



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional PROFMAT



**Aderbal Soares do Rêgo**

**O Teorema de Pick no Ensino-Aprendizagem da Geometria Plana:  
Cálculo de Áreas de Polígonos Simples**

**João Pessoa - PB**

Fevereiro de 2022

**Aderbal Soares do Rêgo**

**O Teorema de Pick no Ensino-Aprendizagem da Geometria Plana:  
Cálculo de Áreas de Polígonos Simples <sup>†</sup>**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta.

**João Pessoa - PB**

Fevereiro de 2022

---

<sup>†</sup> O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

R343t Rego, Aderbal Soares do.  
O Teorema de Pick no ensino-aprendizagem da  
geometria plana : cálculo de áreas de polígonos simples  
/ Aderbal Soares do Rego. - João Pessoa, 2022.  
43 f. : il.

Orientação: Napoleón Caro Tuesta.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Geometria Plana. 2. Áreas de Polígonos. 3. Malha  
Quadriculada. 4. Teorema de Pick. I. Tuesta, Napoleón  
Caro. II. Título.

UFPB/BC

CDU 514.112(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL**

Fone/Ramal: (83) 3216-7563 <http://www.ufpb.br/pos/profmat>

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE  
MESTRADO PROFISSIONAL REALIZADA NO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA  
NATUREZA DA UNIVERSIDADE FEDERAL  
DA PARAÍBA

No dia vinte e um de fevereiro de dois mil e vinte e dois (21/02/2022), às 16:00 horas, por meio da plataforma virtual Google Meet, por meio do link: <https://meet.google.com/ezd-trds-tks>, em conformidade com o parágrafo único do Art. 80 da Resolução CONSEPE nº 79/2013, que regulamenta a defesa de trabalho final por videoconferência, seguindo os mesmos preceitos da defesa presencial, em sessão pública, teve início a defesa de trabalho de conclusão de curso intitulado “*O Teorema de Pick no Ensino Aprendizagem da Geometria Plana: Cálculo de Áreas de Polígonos Simples*”, do aluno **ADERBAL SOARES DO REGO**, que havia cumprido, anteriormente, todos os requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação do professor Napoleón Caro Tuesta. A Banca Examinadora, aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, foi composta pelos professores Napoleón Caro Tuesta (presidente), Elisandra de Fátima Gloss de Moraes (membro interno/UFPB) e Ivan Italo Gonzales Gargate (membro externo/UTFPR). O professor Napoleón Caro Tuesta, em virtude da sua condição de presidente, iniciou os trabalhos e depois das formalidades de apresentação, convidou o aluno a discorrer sobre o conteúdo do seu trabalho de conclusão. Concluída a explanação, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora, que em seguida, sem a presença do aluno, finalizando os trabalhos, reuniu-se para deliberar, tendo concedido a menção: **APROVADO**. Face à aprovação, declarou o presidente achar-se o avaliado legalmente habilitado a receber o Grau de **Mestre** em Matemática, cabendo à Universidade Federal da Paraíba, providências como, de direito, a expedição do Diploma a que o mesmo fez jus. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata que será assinada pelos membros da Banca Examinadora.

João Pessoa, 21 de fevereiro de 2022.

**Banca Examinadora:**

Napoleón Caro Tuesta

Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Ivan Italo Gonzales Gargate

# DEDICATÓRIA

*A minha família, meu porto seguro!*

# AGRADECIMENTOS

Em 2019, comecei uma nova etapa de minha vida. Foi um período de muito estudo, dedicação, ganho de conhecimento; porém de muita privação. Conciliei trabalho, estudo e família, mas valeu a pena!

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por não me deixar desistir e fazer eu encontrar forças para vencer todos os obstáculos que encontrei, que não foram poucos. Ao mesmo tempo, agradecê-lo por ter colocado três pessoas maravilhosas durante o curso: Alex da Silva Menezes, Carlos Henrique de Souza Araújo e Antônio de Pádua Santos Medeiros, pois sem eles a dificuldade teria sido maior. Obrigado pelo companheirismo durante todo esse percurso.

Aos meus pais Agenôr Soares do Rêgo (in memoriam), Maria do Carmo do Rêgo, à minha filha Anna Amália, ao meu amigo Edeílson Silva e aos outros familiares que sempre acreditaram em minha capacidade e estiveram ao meu lado em todos os momentos de minha vida, às vezes, ficando em segundo plano para que eu me dedicasse aos estudos. Tudo o que sou, agradeço a vocês. Amo todos!

Aos colegas da turma 2019 pela troca de conhecimentos e pela amizade que cultivamos.

A todos os professores que ajudaram a ampliar e aprofundar meus conhecimentos matemáticos. Especialmente, ao meu orientador Dr. Napoleón Caro Tuesta que tornou esta dissertação em realidade. Obrigado pelo apoio, paciência e dedicação.

Ao PROFMAT/UFPB pela honrosa oportunidade de participar de um universo intelectual incentivador que contribuiu positivamente com mais um passo em minha formação, além de ter agregado muito conhecimento e ter proporcionado esta titulação.

# RESUMO

Esta dissertação visa apresentar uma proposta alternativa para o ensino do cálculo de áreas de polígonos simples, sobrepostos em uma malha quadriculada cujos vértices são coordenadas inteiras, que estão presentes em diversos contextos na Educação Básica, usando o Teorema de Pick. Baseada em pesquisa bibliográfica, inicialmente, trataremos de alguns conceitos básicos da Geometria plana que darão suporte à demonstração do referido teorema. A seguir, um pouco do aspecto histórico do matemático Georg Alexander Pick, a apresentação desse teorema e sua demonstração por meio de duas maneiras diferentes. Em seguida, sua aplicabilidade no Geoplano físico e on-line, sua versão para os polígonos com “buracos” e uma estimativa para o valor de  $\pi$ . Finalmente, apresentamos questões, com suas respectivas soluções, extraídas de exames matemáticos nacionais que irão estimular os alunos pela matéria, tornando as aulas mais interessantes.

**Palavras-chave:** Geometria Plana. Áreas de Polígonos. Malha Quadriculada. Teorema de Pick.

# ABSTRACT

This dissertation aims to present an alternative proposal for the teaching of the area of the simple polygons, overlaid in a checkered mesh with the vertices are integer coordinates, that are present in various contexts in the Basic Education, using the Pick's theorem. Based on bibliographic research, initially, will be studied a few basic concepts of plain geometry that will give support to a demonstrative presentation of the Pick's Theorem. Following it a small historic presentation about the mathematician George Alexander Pick, the development of his theorem and a demonstration in two different ways of its use. Next, the demonstration of this theorem in the physical geoplano and on-line, its version to the polygons with holes and an estimation of the value of  $\pi$ . Following, we present some questions, with its respective solutions, extracted from mathematical national exams that stimulated students by the subject, making the classes more interesting.

**Keywords:** Plane Geometry. Polygon Areas. Checkered Mesh. Pick's Theorem.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Polígono convexo (à esquerda), não convexo (centro) e não simples (à direita). . . . .	13
Figura 2 – Rede de pontos. . . . .	14
Figura 3 – Triângulos e paralelogramos fundamentais e não fundamentais. . . . .	15
Figura 4 – Construção do paralelogramo fundamental. . . . .	16
Figura 5 – Pontos de coordenadas inteiras que não são primas entre si. . . . .	17
Figura 6 – A reta $r$ é a mais próxima de $r_0$ . . . . .	17
Figura 7 – Decomposição do polígono $P$ em $n - 2$ triângulos - primeira possibilidade. . . . .	19
Figura 8 – Decomposição do polígono $P$ em $n - 2$ triângulos - segunda possibilidade. . . . .	19
Figura 9 – Decomposição em triângulos fundamentais. . . . .	20
Figura 10 – Georg Alexander Pick. . . . .	21
Figura 11 – Pontos internos e suas medidas. . . . .	24
Figura 12 – Justaposição dos polígonos $P_1$ e $P_2$ . . . . .	25
Figura 13 – Triângulo retângulo $\mathbf{T}$ . . . . .	26
Figura 14 – Triângulo $\mathbf{T}$ qualquer. . . . .	27
Figura 15 – Geoplano quadrangular. . . . .	28
Figura 16 – Geoplano online versão gratuita. . . . .	29
Figura 17 – Polígonos de áreas iguais e perímetros diferentes. . . . .	29
Figura 18 – Polígonos de áreas diferentes e perímetros iguais. . . . .	30
Figura 19 – Polígonos de áreas iguais e perímetros iguais. . . . .	30
Figura 20 – Polígono com $m$ buracos. . . . .	31
Figura 21 – Aproximação da área do círculo inscrito em um quadrado. . . . .	33
Figura 22 – Aproximação da área do círculo circunscrito a um quadrado. . . . .	34
Figura 23 – Aproximação da área do círculo por um octógono. . . . .	34
Figura 24 – Aproximando a área do círculo por um polígono irregular de 16 lados. . . . .	35
Figura 25 – Área do círculo aproximada a um polígono irregular de 32 lados. . . . .	36
Figura 26 – Polígono complexo. . . . .	37
Figura 27 – Polígono complexo decomposto em polígonos simples. . . . .	37
Figura 28 – Polígono complexo decomposto em polígonos simples. . . . .	38
Figura 29 – Mapa da Paraíba. . . . .	39
Figura 30 – Polígono simples de 12 lados. . . . .	40
Figura 31 – Quadrado $\mathbf{ABCD}$ com simetria de losangos internos. . . . .	41
Figura 32 – Polígono reticulado simples com “buracos”. . . . .	42

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CMUP	Centro de Matemática Universidade do Porto
IBMECRJ	Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais do Rio de Janeiro
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS BÁSICOS</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>Definições Importantes</b>	<b>13</b>
2.1.1	Polígonos	13
2.1.2	Triângulos e paralelogramos fundamentais	14
2.1.3	Decomposição de polígonos	18
<b>3</b>	<b>O TEOREMA DE PICK</b>	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>Aspectos Históricos</b>	<b>21</b>
<b>3.2</b>	<b>A Fórmula de Pick</b>	<b>22</b>
<b>3.3</b>	<b>Demonstração do Teorema de Pick</b>	<b>23</b>
3.3.1	Primeira demonstração	23
3.3.2	Segunda demonstração	24
3.3.3	A Fórmula de Pick para triângulos	26
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PICK</b>	<b>28</b>
<b>4.1</b>	<b>Geoplano</b>	<b>28</b>
<b>4.2</b>	<b>O Teorema de Pick para Polígonos com “buracos”</b>	<b>31</b>
<b>4.3</b>	<b>Aproximação do Número <math>\pi</math></b>	<b>32</b>
<b>5</b>	<b>RESOLUÇÃO DE QUESTÕES USANDO O TEOREMA DE PICK</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>43</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>44</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Ao se falar em área de polígonos, o que se percebe é um enorme receio na apresentação, demonstração e aplicação de inúmeras fórmulas. Emerge daí a necessidade de criar novas possibilidades para o estudo desta parte da Geometria. Foi então que achei válido apresentar o Teorema de Pick como uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos, pois, além de ser uma forma de calcular a área de diferentes polígonos simples com uma única fórmula, é de fácil aplicabilidade em outras áreas do conhecimento.

Satisfazendo a hipótese de que o polígono deve estar fixado em uma malha quadriculada, cujos vértices coincidem com os encontros das retas dessa malha (coordenadas inteiras), para que tenha validade, o teorema permite o cálculo de áreas de polígonos simples não regulares, em que não há fórmulas pré-definidas. Isso permite um trabalho contextualizado, pois se pode propor cálculo de áreas geográficas, estudos de danos ambientais ou quaisquer outros em que se obtém um polígono simples que pode ser sobreposto a uma malha quadriculada.

A apresentação, a demonstração (utilizada neste trabalho é a feita pelo estudioso Elon Lages Lima<sup>1</sup>) e a aplicação do Teorema de Pick podem ser consideradas de grande importância, quando abordado em uma perspectiva que poderá contribuir para a realização dos objetivos a que a moderna educação matemática propõe-se, como um estudo paralelo ao da geometria tradicional, possibilitando um trabalho contextualizado e interdisciplinar. Afinal, o teorema possibilita utilizar e explorar atividades em situações do cotidiano, com potencialidades formativas. Essa contextualização deve ser prioridade no ensino.

O que se pretende, então, é discutir a importância, a função e a necessidade de apresentar outras abordagens no ensino da Geometria, com destaque para o Teorema de Pick, tendo como contribuição para esta dissertação os trabalhos acadêmicos de Leonardo da Costa Silva, Fabíola Caroline Luz Sento Fé, Pedro Alberto da Cunha e Cled Veloso Freitas. Mediante o exposto, tomou-se como objeto desse estudo o Teorema de Pick, apre-

---

<sup>1</sup> Elon Lages Lima nasceu em Maceió, a 09 de julho de 1929. Graduiu-se em Matemática pela Universidade do Brasil, hoje Universidade Federal do Rio de Janeiro, tendo iniciado o curso em Fortaleza. Foi um dos primeiros bolsistas do então recém-fundado Instituto de Matemática Pura e Aplicada, o IMPA. Em 1954 foi para a Universidade de Chicago, nos Estados Unidos, onde obteve o doutorado em 1958, [...] De volta ao Brasil, sua atividade matemática foi essencialmente desenvolvida no IMPA [...] Escreveu 40 livros, sendo 14 deles sobre Matemática no nível de graduação e pós-graduação que abordam os temas mais variados: Espaços Métricos, Topologia Geral, Topologia Diferencial, Variedades Diferenciáveis, Cálculo Tensorial, Análise, Álgebra Exterior, Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Álgebra Linear. Alguns tiveram diversas edições e inúmeras impressões. Escreveu 8 artigos no periódico Matemática Universitária versando sobre temas análogos. Disponível em: <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/70/rpm1>>. Acesso em 28/01/2022.

sentado como uma abordagem no cálculo de áreas de polígonos simples. Essa perspectiva encaminhou à seguinte questão-problema: de que forma o Teorema de Pick pode auxiliar no cálculo de áreas de polígonos simples?

Para desvelar o objeto deste estudo e dar veracidade ao tema, primou-se como objetivo geral, a importância de se criar novas abordagens que facilitem o processo ensino-aprendizagem da Geometria, com foco no cálculo de áreas de polígonos simples. E como desdobramentos, apresentam-se como objetivos específicos: analisar questões de cálculo de área de polígonos simples com diferentes tipos de resolução; investigar a aceitação do Teorema de Pick como auxiliar no cálculo de áreas de diferentes polígonos simples; mostrar o sentido de se apresentar materiais manipuláveis, mais especificamente o Geoplano, que tornam o ensino mais prazeroso e conduz o aluno do concreto para a abstração.

Sendo assim, esta investigação se justifica na medida em que busca desvelar a importância da apresentação de novas abordagens que visem facilitar o ensino-aprendizagem de conteúdos geométricos e que conduzam o aluno a uma aprendizagem significativa.

## 2 CONCEITOS BÁSICOS

### 2.1 DEFINIÇÕES IMPORTANTES

#### 2.1.1 Polígonos

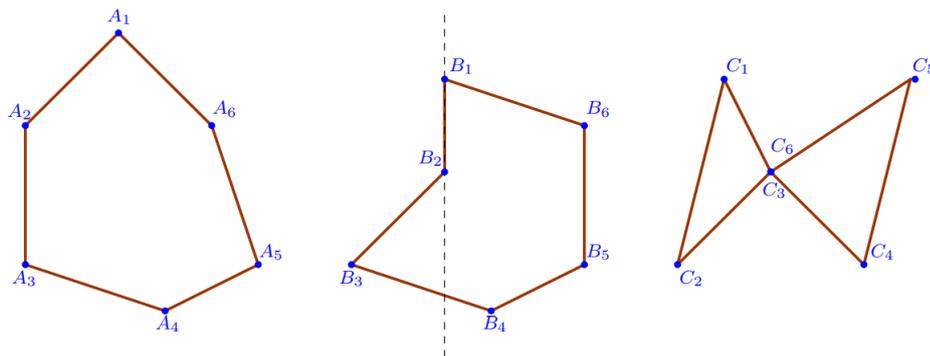
**Definição 2.1.1.** *Uma poligonal é uma figura formada por uma seqüência de pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e pelos segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ .*

**Definição 2.1.2.** *Consideremos a seqüência finita de pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , com  $n$  natural maior que dois. Chamamos de polígono  $A_1A_2\dots A_n$  o conjunto de todos segmentos formados por dois pontos consecutivos, a saber,  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  onde dois desses segmentos não possuem intersecção além dos vértices e, se consecutivos, não pertencem à mesma reta. Ver Figura 1.*

**Definição 2.1.3.** *Um polígono é simples quando cada um de seus vértices é extremidade de apenas dois lados. Um polígono que não é simples é dito complexo.*

**Definição 2.1.4.** *Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados.*

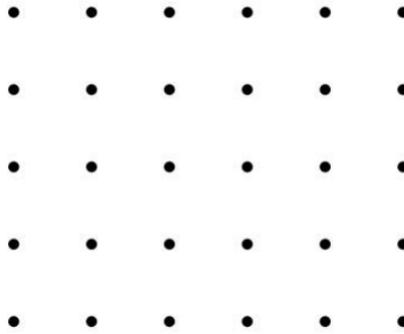
Figura 1 – Polígono convexo (à esquerda), não convexo (centro) e não simples (à direita).



Fonte: Extraída de (SILVA, 2021).

**Definição 2.1.5.** *Uma rede de pontos no plano é um conjunto de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1.*

Figura 2 – Rede de pontos.



Fonte: Extraída de (SENTO-SÉ, 2016).

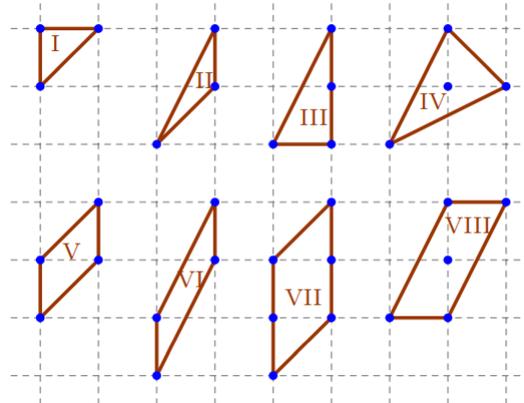
Um polígono reticulado é aquele cujos vértices são pontos da malha quadriculada.

**Definição 2.1.6.** *Um triângulo chama-se fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou do interior) sobre a rede.*

## 2.1.2 Triângulos e paralelogramos fundamentais

Um triângulo fundamental é aquele que possui os seus três vértices como nós na rede de malha, não possuindo nenhum outro nó, nem sobre a borda e nem no seu interior. Analogamente, um paralelogramo é dito fundamental quando os seus vértices são os únicos pontos sobre a rede de malha, seja no bordo ou no seu interior. O paralelogramo fundamental, quando for decomposto por meio de uma diagonal, resultará em dois triângulos, que serão fundamentais e de bases comuns. Os triângulos fundamentais possuem propriedades singulares, como veremos adiante, servindo de alicerce para que o Teorema de Pick seja estabelecido. Na Figura 3, percebemos dois triângulos fundamentais (I e II) e dois paralelogramos fundamentais (V e VI).

Figura 3 – Triângulos e paralelogramos fundamentais e não fundamentais.



Fonte: Extraída de (SILVA, 2021).

**Teorema 2.1.1.** *Se  $ABC$  é um triângulo fundamental e  $D$  é o ponto de interseção entre a reta que passa por  $C$  e é paralela a  $AB$  e a reta que passa por  $B$  e é paralela a  $AC$ , então  $ABCD$  é um paralelogramo fundamental.*

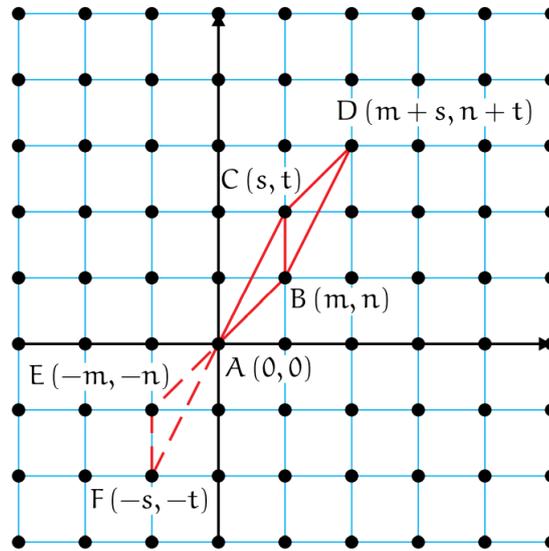
**Demonstração:** Tendo como origem o ponto  $A(0, 0)$ , consideremos um sistema de coordenadas cartesianas no plano, em relação ao qual os pontos da rede têm coordenadas inteiras (ver Figura 4). Sejam  $B(m, n)$  e  $C(s, t)$  as coordenadas dos outros dois vértices do triângulo  $ABC$ . Então o quarto vértice do paralelogramo terá coordenadas  $D(m+s, n+t)$ .

O triângulo  $AEF$  cujos vértices são

$$A = (0, 0), \quad E(-m, -n) \quad \text{e} \quad F(-s, -t)$$

é obtido trocando-se os sinais de ambas as coordenadas de cada ponto do triângulo  $ABC$ . Logo,  $AEF$  não contém outro ponto com coordenadas inteiras, além dos seus vértices, isto é,  $AEF$  é fundamental. O triângulo  $BCD$  é formado pelo ponto  $P'(x+m+s, y+n+t)$ , obtido somando-se  $m+s$  à abscissa e  $n+t$  à ordenada de um ponto arbitrário  $P(x, y)$  do triângulo  $AEF$ . Se  $P'$  tem coordenadas inteiras,  $P$  também tem. Como  $AEF$  é fundamental, o mesmo se dá com  $BCD$ . Assim, os únicos pontos com coordenadas inteiras no paralelogramo  $ABCD$  são os vértices, ou seja,  $ABCD$  é fundamental. (LIMA, 1991).

Figura 4 – Construção do paralelogramo fundamental.



Fonte: Extraída de (FREITAS et al., 2018).

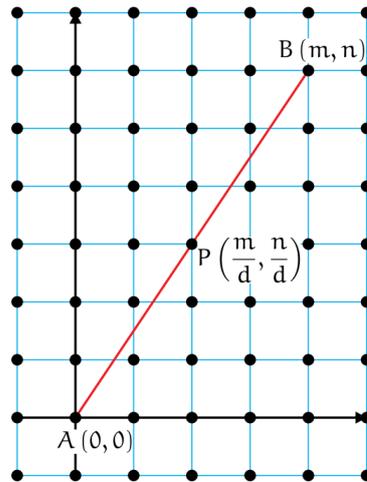
O paralelogramo  $ABDC$  é fundamental, logo não há pontos na malha entre as retas paralelas que passam por  $AB$  e  $CD$ , por isso formam dois triângulos fundamentais, e conforme veremos abaixo, todo triângulo fundamental tem área igual a  $\frac{1}{2}$ .

**Teorema 2.1.2.** *A área de um triângulo fundamental é igual a  $\frac{1}{2}$ .*

**Demonstração:** (A demonstração apresentada abaixo foi retirada de (LIMA, 1991).

Sejam  $A(0,0)$  e  $B(m,n)$  as coordenadas inteiras dos dois primeiros vértices do triângulo fundamental  $ABC$ . Mostremos, inicialmente, que  $m$  e  $n$  são primos entre si. Com efeito, se  $d > 1$  fosse um divisor comum de  $m$  e  $n$ , o ponto  $P\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$  estaria na rede e no interior do segmento de reta  $AB$  (ver Figura 5). Logo,  $ABC$  não seria fundamental.

Figura 5 – Pontos de coordenadas inteiras que não são primas entre si.



Fonte: Extraída de (FREITAS et al., 2018).

Suponhamos  $m \neq 0$ . A equação da reta  $r$  que passa pelo ponto  $C$  e é paralela a  $AB$  é

$$y = \frac{n}{m}x + b$$

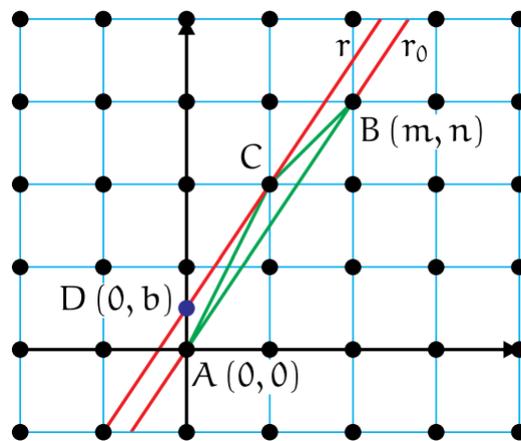
onde  $b$  é a ordenada do ponto  $D(0, b)$ , no qual a reta  $r$  corta o eixo vertical. Todos os triângulos que têm  $AB$  como base e cujo terceiro vértice sobre  $r$  têm a mesma área que  $ABC$ .

Em particular,

$$\text{área } ABC = \text{área } ABD = \frac{|bm|}{2},$$

pois  $|b|$  é a medida da base e  $|m|$  é da altura de  $ABD$  relativa ao lado  $AD$ .

Figura 6 – A reta  $r$  é a mais próxima de  $r_0$ .



Fonte: Extraída de (FREITAS et al., 2018).

Note que, da equação da reta  $r$ , tem-se:

$$b = \frac{-nx + my}{m}$$

e, como  $r$  é a reta mais próxima de  $AB$  que passa por um ponto de rede,  $b$  é o valor mais próximo possível de 0. Observe que

$$|b| = \frac{|nx - my|}{|m|}$$

e, portanto  $|nx - my|$  precisa ser o menor inteiro positivo possível. Sendo  $m$  e  $n$  primos entre si, é assegurada a existência de inteiros  $s$  e  $t$  tais que  $tm - sn = 1$ . Deste modo, deve-se ter  $|b| = \frac{1}{|m|}$  e o resultado segue. Se  $m = 0$ , então  $n = \pm 1$  e, conseqüentemente,  $C(p, \pm 1)$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . O triângulo  $ABC$ , neste caso, tem base e altura iguais a 1 e, portanto, sua área será  $\frac{1}{2}$ .

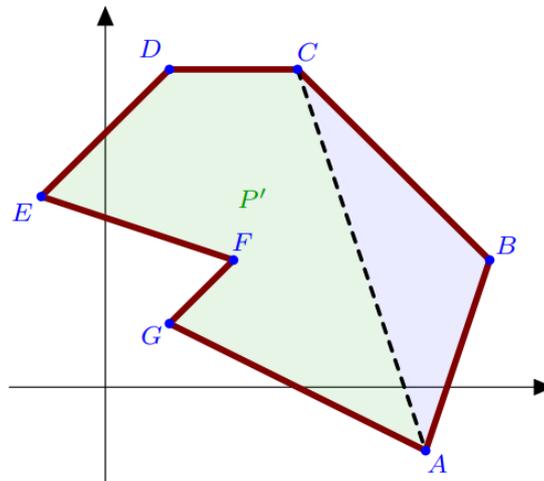
### 2.1.3 Decomposição de polígonos

**Teorema 2.1.3.** *Todo polígono de  $n$  lados pode ser decomposto como reunião de  $n - 2$  triângulos justapostos, cujos vértices são os mesmos do polígono dado.*

**Demonstração:** Supondo, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, seja  $n$  o menor número natural tal que existe um polígono  $P$ , com  $n$  lados, o qual não pode ser decomposto conforme estipula o enunciado acima. Tomemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja  $B$  o ponto de maior abscissa no bordo do polígono  $P$ . Como nenhum lado de  $P$  é vertical,  $B$  deve ser um vértice. Sejam  $A$  e  $C$  os vértices adjacentes a  $B$ . Há duas possibilidades.

**Primeira possibilidade** O triângulo  $ABC$ , ver Figura 7, não contém outros vértices de  $P$ , além de  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Nesse caso, o polígono  $P'$ , obtido de  $P$  quando se substituem os lados  $BC$  e  $AB$  por  $AC$ , tem  $n - 1$  lados. Como  $n$  é o menor número de lados para o qual o teorema é falso,  $P'$  pode ser decomposto em  $n - 3$  triângulos na forma do enunciado. Juntando o triângulo  $ABC$  a essa decomposição, vemos que o teorema é verdadeiro para  $P$ , o que é uma contradição.

Figura 7 – Decomposição do polígono  $P$  em  $n - 2$  triângulos - primeira possibilidade.



Fonte: Extraída de (SILVA, 2021).

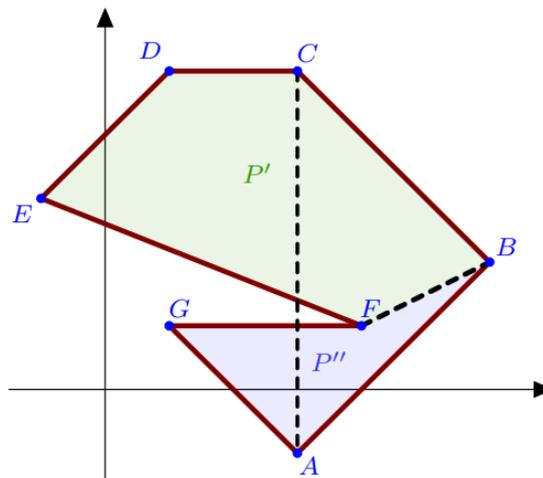
**Segunda possibilidade:** No triângulo  $ABC$  existem outros vértices de  $P$ , conforme exemplo na Figura 8. Destes, seja  $F$  o vértice mais próximo de  $B$ . A diagonal  $BF$  divide  $P$  em dois polígonos  $P'$  e  $P''$  com  $n'$  e  $n''$  lados, respectivamente.

Observemos ainda que  $n'$  e  $n''$  são maiores ou iguais a 3 e que  $n' + n'' = n + 2$  o que nos mostra que ambos são menores do que  $n$ . E, como isso ocorre, o teorema se aplica a  $P'$  e  $P''$  que podem ser decompostos, respectivamente, em  $n' - 2$  e  $n'' - 2$  triângulos. Mas somando as decomposições de triângulos de  $P'$  e  $P''$  temos:

$$(n' - 2) + (n'' - 2) = n' + n'' - 4 = (n + 2) - 4 = n - 2$$

o que é uma contradição.

Figura 8 – Decomposição do polígono  $P$  em  $n - 2$  triângulos - segunda possibilidade.



Fonte: Extraída de (SILVA, 2021).

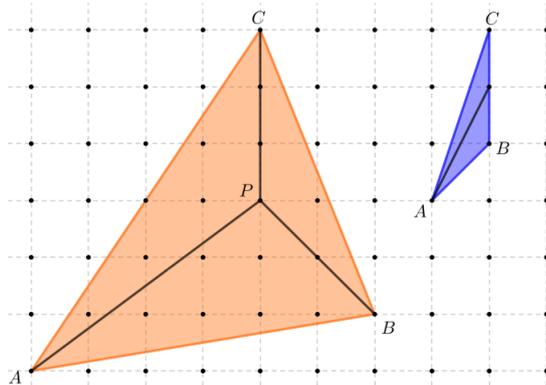
**Corolário 2.1.1.** *A soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados é igual a  $(n - 2)\pi$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema 2.1.3, um polígono de  $n$  lados pode ser decomposto em  $n - 2$  triângulos justapostos com vértices nos vértices do polígono, tendo em cada triângulo  $\pi$  como soma dos ângulos internos. Logo, soma dos ângulos internos é dada por  $(n - 2)\pi$ .

**Teorema 2.1.4.** *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma malha pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.*

**Demonstração:** Em vista do Teorema 2.1.3, basta considerar o caso em que o polígono dado é um triângulo  $ABC$ , que contém  $n$  pontos da rede (no interior ou no bordo). Se existir realmente algum ponto  $P$  da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  e, desse modo, decomposmos  $ABC$  em três triângulos, cada um contendo um número  $n$  menor de pontos da malha. Se houver pontos da rede sobre os lados de  $ABC$ , escolhemos um deles, digamos sobre  $BC$ , e o ligamos ao vértice  $A$ . Assim, decomposmos  $ABC$  em 2 triângulos, cada um contendo um número  $n$  menor de pontos da rede. Prosseguindo dessa maneira, com um número finito de etapas, chegaremos a uma decomposição de  $ABC$  em triângulos fundamentais.

Figura 9 – Decomposição em triângulos fundamentais.



Fonte: Extraída de (CUNHA et al., 2019).

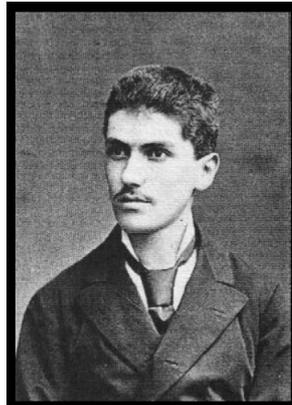
Finalmente, temos elementos suficientes para estabelecermos a Fórmula de Pick.

## 3 O TEOREMA DE PICK

Neste capítulo, daremos ênfase ao entendimento do Teorema de Pick desde os aspectos históricos da vida de Georg Alexander Pick, o idealizador do resultado, até a sua demonstração. Inicialmente, esse teorema era visto, apenas, como uma simples aplicação de fórmula; hoje, como uma maneira moderna de ensinar ao aluno da educação básica outro modo de calcular áreas de polígonos.

### 3.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Figura 10 – Georg Alexander Pick.



Fonte: Imagem extraída de Wikipedia (2020).

O austríaco Georg Alexander Pick (ou simplesmente Pick), segundo a Wikipedia (2020), vindo de uma família judaica, nasceu em 10 de agosto de 1859, em Viena. Filho de Josefa Schleisinger e Adolf Josef Pick, este diretor de uma instituição privada. Pick não frequentou escola tradicional quando criança, pois foi educado até os 11 anos de idade pelo seu pai e, somente no início da adolescência, deu continuidade aos estudos na escola Leopoldstaedter Communal Gynsadium, onde ele permaneceu até 1875, quando ingressou na Universidade de Viena.

No ano seguinte, em 1876, com apenas 17 anos de idade, Pick publicou seu primeiro artigo na área de Matemática. Estudou Matemática e Física, graduando-se em 1879, com uma qualificação que lhe permitiria ensinar ambas as disciplinas. Após a conclusão de seu doutorado, que lhe rendeu um prêmio pela sua dissertação “Uber eine Klasse abelscher Intégrale”, começou a sua vida laboral na Universidade Karl-Ferdinand, em Praga, primeiro como assistente do cientista Ernest Mach e, em seguida, tornou-se professor após

defender a sua tese *Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen* em Praga, em 1881.

Focando seu trabalho no campo da matemática, escreveu 67 artigos que abordaram vários tópicos: Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria. Todavia, é válido destacar que seu artigo mais conceituado é Pick's Theorem, traduzido para português Teorema de Pick, que foi publicado em Praga, em 1899, mas só ganhou destaque após ser citado em um dos livros do matemático polonês H. Steinhaus em 1969, setenta anos depois de Pick o ter publicado.

Pick retornou para Viena em 1927, após ter aposentado. Como reconhecimento de uma vida dedicada a grandes estudos, foi eleito membro da Academia das Ciências e das Artes da República Tcheca. Após os nazistas assumirem o poder, Pick foi expulso da Academia, preso e enviado para o campo de concentração de Theresienstadt, em 1942, morrendo duas semanas depois aos 82 anos.

## 3.2 A FÓRMULA DE PICK

O conceito de área demanda um nível de abstração que a maioria dos alunos da educação básica ainda não possui quando com ele se depara pela primeira vez, o que torna sua assimilação mais difícil. Alguns alunos confundem-no com a ideia de perímetro e acreditam que sua dimensão também é de comprimento. Entretanto, quando as figuras geométricas são colocadas em malhas quadriculadas, o conceito se torna mais palpável, associando a ideia de área com a quantidade de quadrados da malha que cabem na figura e a ideia de perímetro com a quantidade de lados da malha utilizados para compor o contorno da figura geométrica, estando em conformidade com:

Baltar (1996), ao estudar a aquisição da relação entre comprimento e área na escola, relata as dificuldades que estudantes dos anos finais da educação básica encontram, em primeiro lugar, em reconhecer medidas de uma figura como um de seus elementos constituintes e, em segundo, em distinguir as medidas de área e de perímetro. Em tal pesquisa, foi evidenciado o fato de que os aspectos da aprendizagem de diferentes elementos de medida (de comprimento, de área, etc.) são específicos e diversos entre si; assim, a ideia de área de uma figura plana não é sempre reconhecida como uma característica de tal figura. (HENRIQUES, 2011).

O Teorema de Pick procura estudar áreas de polígonos por meio de números inteiros, conectando os campos da Aritmética e da Geometria. Assim, este teorema permite uma abordagem inovadora, distanciando-se, por exemplo, da abordagem altamente técnica introduzida pelo Cálculo Integral.

**Teorema 3.2.1.** *A área  $A$  de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela função*

$$A = \frac{b}{2} + I - 1 \quad (3.1)$$

onde  $b$  é o número de pontos da rede situado sobre o bordo do polígono e  $I$  é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

### 3.3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PICK

A demonstração do Teorema de Pick pode ser feita de diversas maneiras. Neste trabalho, serão apresentadas duas delas: a primeira baseada no livro *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, de autoria do saudoso Elon Lages Lima (LIMA, 1991); a segunda por meio do processo de justaposição apresentada na dissertação de Pedro Alberto da Cunha (CUNHA et al., 2019).

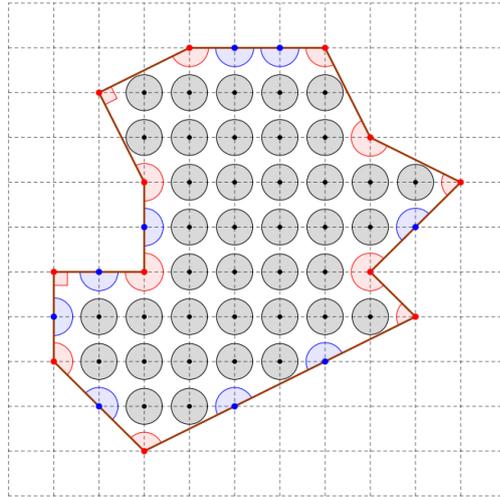
#### 3.3.1 Primeira demonstração

Para mostrar que o Teorema de Pick é dado por  $A = \frac{b}{2} + I - 1$ , basta mostrar que a área de um polígono  $P$  é dada pela metade do número de triângulos fundamentais  $\alpha$  da decomposição de  $P$ , que é  $b + 2I - 2$ .

Primeiro, vamos calcular a soma dos ângulos internos dos  $\alpha$  triângulos fundamentais que compõem  $P$ . De um lado, temos que essa soma é igual a  $\alpha\pi$ . Por outro lado, temos que calcular separadamente a soma  $S_b$  dos ângulos que têm vértice no bordo e a soma  $S_I$  dos ângulos cujos vértices estão no interior do polígono  $P$ .

Sejam  $b_1$  o número de vértices de  $P$  (pontos em vermelho na Figura 11) e  $b_2$  o número de pontos na rede que estão sobre o bordo de  $P$ , mas não são vértices de  $P$  (pontos em azul na Figura 11). Logo,  $b = b_1 + b_2$ . Então,  $S_b$  é a soma de  $(b_1 - 2)\pi$ , (pois a soma dos ângulos internos de um polígono é dada por  $(n - 2)\pi$ , onde  $n$  é o número de lados de um polígono) mais  $b_2\pi$  (pois cada vértice do bordo que não é vértice de  $P$  descreve um ângulo raso).

Figura 11 – Pontos internos e suas medidas.



Fonte: Extraída de (SILVA, 2021).

Ou seja,

$$S_b = (b_1 - 2)\pi + b_2\pi = (b_1 + b_2 - 2)\pi = (b - 2)\pi$$

Por outro lado, cada ponto da rede, interior a  $P$ , forma um ângulo cuja medida é igual a  $2\pi$ . Logo,  $S_I = 2\pi I$ , onde  $I$  é o número de vértices no interior de  $P$ .

Portanto,

$$S_b + S_I = (b - 2)\pi + 2\pi I = (b + 2I - 2)\pi$$

Comparando os dois resultados das somas dos ângulos internos dos  $\alpha$  triângulos fundamentais que compõem  $P$  temos:

$$\alpha\pi = (b + 2I - 2)\pi$$

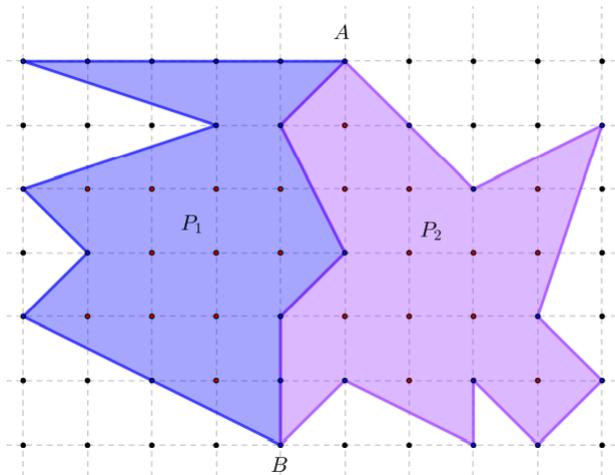
$$\alpha = (b + 2I - 2),$$

como queríamos demonstrar.

### 3.3.2 Segunda demonstração

Na demonstração por justaposição é necessário perceber que a área deve ser aditiva, isto é, se  $P$  é um polígono simples,  $P$  pode ser obtido justapondo polígonos simples  $P_1$  e  $P_2$  ao longo de pelo menos uma aresta.

Figura 12 – Justaposição dos polígonos  $P_1$  e  $P_2$ .



Fonte: Extraída de (CUNHA et al., 2019).

Sejam  $b_1$  os nós da borda e  $I_1$  os nós interiores do polígono  $P_1$  e  $b_2$  os nós da borda e  $I_2$  os nós interiores do polígono  $P_2$ . Justapondo os dois polígonos obtemos um polígono  $P$  com  $b$  nós da borda e  $I$  nós interiores.

Observe que, desta forma, temos  $k$  nós de contato entre  $P_1$  e  $P_2$ , que antes eram pontos da borda, e que se tornaram nós interiores do polígono  $P$ . Assim, a quantidade de nós interiores de  $P$  será

$$I = I_1 + I_2 + k.$$

Essa quantidade  $k$  de nós das bordas de  $P_1$  e  $P_2$  não serão contabilizadas como nós da borda de  $P$  pois se tornaram nós interiores. Temos então que a quantidade de nós da borda de  $P_1$  que serão consideradas é  $b_1 - k$ , entre eles,  $A$  e  $B$ . A quantidade de nós da borda de  $P_2$  que serão consideradas é  $b_2 - k$ , entre eles,  $A$  e  $B$ . Como os nós  $A$  e  $B$  foram considerados duas vezes, teremos então que a quantidade de nós da borda de  $P$  será dada por

$$b = (b_1 - k) + (b_2 - k) - 2 = b_1 + b_2 - 2k - 2.$$

Substituindo na Fórmula de Pick, teremos:

$$\begin{aligned} A(P) &= \frac{b}{2} + I - 1 \\ &= \frac{(b_1 + b_2 - 2k - 2)}{2} + I_1 + I_2 + k - 1 \\ &= \frac{(b_1 + b_2 + 2I_1 + 2I_2 - 2k + 2k - 2 - 2)}{2} \\ &= \frac{b_1 + 2I_1 - 2 + b_2 + 2I_2 - 2}{2} \\ &= \left( \frac{b_1}{2} + I_1 - 1 \right) + \left( \frac{b_2}{2} + I_2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Logo,

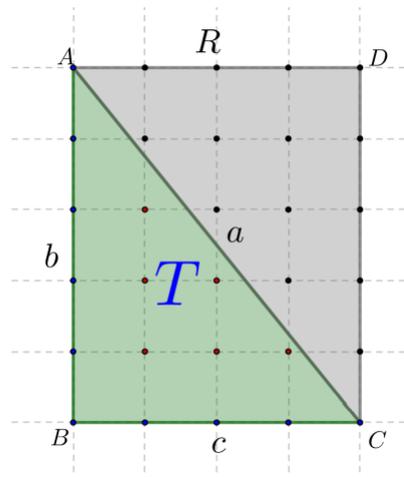
$$A(P) = A(P_1) + A(P_2). \quad (3.2)$$

Demostrou-se que, justapondo-se dois polígonos simples, as respectivas áreas se adicionam. Assim, por meio desta demonstração, um polígono  $P$  pode ser decomposto em polígonos justapostos mais simples, para os quais a Fórmula de Pick possa ser verificada. Como qualquer polígono simples pode ser formado por uma justaposição de triângulos, basta que se demonstre que a Fórmula de Pick seja válida para qualquer triângulo. É o que veremos a seguir.

### 3.3.3 A Fórmula de Pick para triângulos

Na Figura 13 está representado o retângulo  $R$ , em que dois de seus lados são catetos de comprimento  $b$  e  $c$  do triângulo retângulo  $T$ , catetos esses, paralelos aos eixos coordenados.

Figura 13 – Triângulo retângulo  $T$ .



Fonte: Extraída de (CUNHA et al., 2019).

Sendo  $B$  e  $I$  a quantidade de nós da borda e do interior do triângulo, respectivamente. Sabendo que os nós interiores do retângulo  $R$  são dados por  $(b - 1) \cdot (c - 1)$  e chamando de  $p_h$  o número de pontos da hipotenusa, sem considerar os pontos que são vértices do triângulo, tem-se

$$I = \frac{1}{2}[(b - 1) \cdot (c - 1) - p_h] \text{ e } B = b + c + p_h + 1 \quad (3.3)$$

Como a Fórmula de Pick é dada por  $A = \frac{B}{2} + I - 1$ , substituindo as igualdades (3.3) nela, obtém-se

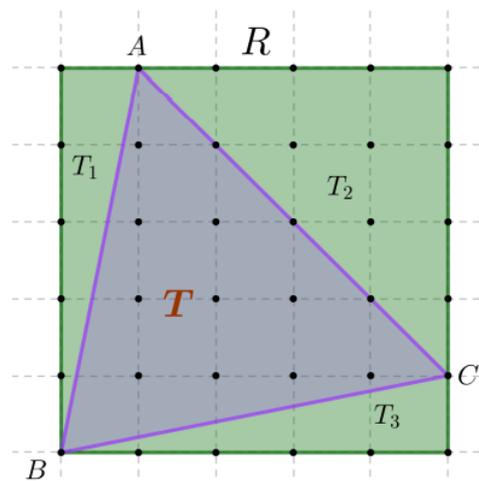
$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}(b + c + p_h + 1) + \frac{1}{2}[(b - 1) \cdot (c - 1) - p_h] - 1 \\
A &= \frac{1}{2}(b + c + p_h + 1) + \frac{1}{2}(-b - c - p_h + 1 + bc) - 1 \\
A &= \frac{1}{2}(2 + bc) - 1 \\
A &= 1 + \frac{bc}{2} - 1 \\
A &= \frac{bc}{2},
\end{aligned}$$

o que comprova o resultado que pode ser obtido com o cálculo usual da área de um triângulo retângulo, já que podemos tomar qualquer um dos catetos como base e o outro como altura do triângulo.

Como todo retângulo  $R$  pode ser formado por dois triângulos retângulos, a Fórmula de Pick vale também para todo retângulo.

Por outro lado, seja  $T$  um triângulo qualquer. Pode-se formar um retângulo  $R$ , ver Figura 14, tal que  $R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$ , onde  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  sejam triângulos retângulos com catetos paralelos aos eixos.

Figura 14 – Triângulo  $T$  qualquer.



Fonte: Extraída de (CUNHA et al., 2019).

Assim, se o teorema é válido para  $R$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$ , ele vale também para o triângulo  $T$ , devido à propriedade aditiva da Fórmula de Pick, ver equação (3.2), e pela justaposição de polígonos demonstrada anteriormente.

## 4 APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PICK

### 4.1 GEOPLANO

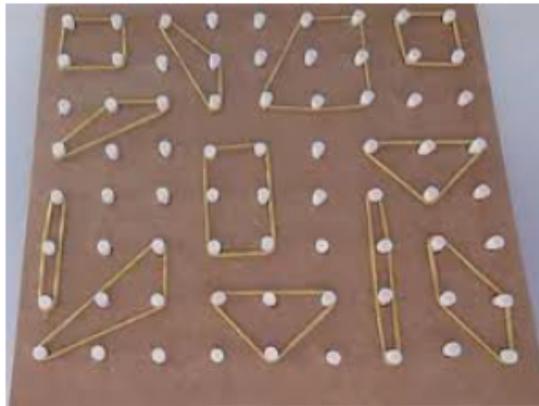
O **Geoplano** é uma ferramenta importante no ensino de Geometria Plana criada pelo matemático inglês Calleb Gattegno. Construído em madeira ou plástico, tem cravados pregos ou pinos que formam uma malha (reticulado) composta por linha e colunas, onde se prenderão os elásticos ou cordões usados para “desenhar” figuras, o mais usual é o chamada de Geoplano quadrangular, ver figura 15.

O Geoplano é um recurso utilizado por professores no trabalho com figuras de formas geométricas e estes podem explorar conceitos de vértices, de lado, de simetria, de perímetro, de área e a ampliação ou a redução de uma figura, entre outros.

Segundo Machado:

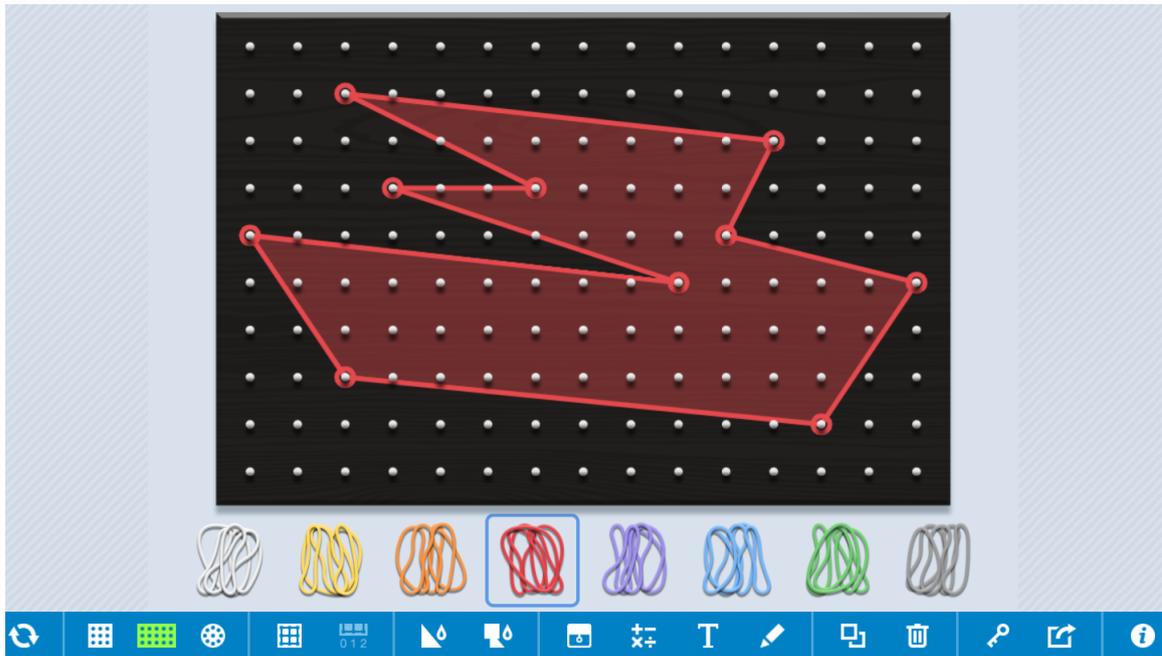
O geoplano é um meio, uma ajuda didática, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes. (MACHADO, 1991)

Figura 15 – Geoplano quadrangular.



Atualmente, existem recursos computacionais, como o software do Geoplano, ver Figura 16, sobretudo online, que podem ser mais rapidamente manuseados em figuras e cálculos diversos, sendo, portanto, uma forma de interação do homem com a máquina em benefício da construção dos conceitos matemáticos. Há uma versão gratuita disponível no endereço eletrônico <<https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>>.

Figura 16 – Geoplano online versão gratuita.

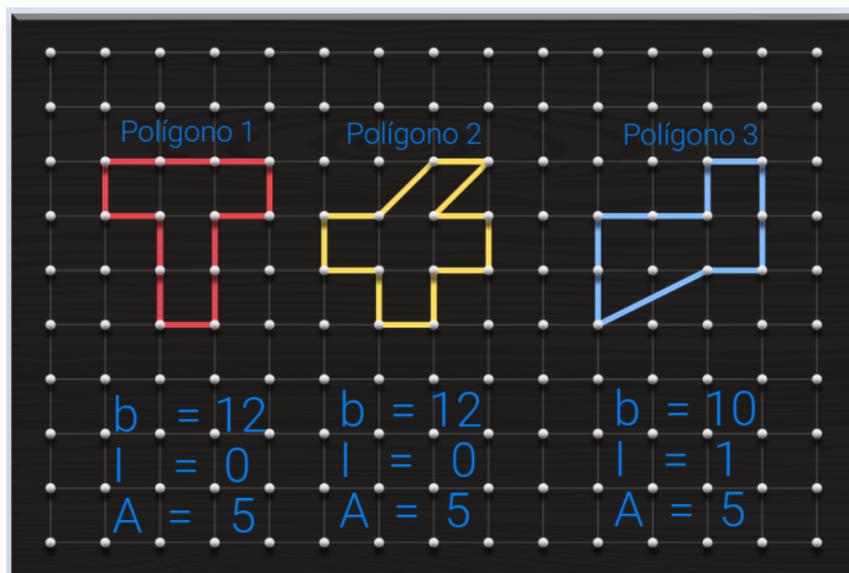


Abaixo seguem alguns **resultados importantes** utilizando o Geoplano para os cálculos de perímetros e áreas de polígonos simples.

Vejamos:

1. Polígonos com áreas iguais a  $5 \text{ u.a.}$  e perímetros diferentes  $12 \text{ u.c.}$ ,  $10 + 2\sqrt{2} \text{ u.c.}$  e  $9 + \sqrt{5} \text{ u.c.}$ , respectivamente.

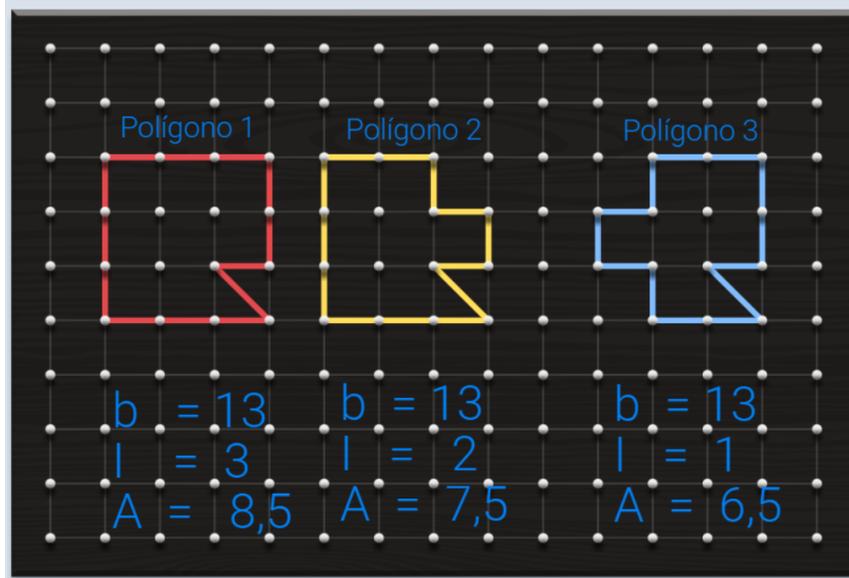
Figura 17 – Polígonos de áreas iguais e perímetros diferentes.



Fonte: Elaboração própria.

2. Polígonos com perímetros iguais a  $12 + \sqrt{2}$  u.c. e áreas diferentes 8,5 u.a., 7,5 u.a. e 6,5 u.a., respectivamente.

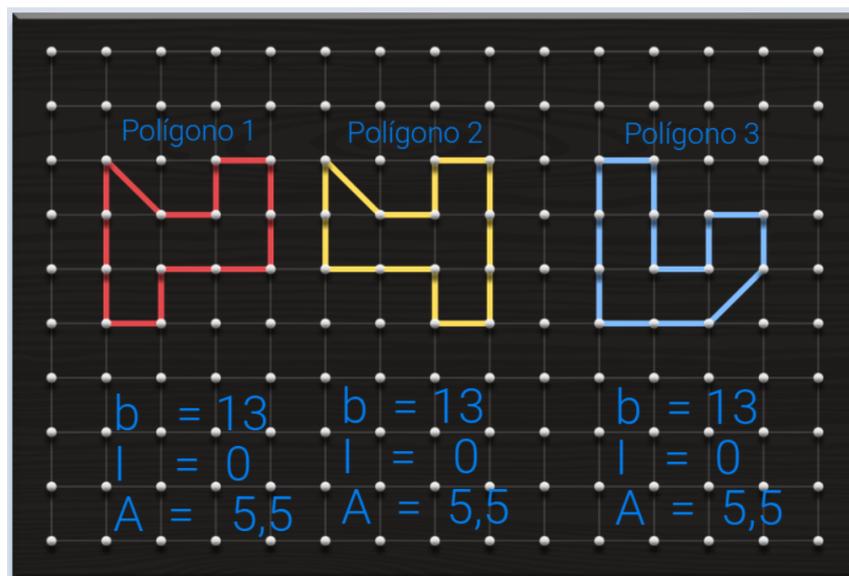
Figura 18 – Polígonos de áreas diferentes e perímetros iguais.



Elaboração própria.

3. Todos polígonos com áreas iguais a 5,5 u.a. e perímetros também iguais a  $12 + \sqrt{2}$  u.c.

Figura 19 – Polígonos de áreas iguais e perímetros iguais.



Fonte: Elaboração própria.

Enfim, existem várias possibilidades de atividades usando o Teorema de Pick no Geoplano.

## 4.2 O TEOREMA DE PICK PARA POLÍGONOS COM “BURACOS”

E o que dizer desta pergunta: “Será que o Teorema de Pick pode ser aplicado para calcular a área de polígonos com buracos”?

Analisemos o seguinte teorema:

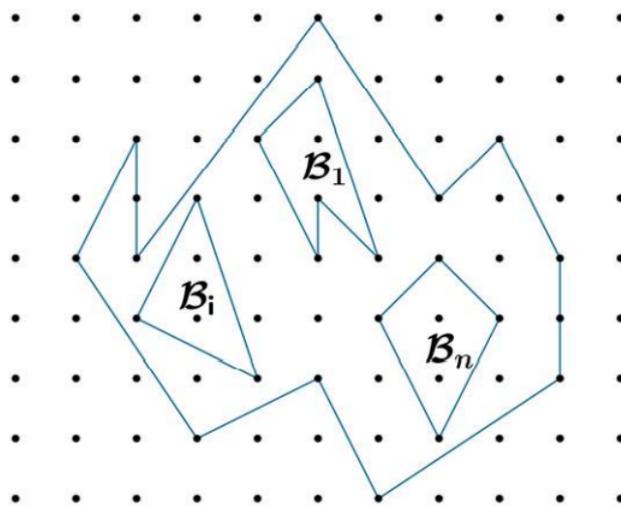
**Teorema 4.2.1.** (*Extensão do Teorema de Pick*) *Seja  $P$  uma figura poligonal com vértices de coordenadas inteiras e com  $m$  buracos. Então a área de  $P$  é dada pela fórmula de Pick generalizada:*

$$A(P) = \frac{b}{2} + I + m - 1$$

onde  $b$  é o número de pontos no bordo de  $P$  e no bordo dos buracos e  $I$  é o número de pontos no interior de  $P$ , excluindo os pontos que estão no interior dos buracos.

**Demonstração:** Seja  $P$  um polígono com  $m$  buracos. Denote cada um de seus buracos por  $B_i$ , onde  $1 \leq i \leq m$ .

Figura 20 – Polígono com  $m$  buracos.



Fonte: Extraída de (SENTO-SÉ, 2016).

Observa-se que o Teorema de Pick é válido tanto para o polígono  $P$ , como para cada um dos buracos. Considere que o polígono  $P$  tem  $b_0$  pontos no bordo e  $I_0$  pontos interiores. E que cada buraco possui  $b_n$  pontos sobre o bordo e  $I_n$  pontos internos, com

$0 \leq n \leq m$ . Portanto,

$$A(P) = \frac{b_0}{2} + I_0 - 1,$$

$$A(B_n) = \frac{b_n}{2} + I_n - 1.$$

Então, a área da região  $R$  limitada pelo polígono  $P$  e pela parte externa dos buracos será dada por:

$$A(R) = A(P) - A(B_n)$$

$$A(R) = A(P) - A(B_1) - A(B_2) - \dots - A(B_m)$$

$$A(R) = \frac{b_0}{2} + I_0 - 1 - \left(\frac{b_1}{2} + I_1 - 1\right) - \left(\frac{b_2}{2} + I_2 - 1\right) - \dots - \left(\frac{b_m}{2} + I_m - 1\right)$$

$$A(R) = \frac{b_0}{2} - \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \dots + \frac{b_m}{2}\right) + I_0 - (I_1 + I_2 + \dots + I_m) - 1 + \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{m \text{ vezes}}$$

$$A(R) = \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \dots + \frac{b_m}{2} - (b_1 + b_2 + \dots + b_m) + I_0 - (I_1 + I_2 + \dots + I_m) - 1 + m$$

$$A(R) = \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_m}{2} - (b_1 + b_2 + \dots + b_m) + I_0 - (I_1 + I_2 + \dots + I_m) - 1 + m.$$

Note que

$$\frac{b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_m}{2}$$

corresponde à metade dos pontos sobre o bordo e

$$I_0 - (I_1 + I_2 + \dots + I_m) - (b_1 + b_2 + \dots + b_m)$$

à quantidade de pontos no interior de  $P$ .

Logo,

$$A(P) = \frac{b}{2} + I + m - 1.$$

### 4.3 APROXIMAÇÃO DO NÚMERO $\pi$

A fórmula de Pick pode ser usada para determinar o valor de  $\pi$ . Para isso, se faz necessário sobrepor o círculo em uma malha quadriculada e traçar polígonos que mais se aproximam do contorno do círculo. O valor de  $\pi$  se aproxima cada vez mais de seu valor real à medida que os polígonos apresentam uma quantidade de pontos cada vez maior. Ou seja, quando a quantidade de pontos tende ao infinito, o valor de  $\pi$  se aproxima de seu valor real.

Sabe-se que a fórmula para calcular a área de um círculo é dada por:

$$A(C) = \pi \cdot r^2$$

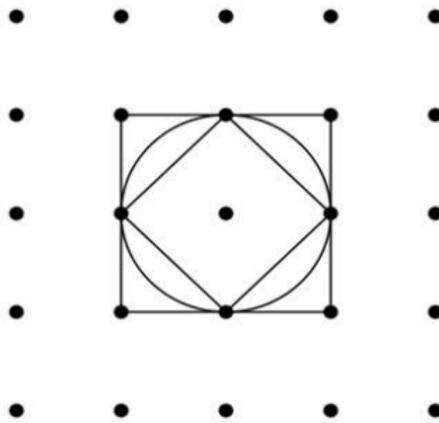
onde  $r$  é o raio do círculo. A partir dessa informação, pode-se obter o valor de  $\pi$  pela seguinte relação:

$$\pi = \frac{A(C)}{r^2}$$

Para estimar o valor de  $\pi$ , serão utilizados os polígonos cujas áreas se aproximam da área do círculo.

Vejamos a figura abaixo, cujo círculo tem raio 1.

Figura 21 – Aproximação da área do círculo inscrito em um quadrado.



Fonte: Extraída de (SENTO-SÉ, 2016).

Vamos tentar calcular o valor de  $\pi$  pela aproximação das áreas desses dois quadrados.

Primeiro, vamos considerar o quadrado  $Q_1$  que está inscrito no círculo.

Pelo Teorema de Pick, a área de  $Q_1$  é dada por:

$$A(Q_1) = \frac{4}{2} + 1 - 1 = 2 \text{ u.a.}$$

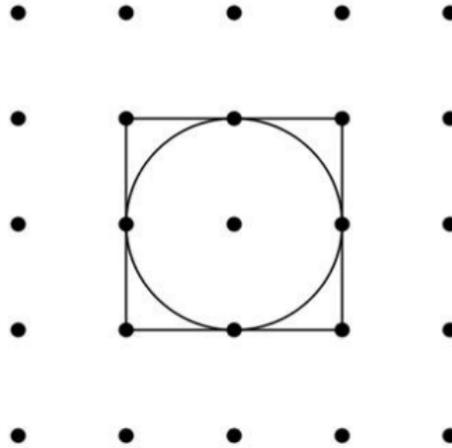
Então,

$$\pi = \frac{A(C)}{r^2} \approx \frac{A(Q_1)}{r^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

Porém, essa aproximação para  $\pi$  está ruim.

Agora, vamos considerar o quadrado  $Q_2$  circunscrito, tendo 1 como a unidade.

Figura 22 – Aproximação da área do círculo circunscrito a um quadrado.



Fonte: Extraída de (SENTO-SÉ, 2016).

Calculando a área de  $Q_2$  pelo Teorema de Pick, tem-se:

$$A(Q_2) = \frac{8}{2} + 1 - 1 = 4 \text{ u.a.}$$

Logo,

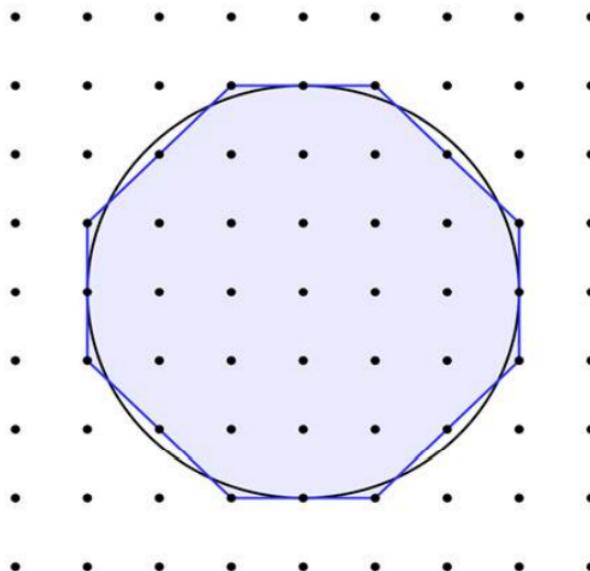
$$\pi = \frac{A(C)}{r^2} \approx \frac{A(Q_2)}{r^2} = \frac{4}{1^2} = 4$$

que também não é uma aproximação boa para  $\pi$ .

Vamos utilizar outros polígonos para encontrar o valor mais aproximado de  $\pi$ .

Analisemos o octógono  $P$  circunscrito em um círculo de raio 3 *cm* abaixo.

Figura 23 – Aproximação da área do círculo por um octógono.



Fonte: Extraída de (SENTO-SÉ, 2016).

Pela Fórmula de Pick, temos:

$$A(P) = \frac{16}{2} + 21 - 1 = 28 \text{ u.a.}$$

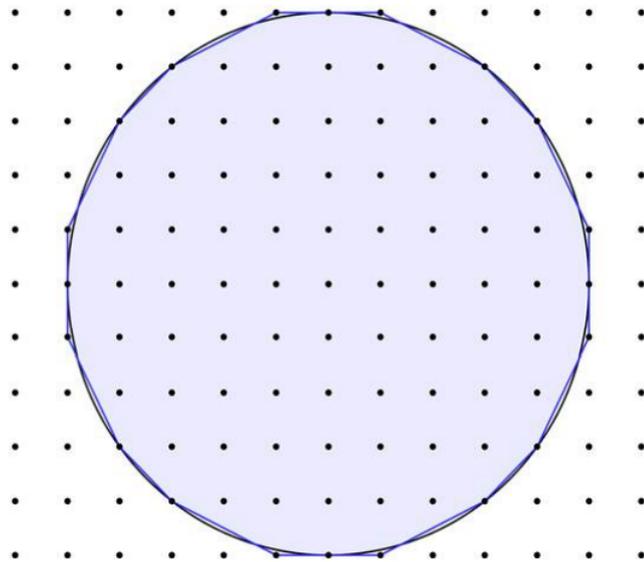
Então,

$$\pi = \frac{A(C)}{r^2} \approx \frac{A(P)}{r^2} = \frac{28}{3^2} = 3,1111\dots$$

que é uma boa aproximação.

Agora, vamos tentar com um polígono irregular  $R$  de 16 lados.

Figura 24 – Aproximando a área do círculo por um polígono irregular de 16 lados.



Fonte: Extraída de (SENTO-SÉ, 2016).

Observando o polígono  $R$ , percebemos que tem 20 pontos no bordo e 69 pontos internos. Já o círculo tem raio igual a 5 *u.c.*. Aplicando a Teorema de Pick para calcular a área do polígono  $R$ , tem-se:

$$A(P) = \frac{20}{2} + 69 - 1 = 78 \text{ u.a.}$$

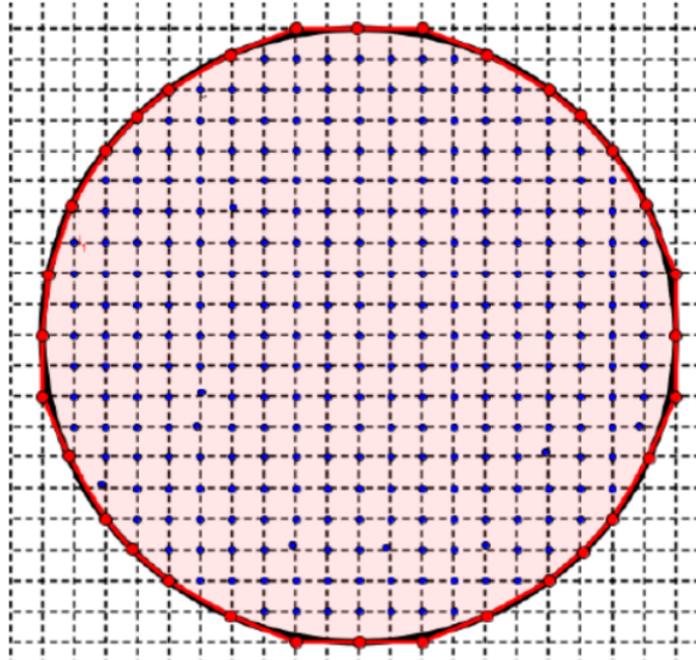
Assim,

$$\pi = \frac{A(C)}{r^2} \approx \frac{A(R)}{r^2} = \frac{78}{5^2} = 3,12$$

que é uma aproximação boa, até o momento, do número  $\pi$ .

Por fim, vamos tentar com um polígono irregular  $S$  de 32 lados para ver o que conseguimos.

Figura 25 – Área do círculo aproximada a um polígono irregular de 32 lados.



Fonte: Extraída de (SENTO-SÉ, 2016).

Para calcular a área cercada pela região poligonal de 32 lados, observe que sobre seu perímetro há 32 pontos e no seu interior, 299 pontos. Já o círculo apresenta raio igual a 10 *u.c.*. Pela Fórmula de Pick, temos:

$$A(P) = \frac{32}{2} + 299 - 1 = 314 \text{ u.a.}$$

Logo,

$$\pi = \frac{A(C)}{r^2} \approx \frac{A(S)}{r^2} = \frac{314}{10^2} = 3,14.$$

Poderíamos repetir esse procedimento tantas vezes quanto desejássemos, de forma que a área do polígono se aproximasse mais da área do círculo, ou seja, aumentasse a quantidade de pontos no bordo e no interior. Assim, quando a quantidade de pontos tender ao infinito, o valor de  $\pi$  tenderá ao seu valor real.

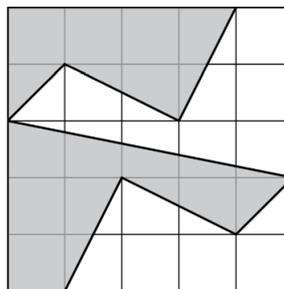
## 5 RESOLUÇÃO DE QUESTÕES USANDO O TEOREMA DE PICK

O intuito, neste trabalho acadêmico, é usar o método de contagem de pontos para comprovar a eficácia por meio de sua simplicidade e rapidez comparado ao método tradicional.

A primeira questão, aqui apresentada, será solucionada de duas formas: pelo método tradicional e, depois, usando o Teorema de Pick.

- **Questão 1. (OBMEP, 2011)** Na figura, o lado de cada quadradinho mede  $1\text{ cm}$ . Qual é a área da região cinza?
  - $10\text{ cm}^2$
  - $12,5\text{ cm}^2$
  - $14,5\text{ cm}^2$
  - $16\text{ cm}^2$
  - $18\text{ cm}^2$

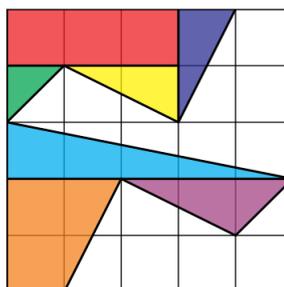
Figura 26 – Polígono complexo.



Fonte: Imagem reproduzida pelo autor da dissertação fiel à original.

**Solução sem o uso do Teorema de Pick:** A princípio, decompõe-se a figura em polígonos simples cujas fórmulas de suas áreas são conhecidas.

Figura 27 – Polígono complexo decomposto em polígonos simples.



Fonte: Elaboração própria.

Calcula-se, portanto, a área de cada polígono destacado:

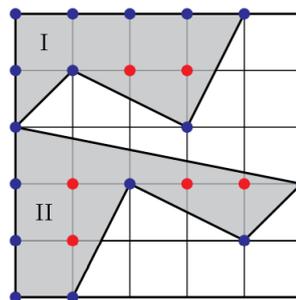
- Retângulo vermelho:  $A = b \cdot h = 3 \cdot 1 = 3$
- Triângulo verde:  $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$
- Triângulo amarelo:  $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$
- Triângulo azul escuro:  $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$
- Triângulo azul claro:  $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$
- Triângulo roxo:  $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$
- Trapézio laranja:  $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(2 + 1) \cdot 2}{2} = 3$

Somando-se todas essas áreas, tem-se:

$$A = 3 + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ cm}^2.$$

**Solução com o uso do Teorema de Pick:** Por outro lado, dividiremos a figura em dois polígonos simples, denominados I e II. No polígono I, há 9 pontos de fronteira e 2, interiores; enquanto que no polígono II há 8 pontos de fronteira e 4, interiores. Pelo Teorema de Pick, segue que:

Figura 28 – Polígono complexo decomposto em polígonos simples.



Fonte: Elaboração própria.

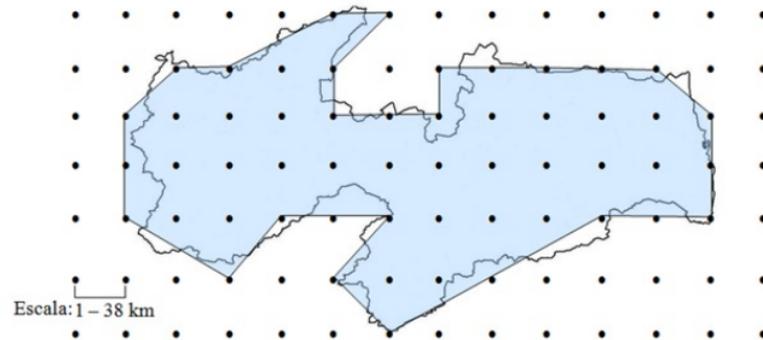
$$A_I = \frac{b}{2} + I - 1 = \frac{9}{2} + 2 - 1 = 5,5 \text{ cm}^2.$$

$$A_{II} = \frac{b}{2} + I - 1 = \frac{8}{2} + 4 - 1 = 7 \text{ cm}^2.$$

Dessa forma, a área da região cinza é igual a  $A_I + A_{II} = 5,5 + 7 = 12,5 \text{ cm}^2$ .

- **Questão 2 (Adaptada de Souza (2010))** Considere a rede construída sobre o mapa do estado da Paraíba, cuja menor distância entre dois pontos seja 1 cm e considere a escala indicada na figura seguinte. Usando a fórmula de Pick, calcule a área aproximada da Paraíba. (*Segundo o IBGE, o estado possui 56.439 km<sup>2</sup> de área.*)

Figura 29 – Mapa da Paraíba.



Fonte: Imagem extraída de (SOUZA, 2010)

**Solução:** Seja  $a$  a área do mapa no desenho e  $A$ , a área real. Nota-se que a figura acima possui 28 pontos de fronteira e 25 pontos internos. Então, pelo Teorema de Pick, tem-se:

$$a = \frac{b}{2} + I - 1$$

$$a = \frac{28}{2} + 25 - 1 = 38 \text{ u.a.}$$

A relação entre escala linear  $E$  e áreas de figuras planas é dada por:

$$E^2 = \frac{a}{A}$$

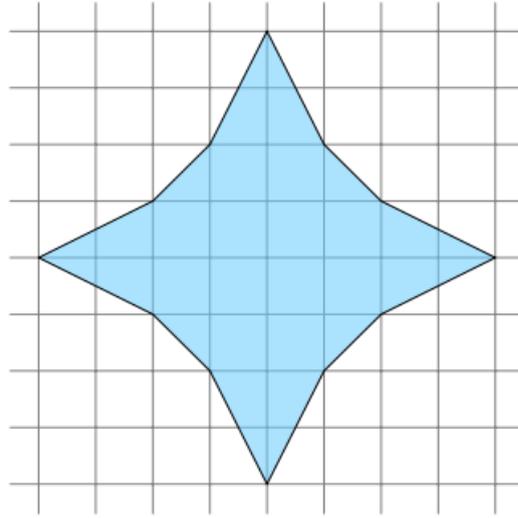
$$\left(\frac{1}{38}\right)^2 = \frac{38}{A}$$

$$A = 54872$$

Assim, o estado da Paraíba apresenta uma área de aproximadamente 54.872 km<sup>2</sup>.

- **Questão 3. (OBMEP, 2017)** A área da figura azul é igual a soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?
  - a) 12
  - b) 22
  - c) 32
  - d) 64
  - e) 100

Figura 30 – Polígono simples de 12 lados.



Fonte: Imagem reproduzida pelo autor da dissertação fiel à original.

**Solução:** Nota-se que o polígono possui 12 pontos de fronteira e 17 pontos internos.

Logo, pelo Teorema de Pick, temos:

$$A = \frac{b}{2} + I - 1 = \frac{12}{2} + 17 - 1 = 22 \text{ u.a.}$$

- **Questão 4. (IBMEC, 2013)** O mosaico da figura adiante foi desenhado em papel quadriculado  $1 \times 1$ . A razão entre a área da parte escura e a área da parte clara, na região compreendida pelo quadrado ABCD, é igual a:

a)  $\frac{1}{2}$

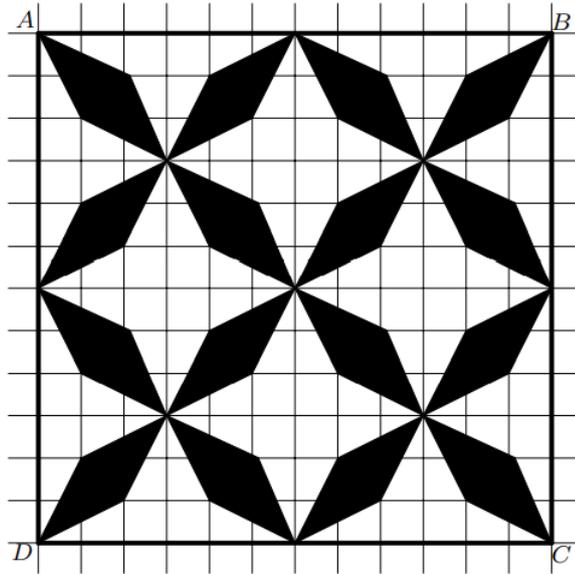
b)  $\frac{1}{3}$

c)  $\frac{3}{5}$

d)  $\frac{5}{7}$

e)  $\frac{5}{8}$

Figura 31 – Quadrado  $ABCD$  com simetria de losangos internos.



Fonte: Imagem reproduzida pelo autor da dissertação fiel à original.

**Solução:** Verifica-se que a parte escura é composta por 16 losangos congruentes e a parte clara corresponde à diferença entre a área do quadrado  $ABCD$  e a área total desses losangos. Cada losango possui 4 pontos de fronteira e 2 pontos internos. Portanto, a área de cada losango é dada por:

$$A = \frac{b}{2} + I - 1 = \frac{4}{2} + 2 - 1 = 3 \text{ u.a.}$$

Então, a parte escura tem área igual a  $16 \cdot 3 = 48 \text{ u.a.}$

A área do quadrado  $ABCD$  que possui 48 pontos de fronteira e 121 pontos internos, pelo Teorema de Pick, é:

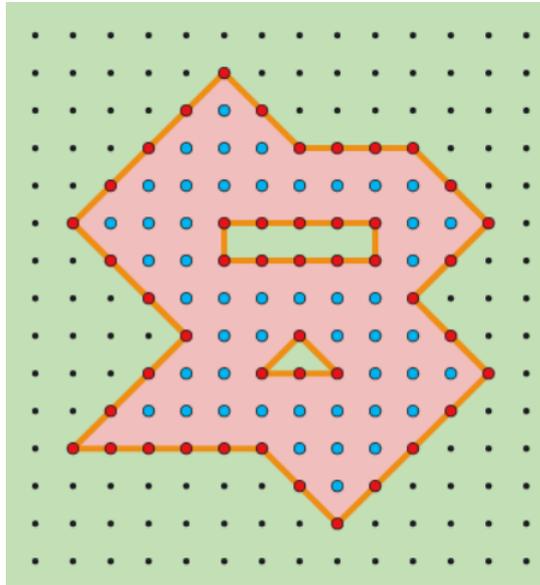
$$A = \frac{b}{2} + I - 1 = \frac{48}{2} + 121 - 1 = 144 \text{ u.a.}$$

Então, a área clara é igual a  $144 - 48 = 96 \text{ u.a.}$

Logo, a razão entre a área da parte escura e a área da parte clara é  $r = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}$ .

- **Questão 5.** Qual é a área da figura abaixo?

Figura 32 – Polígono reticulado simples com “buracos”.



Fonte: Imagem extraída de CMPU (2016).

**Solução:** Nota-se que o polígono possui 46 pontos de fronteira, 48 pontos internos e 2 buracos. Então, pelo Teorema de Pick, tem-se:

$$A = \frac{b}{2} + I + m - 1$$

$$A = \frac{46}{2} + 48 + 2 - 1 = 72 \text{ u.a.}$$

Comprovada a agilidade e a simplicidade na resolução de questões que envolvem áreas usando o Teorema de Pick, o que, por si só, já justifica a sua utilização. Afora, o seu uso substitui o emprego das fórmulas para o cálculo de áreas de figuras “compostas” planas.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aperfeiçoar a prática pedagógica é um dos fatores fundamentais para melhorar o processo de ensino-aprendizagem em nosso país. A maior preocupação ao desenvolver esta dissertação é contribuir com o trabalho do docente, por isso o tema escolhido está relacionado com o ensino da geometria, que ultimamente vem sendo abandonado, principalmente nas escolas públicas e, por outro lado, a maioria dos alunos sente bastante dificuldade de assimilar os conceitos e suas aplicações.

Portanto, neste trabalho, foi proposto uma nova abordagem do cálculo de áreas de polígonos simples, fazendo uso do Teorema de Pick, que é baseado, apenas, na contagem de pontos, o que o torna bastante interessante. Com isso, pretende-se enriquecer as aulas de Matemática, deixando de explorar a abordagem tradicional desse cálculo, aplicando uma fórmula simples capaz de determinar essa área de maneira ágil, expandindo para qualquer polígono, os tradicionais e aqueles que não possuam fórmulas específicas, mas que contenham vértices em coordenadas inteiras.

Assim, foram apresentados conceitos básicos e o histórico do matemático Georg Alexander Pick para dar subsídios ao entendimento do teorema. Para enfatizar ainda mais a importância do Teorema de Pick no estudo de áreas, foram apresentadas questões de provas, resolvidas com a superioridade do método.

No contexto educacional atual, faz-se necessário pensar em uma prática educativa atrativa, diferenciada, dinâmica e contextualizada, pois o grande desafio da educação matemática é disseminar saberes com inovação, de forma a contribuir para o desenvolvimento do educando de forma cognitiva e social. Acredita-se, então, que tais atividades atingiram seus objetivos, pois permitiram a aprendizagem matemática correlacionada com o cotidiano dos alunos, proporcionando ao professor e aos discentes uma aprendizagem significativa.

Diante do exposto, espera-se que este trabalho possa ser utilizado por professores de Matemática do Ensino Fundamental II e Médio, fazendo as devidas adaptações de acordo com o público alvo. Assim, o objetivo principal do programa PROFMAT será atingido: melhorar a qualidade do ensino público.

# REFERÊNCIAS

- CMPU. *Centro de Matemática Universidade do Porto*. 2016. Disponível em: <<https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick6.html#SECTION00080000000000000000>>. Acesso em: 17 de janeiro de 2022.
- CUNHA, P. A. d. et al. Cálculo de áreas através do teorema de pick para o 8º ano do ensino fundamental. Universidade Federal do Amazonas, 2019.
- FREITAS, C. V. et al. Uma proposta de ensino para a educação básica usando o teorema de pick. Universidade Federal do Maranhão, 2018.
- HENRIQUES, M. D. *Um estudo sobre a produção de significados de estudantes do ensino fundamental para área e perímetro*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011.
- IBMEC faculdades. *Processo Seletivo 2013.1*. 2013. Disponível em: <[https://www.academia.edu/9500888/PROVA\\_1\\_PROCESSO\\_SELETIVO\\_2013\\_1\\_FONTE\\_10\\_modelo\\_2](https://www.academia.edu/9500888/PROVA_1_PROCESSO_SELETIVO_2013_1_FONTE_10_modelo_2)>. Acesso em: 19 de janeiro de 2022.
- LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. 3. ed. Rio de Janeiro, 1991.
- MACHADO, R. M. *Minicurso explorando o geoplano*. 3. ed. Rio de Janeiro, 1991.
- OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. 2011. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1KsCrVE9cN1Mo64kHHDGzU0PWvPydSjLq/view>>. Acesso em: 18 de janeiro de 2022.
- OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. 2017. Disponível em: <<https://drive.google.com/file/d/1FLmHogjZxSMKA9HrQBHgPh7mUVGaeMVb/view>>. Acesso em: 18 de janeiro de 2022.
- SENTO-SÉ, F. C. L. O teorema de pick e algumas aplicações para os ensinos fundamental ii e médio. Instituto de Matemática. Departamento de Matemática., 2016.
- SILVA, L. da C. *Um Estudo sobre Polígonos em  $Z^2$* . Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba - UFPB, 2021.
- SOUZA, J. R. *Um Novo Olhar - Matemática*. 1. ed. [S.l.]: FTD, 2010. v. 2 e 3.
- WIKIPEDIA. *George Alexander Pick*. 2020. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg\\_Alexander\\_Pick](https://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Alexander_Pick)>. Acesso em: 19 de janeiro de 2022.