac{v}{t} &\implies a = \frac{v}{\left(\frac{r}{v}\right)} \\ &\implies a = \frac{v^2}{r} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Portanto, o teorema equivale a fórmula da aceleração.

Observe que devido a deflexão ocasionada pelo movimento circular uniforme a força \vec{F} é proporcional a \overline{CD} . Temos também que o comprimento do arco \widehat{BD} é igual à \overline{BC} , com o arco \widehat{CD} centrado em B . Pelo Teorema 6:

$$\overline{CD} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{CF}}.$$

Observemos que conforme C se aproxima de B , \overline{BC} se aproxima de \overline{BD} e \overline{CF} de $2r$.

Assim,

$$\vec{F} \sim \overline{CD} \sim \frac{\overline{BD}^2}{2r} \sim \frac{\overline{BD}^2}{r}. \quad (6.30)$$

Portanto,

$$\vec{F} \sim \frac{\overline{BD}^2}{r}. \quad (6.31)$$

□

De [79] e [15, p. 89, Corolário 2], temos o Corolário.

Corolário 3. A força \vec{F} é proporcional ao raio da órbita dividido pelo quadrado do período de revolução.

Demonstração: Seja T o período de uma revolução, $P = 2\pi r$ comprimento da órbita e v a velocidade, temos que

$$v = \frac{d}{t} = \frac{2\pi r}{T} \quad (6.32)$$

De (6.31) e (6.32), temos

$$\vec{F} \sim \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} \sim \frac{r}{T^2} \quad (6.33)$$

Portanto,

$$\vec{F} \sim \frac{r}{T^2}. \quad (6.34)$$

□

De [79] e [15, p. 91, Corolário 5], temos o Corolário.

Corolário 4. *Sejam \vec{F}_1 e \vec{F}_2 forças centrípetas proporcionais a razão entre os raios r_1 e r_2 divididos pelos quadrados dos períodos T_1 e T_2 , respectivamente; assim como são aos inversos desses raios ao quadrado. Teremos, assim, que a razão entre os cubos dos raios é igual a razão dos quadrados dos períodos.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que dois planetas orbitem em movimento circular uniforme em torno de círculos, pelo Corolário 3, temos

$$\frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2} = \frac{\left(\frac{r_1}{T_1^2}\right)}{\left(\frac{r_2}{T_2^2}\right)} \iff \frac{\vec{F}_1}{F_2} = \frac{r_1 T_2^2}{r_2 T_1^2} \quad (6.35)$$

Suponha também que as forças centrípetas sejam proporcionais aos inversos dos raios ao quadrado, conforme as proporções em (6.31), Teorema 18, temos:

$$\frac{\vec{F}_1}{\vec{F}_2} = \frac{\left(\frac{1}{r_1^2}\right)}{\left(\frac{1}{r_2^2}\right)} \iff \frac{\vec{F}_1}{F_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (6.36)$$

De (6.35) e (6.36), temos

$$\begin{aligned} \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1 T_2^2}{r_2 T_1^2} &\iff r_1^2 \cdot r_1 T_2^2 = r_2^2 \cdot r_2 T_1^2 \\ &\iff r_1^3 T_2^2 = r_2^3 T_1^2 \\ &\iff \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Portanto,

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (6.38)$$

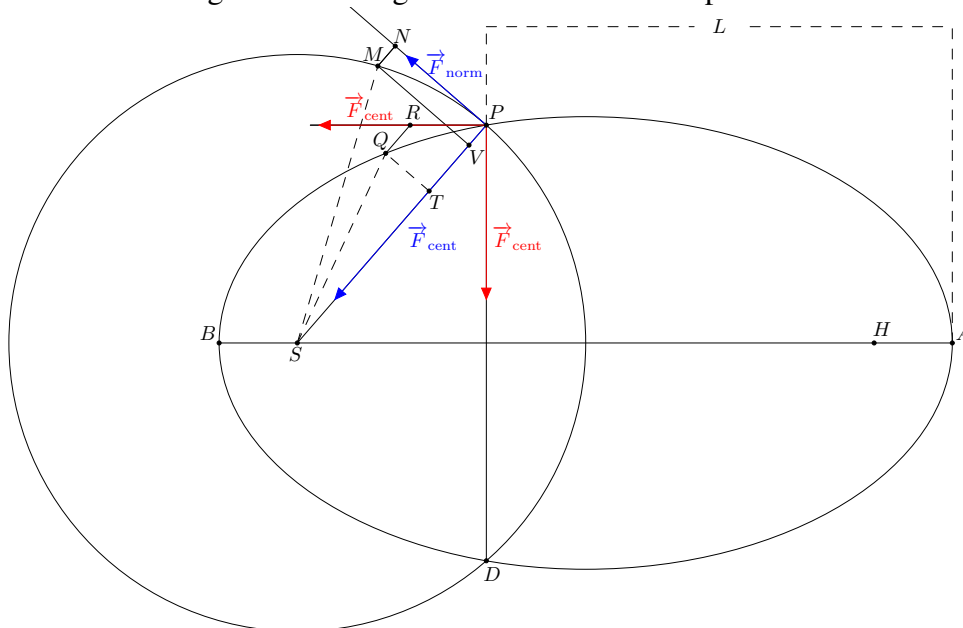
□

De [79] e [15, p. 120, Teorema 4], temos o Teorema.

Teorema 19 (Lei dos raios ao cubo períodos ao quadrado, na elipse). *Sejam \vec{F}_1 e \vec{F}_2 forças centrípetas inversamente proporcionais aos quadrados das distâncias r_1 e r_2 ao centro de uma órbita elíptica, respectivamente. Desse modo, temos que a razão entre os quadrados dos períodos de tempo é igual a razão dos cubos de seus eixos transversais.*

Demonstração: No diagrama a seguir, Figura 6.15, temos que AB é o eixo transversal da órbita elíptica, PD o outro eixo e S um dos focos.

Figura 6.15: Diagrama do movimento elíptico.



Fonte: Adaptado de [15] e [79].

Tomemos um círculo de centro em S e raio \overline{SP} . Tal círculo trata-se de uma órbita circular uniforme, com a mesma força que emana a partir de S e age em P .

Nesse diagrama, temos também que PR e PN são movimentos tangenciais, na ausência de uma força atuando; QR e MN são desvios à força, em que $QR \parallel PS$ e $MN \parallel PS$.

Além disso, as medidas de QR e MN refletem a força de S sobre P , os comprimentos desses segmentos se aproximam. Pela propriedade dos focos da elipse, $2\overline{SP} = \overline{AB}$.

Afim de aplicar 6.26, consideremos L o Latus Retum da elipse e o diâmetro o Latus Retum do círculo. Assim, temos que

$$\left. \begin{aligned} L \cdot \overline{QR} &= \overline{QT}^2 \\ 2\overline{SP} \cdot \overline{MN} &= \overline{MV}^2 \end{aligned} \right\} \implies \frac{\overline{QT}^2}{\overline{MV}^2} = \frac{L \cdot \overline{QR}}{2\overline{SP} \cdot \overline{MN}}$$

Como L é o Latus Retum da elipse, pelo Teorema 14, temos

$$L = \frac{\overline{PD}^2}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PD}^2}{2\overline{SP}}$$

Desse modo,

$$\frac{\overline{QT}^2}{\overline{MV}^2} = \frac{\left(\frac{\overline{PD}^2}{2\overline{SP}}\right) \cdot \overline{QR}}{2\overline{SP} \cdot \overline{MN}} = \frac{\overline{PD}^2 \cdot \overline{MN}}{2\overline{SP} \cdot \overline{MN} \cdot 2\overline{SP}} = \frac{\overline{PD}^2}{4\overline{SP}^2}$$

Portanto,

$$\frac{\overline{QT}^2}{\overline{MV}^2} = \frac{\overline{PD}^2}{4\overline{SP}^2}$$

Ou seja,

$$\frac{\overline{QT}}{\overline{MV}} = \frac{\overline{PD}}{2\overline{SP}}$$

Além disso, os triângulos SPQ e SPM de alturas QT e MV respectivamente, têm a mesma base SP . Assim,

$$\left. \begin{aligned} A_{(\Delta SPQ)} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{SP} \cdot \overline{QT} \\ A_{(\Delta SPM)} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{SP} \cdot \overline{MV} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_{(\Delta SPQ)}}{A_{(\Delta SPM)}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{SP} \cdot \overline{QT}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{SP} \cdot \overline{MV}} \Rightarrow \frac{A_{(\Delta SPQ)}}{A_{(\Delta SPM)}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{MV}} \quad (6.39)$$

Por outro lado

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{elipse}} &= \pi ab = \pi \cdot \overline{SP} \cdot \frac{\overline{PD}}{2} \\ A_{\text{circulo}} &= \pi r^2 = \pi \cdot \overline{SP}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_{\text{elipse}}}{A_{\text{circulo}}} = \frac{\pi \cdot \overline{SP} \cdot \frac{\overline{PD}}{2}}{\pi \cdot \overline{SP} \cdot \overline{SP}} \Rightarrow \frac{A_{\text{elipse}}}{A_{\text{circulo}}} = \frac{\overline{PD}}{2\overline{SP}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{MV}} \quad (6.40)$$

A partir de (6.39) e (6.40), temos que:

$$\frac{A_{(\Delta SPQ)}}{A_{(\Delta SPM)}} = \frac{A_{\text{elipse}}}{A_{\text{circulo}}} \quad (6.41)$$

Portanto, os triângulos possuem a mesma proporção entre áreas que ocorre entre a elipse e o círculo. Conforme diminuimos as bases, as áreas dos triângulos se aproximam das áreas dos

setores circulares.

De acordo com o diagrama da Figura 6.15, a expressão $\left(\frac{1}{N}\right)^{th}$ representa o movimento da órbita circular, sobre determinado período de tempo. Ao multiplicarmos por N obtemos a órbita circular completa.

A proporção dos setores gerados em cada momento se aproxima da proporção do círculo e da elipse, ao que multiplicarmos por N . Assim, a elipse será percorrida exatamente ao mesmo tempo do círculo; portanto em períodos de tempo iguais.

Desse modo, o eixo transversal da elipse é igual ao diâmetro do círculo. Portanto a regra obtida para o círculo no Corolário 4, vale também para a elipse. Logo,

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}.$$

□

Capítulo 7

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Diante do retrospecto histórico apresentado no Capítulo 4, dos conceitos matemáticos aplicados à Astronomia abordados nos Capítulos 3, 5 e 6, e da proposta do programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - Profmat; propomos neste capítulo um conjunto de atividades voltadas para o ensino, mesclando conceitos matemáticos e astronômicos.

Para isso, trabalharemos com a ferramenta *Sequência Didática*. De acordo com Oliveira (2013)[82], tal conceito trata-se da sistematização do processo de ensino-aprendizagem, seguindo uma série de etapas conectadas entre si, que vão desde o planejamento inicial até a avaliação dos resultados, destacando-se pelo seu papel integrador e dinâmico.

Ainda de acordo com Oliveira (2013, p. 40)[82], uma sequência didática segue os passos:

- ✓ Tema a ser explorado;
- ✓ Problematização do assunto;
- ✓ Planejamento dos conteúdos;
- ✓ Objetivos a serem atingidos no processo ensino-aprendizagem;
- ✓ Delimitação da sequência de atividades: considerando a formação de grupos, material didático, cronograma, integração entre cada atividade;
- ✓ Avaliação dos resultados.

As atividades a serem propostas serão baseadas na *Engenharia Didática*, que trata-se de uma metodologia que surgiu a partir da Didática Matemática francesa nos anos 80 e ocupa-se em estudar os processos de ensino-aprendizagem de um conceito. Para isso, apresenta uma sistemática similar a da Engenharia; tendo na maioria das vezes caráter experimental baseado na realização, observação e análise dos resultados (ALMOULOU; QUEIROZ; COUTINHO, 2008)[83].

A Engenharia Didática, quando posta como metodologia de pesquisa, é caracterizada, inicialmente, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em ambiente didático. Dessa forma, se baseia: na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. A metodologia também tem como atribuição a pesquisa experimental dados o registro em

que se situa e o seu modo de validação: comparativo entre antes e pós aplicação da experiência (ALMOULOU, PEREIRA, 2008)[84].

A execução de uma proposta de ensino baseada na Engenharia Didática, segue quatro etapas metodológicas; são elas: **i) Análises preliminares;** **ii) Concepções e Análise a priori das situações de Engenharia;** **iii) Experimentação** e **iv) Análise a posteriori e validação** (OLIVEIRA; PEREIRA, 2018)[85]. Essa fases podem são descritas por Carneiro (2005)[86] da seguinte forma:

- i)** Análise do ensino cotidiano antes da intervenção e seus efeitos, concepções e reflexões dos estudantes a cerca das aulas. Nessa fase, levantam-se hipóteses para se alcançar um ensino mais satisfatório;
- ii)** Descreve as escolhas e variáveis a serem adotadas, bem como a descrição de cada atividade proposta;
- iii)** Ocorre a aplicação das atividades, fase em que se realizam as experiências. Nesta etapa, coleta-se e organiza-se dúvidas e erros, bem como se faz intervenções pontuais;
- iv)** Avaliação da aplicação e retomada das hipóteses, normalmente é feito um comparativo entre a análise a priori e a experimentação.

Desse modo, podemos estabelecer que na elaboração de uma sequência didática, ocorre a seguinte correspondência: **i)** diagnóstico da turma; **ii)** elaboração das atividades; **iii)** aplicação das atividades e **iv)** avaliação dos resultados. Neste trabalho exploramos a segunda fase, apresentando a sugestão de oito atividades que podem ser aplicadas após à análise preliminar.

De acordo com Cabral (2017)[87] a estrutura de cada atividade possui essencialmente os seguintes elementos:

- 1. Delimitação do tema:** assuntos abordados;
- 2. Série(s):** público alvo da atividade;
- 3. Objetivo(s):** o que se pretende alcançar com a atividade proposta;
- 4. Duração:** tempo necessário para se realizar os procedimentos;
- 5. Materiais didáticos:** recursos necessários para efetivação do passo a passo;
- 6. Procedimentos:** descrição sistemática de como realizar a atividade;
- 7. Avaliação dos Resultados:** diagnóstico pós aplicação.

A partir da conceituação de Sequência Didática e da estruturação das atividades apresentadas por Oliveira (2013)[82] e Cabral (2017)[87], segue a sequência de atividades propostas:

7.1 Atividade I - Aspectos históricos da Astronomia e a relevância da Matemática para as descobertas

- 1. Delimitação do tema:** Apresentação histórica dos conceitos matemáticos relevantes para o desenvolvimento da Astronomia na Grécia Antiga por Aristarco, Eratóstenes Hiparco; e pelos cientistas medievais Kepler e Newton.
- 2. Série(s):** 9º ano do Ensino Fundamental.
Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), nessa etapa deve-se estudar: composição, estrutura e localização do Sistema Solar no Universo; Astronomia e cultura; vida humana fora da Terra; ordem de grandeza astronômica; evolução estelar [88, p. 350].
- 3. Objetivo(s):** Explorar por meio de uma busca ativa¹, em meios como livros e sites da internet, informações relacionadas aos conteúdos matemáticos aplicados à Astronomia².
- 4. Duração:** 2h/a;
- 5. Materiais didáticos:** Celulares, computadores, livros de História da Matemática e textos físicos e em sites da internet, lápis, caneta e cadernos.
- 6. Procedimentos:** Inicialmente, o professor irá expor considerações iniciais a cerca do tema, situando os estudantes no assunto abordado.

Em seguida, o docente dividirá a turma em dois grupos, adotando a metodologia Sala de Aula Invertida. Esta metodologia é classificada como ativa e híbrida, na qual os estudantes realizam o estudo dos conceitos essenciais antes da intervenção do professor, que ocorre depois em discussão conjunta com a turma (SCHNEIDERS, 2018)[89].

Cada grupo ficará responsável por meio de busca ativa nos meios disponíveis, por levantar informações de modo que o:

- i) Grupo I -** Irá explorar aspectos inerentes as descobertas dos gregos antigos: Aristarco, Eratóstenes e Hiparco.
- ii) Grupo II -** Irá explorar os resultados alcançados por Kepler e Newton.

Para isso, serão destacados os conteúdos matemáticos mais relevantes nas descobertas de cada grupo; nesta fase, o professor deve estimular a participação e engajamento dentro de cada equipe. De acordo com Zabala (1998, p. 73)[90] “Se

¹Busca por informações de forma diligente na internet e em outros meios.

²Na busca também é possível encontrar informações relacionadas ao assunto no Capítulo 4 deste trabalho.

não há participação, o processo só será seguido por uns poucos, embora se tenha a falsa impressão de se tratar de um processo coletivo”.

Após a busca ativa cada grupo irá fazer a apresentação dos seus resultados. Nessa fase, o professor será responsável por mediar as falas dos grupos trazendo colocações pontuais como fazer questionamentos e levantar hipóteses relacionadas aos temas trabalhados. Ao assumir essa condição o docente permitirá aos estudantes assumirem o protagonismo, proporcionando a troca de conhecimentos, tornando-os agentes ativos do processo de ensino-aprendizagem (SCHNEIDERS, 2018)[89]. Desse modo, o docente irá buscar estimular o diálogo entre os grupos, promovendo a integração entre as equipes.

Por fim, após as exposições de cada equipe o professor retoma o tema abordado e faz as suas colocações a cerca da atividade.

- 7. Avaliação dos Resultados:** Ocorrerá por meio da participação dos estudantes, para isso, serão considerados a integração entre os grupos, o engajamento e as impressões a respeito do estudo.

7.2 Atividade II - Eratóstenes e a circunferência da Terra, explorando comprimento de arco e ângulos formados entre retas

- 1. Delimitação do tema:** Cálculo do raio da Terra a partir do método de Eratóstenes.
- 2. Série(s):** 9º ano do Ensino Fundamental.
Conforme a BNCC, nessa etapa deve-se estudar: relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal; relações entre arcos e ângulos na circunferência de uma círculo [88, p. 316].
- 3. Objetivo(s):** Explorar os conceitos: tangente de ângulo no triângulo retângulo e comprimento de arco circular.
- 4. Duração:** 4h/a;
- 5. Materiais didáticos:** Vareta, fita métrica ou régua, calculadora científica e celular com internet.
- 6. Procedimentos:** Inicialmente, o professor irá expor considerações iniciais a cerca do tema, situando os estudantes no assunto abordado, indicando aplicações da trigonometria e medida comprimento de arcos na Astronomia.

Em seguida, o professor propõe a atividade experimental aos estudantes, explicando como Eratóstenes fez a experiência do cálculo da circunferência terrestre no passado, exposta no Capítulo 5 deste trabalho.

A experimentação tem a capacidade de despertar interesse dos estudantes, dada a possibilidade de aprender vendo a ação. Para isso, é de suma importância atividades experimentais bem planejadas e executadas (RAMOS; ROSA, 2016)[91].

Destacamos também, o papel integrador das atividades experimentais no ambiente didático. “Além de seu papel pedagógico, os experimentos também se transformam em momentos em que se desenvolve a interação e a socialização, e potencializa a criatividade dos alunos” (PEREIRA; CARACRISTI, 2020, p. 8)[92].

Nessa perspectiva, o docente deve estar por dentro de todo o contexto didático-pedagógico que envolve a turma e seus conhecimentos antes de aplicar atividade. Na execução do experimento é indispensável que o docente esteja atento às diferentes reações e entendimentos por parte dos estudantes, cabendo ao docente intermediar e sanar eventuais dúvidas.

Desse modo, durante a atividade, o professor será responsável por mediar as ações da turma trazendo colocações pontuais. Para isso, o docente deverá estimular o diálogo entre os estudantes, promovendo a integração entre os mesmos.

A experiência será dividida em etapas, a primeira delas é calcular a inclinação da vareta em relação à luz solar. Assim,

- I) Posicionar-se um pequeno bastão ou vareta na posição vertical e perpendicular em relação ao solo.
- II) Em seguida, usando a fita métrica, realiza-se a medição dos comprimentos da altura do bastão em relação ao solo e da sua sombra, conforme a Figura 7.1.

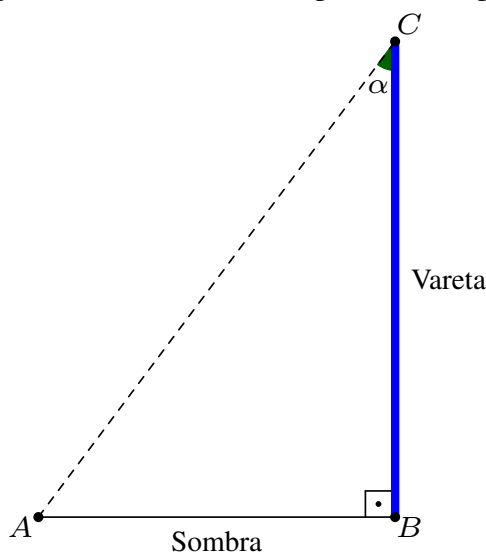
Figura 7.1: Representação geométrica da medição.



Fonte: [93].

Nessa fase, chama-se atenção para o fato de se posicionar perpendicularmente o bastão ou vareta. Para assim, projetar um triângulo retângulo: ao unir-se as extremidades da sombra e do bastão 7.2.

Figura 7.2: Medição da sombra do bastão posicionado perpendicular ao solo.



Fonte: O autor.

III) A seguir aplica-se trigonometria no triângulo retângulo para calcular a inclinação da luz no ponto B . Para isso, explora-se o conceito de tangente, aplicando a função inversa $\arctg x$, obtendo-se o valor do ângulo α . Nessa etapa aconselha-se usar a calculadora científica.

Na segunda etapa o professor explica que é necessário encontrar uma cidade sobre o globo em que os raios incidam exatamente de forma perpendicular, ou seja, onde um bastão posicionado perpendicularmente tem inclinação nula. Se isso ocorre, não há ocorrência de sombra. Vale ressaltar que a ausência de sombra depende da época do ano e do horário, bem como do local. Por conta de tais fatores recomenda-se utilizar o *Google Maps* para estabelecer uma cidade onde os raios incidem perpendicularmente.

Logo depois, com o auxílio do *Google Maps*, calcula-se a distância entre as duas cidades: onde foi feita a medição pelos estudantes e a que encontra-se sob inclinação nula.

Na terceira etapa, o professor faz algumas recapitulações com a turma, explica o formato circular do planeta e que o valor aproximado do raio terrestre é 6 371 km. Em seguida, faz a comparação entre os ângulos determinados no experimento. Logo após, em posse da medida do arco que relativo à distância das duas cidades, conforme a Figura 5.11, calcula-se o comprimento do raio utilizando-se

proporcionalidade³. Desse modo, encontrando o resultado proposto.

- 7. Avaliação dos Resultados:** Ocorrerá por meio da participação dos estudantes, para isso, serão considerados a integração dos mesmos na atividade, o engajamento e as impressões a respeito do estudo.

O professor pode comparar o resultado encontrado pelos estudantes ao real, podendo fazer a revisão das etapas caso haja grande diferença entre os resultados. Para isso, fazendo as suas observações e colocações sobre a atividade.

Esse tipo procedimento remete a finalidade da avaliação, que de acordo com Zabala (1998, p. 200)[90] “[. . .] é ser um instrumento educativo que informa e faz uma valoração do processo de aprendizagem seguido pelo aluno, com o objetivo de lhe oportunizar, em todo momento, as propostas educacionais mais adequadas”.

7.3 Atividade III - Cálculo das distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol, pelo método de Aristarco, explorando trigonometria no triângulo retângulo e semelhança de triângulos

- 1. Delimitação do tema:** Cálculo das distâncias relativas entre a Terra e Lua e entre Terra e Sol.
- 2. Série(s):** 9º ano do Ensino Fundamental.
Conforme a BNCC, nessa etapa deve-se estudar, entre outras coisas, semelhança de triângulos [88, p. 316].
- 3. Objetivo(s):** Explorar o conceito seno, cosseno e tangente de um ângulo no triângulo retângulo; e de semelhança de triângulos.
- 4. Duração:** 4h/a;
- 5. Materiais didáticos:** moeda ou tampa de garrafa pet, fita métrica ou régua, calculadora científica e celular com internet.
- 6. Procedimentos:** O professor irá expor considerações iniciais a cerca do tema, situando os estudantes no assunto abordado, indicando aplicações da trigonometria.
Em seguida, o professor propõe a atividade experimental aos estudantes, explicando como Aristarco fez a experiência no passado, exposta no Capítulo 5 deste trabalho.

³Para melhor entendimento dessa etapa o professor pode consulta a Seção 5.2 deste trabalho.

Durante a atividade, o professor será responsável por mediar as ações da turma trazendo colocações pontuais. Para isso, o docente deve estimular o diálogo entre os estudantes, promovendo a integração entre os discentes.

Ao atuar mais como um orientador do processo de ensino-aprendizagem, em vez de assumir um papel mais centralizador, o professor estimula a interação entre os estudantes. Tal prática, possibilita aos alunos sentirem-se mais confortáveis para apresentarem seus pensamentos e argumentos (PONTE; QUARESMA, 2012)[94].

A atividade será dividida em etapas, a primeira delas é calcular a relação entre a distância relativa da Terra ao Sol e da Terra à Lua. Para isso:

- I) O professor explica aos estudantes o procedimento de Aristarco, que considerou a Lua nas fases quarto minguante e quarto crescente, conforme a Figura 5.1.
- II) Em seguida, considera a Lua, a Terra e o Sol como vértices de um triângulo. Logo depois, explica que nas fases quarto crescente e quarto minguante da Lua, em ambas, forma-se um ângulo reto na superfície lunar. Desse modo, estabelecendo triângulos retângulos, conforme a Figura 5.2.
- III) Logo depois, chama atenção para a medida do ângulo agudo com vértice na Terra, ressaltando que à época Aristarco estimou como sendo 87° , embora a medida correta seja cerca de $89,85^\circ$.
- IV) Aplicando trigonometria no triângulo retângulo e usando o cosseno do ângulo agudo sobre a Terra cuja medida vale $89,85^\circ$, deve-se estabelecer a relação entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua.

Nessa fase, também pode ser explorado o conceito de paralaxe, visto Capítulo 3, Subseção 3.3.1, para a qual usa-se o ângulo formado por $d(T, S)$ e $d(L, S)$, na Figura 5.2; para isso, usa-se a paralaxe $p = 0,15^\circ$ e $d(T, L)$ como raio médio.

A segunda etapa consiste em calcular a distância entre a Terra e a Lua em função do diâmetro da Terra. Para isso:

- I) O professor explica aos estudantes o procedimento de Aristarco, posicionou-se um pequeno objeto circular de diâmetro 1 cm à frente de seu corpo, à uma distância de 80 cm, conforme a Figura 5.4. Nessa fase, o professor pode utilizar uma moeda e fita métrica para realizar a medição.
- II) Em seguida, explica a relação existente entre os diâmetros da Terra e da Lua descoberta por meio do eclipse lunar, conforme a Figura 5.3.

III) Logo depois, o professor orienta os estudante como proceder por semelhança de triângulos, aplicando os resultados dos itens I) e II), para encontrar a distância relativa da Terra à Lua.

A terceira consiste em calcular entre a Terra e o Sol em função do diâmetro da Terra. Para isso, combina os resultados da primeira e segunda etapas.

A quarta etapa consiste em calcular o tamanho relativo do Sol. Para isso,

I) Inicialmente, o professor explica aos estudantes o procedimento de Aristarco, que utilizou o mesmo raciocínio empregado para calcular à distância da Terra à Lua, só que desta vez se valendo de um eclipse solar em vez do pequeno objeto, conforme a Figura 5.6.

II) Logo depois, o professor orienta os estudante como proceder por semelhança de triângulos, aplicando os resultados dos item I) desta etapa, do item II) da segunda etapa e a terceira etapa, para assim encontrar a distância relativa da Terra ao Sol.

Por fim, o docente faz as suas observações e colocações sobre da atividade⁴.

7. Avaliação dos Resultados: Ocorrerá por meio da participação dos estudantes, para isso, serão considerados a integração dos mesmos na atividade, o engajamento e as impressões a respeito do estudo.

Nessa fase, ocorre a comparação dos resultados encontrados pelos estudantes aos de Aristarco. Com isso, é possível fazer um paralelo entre os processos, bem como entender o porquê dos resultados encontrados em cada época, como também com os valores conhecidos atualmente. Feito isso, poderão revisar as etapas do processo, no caso de haver grande diferença entre os resultados.

Com isso, possibilita aos estudantes avaliarem seus passos e resultados, bem como o docente pode avaliar suas ações durante o desenvolvimento da atividade. Nessa perspectiva, a auto-avaliação “[...] é um processo de aprendizagem de avaliação do próprio esforço e, portanto, é algo que convém planejar e levar a sério” (ZABALA, 1998, p. 220)[90].

7.4 Atividade IV - Hiparco e distância da Terra à Lua, comprimento de arco e trigonometria no triângulo retângulo

1. Delimitação do tema: Cálculo da distância relativa entre a Terra e Lua.

⁴Para melhor entendimento dessa etapa o professor pode consulta a Seção 5.1 deste trabalho.

2. Série(s): 9º ano do Ensino Fundamental.

Conforme a BNCC, nessa etapa deve-se estudar: relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo [88, p. 316].

3. Objetivo(s): Explorar o conceito de tangente de um ângulo no triângulo retângulo.

4. Duração: 2h/a;

5. Materiais didáticos: lápis, papel, régua, calculadora científica ou celular.

6. Procedimentos: Inicialmente, o professor irá expor considerações iniciais a cerca do tema, situando os estudantes no assunto abordado, indicando aplicações da trigonometria.

Nessa perspectiva, é essencial que o professor compreenda o estágio de afinidade da turma com o assunto da aula. Desse modo, “Cabe ao professor, decidir qual a natureza das tarefas a propor aos seus alunos, em função do que verifica ser mais aconselhável em cada momento do seu percurso de aprendizagem” (PONTE; QUARESMA, 2012, p. 215)[94].

Em seguida, o professor propõe a atividade experimental aos estudantes, explicando como Hiparco fez a experiência no passado, exposta no Capítulo 5 deste trabalho.

Durante a atividade, o professor será responsável por mediar as ações da turma trazendo colocações pontuais. Para isso, o docente irá buscar estimular o diálogo entre os estudantes, promovendo a integração entre os mesmos.

A atividade será dividida em etapas, a primeira delas é explicar aos estudantes a ideia utilizada por Hiparco, que se valeu de um eclipse lunar, conforme a Figura 5.12.

A segunda etapa consiste em detalhar os passos. Para isso:

- I) O professor explica aos estudantes o procedimento de Hiparco, que considerou o arco correspondente à órbita circular da Lua, conforme a Figura 5.13.
- II) Em seguida, explica o significado da relação entre a órbita completa que durava 27,3 dias e o tempo de órbita durante o eclipse, encontrando por meio de proporcionalidade o ângulo θ , exposto nas Figuras 5.12 e 5.13.

Na terceira etapa, como exposto na Figura 5.14. Desse modo,

- I) O docente juntamente com os estudantes busca estabelecer relações entre os ângulos na Figura 5.14.
- II) Após, ao executar o passo I) dessa etapa, depois de algumas manipulações obtém-se o valor de β .

Na quarta etapa considera-se a Figura 5.15. Desse modo,

- I) O professor juntamente com estudante levantam hipóteses, observando que o triângulo da Figura 5.15 é retângulo.
- II) Logo depois, o professor orienta os estudantes como proceder aplicando o conceito de seno ao ângulo β , para obter a distância relativa da Terra à Lua. Nessa fase, pode explorado o conceito de paralaxe geocêntrica, estudado no Capítulo 3, Subseção 3.3.1, para a qual usa-se o ângulo cujo vértice está sobre a Lua, na Figura 5.15; para isso, usa-se a paralaxe $p = 0,75^\circ$ e r_{Terra} como raio médio.

Por fim, o professor compara o resultado encontrado pelos estudantes ao de Hiparco, estabelecendo um paralelo com o valor conhecido atualmente, podendo fazer a revisão das etapas caso haja grande diferença entre os resultados. Para isso, fazendo as suas observações e colocações sobre da atividade⁵.

7. **Avaliação dos Resultados:** Ocorrerá por meio da participação dos estudantes, para isso, serão considerados a integração e o engajamento dos mesmos na atividade.

7.5 Atividade V - Segunda Lei de Kepler e congruência e área de triângulos

1. **Delimitação do tema:** Dedução da Segunda Lei de Kepler por meio de soma de vetores e congruência de triângulos.
2. **Série(s):** 3º ano do Ensino Médio.
3. **Objetivo(s):** Explorar de congruência de triângulos e estabelecer relações entre áreas de triângulos e seus respectivos segmentos de elipses.
4. **Duração:** 4h/a;
5. **Materiais didáticos:** lápis, papel, régua.
6. **Procedimentos:** O professor irá expor considerações iniciais a cerca do tema, situando os estudantes no assunto abordado, indicando aplicações de congruência de triângulos.

Em seguida, o professor propõe a atividade de aplicação aos estudantes, explicando como Newton deduziu a Segunda Lei de Kepler no passado, exposta no Capítulo 6 deste trabalho.

⁵Para melhor entendimento dessa etapa o professor pode consulta a Seção 5.3 deste trabalho.

Durante a atividade, o professor será responsável por conduzir a tarefa de forma expositiva, buscando a atenção da turma trazendo colocações pontuais. Para isso, o docente irá buscar estimular o diálogo entre os estudantes, promovendo a integração entre os discentes.

A atividade será dividida em etapas, a primeira delas é explicar aos estudantes a ideia utilizada por Newton, que considerou um planeta se movendo de um ponto A para B , em seguida para C , conforme a Figura 6.1.

A segunda etapa consiste em detalhar os passos. Para isso,

- I) O docente explica aos estudantes o procedimento de Newton, que considerou a força \vec{F} atuando sobre B , no sentido de S , conforme as Figuras 6.1 e 6.2.
- II) Em seguida, explica que a cada momento essa força atua nos respectivos pontos A, B, C, D, E, F, \dots , conforme a Figura 6.3.

Na terceira etapa, o professor explica que será considerado que os intervalos de tempo iguais de A para B e de B para C , na Figura 6.3. Desse modo,

- I) Temos $\overline{AB} = \overline{BC_1}$ e BS mediana de AC_1 . Aqui o professor pode recapitular o conceito de mediana e indagar sobre as áreas dos triângulos ASB e BSC_1 .
- II) Em seguida, o professor propõe separar os triângulos ASB e BSC_1 de uma nova forma, observando que estes triângulos possuem base com o mesmo comprimento e alturas iguais, conforme a Figura 6.4. Portanto, possuem áreas iguais.

Na quarta etapa considerar a Figura 6.5. Desse modo,

- I) O professor recapitula a regra do paralelogramo com os estudantes e conclui que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC_1}$.
- II) Explica que pela mesma regra

$$C_1C \parallel BB_1 \text{ e } BB_1 \subset BS \implies C_1C \parallel BS.$$

Na quinta etapa considera-se a Figura 6.6, em que CC' perpendicular à SB . Desse modo,

- I) O docente explica que $C'C$ desliza para à direita, ao longo de CC_1 , descrevendo o retângulo $CC'C_1C_1$.
- II) Em seguida, concluir que os triângulos BSC e BSC_1 possuem mesma altura e base com mesmo comprimento portanto mesma área.

Na quinta etapa, combina-se o passo II) da etapa 3 e o passo II) da etapa 5, para concluir que

$$A_{(\Delta ASB)} = A_{(\Delta BSC_1)} = A_{(\Delta BSC)} \quad (7.1)$$

Explicando que o processo pode ser feito sucessivas vezes, aumentando a quantidade de triângulos, tendendo ao infinito. Com isso, conjecturando que triângulos determinados em intervalos de tempo iguais, possuem mesma área. Então, sugere que os estudantes repitam o processo que chegou à 7.1, a fim de provar que:

$$A_{(\Delta BSC)} = A_{(\Delta ASD_1)} = A_{(\Delta CSD)}.$$

Explica que devem considerar de início a Figura 6.3, adaptando o processo resultou 7.1. Com essa atitude, o educador estimula os estudantes a verificar o resultado conjecturado.

Por fim, o professor faz observações e colocações sobre da atividade⁶, em diálogo com os estudantes, busca atender suas demandas e sanar dúvidas a cerca da abstração do processo.

Nessa perspectiva, Santos (2010, p. 80)[95] diz que “somente conhecendo os interesses e necessidades de seus alunos é que os professores podem criar situações de ensino que atendem as características de aprendizagem dos estudantes, e que garantam a eficácia do seu papel de educador”.

- 7. Avaliação dos Resultados:** Ocorrerá por meio da participação dos estudantes, para isso, serão considerados a integração dos mesmos na atividade, o engajamento e as impressões a respeito do estudo.

7.6 Atividade VI - Relação entre a órbita circular e órbita elíptica, Terceira Lei de Kepler, explorando a relação entre e área da elipse e do círculo

1. **Delimitação do tema:** Dedução da Terceira lei de Kepler por meio de proporcionalidade entre segmentos e áreas.
2. **Série(s):** 3º ano do Ensino Médio.
3. **Objetivo(s):** Explorar o conceito de proporcionalidade aplicada às áreas e aos comprimento de segmentos, relacionando circunferência e elipse.

⁶Para melhor entendimento dessa etapa o professor pode consulta a Seção 6.1 deste trabalho.

4. Duração: 4h/a;

5. Materiais didáticos: lápis, papel, régua.

6. Procedimentos: O professor irá expor considerações iniciais a cerca do tema, situando os estudantes no assunto abordado, indicando aplicações da proporcionalidade em órbitas elípticas e circulares.

Em seguida, o professor propõe a atividade de aplicação aos estudantes, explicando como Newton deduziu a Terceira Lei de Kepler no passado, exposta no Capítulo 6 deste trabalho.

Nesta atividade, o docente pode chamar atenção para o aspecto interdisciplinar da Matemática com outras disciplinas, particularmente com a Astronomia. A interdisciplinaridade possibilita a produção de forma coletiva e crítica do conhecimento escolar, estabelecendo a interação dos conhecimentos com as outras áreas (AZEVEDO; ANDRADE, 2007)[96].

Logo depois, o professor diz aos estudantes que a atividade terá dois momentos. O primeiro deles consistirá no professor de deduzir a lei para órbita circular, já no segundo juntamente aos estudantes farão a dedução da lei para elipse. Para isso, o docente irá buscar estimular o diálogo entre os estudantes, promovendo a integração entre os mesmos. Nessa fase, chamamos a atenção para o papel motivador do professor, sendo um articulador e guia para os passos dos estudantes.

Na primeira parte da atividade o professor inicia fazendo a demonstração do Teorema 18, deste trabalho. Para isso,

- I) O docente recapitula com os estudantes o conceitos de força centrípeta, movimento circular uniforme e movimento tangencial, conforme a Figura 6.13.
- II) Em seguida, explica a relação entre aceleração, velocidade e o raio da órbita. Para facilitar o entendimento dos estudantes o docente pode utilizar a Figura 6.14.
- III) Finalmente, conclui que a força é proporcional ao quadrado do arco e inversamente proporcional ao raio, usando o Teorema 6.

A seguir o professor faz a demonstração do Corolário 3, deste trabalho. Para isso,

- I) O professor recapitula o conceito de comprimento da circunferência, para então estabelecer o comprimento de uma órbita circular em um período de tempo.

- II) Em seguida, combina o resultado do item I) com o Teorema 18 para concluir que a força é proporcional ao raio e inversamente proporcional ao quadrado do período de tempo.

Por último, o professor faz a demonstração do Corolário 4, deste trabalho. Para isso,

- I) Considera-se duas órbitas circulares, estabelecendo a razão entre essas forças conforme o Corolário 3.
- II) Em seguida, considera o caso em que os períodos são iguais.
- III) Por fim, combina os itens I) e II) para concluir que a razão entre os cubos dos raios é igual à razão entre os quadrados dos períodos de tempo.

A segunda parte da atividade consiste na atuação dos estudantes, em que o professor irar propor que demonstrem o Teorema 19.

Durante essa etapa o professor deve observar o desenvolvimento, auxiliando os estudantes em momentos pontuais e revisando conceitos necessários nessa dedução.

O professor pode inicialmente apresentar a Figura 6.15, na qual S trata-se do centro de uma órbita circular e do foco de uma órbita elíptica. Para isso, o docente motiva os discentes a:

- I) Estabelecer a relação entre \overline{SP} e \overline{AB} , por meio da propriedade dos focos.
- II) Aplicar o Teorema 14 para concluir que

$$\frac{\overline{QT}}{\overline{MV}} = \frac{\overline{PD}}{2\overline{SP}}.$$

- III) Estabelecer a relação entre as áreas das órbitas circular e elíptica.
- IV) Usar o Corolário 4 para concluir o resultado do Teorema 19.

Por fim, o professor faz observações e colocações sobre da atividade⁷, em diálogo com os estudantes.

- 7. Avaliação dos Resultados:** Ocorrerá por meio da participação dos estudantes, para isso, serão considerados a integração dos mesmos na atividade, o engajamento e as impressões a respeito do estudo.

7.7 Atividade VII - Observação das fases da Lua

- 1. Delimitação do tema:** Dedução das fases da Lua de acordo com o ângulo de observação.

⁷Para melhor entendimento dessa etapa o professor pode consulta a Seção 6.3 deste trabalho.

2. Série(s): 5º ano do Ensino Fundamental.

Conforme a BNCC, nessa etapa deve-se estudar: constelações e mapas celestes; movimento de rotação da Terra; periodicidade das fases da Lua instrumentos óticos [88, p. 340].

3. Objetivo(s): Explorar o conceito de ângulo no estudo das fases da Lua.

4. Duração: 4h/a;

5. Materiais didáticos: caixa de papelão retangular e com tampa, bola de isopor, lanterna, pedaço de arame flexível, régua, fita adesiva e moeda.

6. Procedimentos: O professor irá expor considerações iniciais a cerca do tema, situando os estudantes no assunto abordado, explicando a incidência dos raios solares na superfície da Lua.

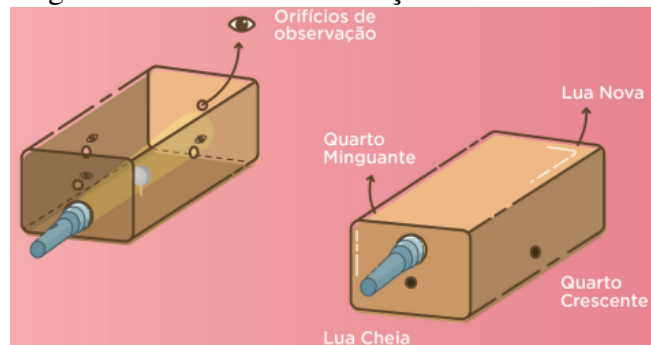
Em seguida, o professor propõe a atividade que trata da observação das fases da Lua, representada por uma bola de isopor no centro de uma caixa retangular e recebendo a luz de uma lanterna.

Logo depois, o professor diz aos estudantes que a atividade terá dois momentos. No primeiro deles ocorrerá a confecção do instrumento de observação, já no segundo se dará o experimento de verificação das fases da Lua. Para isso, o docente pode estimular o diálogo entre os estudantes, promovendo a integração entre os mesmos. Sobre atividades experimentais, Zabala (1998)[90] defende que estas favorecem a relação dos conhecimentos adquiridos durante o experimento e aqueles que se obtém previamente, seja em sala de aula ou no cotidiano do estudante.

Na primeira parte da atividade o professor juntamente com os estudantes confeccionam a cúpula, que trata-se de uma caixa retangular fechada com furos nas faces laterais. Para isso:

- I) Faça um furo no centro de cada face lateral da caixa; para fazer isso, com exatidão, é recomendado medir com uma régua e usar uma moeda para marcar o contorno circular onde será furado.
- II) A seguir, fixe o pedaço de arame na bola de isopor e coloque-a no meio da caixa de modo que ela fique suspensa na altura dos furos, conforme a Figura 7.3.
- III) Depois, é feito um furo em uma das faces laterais, abaixo do furo já feito na face; em seguida, fixe a lanterna.
- IV) Por fim, lacre a caixa usando fita adesiva.

Figura 7.3: Caixa de observação das fases da Lua.



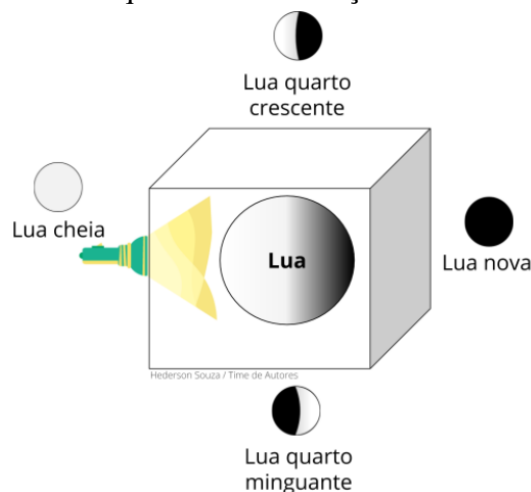
Fonte: [97].

Na segunda fase ocorrem os experimentos. Basta seguir o passo a passo:

- I) Para observar a incidência da luz na face da bolinha de isopor recomenda-se que o(s) observador(es) analisem o que veem ao se posicionarem em cada um dos furos.
- II) Em seguida, o docente explica que de acordo com a iluminação vista sobre a bolinha, ocorre a representação de uma das fases da Lua. Assim, se a observação ocorrer a partir:
 - a) do furo que sob a lanterna, então a Lua estará cheia, aqui, se imaginarmos os furos como quadrantes da circunferência, esse ponto representa 0° ;
 - b) do furo à direita e a 90° daquele sob a lanterna, então a Lua estará em quarto minguante;
 - c) do furo oposto e 180° daquele sob a lanterna, então a Lua estará nova;
 - d) do furo à esquerda e a 270° daquele sob a lanterna, então a Lua estará em quarto crescente.

Na Figura 7.4, temos o esquema descrito anteriormente.

Figura 7.4: Esquema de observação das fases da Lua.



Fonte: [98].

Por fim, o professor faz observações e colocações sobre da atividade⁸, em diálogo com os estudantes.

7. **Avaliação dos Resultados:** Ocorrerá por meio da participação dos estudantes, para isso, serão considerados a integração dos mesmos na atividade, o engajamento e as impressões a respeito do estudo.

7.8 Atividade VIII - faces da Lua - sempre a mesma face voltada para a Terra

1. **Delimitação do tema:** Faces da Lua, sempre a mesma voltada para Terra.
2. **Série(s):** 5º ano do Ensino Fundamental.
Conforme a BNCC, nessa etapa deve-se estudar: constelações e mapas celestes; movimento de rotação da Terra; periodicidade das fases da Lua instrumentos óticos [88, p. 340].
3. **Objetivo(s):** Explorar o conceito velocidade angular por meio da posição relativa entre Lua e a Terra.
4. **Duração:** 2h/a;
5. **Materiais didáticos:** dois rodos, barbante e fita gomada.
6. **Procedimentos:** O professor irá expor considerações iniciais a cerca do tema, situando os estudantes no assunto abordado, explicando que os movimentos de rotação e translação da Lua possuem mesma velocidade angular, conforme mostrado na Figura 3.20.

Em seguida, o professor propõe a atividade que trata da verificação do fato da Lua ter sempre a mesma face voltada para a Terra.

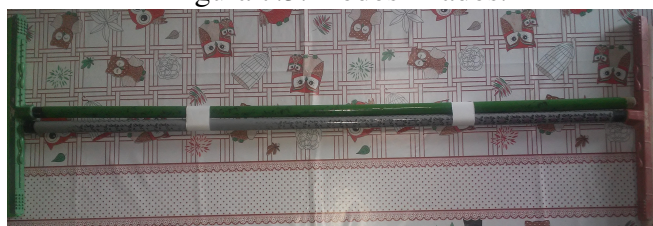
Logo depois, o professor diz aos estudantes que a atividade terá dois momentos. No primeiro deles ocorrerá a confecção do instrumento de verificação, já no segundo se dará o experimento sobre qual face da Lua volta-se para a Terra. Para isso, o docente pode estimular o diálogo entre os estudantes, promovendo a integração entre os mesmos. Nessa perspectiva, Cabral (2017)[87] explica que é importante que o professor assuma uma postura provocadora e organizadora das ideias, ao passo que se mostrar mais ativo estimula os estudantes.

⁸Para melhor entendimento dessa etapa o professor pode consulta a Seção 3.2.2 deste trabalho.

Na primeira parte da atividade o professor juntamente com os estudantes confeccionam os bastões que ligaram dois indivíduos que representaram a Lua e a Terra. Para isso:

- I) Coloque os cabos dos rodos lado a lado, de modo que os rodos fiquem em lados opostos.
- II) A seguir, use fita gomada para juntar os dois cabos de modo que fiquem bem presos, um no outro, sem folgas, conforme a Figura 7.5.

Figura 7.5: Rodos fixados.



Fonte: O autor.

- III) Por fim, verifique que os rodos estão bem presos um no outro por meio dos cabos unidos; e certifique-se que os rodos estão firmes nos seus respectivos cabos.

Na segunda fase ocorrem os experimentos. Para isso,

- I) Para verificar que face da Lua voltada para a Terra é sempre a mesma, são escolhidas duas pessoas T e L que representaram, respectivamente, a Terra e a Lua.
- II) Em seguida, amarra-se os rodos no abdômen de T e L . Para fixar bem, recomenda-se usar barbante e fita gomada.
- III) Por fim, com a estrutura de rodos bem fixa nos voluntários, pede-se para que L desloque-se lateralmente. Nessa etapa, perceberá-se que T será também deslocado de modo que ambos continuem face a face.

Por fim, o professor faz observações e colocações sobre da atividade⁹, em diálogo com os estudantes.

Outro aspecto a se destacar nessa atividade, assim como na anterior, é a facilidade em acessar os materiais necessários para construção do experimento. Por apresentarem baixo custo, os mesmos se colocam como alternativa interessante às dificuldades financeiras, que muitas vezes, são enfrentadas nas escolas da educação básica (FILHO; LACERDA, 2021)[99].

⁹Para melhor entendimento dessa etapa o professor pode consulta a Seção 3.2.2 deste trabalho.

- 7. Avaliação dos Resultados:** Ocorrerá por meio da participação dos estudantes, para isso, serão considerados a integração dos mesmos na atividade, o engajamento e as impressões a respeito do estudo.

Capítulo 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após realizar a presente pesquisa percebemos que o ensino de Matemática pode se relacionar com outras áreas, em particular com a Astronomia. Dadas as relações existentes entre as duas ciências, seus conceitos colocam-se como ferramentas interdisciplinares que podem ser inseridas no processo de ensino-aprendizagem da Educação Básica, sendo que essa prática motiva e instiga a curiosidade dos estudantes ao relacionar os conceitos matemáticos aplicados à Astronomia.

Nesse trabalho notamos também a importância de se estudar a História dos conceitos, pois a partir de tal procedimento norteamos a presente pesquisa. Por meio da exploração de documentos referentes a fatos históricos ocorridos na Astronomia, escolhemos aqueles que foram mais marcantes e que se aproximam mais com a proposta do trabalho, onde a Matemática foi mais presente, o que permitiu alicerceá-lo, resultando nos capítulos centrais.

Os experimentos e descobertas expostos nesse trabalho, evidenciam o quanto a Matemática foi decisiva e importante para a evolução da Astronomia desde os primórdios. Entre eles, percebemos que os conhecimentos geométricos e trigonométricos foram bastante explorados na Grécia Antiga, assim como as propriedades e o estudo da área da elipse foram indispensáveis para Newton deduzir as Leis de Kepler.

Nessa pesquisa notamos também a importância da experimentação no processo de ensino-aprendizagem, estabelecida por meio das etapas metodológicas da Engenharia Didática. Nesse tipo de metodologia, apontamos para potencialidade do papel de orientador e facilitador do professor em ações exploratórias, mediando o processo. Nessa perspectiva, o professor deve ser o ponto de equilíbrio e segurança para o estudante, possibilitando-lhes um melhor desempenho nas atividades.

A partir da interdisciplinaridade entre Matemática e Astronomia buscamos, por meio da realização da sequência didática, que o estudante compreenda melhor os conceitos estudados, dados o caráter experimental e exploratório desse tipo de atividade. Além disso, na realização da sequência didática, esperamos despertar nos estudantes o interesse por procedimentos e métodos científicos e ampliar seus conhecimentos. Para, desse modo, desenvolverem senso e compreensão do processo científico.

Desse modo, podemos concluir que a interdisciplinaridade entre Matemática e Astronomia podem contribuir e estimular o desenvolvimento dos estudantes, embora isso possa não ocorrer de imediato, dadas as circunstâncias e nível de conhecimento da turma. Apesar disso, se relacionadas de maneira adequada podem possivelmente resultar em ganhos didáticos e científicos.

Por fim, esperamos despertar e encorajar os estudantes e demais pessoas a estudar Astronomia, bem como suas perspectivas futuras, ao passo que a ciência evolui. Como também, que as pessoas possam ver a Matemática como parte importante e indispensável para o desenvolvimento científico, possibilitando assim a compreensão e exploração do Universo.

REFERÊNCIAS

- [1] ZAIDAN, S. Transdisciplinaridade, ensino e formação de professores de matemática. **Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)**, Perspectivas da Educação Matemática, v. 12, n. 30, p. 502–518, 2019.
- [2] CARNEIRO, R. dos S. et al. Atividades práticas para o ensino de ciências naturais e matemática. **Revista Práxis**, v. 13, n. 25, 2021.
- [3] OLIVEIRA, Z. V.; ALVIM, M. H. Dimensões da abordagem histórica no ensino de ciências e de matemática. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 38, n. 1, p. 742–774, 2021.
- [4] NOGUEIRA, S.; CANALLE, J. B. G. **Astronomia: ensino fundamental e médio**. 11. ed. Brasília: Mec, Seb; Mct; Aeb, 2009. 232 p. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/13/2.htm>>. Acesso em: 23-05-2020.
- [5] RAUPP, F. M.; BEUREN, I. M. Metodologia da pesquisa aplicável às ciências. **Como elaborar trabalhos monográficos em contabilidade: teoria e prática**, São Paulo: Atlas, p. 76–97, 2006.
- [6] D’AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 17. ed. São Paulo: Papirus Editora, 2009.
- [7] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana**. São Paulo: Atual, 2013.
- [8] NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [9] LIMA, E. L. et al. **A Matemática do ensino médio: volume 1**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [10] IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar 3: Trigonometria**. São Paulo: Atual, 2013.
- [11] ROSE, W. (<https://math.stackexchange.com/users/627744/william-rose>). **How to geometrically prove the focal property of ellipse?** 2020. Mathematics Stack Exchange.

- URL:<https://math.stackexchange.com/q/3506768> (version: 2020-01-12). Disponível em: <<https://math.stackexchange.com/q/3506768>>. Acesso em: 17-04-2021.
- [12] PATERLINI, R. R. Os "teoremas" de cavalieri. **Revista do Professor de Matemática**, v. 72, 2010. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_cavalieri.pdf>. Acesso em: 10-08-2021.
- [13] BERTRAND, M. **Intersecting Chord Theorem for Ellipses**. 9 de agosto de 2014, 2014. Disponível em: <<http://nonagon.org/ExLibris/intersecting-chord-theorem-ellipses>>. Acesso em: 25-03-2021.
- [14] NEWTON, I.; MOTTE, A.; MACHIN, J. **The Mathematical Principles of Natural Philosophy**. B. Motte, 1729. (The Mathematical Principles of Natural Philosophy, v. 1). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Tm0FAAAAQAAJ>>.
- [15] BRACKENRIDGE, J. B. **The key to Newton's dynamics**. [S.l.]: University of California Press, 1996.
- [16] BESANT, W. H. **Conic Sections: Treated Geometrically**. Londres: Cambridge, 1890. Disponível em: <<https://archive.org/details/conicsectionstre00besarich/page/n3/mode/2up?view=theater>>. Acesso em: 25-03-2021.
- [17] MOURÃO, R. R. de F.; MOURÃO, M. L. de O. **Dicionário enciclopédico de astronomia e astronáutica**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1987.
- [18] VIEGAS, S. M. M. **No Coração das Galáxias**. [S.l.]: EdUSP, 2007.
- [19] IANISHI, P.; IZBICKI, R. Classificação morfológica de galáxias em conjuntos de dados desbalanceados. **TEMA (São Carlos)**, SciELO Brasil, v. 18, n. 1, p. 155–172, 2017.
- [20] NASA, E. **And The Hubble Heritage Team (STScI / AURA). Hubble spies cosmic dust bunnies**. 2005. Disponível em: <<https://esahubble.org/images/opo0511a/>>. Acesso em: 05-01-2021.
- [21] NASA. **Barred Spiral Galaxy NGC 1300**. The Hubble image was created from HST data from proposal 10342. 2005. Disponível em: <<https://hubblesite.org/contents/news-releases/2005/news-2005-01.html>>. Acesso em: 05-01-2021.
- [22] (STSCI), N. E. S. B.; (STSCI/AURA), T. H. H. T. **Out of this whirl: The Whirlpool Galaxy (M51) and companion galaxy**. 2005. Disponível em: <<https://hubblesite.org/contents/news-releases/2005/news-2005-09.html>>. Acesso em: 05-01-2021.

- [23] NASA, E.; (STSCI/AURA), T. H. H. T. **The Impending Destruction of NGC 1427A**. 2005. Disponível em: <<https://esahubble.org/images/heic0506a/>>. Acesso em: 05-01-2021.
- [24] PIXABAY. **Via Láctea do Espaço**. 2016. Disponível em: <<https://pixabay.com/pt/photos/via-l%C3%A1ctea-esp%C3%A7o-universo-gal%C3%A1xia-1684226/>>. Acesso em: 27-01-2021.
- [25] PIXABAY. **O deserto de Atacama**. 2017. Disponível em: <<https://pixabay.com/pt/photos/o-deserto-de-atacama-chile-2832866/>>. Acesso em: 27-01-2021.
- [26] WIKIMEDIA, C. **adaptado de NASA / Walt Feimer. Concepção artística da estrela SO25300.5 + 165258**. 2003. Disponível em: <<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/74/RedDwarfNASA.jpg/776px-RedDwarfNASA.jpg>>. Acesso em: 05-02-2021.
- [27] SUPER, A. **Sol Nasa**. 2020. Disponível em: <https://super.abril.com.br/wp-content/uploads/2020/07/01-07_SolNASA_SITE.jpg>. Acesso em: 05-02-2021.
- [28] GREGORIO, F. **Anã Branca Sirius B**. 2015. Disponível em: <http://3.bp.blogspot.com/-B5nTqTNZx0U/V19Y-YWHjCI/AAAAAAAAAwA/p3pjendajAw/s400/an%C3%A3-branca_Sirius_B_1_por_Frank_Gregorio.jpg>. Acesso em: 05-02-2021.
- [29] ASTRONOMIA.COM. **Bellatrix**. 2015. Disponível em: <<https://www.siteastronomia.com/wp-content/uploads/2015/07/bellatrix-150x150.jpg>>. Acesso em: 05-02-2021.
- [30] MILLIDGE, J. **Estrelas e planetas – Guia prático**. NOBEL, 1999. ISBN 9788521310891. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XZQvOfDrAG0C>>.
- [31] WIKIMEDIA, C. **adaptado de NASA. File: Gas giants in the solar system.jpg**. 1998. Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/18/Gas_giants_in_the_solar_system.jpg>. Acesso em: 05-02-2021.
- [32] WIKIMEDIA, C. **adaptado de NASA. File: Terrestrial planet size comparisons.jpg**. 2006. Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b9/Terrestrial_planet_size_comparisons.jpg>. Acesso em: 05-02-2021.
- [33] WEINTRAUB, D. **Is Pluto a Planet?: A Historical Journey through the Solar System**. Princeton University Press, 2014. ISBN 9781400852970. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=dW1_AwAAQBAJ>. Acesso em: 05-02-2021.
- [34] REALIZE. **Sistema Solar: planetas anões**. 2021. Disponível em: <<https://realizeeducacao.com.br/blog/sistema-solar-planetas-anoes/>>. Acesso em: 23-11-2021.
- [35] COMINS, N. F.; III, W. J. K. **Descobrimo o Universo**. Porto Alegre: Bookman, 2010.

- [36] GREGORIO, F. **File:FullMoon2010.jpg**. 2010. Disponível em: <<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e1/FullMoon2010.jpg>>. Acesso em: 05-02-2021.
- [37] PROJECT, E. G. **1P/Halley**. SA. Disponível em: <<https://solarsystem.nasa.gov/asteroids-comets-and-meteors/comets/1p-halley/in-depth/>>. Acesso em: 05-02-2021.
- [38] GOIANIA, S. **Interior da Terra**. 2020. Disponível em: <<https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/wp-content/uploads/2020/09/interior-da-terra-e1600725630973.png>>. Acesso em: 10-02-2021.
- [39] HORVATH, J. E. **O ABCD da Astronomia e Astrofísica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.
- [40] MAGALHÃES, L. **Biosfera**. TodaMatéria, 2017. Disponível em: <<https://static.todamateria.com.br/upload/55/37/5537cb889175a-biosfera-large.jpg>>. Acesso em: 13-02-2021.
- [41] PASSEIDIRETO. **Placas Tectônicas**. SA. Disponível em: <<https://files.passeidireto.com/df050854-63fe-4d51-9363-cab9e8315d01/df050854-63fe-4d51-9363-cab9e8315d01.png>>. Acesso em: 13-02-2021.
- [42] MORAL, M. **Placas tectônicas**. 2014. Disponível em: <<http://marininamg.blogspot.com/2014/04/placas-tectonicas.html>>. Acesso em: 13-02-2021.
- [43] CONTADOR D. DIAS. **Fases Da Lua Hoje**. 2020. Disponível em: <<https://www.contadordedias.com.br/contador-de-dias/fase-da-lua-hoje/>>. Acesso em: 19-02-2021.
- [44] MUJERESCONCIENCIA. **fig5_wz**. Disponível em: <https://mujeresconciencia.com/2018/01/04/universo-wang-zhenyi/fig5_wz/>. Acesso em: 23-11-2021.
- [45] ÁVILA, G. A geometria e as distâncias astronômicas na grécia antiga. **Revista do professor de matemática**, n. 1, p. 9–13, 1982.
- [46] FILHO, K. de S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Porto Alegre: Livraria da Física, 2014.
- [47] PIRES, A. S. **Evolução das Idéais da Física**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.
- [48] SWERDLOW, N. Hipparchus on the distance of the sun. **Centaurus**, Wiley Online Library, v. 14, n. 1, p. 287–305, 1969.
- [49] EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 1995.

- [50] EVANS, J.; FRIEDLANDER, M. W. History of astronomy. **Encyclopædia Britannica**, Encyclopædia Britannica, inc., November 25, 2019. Disponível em: <<https://www.britannica.com/science/astronomy/History-of-astronomy>>. Acesso em: 01-07-2020.
- [51] SUPER, A. **Stonehenge**. 2019. Disponível em: <https://super.abril.com.br/wp-content/uploads/2019/04/site_stonehenge.png?w=1024>. Acesso em: 04-06-2020.
- [52] STAR Names Amongst the Ancient Chinese. **Journal of the American Oriental Society**, NATURE, v. 39, n. 3, p. 309–310, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/039309a0>>. Acesso em: 29-06-2020.
- [53] ODENWALD, S. **Ancient Eclipses in China**. 2009. Disponível em: <<https://sunearthday.nasa.gov/2009eclipse/ancienteclipses.php>>. Acesso em: 25-06-2020.
- [54] TOBOLCZYK, M. Searching for the unification with cosmos as a challenge for prehistoric builders. **Kwartalnik Naukowy Uczelni Vistula**, Akademia Finansów i Biznesu Vistula w Warszawie, n. 2 (60), p. 148–160, 2019. Disponível em: <http://cejsh.icm.edu.pl/cejsh/element/bwmeta1.element.desklight-ddfd2531-ca02-41cf-a1db-f210749a2839/c/148_PDFsam_KNUV_60_web.pdf>. Acesso em: 01-07-2020.
- [55] ARCHAEOLOGY. **Nabta Playa**. 2011. Disponível em: <<https://2.bp.blogspot.com/-yCK5NsgMt5I/TbbmGJPYtCI/AAAAAAAAAMvQ/k73dtZPBwck/s400/NabtaPlaya.jpg>>. Acesso em: 04-06-2020.
- [56] SARTON, G. Chaldaean astronomy of the last three centuries bc. **Journal of the American Oriental Society**, JSTOR, v. 75, n. 3, p. 166–173, 1955. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/595168?read-now=1&seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 29-06-2020.
- [57] LOCATAIRE, R. le. **Apuntes para el Bachillerato: Tales de Mileto**. 2011. Disponível em: <<https://lotofagos-island.blogspot.com/2011/08/tales-de-mileto.html>>. Acesso em: 12-06-2020.
- [58] CULTURA, R. D. **A Ciência transforma o mundo: Anaximandro**. 2017. Disponível em: <https://i1.wp.com/entrementes.com.br/wp-content/uploads/2017/08/mapa_Anaximandro.jpg?w=629&ssl=1>. Acesso em: 12-06-2020.
- [59] AULASDEFÍSICA. **Fundamentos da Historia da Astronomia**. SA. Disponível em: <http://aulasdefisica.com/download/astronomia/cursoastronomia/fundamentoshistastro_arquivos/image002.jpg>. Acesso em: 02-09-2020.

- [60] MORENA, L. **O Sistema Planetário na visão do filósofo Filolau (470 a.C.-385 a. C.)**. 2015. Disponível em: <<https://pansophia-filosofia.blogspot.com/2015/04/o-sistema-planetario-na-visao-do.html>>. Acesso em: 02-09-2020.
- [61] CULTURA, R. D. **Breve História da Astronomia**. SA. Disponível em: <<http://www.astronomiapratica.com.br/informacoes/breve-historia-da-astronomia/>>. Acesso em: 14-06-2020.
- [62] ASTROFÍSICAMALUCA. **Geocentrismo**. SA. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/astrofiscamaluca/geocentrismo>>. Acesso em: 02-09-2020.
- [63] MATSUURA, O. T. **TIMEU: a Cosmologia de Platão**. São Paulo: [s.n.], 2019.
- [64] COSTA, J. R. V. **Hiparco**. 2006. Disponível em: <<https://www.zenite.nu/hiparco/>>. Acesso em: 20-06-2020.
- [65] NOGUEIRA, P. **O zodíaco dos cientistas**. SA. Disponível em: <<http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT900784-1941-3,00.html>>. Acesso em: 02-09-2020.
- [66] JONES, A. R. **Hipparchus Greek astronomer**. Encyclopædia Britannica, inc., 2018. Disponível em: <<https://www.britannica.com/biography/Hipparchus-Greek-astronomer>>. Acesso em: 25-06-2020.
- [67] VELÁSQUEZ-TORIBIO, A.; OLIVEIRA, M. Discutindo o modelo de ptolomeu e sua equivalência com o modelo de copérnico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 42, 01 2020. Disponível em: <<https://www.scielo.br/pdf/rbef/v42/1806-9126-RBEF-42-e20190293.pdf>>. Acesso em: 15-07-2020.
- [68] UFRGS. **Sistema Solar**. 2004. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20041/Diomar/sistema_solar.html>. Acesso em: 02-09-2020.
- [69] JOHNSTON, S. **Digges, Thomas (c. 1546–1595), mathematician and member of parliament**. Oxford University Press, 2009. Disponível em: <<https://www.oxforddnb.com/view/10.1093/ref:odnb/9780198614128.001.0001/odnb-9780198614128-e-7639>>.
- [70] GROSSMANN, C. **12 diagramas que mudaram nossa compreensão do sistema solar**. 2014. Disponível em: <<https://hypescience.com/12-diagramas-que-mudaram-nossa-compreensao-do-sistema-solar/>>. Acesso em: 02-09-2020.
- [71] SAGAN, C. **Cosmos**. [S.l.]: Companhia das Letras, 2017.
- [72] CMUP/PIK. **MysteriumKepler**. SA. Disponível em: <<https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/Manhas/-MysteriumKepler.gif>>. Acesso em: 04-09-2020.

- [73] GRATISPNG. **Museo galileo galileo national telescope history o inquisition**. SA. Disponível em: <<https://img2.gratispng.com/20180615/lsk/kisspng-museo-galileo-galileo-national-telescope-history-o-inquisition-5b23b85faddde6.5591182115290676157122.jpg>>. Acesso em: 05-09-2020.
- [74] BRASIL-ESCOLA-UOL. **Imagens ao passar através de um prisma, luz policromáticas decomposta**. SA. Disponível em: <<https://s1.static.brasilecola.uol.com.br/be/conteudo/imagens/ao-passar-atraves-um-prisma-luz-policromatica-decomposta-em-sete-luzes-monocromaticas-5a2bd35143.jpg>>. Acesso em: 05-09-2020.
- [75] WIKIPEDIA/COMMONS/THUMB. **Newtons Telescope Replica**. SA. Disponível em: <<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cc/NewtonsTelescopeReplica.jpg>>. Acesso em: 05-09-2020.
- [76] ALFONSI, L. G.; FECHI, R. F.; FERRARESI, F. H. A geometria e a astronomia na grécia antiga. **Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP IMECC**, p. 1–11, 2006.
- [77] COSTA, J. R. V. **Hiparco e a distância da Lua**. 2000. Disponível em: <<https://www.zenite.nu/hiparco-e-a-distancia-da-lua/>>. Acesso em: 02-09-2020.
- [78] WIKIPEDIA. **On Sizes and Distances**. 2021. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/On_%5Bsizes\%5D_and_%5Bdistances\%5D>. Acesso em: 02-09-2020.
- [79] BERTRAND, M. **Newton and Kepler's Laws**. 19 de agosto de 2014. 2014. Disponível em: <<http://nonagon.org/ExLibris/newton-keplers-laws>>. Acesso em: 22-08-2020.
- [80] RIGAUD, S. **Historical Essay on the First Publication of Sir Isaac Newton's Principia**. University Press, 1838. (Nineteenth Century Collections Online (NCCO): Science, Technology, and Medicine: 1780-1925). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=uvMGAAAcAAJ>>.
- [81] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da Física: Mecânica**. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, volume 1, 2007.
- [82] OLIVEIRA, M. M. d. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis: Vozes, 2013. 39 p.
- [83] ALMOULOU, S. A.; QUEIROZ, C. de; COUTINHO, S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19/anped. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 62–77, 2008.
- [84] ALMOULOU, S. A.; PEREIRA, C. d. Q. e. S. C. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no gt-19 / anped. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n. 6, p. 62–77, 2008.

- [85] OLIVEIRA, G. P.; PEREIRA, A. C. C. O uso da engenharia didática como ferramenta facilitadora para utilização e produção de objetos de aprendizagem a partir da formação inicial e continuada de professores de matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 5, n. 13, p. 46–65, 2018.
- [86] CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, v. 13, n. 1, p. 87–120, 2005.
- [87] CABRAL, N. F. **Sequências didáticas: estrutura e elaboração**. Belém: SBEM-PA, 2017.
- [88] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2018.
- [89] SCHNEIDERS, L. A. O método da sala de aula invertida (flipped classroom). **Lajeado: Ed. da Univates**, 2018.
- [90] ZABALA, A. **A prática Educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- [91] RAMOS, L. B. da C.; ROSA, P. R. da S. O ensino de ciências: fatores intrínsecos e extrínsecos que limitam a realização de atividades experimentais pelo professor dos anos iniciais do ensino fundamental. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 13, n. 3, p. 299–331, 2016.
- [92] PEREIRA, C. M.; CARACRISTI, I. Atividades experimentais como prática de ensino-aprendizagem de temas de geografia física no ensino médio. **Revista de Geociências do Nordeste**, v. 6, n. 1, p. 01–09, 2020.
- [93] IFRS. **Estudantes do campus unem-se ao mundo para realizar experiência de Física**. 22 de março de 2019, 2019. Disponível em: <<https://ifrs.edu.br/osorio/estudantes-do-campus-unem-se-ao-mundo-ao-realizar-experiencia-de-fisica/#gallery-1>>. Acesso em: 23-04-2021.
- [94] PONTE, J. P. da; QUARESMA, M. O papel do contexto nas tarefas matemáticas. **Interacções**, v. 8, n. 22, 2012.
- [95] SANTOS, S. C. d. O processo de ensino-aprendizagem e a relação professor-aluno: aplicação dos " sete princípios para a boa prática na educação de ensino superior". **REGE Revista de Gestão**, v. 8, n. 1, 2010.
- [96] AZEVEDO, M. A. R. d.; ANDRADE, M. d. F. R. d. O conhecimento em sala de aula: a organização do ensino numa perspectiva interdisciplinar. **Educar em revista**, SciELO Brasil, n. 30, p. 235–250, 2007.

- [97] UFMG. **Calendário Atrônômico: solstício a solstício - dezembro de 2018 a dezembro de 2019**. Espaço do Conhecimento UFMG, 2018. Disponível em: <https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/wp-content/uploads/2018/06/Calendario-Astronomico_ONLINE-3.pdf>. Acesso em: 25 de outubro de 2021.
- [98] SOUZA, H. V. de. **Plano de aula: O brilho da Lua e suas fases**. 2021. Disponível em: <<https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/YeRQhkqMwpFyuqychb6FXyukTAgXcWA5VN4RREFqRMBEK7z4EUfgr7ebbRsz/sistematizacao>>. Acesso em: 25 de outubro de 2021.
- [99] FILHO, F. M. C.; LACERDA, A. G. Materiais didáticos manipuláveis: Construindo um prisma pentagonal utilizando recursos de baixo custo. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, v. 7, n. 9, p. 1127–1145, 2021.
- [100] LATTARI, C. J. B.; TREVISAN, R. H. Radioastronomia: noções iniciais para o ensino médio e fundamental como ilustração de aula. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 18, n. 2, p. 229–239, 2001.
- [101] HETEM, G.; PEREIRA, J. Telescópios. *In*: HETEM, G.; PEREIRA, J.. **Fundamentos de Astronomia**. São Paulo: Departamento de Astronomia da USP, 2010. cap. 6, 63–81 p.
- [102] ASTRONOO. **Os maiores telescópios terrestres**. Astronoo: o universo em todas suas formas, 2013. Disponível em: <<http://www.astronoo.com/pt/telescopios-terrestres.html>>. Acesso em: 31-05-2021.
- [103] ESO. **Extremely Large Telescope do ESO**. Observatório Europeu do Sul, 2013. Disponível em: <<https://elt.eso.org/>>. Acesso em: 31-05-2021.
- [104] COSTA, H.; OLIVEIRA, A. D. Utilização de radiotelescópio para monitoramento dos sinais eletromagnéticos emitidos pelo Sol. **Revista Acadêmica de Ciências e Tecnologias - IFSP Campus Cubatão**, v. 1, n. 6, p. 1–6, 06 2020.
- [105] FEYNMAN, R. P. **Antennae to observe the Universe**. Acelerando la Ciencia, 2014. Disponível em: <<https://acelerandolaciencia.wordpress.com/tag/radiotelescopos/>>. Acesso em: 31-05-2021.
- [106] POPKIN, G. **For Some, Einstein’s Space-Time Ripples Have Yet To Break Their Silence**. Inside Science, 2016. Disponível em: <<https://www.insidescience.org/content/some-einsteins-space-time-ripples-have-yet-break-their-silence/3811>>. Acesso em: 02-06-2021.
- [107] SPUTNIKNEWS. **‘Olho do Céu’: China atinge 100% do funcionamento do maior radiotelescópio do mundo (FOTOS)**. Sputniknews, 2020. Disponível em: <<https://br.sputniknews.com/ciencia\tecnologia/>>

- 2020011415004985-olho-do-ceu-china-atinge-100-do-funcionamento-do-maior-radiotelescopio-do-mundo. Acesso em: 31-05-2021.
- [108] GIBNEY, E. Gigantic chinese telescope opens to astronomers worldwide. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 574, n. 7776, p. 15–17, 2019.
- [109] NASA. **About The Hubble Space Telescope: About The Hubble Space Telescope**. NASA, 2021. Disponível em: <<https://www.nasa.gov/mission\pages/hubble/about>>. Acesso em: 02-06-2021.
- [110] NASA. **James Webb Space Telescope: Goddard Space Flight Center**. NASA, 2021. Disponível em: <<https://www.jwst.nasa.gov/>>. Acesso em: 02-06-2021.
- [111] HORVAT, M. Calculating the probability of detecting radio signals from alien civilizations. **Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb**, University of Zagreb, Zagreb, v. 3, p. 1–10, 2007.
- [112] HORVAT, M.; NAKIĆ, A.; OTOČAN, I. Impact of technology synchronicity on prospects for ceti. **International Journal of Astrobiology**, Cambridge University Press, v. 11, n. 1, p. 51–59, 2012.
- [113] FRIAÇA, A. C. S. Subjectivity in the recognition of life in the universe. **Revista Brasileira de Psicanálise**, v. 44, n. 3, p. 93–101, 2010.
- [114] NASA. **Exoplanet Exploration: Planets Beyond Our Solar System**. NASA, 2021. Disponível em: <<https://exoplanets.nasa.gov/news/1681/the-searchers-how-will-nasa-look-for-signs-of-life-beyond-earth/>>. Acesso em: 05-06-2021.
- [115] NASA. **Earth-Size, Habitable-Zone Planet Found Hidden in Early NASA Kepler Data**. Jet Propulsion Laboratory - California Institute of Technology, 2020. Disponível em: <<https://www.jpl.nasa.gov/news/earth-size-habitable-zone-planet-found-hidden-in-early-nasa-kepler-data>>. Acesso em: 08-06-2021.
- [116] WIKIMEDIA-COMMONS. **Sputnik asm.jpg**. 2004. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sputnik_asm.jpg>. Acesso em: 08-06-2021.
- [117] VSSEC. **The History of Animals in Space – Teacher Notes**. Melbourne - Australia: Victorion Space Science Education Centre, Department of Education and Early Childhood Development, SA. Disponível em: <https://www.ecolinc.vic.edu.au/sites/default/files/pages/Lesson_6_History_of_Animals_in_Space_Teacher_Notes.pdf>. Acesso em: 06-06-2021.

- [118] GEBHARDT, C. **Anniversaries: 50 Years of Human Spaceflight - 30 Years for Shuttle**. NASA, 2011. Disponível em: <<https://www.nasaspaceflight.com/2011/04/ann>>. Acesso em: 08-06-2021.
- [119] NASA. **Apollo 11 Mission Overview**. National Aeronautics and Space Administration, 2019. Disponível em: <https://www.nasa.gov/mission/_pages/apollo/missions/apollo11.html>. Acesso em: 09-06-2021.
- [120] NASA. **Apollo-Soyuz: An Orbital Partnership Begins**. National Aeronautics and Space Administration. NASA, 2015 (Editado por Jim Wilson – 2017). Disponível em: <<https://www.nasa.gov/topics/history/features/astp.html>>. Acesso em: 09-06-2021.
- [121] BRASIL-ESCOLA-UOL. **Estação Espacial Internacional - ISS**. SA. Disponível em: <<https://s1.static.brasilecola.uol.com.br/be/imagens/geografia/estacao2.jpg>>. Acesso em: 23-10-2021.
- [122] LEVCHENKO, I. et al. Mars colonization: Beyond getting there. **Global Challenges**, v. 3, n. 1, p. 1800062, 2019.
- [123] MARS-ONE. **Mars one project**. 2021. Disponível em: <<http://www.mars-one.com/>>. Acesso em: 07-06-2021.
- [124] BUCHANAN, M. Colonizing mars. **Nature Physics**, Nature Publishing Group, v. 13, n. 11, p. 1035–1035, 2017.
- [125] SLOBODIAN, R. E. Selling space colonization and immortality: A psychosocial, anthropological critique of the rush to colonize mars. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 113, p. 89–104, 2015.

Apêndice A

CONCEITOS ASTRONÔMICOS NA CONTEMPORANEIDADE E PERSPECTIVAS PARA O FUTURO

Neste apêndice apresentamos alguns conceitos e ferramentas astronômicas modernos, como observatórios espaciais e terrestres, bem como a emissão de sinais vindos de outras partes do Universo. Também são destacados temas como a vida em outros astros, como também a exploração e colonização de outros planetas pelo ser humano, em especial Marte.

A.1 Obtenção de dados e a evolução dos observatórios: telescópios e radiotelescópios

No presente trabalho vimos que a tarefa de observar os astros é uma prática que vem desde antiguidade, sendo marcada por uma evolução no decorrer da História. Nessa perspectiva, o ser humano buscou ferramentas que pudessem ser utilizadas a fim de potencializar as descobertas. Entre estes instrumentos, destacamos aquelas que são instaladas e utilizadas aqui do próprio planeta; como também, outras formas que são lançadas para à órbita terrestre ou de outros astros, por vezes, chegando a pousar sobre a superfície de outros astros.

No que diz respeito a observação e instrumentos de longo alcance no Capítulo 4, Subseção 4.6.6, vimos que Galilei Galileu foi o responsável por construir os primeiros telescópios, por meio destes tendo observado montanhas lunares, manchas solares, anéis de Saturno e quatro dos satélites naturais de Júpiter. No mesmo capítulo, Subseção 4.6.7, vimos que, mais a frente, Isaac Newton desenvolveu o telescópio refletor, nove vezes mais potente que o telescópio refrator de Galileu.

Embora a invenção dos telescópios tenha representado um grande avanço no que diz respeito a estudos relacionados a fenômenos externos ao planeta Terra, mesmo os mais avançados apresentam fortes limitações. O principal empecilho está na atenuação da luz visível pela

atmosfera da Terra, que desvia a trajetória da luz prejudicando as observações. Desse modo, obter informações por meio observações ópticas, depende condições ótimas de céu aberto, espelhos perfeitos dos telescópios, entre outros fatores [100].

Na perspectiva de descrever as condições observacionais de um determinado sítio astronômico, os observadores recorrem a expressão *seiing*. “Em busca do melhor *seiing*, procura-se instalar os observatórios em sítios de maior altitude, menor umidade, livre de poeira e de contaminação de luzes das cidades” [101, p. 64]. Entre estes, podemos destacar o Observatório Astronômico da África do Sul (SAAO), na cidade do cabo, no qual tem-se o telescópio óptico *Southern African Large Telescope* - SALT, o maior do hemisfério sul.

Figura A.1: Telescópio SALT.

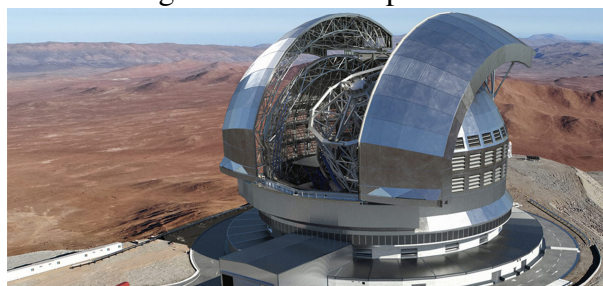


Fonte: [102].

O telescópio SALT representado na Figura A.1, opera desde 2005, sendo uma versão melhorada do telescópio Hobby-Eberly. O SALT possui 91 espelhos hexagonais de lado 1 metro, um espelho primário em torno de 9,2 metros à 11,1 metros de abertura eficaz [102].

Desde 2005, o Observatório Europeu do Sul - ESO vem desenvolvendo um telescópio óptico / infravermelho gigantesco. O *Extremely Large Telescope* - ELT; trata-se de um telescópio revolucionário que possuirá um espelho principal de 39 metros, será o maior telescópio de luz visível e infravermelha do mundo: “o maior olho no céu do mundo” [103].

Figura A.2: Telescópio ELT.



Fonte: [103].

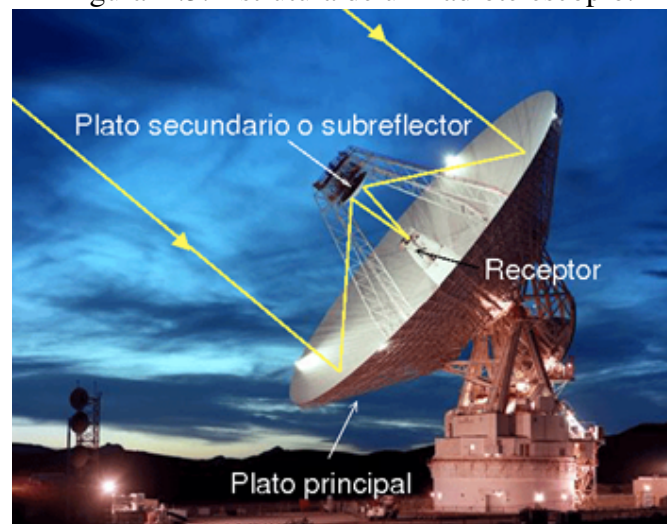
O ELT está localizado em Cerro Armazones, uma montanha cuja altitude cerca de 3.046 metros na parte central do deserto do Atacama, no Chile. Representado na Figura A.2, o ELT será equipado com instrumentos de última geração, possibilitando uma revolução científica. Segundo [103] “O salto para a frente com o ELT pode levar a uma mudança de paradigma em nossa percepção do Universo, assim como o telescópio de Galileu fez há 400 anos”.

Apesar da constante evolução dos telescópios, os mesmos não são os únicos instrumentos utilizados para realizar estudos direcionados aos fenômenos externos ao nosso planeta. Os telescópios são instrumentos visuais que exploram a emissão da luz, na maioria das vezes; por conta disso, certas formas de energias são “invisíveis” ao olho humano. Nesse cenário explora-se emissões de ondas eletromagnéticas, em especial as ondas de rádio.

A *Radioastronomia*, como é denominada a área da ciência que se ocupa no estudo das ondas de rádio vindas do espaço viajando a velocidade da luz, apresenta vantagens quando comparada a outras cujos os estudos exploram por exemplo o espectro visível. Isso porque a radiação das ondas de rádio passam com maior facilidade pela atmosfera do planeta, sendo assim mais facilmente captadas por instrumentos denominados *radiotelescópios* [104].

Os radiotelescópios possuem formato de antenas parabólicas gigantescas. A região para a qual o radiotelescópio aponta emite as ondas e estas são refletidas na superfície do aparelho em direção de um foco central, que as reflete para o centro, que por sua vez possui um estrutura que recebe os dados, conforme a Figura A.3.

Figura A.3: Estrutura de um radiotelescópio.



Fonte: [105].

Tais instrumentos têm como principal finalidade medir ou captar a onda, em vez de simplesmente observar. “Um radiotelescópio funciona mais como um medidor de luz do que como uma câmera. Você o aponta para uma região razoavelmente ampla do céu e ele grava quanta energia, em dada radiofrequência, está sendo enviada para a Terra” [71, p. 115-116].

Os radiotelescópios mais modernos possuem a capacidade de estudar ondas gravitacionais. Para isso, buscam detectar pequenas ondulações das gravidade estudando os *pulsares*, sinais

emitidos das estrelas que giram rapidamente. De acordo com [106], um pulsar ocorre quando um estrela com pelo menos 8 massas solares explode como supernova e sua massa restante colapsa em uma esfera de nêutrons densa e com giro rápido.

Um dos mais imponentes e versáteis radiotelescópios do mundo é o recém inaugurado *Five hundred meter Aperture Spherical Telescope - FAST*, que possui um raio de 500 metros, sendo o maior do mundo de antena única e está localizado na província de Guizhou da China. O FAST expandiu em cerca quatro vezes o volume do alcance espacial que os radiotelescópios anteriormente alcançavam, representando uma revolução para a área.

Figura A.4: Radio telescópio FAST.



Fonte: [107].

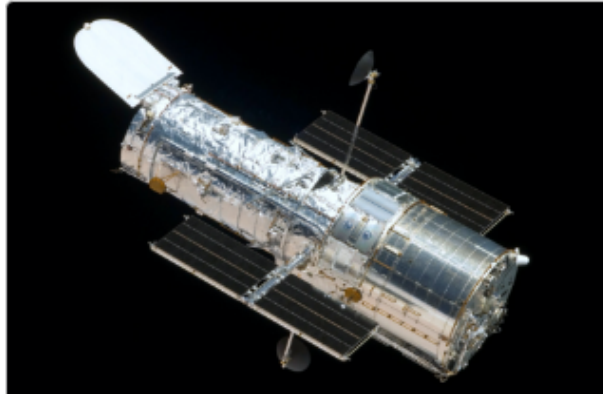
Representado na Figura A.4, o ‘Olho do céu’ como é conhecido o FAST, dado o seu grande porte, é capaz de detectar ondas de rádio com sinal extremamente fraco de diferentes pontos do Universo, como pulsares e hidrogênio em galáxias distantes. Durante a fase de testes o FAST detectou mais de 100 pulsares e no futuro irá possibilitar a detecção ondulações no espaço-tempo pela Galáxia [108].

As observações do espaço não se limitam a equipamentos sobre a superfície terrestre, como já dito, as condições da atmosfera acabam por interferir nas observações por meio destes equipamentos, especialmente dos telescópios. Na perspectiva de superar tais obstáculos, a ciência recorreu aos telescópios espaciais.

O mais famoso dos telescópios espaciais é o *Hubble*¹, trata-se de um grande observatório no espaço. Implantado em 1990 pelo ônibus espacial *Discovery* tem operado por mais de 30 anos, evoluiu ao longo dos anos com implementação de novos equipamentos, tendo se mostrado revolucionário para Astronomia nos últimos tempos [109].

¹Recebe esse nome em homenagem ao astrônomo pioneiro Edwin Hubble.

Figura A.5: Telescópio Hubble.



Fonte: [109].

Representado na Figura A.5, o Hubble apresenta alcance que se estende do ultravioleta ao visível e próximo ao infravermelho; o que permitiu ao telescópio captar imagens de estrelas, galáxias e outros astros. No decorrer de sua atividade o Hubble fez mais de 1 milhão e 400 mil observações, entre elas estão a descoberta de luas ao redor de Plutão e a colisão de um cometa com Júpiter [109].

O Hubble, sem dúvida, representa modernidade e precisão no que diz respeito a observações espaciais. Nessa perspectiva, pensando em estender e dar mais profundidade nas descobertas do Hubble a NASA lançou, em 25 de dezembro 2021, o telescópio espacial *James Webb*, um observatório orbital infravermelho.

Segundo [110], “Webb será o maior, mais poderoso e complexo telescópio espacial já construído e lançado ao espaço. Irá alterar fundamentalmente nossa compreensão do universo”. O James Webb estudará, entre outras coisas, uma parte da nuvem irradiada *Barra de Orion*, representada na Figura A.6, buscando compreender mais sobre a influência estrelas massivas em seus ambientes e até mesmo na formação do nosso Sistema Solar.

Figura A.6: Barra de Órion.



Fonte: [110].

Se comparado com o Hubble, o James Webb apresenta comprimento de onda mais longo e sensibilidade bastante aprimorada. O que lhe permitem olhar muito mais perto do início dos tempos, assim como observar a formação das primeiras galáxias, bem como olhar dentro das nuvens de poeira onde estrelas e sistemas planetários que estão se formando hoje.

A.2 Buscando sinais fora da Terra

Nos últimos tempos a busca por sinais externos ao nosso planeta se intensificou de forma considerável, com isso o ser humano procura explicações a cerca da própria origem e dos seus antepassados, bem como daquilo que nos rodeia. Uma das questões mais intrigantes e que despertam o imaginário humano é a existência de vida fora do planeta Terra, principalmente vida inteligente.

Embora haja uma grande vastidão de galáxias, estrelas e planetas no Universo, o ser humano ainda não encontrou nenhum vestígio ou sinal de civilização inteligente, nem se quer vida que se tenha seres minimamente organizados biologicamente. Apesar disso, os cientistas da área não vêm medindo esforços, empregando as ferramentas mais modernas a disposição, como no caso dos rádio telescópios de longo alcance, que buscam sinais de rádio em diferentes partes do Cosmos.

Nessa perspectiva, surgiram as *Search for Extraterrestrial Intelligence* - SETI, Busca por Inteligência Extraterrestre, são projetos que objetivam encontrar sinais de alguma civilização extraterrestre. Os SETI buscam principalmente por sinais de rádio, apesar existirem projetos SETI que estudam micro-ondas ópticas e frequências eletromagnéticas².

De forma simples, podemos classificar todos os sinais que uma civilização alienígena possa vir a emitir em duas categorias distintas: i) **sinais intencionais** se destinam à nossa civilização e são enviados deliberadamente para a Terra; e ii) **sinais não intencionais** são acidentalmente dirigidos para a Terra, não sendo realmente significados para a nossa civilização [111].

Como já exposto neste trabalho, os observatórios vêm evoluindo, se tonando mais potentes e precisos, alcançando distâncias cada vez maiores. Apesar disso, [111] ressalta que o rádio é uma tecnologia bastante limitada para se comunicar em grandes distâncias estelares. O rádio é lento e sujeito a erros, para distâncias muito longas não consegue transportar muitos dados, o que torna-o descartável em caso de uma civilização muito avançada tecnologicamente.

O avanço tecnológico, sem dúvida, é um dos fatores mais decisivos para se estabelecer contato entre possíveis civilizações. Por mais avançada ou atrasada que esteja nossa civilização em relação a outra, isso pode significar que é totalmente inviável a comunicação. Para que ocorra troca de informação ou contato entre duas civilizações é necessário ambas compartilhem a mesma ferramenta tecnológica [112].

²As ondas ópticas estão relacionadas a fenômenos da luz; enquanto as eletromagnéticas são formadas a partir de campos elétricos e magnéticos, capazes de se propagarem no vácuo.

O aspecto tecnológico talvez seja o ponto crucial a se considerar para se estabelecer contato com uma civilização intergaláctica, mas existem outras variáveis importantes a se considerar, como a distância. Uma civilização que por ventura tenha enviado um sinal a milhares ou milhões de anos atrás pode nem existir mais, dado que se a origem do sinal estiver a muitos anos luz da Terra esse sinal trata-se de um passado distante e não do presente.

Os fatores já apontados levam em consideração primordialmente a existência dessas civilizações, que é algo muito incerto. Sob essa perspectiva, cientistas ao longo dos últimos anos vêm se debruçando sobre variáveis que possibilitem a existência de vida em outras regiões do Universo. Em 1950 Erick Fermi, durante um discussão entre cientistas que debatiam sobre objetos voadores não identificados - OVNI's, indagou os presentes: "Onde está todo mundo?"

De acordo com Fermi o universo deveria está fervilhando de vida inteligente, dada a imensidão de estrelas e planetas existentes. Para ele, se pelo menos o Sistema Solar tivesse características especiais, existiriam inúmeros planetas capazes de abrigar vida; sendo que alguns deles desenvolveriam vida inteligente e estes seres, mesmo viajando em baixas velocidades, em algum momento teriam sido capazes de se espalhar pela galáxia. Desse forma, deveriam estar em nossa volta, mas não é o que ocorre [113].

Tal formulação ficou conhecida como o *Paradoxo de Fermi*. Esse paradoxo foi quantificado em 1961 por Frank Drake, que estabeleceu uma fórmula que estima o número de civilizações detectáveis na Via Láctea:

$$N = R^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times L. \quad (\text{A.1})$$

De acordo [113]:

- ✓ N : O número de civilizações na Via Láctea com as quais poderíamos estabelecer contato;
- ✓ R^* : a taxa de formação de estrelas na Via Láctea;
- ✓ f_p : A fração de estrelas que possuem sistemas planetários;
- ✓ n_e : O número de planetas, por sistema estelar, propício a comportar vida;
- ✓ f_l : A fração dos planetas propícios em que realmente pode-se desenvolver a vida;
- ✓ f_i : A fração dos planetas habitados que desenvolvem vida inteligente;
- ✓ f_c : A fração dos planetas com vida inteligente que possuem os meios técnicos e que busca estabelecer comunicação;
- ✓ L : O tempo esperado de vida de tal civilização.

Para [71] em vez de considerar a taxa de formação das estrelas é necessário saber de fato quantas existem; assim como além de saber o tempo de vida de uma civilização também é necessário que a mesma possa dominar e utilizar certa forma tecnológica. Após estas adequações, as variáveis R^* e L podem ser substituídas por N^* e f_L . De acordo [71]:

- ✓ N^* : O número de estrelas na Via Láctea;

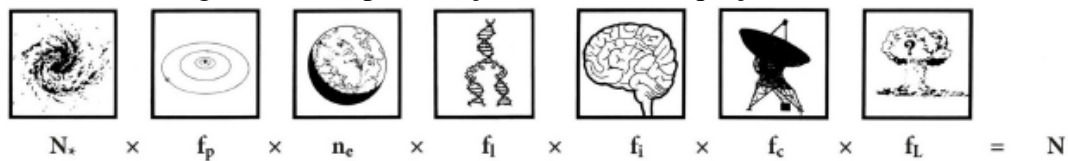
✓ f_L : O tempo esperado de vida de tal civilização domina e utiliza uma forma tecnológica.

Dessa forma, a fórmula estabelece que:

$$N = N^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times f_L. \quad (\text{A.2})$$

Na equação (A.2) assim como na Figura A.7, todos os f representam frações, com valores entre 0 e 1; elas agirão como redutoras do grande valor de N^* [71].

Figura A.7: Representação artística da Equação de Drake.



Fonte: [71].

O valor de N^* é de certo modo acessível de obtermos, por meio de contagens por regiões no céu, contamos de forma representativa na ordem de 4×10^{11} . Tais estrelas possuem um brilho estável, massa elevada e vida curta; sendo assim, fonte de energia favorável à origem e desenvolvimento de vida.

Os planetas frequentemente são companhia para estrelas recém-formadas, sendo que muitas delas possuem planetas próximo. Desse modo, estimemos que $\frac{1}{3}$ possuam essa características, ou seja, $f_p = \frac{1}{3}$. Desse modo,

$$N^* \times f_p = 4 \times 10^{11} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \times 10^{11}. \quad (\text{A.3})$$

O nosso próprio sistema planetário possui alguns astros propícios à presença de vida: a Terra, Marte, Titã e Júpiter. Além disso, se existe vida, ela tende a ser adaptável e tenaz, assim é possível que existam vários ambientes com essa característica em dado sistema planetário; se formos conservadores podemos adotar $n_e = 2$ [71]. Dessa maneira,

$$N^* \times f_p \times n_e = \frac{4}{3} \times 10^{11} \times 2 \cong 3 \times 10^{11}. \quad (\text{A.4})$$

Se considerarmos que podem ocorrer diversos empecilhos que influenciem na evolução da vida, especialmente no que diz respeito ao código genético, adotemos $f_l = \frac{1}{3}$. Assim, teremos que o número de planetas habitáveis será

$$N^* \times f_p \times n_e \times f_l = \frac{1}{3} \times 3 \times 10^{11} = 10^{11}. \quad (\text{A.5})$$

Agora analisar f_i e f_c é mais complicado, dada a complexidade da evolução biológica que leva ao surgimento de uma sociedade inteligente. Por outro lado, se ela existe, tem-se uma

série de fatores que podem levá-la a desenvolver habilidades específicas, no caso a tecnologia do rádio. Adotemos $f_i \times f_c = \frac{1}{100}$, ou seja, 1% dos planetas produzem civilizações técnicas [71]. Desse modo,

$$N^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c = 10^{11} \times \frac{1}{100} = 10^9. \quad (\text{A.6})$$

Assim, o número de planetas que surgem uma civilização técnica seja cerca de 1 bilhão. Por outro lado, o tempo que uma população domina e utiliza uma determinada tecnologia, no caso do homem com o rádio, é bem curto, cerca de $\frac{1}{10^8}$. Logo,

$$N = N^* \times f_p \times n_e \times f_l \times f_i \times f_c \times f_L = 10^9 \times \frac{1}{10^8} = 10. \quad (\text{A.7})$$

Desse modo, existiriam cerca de 10 civilizações com capacidade de se comunicar na via Láctea. Se comparado com o número de planetas habitáveis, ou até mesmo com a possível quantidade de civilizações inteligentes, esse número é bem pequeno [71]³.

Dentre variáveis exploradas na Equação de Drake, talvez aquela que separa mundos habitáveis dos não-habitáveis seja a que sirva como ponto de partida na busca por vida extraterrestre. Como já dito, contar estrelas semelhantes ao Sol e estabelecer aquelas que podem formar sistemas planetários não é uma tarefa tão complexa dada a tecnologia disponível, já descobrir planetas habitáveis é bem mais complicado.

Na procura por mundos habitáveis a primeira premissa adotada pelos cientistas é identificar planetas na chamada zona habitável, ou seja, que possuam características semelhantes à Terra como: a distância para estrela, presença de oxigênio, atmosfera e superfície estáveis com água líquida. Primeiramente é necessário descobrir os *exoplanetas*⁴ e, entre eles, identificar aqueles que possuem os requisitos propícios.

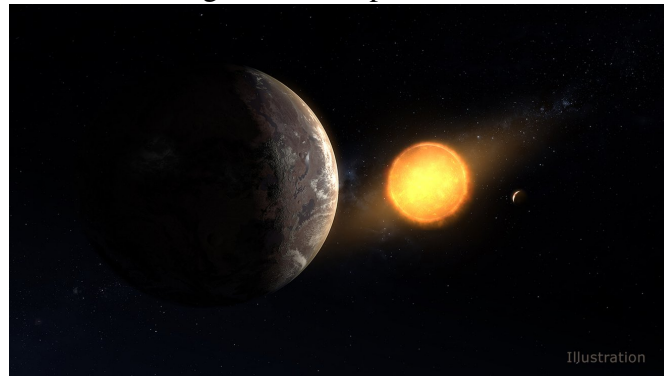
Nas últimas décadas, a NASA inclui diversas tecnologias de busca como o Telescópio Espacial *Kepler*, aposentado em 2018, e seu sucessor, o *Transiting Exoplanet Survey Satellite* - TESS, ainda em operação. Tais telescópios foram construídos com intuito de detectar sombras na luz das estrelas projetadas por exoplanetas, ao cruzar a face de sua estrela-mãe. Tal técnica, chamada de *método de trânsito* [114].

Uma das descobertas recentes, uma das últimas do telescópio espacial Kepler, foi o exoplaneta *Kepler-1649c*, representado na Figura A.8. Tal astro é 1,06 vez maior que a Terra e embora sua estrela hospedeira seja uma anã vermelha, bem menor que o Sol, recebe cerca de 75% do total de luz que nosso planeta recebe do Sol [115].

³É importante ter em mente que a Equação de Drake apresenta sérios problemas, pois ela não leva em conta, por exemplo, que uma civilização inteligente possa ocupar mais de um planeta [113].

⁴Planetas que orbitam outras estrelas que não seja o Sol.

Figura A.8: Kepler-1649c.



Fonte: [115].

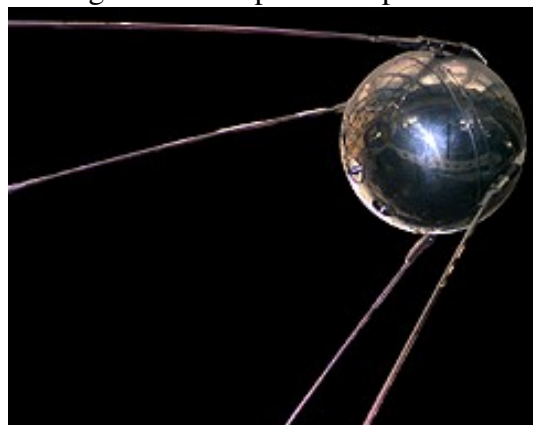
Já o telescópio James Webb, já mencionado, terá grande capacidade de coletar luz, sondando as profundezas do Universo, inclusive captando a luz das estrelas na atmosfera dos exoplanetas. Para isso, pegará amostras de gases, podendo inclusive fazer buscas por sinais de vida, que possivelmente caberá a um sucessor do James Webb, mais avançado no futuro.

Apesar dos avanços tecnológicos, capturar sinais de atividade biológica nos exoplanetas é um grande obstáculo tecnológico. Para isso, é necessário não somente a supressão da luz das estrelas e espectroscopia, mas também novas ferramentas analíticas, bem como modelos de computador que simulam possíveis atmosferas de exoplanetas [114].

A.3 O Destino do ser humano no Universo

O ser humano não tem se limitado a lançar objetos para órbitas e superfícies de corpos celestes: diversos projetos preveem visitas tripuladas, exploração e até mesmo colonização de astros do Sistema Solar. Tudo começou por volta de 1957 com a corrida espacial entre Estados Unidos e União Soviética, que disputavam a supremacia na exploração espacial. O ponto de partida dessa disputa se deu com o lançamento do satélite artificial soviético *Sputnik 1*, representado na Figura A.9, em 4 de outubro de 1957.

Figura A.9: Réplica do Sputnik 1.

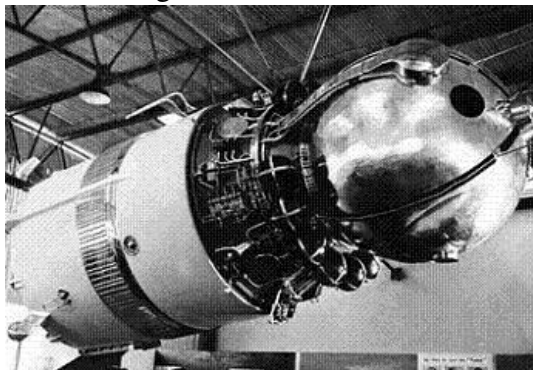


Fonte: [116].

Os primeiros seres vivos a viajarem ao espaço não se tratavam de ser humanos, mas sim de animais. Em fevereiro de 1947 os Estados Unidos lançaram moscas das frutas por meio do foguete V2, recuperadas vivas por paraquedas; em 3 de novembro de 1957 os soviéticos lançaram a cadela Laika por meio da nave espacial *Sputnik 2*, o animal acabou morrendo por conta da alta temperatura e do estresse. Os soviéticos continuaram a enviar cachorros para o espaço, em 19 de agosto de 1960 o *Sputnik 5* foi o primeiro a retornar animais vivos da órbita, entre os passageiros estavam os cães Belka e Strelka [117].

Em 12 de abril de 1961 se deu o primeiro voo espacial tripulado por ser humano, Yuri Gagarin (1934-1968) a bordo da nave *Vostok 1*, representado na Figura A.10. Tal feito e o lançamento do *Sputnik 1* anos antes, desafiaram os americanos que haviam criado a NASA no intervalo entre os dois ocorridos, em 1958. A NASA seria a responsável por coordenar e conduzir os projetos espaciais americanos a partir de então, financiada com altos investimentos do governo federal. Em 5 de maio de 1961 se deu voo balístico suborbital do americano Alan B. Shepard a bordo de um foguete *Mercury-Redstone* [117].

Figura A.10: Vostok 1.



Fonte: [118].

Em 1961 o presidente norte americano, John Kenedy, lançou o desafio de “enviar homens à Lua e retorná-los a salvo”, antes do fim da década. Nessa época, os Estados Unidos anunciaram o projeto *Mercury*, que trazia uma nave com capacidade para um único tripulante; foi sucedido pelo projeto *Gemini*, uma nave que comportava dois tripulantes; o sucessor foi o projeto *Apollo* com capacidade para três astronautas, o qual levou o homem a pousar na Lua em 20 de julho de 1969, na missão *Apollo 11*; o que se repetiria pela última vez em 1972 na missão *Apollo 17*⁵.

A *Apollo 11* lançada em 16 de julho de 1969, contou com o comandante Neil Armstrong, o piloto do módulo de comando Michael Collins e o piloto do módulo lunar Edwin “Buzz” Aldrin. Em 20 de julho de 1969 ocorreu o pouso no Mar da Tranquilidade, horas depois Armstrong pisou na Lua, seguido por Aldrin minutos depois, onde posicionaram uma câmera e falaram por telefone com o presidente americano Nixon. Ao todo, Armstrong e Aldrin passaram 21 horas e 36 minutos na superfície lunar, onde coletaram amostras e fizeram experimentos [119].

⁵Ao todo foram seis missões tripuladas a pousar na Lua, pelo programa *Apollo*; as missões de número: 11, 12, 14, 15, 16 e 17.

Após as missões Apollo as viagens espaciais se intensificaram, embora o homem não tenha mais retornado à Lua desde a Apollo 17. Em 1975 ocorreu um fato marcante, as naves americana *Apollo 18* e a soviética *Soyuz 19* se acoplaram no espaço, sendo a primeira missão conjunta das duas agências, conforme a Figura A.11.

Figura A.11: Representação artística da Apollo 18 acoplada na Soyuz 19.



Fonte: [120].

Após a queda do regime soviético as relações se estreitaram, o que permitiu a colaboração conjunta para a construção da *International Space Station - ISS* ⁶, a Estação Espacial Internacional, tendo seu primeiro componente lançado em 1998, mostrado na Figura A.12, e seus primeiros tripulantes de longa estadia em novembro de 2000.

Figura A.12: Primeiro módulo da ISS, em 1998.



Fonte: [121].

Embora tenham ocorrido inúmeros avanços quando se fala da exploração e descobertas espaciais nas últimas décadas, que vão desde o lançamentos de sondas e observatórios até naves e ônibus espaciais, o ser humano ainda possui muitas ambições a cerca da exploração do espaço sideral. Um dos mais gigantescos desafios a serem superados está numa possível colonização humana em outro astro que não a Terra.

⁶Além da NASA (EUA) e da Roscosmos (Rússia), outras três agências fazem parte do projeto colaborativo: JAXA (Japão), ESA (Europa) e CSA (Canadá).

A possibilidade de povoar outros mundos parece cada vez mais real em futuro provido de tecnologias avançadas e é considerada por agências espaciais e entidades privadas. Um dos mais discutidos projetos com esse intuito é a colonização de Marte. Dada a sua estrutura física semelhante a da Terra, o planeta vermelho apresenta elementos como a possível presença de água líquida subglacial abaixo da superfície, bem como a presença de minerais de metal e outras substâncias minerais vitais [122].

Um dos mais ambiciosos projetos futuristas de colonização é *Mars One* que trata-se de um assentamento permanente em Marte. Mandar seres humanos à Marte apresenta riscos e desafios muito reais, por isso “estabelecer um assentamento permanente é muito complexo, mas é muito menos complexo e requer muito menos infraestrutura enviada a Marte do que as missões de retorno” [123].

Os responsáveis pelo projeto já começaram a contratar empresas aeroespaciais estabelecidas que sejam capazes de desenvolver os sistemas necessários. De acordo com [123] cada sistema requer projeto, construção e testes, embora nenhum avanço científico seja necessário para enviar humanos a Marte e sustentar a vida lá. Antes de estabelecer os primeiros acentados, será estabelecida uma estrutura enviada anos antes dos seres humanos, contando com as ferramentas necessárias a sobrevivência e desenvolvimento no local.

Outro projeto promissor é o *Mars & Beyond* de responsabilidade da *Space Exploration Technologies Corp* - SPACEX. A empresa é uma fabricante aeroespacial e de transporte espacial, fundada em 2002 pelo magnata Elon Musck, tem por objetivo diminuir custos de viagens espaciais e assim colonizar Marte. Por meio do *Starship*, um sistema reutilizável de espaçonaves e foguetes, Musck espera redefinir as viagens, inicialmente voando de continente a continente, depois da Terra à Lua e, finalmente, da Terra a Marte.

Apesar dos avanços na tecnologia de espaçonaves, um grande obstáculo a ser superado é a radiação. O planeta Terra possui uma magnetosfera agradável que nos protege dos fortes ventos solares e dos raios cósmicos de alta energia que chegam do espaço sideral. Por conta disso, viajar até Marte expõe os astronautas aos sérios riscos radioativos, segundo analistas da NASA tecnicamente existem poucas soluções que possam proteger os astronautas, podendo fazê-los sofrer sérios danos [124].

A colonização de Marte, bem como de outro astro, envolve não somente questões físicas adequadas como clima, gravidade e presença de suprimentos, mas também aspectos éticos e sociais. No caso de assentamento principalmente, onde as pessoas estariam fazendo uma viagem só de ida, sem volta, deixando para trás seu passado terráqueo. O ser humano, como indivíduo provido sentimentos, pode nessas condições desenvolver quadros de anomalias sociais como também desilusão, ao ver a Terra apenas como um ponto remoto.

Outro aspecto polêmico é a questão dos investimentos absurdos, na ordem de vários bilhões de dólares, para produzir veículos espaciais, como também uma estrutura na superfície do planeta vermelho. Além disso, dadas as condições físicas hostis, seria necessário fazer o que os cientistas chamam de *terraformar*, que se trata de um processo com intuito adequar o planeta

para seres humanos, sendo que esse processo seria muito demorado, além de caro e necessitar possivelmente bombardear Marte.

Nessa perspectiva, antes de buscar colonizar Marte ou qualquer outro astro no Espaço Sideral a humanidade deve se ater para uma série de fatores tecnológicos, físicos, éticos e sociais. Para isso, o ser humano necessita adquirir mais experiência e conhecimento a cerca do universo, em especial dos astros que se pretende colonizar, efetuando cada etapa necessária para um processo de exploração e adaptação desses ambientes [125].