UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

CAMPUS CHAPECÓ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

PROFMAT

OZÉIAS TEIXEIRA DA ROSA

UMA DISCUSSÃO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE ISOMETRIA E SIMETRIA ATRAVÉS DA META ANÁLISE

CHAPECÓ
2022

OZÉIAS TEIXEIRA DA ROSA

UMA DISCUSSÃO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE ISOMETRIA E SIMETRIA ATRAVÉS DA META ANÁLISE

Dissertação apresentada ao Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação da Prof. Dra. Lucia Menoncini

CHAPECÓ
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Rodovia SC 484, Km 02
CEP: 89809-001
Caixa Postal 181
Bairro Fronteira Sul
Chapecó – SC
Brasil

Rosa, Ozéias Teixeira da
UMA DISCUSSÃO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE ISOMETRIA E SIMETRIA ATRAVÉS DA META ANÁLISE / Ozéias Teixeira da Rosa. -- 2022.
190 f.:il.

Orientadora: Doutora Lúcia Menoncini

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó, SC, 2022.

1. Isometria. 2. Simetria. 3. Transformações Geométricas. I. Menoncini, Lúcia, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.

OZÉIAS TEIXEIRA DA ROSA

UMA DISCUSSÃO SOBRE A RELAÇÃO ENTRE ISOMETRIA E SIMETRIA ATRAVÉS DA META ANÁLISE

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Lucia Menoncini

Aprovado em: 25/02/2022

BANCA EXAMINADORA

Lucia Menoncini

Prof. Dra. Lucia Menoncini – UFFS

Ana Maria Basei

Prof. Dra. Ana Maria Basei – UFFS

Milton

Prof. Dr. Milton Kist – UFFS

Chapecó/SC, Fevereiro 2022

AGRADECIMENTOS

Ao Deus de Richard Wurmbrand, Gustaf Daniel Högberg, Cláudio Silva e Silva, Kelem Gaspar, Reinhard Bonnke e Yiye Ávila. Este é o pai de Jesus Cristo, Deus de meus pais, a qual, tudo o que existe, veio a existência por intermédio dele, inclusive toda a vida, a sabedoria e a ciência.

Aos meus pais Luiz Teixeira da Rosa e Zélia Dutra da Rosa, por ter me dado total apoio e incentivo durante toda a minha trajetória acadêmica.

A minha orientadora Lucia Menoncini, pelas preciosas orientações, pela total liberdade que me deu para trabalhar e completo suporte burocrático, científico e acadêmico.

Aos professores que tive durante todo o tempo do curso, uma incrível equipe de professores com um altíssimo nível de conhecimento e total profissionalismo a qual tenho grande admiração e faço questão de citar todos eles: Milton Kist, Nilce Fátima Scheffer, Paulo Rafael Bosing, Pedro Augusto Pereira Borges, Rosane Rossato Binotto e Vitor José Petry.

A todos os meus colegas de aula a qual tive o imenso prazer de fazer amizade com todos eles, um grupo muito divertido, onde por diversos momentos compartilhamos nossas experiências profissionais e acadêmicas, além de muitos momentos descontraídos e inesquecíveis.

A todos os profissionais da CAPES, da Sociedade Brasileira de Matemática e da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS que dedicam parte de suas vidas, para que o programa PROFMAT possa continuar funcionando com organização e qualidade.

Ó profundidade da riqueza da sabedoria e do conhecimento de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos e inescrutáveis os seus caminhos […] pois dele, por ele e para ele são todas as coisas. A ele seja a glória para sempre! Amém.

Rom. 11: 33 – 36

RESUMO

O presente trabalho parte da problemática de que há divergências e confusões em torno dos conceitos de isometria e de simetria nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, em coleções de livros didáticos e em livros destinados principalmente a professores de matemática. Considerando essa problemática, foi realizada uma pesquisa meta-análise para investigar a questão: Qual a relação entre isometria e simetria de figuras planas? Para isso, uma amostra de onze obras foram analisadas. Sete delas, são os livros mais citados em uma amostra de 74 dissertações, teses ou artigos, que têm como assunto principal as isometrias e/ou simetrias. As outras quatro obras estão relacionadas ao contexto do Movimento da Matemática Moderna - MMM, pois foi nesse movimento que as isometrias e simetrias foram inseridas no currículo da Educação Básica. A fundamentação teórica se baseou na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval. Em especial, foram realizados tratamentos nos registros das línguas (língua natural e formal) para comparar definições e conceitos, e realizadas conversões entre representações nos registros algébrico e figural e vice-versa, para comparar e explicar conceitos e fazer demonstrações. A investigação da relação entre isometria e simetria envolveu discussões sobre a classificação das isometrias e simetrias, sobre a simetria e a figura simétrica, além de uma retomada dos assuntos de funções e estruturas algébricas, principalmente grupos diedrais e cíclicos. Os resultados das obras analisadas e o confronto dos dados mostram que não há divergências sobre o conceito de isometria, pois todos os autores concordam direta ou indiretamente que isometria é uma transformação geométrica que preserva distâncias. Contudo, o mesmo não ocorre com o conceito de simetria e as classificações das isometrias e simetrias, sendo que essas divergências implicaram em uma confusão sobre a relação entre isometria e simetria. Desta forma, a simetria se apoia no conceito de invariância, por este ser mais preciso formalmente, por estar intrínseco ao estudo de estruturas algébricas e pelo fato de que todas as outras interpretações sobre simetria que omitem ou ignoram o conceito de invariância, acabam gerando confusões.

Palavras-Chave: Translação; Rotação; Reflexão; Transformações Geométricas.

ABSTRACT

The actual assignment is based on the problem that there are divergences and confusions about the concepts of isometry and symmetry at *Parâmetros Curriculares Nacionais– PCNs at Base Nacional Comum Curricular – BNCC*, in textbook collections and in books intended mainly for mathematics teachers. Considering this problematic topic, it was conducted a meta-analysis research to investigate the issue: What is the relationship between isometry and symmetry of flat shapes? So, a sample of eleven works were analyzed. Seven of them are the most cited books in a sample of 74 dissertations, theses, or articles, which they have as main subject the isometry and/or symmetries. The other four works are related to the context of the New Mathematics Movement, because it was in this movement that the isometry and symmetries were inserted in the curriculum of Basic Education. The theoretical foundation was based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation of Records. In special, it was performed treatments in the language records (natural and formal language) to compare definitions and concepts, and conversions were performed between representations in algebraic and figural records and vice versa, to compare and explain concepts and have demonstrations. The investigation of the relationship between isometry and symmetry involved discussions on the classification of isometries and symmetries, about symmetry and symmetrical figure, in addition to a resumption of the subjects of algebraic functions and structures, mainly dihedral and cyclic groups. The results of the analyzed works and the comparison of the data show us that there are no divergences on the concept of isometry because all the authors agree directly or indirectly that isometry is a geometric transformation which preserves distances. However, the same does not occur with the concept of symmetry and the classifications of isometry and symmetries, so these divergences implied a confusion about the relationship between isometry and symmetry. Thus, the symmetry is based on the concept of invariance because it is more formally accurate, because it is intrinsic to the study of algebraic structures and because all other interpretations about symmetry that omit or ignore the concept of invariance end up generating confusion.

Keywords: Translation; Rotation; Reflection; Geometric Transformations

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

No âmbito da Educação Matemática, há diferentes interpretações sobre o conceito de simetria e da relação entre isometria e simetria. Em dois documentos orientadores nacionais, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 1997 e 1998) e na Base Nacional Comum – BNCC (BRASIL, 2020), não está claro qual dos conceitos de simetria estão se referindo e qual a relação entre isometria e simetria, além disso algumas edições dos Guias dos Livros Didáticos (BRASIL, 2006; 2007; 2009; 2016) apontam que há algumas confusões em livros didáticos em relação a simetria e a relação entre isometria e simetria. Levando em consideração que existem diferentes interpretações sobre simetria e da relação entre isometria e simetria, foi realizado uma pesquisa meta análise que investiga a seguinte questão: Qual a relação entre isometria e simetria de figuras planas? Como as isometrias e simetrias são conceitos amplos, que se estendem aos mais diversos objetos matemáticos e para várias áreas de estudo da física, química, biologia, geociências, filosofia, entre outros (ROHDE, 1982 e WEYL, 1997), foi restringido o estudo para as figuras planas.

Para investigar a questão norteadora é selecionada e analisada uma amostra de onze documentos escritos, sendo dez livros e um guia curricular. Depois de tais análises procura-se dar resposta à questão a partir da comparação e do cruzamento dos dados. Assim, o procedimento metodológico adotado, segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), permite classificar essa pesquisa como bibliográfica e como meta-análise. Já, a fundamentação teórica está baseada na Teoria dos Registros de Representações Semióticas, de Raymond Duval, a qual foi importante para a análise dos dados coletados. Em especial, são usados tratamentos e conversões para as comparações de definições e conceitos. Além disso, é explorada a conversão da representação destes conceitos no registro das línguas para a representação no registro das figuras ou vice-versa, indo ao encontro do que Duval propõe para a apreensão conceitual.

O Capítulo 2 justifica as declarações feitas no primeiro parágrafo dessa introdução, de que há diferentes interpretações sobre simetria e sobre a relação entre isometria e simetria e a declaração que não está claro, qual isometria e simetria são abordadas nos PCNs e BNCC. Como as isometrias e simetrias foram inseridas no currículo da Educação Básica, na época do Movimento da Matemática Moderna – MMM, um movimento pela renovação do currículo da Educação Básica que ocorreu a partir da década de 1960, o Capítulo 3 discorre sobre esse movimento, com foco nos autores e obras que falam sobre isometria e simetria. O Capítulo 4 é referente à Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval, onde são abordadas algumas concepções filosóficas e semióticas de Duval em relação à matemática, bem como a importância das diferentes linguagens para a aprendizagem conceitual. O Capítulo 5 traz a metodologia da pesquisa, detalhando como foi composta a amostra e como foi investigada a questão norteadora.

Como os autores das onze obras da amostra frequentemente abordam isometria e simetria em termos de funções e/ou estruturas algébricas, tornou-se necessário um capítulo que retomasse, mesmo que brevemente, alguns aspectos desses dois temas, sendo esse o assunto do Capítulo 6. O Capítulo 7 analisa as onze obras de acordo com os pressupostos metodológicos. O Capítulo 8 faz o cruzamento das obras analisadas e procura responder à questão norteadora, e o Capítulo 9 apresenta as considerações finais.

2. PROBLEMÁTICA

O presente capítulo justifica o questionamento em torno dos termos isometria e simetria nos PCNs, na BNCC, em livros didáticos e em livros direcionados a professores de matemática, especialmente da Educação Básica. A crítica aos PCNs está fundamentada na análise que os autores dessa dissertação realizaram neste documento, a qual está disponível Na subseção 2.1.1, e é reforçada por Pasquini e Bortolossi (2015) que também criticam o documento quanto ao conceito de simetria, conforme pode ser visto Na subseção 2.1.2. A crítica à BNCC está fundamentada na análise que os autores dessa dissertação realizaram nesse documento, de acordo com subseção 2.2.1, e também é reforçada por Ribeiro, Gibim e Alves (2021) que criticam o documento no que tange aos conceitos de isometria e simetria, conforme subseção 2.2.2.

Embora os autores dessa dissertação não avaliaram livros didáticos, a afirmativa de que há algumas confusões em torno dos conceitos de isometria e simetria nesses materiais está fundamentada nos Guias de Livros Didáticos. Esses documentos fazem parte das publicações do Programa Nacional do Livro Didático – PNDL, órgão do governo federal. Os membros do programa avaliam as coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNDL e publicam avaliações, para que tanto os autores de livros didáticos possam melhorar suas obras, quanto para professores e alunos ficarem a par das discussões feitas em torno de conceitos matemáticos que fazem parte do currículo da Educação Básica. Foram encontradas algumas discussões em torno dos conceitos de isometria e simetria em quatro Guias de Livros Didáticos (BRASIL, 2006; 2007; 2009; 2016). A seção 2.3 traz essas discussões.

Embora Pasquini e Bortolossi (2015) e Ribeiro, Gibim e Alves (2021) critiquem os documentos orientadores, eles abordam os conceitos de isometria e simetria de forma diferente, em certos aspectos. Outras obras destinadas a professores da Educação Básica, como Barbosa (1993), Brito e Carvalho (2009) e Murari e Barbosa (2012) divergem, em partes, de Pasquini e Bortolossi (2015) e de Ribeiro, Gibim e Alves (2021), formando assim uma variedade de concepções em torno desses termos. A seção 2.4 procura mostrar os diferentes conceitos de isometria e simetria desses autores.

2.1 ISOMETRIA E SIMETRIA NOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCNS)

2.1.1. O conceito de isometria e simetria nos PCNs

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são um conjunto de obras organizadas pelo Ministério da Educação (MEC) do Brasil, publicadas no final da década de 1990 e início da década de 2000. Têm como finalidade ampliar o debate sobre o currículo, a formação de professores, a qualidade do ensino, construir referenciais que orientem a prática dos professores, explicitar o papel de cada disciplina, orientar a produção de materiais didáticos e orientar e garantir a coerência dos investimentos públicos no sistema educacional (BRASIL, 1997). Foi publicado um conjunto de obras voltado às séries iniciais do 1º grau, atual Ensino Fundamental I (BRASIL, 1997), às séries finais do 1º grau, atual Ensino Fundamental II (BRASIL, 1998), e para o 2º grau[1], atual Ensino Médio. Nas duas obras destinadas ao 2º grau não há nenhuma discussão sobre isometria e simetria. Portanto, são analisados somente os PCNs do 1º grau.

O Quadro 1 apresenta todos os parágrafos dos PCNs, na íntegra, que contêm pelo menos um desses termos: isometria, simetria ou transformação isométrica. Na primeira coluna do quadro (à esquerda) aparecem os algarismos romanos I ou II. O algarismo I indica que o parágrafo está nos PCNs das séries iniciais e o algarismo II indica que o parágrafo está no PCN das séries finais. Os algarismos 1, 2, 3, … que vêm em seguida dos algarismos romanos, indicam a ordem que os parágrafos aparecem ao longo dos PCNs. A partir desse quadro são analisados os conceitos de isometria e simetria, bem como suas classificações e relações.

Quadro 1 :Ocorrência dos termos simetria, isometria e transformações isométricas nos PCNs

Cód.	Parágrafos dos PCNs
I.1	Identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções. (BRASIL, 1997, p. 52).
I.2	Identificação da simetria em figuras tridimensionais. (BRASIL, 1997, p. 56).
I.3	Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria etc. (BRASIL, 1997, p. 56).
I.4	Sensibilidade para observar simetrias e outras características das formas geométricas, na natureza, nas artes, nas edificações. (BRASIL, 1997, p. 58).
I.5	Espera-se que o aluno identifique características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, percebendo semelhanças e diferenças entre elas (superfícies planas e

[1]Os documentos relacionados ao 2º grau são chamados de Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM e Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+.

	arredondadas, formas das faces, simetrias) ... (BRASIL, 1997, p. 60).
I.6	Um trabalho constante de observação e construção das formas é que levará o aluno a perceber semelhanças e diferenças entre elas. Para tanto, diferentes atividades podem ser realizadas: compor e decompor figuras, perceber a simetria como característica de algumas figuras e não de outras etc. (BRASIL, 1997, p. 78).
II.1	Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p. 51).
II.2	Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de uma outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (homotetias). (BRASIL, 1998, p. 86).
II.3	Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados. (BRASIL, 1998, p. 73).
II.4	O estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central), identidade. Desse modo as transformações que conservam propriedades métricas podem servir de apoio não apenas para o desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas, mas também para a compreensão das propriedades destas. (BRASIL, 1998, p. 124).
II.5	À primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia a dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão. Em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. No corpo humano pode-se observar (aproximadamente) um plano de simetria. Assim, também a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis. (BRASIL, 1998, p. 124).
II.6	As simetrias centrais e de rotação também surgem em diversas situações: desenhos de flores, logotipos de empresas, desenhos de peças mecânicas que giram, copos, pratos, bordados etc. Os exemplos de translação também são fáceis de encontrar: grades de janelas, cercas de jardins, frisos decorativos em paredes, azulejos decorados etc. (BRASIL, 1998, p. 124).
II.7	É importante que os alunos percebam que as transformações foram incorporadas como linguagem básica nos programas de computação gráfica. Assim, ao manipular esses

	programas, o usuário faz simetrias de todos os tipos, ampliações e reduções. (BRASIL, 1998, p. 125).
II.8	O estudo de temas geométricos possibilita ainda a exploração de interessantes aspectos históricos. Como sabemos, a Geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, que se desenvolveu em função de necessidades humanas. As civilizações da época pré-histórica utilizavam regras para medir comprimentos, superfícies e volumes. Seus desenhos continham figuras geométricas em que a simetria era uma das características predominantes. (BRASIL, 1998, p. 127).
II.9	É importante que eles descubram, pela experimentação, que as chances de cada resultado ser igual 50% devem-se à simetria da moeda e sua homogeneidade (moeda honesta). (BRASIL, 1998, p. 137).
II.10	Ao se realizarem experiências para calcular probabilidades, é interessante utilizar materiais manipulativos que permitam explorar a propriedade da simetria (dados, moedas), como também os que não possuem essa simetria (roletas com áreas desiguais para os números). (BRASIL, 1998, p. 137).

Fonte: Adaptado de Brasil (1997 e 1998).

Analisando o Quadro 1 é possível identificar os significados de simetria, isometria e transformações isométricas nos PCNs de matemática do Ensino Fundamental. Os parágrafos I.2, I.4, I.5, I.6, II.3, II.5, II.6, II.8 e II.10 sinalizam que a simetria é algo que pode ser identificado em certas figuras geométricas (planas ou espaciais), sendo uma característica ou uma propriedade que algumas figuras possuem e outras não. Essas figuras podem ser encontradas na natureza (I.4 e II.6) e nas mais diversas construções do homem (I.4 e II.6), desde a pré-história (II.8). Deve-se destacar também que, em estudos probabilísticos envolvendo um objeto, a simetria é determinante, pois se o objeto for simétrico tem-se um espaço amostral equiprovável, o que não acontece se o objeto for assimétrico (II.9 e II.10). Essas informações, no entanto, dizem algumas características superficiais da simetria, mas nada é dito sobre em que consistem essas características e propriedades.

Nos parágrafos I.3 e I.1, respectivamente, a simetria pode ser entendida como um critério ou um meio pelo qual pode-se chegar a certas características das figuras geométricas. Já em II.5 e II.7, a simetria aparece como uma transformação, mas não há informação que transformação é essa, nem mesmo o que é uma transformação. No parágrafo II.5 o significado de simetria parece ser duplo. O primeiro sentido é de transformação, ao afirmar que: “À primeira vista as transformações podem parecer um assunto que não tem relação com o dia a dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano” (BRASIL, 1998, p. 124). O segundo sentido é de característica, pois cita o corpo humano, desenhos de aeronaves, edifícios e imóveis como exemplos de formas que têm simetria. Em II.7 diz que alguém, ao manipular programas de computação gráfica, “faz simetrias de todos os tipos, ampliações e reduções.” (BRASIL, 1998, p. 125). Aqui, as simetrias aparecem como transformações, mas os autores dos PCNs não explicam como são essas simetrias que o usuário faz no computador.

Em relação à isometria, nos parágrafos II.1 e II.2 ela aparece como uma transformação geométrica que transforma uma figura em outra figura congruente, ou seja, se a imagem da figura A por uma isometria for a figura A' , então $A \equiv A'$ (A é congruente a A'). A isometria aparece ao lado da homotetia, como uma transformação geométrica para verificar congruência, enquanto a homotetia é uma transformação geométrica usada para verificar semelhança. No parágrafo II.4 aparece o termo transformações isométricas fazendo menção às principais isometrias, dentre elas, a reflexão numa reta (ou simetria axial) e reflexão num ponto (ou simetria central). Esse parágrafo também indica que as isometrias podem servir de apoio para compreensão das propriedades das figuras.

Após a análise dos parágrafos supracitados, que versam sobre isometria, simetria e transformações isométricas, observa-se que não está explícita a relação entre isometria e as propriedades das figuras, sendo que o texto deixa em aberto a possibilidade para que a isometria seja também característica de figuras, assim como é a simetria.

Ainda em relação ao Quadro 1, o parágrafo II.4 sinaliza à classificação das isometrias quando afirma a existência de vários tipos de isometrias, sendo as principais: 1) Reflexão em torno de uma reta ou simetria axial, 2) Reflexão em torno de um ponto ou simetria central, 3) Translação, 4) Rotação e 5) Identidade.

Em relação à classificação das simetrias, pode-se encontrar algumas informações no parágrafo II.5, nas afirmativas: “[...] as simetrias estão muito presentes no cotidiano”, “Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão” (BRASIL, 1998, p. 124). Tais planos são considerados, no caso de figuras tridimensionais, enquanto eixos de simetria, em figuras bidimensionais. Porém, em ambas as frases, não está claro se é o mesmo tipo de simetria e qual é o nome dela(s). Esses eixos de simetria também aparecem em I.3 e II.3 como características de figuras, mas sem relacionar a um tipo de simetria. Os outros tipos de simetria estão no parágrafo II.6. Vale destacar que o parágrafo II.6 vem em seguida do parágrafo II.5 nos PCNs, por isso é a continuação dos exemplos de simetria. Sendo assim, tem-se três outras simetrias que são: simetria central, simetria de rotação e de translação. Isso parece indicar que simetria de translação e simetria central são tipos de simetria e isometria, simultaneamente.

Tomando por base as informações contidas nos PCNs, identificar a relação entre simetria e isometria torna-se uma tarefa nada simples, pelos seguintes motivos:

1) Não estão claros os significados de simetria e de isometria, se são características, propriedades ou transformações geométricas. De fato, atribui-se à simetria uma ênfase maior às características e propriedades, enquanto isometria está mais atrelada às transformações geométricas. Contudo, em alguns momentos, simetria e isometria aparecem tanto como característica ou propriedade de figuras e de objetos (a exemplo da translação e da simetria central que são simultaneamente simetrias e isometrias), quanto transformação geométrica.

2) A classificação das simetrias e isometrias também apresenta fragilidades. O termo simetria aparece em dois tipos de isometria: simetria axial e simetria central. Além disso, a simetria central e a translação são tipos específicos, tanto de simetria quanto de isometria.

Diante dessa análise, algumas questões emergem: Simetria e isometria fazem parte do mesmo tipo de transformação geométrica? Quais as diferenças entre simetria e isometria enquanto transformações geométricas? Simetria e isometria são sinônimas? Por que o termo simetria aparece duas vezes como tipo específico de isometria? Qual é a explicação para que simetria central e translação sejam simetria e isometria simultaneamente? Estas são algumas questões que inquietaram os autores desta dissertação e podem ter levado os autores Pasquini e Bortolossi (2015) a afirmarem que os termos e os conceitos em torno de isometria e simetria estão confusos nos PCNs.

2.1.2 Pasquini e Bortolossi (2015) e a crítica aos PCNs

Regina Célia G. Pasquini é doutora em Educação Matemática e professora na Universidade Estadual de Londrina. Humberto José Bortolossi é doutor em matemática e professor na Universidade Federal Fluminense. Ambos são autores do livro: Simetria – História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar (PASQUINI e BORTOLOSSI, 2015), publicado em 2015, nono volume da Série História da Matemática para o Ensino, organizada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática.

Pasquini e Bortolossi (2015) analisam qual conceito de simetria é abordado em três documentos orientadores: nos PCNs; nas Diretrizes Curriculares do Paraná, estado onde atua a professora Regina Pasquini; e nos Currículos Mínimos, um documento orientador do estado do Rio de Janeiro onde atua o professor Humberto Bortolossi. Quanto aos PCNs, concluem:

> … sentimos com o dever de explicitar algumas de nossas conclusões sobre a abordagem que os PCN dão para simetria […] o texto não apresenta qual é a definição de simetria que se referem, ou, qual abordagem os professores deveriam usar para contemplar tal conteúdo. (PASQUINI e BORTOLOSSI, 2015, p. 89).

As palavras dos autores vão em direção ao que já foi apresentado Na subseção 2.1.1, reafirmando que não está explícito nos PCNs sobre qual simetria se referem.

Quanto aos documentos orientadores do Paraná e do Rio de Janeiro, os autores chegam à seguinte conclusão: "Encerrando nossa visita aos documentos, podemos afirmar que, para todos esses documentos, têm-se as mesmas conclusões produzidas a partir da análise dos PCN. Existe muita confusão sobre a palavra *simetria*." (PASQUINI e BORTOLOSSI, 2015, p. 92. Grifo do autor). Nessa conclusão, eles acrescentam que o termo simetria está confuso tanto nos PCNs, quanto nos documentos orientadores dos estados do Paraná e do Rio de Janeiro. Eles concluem que esses documentos foram diretamente influenciados pelos PCNs e replicaram a confusão em torno do termo simetria.

2.2 ISOMETRIA E SIMETRIA NA BNCC

2.2.1 Investigando a BNCC

De acordo com a Resolução CNE/CP nº 2, de 22 de dezembro de 2017, a BNCC é um "documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais como direito das crianças, jovens e adultos no âmbito da Educação Básica" (BRASIL, 2017, p. 04). O artigo 2º da Resolução, na mesma página, diz "As aprendizagens essenciais são definidas como conhecimentos, habilidades, atitudes, valores e a capacidade de os mobilizar, articular e integrar, expressando-se em competências". Ou seja, a BNCC normatiza as aprendizagens essenciais que a Educação Básica deve contemplar, sendo essas aprendizagens organizadas em termos de competências e habilidades[2].

A BNCC é organizada da seguinte forma. Em cada uma das três etapas de ensino (Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio), há um texto argumentativo discorrendo sobre aspectos gerais dos objetos de conhecimentos, habilidades e competências. Em seguida, há alguns quadros que organizam e relacionam os objetos de conhecimento com

[2]Um estudo mais detalhado sobre competências e habilidades e como implementar na prática, podem ser encontrados nos Currículos Para os Anos Finais do Ensino Fundamental, publicado pelo Centro de Estudos e Pesquisas em Educação, Cultura e Ação Comunitária, (CENPEC, 2015) e nas obras do sociólogo suíço Philippe Perrenoud, entre elas, Perrenoud (1999, 2000 e 2001).

suas devidas competências e habilidades. Por exemplo, isometria e simetria são objetos de conhecimento, e a elas estão relacionadas algumas habilidades e competências.

Nos textos argumentativos da BNCC, que precedem os quadros que relacionam os objetos de conhecimento com as competências e habilidades, há somente dois comentários sobre simetria, que estão em um mesmo parágrafo, que são:

> É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. [...] O estudo das simetrias deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL,2018, p. 271-272.).

Esses comentários, que estão na seção do Ensino Fundamental II, pouco dizem sobre o significado de simetria, mas pode-se inferir que a simetria é a principal transformação geométrica no estudo da geometria. Nos textos referentes ao Ensino Fundamental I e Ensino Médio, os termos simetria e isometria só aparecem nos quadros, estando ausentes nos textos argumentativos.

Um ponto a destacar, sobre como a BNCC aborda simetria e isometria, é que algumas nomenclaturas mudam em relação aos PCNs. Os termos reflexão em torno de uma reta, simetria axial, reflexão em torno de um ponto e simetria central, presentes nos PCNs, estão ausentes na BNCC, sinalizando uma descontinuidade das discussões sobre simetria e isometria nesses dois documentos, o que dificulta a análise neste último documento.

Em relação aos quadros que estão na BNCC, simetria ou isometria aparecem nos quadros do quarto, sétimo e oitavo ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. O Quadro 2 apresenta todas as referências de simetria ou isometria que há nesses quadros da BNCC. A primeira coluna (à esquerda) indica o ano escolar ou a modalidade de ensino que essas referências se encontram, e a segunda coluna, os objetos de conhecimento relacionados à simetria ou isometria. Já a terceira coluna mostra as habilidades relacionadas aos objetos de conhecimento da segunda coluna. As listas de objetos de conhecimento e habilidades do Ensino Médio estão organizadas de maneira diferente do Ensino Fundamental, não estão separadas por ano escolar e os objetos de conhecimento estão agrupados em um conjunto maior. Por exemplo, as transformações isométricas estão dentro do grupo de geometria e formas, por esse motivo na segunda coluna relativa ao Ensino Médio não há descrição do objeto de conhecimento.

Quadro 2: Ocorrências dos termos simetria, isometria ou transformação geométrica na BNCC

	Objetos de Conhecimento	Habilidades
4º ano	Simetria de reflexão	(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-las na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria. (BRASIL,2018, p. 293).
7º ano	Simetrias de translação, rotação e reflexão	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (BRASIL, 2020, p. 309).
8º ano	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica. (BRASIL, 2020, p. 314).
Ensino Médio	--------------	(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2020, p. 533 e 545).

Fonte: Adaptado de Brasil (2018).

Considerando o Quadro 2, uma conclusão possível seria: Simetria de translação, simetria de rotação e simetria de reflexão são tipos de simetria, enquanto translação, rotação e reflexão são tipos de transformações isométricas. O silogismo que pode levar a essa conclusão é o seguinte: inicialmente a simetria foi identificada como a principal transformação geométrica que deve ser estudada no âmbito da geometria. Sendo assim, as transformações geométricas, que são objetos de conhecimento do oitavo ano, poderiam ser identificadas como simetrias. Desse modo, as simetrias de translação, rotação e reflexão seriam tipos de simetria que são também objetos de conhecimento do quarto e sétimo ano, consequentemente as habilidades relacionadas a esses anos estariam se referindo aos tipos de simetria. Na habilidade relacionada ao Ensino Médio o termo simetria está ausente, aparecendo unicamente os termos translação, rotação e reflexão, os quais estão associados às transformações isométricas. No entanto, todo esse silogismo é colocado em xeque quando é observado o trecho do texto da habilidade relacionada ao oitavo ano “transformações geométricas (translação, reflexão e rotação)”, pois aqui os termos translação, rotação e reflexão passam a ser transformações geométricas. Assim, não é possível identificar de forma clara e adequada as definições de simetria e isometria, nem mesmo o que são transformações geométricas e transformações isométricas, a classificação e as relações entre estes conceitos na BNCC.

2.2.2 Ribeiro, Gibim e Alves (2021) e as críticas à BNCC

O livro Reflexão e Simetria (RIBEIRO, GIBIM e ALVES, 2021) é o primeiro volume da Coleção CIEspMat Professor. Os autores são Miguel Ribeiro, professor na Unicamp, Gabriela Gibim e Carla Alves, ambas doutoras em Educação Matemática. Esses três autores fazem parte do Grupo de Pesquisa e Formação denominado CIEspMat[3], composto por professores e pesquisadores que atuam na formação continuada de professores de matemática. O referido livro foi publicado em 2021 e seu foco é contribuir para o desenvolvimento do conhecimento dos professores que ensinam matemática na Educação Básica no que se refere à reflexão (tipo de isometria, como será visto em 2.4.1) e à simetria, além de discutir tais conceitos, que para os autores, geralmente se encontram de maneira equivocada em certas obras, inclusive na BNCC.

O título do capítulo sete do livro Reflexão e Simetria é “O que nos diz a BNCC e o que nos cumpre conhecer para efetuar uma discussão matematicamente adequada” (RIBEIRO, GIBIM e ALVES, 2021, p. 125). Após os autores explicitarem o que é simetria e reflexão e proporem atividades para o Ensino Fundamental I e II nos seis capítulos antecedentes, no sétimo capítulo eles verificam o que a BNCC diz sobre esses dois conceitos. Eles analisam que a simetria, ora aparece como sinônimo de reflexão, ora aparece como sinônimo de transformação. Mas segundo esses autores, isso não deveria ocorrer, pois simetria não é sinônimo de nenhum desses conceitos, como será apresentado na subseção 2.4.1. Eles ainda acrescentam:

> Assumir esta, e outras, duplicidade(s) de entendimentos de um mesmo termo/conceito matemático está na base de muitas das dificuldades dos alunos em entender a matemática como uma rede de conceitos interligados, pois, pela forma como ela se encontra apresentada – nos documentos oficiais e nos materiais didáticos que os têm como referência – efetivamente essas conexões são difíceis de promover e de se entenderem. Essa falta de relações (conexões) entre diferentes elementos matemáticos torna difícil, se não mesmo impossível, que os alunos possam desenvolver um

[3]Sites do grupo de pesquisa CIEspMat, disponível em: <https://ciespmat.wixsite.com/ciespmat> Acesso em 12 out. 2021 e disponível em: <https://ciespmat.com.br/>. Acesso em 12 out. 2021.

> entendimento e conhecimento conceitual e acabem assumindo a regra pela regra. (RIBEIRO, GIBIM e ALVES, 2021, p. 128).

Desse modo, Ribeiro, Gibim e Alves (2021) observam que há uma duplicidade em torno de diversos termos referente ao tema simetria e isometria, e que ela pode afetar a aprendizagem dos alunos. Portanto, essa duplicidade pode estar diretamente ligada à dificuldade em reconhecer como são classificados os tipos de isometria e simetria na BNCC, bem como verificar quais são as relações entre eles.

2.3 ISOMETRIA E SIMETRIA EM GUIAS DO LIVRO DIDÁTICO

Os Guias do Livro Didático foram brevemente apresentados no início desse capítulo como documentos que contemplam avaliações de coleções de livros didáticos, trazendo discussões sobre conceitos matemáticos. Foram encontradas discussões sobre isometria e simetria em Brasil (2006; 2007; 2009; 2016), sendo um resumo destas discussões apresentado a seguir.

No Guia do Livro Didático 2007 (BRASIL, 2006), direcionado aos livros de matemática do Ensino Fundamental I, os avaliadores chamam a atenção que a simetria é abordada muitas vezes, de forma ambígua, sem diferenciar o que é o simétrico de uma figura e o que é uma figura simétrica.

No Guia do Livro Didático 2008 (BRASIL, 2007), direcionado aos livros de matemática do Ensino Fundamental II, entre as recomendações sobre isometria e simetria, encontra-se:

> A discussão acima, relativa ao conceito de simetria, evidencia a importância do estudo das transformações geométricas, em especial as isometrias no plano […] apenas algumas obras dedicam-se a esse tema, e o fazem de forma apropriada. No entanto, mesmo nesses casos, a necessária articulação dessas transformações com o conceito de simetria, nos termos mencionados acima, não é feita. (BRASIL, 2007, p. 48).

Quando os avaliadores falam em “discussão acima”, estão se referindo a uma discussão feita nos dois parágrafos anteriores, em torno do eixo de simetria. Nesses parágrafos, são mencionados que alguns autores usam indistintamente o termo ‘eixo de simetria’ tanto para figuras planas como espaciais, sendo que o correto, segundo Brasil (2007), é usar o termo ‘plano de simetria’ para figuras espaciais e ‘eixo de simetria’ para figuras planas. A citação inicia dizendo que o estudo de simetrias evidencia a importância de estudar isometrias, isso mostra como esses dois conceitos estão indissociáveis. Mas é acrescentado que “apenas algumas obras dedicam-se a esse tema” e mesmos essas obras, não a relacionam com simetria. Ou seja, apesar de simetria e isometria serem indissociáveis, os livros didáticos analisados, com poucas exceções, estudam somente simetria e os poucos que estudam isometria não a relacionam com simetria.

No Guia do Livro Didático 2010 (BRASIL, 2009), direcionado ao Ensino Fundamental I, um estudo quase que exclusivo em simetrias também é percebido em algumas coleções. Após analisada uma das coleções, os professores avaliadores afirmam: “O estudo de simetria é repetitivo e consiste, quase sempre, na observação de simetrias axiais” (BRASIL, 2009, p. 178). Persistindo assim, o problema visto em Brasil (2007).

No Guia do Livro Didático 2017 (BRASIL, 2016), direcionado ao Ensino Fundamental II, encontra-se o seguinte comentário:

> ...em várias delas **[coleções de livros didáticos]** há ambiguidade entre os conceitos “figura simétrica” e “simétrica de uma figura”. Isso, em parte, é consequência de não ser bem estabelecida, nos livros, a relação entre as isometrias e as simetrias correspondentes. (BRASIL, 2016, p. 38, grifo Nosso.).

Desse modo, comparando Brasil (2006) e Brasil (2016), percebe-se que são dez anos que separam uma publicação da outra e o problema de confundir uma figura simétrica e a simétrica de uma figura, persiste. Mas, em Brasil (2016) é apontada uma das causas desse problema, que é o não esclarecimento da relação entre isometria e simetria, e essa falta de esclarecimento já havia sido destacada em Brasil (2007).

2.4 O CONCEITO DE ISOMETRIA PARA OUTROS AUTORES

Embora Pasquini e Bortolossi (2015) e Ribeiro, Gibim e Alves (2021) critiquem os documentos orientadores nacionais, eles não atribuem o mesmo conceito para simetria, como será apresentado posteriormente. Além desses autores, Barbosa (1993), Murari e Barbosa (2012) e Brito e Carvalho (2009) também se divergem na conceitualização de isometria e simetria. Estas três obras não foram citadas na seção anterior, pois não fazem nenhum comentário aos documentos orientadores nacionais, mas são importantes para tencionar o debate. Estes autores são brevemente apresentados, bem como suas concepções em relação à isometria e simetria.

Ruy Madsen Barbosa (1931 – 2017) é mencionado em Valente et al. (2011) como um dos professores que ministravam cursos para professores na época do Movimento da Matemática Moderna, ao lado de Osvaldo Sangiorgi que será estudado mais adiante. Ruy M.

Barbosa foi um doutor em matemática que publicou, nos últimos anos de vida, diversas obras de matemática recreativa. Uma de suas obras mais notáveis é Descobrindo Padrões em Mosaicos (BARBOSA, 1993) que de acordo com uma resenha publicada na revista Bolema, é pioneira sobre a matemática dos mosaicos (MURARI, 1997).

Na década de 2010, Barbosa e seus colaboradores publicaram uma coleção de livros para professores de matemática da Educação Básica, com o título Conexões e Educação Matemática, composta por cinco volumes. Um desses volumes, que entra nesse debate, é o volume três intitulado Belas formas em caleidoscópios, caleidosciclos e caleidostrótons (MURARI e BARBOSA, 2012). O capítulo desse livro que fala sobre simetria foi escrito por Claudemir Murari.

A última obra a ser apresentada é o livro História da Matemática em Atividades Didáticas (BRITO et al. 2009). A obra é dividida em três capítulos sendo que o primeiro capítulo, intitulado Utilizando a história no ensino da geometria, trata sobre isometria e simetria e as autoras são Arlete de Jesus Brito, professora na Universidade Estadual de São Paulo e Dione Lucchesi de Carvalho (BRITO e CARVALHO, 2009).

2.4.1 Comparando conceitos

Para Ribeiro, Gibim e Alves (2021), não se pode confundir transformações geométricas com simetrias. Transformações geométricas são operações que levam uma figura F a uma figura F'. Já a simetria é uma característica que algumas figuras têm e outras não. Para saber se uma figura é simétrica ou não, os autores explicam da seguinte maneira:

> ... se em uma determinada figura for possível o traçado de um eixo (linha reta), tal que, a figura original fique dividida em duas partes (metades) congruentes de modo que possam ser sobrepostas apenas por "dobragem" ou reflexão, então dizemos que essa figura é uma figura simétrica segundo um determinado eixo, ou que apresenta simetria axial. (RIBEIRO, GIBIM, ALVES, 2021, p. 42).

Observando a citação acima, e como no decorrer da obra os autores dão exemplos de figuras que têm mais de um eixo de simetria, pode-se dizer que, para eles, uma figura é simétrica se possuir pelo menos um eixo de simetria. Um eixo de simetria é uma reta r que divide uma figura F em duas partes congruentes A e B de modo que, se F for dobrada considerando a reta r, A e B ficam sobrepostas. Outra forma que os autores explicam é: se por uma figura F for traçada uma reta r que divida F em duas partes A e B, e A seja a reflexão de B em torno de r e vice-versa, então F é simétrica.

Ao comparar transformações geométricas com simetria, Ribeiro, Gibim e Alves (2021, p. 9) dizem:

> [...] com frequência estes conceitos **[reflexão e simetria]** são entendidos e trabalhados como sinônimos, o que, como veremos, não deveria ocorrer porque apesar de serem noções e ideias correlatas não coincidem. A Reflexão, por exemplo, forma parte das Transformações Geométricas [...] Já a Simetria não é uma dessas transformações. **[**grifo nosso**].**

Os autores deixam explícito que simetria não é uma transformação geométrica, mas que a reflexão é uma transformação geométrica. Na página 10, Ribeiro, Gibim e Alves (2021) deixam explícito que a transformação geométrica a qual a reflexão pertence é a isometria. Sendo assim, para os autores, em muitas obras a reflexão e a simetria são trabalhadas como sinônimo, o que não deveria ocorrer, pois a reflexão é uma isometria, que por sua vez é uma transformação geométrica, e a simetria não é uma transformação geométrica e consequentemente não é uma isometria.

Para Pasquini e Bortolossi (2015) uma isometria é uma função que preserva distâncias, isto é, “quaisquer que sejam os pontos **P** e **Q** em $\mathbb{R}^2$, a distância de **P** até **Q** (no domínio de **F**) é sempre igual a distância de **F**(**P**) a **F**(**Q**) (no contradomínio de **F**)” (PASQUINI e BORTOLOSSI, 2015, p. 35-6, grifo do autor). Essa definição implica que a imagem de uma figura F por uma isometria, é congruente ao domínio, ou seja, se F' é a imagem de F por uma isometria, então $F \equiv F'$. Esse resultado é abordado implicitamente em Pasquini e Bortolossi (2015), quando os autores apresentam exemplos e animações no GeoGebra. No entanto, esse resultado é demonstrado em Ledergerber-Ruoff (1982) como será visto no capítulo sete. Pasquini e Bortolossi (2015) dizem que, deve haver duas condições para se ter uma simetria. A primeira condição é que ela seja uma isometria e a segunda é que a isometria deixe a figura invariante, ou seja, a simetria é uma isometria que deixa a figura invariante. Desse modo, o conceito de invariância de uma figura é fundamental nessa definição, o conceito de invariância pode ser explicado da seguinte maneira: Diz-se que uma figura F permanece invariante por uma função f, e seja, $f(F) = F'$ se $\boldsymbol{F}$ **e** $\boldsymbol{F'}$ **são congruentes e ficam exatamente no mesmo lugar** ou ainda, $\boldsymbol{F}$ **e** $\boldsymbol{F'}$ **coincidem**. Por exemplo: Considere um triângulo T com vértices nos pontos A, B e C e uma função f. Se $f(A) = B$, $f(B) = C$ e $f(C) = A$ e o triângulo de vértices $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$ é a imagem do triângulo T por f, então, diz-se que, a função f deixou o triângulo

T invariante. Em casos de estudo de figuras usando coordenadas, pode-se dizer que a invariância mantém as coordenadas da figura. Por exemplo: Considere um triângulo T com vértices nos pontos $(-4, 0)$, $(4,0)$ e $(0,7)$, e f uma função. Considere ainda que a função f leve os vértices de T nos seguintes pontos. $(-4,0) \to (4,0)$, $(4, 0) \to (-4,0)$ e $(0,7) \to (0,7)$, e que esses três pontos, imagens de f sejam os vértices do triângulo T', tal que $f(T) = T'$. Neste caso, a função f deixou o triângulo T invariânte. Esse conceito será explicado novamente na subseção 2.4.3 em linguagem figural.

Para Pasquini e Bortolossi (2015), o conceito de simetria usado na física, química e biologia se apoia na ideia de invariância. Em relação ao conceito de invariância nos PCNs, os autores afirmam que “Os PCN relacionam isometrias com congruência (o que é válido), mas não dão o passo seguinte que é dado um objeto geométrico **X**, verificar quais isometrias **F** deixam **X** invariante: **F(X) = X.**” (PASQUINI e BORTOLOSSI, 2015, p. 89, grifo do autor). Eles observam que os PCNs atendem o primeiro critério de simetria, mas não o segundo, que é da invariância. Em suma, a simetria é uma transformação geométrica, assim como a isometria. No entanto, a simetria é um tipo específico de isometria.

Para Barbosa (1993), simetria é uma transformação geométrica que transforma uma figura F em F', sendo que F e F' podem estar no mesmo lugar ou não. Já a isometria é uma característica da simetria, a característica que a simetria tem de conservar as medidas e consequentemente, os ângulos. Em relação às figuras, Barbosa (1993, p. 39) as distingue do seguinte modo: “há figuras que apresentam *estrutura simétrica* e figuras que apresentam *estrutura assimétrica*” (grifo do autor). Embora este autor não defina o que são figuras que possuem estrutura simétrica ou assimétrica, mostra alguns exemplos de polígonos que possuem eixos de simetria e diz que tais polígonos possuem estruturas simétricas. Também apresenta polígonos que não têm eixo de simetria e diz que eles possuem estruturas assimétricas. Isso leva a entender que se uma figura plana possui pelo menos um eixo de simetria, então ela possui estrutura simétrica, mas se não possui tal eixo, então ela possui estrutura assimétrica. Se for desse modo, as estruturas simétricas e assimétricas coincidem com que Ribeiro, Gibim e Alves (2021) chamam de simetria, ou seja, a característica que algumas figuras têm de ser simétrica. No entanto, Barbosa (1993) não faz nenhuma relação entre transformações geométricas e figuras que possuem estruturas simétricas ou assimétricas.

Em Murari e Barbosa (2012), a relação entre isometria e simetria está confusa. Inicialmente tem-se que “o conceito de simetria é relacionado ao atributo de uma forma (ou configuração) que, sob transformações mantém-se constante, alterando-se apenas a posição dos seus elementos constitutivos.” (MURARI e BARBOSA, 2012, p. 15). De forma simplificada, isso quer dizer que o atributo se mantém constante, mas a posição se altera. Se tais atributos de uma figura forem os lados e os ângulos, então o que permanece inalterado são os lados e ângulos e consequentemente, o conceito de simetria coincidirá com o conceito de preservar distâncias, conceito que define a isometria de Pasquini e Bortolossi (2015) e de Ribeiro, Gibim e Alves (2021). No entanto, Murari e Barbosa (2012, p. 15) colocam em dúvidas essa interpretação, quando dizem: “A simetria se relaciona mais a semelhanças que a igualdades, considerando-se que, à luz da geometria euclidiana, muitas imagens simétricas não se sobrepõem ponto por ponto”. Eles não explicam o que querem dizer com essa frase, que para os autores dessa dissertação, é confusa. Além disso, se a simetria se relaciona mais a semelhanças, então a simetria não necessariamente preservará distâncias, pois vale lembrar que a razão de semelhança que admite valor diferente de um, não preserva distâncias.

Outro ponto de interesse para essa discussão é a definição de Murari e Barbosa (2012, p. 16) para simetria axial:

> Em termos matemáticos, podemos dizer que cada ponto P dessa figura terá o seu simétrico s(P). Por outro lado, também se pode afirmar que o simétrico de um ponto simétrico é o próprio ponto, ou seja, s (s(P)) = P. Assim, partindo da ideia de simetria, temos que a figura resulta do agrupamento de pontos em pares simétricos (P, Q). Considerando que em uma figura simétrica todo ponto tem o seu simétrico, temos que P = s(Q) e Q = s(P).

Observando a obra dos autores, quando eles iniciam essa citação dizendo “Em termos matemáticos, podemos dizer…”, é porque anteriormente estavam explicando a simetria axial em termos não formais. A definição que eles apresentam coincide com a noção de invariância. No entanto, os autores se contradizem na página 18, quando ao darem um exemplo de simetria axial, a invariância não ocorre. Eles apresentam um triângulo ABC e sua imagem $A''B''C''$, por uma simetria axial, de modo que ABC e $A''B''C''$ não estão no mesmo lugar, não coincidem. Assim, a simetria axial não tornou o triângulo ABC invariante.

Outro problema em Murari e Barbosa (2012) é a afirmação de que as figuras que têm simetria central, têm também eixos de simetria. O que é falso, pois há figuras que têm simetria central e não têm eixos de simetria, conforme será mostrado na subseção 2.4.3 (Figura 3). Essa afirmação aparece após dizerem, na página 16, que há vários tipos de simetria, mas que abordarão somente a simetria axial e a simetria central, esta última, explicada dessa maneira:

> A simetria central é também chamada de rotacional. Nesse caso temos um ponto fixo, chamado de centro de simetria, em relação ao qual um ponto, objeto ou parte de um objeto pode ser girado, de maneira que, por um determinado número de vezes, esses

> elementos coincidem um com o outro. Por conseguinte, temos várias retas que passam pelo centro de simetria da figura dividindo-a em duas imagens espelhadas. (MURARI e BARBOSA, 2012, p. 17).

Nesse trecho, inicialmente explicam o que é simetria central ou rotacional, em seguida, ao dizerem que "Por conseguinte, temos várias retas que passam pelo centro de simetria da figura dividindo-a em duas imagens espelhadas", essas retas assumem o caráter de eixo de simetria, e desse modo, após explicarem o que é simetria central, afirmam que as figuras têm eixo de simetria. Outro trecho, confirma essa concepção, quando dizem "uma figura geométrica plana somente será considerada simétrica se puder ser dividida por uma reta em duas partes, as quais, ao se sobreporem por dobragem, deverão coincidir perfeitamente" (MURARI e BARBOSA, 2012, p. 17). Desse modo, esses autores se aproximam de Ribeiro, Gibim e Alves (2021) ao afirmarem que uma figura só será simétrica se tiver pelo menos um eixo de simetria. Porém, a diferença é que Ribeiro, Gibim e Alves (2021) não falam em simetria central ou de rotação.

Por outro lado, Brito e Carvalho (2009) se aproximam mais de Barbosa (1993), pois abordam a simetria como uma transformação geométrica. A translação, rotação e reflexão são para essas autoras, casos específicos de simetria e não diferenciam aquelas que tornam ou não uma figura invariante. Ou seja, assim como em Barbosa (1993), a simetria pode ou não deixar uma figura invariante, mas Barbosa (1993) atribui um nome específico para as figuras que se tornam invariantes por uma simetria, e Brito e Carvalho (2009) não. Em relação às isometrias, as autoras afirmam "As transformações que possuem tal característica são denominadas de **isometrias**. Assim, dizemos que as transformações por simetria são isometrias no plano" (BRITO e CARVALHO, 2009, p. 51. grifo do autor). A característica que as autoras estão se referindo é o de preservar distâncias. Logo, a isometria é uma característica da simetria, a característica de preservar distâncias.

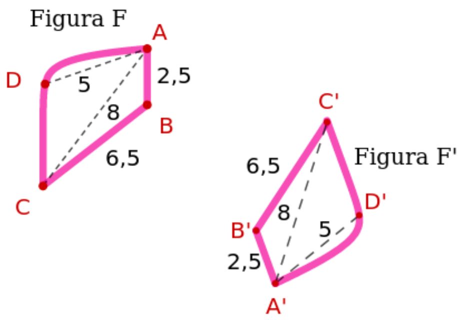
2.4.3 Conceitos de isometria e simetria em linguagem figural

O objetivo dessa subseção é de explorar as múltiplas representações semióticas dos conceitos vistos Na subseção anterior: conceito de preservar distâncias, de invariância, de eixo de simetria, e de simetria de rotação, a partir da conversão entre o registro das línguas e o registro das figuras ou vice-versa. Também, quando possível, busca-se comparar as diferentes posições dos autores estudados, sobre tais conceitos.

(a) O conceito de preservar distâncias

A primeira conversão a ser explorada é relativa ao conceito de preservar distâncias. Para isso, parte-se do registro figural (Figura 1) para o registro das línguas.

Figura 1: O conceito de preservar distâncias



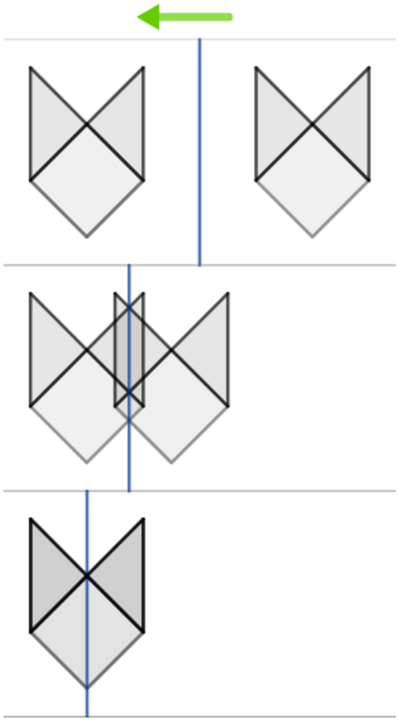
Fonte: Os Autores

A Figura 1 mostra uma figura F e uma figura F'. Considerando todos os pontos da figura F como o domínio de uma função e a figura F' a imagem, implica que, todos os pontos de F têm um correspondente em F'. Os correspondentes dos pontos A, B, C, D de F são respectivamente os pontos A', B', C', D' de F'. Esta figura também mostra algumas distâncias entre pontos. Nota-se que $d(A, D) = 5$ (essa é a notação usada para representar distância entre dois pontos) e $d(A', D') = 5$, ou seja, $d(A, D) = d(A', D')$. Além disso, tem-se que, $d(A, C) = d(A', C') = 8$, $d(A, B) = d(A', B') = 2{,}5$ e $d(B, C) = d(B', C') = 6{,}5$. Generalizando, para quaisquer dois pontos $P, Q \in F$, tem-se que $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$. Isso significa que a função f, que transformou F em F', é uma função que preserva distâncias.

(b) O conceito de invariância

A Figura 2 explora o conceito de invariância, também partindo do registro das figuras para o registro das línguas.

Figura 2: Conceito de invariância



Fonte: Os Autores

A Figura 2 procura ilustrar o conceito de invariância com um exemplo. Ela está dividida em três momentos (de cima para baixo) e cada um deles mostra a reflexão de uma figura em torno de uma reta, que está na cor azul. Considere que a reta está se movendo para a esquerda enquanto a reflexão se mantém. Considere ainda, que a Figura 2 procura registrar três momentos distintos desse movimento. Nos dois primeiros momentos, as figuras são distintas, no último momento elas coincidem. Desse modo, considerando o último momento, diz-se que elas se tornaram invariantes por uma transformação geométrica.

(c) Há figuras invariantes por simetria central ou rotação, que não têm eixos de simetria

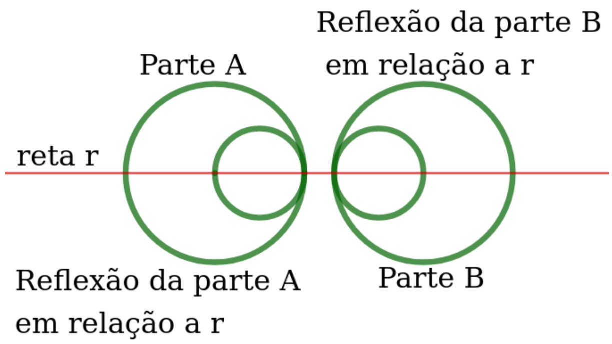
Foi visto que Murari e Barbosa (2012) e Ribeiro, Gibim e Alves (2021) consideram que para uma figura ser simétrica é necessário que tenha pelo menos um eixo de simetria. E Barbosa (1993) parece concordar com isso ao mostrar somente exemplos de figuras simétricas que têm eixo de simetria. Esse conceito de simetria não é compatível com o conceito de Pasquini e Bortolossi (2015), pois existem algumas figuras que ficam invariantes por uma isometria diferente da identidade, e que não têm eixos de simetria. Por exemplo, se a Figura 3 for rotacionada por um ângulo de 180^o em torno do seu centro, ela se tornará invariante, no entanto, essa figura não tem eixo de simetria. Esse exemplo também serve para provar que é falso afirmar que toda a figura que tem simetria de rotação, tem eixo de simetria. Desse modo, para Ribeiro, Gibim e Alves (2021) e possivelmente para Barbosa (1993) a Figura 3 não tem simetria. Para Pasquini e Bortolossi (2015) essa figura tem simetria de rotação. Para Murari e Barbosa (2012) ela tem simetria, pois fica invariante por uma rotação, ao mesmo tempo, não tem simetria porque não tem eixo de simetria.

Figura 3: Figura invariante por rotação, que não tem eixo de simetria

Fonte: Os Autores

Para ilustrar visualmente que a Figura 3 não tem simetria, uma opção é traçar uma reta horizontal r pelo centro da figura original e chamar uma parte de A e outra de B. Ao fazer a reflexão da parte A e depois a reflexão da parte B pode-se observar que a imagem obtida não é a mesma da Figura 3. A Figura 4 mostra essas reflexões.

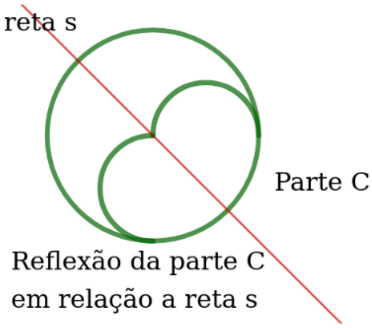
Figura 4: A reta r não é um eixo de simetria



Fonte: Os Autores

Pode-se tentar ainda, traçar uma reta s na diagonal, também passando pelo centro da Figura 3 e dividindo a figura em duas partes. Pode-se fazer a reflexão de uma dessas partes em torno da reta s, conforme Figura 5, para verificar se a reta s é um eixo de simetria.

Figura 5: Verificando que a reta s, também não é um eixo de simetria



Fonte: Os Autores

De acordo com a imagem da Figura 5, a reflexão da parte C em torno da reta s gera uma nova figura, diferente da figura original (Figura 3).

3. ISOMETRIA E SIMETRIA NO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA - MMM

Embora as simetrias estejam presentes na arte de diversos povos da Antiguidade, como aponta Weyl (1997), é somente no final do século XVIII que elas começam a ser escritas em termos matemáticos com Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) (HON e GOLDSTEIN, 2008). Já a inserção da simetria e isometria no currículo da Educação Básica é atribuída ao Programa Erlanger, de Felix Klein em 1872, segundo Boyer (1974) e Eves (2011). No Brasil, Luz (2007, p. 39) afirma que “As transformações geométricas foram inseridas nos programas de ensino no período na reforma da Matemática Moderna”. Desse modo, o presente capítulo pretende apresentar alguns aspectos históricos do Movimento da Matemática Moderna – MMM, com foco nos professores que escreveram obras sobre isometrias e simetrias, dois conceitos que estão no âmbito das transformações geométricas.

O termo moderno, geralmente está associado a uma suposta fase de superação. Na história, a Idade Moderna é um período histórico (1453 – 1789) marcado pela superação do feudalismo, que deu lugar ao progresso comercial e início do capitalismo (FIGUEIRA, 2005; SAES e SAES, 2017). A ciência moderna é a superação de uma ciência mítica e especulativa, para uma ciência quantitativa e experimental (GAULT, 2015). A arte moderna é marcada pela liberdade de expressão e por tecnologias, que pouco tempo antes desse movimento, não existiam (MENDES, 2019).

Em relação à Matemática Moderna, pode ser entendida provisoriamente como a matemática que está relacionada, de alguma forma, com as descobertas matemáticas que aconteceram no século XIX e que transformaram a matemática radicalmente[4] (BOYER, 1978; EVES, 2004). Já o MMM, é um movimento específico, impulsionado por financiamentos de fundações norte-americanas que ocorreram depois da II Guerra Mundial, principalmente nas décadas de 1960 e 1970.

Graças à Sociedade Brasileira de História da Matemática – SBHMat[5], que atualmente conta com oito grupos de pesquisas de diversos estados brasileiros[6], muito se tem conhecido e

[4] Na seção 3.4, ela terá uma explicação mais precisa, onde será discorrido, sobre algumas de suas principais características.

[5]O site dessa sociedade, está disponível em <https://www.sbhmat.org/comissao> acesso em 27 nov. 2021.

[6]GPHM – Grupo de Pesquisas em História da Matemática, GHEMAT – Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil, GHOEM – Grupo História Oral e Educação Matemática – GHOEM. GPEHM – Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática. GHMEM – Grupo de Estudos em História da Matemática e Educação Matemática, GEHEM – Grupo de Estudo e Pesquisas em História e Ensino de Matemática. GHMat

pesquisado sobre o MMM no Brasil. É basicamente com o farto material produzido por esses grupos, que esse capítulo é escrito. Como o material é vasto, é focado principalmente nas origens e características do movimento, bem como os dados concernentes às transformações geométricas.

3.1 ORIGENS NORTE-AMERICANAS DO MMM E O INVESTIMENTO NO BRASIL

Ao terminar a II Guerra Mundial em 1945, quase toda a Europa e parte da Ásia estavam arrasadas em todos os seus setores. Os Estados Unidos surgem então, como a maior potência econômica mundial e começam a investir bilhões de dólares na recuperação desses países, que poucos anos depois, tornaram-se grandes potências econômicas, como é o caso da Alemanha, França e Japão. Entre os programas desenvolvidos, o que mais ganhou destaque foi o Plano Marshall. Através dele, bilhões de dólares chegaram aos países emergentes (HOBSBAWN, 1995; FIGUEIRA, 2005; SAES e SAES, 2017; MASSIERE e LIMA, 2018).

O Plano Marshall não foi o único promovido pelos Estados Unidos. Nessa mesma época desencadeou-se um movimento pela reforma do currículo de matemática que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna – MMM. Os Estados Unidos incentivaram-no e diversas fundações norte-americanas subsidiaram os investimentos, algumas delas são: *Ford Foundation, NSF – National Science Foundation, Rockefeller Foundation* e *Pan American Union.* Os objetivos do governo dos Estados Unidos, representado pela OEA – Organização dos Estados Americanos, eram múltiplos: 1) Atender os anseios dos professores de matemática das Américas e da Europa de renovar o currículo da matemática, tanto na educação básica, quanto superior, pois desde 1800 havia iniciativas por parte de grupos de professores em diferentes países da Europa e América, com essa finalidade. Destacam-se, o Programa Erlangen na Alemanha, a escola Nicolas Bourbaki, inicialmente na França, e a Reforma Francisco Campos no Brasil[7]. 2) A guerra havia transformado a ciência e a tecnologia, diversas descobertas e inovações ocorreram. Os Estados Unidos queriam consolidar e garantir esses

---

– Grupo de Pesquisas em História da Matemática e Saberes Tradicionais. GPHMAT – Grupo de Pesquisa em História da Matemática (UFTM).

[7]Esse programa teve origem em uma iniciativa de Euclides Roxo, que fez uma reforma no currículo de matemática no Colégio Pedro II no Rio de Janeiro. Esse projeto ganhou força e tornou-se lei pelo decreto nº 19890, de 18 de abril de 1931, da Reforma Francisco Campos. Mais detalhes podem ser vistos em Miorim (1998). É importante destacar, que esse não foi o único movimento nessa direção, o I Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática realizado em 1955 em Salvador BA, não foi organizado por professores estrangeiros, nem mesmo esteve em pauta o MMM, foi uma iniciativa autenticamente brasileira. Tudo isso mostra que já havia uma grande mobilização no Brasil por uma reforma curricular. (ALVES e SILVEIRA, 2016).

avanços, que acreditavam estar ligado ao avanço da matemática. 3) Superar a defasagem escolar provocada pela guerra, tanto pelo fato dela ter interrompido as atividades de diversas escolas e universidades, quanto pelo fato de que, os conteúdos ensinados antes da guerra, precisavam ser atualizados devido às mudanças tecnológicas, científicas, políticas e econômicas ocorridas em escala mundial. 4) Os Estados Unidos duelavam com a URSS – União das Repúblicas Socialistas Soviéticas na Guerra Fria. Ambos procuravam estender sua área de influência econômica e militar, investiam grandes somas em pesquisas científicas e/ou tecnológicas visando atingir o pioneirismo nas mais diversas áreas, entre elas, a exploração espacial, conhecida como Corrida Espacial. Desse modo, em relação ao MMM, todos os países sob a área de influência dos Estados Unidos receberam investimentos para promovê-lo e o Brasil foi um deles. (HAYDEN, 1981; KILPATRICK, 1996; MIORIM, 1998; FIGUEIRA, 2005; GUIMARÃES, 2007; LUZ 2007; OLIVEIRA et al, 2011; ESQUINCALHA, 2012; GARNICA e SOUZA, 2012; ALVES e SILVEIRA, 2016; SAES e SAES, 2017; YGUA, 2020).

Investimentos norte-americanos no Brasil, na área da matemática, podem ser visto desde pelo menos o ano de 1949. Alguns matemáticos estrangeiros foram trazidos ao Brasil para realizarem palestras e cursos, como é o caso de George Mostow, um dos maiores matemáticos norte-americanos da época, e alguns professores brasileiros ganharam bolsas de estudo e foram para os Estados Unidos fazer doutorado (LIMA, 2010).

Dentre os matemáticos que foram estudar nos Estados Unidos, destacam-se inicialmente, Leopoldo Nachbin (1922 – 1993) e Maurício Peixoto (1921 – 2019), que ganharam uma bolsa da *Rockefeller Foundation* e fizeram seus doutorados no período de 1949 a 1951. Ao voltarem ao Brasil, fundaram o Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA em 1952. Em 1953 Leopoldo e Maurício indicaram Elon Lages Lima (1929 - 2017) à *Rockefeller Foundation* o qual também ganhou bolsa de estudos, foi para Chicago onde fez mestrado e doutorado no período de 1953 a 1958. Manfredo Perdigão do Carmo (1928 - 2018) também ganhou uma bolsa e obteve seu doutorado na Califórnia em 1963 (PEIXOTO, 2001; SIEGMUND-SCHULTZE, 2001; SILVA, 2004; RIOS, 2008; LIMA, 2010; D'AMBRÓSIO, 2011; ROQUE, 2018; ANPMat, s.d.).

Esses quatro matemáticos tiveram grande destaque. Maurício Peixoto foi presidente da SBM, CNPq e Academia Brasileira de Ciências. Leopoldo Nachbin se destacou internacionalmente por suas pesquisas em análise funcional, topologia e análise harmônica. Elon Lages Lima foi pesquisador na área de Topologia Diferencial, obtendo resultados pioneiros sobre campos de vetores comutativos. Destacou-se também pelas suas dezenas de livros direcionados a professores da Educação Básica, além de diversas palestras e cursos para professores do Ensino Básico. Foi Doutor Honoris Causa de duas universidades federais brasileira[8] e uma peruana[9] e Professor Honoris Causa de cinco universidades[10]. Manfredo do Carmo foi um geômetra reconhecido internacionalmente, com publicações sobre geometria diferencial, com grande prestígio nos Estados Unidos (PEIXOTO, 2001; SIEGMUND-SCHULTZE, 2001; SILVA, 2004; RIOS, 2008; LIMA, 2010; ROQUE, 2018; LIMA, 2019; FREIRE e QUEIROZ, 2020; QUEIROZ, 2020; ANPMat, s.d; LIMA, s. d.).

De acordo com D'Ambrósio (2011, p. 92) "o IMPA é reconhecido como o mais importante centro de matemática da América Latina e, possivelmente, do Hemisfério Sul, e um dos principais em todo o mundo", acrescenta ainda que "A História Contemporânea da pesquisa matemática no Brasil gira em torno do IMPA [...] todas as principais atividades desses grupos **[de pesquisadores matemáticos]** revelam vínculo e suporte do IMPA" (p. 92. **(**grifo nosso**)**. Sendo assim, os investimentos norte-americanos, já no final da década de 1940, deram grande impulso ao avanço da matemática no Brasil. No entanto, nessa época, o MMM ainda não havia ganhado forma e os investimentos das décadas de 1940 e 1950 são tímidos diante dos investimentos da década de 1960.

O auge do MMM no Brasil foi a década de 1960. A partir do primeiro ano dessa década, professores brasileiros ganharam bolsa de fundações norte-americanas para irem aos Estados Unidos fazer cursos, estágios, participar de palestras sobre o MMM. Matemáticos e professores de matemática, de diversos países da Europa e dos Estados Unidos, vieram ao Brasil para dar cursos e ministrar palestras. Obras estrangeiras chegaram ao Brasil no idioma inglês e algumas foram traduzidas para o português. Congressos internacionais, interamericanos e brasileiros também surgiram nessa época para debater sobre esse movimento. Grupos de estudo e de pesquisas, organizados por professores brasileiros de matemática, entusiastas desse movimento, surgiram nessa década. Livros didáticos foram escritos levando em consideração os pressupostos desse movimento. Cursos de Matemática Moderna e propagandas desse movimento foram transmitidos via rádio. Jornais, principalmente da região de São Paulo, produziam matérias sobre a novidade. Cursos e propaganda da Matemática Moderna foram transmitidos na televisão, principalmente pela TV Cultura. Comentar todos esses movimentos

[8]Universidade Federal do Amazonas – UFAM e Universidade Federal do Alagoas – UFAL. Informação encontrada na contracapa de Lima (2019).

[9]Universidad Nacional de Ingenieria del Perú. Informação encontrada na contracapa de Lima (2019).

[10]Universidade Federal do Ceará – UFC, Universidade Federal da Bahia – UFBA, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Universidade de Brasília – UNB e Potificia Universidad Católica del Perú. Informação encontrada na contracapa de Lima (2019).

aos detalhes, foge ao escopo desse trabalho[11]. Por isso, depois da seção a seguir, sobre os pressupostos teóricos do MMM, são apresentados alguns autores e suas obras relacionadas ao ensino de transformações geométricas.

3.2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS DO MMM

Até agora foi discorrido alguns aspectos históricos do MMM, tanto sobre suas origens quanto seu desenrolar no Brasil, mas pouco foi dito sobre o que é a Matemática Moderna e o MMM, tema dessa seção.

A partir do início do século XIX, a matemática deu um salto conceitual em todos os seus ramos, houve diversas descobertas que a transformaram. Eves (2004, p. 526) chega a dizer que: “Conforme se entra no século XIX, o número de matemáticos competentes e produtivos torna-se tão grande que somos obrigados a selecionar apenas umas poucas das estrelas de maior brilho no deslumbrante firmamento matemático”. Ou seja, o historiador Howard Eves se vê obrigado a selecionar apenas alguns poucos matemáticos, em seu livro, pois no século XIX houve uma grande quantidade de matemáticos pioneiros em diversas áreas da matemática, a qual se tornava deslumbrante a partir de então.

Antes do século XIX, só era conhecida uma geometria e uma álgebra e era quase impensável a existência de outra geometria ou álgebra. Até mesmo a filosofia da época, dominada por Emmanuel Kant (1724 – 1804), sustentava que sem a geometria existente não era possível um raciocínio sobre o espaço. A álgebra por sua vez, era apenas uma generalização dos números reais. A expressão matemática, $a \times b$ por exemplo, só poderia significar a multiplicação de dois números reais quaisquer (BOYER, 1978; EVES, 2011).

O postulado das paralelas de Euclides, que desde alguns séculos antes de Cristo intrigava os matemáticos, só veio a ter solução no século XIX. Muitos matemáticos se recusavam a aceitar que a proposição de Euclides fosse um postulado, acreditavam que poderia ser demonstrada, e desse modo, se tornaria um teorema. Nos séculos anteriores a XIX o máximo que se conseguiu sobre o quinto postulado de Euclides foi reescrevê-lo de forma mais sucinta “Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada” (DOLCE e POMPEO, 2005, p.

[11]Porém, duas referências iniciais sobre esse tema são os livros: O Movimento da Matemática Moderna: História de uma Revolução Curricular (Oliveira et al, 2011) e Osvaldo Sangiorgi: Um professor moderno, (VALENTE et al, 2008). Um estudo mais detalhado pode ser encontrado na vasta quantidade de dissertações, teses e artigos, dos pesquisadores dos oito grupos de pesquisa da história da matemática ligados à Sociedade Brasileira de História da Matemática – SBHMat.

64) e verificaram que esse postulado não era necessário para desenvolver a geometria de Euclides. Isso foi o suficiente para os matemáticos do século XIX resolverem o problema. Eles não demonstraram o suposto teorema com as proposições de Euclides, mas criaram inicialmente dois tipos de geometrias diferentes, não sem muita resistência da comunidade acadêmica da época e certo espanto dos que a descobriram, a saber, o húngaro Janos Bolyai (1802 – 1860) e o russo Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793 – 1856). (EVES, 2011).

Essas outras geometrias ficaram conhecidas como geometrias não-euclidianas e a geometria que foi inicialmente desenvolvida por Euclides, alguns séculos antes de Cristo, foi nomeada de geometria euclidiana. Logo que as geometrias de Bolyai e Lobachevsky foram aceitas e compreendidas, abriu-se caminho para se inventar outras geometrias em espaços totalmente abstratos, que Eves (2011, p. 544) chega a chamar as geometrias construídas a partir do mundo físico de "conceito empírico derivado de nossas experiências exteriores". Essas descobertas foram fundamentais para que no início do século XX fosse construída a Teoria da Relatividade de Einstein. A grande diversidade de geometrias que surgiram, criou dificuldade de classificá-las.

Em 1872, Felix Klein propõe a seguinte definição para geometria "Uma geometria é o estudo das propriedades de um conjunto S que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de S às transformações de algum grupo de transformações" (EVES, 2011, p. 606). Essa definição possibilitaria a classificação das geometrias de acordo com as transformações geométricas e desse modo, a geometria euclidiana ficaria definida em termos de isometria e homotetia. No entanto, no século XX, verificou-se que essa definição não era suficiente para classificar todas as geometrias que estavam surgindo, mesmo assim, as geometrias que podiam ser classificadas à maneira de Félix Klein, foram chamadas de geometrias kleinianas.

Se a geometria se libertou da geometria euclidiana, a álgebra se libertou dos números reais, por isso que Boyer (1974) e Eves (2011) referem-se ao século XIX como o século da libertação da álgebra e da geometria. O físico e matemático William Rowan Hamilton teve que abandonar a lei da comutatividade para trabalhar com os números quatérnios, o qual tinha descoberto, e Arthur Cayley (1821 – 1895), o pioneiro nos estudos de matrizes, verificou que a multiplicação de matrizes não era comutativa. Conforme as descobertas iam ocorrendo, começou-se a perceber que determinados campos da matemática possuíam certas estruturas, e assim, passou-se a estudar as estruturas matemáticas sem estudar os objetos específicos. Esse campo de estudo ficou conhecido como álgebra abstrata, álgebra moderna ou simplesmente álgebra. As letras passaram a significar, não apenas números reais, mas qualquer elemento de uma estrutura matemática. A expressão algébrica $a \times b$ por exemplo, agora pode significar uma operação com números quatérnios, com matrizes, com vetores, com funções, entre outros.

O século seguinte a esses descobrimentos, ou seja, o século XX, foi marcado por estudos de estruturas algébricas, onde mais de 200 estruturas são conhecidas hoje. Uma das estruturas mais comuns são os grupos. Essa estrutura se tornou tão intrigante que "a teoria dos grupos estava invadindo quase todos os domínios da matemática e alguns matemáticos começavam a achar que toda a matemática não passaria de alguns aspectos dessa teoria" (EVES, 2011, p. 605). Isso mostra o quanto as estruturas algébricas, principalmente os grupos, moveram os matemáticos no século XIX.

Impressionados com as múltiplas geometrias e álgebras que surgiram no século XIX, não tardou para que matemáticos começassem a se preocupar com o ensino de matemática para crianças e adolescentes, e jovens que queriam entrar nas universidades. Desse modo, começou a surgir diversos movimentos que debatiam e faziam propostas de um novo currículo. Dois desses movimentos se destacaram: O programa Erlanger de Félix Klein e o movimento da Escola Bourbaki.

O matemático alemão Félix Klein (1849 – 1925) ministrou em 1872, na Universidade de Erlanger, uma palestra onde expressou a sua visão pedagógica sobre o ensino da matemática. Ele expôs uma lista de assuntos essenciais que não poderiam faltar em um ensino ideal, e sua concepção era fundamentada em suas próprias pesquisas sobre estruturas algébricas e as mais diversas geometrias. Dentre os conteúdos essenciais estava as transformações geométricas, pois como visto anteriormente, Klein tinha definido geometria em termos de transformações geométricas além disso, as transformações geométricas eram um interessante campo de pesquisa sobre estruturas algébricas. Por exemplo, considerando a isometria, a simetria ou a homotetia como uma operação, ao escolher um conjunto de pontos S, pode-se estudar a estrutura que S possui, munido de uma dessas operações. Essa ênfase às transformações geométricas moveu movimentos e debates nas décadas e séculos seguintes (BOYER, 1974; EVES, 2011).

Os movimentos da escola Nicolas Bourbaki tiveram um impacto maior que o programa de Erlanger de Klein. Essa escola se tornou semelhante a uma seita e pode lembrar até mesmo a escola Pitagórica com seus cerimoniais e mistérios. Surgiu inicialmente em 1934 na França, com cinco jovens insatisfeitos com os livros oferecidos a jovens que pretendiam passar nos testes de admissão numa universidade francesa, para cursar matemática. Inicialmente eles começaram escrevendo alguns livros para os exames de admissão, mas conforme foram ganhando adeptos em toda a Europa, foram tornando-se mais ambiciosos. Começaram a desenvolver pesquisas em matemática e escrever diversos artigos e livros de matemática pura. Trabalhavam em equipe e publicavam os seus artigos e demais obras, sob o pseudônimo de Nicolas Bourbaki, o qual não era o nome de nenhum dos membros do grupo e a origem desse nome, eles guardam em segredo até os dias de hoje. Os bourbakis, como são conhecidos os seus membros, debruçaram-se no estudo das estruturas algébricas e seus trabalhos são referências nessa área. Eles defendem que "a matemática atual se reduz ao estudo das estruturas que se originam das algébricas, das de ordem e das topológicas, quando essas estruturas são combinadas entre si" (ABE, 1989), ou seja, a matemática é ciência que estuda as estruturas e as relações entre elas. Os bourbakis defendiam um rigor matemático, embora admitissem que há diferentes formas de resolver um problema matemático. Também defendiam que sempre existe uma forma mais elegante e breve para resolvê-lo.

O MMM ganhou ainda mais força, quando em 1955 Jean Piaget publicou *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent: essai sur la construction opératoires formelles*, que numa tradução literal seria: Da lógica da criança à lógica do adolescente: um ensaio sobre a construção de estruturas operacionais formais (INHELDER e PIAGET, 1976). Nessa época Piaget já havia publicado mais de 20 obras e suas ideias já tinham alcançado todo o ocidente. De acordo com Raymond Duval em entrevista à Freitas e Rezende (2013), Piaget nessa época, era praticamente inquestionável. Na obra de 1955, Piaget lança as bases da sua teoria estruturalista, que viria a se consolidar com *Le Structuralisme*, em 1968 (PIAGET, 1979). Nessas obras (PIAGET, 1976 e 1979), Piaget destaca a importância da escola Bourbaki em difundir as estruturas matemáticas, e acrescenta que não é só a matemática que possui tais estruturas, mas todas as ciências, e não somente as ciências, mas também, a cognição humana. Afirma que, em relação à cognição humana, as crianças e adolescentes elaboram esquemas de ação para resolverem problemas e interagir com conhecimentos diversos. Piaget procura então, encontrar um padrão nesses esquemas e ações e conclui que esses padrões estão relacionados a certas estruturas cognitivas. No entanto, o MMM praticamente não levava em conta as metodologias de ensino e nem os modelos de aprendizagem, o movimento orbitava em torno dos conteúdos de matemática. Embora Piaget tivesse se apropriado dos conhecimentos sobre estruturas matemáticas para desenvolver sua teoria estruturalista, ele criticou o ensino de matemática que leva em consideração somente as estruturas matemáticas e ignoram as estruturas cognitivas. (PIAGET, 1979; SOUZA, 2009; MUNARI, 2010 e FREITAS e REZENDE, 2013.).

No Brasil, o foco também eram os conteúdos de matemática. As metodologias de ensino e teorias de aprendizagem eram praticamente inexistentes nos cursos e eventos de um modo geral (SOARES, 2005; OLIVEIRA et al. 2011 e VALENTE et al. (2011). As pesquisadoras Flainer R. de Lima e Laurizete F. Passos, no capítulo quatro de Valente et al. (2011) levantam dúvidas se os professores de matemática aprendiam os conteúdos, nos cursos organizados no MMM. Isso porque, em muitos casos, os cursos eram subseções inteiros de matemática de nível superior, que geralmente nas universidades levavam um semestre inteiro para ser ministrados, mas nos cursos eram ministrados em poucas semanas. Além disso, muitos professores nem tinham formação superior, pois os cursos de licenciaturas em matemática, naquela época não eram muito comuns.

Desse modo, a Matemática Moderna está relacionada às descobertas matemáticas do século XIX, principalmente com as estruturas, sejam elas algébricas ou topológicas. Eves (2011) refere-se à Matemática Moderna como a matemática do século XIX, onde a álgebra se libertou dos números e a geometria se libertou de Euclides. O autor também associa a Matemática Moderna à matemática com ênfase à abstração e às estruturas, que foi defendida principalmente pelos bourbakis, que mobilizou diversos movimentos pela renovação do currículo da Educação Básica. D'Ambrósio (2011) refere-se às disciplinas de matemática moderna, como aquelas que estão relacionadas às estruturas matemáticas e às descobertas do século XIX. De certa forma, tanto Eves (2011) quanto D'Ambrósio (2011), relacionam a Matemática Moderna com as estruturas matemáticas, descobertas no século XIX.

3.3 ORIGENS DO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO BRASIL

3.3.1 A inquietação sobre o ensino da geometria nos Estados Unidos e na Europa e o reflexo no Brasil

Os eventos organizados por matemáticos europeus e norte-americanos, frequentemente mostravam um descontentamento em relação à geometria ensinada na Educação Básica da Europa e da América do Norte. Nesses dois continentes, ensinava-se uma geometria axiomática, muito próxima aos Elementos de Euclides. Para tais professores, essa geometria era ultrapassada para o momento e precisava ser renovada. Desse modo, duas concepções emergiam e dividiam opiniões. Alguns professores defendiam a chamada geometria experimental, cujo estudo iniciava não com definições e axiomas, mas com problemas de geometria que remetessem ao cotidiano e depois de vários experimentos desse tipo, caminhava-se em direção às generalizações e proposições. A outra concepção era ensinar geometria de acordo com o Programa Erlanger de Felix Klein, dando ênfase às transformações geométricas. (OLIVEIRA et al. 2011 e VALENTE et al. 2011).

Se na Europa e Estados Unidos essas duas concepções dividiam opiniões, no Brasil, as discussões sobre o ensino de geometria foram ainda mais conturbadas. Alguns dos idealizadores do MMM no Brasil alegavam que no país, nem a geometria euclidiana era ensinada. A geometria era um assunto praticamente esquecido na Educação Básica e como então, eles iriam renovar o currículo da geometria se praticamente nem havia o ensino de geometria? Esse era um questionamento recorrente durante esse movimento. Entre os idealizadores do MMM no Brasil, estava Omar Catunda, professor que afirmou que os alunos brasileiros não aprendiam geometria, e se na Europa e Estados Unidos o lema era *Abaixo Euclides*, no Brasil o lema deveria ser *ao menos Euclides* (CATUNDA *apud* VALENTE et al. 2011).

Benedito Castrucci, outra referência do MMM no Brasil, autor de diversos livros, também fazia pesadas críticas ao ensino de geometria. Ele afirmou que os projetos estrangeiros eram muito ousados para o Brasil, e ao comentar sobre o fim do MMM, diz que o fracasso do movimento está relacionado à geometria (CASTRUCI *apud* VALENTE et al. 2011). Martha Dantas, referência do MMM na Bahia, em entrevista a Mabuchi (2000), diz que os idealizadores do MMM no Brasil chegaram a um consenso sobre o que ensinar em relação à aritmética e álgebra, mas o mesmo não ocorreu com o ensino de geometria.

As pesquisas de Regina Maria Pavanello, no final da década de 1980, vão ao encontro das concepções de Omar Catunda e Benedito Castrucci, no sentido de que o ensino de geometria era praticamente esquecido na Educação Básica. Pavanello (1989; 1993) aponta que a geometria era ensinada, desde pelo menos na década de 1930, a uma pequena elite da sociedade que tinha condições de pagar por aulas particulares. E mesmo com as diversas tentativas e ações dos governos, no decorrer das décadas seguintes, para democratizar a educação como um todo, a geometria permaneceu deixada de lado e esse quadro não mudou na época do MMM. Mesmo com esse cenário conturbado, houve professores que ensinaram e defenderam o ensino de geometria com ênfase às transformações geométricas.

3.3.2 Osvaldo Sangiorgi no MMM e as transformações geométricas

Dentre os professores que ganharam bolsa, para ir aos Estados Unidos na década de 1960 e participar de cursos, palestras, debates, entre outros, sobre o MMM, está Osvaldo Sangiorgi (1921 – 2017). Nessa época ele era um professor destacado na cidade de São Paulo, escritor de livros didáticos muito vendidos, pois os livros didáticos não eram distribuídos gratuitamente às escolas. É difícil saber quantos exemplares venderam, mas Valente et al. (2008) informa que 85.862 exemplares foram editados somente em 1953. Ao voltar ao Brasil, Sangiorgi tornou-se um entusiasta do MMM, promoveu eventos em diversos estados brasileiros, liderou o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), tornou-se um conferencista interacional, chegando a fazer conferências no Japão, e ganhou grande espaço na mídia brasileira (VALENTE et al. 2008; OLIVEIRA et al. 2011).

Em 1963, Sangiorgi lançou o primeiro livro, do primeiro volume da coleção: Matemática Curso Moderno, uma coleção com quatro volumes, cada volume destinado a uma das séries do Ginásio. No ano de lançamento, foram vendidos cerca de 240 mil exemplares. O sucesso nas vendas impulsionou a edição de aproximadamente 250 mil exemplares, em cada ano, nos três anos seguintes, alcançando nesse tempo, dez edições. Não é de conhecimento dos historiadores do MMM, outra coleção de livros didáticos de matemática, que foi mais vendida que os de Sangirorgi, durante e antes da década de 1960 no Brasil. A partir de 1971, quando o Ginásio deu lugar ao 1º Grau, os livros de Sangiorgi não tiveram mais saída no mercado, até que em 1974 as impressões cessaram. Ele escreveu outras coleções, tentando adaptar a coleção Matemática Curso Moderno, para o 1º Grau, mas não obteve sucesso como a coleção anterior. Outro fato que fez com que essas novas coleções não tivessem sucesso, é que o MMM começava a desmoronar em meados da década de 1970 (VALENTE et al. 2008; OLIVEIRA et al., 2011).

Em relação à inserção das transformações geométricas no currículo da Educação Básica, Osvaldo Sangiorgi, procurava não entrar em muitas polêmicas e destacava a importância dos três tipos de geometria: a geometria euclidiana em sua forma axiomática, a geometria experimental e a geometria pelas transformações geométricas. Na sua coleção Matemática Curso Moderno, as três geometrias aparecem. As transformações geométricas aparecem no tomo III de sua coleção, direcionado à terceira série ginasial, aparecendo apenas no apêndice do livro (VALENTE et al. 2008).

3.3.3 Lafayette de Moraes e a tradução de livros estrangeiros

Dentre os professores que foram levados aos Estados Unidos em 1960, encontram-se também, Lafayette de Moraes e Lydia Lamparelli. Esses dois professores ganharam bolsa da *NSF – National Science Foundation* para participar de diversos cursos e palestras sobre o MMM. Ao voltarem ao Brasil, ficaram responsáveis por traduzir duas coleções de livros didáticos norte-americanos, uma coleção para o Primário e outra para o Ginásio. O nome dessa última coleção no original é *Mathematics for Junior High School* e foi traduzido pelo professor Lafayette de Moraes e ganhou o nome de Série Matemática Curso Ginasial, composto por quatro volumes. Quando a tradução dos dois primeiros volumes, em 1967, foi finalizada e publicada, a coleção de Sangiorgi ultrapassava a marca de 250 mil exemplares publicados por ano. Silva (2013) diz que há evidências de que os livros traduzidos por Lafayette não conseguiram tanto sucesso diante da aclamada coleção de Sangiorgi, mesmo assim algumas escolas adotaram esses livros como referência (OLIVEIRA et al, 2011; SILVA, 2013).

As transformações geométricas estão somente no terceiro volume da coleção, destinado à 3ª série ginasial, inseridas dentro de um capítulo de geometria. Apenas quatro páginas são dedicadas a esse conteúdo.

3.3.4 Martha Dantas e Omar Catunda e o programa de ensino de geometria pelas transformações geométricas

Os estados de São Paulo e da Bahia aparecem como os maiores centros de divulgação e produção de materiais do MMM. A líder do MMM na Bahia foi a professora Martha Maria de Souza Dantas (1925 – 2011). Entusiasta pelo ensino da matemática, a jovem professora com 27 anos de idade viajou para a Europa para observar como era o ensino da matemática nesse continente. Viajou pela Bélgica, Inglaterra e França, observou diversas aulas e participou de eventos para professores. Ao voltar ao Brasil, organizou o I Congresso Nacional de Ensino de Matemática, em sua cidade Salvador, em 1955. Em 1958 ganhou uma bolsa para estudar e observar as aulas de matemática em Portugal. Quando o MMM se intensificou no Brasil em 1960, engajou-se nesse movimento (MABUCHI, 2000; SILVA e CAMARGO, 2008; FREIRE e DIAS, 2010; PINHEIRO e RIOS, 2010).

Omar Catunda (1906 - 1986) era um notável matemático, professor de matemática em duas universidades de São Paulo[12,] que havia se engajado nesse movimento e em 1961 foi um dos três representantes do Brasil na Primeira Conferência sobre Educação Matemática (I

[12]Universidade de São Paulo – USP e Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras – FFCL. Ver Lima (2016).

CIAEM) em Bogotá na Colômbia, patrocinada pela *Nacional Science Foundation*, *Ford* e *Rockfeller*. Ele se aposentou em 1963 e se mudou para a Bahia nesse mesmo ano, passando a trabalhar junto com a professora Matha Dantas em prol do MMM. Os dois professores e sua equipe produziram um vasto material didático sobre Matemática Moderna, organizaram eventos e ministraram diversos cursos (FREIRE e DIAS, 2010; PINHEIRO e RIOS, 2010; LIMA, 2016).

Martha Dantas e Omar Catunda abraçaram a causa de ensinar geometria pelas transformações geométricas. Eles lideraram um ousado projeto de construir a geometria euclidiana plana, em termos de transformações geométricas, voltado à Educação Básica. Desse modo, ao longo das décadas de 1960 e 1970 fizeram diversos experimentos em sala de aula e iam modificando as práticas e os materiais, conforme as experiências adquiridas. Nessas duas décadas, elaboraram diversas apostilas e fichas de trabalho relacionados a esse projeto. No final da década de 1980, após a morte de Omar Catunda, Martha Dantas e equipe sintetizaram as fichas de atividades na forma de um livro e o publicaram pela Universidade Federal da Bahia - UFBA, com o título “As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria” (CATUNDA et al., 1988). Em entrevista a Mabuchi (2000), Martha Dantas comentou que as transformações geométricas eram ensinadas até aqueles dias em Salvador e nos cursos de licenciatura em matemática.

3.3.5 Almerindo Bastos e os Guias Curriculares do estado de São Paulo

Outro professor influente no estado de São Paulo, engajado no MMM, foi Almerindo Marques Bastos, aluno de Omar Catunda, que diz ter sido influenciado por este. Almerindo trabalhava na Secretaria de Educação de São Paulo quando foi convidado a participar da elaboração de um guia curricular para o estado de São Paulo em 1970. A proposta do guia curricular era oferecer um documento que pudesse ser usado como um suporte aos professores do estado de São Paulo, frente a mudança do Ginásio para o 1º Grau que estava ocorrendo naquele tempo. O professor Almerindo M. Bastos aceitou a proposta com a condição de que tais documentos não fossem obrigatórios, mas que tivessem o caráter de uma proposta. A condição foi aceita, os capítulos referentes à matemática foram escritos pelo professor Almerindo juntamente com as professoras Anna Franchi e Lydia Condé Lamparelli. Esta última, é a mesma que esteve com Lafayette nos Estados Unidos no início da década de 1960

(SÃO PAULO, 1975; MABUCHI, 2000; SOUZA, 2005). Em 1975 esses guias foram publicados com o título “Guias Curriculares Propostos para as Matérias do Núcleo Comum do Ensino de 1º Grau” (SÃO PAULO, 1975).

Almerindo era um defensor do ensino de transformações geométricas na Educação Básica. Em entrevista a Mabuchi (2000), afirma que as melhores aulas que deu de geometria foram as que tiveram ênfase em transformações geométricas. Na lista dos conteúdos de matemática propostos nos Guias, Bastos e equipe sugeriram as isometrias e simetrias no currículo da 6ª e 7ª série e homotetias para a 8ª série. Interessante notar que até hoje, isso se mantém, tanto os PCNs e a BNCC sugerem isometrias e simetrias para 7º e 8º ano e homotetias no 9º ano. Isso também pode ser visto nos Guias de Livros Didáticos, que apontam que os livros didáticos mantêm essa ordem dos conteúdos. Desse modo, a organização do currículo atual, em relação a isometrias, simetrias e homotetias, podem ter origem na proposta de Bastos e equipe, nos Guias Curriculares do Estado de São Paulo. Outro ponto a destacar também, é que nessa mesma época, uma disciplina de transformações geométricas passou a ser ofertada nos cursos de licenciatura em matemática da USP e da PUC-SP (SÃO PAULO, 1975; MABUCHI, 2000; SOUZA, 2005).

3.4 O FIM DO MMM NO BRASIL

O MMM foi difundido no Brasil e nos países da área de abrangência dos Estados Unidos, não sem muita resistência, desde o seu início. No entanto, depois da transição do Ginásio para o 1º Grau, esse movimento começou a ficar insustentável. Como foi visto, para entrar no Ginásio os alunos teriam que passar por um exame de admissão, e desse modo, os alunos do Ginásio eram um seleto grupo de alunos com bom desempenho escolar. Mesmo assim já se percebiam as dificuldades desses alunos em estudarem matemática com ênfase nas estruturas algébricas. No 1º Grau, o público era mais diversificado, eram alunos com diferentes conhecimentos e de diversas classes sociais e por isso, as dificuldades tornaram-se mais evidentes. Não demorou para que uma onda de professores começasse a se posicionar contra o MMM. Os professores universitários começaram a escrever artigos relatando os problemas desse movimento, e até mesmo a mídia, que anos atrás tinha promovido Sangiorgi e o MMM, começava a sugerir o abandono da Matemática Moderna.

Em 1976 foi lançado no Brasil a tradução do livro O Fracasso da Matemática Moderna (KLINE, 1976), de autoria de um matemático norte-americano que fazia pesadas críticas ao movimento. Esse livro causou grande impacto no Brasil, que até mesmo Sangiorgi se viu pressionado a se posicionar em relação a ele. Oliveira et al. (2011) e Valente et al. (2011) não marcam uma data para o fim do MMM no Brasil, mas na década de 1980 as concepções sobre o ensino de matemática já eram bem diferentes desse movimento.

A herança e os impactos deixados pelo MMM são variados e complexos de se analisar. Desde os investimentos norte-americanos no Brasil, a partir do final da década de 1940, que resultaram na criação do IMPA, na formação de grupo de estudos de professores, na organização de eventos para professores que ensinam matemática na Educação Básica, na proliferação de cursos de licenciatura em matemática, tudo isso teve origem no MMM. De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012), o MMM preparou o caminho para o surgimento da Educação Matemática como campo profissional e área de conhecimento. Para a professora Lucília Bechara Sanchez, uma das líderes do MMM em São Paulo ao lado de Sangiorgi e Almerindo M. Bastos, em entrevista a Mabuchi (2000), afirma que "A Matemática Moderna morreu, mas foi uma semente que deu origem a outras flores, que irão de a mesma forma morrer e depois virarão sementes." (SANCHES *apud* MABUCHI, 2000, p. 227). Para essa professora a fase do MMM foi superada, mas para aquela época foi fundamental.

Entre as marcas deixadas pelo MMM está a isometria e a simetria no currículo da Educação Básica. Enquanto na época do MMM esses dois conceitos estavam ligados a estruturas matemáticas dos grupos, nos PCNs e na BNCC eles aparecem relacionados a congruências e características de figuras. Embora o foco desse trabalho não seja verificar as origens das diferentes interpretações em torno dos termos isometrias e simetrias, dois aspectos do MMM chamam a atenção para essa questão. As discussões sobre transformações geométricas, que envolviam as isometrias e simetrias, nesse período, foram bastante conturbadas e alguns líderes desse movimento alegavam que o Brasil não estava preparado para inserir tais conceitos na Educação Básica. Os cursos oferecidos aos professores eram subseções inteiros de matemática de nível superior e é questionável se os professores realmente estavam preparados para aprender tais subseções. Esses dois aspectos podem ter influenciado as diferentes interpretações e confusões em torno desses dois termos (VALENTE et al. 2008; OLIVEIRA et al. 2011).

4. TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Esse capítulo está dividido em três partes. Além da introdução, o segunda seção trata de alguns fundamentos filosóficos e semióticos da teoria, enquanto o terceira seção aborda os Registros de Representações Semióticas, um conceito primordial dentro da teoria.

4.1 INTRODUÇÃO

A história da Teoria dos Registros de Representações Semióticas também inicia no MMM. Raymond Duval é natural da França, o mesmo país do surgimento da Escola Bourbaki e país vizinho da Suíça, de Jean Piaget. Aliás, Piaget realizou conferências na França e publicou diversas obras em francês. É no clima do MMM que Raymond Duval defende sua tese de doutorado sobre o desenvolvimento de noções físicas e matemáticas em crianças e adolescentes, fundamentado na epistemologia genética de Piaget. Sua tese chamou atenção dos idealizadores do MMM e ele foi contratado em 1970 para trabalhar no Instituto de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática – IREM da França (FREITAS e REZENDE, 2013).

Logo que Duval iniciou suas atividades em sala de aula, percebeu que os princípios e metodologias do MMM causavam dificuldades à aprendizagem dos alunos. Duval começou a trilhar um caminho diferente daquele proposto pelo MMM. Os idealizadores desse movimento defendiam a unidade da matemática, tanto unidade conceitual como unidade de linguagem, ou seja, defendiam que os conceitos matemáticos eram mais importantes, pois se fundamentavam no Bourbaki. Por outro lado, Duval defendia as múltiplas linguagens, especialmente o não abandono da língua natural, bem como as representações figurais e geométricas. Duval sofreu rejeição dentro desse movimento e teve que publicar os resultados de suas pesquisas fora do âmbito do IREM, onde inicialmente tinha sido contratado.

Não demorou para que o MMM começasse a perder forças, mas enquanto isso, Duval intensificava suas pesquisas e se tornava cada vez mais aceito no âmbito educacional, até que em 1995 ele publica *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissagens intellectuels*, a primeira apresentação sistemática de sua teoria (DUVAL, 2004; DUVAL, 2011; FREITAS e REZENDE, 2013).

4.2 FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS E SEMIÓTICOS DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

4.2.1 O Campo Perceptivo Multissensorial e os Objetos Matemáticos

Duval (2011; 2016) fala em campo perceptivo multissensorial. Para compreender o que é isso, deve-se voltar à Grécia Antiga, mais especificamente ao filósofo Aristóteles (2011; 2019). Para esse antigo filósofo, o homem tem cinco sentidos, a saber: audição, visão, paladar, tato e olfato. Sabe-se hoje, que os cinco sentidos não dão conta de explicar todas as sensações do ser humano. Além disso, os sentidos são ativados em conjunto, formando assim muitas combinações e não há um consenso sobre quantos sentidos existem, nem mesmo, o que é um sentido e o que pode delimitar que uma sensação pode ser, ou não, um sentido, de acordo com Henshaw (2012), Moyle (2018) e Barret (2021). Diante disso, Duval admite a existência de um campo perceptivo multissensorial, que é um conjunto de elementos que o ser humano pode captar através de seus múltiplos sentidos e sensações, ou ainda, acessar de modo direto através de um ou mais de seus sentidos. No campo perceptivo multissensorial também estão inclusos aqueles objetos cujo acesso se dá por meio de instrumentos tecnológicos, como por exemplo os microrganismos vistos por meio de microscópios, ou os corpos celestes que podem serem vistos com o uso de telescópios.

Há, porém, uma gama de objetos que o ser humano não consegue acessar através de seus múltiplos sentidos, a qual será chamado aqui de abstratos, embora, raramente Duval use esse termo para referir-se a eles. Os objetos abstratos, no entanto, podem ser acessados unicamente por representações. Desse modo não se tem acesso direto a eles, mas sim, acesso indireto. Para Duval (2011; 2012; 2016) todos os objetos de estudo da matemática são abstratos e o acesso ocorre por meio de representações. Isso implica que, jamais manipulam-se objetos matemáticos, somente as suas representações. Fazer e aprender matemática consiste em manipular as representações de objetos matemáticos, e por isso a ênfase de Duval às representações, em detrimento dos conceitos.

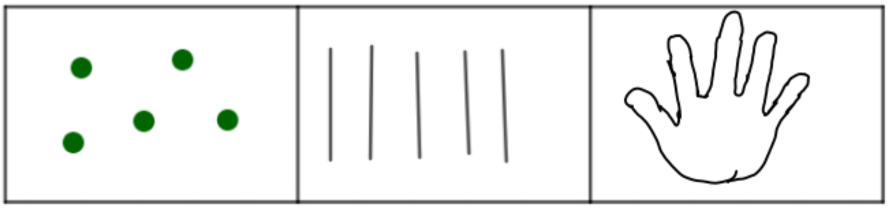
4.2.2 Signos e Semiótica

A semiótica é a ciência que estuda as linguagens e os signos. Destaca-se inicialmente que as linguagens não se limitam ao estudo das línguas, mas a linguística é uma dentre muitas áreas de conhecimento que a semiótica pode-se ocupar. As linguagens são muito diversas, como a linguagem de trânsito, a linguagem de sinais para pessoas surdas e a linguagem corporal. É por isso que se pode ver estudos semióticos nas áreas, como cinematografia[13], publicidade e propaganda[14], design[15], moda[16], entre outros. Em relação aos signos não há um consenso entre os semiólogos sobre o seu conceito e definição (SANTAELLA, 1983).

Os signos são representações de objetos. No entanto, a forma como os signos representam os objetos é explicada de diferentes formas pelos semiólogos. Para Duval (2011) os modelos de conhecimentos, ou seja, as teorias que procuram explicar o que é o conhecimento e como ocorre a aprendizagem, depende da concepção que se tem dos signos. A relação entre o signo e o objeto pode ser de duas maneiras: pode ser uma relação causal ou uma relação arbitrária. Uma relação causal pressupõe que o objeto causa a representação, enquanto uma relação arbitrária pressupõe que a relação entre o objeto e sua representação é arbitrária. Para compreender as relações causal e arbitrária são apresentados os Exemplos 1 e 2.

Exemplo 1: Os números naturais, assim como todos os objetos matemáticos, são abstratos, isto é, são elementos que não estão acessíveis ao campo perceptivo multissensorial. Desse modo, a única forma do ser humano ter acesso a eles é usando representações. Quando a representação do número cinco, por exemplo, for cinco riscos, cinco marcas ou qualquer sinal que explicite cinco unidades (Figura 6), diz-se que essa representação é causal, pois a característica quantitativa do número cinco está também presente nessas representações.

Figura 6: Três representações causais do número cinco



Fonte: Os Autores

[13]Um estudo mais detalhado sobre semiótica no cinema e na televisão, pode ser encontrada em Cardoso (2008), Metz (1974) e Santos (2011).

[14]Um estudo mais detalhado sobre semiótica e publicidade e propaganda, pode ser encontrado em Santaella (2010), Souza e Satarelli (2006) e Volli (2003).

[15]Um estudo mais detalhado sobre semiótica e design, pode ser encontrado em Braida (2014), Mangado (2008) e Niemeyer (2013).

[16]Um estudo mais detalhado sobre semiótica e moda, pode ser encontrado em Castilhos e Martins (2008).

Quando a representação do número cinco é dada por convenção, de maneira intencional, mas que não traz as características inerentes ao número cinco, então essa representação é arbitrária, conforme Figura 7.

Figura 7: Três representações arbitrárias do número cinco

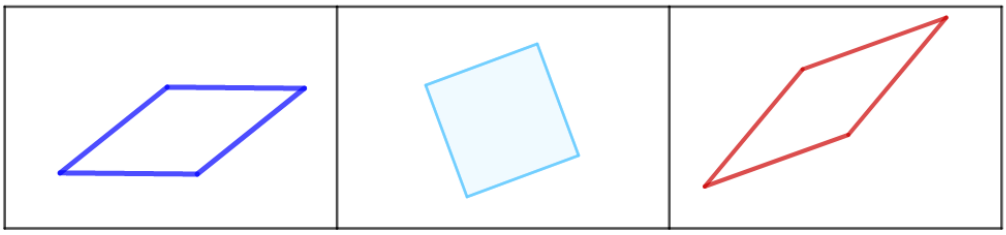
5	cinco	V

Fonte: Os Autores

A Figura 7 mostra a três representações arbitrárias do número cinco: o símbolo indo-arábico, a palavra cinco em língua portuguesa e o algarismo romano que representa esse número.

Exemplo 2: O losango também é um objeto abstrato. O ser humano não consegue produzir um quadrilátero que tenha perfeitamente quatro lados congruentes. No entanto, quando ele é representado por uma figura que possa parecer aos olhos humanos, que seus quatro lados sejam congruentes, então essa representação é causal. Quando ele é representado por uma palavra, por uma descrição ou definição, então essa representação passa a ser arbitrária. A Figura 8 mostra três representações causais do losango e a Figura 9 mostra três representações arbitrárias.

Figura 8: Três representações causais do losango



Fonte: Os Autores

Na Figura 9, a palavra losango em língua portuguesa, a palavra losango em língua húngara e a definição de losango em língua simbólica são exemplos de representações arbitrárias do objeto losango.

Figura 9: Três representações arbitrárias do losango

Losango	Rombusz	Polígono ABCD, de modo que d(A,B) = d(B,C) = d(C,D) = d(D,A) e nenhum trio desses pontos, sejam colineares.

Fonte: Os Autores

A primeira discussão sobre a causalidade ou arbitrariedade do signo, que se tem notícias, é a obra Crátilo de Platão (PLATÃO, 2014). Nessa obra, aparecem três personagens debatendo se os nomes das coisas são derivados de uma razão natural ou são arbitrários, estabelecidos por uma determinação ou convenção. Embora o desenrolar dessa discussão é passível dos mais diversos tipos de interpretações, o objeto dessa discussão é importante para a epistemologia e para a semiótica (PINHEIRO, 2003; SOUZA, 2010).

No século XIX, Ferdinand Saussure[17] (1857 – 1913) retomou essa discussão. Saussure (2006) disse que, para certas pessoas a língua é uma nomenclatura, em que cada objeto tem uma palavra associada a ela. No entanto, essa é uma forma intuitiva de compreender o que é uma língua, e implica que as ideias e o signo têm uma relação de causalidade. Para Saussure (2006), o signo é a união do significado e o significante, o significado são os conceitos e o significante é a imagem acústica da palavra. A imagem acústica é o conjunto de propriedades sonoras das palavras, desse modo ela é abstrata, é uma representação abstrata do som. Para explicar que a imagem acústica (significante) é abstrata, Saussure (2006) exemplifica com uma situação em que uma pessoa recita um poema mentalmente. Nesse caso, os sons não são emitidos, mas são evocadas as propriedades dos sons das palavras. Para o autor, a relação entre o significado e o significante é arbitrária, chamando-a de Princípio da Arbitrariedade do Signo.

Duval (2011) distingue dois tipos de representação, aquela que tem uma relação de causalidade com o objeto e aquela que tem uma relação arbitrária. No entanto, Duval não usa o termo arbitrário, mas usa o termo referência. Sendo assim, para Duval (2004; 2011), as representações que têm uma relação de referência com os objetos são chamadas de signos. Portanto, o signo é um tipo específico de representação. Isso pode ser visto quando Duval diz:

[17]Ferdinand de Saussure nasceu na Suíça é filósofo e linguista. Fez grandes contribuições para as áreas de linguística, antropologia, psicologia e literatura. Diversos de seus discípulos continuaram a desenvolver as suas teorias semióticas, tais como Bloomfield, Hjelmslev, Jakobson entre outros. Mais detalhes sobre Saussure e seus sucessores podemos encontrar em Harris (2001).

"*A relação dos signos com as coisas que eles significam é uma RELAÇÃO DE REFERÊNCIA, e não uma relação de causalidade*. Essa é a característica essencial, pois ela permite ver em que os signos diferem das representações em geral" (DUVAL, 2011, p. 22, grifo do autor). Ainda sobre isso, afirma que:

> Os signos são as representações porque eles não devem jamais ser confundidos com os objetos aos quais se referem. É por isso que os signos são definidos por sua característica comum com as representações [...] No entanto, os signos são radicalmente diferentes das representações, em sua relação com os próprios objetos que não é uma relação de causalidade. (DUVAL, 2011, p. 23).

Ou seja, para Duval (2011), tudo o que representa um objeto é uma representação. Essa representação pode ser causal ou de referência (o mesmo que arbitrariedade de Saussure (2006)). Quando uma representação é de referência, então ela é um signo. Para o autor, são poucos os objetos matemáticos que podem ser representados por causalidade, somente os mais elementares como os números naturais pequenos e as figuras geométricas. Com exceção destes, os demais objetos matemáticos são representados por signos.

4.3 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Todo signo está inserido dentro de um sistema complexo com regras bem definidas. Por exemplo, a representação formal dos números naturais acontece por meio do Sistema de Numeração Decimal Posicional. Esse sistema com apenas dez símbolos, a partir de certas regras bem definidas, é capaz de representar uma infinidade de números naturais. Outro exemplo são os gráficos de funções que, representados em um sistema de coordenadas munido com regras definidas, podem representar uma infinidade de curvas. Esse 'sistema complexo com regras bem definidas' é chamado por Duval de Registro de Representações Semióticas, ou de forma simplificada, registro. Desse modo, todo signo faz parte de um registro, e ambos, signo e registro são indissociáveis.

Henriques e Almouloud (2016) procuraram definir signo e registro, fazendo da seguinte maneira: "Um signo é um sinal mobilizado por alguém (sujeito), capaz de permiti-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico ..." (HENRIQUES e ALMOULOUD, 2016, p. 168). Em seguida definem "um registro de representação é um sistema dotado de signos que permitem identificar uma representação de um objeto de saber" (IDEM, p. 169). Assim, eles definiram signo em termos de registros e definiram registros em termos de signo, mostrando o quão indissociáveis estão esses dois conceitos.

De acordo com Duval (2011), todo registro permite a criação de uma infinidade de representações. Voltando ao exemplo do Sistema de Numeração Decimal Posicional, por si só, permite representar infinitos números naturais. Se for acrescentado o sinal negativo (-), permite representar infinitos números inteiros, e acrescentando outros símbolos como a notação de fração ou a vírgula, permite representar infinitos números reais. O Plano Cartesiano com suas regras possibilita representar infinitas curvas de funções. Da mesma forma, por meio da linguagem algébrica que combina letras, números e diversos outros sinais, são criadas uma infinidade de equações e expressões algébricas.

Outra característica dos registros, é que eles cumprem três operações cognitivas, em qualquer representação. A primeira delas é a formação, que é a constituição dos símbolos, que são escolhidos arbitrariamente ou convencionalmente, para compor os registros. A outra é o tratamento, pois como “os signos apresentam essa possibilidade de PODEREM SER SUBSTITUÍDOS POR OUTROS SIGNOS, independente dos objetos que eles podem evocar” (DUVAL, 2011, p. 27, grifo do autor), implica que o mesmo objeto pode ter infinitas representações em um mesmo registro. Esse processo de transformar uma representação em outra, dentro de um mesmo registro, chama-se tratamento. Para Duval (2012, p. 272, grifo do autor) “**O tratamento** de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro”. A Figura 10 mostra o tratamento sendo realizado no registro algébrico.

Figura 10: Exemplo de tratamento

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x+1)^2 + 2x - 22 = 0$$

$$(x-3)\cdot(x+7) = 0$$

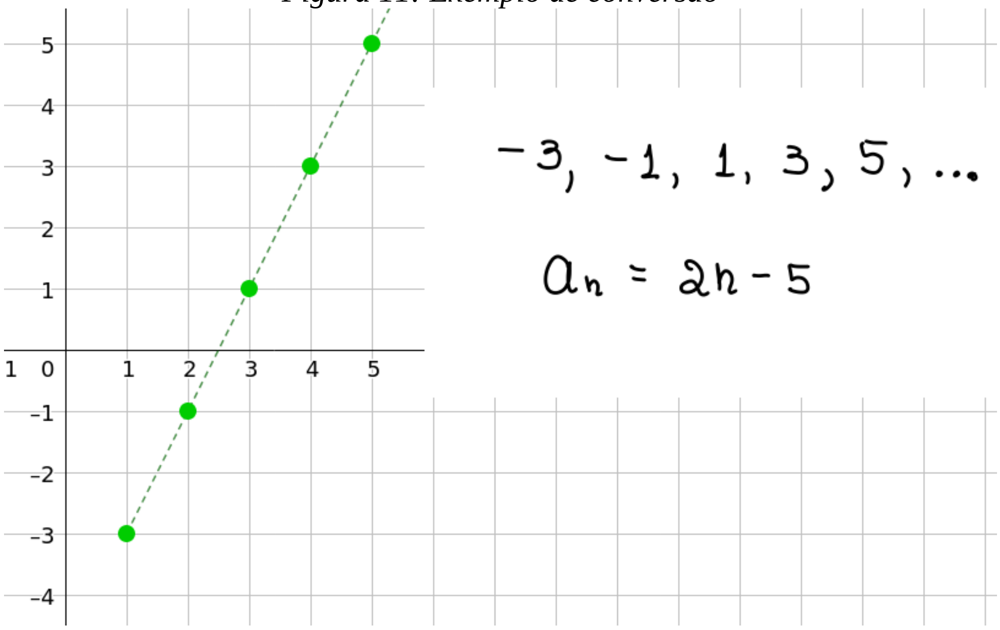
Fonte: Os Autores

Na Figura 10 tem-se três representações de um mesmo objeto, em um mesmo registro semiótico. O objeto é uma parábola e os três signos da imagem são as três representações da parábola no registro algébrico, ou da língua formal. O processo de substituir uma dessas expressões por outra, usando as regras e propriedades da álgebra, é o tratamento.

Os objetos matemáticos podem ser representados em diferentes registros. O processo de transformar a representação de um objeto matemático de um registro em outro registro, é denominado conversão. Nas palavras de Duval (2003, p.16) "as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados". No entanto, a conversão não é somente uma codificação, ela exige domínio de conhecimento de dois registros de representações, aquele que o objeto está representado inicialmente e aquele que será transformado. A conversão tem um papel fundamental na teoria de Duval (2003; 2011; 2012), no âmbito da aprendizagem, pois de acordo o autor, a compreensão de um conteúdo de matemática repousam sobre a coordenação de pelo menos dois registros de representações.

A Figura 11 apresenta três representações de uma Progressão Aritmética (P.A.), cada representação em um registro diferente: o registro gráfico, o registro numérico e o registro algébrico.

Figura 11: Exemplo de conversão



Fonte: Os Autores

De acordo com a figura, a P.A. está representada por um gráfico, por uma lista de números e por uma equação. O processo de encontrar a equação de uma P.A. a partir dos seus primeiros termos, ou escrever os primeiros termos de uma P.A. dado o seu gráfico, são exemplos de conversões.

Para Duval (2004), na matemática existem quatro grandes tipos de Registros de Representações Semióticas, a saber: 1) Registro da língua natural, 2) Registros da língua formal ou algébrica, 3) Registro Figural ou Registro Geométrico e 4) Registro Gráfico. O registro da língua natural e o registro da língua formal podem se fundir, sendo chamado simplesmente de registro das línguas (DUVAL, 2004). Além desses, Menoncini (2018) sugere o Registro Gráfico Geométrico, que são os registros que envolvem as curvas no plano cartesiano, em que são estudadas as figuras geométricas formadas neste plano. Esse registro é necessário, por exemplo, quando se estuda integral para calcular a área delimitada por curvas.

O presente trabalho procura articular três Registros de Representações Semióticas, o registro da língua natural, o registro da língua formal ou algébrica, e o registro figural ou geométrico. Esses três registros são usados para analisar as obras da amostra e confrontar os dados. Desse modo, eles são discutidos a seguir.

4.3.1 Registro das Línguas: Natural e Formal

Conforme a ciência foi se desenvolvendo, foram surgindo cada vez mais áreas de conhecimentos específicos, e com essas especificidades, a linguagem foi adquirindo empregos diferentes. A linguagem usada por dois especialistas em direito, quando estão debatendo sobre legislação, por exemplo, não é a mesma usada por dois matemáticos quando estão discutindo a demonstração de uma proposição. Os artigos científicos têm um emprego da linguagem diferente de um poema. Esse emprego especializado da língua é chamado de língua formal e a outra, língua natural (DUVAL, 2004).

Para Duval (2004) a língua natural e a língua formal possuem estruturas próprias e distintas, elas se diferem em três funções, na função apofântica, na função referencial e na função de expansão discursiva. A função apofântica tem a finalidade de dizer alguma coisa sobre o objeto designado e as suas operações são a predicação e a alocução. No caso da língua natural são usadas as conjunções para relacionar as orações e no caso da língua formal matemática, ou seja, na linguagem algébrica, são usados os conectivos lógicos para relacionar as proposições. A função de referência é aquela que identifica os objetos. Na linguagem natural, estabelece-se uma lista de predicados, que a partir desses, originam-se os outros, mas na linguagem algébrica, não se consegue criar esses símbolos primitivos e por isso é necessário um simbolismo característico.

Considerando que em um discurso nem sempre se consegue expressar tudo o que se quer dizer, a função de expansão discursiva expande o discurso a partir da articulação de enunciados, no caso da língua natural. Essa função acontece por acumulação ou adjunção, enquanto na língua algébrica ocorre por substituição. Apesar das duas línguas apresentarem a mesma função discursiva, elas são estruturalmente diferentes, o que torna não espontânea a passagem de uma língua para a outra (DUVAL, 2004). Por isso, há dificuldade ao converter uma representação em língua natural (enunciado) em uma representação em língua formal (expressão algébrica), por exemplo.

4.3.2 Registro Figural ou Geométrico

O Registro Figural ou Geométrico é aquele usado no estudo de geometria, sem o recurso das coordenadas. As figuras se articulam com os enunciados, um completando o outro, pois os enunciados estão para explicar, detalhar ou chamar atenção para alguns aspectos ou propriedade da figura. Desse modo, a maneira de ver a figura é influenciada pelo enunciado que está relacionado a ela.

Na Figura 10 foi mostrado um exemplo de tratamento na linguagem algébrica, uma parábola escrita por meio de diferentes representações. No capítulo IV de Duval (2004), o autor detalha como ocorre o tratamento dentro do Registro Figural ou Geométrico. O tratamento dentro desse registro depende das apreensões geométricas e da operação semiótica de reconfiguração.

As apreensões geométricas são as interpretações que emergem quando se interage com as figuras, sendo classificadas em quatro tipos:

1) Apreensão Perceptiva: Quando se olha para uma figura, a primeira tendência é observar o formato global dela e não as partes mais específicas.

2) Apreensão Discursiva: São os enunciados e/ou descrições relacionados a figura. Geralmente procuram destacar alguma característica ou propriedade figural e acabam interferindo na forma de olhar a figura.

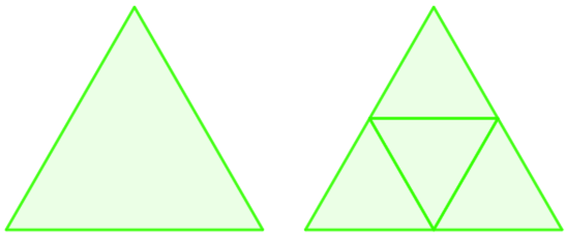
3) Apreensão Sequencial: Refere-se à construção da figura, os procedimentos e algoritmos para construí-la, tanto realizados com régua e compasso, quanto por um software, entre outros.

4) Operação operatória: Está relacionada às reorganizações e modificações realizadas de forma visual na figura. Essas são divididas em: modificações óticas, modificações posicionais e modificações mereológicas.

As modificações óticas ocorrem quando a figura é ampliada ou reduzida, mas sem perder a forma, ou seja, quando ocorre uma homotetia. Já as modificações posicionais ocorrem quando a figura sofre uma rotação ou reflexão, por exemplo.

As modificações mereológicas são aquelas em que a figura é decomposta em partes. Ao decompor a figura, dá-se origem à operação de reconfiguração, pois as partes podem ser reagrupadas ou realocadas em outras figuras, formando uma figura visualmente diferente da original. Sobre as decomposições, podem ser do tipo: i) estritamente homogênea (Figura 12), ii) homogênea (Figura 13), e iii) heterogênea (Figura 14).

Figura 12: Decomposição estritamente homogênea

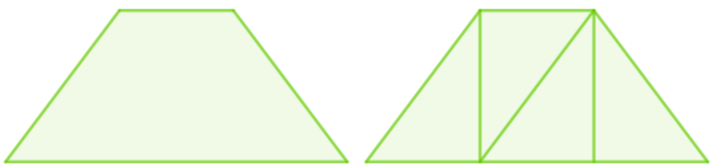


Fonte: Os Autores

Na Figura 12, um triângulo equilátero é decomposto em quatro triângulos equiláteros. Desse modo, as partes têm a mesma forma do todo (triângulo) e são semelhantes (equiláteros). Diz-se então, que o triângulo é decomposto em forma estritamente homogênea.

Quando as partes são semelhantes entre si, mas não necessariamente apresentam a mesma forma do todo, a decomposição é dita homogênea:

Figura 13: Decomposição homogênea

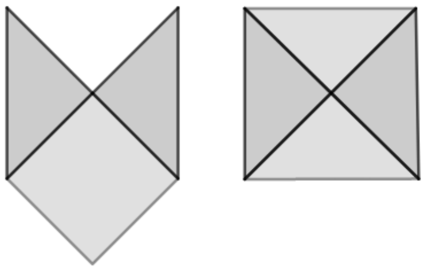


Fonte: Os Autores

A Figura 13 mostra um trapézio isósceles, onde sua base maior é o triplo da base menor. Ele foi decomposto em quatro triângulos retângulos. Nesse caso, as partes são semelhantes (quatro triângulos retângulos semelhantes), mas não têm a mesma forma do todo (trapézio). No entanto, as quatro partes juntas, na posição que mostra a imagem da direita, forma o trapézio original.

Quando as partes da figura, que têm ou não a mesma forma da figura original, formam uma figura diferente da figura original, diz-se que ocorreu uma decomposição heterogênea, conforme mostra a Figura 14.

Figura 14: Decomposição Heterogênea



Fonte: Os Autores

Nessa figura, tem-se inicialmente um hexágono, que pode lembrar a cabeça de um gato, e ao lado dela, as partes do hexágono foram reorganizadas formado um quadrado. Aqui, o hexágono foi decomposto de forma heterogênea.

5. METODOLOGIA

A metodologia dessa pesquisa segue as orientações de Fiorentini e Lorenzato (2012), pois para esses autores, a pesquisa bibliográfica é aquela que se faz preferencialmente sobre documentos escritos. Entre as tantas pesquisas bibliográficas, há a pesquisa meta-análise que consiste em uma revisão sistemática de estudos que tratam de um determinado tema com vistas a reunir informações que possam levar à produção de novos resultados a partir do confronto desses estudos. Contudo, como forma de justificar a escolha da metodologia e da amostra dos materiais, faz-se necessário retomar as discussões já contempladas em capítulos anteriores.

Como foi apresentado no Capítulo 2, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs não deixam explícito o tipo de simetria que estão se referindo e não explicitam qual é a relação entre isometria e simetria, o que causa diversas ambiguidades em relação ao conceito e à classificação delas. Já a BNCC não traz os mesmos termos e classificações contidos nos PCNs, o que sinaliza uma descontinuidade na discussão desse tema. O termo isometria, por exemplo, não aparece nenhuma vez nesse documento. Ainda na BNCC, a relação entre transformações geométricas e simetria não está explícita e faz surgir diversos questionamentos e confusões. Os Guias dos Livros Didáticos apontam que os livros didáticos apresentam problemas semelhantes aos encontrados nos PCNs e BNCC. O tratamento de forma ambígua, sobre uma figura simétrica e o simétrico de uma figura, um foco demasiado nas simetrias axiais em detrimento das outras, são problemas frequentemente apontados pelos Guias. No Guia Curricular 2017 (BRASIL, 2016), os autores indicam que parte desse problema é a falta de esclarecimento da relação entre isometria e simetria, a mesma falta de esclarecimento que foi visto nos PCNs e na BNCC.

Esses problemas se estendem também para livros direcionados a professores de matemática da Educação Básica. Um foco exclusivo nas simetrias que apresentam pelo menos um eixo de simetria é visto em Barbosa (1993) e Ribeiro, Gibim e Alves (2021). Em Murari e Barbosa (2012), para uma figura ser simétrica é necessário ter um eixo de simetria, mesmo as que têm simetria por rotação, mas como foi visto, nem todas as figuras que permanecem invariante por uma rotação, têm eixo de simetria. Embora Barbosa (1993), Pasquini e Bortolossi (2015) e Ribeiro, Gibim e Alves (2021) explicitem qual é a relação entre isometria e simetria, não há uma concordância conceitual entre eles. Já em Brito e Carvalho (2009) não consta a relação entre isometria e simetria e em Murari e Barbosa (2012) essa relação está confusa.

No Capítulo 3 foi discorrido sobre o MMM. Foi no âmbito desse movimento que as isometrias e simetrias foram inseridas nos currículos da Educação Básica, mas esse processo foi conturbado e é possível que não houve uma apropriação adequada destes conceitos, naquela ocasião.

Assim, diante do exposto, pode-se apontar que parte desses problemas podem estar associada à falta de clareza acerca da relação entre isometria e simetria, o que impulsiona a busca pela resposta à questão norteadora da dissertação: Qual a relação entre isometria e simetria de figuras planas? Para investigar essa questão foi selecionada uma amostra de onze documentos escritos, a qual está dividida em duas partes. A primeira parte dessa amostra é composta de documentos relacionados ao MMM. A outra parte são livros que tratam especificamente sobre isometria, simetria ou transformações geométricas no plano. O detalhamento sobre as duas partes da amostra está apresentado a seguir:

1ª parte da amostra: Considerando que as isometrias e simetrias foram inseridas no currículo da Educação Básica brasileira na época do MMM, a primeira parte da amostra é composta por quatro documentos escritos, considerados pelos autores dessa dissertação, como os principais desse movimento, e que falam sobre isometria e simetria, fundamentados principalmente em Oliveira et al. (2011) e Valente et al. (2011).

A primeira obra selecionada para a amostra é a coleção de livros didáticos Matemática Curso Moderno, de Osvaldo Sangiorgi. Essa coleção é composta de quatro volumes, mas somente o terceiro volume traz um estudo sobre isometrias e simetrias. Essa obra foi escolhida por ser a primeira coleção de livros didáticos sobre Matemática Moderna no Brasil e provavelmente, o primeiro livro didático do Brasil a abordar o tema isometria e simetria. Além disso, essa coleção teve grande influência na época, de modo que, vários outros autores de livros didáticos se fundamentaram nessa coleção (VALENTE et al. 2011). As isometrias e simetrias estão somente no 3º volume e a edição a ser analisada é a de 1969. Desse modo, foi selecionado para a amostra a obra Sangiorgi (1969).

A segunda obra selecionada é a tradução de uma coleção de livros didáticos escritos pelo grupo norte americano School Mathematics Study Group – SMSG. No Brasil, tal coleção ganhou o nome de Série Matemática Curso Ginasial e foi traduzida por Lafayette de Moraes. Embora não tenha alcançado o sucesso da coleção de Sangiorgi, ela foi usada em diversas escolas e influenciou autores. Além disso, essa coleção traz os conceitos matemáticos que os idealizadores norte-americanos do MMM queriam difundir no Brasil e no mundo. A coleção do SMSG tinha quatro livros, os dois primeiros foram publicados em 1967, e de acordo com Silva (2013), esses foram os mais difundidos. O terceiro volume foi publicado em 1969 e conforme Silva (2013) parece ter sido pouco divulgado. Essa pesquisadora afirma ter dificuldade em encontrar esse tomo. Ela encontrou somente dois exemplares para consulta e empréstimos, na biblioteca da UNESP nos campi de Rio Claro e Bauru, sendo que esta última, doou o exemplar para o acervo do GHOEM. Os autores dessa dissertação encontraram os três tomos da coleção à venda, no sebo Abbondanza de São Bernardo do Campo SP, onde foram adquiridos. Nos dois primeiros tomos, há bastante marcas de manuseio, enquanto no terceiro tomo praticamente não há marcas de manuseio, o que reforça a hipótese da Silva (2013) de que somente os dois primeiros tomos foram amplamente usados. Em uma entrevista a Silva (2013), Lafayette diz que a coleção tinha quatro volumes e os quatro foram traduzidos. No entanto, Silva (2013) diz que não encontrou um único exemplar do quarto tomo, mesmo após diversas pesquisas em bibliotecas e sebos. Um estudo de isometrias e simetrias está justamente no terceiro tomo, o mais raro entre os três primeiros e é esse que entra para amostra, como referência SMSG (1969).

A terceira obra selecionada para a amostra são os Guias Curriculares Propostos para as Matérias do Núcleo Comum do Ensino do 1º Grau (SÃO PAULO, 1975), especificamente o último capítulo, que é referente a matemática (BASTOS, LAMPARELLI e FRANCHI, 1975). O capítulo de matemática desse guia foi liderada pelo professor Almerindo Marques Bastos, um defensor da inserção da isometria e simetria na Educação Básica. Esses guias parecem ter influenciado outros documentos orientadores, inclusive os PCNs e mais tarde a BNCC, no que se refere a isometria e simetria.

A última obra selecionada para a primeira parte da amostra é um livro escrito por Martha Dantas, Omar Catunda e equipe. Essa equipe de professores publicou em 1988 o livro As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria (CATUNDA et al., 1988), que embora na data de publicação o MMM já havia terminado, a obra é uma síntese da produção desses autores nas décadas de 1960 e 1970.

2ª parte da amostra: Para compor a segunda amostra, buscou-se por livros que abordam isometria e simetria, mais citados em dissertações, teses e artigos. A primeira parte dessa busca ocorreu no Catálogo de Teses e Dissertações, usando as palavras-chaves ‘simetria’, ‘isometria’ e ‘transformações geométricas’. Foram encontradas 61 dissertações ou teses que abordam esses temas, voltadas à Educação Básica. O Anexo I, mostra um detalhamento dessas buscas, mostrando quantos resultados foram obtidos em cada palavra-chave e como foram escolhidos os 61 documentos. Além desses, foram escolhidas dez revistas de Educação Matemática com conceito maior ou igual que A2, em pelo menos uma área de avaliação. Nelas, foram pesquisados artigos que falavam sobre isometria ou simetria e que apresentavam nas referências, livros sobre esse tema. Foram encontrados 13 artigos com esses requisitos. O Anexo II mostra as dez revistas selecionadas e a quantidade de artigos em cada revista, com esses requisitos. Assim, a amostra foi composta por 61 dissertações ou teses mais 13 artigos, totalizando 74 documentos escritos. O Anexo III mostra as referências desses 74 documentos, enumerados da seguinte forma [1], [2], [3], …, [73], [74].

Após selecionados as 74 dissertações, teses e artigos, foram analisadas as referências bibliográficas de cada um desses documentos. Procurou-se nas referências somente os livros de matemática, e desta forma a busca limitou-se à análise dos títulos dos livros. Ou seja, os livros que tinham no título assuntos sobre teorias, metodologias, entre outros, não foram selecionados, sendo selecionados aqueles que faziam menção a algum assunto de matemática. Desse modo, foram encontrados 63 livros. Devido a grande quantidade de livros, eles foram divididos em seis grupos:

Grupo I: livros dedicados especificamente ao estudo de isometrias e simetrias, 10 livros.

Grupo II: devido a grande quantidade de livros do autor Elon Lages Lima e o grande número de citações desses livros nos materiais pesquisados, este grupo foi composto por obras somente desse autor, exceto um livro dele que já estava no Grupo I. Foram encontrados 7 livros.

Grupo III: livros de geometria euclidiana, composto por 12 livros.

Grupo IV: livros de álgebra linear e/ou geometria analítica, composto por 15 livros.

Grupo V: livros de álgebra abstrata, composto por 4 livros.

Grupo VI: livros que não foram identificados em nenhum dos grupos anteriores, composto por 15 livros.

O Anexo IV mostra os quadros com o título, o autor e o código das dissertações, teses ou artigos que citam os 63 livros.

Devido ao grande número de livros, foi selecionado para a amostra somente o Grupo I, ou seja, aqueles livros que tratam especificamente sobre isometrias ou simetrias, composto por dez livros. Dentre esses dez livros, a obra intitulada Uma História da Simetria, do autor Ian Stewart, não foi selecionada, porque fala sobre a história da simetria nas equações, que não é o foco desse trabalho. Ainda dentre esses dez, consta o livro de Pasquini e Bortolossi (2015), o qual já foi apresentado e discutido na problemática e por isso não foi selecionado para a amostra. Entre os dez também está a obra de Catunda et al. (1988) e por compor a primeira parte da amostra, relativa aos livros relacionados ao MMM, foi retirado da segunda parte da amostra. Portanto, a segunda parte da amostra contou com sete obras. A amostra como um todo foi formada por onze documentos, conforme mostra o Quadro 4.

Quadro 3: Amostra

n.	Título da obra	Autor (es)	Referência
Obras relacionadas ao Movimento da Matemática Moderna			
1	Matemática Curso Moderno 3º Volume	Osvaldo Sangiorgi	Sangiorgi (1967)
2	Matemática Curso Ginasial Vol. III	School Mathematics Study Group SMSG	SMSG (1969)
3	Capítulo de Matemática de São Paulo (1975)	Almerindo Marques Bastos Anna Franchi Lydia Condé Lamparelli	Bastos, Lamparelli e Franchi (1975)
4	As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria	Omar Catunda Martha Maria Souza Dantas Eliana C. Nogueira Neide C. P. Souza Eunice C. Guimarães	Catunda et al. (1988)
Livros mais citados em dissertações, teses e artigos			
5	Isometrias	Elon Lages Lima	Lima (2007)
6	Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano	Erika Brigitta Ledergerber - Ruoff	Ledergerber-Ruoff (1982)
7	Simetria	Hermann Weyl	Weyl (1997)
8	Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares	Sérgio Alves Maria Elisa E. L. Galvão	Alves e Galvão (1996)
9	Grupos e Simetria	David W. Farmer	Farmer (1999)
10	Simetria e Transformações Geométricas	Eduardo Veloso	Veloso (2012)
11	Isometrias no Plano: Uma abordagem segundo a Geometria Analítica	Helena F. S. de Melo	Melo (2010)

Fonte: Os Autores

Após selecionada a amostra, foi investigado em cada obra, a relação entre isometria e simetria. No entanto, para compreender essa relação foi necessário tomar conhecimento do que era isometria e simetria para cada um dos autores. As classificações de isometria e simetria, como translação, rotação e reflexão estão intrinsecamente ligadas a esses conceitos, por isso é necessário também perguntar aos autores como eles a classificam. Logo, foram definidas as categorias de análise que subsidiaram o confronto de dados, fundamental para a pesquisa meta-análise. Tais categorias foram definidas como questões que foram investigadas em cada uma das obras analisadas:

1) O que é isometria e simetria?

2) Como as isometrias e simetrias são classificadas?

3) Qual a relação entre isometria e simetria?

Nota-se que a terceira categoria de análise coincide com a pergunta norteadora da pesquisa. Isso se faz necessário, pois é a partir da compreensão acerca da relação entre isometria e simetria, observada na obra de cada autor, que foi possível responder a pergunta norteadora desta pesquisa. Assim, após investigadas as três questões, os dados foram cruzados com vistas a dar resposta à questão norteadora. Assim, justifica-se a escolha pela pesquisa bibliográfica e pela meta-análise, que investiga as mesmas questões em diferentes obras e depois confronta esses dados (FIORENTINI e LORENZATO, 2012).

Como alguns autores estudam somente as isometrias e outros somente as simetrias, outros ainda, estudam alguns tipos específicos de isometria ou simetria, foi necessário reorganizar a amostra de acordo com a ênfase do conteúdo (Quadro 5). Assim, em alguns casos não foram utilizadas as três categorias de análise. Por exemplo, para os autores que faziam um estudo exclusivo sobre simetria e não mencionaram nenhuma vez o termo isometria, não foi perguntado, ‘o que é isometria?’ e nem ‘Qual a relação entre isometria e simetria’, mas somente ‘O que é simetria?’ e ‘Como as simetrias são classificadas?’.

Quadro 4: Organização da amostra por conteúdo

Título da obra	Referência
Obras com ênfase em isometria	
Isometrias	Lima (2007)
Isometrias no Plano: Uma abordagem segundo a Geometria Analítica	Melo (2010)
Obras com ênfase em simetria	
Matemática Curso Ginasial Vol. III	SMSG (1969)
Simetria	Weyl (1997)
Grupos e Simetria: Um guia para descobrir a matemática	Farmer (1999)
Obras com ênfase em isometria e simetria	
Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano	Ledergerber-Ruoff (1982)
Um estudo geométrico das transformações elementares	Alves e Galvão (1996)
Simetria e Transformações Geométricas	Veloso (2012)
Obras com ênfase em alguns tipos de isometria e simetria	
Matemática Curso Moderno	Sangiorgi (1967)
Capítulo de matemática de São Paulo (1975)	Bastos, Lamparelli e Franchi (1975)
As transformações geométricas e o ensino	Catunda et al (1988)

Fonte: Os Autores

Com base no Quadro 5, inicialmente foram analisadas as obras com ênfase em isometria. Em seguida, aquelas com ênfase em simetria. Posteriormente as obras que enfatizam isometria e simetria, ficando por último as que apresentam somente alguns tipos de isometria ou de simetria.

6. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

No Capítulo 3 foi visto que o MMM está diretamente ligado às estruturas algébricas. Além disso, algumas obras que compõem a amostra, e que serão apresentadas no próximo capítulo, também recorrem a estruturas algébricas para abordar a isometria e simetria e outras recorrem as funções. Desse modo, tornou-se necessário uma breve retomada de alguns assuntos, para compreender como eles se relacionam com a isometria e simetria.

Essa retomada busca valorizar as diferentes linguagens, em consonância com a Teoria dos Registros das Representações Semióticas de Duval, tanto para construir alguns fundamentos matemáticos, como para analisar a amostra, nos capítulos seguintes. A referência para o estudo de funções é Lima (2013) e para o estudo de estruturas algébricas são Monteiro (1969), Domingues e Iezzi (2003) e Vieira (2013).

6.1 FUNÇÕES

Uma função é uma correspondência entre dois conjuntos A e B, com uma regra que diz como relacionar cada elemento de A, a um único elemento de B. O conjunto A é chamado domínio e o conjunto B contradomínio. O subconjunto de B formado pelos elementos pelo qual foram associados os elementos de A, é chamado imagem I. Em alguns casos $B = I$ e quando isso ocorre, a função é dita sobrejetiva. Quando dois elementos quaisquer do domínio, jamais são relacionados a um mesmo elemento do contradomínio, essa função é injetiva. Em uma linguagem formal, se f é uma função e para todo $a_1 \neq a_2 \in A \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, então f é injetiva. Se uma função f for injetiva e sobrejetiva, então ela será, bijetiva (LIMA, 2013).

Geralmente não se define conjunto, mas pode ser compreendido como sinônimo de classe ou coleção e seus elementos podem ser qualquer coisa. Segundo Iezzi e Domingues (2003, p. 8):

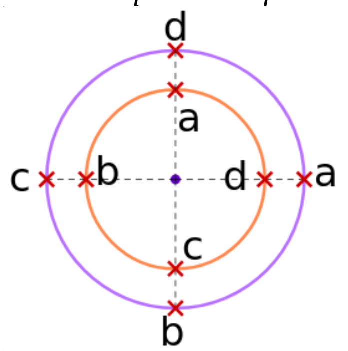
> Não há restrições quanto à escolha dos elementos de um conjunto, salvo que excluiremos a possibilidade de um conjunto ser elemento dele mesmo. Assim não há nenhum inconveniente em considerar, por exemplo, um conjunto formado por um número natural, uma bola de futebol e um automóvel.

A não restrição dos elementos de um conjunto permite a criação dos mais diversos tipos de funções. Desse modo, o domínio pode ser um conjunto de pontos, um conjunto de funções, entre outros. Para exemplificar, como a não restrição dos elementos de um conjunto permite criar variados tipos de funções, será definida uma função g de modo que, o domínio dessa função seja o conjunto K_A, o conjunto das permutações de um conjunto discreto[18] A.

Para explicar o que é o conjunto das permutações K_A, é tomado um conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ como exemplo. Para um estudo mais generalizado e axiomático, veja a seção seis, do capítulo IV de Domingues e Iezzi (2003) ou a seção 3.5 de Vieira (2013). O conjunto K_A é o conjunto das funções $f: A \rightarrow A$, bijetivas, tal que $f(a), f(b), f(c), f(d)$ formam, respectivamente, todas as permutações dos elementos de A. Como o conjunto A tem quatro elementos e $4! = 24$, então o conjunto K_A deverá ter 24 elementos, que são, 24 funções bijetivas.

Com a finalidade de definir as 24 funções, será usado um esquema, não usual, criado pelos autores dessa dissertação, o qual será também usado em capítulos posteriores para análise dos dados. Dado dois círculos concêntricos, ambos divididos em quatro arcos congruentes. Coloca-se um ponto em cada extremidade dos arcos, tanto do círculo menor quanto do maior e relaciona a cada um dos pontos de cada círculo, um elemento do conjunto A. Os elementos relacionados ao círculo menor são fixos durante a construção de todas as funções, já os elementos relacionados ao círculo maior poderão ser trocados, ao longo da construção das funções. A Figura 15 representa o esquema em sua fase inicial.

Figura 15: Esquema em fase inicial



Fonte: Os Autores

---

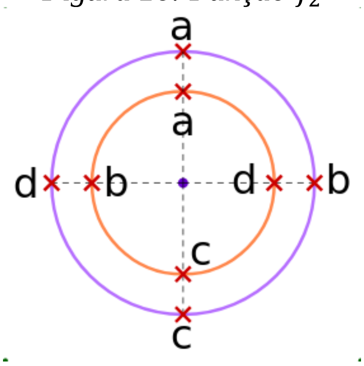
[18] . Um conjunto é contínuo, quando, entre dois de seus elementos, há sempre infinitos elementos. Por exemplo, o conjunto dos números racionais é contínuo, pois entre dois números racionais quaisquer, existem infinitos números racionais. Os conjuntos que não possuem essa propriedade são os conjuntos discretos. O conjunto dos números inteiros é discreto, pois por exemplo, entre os números 6 e 7 não há nenhum número inteiro. Desse modo, um conjunto contínuo sempre terá infinitos elementos e um conjunto discreto, pode ou não, ter infinitos elementos. O conjunto dos números inteiros, por exemplo, tem infinitos elementos, mas é discreto (WEYL, 1997 e LIMA, 2003).

Os dois elementos que estão no mesmo raio, são valores de entrada e saída da função f, de modo que, o elemento que estiver no círculo menor é o valor de entrada e o elemento que estiver no círculo maior, o valor de saída. Os elementos relacionados ao círculo maior, serão alternados, até que sejam esgotadas todas as opções, ou seja, até que formem todas as permutações. Todas as funções produzidas nesse esquema serão injetivas, pois em cada raio, haverá apenas um elemento do domínio relacionado a um único elemento da imagem. Sem perda de generalidade, se o elemento $a \in A$ estivesse em dois pontos distintos P e Q do círculo maior, a função não seria injetiva, pois o elemento a seria imagem de dois elementos distintos do domínio. Além disso, as funções produzidas nesse esquema são sobrejetivas, pois todos os elementos relacionados aos pontos do círculo maior terão um correspondente no círculo menor. Desse modo, as funções serão bijetivas, assim como devem ser as funções do conjunto K_A.

Como os dois círculos foram divididos em quatro arcos iguais, cada arco com 90^o, ao girar o círculo maior em torno do seu centro, por ângulos múltiplos de 90^o em qualquer sentido, os quatro pontos do círculo maior, que estão destacados na Figura 15, ficarão no mesmo raio do círculo menor. Desse modo, pode-se definir quatro funções, $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,$ girando o círculo maior no sentido anti-horário, em torno do seu centro com ângulos de $0^o,\ 90^o,\ 180^o,\ 270^o$ respectivamente. Desta forma tem-se:

- $f_1 : A \to A$ | Um giro de 0^o em relação a Figura 15. Nesse caso, a Figura 15 fica inalterada. Tem-se ainda que: $f(a) = d, f(b) = c, f(c) = b\ e\ f(d) = a$.
- $f_2 : A \to A$ | Um giro de 90^o no sentido anti-horário, em relação a Figura 15. Desse modo,$f(a) = a, f(b) = d, f(c) = c\ e\ f(d) = b$ conforme Figura 16.

Figura 16: Função f_2

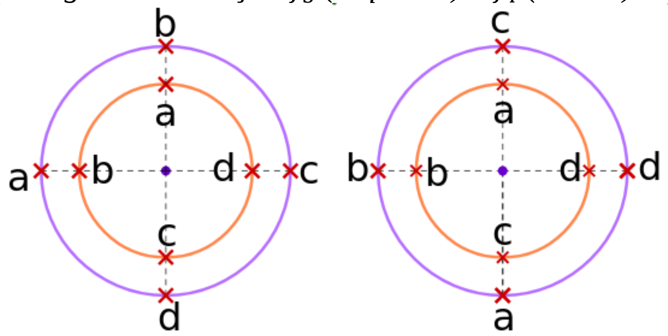


Fonte: Os Autores

$f_3: A \to A$ | Um giro de 180^o no sentido anti-horário, em relação a Figura 15. Desse modo fica: $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = d$ e $f(d) = c$ conforme a Figura 17 (esquerda).

$f_4: A \to A$ | Um giro de 270^o no sentido anti-horário, em relação a Figura 15. Desse modo fica: $f(a) = c, f(b) = b, f(c) = a$ e $f(d) = d$, conforme a Figura 17 (direita).

Figura 17: Função f_3 (esquerda) e f_4 (direita)

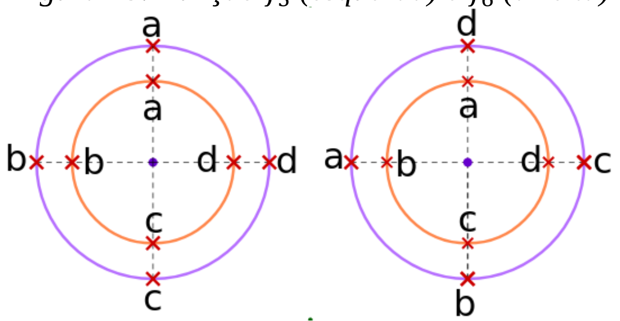


Fonte: Os Autores

Na Figura 15, os elementos de A foram colocados, no círculo maior, na ordem d, c, b, a, quando se observa o sentido anti-horário. Se os pontos forem colocados na ordem inversa, isto é, na ordem a, b, c, d, no sentido anti-horário (Figura 18) e seguindo o mesmo esquema, pode-se obter mais quatro funções, ao girar essa nova figura com ângulos de $0^o, 90^o, 180^o, 270^o$ no sentido anti-horário. São elas:

- ➢ $f_5: A \to A$ | Elementos invertidos, em relação à Figura 15, obtendo assim a Figura 18 (esquerda). Desse modo tem-se a função identidade, isto é, $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = c$ e $f(d) = d$.
- ➢ $f_6: A \to A$ | Um giro de 90^o no sentido anti-horário, em relação à Figura 18 (esquerda). Desse modo tem-se $f(a) = d, f(b) = a, f(c) = b$ e $f(d) = c$ conforme a Figura 18 (direita).

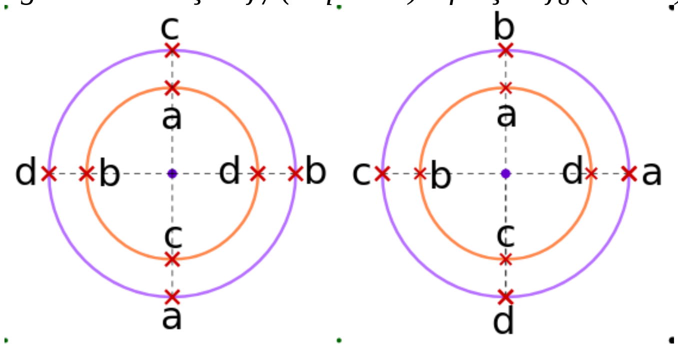
Figura 18: Função f_5 (esquerda) e f_6 (direita)



Fonte: Os Autores

- $f_7 \colon A \to A$ | Um giro de 180^o no sentido anti-horário, em relação à Figura 18 (esquerda), obtendo $f(a) = c,\ f(b) = d,\ f(c) = a$ e $f(d) = b$ conforme a Figura 19 (esquerda).
- $f_8 : A \to A$ | Um giro de 270^o no sentido anti-horário, em relação à Figura 18 (esquerda). Desse modo, $f(a) = d,\ f(b) = c,\ f(c) = d$ e $f(d) = a$ conforme a Figura 19 (direita).

Figura 19: Função f_7 (esquerda) e função f_8 (direita)



Fonte: Os Autores

Mantendo-se os elementos nas ordens a, b, c, d e d, c, b, a, esgotaram-se todas as opções. Nas oito funções definidas, os elementos a e c estiveram diametralmente opostos, considerando o esquema dos círculos concêntricos. O mesmo ocorreu com os elementos b e d. Se a ordem for modificada, de modo que a e b fiquem diametralmente opostos e consequentemente c e d também, os elementos do conjunto A ficarão organizados da forma a, c, b, d, e assim pode-se obter mais oito funções, quatro delas, girando o círculo maior com ângulos de $0^o, 90^o, 180^o, 270^o$ no sentido horário e outras quatro, invertendo a ordem parad, b, c, ae girando com as mesmas amplitudes. Mais oito funções podem ser obtidas, organizando os elementos de A na forma a, c, d, b e na sua forma inversa b, d, c, a. Em ambos os casos, a e d e b e c ficam diametralmente opostos. Desse modo, completam-se as 24 funções. Pode-se notar que, $fi(a),\ fi(b),\ fi(c),\ fi(d)$ com $i = (1,2,3, \ldots, 23,24)$, formam todas as permutações do conjunto A. Portanto, o conjunto procurado é $K_A = \{f1, f2, f3, \ldots, f23, f24\}$.

O conjunto K_A é o conjunto de todas as permutações de A e pode ser generalizado para qualquer conjunto finito. Assim, se A tiver n elementos, K_A será um conjunto de $n!$ funções.

Inicialmente foi proposto definir uma função g de modo que K_A fosse o domínio. Essa função pode ser definida da seguinte maneira: $g \colon K_A x K_A \to A \mid g \colon fi \circ fj$ com $i, j =$

$(1,2,\dots,n!)$. Ou seja, g é uma função que toma dois elementos do conjunto K_A e faz a função composta dessas duas funções selecionadas. Por exemplo: $g(f_2,f_8) = f_2 \circ f_8$. A função g e algumas variações dela são importantes para o estudo de certas estruturas algébricas e será retomada em capítulos posteriores.

6.2 ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

6.2.1 Dos semigrupos aos grupos comutativos

Estrutura Algébrica é a união de um conjunto A munido de uma operação binária. Uma operação binária sobre um conjunto A é uma função $f: A \times A \to A$. Desse modo, uma estrutura algébrica do conjunto A com a operação $f: A \times A \to A$ pode ser representada por $\langle A, f\rangle$ ou por, $\langle A, °\rangle$, nesse último caso tem-se que $° = f: A \times A \to A$.

A subtração de números inteiros é um exemplo de estrutura algébrica, pois há um conjunto, que é o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, e uma operação, que é a subtração. A subtração de números inteiros em termos de função pode ser escrita como $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de modo que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ tem-se $f(a,b) = a - b$. Um exemplo de subtração, escrita nessa linguagem é $f(2,9) = 2 - 9 = -7$. Essa era uma das noções que os idealizadores do MMM defendiam, que deveriam ser ensinadas aos alunos da Educação Básica, abordar as operações básicas através de estruturas algébricas.

Uma estrutura algébrica é um semigrupo, se a operação binária da estrutura for associativa com os elementos do conjunto da estrutura. Em linguagem objetiva, $\langle A, °\rangle$ é um semigrupo, se para todo $a, b, c \in A$ tem-se que $(a°b)°c = a°(b°c)$. A estrutura algébrica vista no parágrafo anterior, que trata do conjunto dos inteiros munido da subtração, não é um semigrupo. Para mostrar, basta um contraexemplo:

$5 - (3 - 7)$	$(5 - 3) - 7$
$5 - (-4)$	$2 - 7$
9	-5

Este foi um exemplo em que $a - (b - c) \neq (a - b) - c$, e, portanto, a estrutura do conjunto dos números inteiros munido da operação subtração, não é um semigrupo. Se a subtração fosse trocada pela adição, então seria um semigrupo, pois $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Se um semigrupo tiver um elemento neutro, então ele é um monoide. Ou seja, se $\langle A, °\rangle$ é um semigrupo e existe um elemento $e \in A$ tal que, para todo $a \in A$ tem-se que, $a\, °e = e\, °\, a = a$, então e é o elemento neutro de $\langle A, °\rangle$ e, portanto, $\langle A, °\rangle$ é um monoide.

Dado um monoide $\langle A, °\rangle$, se todo $a \in A$ tiver um inverso, então $\langle A, °\rangle$ é um grupo. Ou seja, se para todo $a \in A$ existir um $a' \in A$ tal que $a\, °\, a' = a'°a = e$, então diz-se que a' é o inverso de a e $\langle A, °\rangle$ é um grupo. O grupo é uma das estruturas algébricas mais importantes da matemática, e foi visto no Capítulo 3, que em certo momento do século XIX, começou-se a pensar que toda a matemática não passaria de um estudo de grupos. Os grupos ganham uma notação especial, que em vez de usar A como o conjunto da estrutura, usa-se G. Desse modo, quando uma estrutura algébrica for escrita da forma $\langle G, °\rangle$ subentende-se que é um grupo, ou seja, é uma estrutura algébrica, associativa, que possui elemento neutro e que todos os elementos de G possuem um inverso em relação a operação ° .

Se um grupo for comutativo, então ele é chamado de grupo abeliano ou grupo comutativo. Isto é, dado $\langle G, °\rangle$, se para todo $a, b \in G$ for válido que $a°b = b°a$ então $\langle G, °\rangle$ é um grupo comutativo.

Uma estrutura algébrica $\langle A, °\rangle$ em que A é um conjunto de funções e ° é a composição das funções do conjunto A, assim como a função g visto no mesmo capítulo, é um estudo de grande interesse na álgebra moderna. Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$ a função f composta por g é a função $f \circ g$ tal que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para todo $x \in A$. A composição de funções, é associativa. Isso porque, dado três funções $f: A \to B, g: B \to C, h: C \to D$ para calcular $((h \circ g) \circ f)(a)$ para todo $a \in A$, calcula-se inicialmente $f(a)$. Como f é função, com imagem em B, vai existir um único $b \in B$ tal que$f(a) = b$. Desse modo $((h \circ g) \circ f)(a) = ((h \circ g) \circ f(a)) = ((h \circ g)(b))$. Para calcular $h \circ g(b)$ calcula-se inicialmente $g(b)$, e como g é uma função com imagem em C, tem-se que $g(b) = c$ para $c \in C$ e, portanto, $h \circ g(b) = h(c)$. Finalmente, como h é uma função com imagem em D, tem-se que $h(c) = d \in D$. Em resumo, $((h \circ g) \circ f)(a) = d \in D$ para todo $a \in A$. Por outro lado, tem-se que $(h \circ (g \circ f))(a) = h \circ (g(f(a))) = h(g(b)) = h(c) = d \in D$. Desse modo, $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a)$ para todo $a \in A$, e, portanto, a composição de funções é associativa.

A composição de funções possui elemento neutro, sendo que este é a função identidade. Mais precisamente, a função identidade é tal que $Id: A \to A$ e $Id(a) = a$ para todo $a \in A$. Logo, para qualquer função $f: A \to B$ tem-se que $(f \circ Id)(a) = f(Id(a)) = f(a)$, e por outro lado, $(Id \circ f)(a) = Id(f(a)) = f(a)$. Sendo assim, $(f \circ Id)(a) = (Id \circ f)(a) = f(a)$ para todo

$a \in A$, e, portanto, a composição de funções possui elemento neutro, e o elemento neutro é a função identidade.

Desse modo, toda a estrutura algébrica $\langle K, ° \rangle$, de modo que K seja um conjunto de funções, todas com o mesmo domínio e a mesma imagem e ° seja a composição de funções. Essa estrutura será um semigrupo, pois como foi demonstrado, a composição de funções é associativa. Se K contém a função identidade, então $\langle K, ° \rangle$ será um monoide, pois a função identidade é o elemento neutro da composição de funções. No entanto, $\langle K, ° \rangle$ pode ou não, ser um grupo. Isto porque, algumas funções têm inversa e outras não. Além disso, $\langle K, ° \rangle$ pode ou não, ser um grupo comutativo, porque a composição de duas funções, pode ou não, ser comutativa.

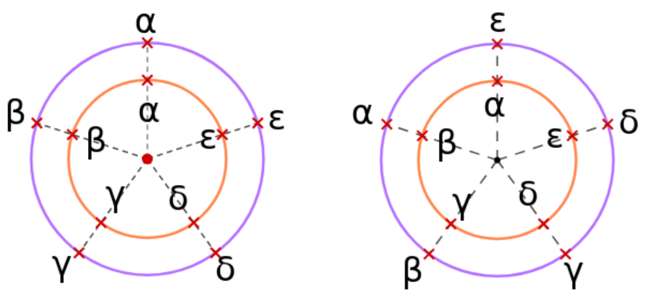
6.2.2 Grupos Diedrais

Na seção 6.1 foi visto o conjunto K_A, que é o conjunto de todas as permutações de A. Ao tomar um conjunto $K_A = \{f1, f2, f3, \ldots, fn!\}$ e uma operação $g: K_A x K_A \rightarrow K_A \mid g(fi, fj) = fi \circ fj, i, j = (1,2,3, \ldots, n!)$, ou seja, a composição das funções do conjunto K_A, então $\langle K_A, g \rangle$ é um grupo, é chamado de grupo de permutações de A. Vieira (2013) mostra que $\langle K_A, g \rangle$ é um grupo.

Um grupo diedral é um subgrupo de um grupo de permutação $\langle K_A, g \rangle$. Isto é, um grupo com a mesma operação g, mas com um conjunto $S_A \subset K_A$ que possui as mesmas propriedades de $\langle K_A, g \rangle$. Para exemplificar quais são os elementos de S_A, será recorrido ao esquema dos dois círculos concêntricos, que foi usado na seção 6.1. Naquele esquema, foi usado um conjunto A com 4 elementos, mas ele pode ser generalizado para um conjunto A com n elementos. Neste caso, os círculos deverão ser divididos em n arcos congruentes. Para definir o conjunto K_A, o círculo externo será alterado, até completar todas as permutações de A. Para definir o conjunto S_A o esquema será mais simples. Inicialmente os elementos de A serão postos no círculo, de modo que se obtenha a função identidade. Uma vez fixados os elementos de A na ordem $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ eles só poderão ser alterados para a forma $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$. Além disso, o círculo maior será girado n vezes em um sentido escolhido (horário ou anti-horário) e todos os giros em torno do centro do círculo terão um ângulo $\frac{360^o}{n}$. Como já foi visto, o conjunto K_A tem $n!$ elementos, já o conjunto S_A terá, $2n$ elementos.

Para exemplificar, será determinado o grupo diedral do conjunto $M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Como são 5 elementos, as circunferências serão divididas em 5 arcos congruentes. Cada arco terá $\frac{360^o}{5} = 72^o$ e consequentemente, cada giro do círculo externo, terá 72^o. A Figura 20 (esquerda), mostra a função identidade, e a partir dela serão dadas 5 voltas no sentido anti-horário, em que cada volta definirá uma função. Como na Figura 20 (esquerda) a ordem dos elementos, no sentido anti-horário, é $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, a outra ordem permitida será essa mesma lista de traz para frente, ou seja, $\varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$, conforme mostra a Figura 21. Assim, poderão ser definidas mais 5 funções, totalizando as 10 funções, e o conjunto S_M terá 10 funções bijetivas. As primeiras 5 funções, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, serão obtidas a partir de giros de 0º, 72º, 144º, 216º, 288º, respectivamente, todas no sentido anti-horário na ordem $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. As outras 5 funções, f_6 , f_7, f_8, f_9, f_{10}, obtidas a partir da ordem $\varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$. A Figura 20 (direita) mostra uma forma de obter a função f_2 depois de um giro de 72^o no sentido anti-horário.

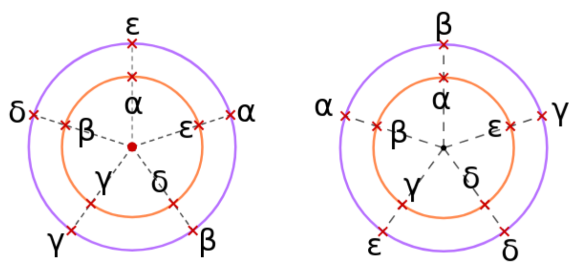
Figura 20: Função f_1 (esquerda) e função f_2 (direita)



Fonte: Os Autores

A Figura 21 (esquerda) mostra a ordem dos elementos, oposta à Figura 20, ou seja, $\varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$ e define a função f_6. Já a Figura 21 (direita), mostra a forma de obter a função f_8, obtida a partir da ordem $\varepsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha$ com um giro de 144^o.

Figura 21: Função f_6 (esquerda) e função f_8 (direita)



Fonte: Os Autores

Desse modo, o conjunto S_A é tal que, $S_A = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}\}$. Já o grupo diedral é o grupo $\langle S_A, °\rangle$, mais especificamente $° = g: S_A \times S_A \to S_A \mid g(f_i, f_j) = f_i \circ f_j$. O grupo diedral geralmente tem a notação D_n, ou seja, $D_n = \langle S_A, °\rangle$ em que n indica a quantidade de elementos de A.

6.2.3 Grupos Cíclicos

Antes de verificar o que é um grupo cíclico, deve-se saber como funcionam as potências em um grupo. Seja um grupo $\langle G, °\rangle$ e $a \in G$, a^n é o elemento a operado n vezes por ele mesmo, usando a operação °. Por exemplo, $a^4 = a°a°a°a$. Ao tomar o grupo $\langle \mathbb{Z}, +, \rangle$, tem-se que $5^3 = 15$, pois $5 + 5 + 5 = 15$. Se, n potências de a gerarem todos os elementos de G, então $\langle G, °\rangle$ é um grupo cíclico. No caso de conjuntos G finitos, usa-se a notação C_n para designar um grupo cíclico e n é o número de potências necessárias, para gerar todo o conjunto.

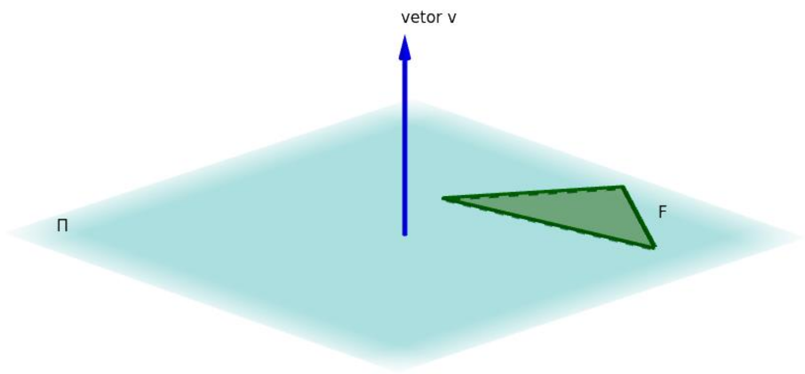
6.3 UNIVERSO DE TRABALHO

De acordo com Rohde (1982), a simetria é objeto de estudo na cristalografia, petrologia (ciências das rochas), estratigrafia, sedimentologia, geologia estrutural, zoologia, botânica, virologia, anatomia. Ainda de acordo com o mesmo autor, na matemática a simetria é estudada em equações, funções, matrizes, jogos, tensores, curvas, geometria plana, geometria espacial e estatística. Na química está presente nas moléculas, isomeria, ligações polares, apolares e multicêntricas. Na física, em energia potencial, estruturas elétricas e antimatéria. Na filosofia é estudada na filosofia da arte e estética, filosofia dialética e na metafilosofia zen. Também se encontra simetria na arquitetura, urbanismo, design, escultura e pintura.

Em Weyl (1997), também pode ser vista a simetria na arte da antiguidade, na filosofia, na teoria da relatividade, na cristalografia e na botânica. Além disso, os autores dessa dissertação, ao selecionarem a amostra, encontraram trabalhos de simetria em números complexos, probabilidade e equações diferenciais, além de trabalhos de isometria na área de Educação Física.

Devido a simetria ser objeto de estudo em diversas áreas das ciências, é necessário delimitar em qual âmbito elas estão estudadas neste trabalho. Desse modo, o estudo considera as isometrias e simetrias de figuras no plano euclidiano.

Figura 22: Figura em um plano euclidiano



Fonte: Os Autores

A Figura 22 mostra o exemplo de um plano Π, representado na cor azul. O vetor v, é o vetor normal ao plano Π . Sendo assim, todas as retas contidas em Π são perpendiculares a v. Já a figura F é um subconjunto não vazio de Π. Este é o conjunto universo para essa dissertação, pois são analisadas somente isometrias e simetrias de figuras planas.

7. ANÁLISE DA AMOSTRA

Neste capítulo são analisadas as onze obras que compõem a amostra. Será investigado em cada obra: O que é isometria? O que é simetria? Como as isometrias e simetrias são classificadas? Qual a relação entre isometria e simetria? A exposição das respostas dessas questões, será feito em linguagem natural e depois convertido em linguagem figural, de modo a valorizar as múltiplas linguagens, defendidas por Duval (2004), como fundamentais para a aprendizagem conceitual. E para verificar quando dois autores estão referindo-se ao mesmo objeto, será usado o tratamento ou a conversão.

7.1 OBRAS COM ÊNFASE EM ISOMETRIA

7.1.1 Introdução

As obras que têm uma ênfase em isometria são: o livro Isometria, de Elon Lages Lima (LIMA, 2007); e o livro Isometrias no Plano: Uma abordagem segundo a Geometria Analítica, de Helena de Fátima Souza Melo (MELO, 2010).

O matemático Elon Lages Lima (1929 – 2017) foi apresentado no Capítulo 3, como um dos estudiosos que fez doutorado nos Estados Unidos com uma bolsa da *Rockefeller Foundation* e depois tornou-se um destacado matemático brasileiro, importante também na história do IMPA. Ele reapareceu no Capítulo 5, como o autor mais citado na amostra das 74 dissertações, teses e artigos, conforme mostram os quadros do Anexo IV. Entre as suas obras, uma delas é Isometria (LIMA, 2007), que é o livro mais citado nos 74 documentos da amostra.

O livro Isometria, conforme o autor comenta no prefácio, é fruto de um curso para professores que ele lecionou na Argentina em 1995. A primeira edição da obra foi em 1996 e a segunda edição, que será utilizada para a análise, é de 2007. De acordo com os comentários de Elon L. Lima na contracapa, a obra é de nível elementar e tem o objetivo de estudar as isometrias de forma singela.

Lima (2007) estuda as isometrias com funções e coordenadas. Ele divide o estudo em três partes. As isometrias na reta, isto é, as funções isometrias onde o domínio e o contradomínio são retas, essa parte abrange os três primeiros capítulos. As isometrias no plano, isto é, as funções isometrias onde o domínio e o contradomínio são planos, essa parte inicia no capítulo IV e finaliza no capítulo VII. E a terceira parte, as isometrias no espaço, ou seja, as funções isometrias em que o domínio e o contradomínio são o espaço euclidiano tridimensional, essa parte inicia no capítulo VIII e vai até o XII, que é o último do livro. Como a presente pesquisa procura investigar as isometrias no plano, então os capítulos IV ao VII são objetos de estudo, salvo as situações em que o autor usa definições ou conceitos explicados em capítulos anteriores.

Helena F. S. Melo é portuguesa, professora do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores em Portugal. A obra Isometrias no Plano: Uma abordagem segundo a Geometria Analítica (MELO, 2010), é, de acordo com a autora no prefácio da obra, o resultado de lecionar várias disciplinas de matemática em licenciaturas e bacharelados. A obra encontra-se disponível gratuitamente para download, no site do repositório da Universidade dos Açores[19]. Enquanto Lima (2007) dá uma ênfase às funções, no estudo de isometrias, Melo (2010) aborda as isometrias com coordenadas e matrizes de transformações, além de focar nas isometrias de figuras. Nos quatro primeiros capítulos da obra, a autora faz um estudo de coordenadas, matrizes e a relação com a isometria. Do capítulo cinco ao dez, em cada capítulo ela faz um estudo de uma isometria em específica e no último capítulo, alguns teoremas gerais e conclusão do estudo.

7.1.2 O que é isometria para Lima (2007) e Melo (2010)?

Para Lima (2007), uma isometria é qualquer função, onde o seu domínio pode ser uma reta, um plano ou o espaço euclidiano tridimensional, desde que essa função preserve distâncias. Ou seja, qualquer função que faz uma correspondência entre os pontos de uma reta, plano ou espaço que preservam a distância, pode ser chamada de isometria.

Para Melo (2010), a isometria é uma transformação geométrica que preserva distâncias. Para ela, uma transformação geométrica no plano é uma aplicação bijetiva de figuras geométricas, que a partir de uma figura, forma-se outra. Sendo assim, uma transformação geométrica é uma função, pois o domínio e a imagem são figuras (conjunto de pontos) e há uma lei que corresponde os pontos dessa figura, e essa lei tem que atender os critérios da bijetividade, e no caso específico da isometria, a lei preserva distâncias.

---

[19]Disponível em <https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/2513/1/Isometrias%20no%20plano_%20uma%20abordagem%20segundo%20a%20geometria%20analitica.pdf> acesso em 10 jan. 2022.

A noção de preservar distâncias foi visto no Capítulo 2 e foi dado um exemplo, com a Figura 1. No entanto, esses autores trazem uma definição formal de preservar distâncias, conforme o Quadro 6.

Quadro 5: Definição de isometria e de preservar distâncias em Lima (2007) e Melo (2010)

Referência	Citação direta
O que é isometria?	
Lima (2007, p. 17)	"Uma isometria entre os planos Π e Π' é uma função $T: \Pi \rightarrow \Pi'$ que preserva distâncias".
Melo (2010, p. 39)	"Uma isometria no plano euclidiano é uma transformação geométrica de P_E sobre P_E que preserva distâncias". OBS: O símbolo P_E representa o plano euclidiano.
O que é preservar distâncias?	
Lima (2007, p. 17)	"...para quaisquer pontos $X, Y \in \Pi$, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$ tem-se $d(X,Y) = d(X',Y')$".
Melo (2010, p. 39)	"… se Ω é uma isometria e P e Q são dois pontos arbitrários do plano euclidiano, $P, Q \in P_E$ sendo $P' = \Omega(P)$ e $Q' = \Omega(Q)$ então a medida do comprimento do segmento $[PQ]$ é igual à medida do comprimento do segmento $[P'Q']$ simbolicamente, $\overline{PQ} = \overline{PQ}$".

Fonte: Adaptado de Lima (2007) e Melo (2010)

Desse modo, ambos os autores concordam sobre o que é uma isometria, que é uma função, onde o domínio e a imagem são planos, e que preserva distâncias. Sobre preservar distâncias, eles definiram formalmente a noção que foi vista no Capítulo 2.

Destaca-se ainda que Lima (2007) apresenta três definições para isometria. A isometria nas retas, onde o domínio e o contradomínio são retas. A isometria nos planos, conforme mostra o Quadro 6, e isometria no espaço euclidiano tridimensional. Em todos os casos, são funções que preservam distâncias, o que muda são o domínio e o contradomínio. Diante do exposto, fica respondido o que é isometria para Lima (2007) e Melo (2010).

7.1.3 Classificação das isometrias para Lima (2007) e Melo (2010)

Ambos os autores destacam seis funções que são isometrias, são elas: identidade, simetria em torno de um ponto, translação, rotação, reflexão em reta e reflexão deslizante, sendo que a reflexão deslizante é uma composição das funções reflexão e translação. Os autores se diferem em algumas nomenclaturas, mas a definição é a mesma. O Quadro 7 mostra a equivalência das nomenclaturas.

Quadro 6: Equivalência das nomenclaturas dos tipos de isometrias em Lima (2007) e Melo (2010)

Lima (2007)	Melo (2010)
Identidade	Identidade
Simetria em torno de um ponto	Meia-volta / reflexão em ponto / simetria pontual
Translação	Translação
Rotação	Rotação
Reflexão em torno de uma reta	Reflexão em recta / Simetria Axial
Reflexão deslizante	Reflexão com deslizamento

Fonte: Os Autores

Lima (2007) demonstra que as seis funções que ele definiu (Quadro 7) são isometrias. Já Melo (2010), demonstra que a identidade e a reflexão são isometrias, também mostra que a composta de um número finito de isometrias é também uma isometria. Além disso, mostra que a translação, a rotação e a reflexão com deslizamento podem ser obtidas a partir de duas ou três reflexões, consequentemente, as seis funções definidas (Quadro 7) são isometrias. No próxima subseção, tais demonstrações serão trazidas, com auxílio de linguagem figural.

A partir das seis isometrias definidas por Lima (2007) e Melo (2010), pode-se definir infinitas isometrias, basta fazer a composição delas. Por exemplo, seja $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5,\ f_6$ as seis isometrias definidas por Lima (2007) e Melo (2010). Como a composição de isometrias é ainda uma isometria, pode-se formar funções do tipo $f_i \circ f_j$ com $i, j = \{1,2,3,4,5,6\}$. Desse modo, haverá $6^2 = 36$ possibilidades para formar isometrias do tipo $f_i \circ f_j$. Se for a composição de três isometrias, serão $6^3 = 216$ possibilidades. Generalizando, para uma composição de n funções, haverá 6^n possibilidades. Diante disso, Lima (2007) prova que qualquer isometria que se possa fazer com essas composições, será igual a uma dessas quatro seguintes isometrias:

translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento. Ambos os autores ainda destacam que a simetria em torno de um ponto P, por exemplo, é o mesmo que uma rotação de 180^o em torno do ponto P. Já a identidade, pode ser obtida tanto por uma translação por um vetor nulo, quanto por uma rotação em torno de um ponto P qualquer, com um ângulo de $n \cdot 360^o$ com $n \in \mathbb{Z}$.

7.1.4 Representação Figural das isometrias para Lima (2007) e Melo (2010)

A função identidade é função que associa cada elemento P do domínio a ele mesmo, isto é, a função, $Id: X \to X$, de modo que para todo $P \in X$, tem-se que $Id(P) = P$. No caso em que a função é uma transformação geométrica, isto é, quando o domínio e o contradomínio são conjuntos de pontos, de acordo com Melo (2010), a função identidade pode ser classificada como uma isometria pois ela preserva distâncias. Ou seja, seja a função identidade $Id: \Pi \to \Pi$, onde Π é o plano euclidiano, como para quaisquer dois pontos $P, Q \in \Pi$, tem-se que $Id(P) = P$ e $Id(Q) = Q$, então $d\big(Id(P), Id(Q)\big) = d(P, Q)$. Portanto a identidade é uma transformação geométrica que preserva distâncias, isto é, é uma isometria.

Em relação à translação, o Quadro 8 mostra a definição na íntegra, que consta em Lima (2007) e em Melo (2010).

Quadro 7: Definição de translação para Lima (2007) e Melo (2010)

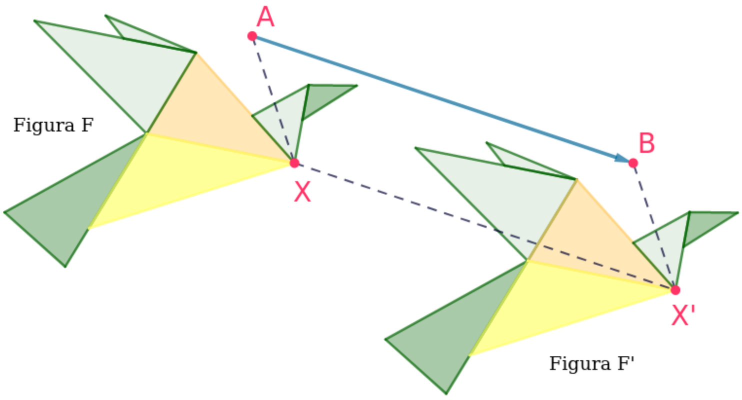
Translação	
Referência	Definição
Lima (2007, p. 23)	"Sejam A, B pontos distintos do plano Π. A translação $T_{AB}: \Pi \to \Pi$ é a função assim definida: Dado $X \in \Pi$ sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados."
Melo (2010, p. 23)	"Seja T_v uma translação associada ao vector $v = (t_x, t_y)$. Dado um ponto P de coordenadas cartesianas (x, y), pela translação T_v, este é transportado para o ponto P' de coordenadas cartesianas $(x + t_x, y + t_y)$."

Fonte: Adaptado de Lima (2007) e Melo (2010)

Nota-se que Lima (2007) usa a definição de paralelogramo, da geometria euclidiana elementar, para definir a translação no registro algébrico. Sabe-se da geometria euclidiana, que o paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos e consequentemente são congruentes (DOLCE e POMPEO, 2005). Assim, um ponto P e sua imagem por uma translação por um vetor $\vec{v}$ formam um dos lados de um paralelogramo em que $\vec{v}$ é o lado oposto desse mesmo paralelogramo. Já Melo (2010) usa o recurso das coordenadas. Para a autora, basta somar as coordenadas do vetor às coordenadas dos pontos do domínio da função para obter as coordenadas da imagem do ponto.

Partindo-se da representação da translação no registro algébrico, apresentada pelos autores no Quadro 8, é feita a conversão entre os registros algébrico e figural, chegando-se à representação da translação no registro figural, conforme Figuras 23 e 24.

Figura 23: Translação em Lima (2007)

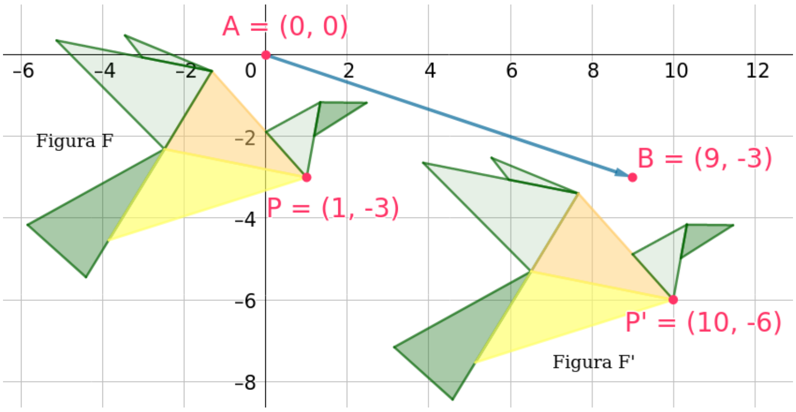


Fonte: Os Autores

Na Figura 23 há uma figura F e um segmento AB que define uma translação T_{AB} e $F' = T_{AB}(F)$. Ou seja, foi obtida a imagem de F pela translação T_{AB}. Essa figura destaca a transformação de um ponto específico de F que é o ponto X. O ponto X' é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados. Desse modo, $X' = T_{AB}(X)$, conforme indica a definição de translação de Lima (2007) como indica no Quadro 8.

A Figura 24 exemplifica a representação figural da translação, de acordo com Melo (2010).

Figura 24: Translação para Melo (2010)

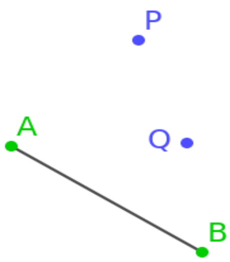


Fonte: Os Autores

No exemplo da Figura 24, tem-se o vetor $\vec{v} = B - A = (9, -3)$ que define a translação T_v. Tem-se ainda o ponto $P = (1, -3)$ que é um dos elementos do domínio. De acordo com a definição de Melo (2010), a translação de P por T_v é $(1 + 9, -3 - 3) = (10, -6) = P'$. Ao encontrar a imagem de F por T_v obtém-se a figura F'. Sendo assim, a definição de Lima (2007) e Melo (2010), referem-se ao mesmo objeto matemático. Considerando a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval, Lima (2007) e Melo (2010) usaram a mesma linguagem para definir o mesmo objeto, a linguagem algébrica, embora de forma diferente. Para compreender que ambos os autores definem o mesmo objeto é necessário fazer tratamento. Assim, o que se observa é a translação como um tratamento no registro das figuras, como afirma Duval (2004).

A demonstração de que a translação é uma isometria está fundamentada na demonstração de Lima (2007), por ser mais simples que a demonstração de Melo (2010). De fato, sejam dois pontos P e Q e um segmento $\overline{AB}$ conforme mostra a Figura 25. E define-se uma translação T_{AB}.

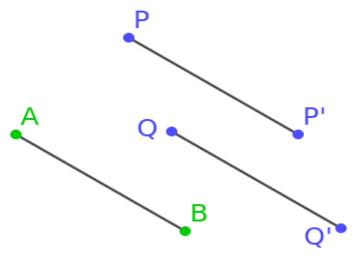
Figura 25: Elementos iniciais para a demonstração



Fonte: Os Autores

Encontra-se $P' = T_{AB}(P)$ que é o quarto vértice do paralelogramo que tem AP e AB como lados. Analogamente, encontra-se $Q' = T_{AB}(Q)$. Como AB, PP', QQ' são lados opostos de paralelogramos, implica que eles são congruentes e paralelos. A Figura 26, acrescenta à Figura 25, os pontos $P' = T_{AB}(P)$, $Q' = T_{AB}(Q)$ e os segmentos PP' e QQ'.

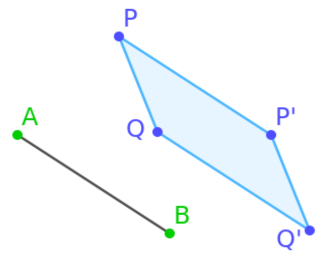
Figura 26: Transformadas de P e Q



Fonte: Os Autores

Para mostrar que a translação é uma isometria, deve-se mostrar que a translação preserva distâncias, isto é, que $d(P,Q) = d(P',Q')$, conforme Figura 27.

Figura 27: A translação é uma isometria



Fonte: Os Autores

Observando a figura acima, como PP' e QQ' têm a mesma medida e são paralelos, eles são um dos pares de lados opostos do paralelogramo $PP'Q'Q$. Como PQ e $P'Q'$ são o outro par de lados opostos do mesmo paralelogramo, então tem-se que $PQ \equiv P'Q' \Rightarrow d(P,Q) = d(P',Q')$ e fica provado que a translação é uma isometria.

Quanto à rotação, o Quadro 9 mostra a definição que consta nas duas obras.

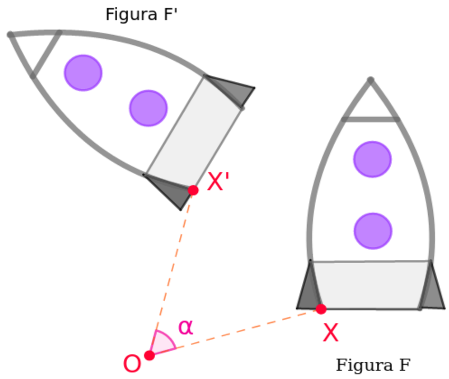
Quadro 8: Definição de rotação para Lima (2007) e Melo (2010)

Rotação	
Referência	Definição
Lima (2007, p. 27)	"Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo de vértice O. A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha}: \Pi \to \Pi$ definida: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em Π,$\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que $d(X,O) = d(X',O)$, $X\hat{O}X' = \alpha$ e o "sentido de rotação" de A para B é o mesmo de X para X'".
Melo (2010, p. 25)	"Uma rotação, em torno de um ponto O com amplitude igual a α no sentido anti-horário é a transformação geométrica que transforma um ponto $P = (x, y)$ num ponto $P' = (x', y')$de modo que $\overline{OP} = \overline{OP'}$, $x = \overline{OP} \cdot \cos\varphi$, $y = \overline{OP} \cdot sen\varphi$, $x' = \overline{OP'} \cdot \cos(\varphi + \alpha)$e $y' = \overline{OP'} \cdot sen(\varphi + \alpha)$. Obtendo assim, por coordenadas cartesianas do ponto P' em função do ângulo α, $(x \cdot \cos\alpha - y \cdot sen\alpha, x \cdot sen\alpha + y \cdot \cos\alpha)$".

Fonte: Os Autores

A Figura 28 procura converter em uma linguagem figural, a representação algébrica de Lima (2007), com um exemplo.

Figura 28: Rotação em Lima (2007)

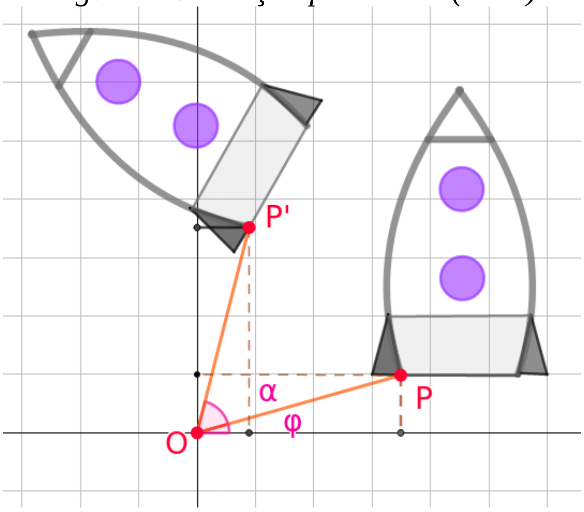


Fonte: Os Autores

Na Figura 28 há um ponto O e um ângulo α que podem definir uma rotação $\rho_{O,\alpha}: \Pi \to \Pi$. Tem-se ainda, um ponto X e a sua imagem X' obtido pela função $\rho_{O,\alpha}: \Pi \to \Pi$, ou seja, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$. Nota-se ainda, que $OX \equiv OX'$. Fazendo esse processo com todos os pontos da figura F, é obtida a figura F', ou seja, $\rho_{O,\alpha}(F) = F'$.

A Figura 29 mostra um exemplo de conversão da representação da rotação no registro algébrico para o registro da figura, segundo a definição de Melo (2010).

Figura 29: Rotação para Melo (2010)



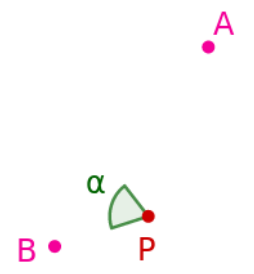
Fonte: Os Autores

Na Figura 29 há uma rotação em torno de um ponto O, com amplitude igual a α, no sentido anti-horário. Essa transformação exige que $\overline{OP} \equiv \overline{OP'}$. Note que, se o segmento $\overline{OP}$ é a hipotenusa de um triângulo de cateto contido no eixo x, de modo que $\overline{OP}$ forma um ângulo φ com o eixo x. Desse modo, as coordenadas do ponto P podem ser escritas da forma $P = (\overline{OP} \cdot \cos\varphi, \overline{OP} \cdot sen\varphi)$. Analogamente, considerando o segmento $\overline{OP'}$ como a hipotenusa de um triângulo de cateto contido no eixo x e o ângulo α formado entre $\overline{OP'}$ e o eixo x, pode-se escrever as coordenadas de P' como $P' = (\overline{OP'} \cdot \cos(\alpha + \varphi), \overline{OP'} \cdot sen(\alpha + \varphi))$. Pela equação do cosseno e do seno da soma de dois arcos, as coordenadas do ponto P' podem ser escritas ainda, na forma $P' = (\overline{OP'} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\alpha - \overline{OP'} \cdot sen\varphi \cdot sen\alpha, \overline{OP'} \cdot \cos\varphi \cdot sen\alpha - \overline{OP'} \cdot sen\varphi \cdot \cos\alpha)$. Como $\overline{OP} \equiv \overline{OP'}$, pode-se escrever ainda as coordenadas do ponto P' da seguinte forma: $P' = (\overline{OP} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\alpha - \overline{OP} \cdot sen\varphi \cdot sen\alpha, \overline{OP} \cdot \cos\varphi \cdot sen\alpha - \overline{OP} \cdot sen\varphi \cdot \cos\alpha)$. O ponto P é um ponto qualquer, por isso, tem-se que $P = (x, y)$ e desse modo $(x, y) = (\overline{OP} \cdot \cos\varphi, \overline{OP} \cdot sen\varphi)$ ou ainda, $x = \overline{OP} \cdot \cos\varphi$ e $y = \overline{OP} \cdot sen\varphi$. Substituindo essas duas últimas equações nas coordenadas de P' tem-se que $P' = (x \cdot \cos\alpha - y \cdot sen\alpha, x \cdot sen\alpha - y \cdot \cos\alpha)$. Esse é o processo, pelo qual Melo (2010) definiu uma rotação.

A definição de Melo (2010) e de Lima (2007) referem-se ao mesmo objeto. Da mesma forma como ocorreu na definição de translação, ambos usam a linguagem algébrica, porém com mecanismos diferentes. Segundo a teoria de Duval, ambos usaram signos diferentes para demonstrar, mas como há uma infinidade de signos que representam o mesmo objeto, pode-se compreender que os dois conjuntos de signos usados por cada autor fazem referência ao mesmo objeto matemático.

A seguir, é demonstrado que a rotação é uma isometria, tendo como base a demonstração de Lima (2007). De fato, tomando inicialmente três pontos $A, B, P \in \Pi$ e um ângulo α conforme mostra a Figura 30.

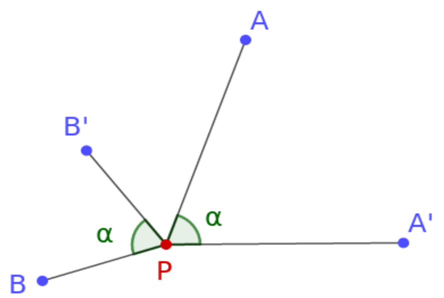
Figura 30: Elementos iniciais para a demonstração



Fonte: Os Autores

O ponto P que está na cor vermelha, é o ponto de rotação, e desse modo é definida a rotação $\rho_{O,\alpha}: \Pi \rightarrow \Pi$. Efetua-se então, a rotação de A e B em torno de P com amplitude α, conforme mostra a Figura 31. Ou seja, encontra-se $A' = \rho_{O,\alpha}(A)$ e $B' = \rho_{O,\alpha}(B)$.

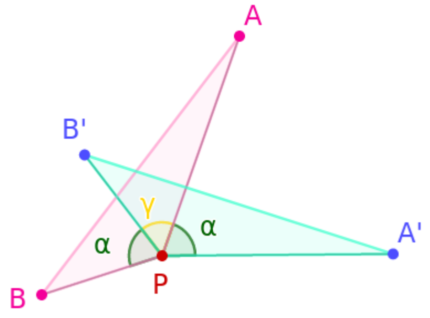
Figura 31: Transformadas dos pontos A e B



Fonte: Os Autores

Observa-se que $B'\hat{P}A$ forma um ângulo γ (Figura 32). Desse modo, os triângulos APB e $A'PB'$ são congruentes por LAL, pois $\overline{AP} \equiv \overline{AP'}$ por definição, $A\hat{P}B \equiv A'\hat{P}B'$ têm amplitude $\alpha + \gamma$, e $\overline{BP} \equiv \overline{BP'}$ por definição. Consequentemente, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e desse modo, $d(A, B) = d(A', B')$. Isso prova que a rotação é uma isometria.

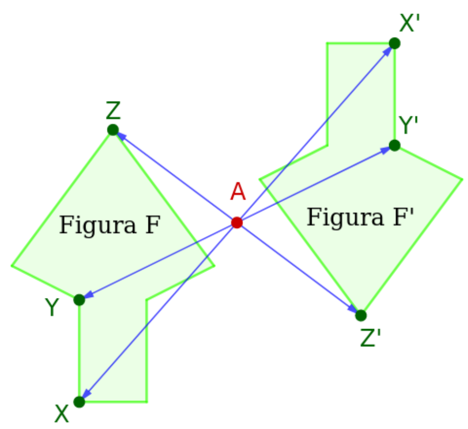
Figura 32: A rotação é uma isometria



Fonte: Os Autores

Lima (2007, p. 20) define a simetria em torno de um ponto, da seguinte maneira: "Tomemos um ponto A no plano Π. A simetria em torno de A é a função $S_A: \Pi \to \Pi$ assim definida: $S_A(A) = A$ e para $X \neq A$, $S_A(X) = X'$ é o simétrico de X relativamente a A". Lima (2007) havia definido no primeiro capítulo de sua obra, que o simétrico de X relativamente á A é o ponto X' de modo que A é o ponto médio do segmento $\overline{XX'}$. A Figura 33 procura exemplificar a definição de Lima (2007) através de uma linguagem figural.

Figura 33: Simetria em torno de um ponto, em Lima (2007)

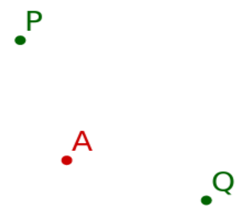


Fonte: Os Autores

Na Figura 33, o ponto A é o ponto médio dos segmentos $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$ e $\overline{ZZ'}$ por isso $S_A(X) = X'$, $S_A(Y) = Y'$ e $S_A(Z) = Z'$. Esses três pontos estão destacados, no entanto, a transformação geométrica foi aplicada em todos os pontos da figura F e a imagem dessa transformação originou a figura F'. Logo, $S_A(F) = F'$.

Também, é demonstrado que a simetria em torno de um ponto é uma isometria, fundamentado em Lima (2007). Para isso, ao tomar três pontos, P, Q, A, ilustrados na Figura 34. Estabeleça a simetria em torno do ponto A, ou seja, $S_A: \Pi \to \Pi$.

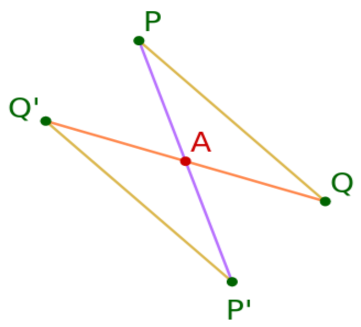
Figura 34: Elementos iniciais para a demonstração



Fonte: Os Autores

Encontre os pontos P' e Q' de modo que, $P' = S_A(P)$ e $Q' = S_A(Q)$, conforme mostra a Figura 35.

Figura 35: A simetria em torno de um ponto é uma isometria

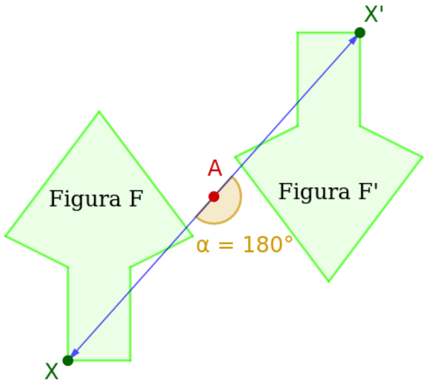


Fonte: Os Autores

Os triângulos PAQ e $P'AQ'$ são congruentes por LAL. Isso porque $\overline{PA} \equiv \overline{AP'}$, já que A é o ponto médio de $\overline{PP'}$. Também, $P\hat{A}Q \equiv P'\hat{A}Q'$, pois são ângulos opostos pelo vértice, e $\overline{QA} \equiv \overline{AQ'}$, pois A é o ponto médio de $\overline{QQ'}$. Desse modo, $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$, ou ainda, $d(P,Q) = d(P',Q')$ e, portanto, a simetria em torno de um ponto é uma isometria.

Lima (2007) diz que a simetria em torno de um ponto A é um caso específico de rotação. A isometria $S_A: \Pi \to \Pi$ coincide com a rotação $\rho_{A,\alpha}$ quando $\alpha = 180^o$. A Figura 36 mostra, a mesma imagem da Figura 33, só que dessa vez, destacando a rotação de 180^o em torno do ponto A.

Figura 36: Rotação de 180º



Fonte: Os Autores

Para a simetria em torno de um ponto, Melo (2010) diz que é nomeada como, meia-volta, reflexão em ponto ou simetria pontual. A autora não define essa isometria, mas destaca que ela é um caso específico de rotação, mais especificamente, uma rotação de 180^o, concordando assim com Lima (2007).

O Quadro 10 mostra a definição de reflexão em torno de uma reta, dada por Lima (2007) e por Melo (2010).

Quadro 9: Definição de reflexão em reta em Lima (2007) e Melo (2010)

Reflexão em reta	
Referência	Definição
Lima (2007, p. 21)	"Seja r uma reta no plano Π. A reflexão em torno da reta r é a função $R_r: \Pi \to \Pi$ assim definida: $R_r(X) = X$ para todo $X \in r$ e, se $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r."
Melo (2010, p. 29)	"Dado um ponto P qualquer, de coordenadas cartesianas (x, y), este é transformado, pela reflexão na recta r, no ponto P' de coordenadas (x', y'), onde $PP' \perp r$. Sendo $\{M\} = PP' \cap r$ então M é o ponto médio do segmento $[PP']$e a recta r é a mediatriz deste mesmo segmento."

Fonte: Adaptado de Lima (2007, p. 21) e Melo (2010, p. 29)

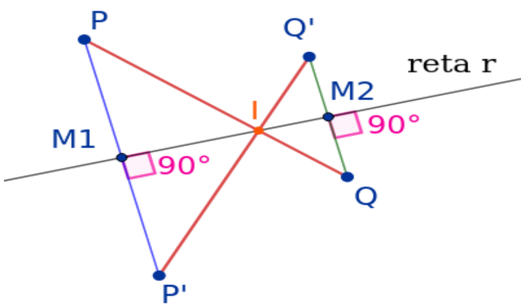
Mais uma vez, as definições designam o mesmo objeto. Porém, desta vez, as definições estão bem próximas, mudando somente o nome dos pontos, a ordem das orações e a referência que Melo (2010) faz às coordenadas dos pontos. Como exemplo em linguagem figural da reflexão em torno de uma reta, que para Melo (2010) é chamada também de simetria axial, pode-se observar a Figura 2, no Capítulo 2. A seguir é demonstrado que a simetria em torno de uma reta ou simetria axial, é uma isometria, novamente tomando por base Lima (2007). Esse autor divide a demonstração em dois casos, um caso em que os dois pontos estão em um mesmo lado da reta e outro caso, onde os pontos estão em lados opostos da reta. É mostrado em linguagem figural, somente o caso em que os pontos estão em lados opostos da reta, o outro caso é ainda mais simples e pode ser consultado na obra. De fato, considere uma reta r e dois pontos P e Q em lados opostos de r:

Figura 37: Elementos iniciais para demonstração

Fonte: Os Autores

Para encontrar $P' = R_r(P)$ e $Q' = R_r(Q)$, considere os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q'}$ que se intersectam no ponto I, como mostra a Figura 38. Tem-se o segmento $\overline{PP'}$ com $\overline{PP'} \cap r = M_1$ e o segmento $\overline{QQ'}$ com $\overline{QQ'} \cap r = M_2$. Os triângulos $PIM1$ e $P'IM1$ são congruentes por LAL, uma vez que $\overline{PM_1} \equiv \overline{P'M_1}$ e $P\widehat{M_1}I \equiv P'\widehat{M_1}I$ por consequência imediata da definição (Quadro 10) e o fato de $\overline{M_1I}$ ser lado comum aos triângulos. Analogamente, os triângulos QIM_2 e $Q'IM_2$ são congruentes por LAL. Essas congruências implicam que $PI \equiv IP'$ e $Q'I \equiv QI$. Desse modo, pondo $a = d(PI) = d(IP')$ e $b = d(Q'I) = d(QI)$ tem-se que $d(PQ) = d(P'Q') = a + b$.

Figura 38: Reflexão em torno de uma reta é uma isometria



Fonte: Os Autores

Como $d(PQ) = d(P'Q') = a + b$, então fica demonstrado que a reflexão em torno de uma reta, quando os pontos estão em lados opostos da reta, é uma isometria.

O Quadro 11 mostra a definição de reflexão com deslizamento para Lima (2007) e para Melo (2010).

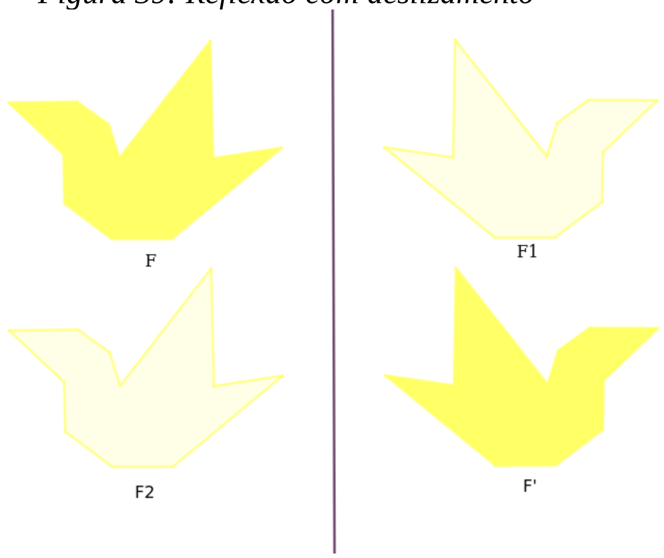
Quadro 10: Definição de reflexão com deslizamento em Lima (2007) e Melo (2010)

Reflexão com deslizamento	
Referência	Definição
Lima (2007, p. 29-30)	“Sejam $v = \overline{AB}$ um vetor não nulo e r uma reta paralela a v no plano Π. A reflexão com deslizamento, determinada pelo vetor v e pela reta r é a isometria $T = T_v \circ R_r: \Pi \to \Pi$ obtida, fazendo a translação T_v seguir-se à reflexão R_r.”
Melo (2010, p. 33)	“Passemos à reflexão deslizante, ou translação refletida, que denotaremos por $\delta_{(v,r)}$ e que pode ser definida como o resultado da composição entre uma reflexão em recta e uma translação cujo vector tem a mesma direcção da recta.”

Fonte: Adaptado de Lima (2007, p. 29-30) e Melo (2010, p. 33)

Lima (2007) e Melo (2010) mais uma vez definem o mesmo objeto. Neste caso, a reflexão com deslizamento é a composição de duas isometrias e como os autores mostram que a composição de isometrias é ainda uma isometria, então a reflexão deslizante é uma isometria. A Figura 39 mostra um exemplo de representação da reflexão com deslizamento, no registro das figuras.

Figura 39: Reflexão com deslizamento



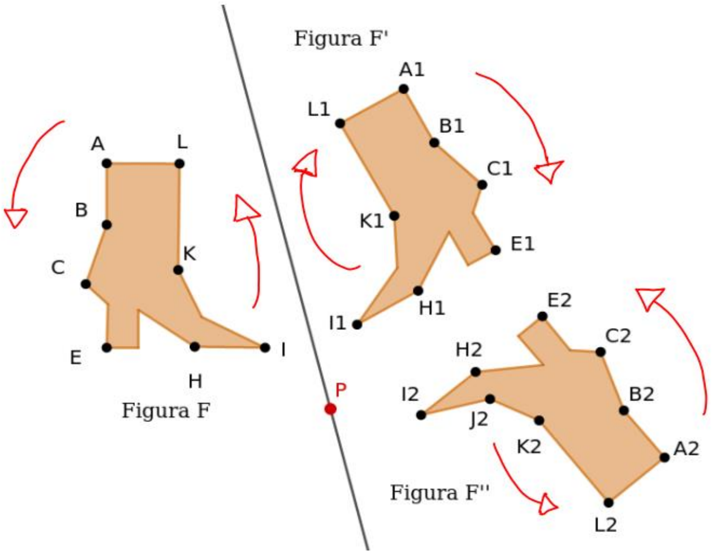
Fonte: Os Autores

Lima (2010) diz que $T_v \circ R_r = R_r \circ T_v$, ou seja, fazer uma translação pelo vetor $\vec{v}$ e depois a reflexão em torno da reta r é o mesmo que fazer a reflexão pela reta r e depois a translação pelo vetor $\vec{v}$. Na Figura 39, a figura F foi transformada por uma reflexão por deslizamento, na figura F'. Se for feita a translação primeiro e depois a reflexão, então F será levada à $F2$ e depois a F', mas se for feita a reflexão primeiro e depois a translação, então F será levada à $F1$ e depois à F'. Ou seja, em ambas as formas, levará à figura F'.

Lima (2007) e Melo (2010) ainda classificam as isometrias em próprias e impróprias, ou respectivamente, par e ímpar. Essa classificação leva em consideração a orientação da figura. Se uma figura F foi transformada em F' por uma isometria e se F' mantém a orientação de F, então essa isometria é própria ou par. Caso contrário, se não mantém a orientação, é imprópria ou ímpar. Outra forma de explicar essa classificação é: dado duas figuras F e F' em um mesmo plano, sendo a última obtida da primeira através de uma isometria, se há alguma forma de levar F até F' sem sair do plano, então a isometria que transformou F e F' é própria ou par. E se para levar F até F' é necessário sair do plano, então a isomeria é imprópria ou ímpar. A Figura 40 procura exemplificar essa ideia, em linguagem figural. Considere na Figura 40, a figura F como inicial e F'e F'' como duas transformadas de F.

A figura F' tem orientação diferente da figura F. Já a figura F'' tem a mesma orientação da figura F. Pode-se observar nos vértices das figuras F e F'', que $A, B, C, \dots, L$ estão no mesmo sentido anti-horário e na figura F' estão no sentido horário. Observe que, ao olhar cada uma das figuras da direita para a esquerda, as figuras F e F'' a flechinha que antecede a figura está apontando para baixo e a flechinha que sucede está apontando para cima. O mesmo não acontece com a F', onde a flechinha que antecede está apontando para cima e a flechinha que sucede, apontando para baixo, além disso, para mover F até F' para ambas coincidirem ponto a ponto, seria necessário movê-la fora do plano, uma forma seria fazer uma rotação no espaço em torno da reta. Mas para mover F até F'', bastaria fazer uma rotação, sem sair do plano, em torno do ponto P (Figura 40).

Figura 40: Orientação de uma figura



Fonte: Os Autores

Lima (2007) e Melo (2010), ainda dizem que a translação e a rotação são isometrias próprias ou par, enquanto a reflexão e reflexão com deslizamento são isometrias impróprias ou ímpar.

Desse modo, fica respondida a questão: Como Lima (2007) e Melo (2010) classificam as isometrias. Eles a classificam em identidade, translação, simetria em torno de um ponto, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento. Dizem ainda que qualquer uma dessas isometrias e qualquer composição delas, resultará em uma dessas quatro: translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento. Além disso, classificam essas em próprias ou impróprias, as próprias são as que preservam a orientação e as impróprias não preservam a orientação, sendo que a translação e rotação são isometrias próprias, e a reflexão e reflexão com deslizamento são isometrias impróprias.

7.2 OBRAS COM ÊNFASE EM SIMETRIA

7.2.1 Introdução

As obras que enfatizam simetria são: O terceiro volume da série original *Mathematics for Junior High School* que foi traduzida como Matemática Curso Ginasial, de autoria do grupo *Scholl Matematics Study Group*; o livro *Symmetry*, traduzido em língua portuguesa para Simetria, de Hermann Weyl (WEYL, 1997); e o livro *Groups and Symmetry – A Guide to*

Discovering Mathematics, ou seja, Grupos e Simetria: Um guia para descobrir a matemática, de David W. Farmer (FARMER, 1999).

O professor Lafayette de Moraes já foi apresentado no Capítulo 3, como um professor de matemática que foi levado ao Estados Unidos na década de 1960 por fundações norte-americanas, no contexto do MMM, e que traduziu a coleção de livros didáticos *Mathematics for Junior High School*. Essa coleção tem quatro volumes, sendo que o terceiro contém um breve estudo sobre simetria.

O terceiro volume apresenta seis capítulos, sendo o capítulo quatro intitulado: "Construções, Triângulos Congruentes e Propriedade Pitagórica" (SMSG, 1969, p. 155). Neste capítulo há um breve estudo sobre simetrias na seção 4.3 denominado "Simetria", e contém apenas quatro páginas. A seção 4.3 apresenta inicialmente duas atividades experimentais, em que sugerem ao aluno recortar e fazer dobraduras. Nessas atividades é explicado o que é um eixo de simetria e em seguida há mais atividades para identificar eixos de simetrias em figuras. Depois dos exercícios há uma definição de simetria e uma seção de exercícios, encerrando o assunto sobre simetria. O termo isometria não é mencionado, por isso não faz sentido buscar respostas às questões: O que é isometria? Ou, qual a classificação das isometrias? Ou ainda, qual a relação entre isometria e simetria? Desse modo, será analisado quais as definições e conceitos de simetria em SMSG (1969).

Hermann Weyl (1885 – 1955) é autor da obra intitulada original Symmetry, traduzida como Simetria (WEYL, 1997). De acordo com Eves (2004), Weyl é um dos matemáticos que ocupa posição de destaque, ao lado de grandes nomes como David Hilbert (1862 - 1943), Carl Runge (1856 - 1927) e Emmy Noether (1882 - 1935) que fazem parte dos "dignos sucessores de Gauss, Dirichlet e Riemann, fazendo da escola de matemática de Gottingen uma das mais famosas dos tempos modernos" (EVES, 2004, p. 607-8). O historiador ainda destaca que Weyl ficou conhecido por seu trabalho sobre a filosofia e os fundamentos da matemática.

Em 1952 Weyl publicou Symmetry a qual teve a tradução, em língua portuguesa, publicada pela Editora da Universidade de São Paulo em 1997 (WEYL, 1997). É uma obra de filosofia matemática, em que Weyl discorre sobre as implicações filosóficas da simetria. Ele inicia mostrando a simetria na arte das mais diversas civilizações da antiguidade, chega na filosofia matemática da esquerda e direita, que é uma discussão em torno da questão: A esquerda e a direta é uma escolha arbitrária ou não? Essa questão envolve aspectos históricos e religiosos, biologia, química e principalmente a teoria da relatividade. Em seguida discorre sobre a simetria na botânica, em animais principalmente marinhos, e por último na simetria dos cristais, estudados em física, que de acordo com o autor é o aspecto mais abrangente e impressionante da simetria. Assim como em SMSG (1969) não consta, uma única vez, o termo isometria em Weyl (1997), por isso será investigado na obra: O que é simetria? Quais são os tipos de simetria de figuras planas?

Em relação a David W. Farmer, ele é norte-americano, doutorou-se em matemática pela *Oklahoma State University*[20] em 1993, é diretor do American Institute of Mathematics. Sua obra Groups and Symmetry – A Guide to Discovering Mathematics, foi editada pela primeira vez em 1996 pela *The American Mathematical Society* foi traduzida para o português e publicada pela editora portuguesa Gradiva em 1999 com o título Grupos e Simetria: Um guia para descobrir a matemática (FARMER, 1999).

O tipo de literatura de Farmer (1999) não é muito comum no Brasil, é o estilo Descubra Por Você Mesmo, um tipo de literatura matemática onde o autor não tem interesse em citar os axiomas e postulados, e a partir deles demonstrar teoremas e proposições em geral. A característica central dessa literatura é propor problemas ao leitor, para que, por conta própria possa descobrir alguns padrões e conceitos matemáticos. Os problemas mais simples, o autor não apresenta as soluções, mas usa esses problemas simples para explicar alguns conceitos. Em relação às definições, algumas vezes apresenta uma definição provisória e empírica e depois leva o leitor a encontrar problemas nessa definição, em seguida ele discute se essa definição deve ser modificada ou se permanece com ela e define-se outro objeto para resolver os obstáculos encontrados. Outra característica é que o autor apresenta os conceitos mais gerais e indica obras para aprofundamento do assunto. Frequentemente aponta quem foram os matemáticos que demonstraram pela primeira vez, determinados teoremas ou proposições mais gerais.

Embora o foco de Farmer (1999) seja as simetrias de figuras planas, também faz um breve estudo das isometrias, pois para Farmer (1999) as simetrias são casos particulares de isometrias. No entanto, o termo isometria não aparece uma única vez na obra, é usado o termo movimentos rígido como sinônimo de isometria. Como o autor fala em isometria e simetria, são investigados na obra, as três categorias de análise, pré-definidas. Como essa obra possui um conteúdo mais vasto, é analisado por primeiro, depois é analisado Weyl (1997) e por último SMSG (1969).

[20]Informações sobre a formação de David W. Farmer, pode ser encontrada em <https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=43436> acesso em 12 jan. 2022.

7.2.2. Isometrias em Farmer (1999)

O capítulo dois de Farmer (1999) trata dos movimentos rígidos no plano, que ele define como "Um MOVIMENTO RÍGIDO do plano é qualquer maneira de mover todos os pontos do plano de modo que – A distância relativa entre pontos permaneça a mesma – A posição relativa dos pontos permaneça a mesma" (FARMER, 199, p. 27, grifo do autor). Em seguida ele dá um exemplo:

> … se os pontos A e Bestão afastados 2 m, então, após aplicar um movimento rígido, eles devem manter 2 m de distância; e se o ponto C está a meio caminho entre A e B, então, após aplicar um movimento rígido, este deve permanecer a meio caminho entre A e B. (FARMER, 1999, p. 27)

Desse modo, o movimento rígido coincide com o conceito de isometria visto em Lima (2007) e Melo (2010), pois Farmer (1999) destaca que o movimento rígido é uma transformação geométrica que preserva distâncias e procura usar uma linguagem natural para defini-lo, enquanto Lima (2007) e Melo (2010) usaram uma linguagem formal. Além disso, Farmer (1999) usa uma representação diferente para designar a isometria. Isso vai ao encontro do conceito da arbitrariedade do signo, conceituada por Duval e Saussure, pois usou o signo movimento rígido para designar a isometria, o qual não tem relação com a isometria. Desse modo, a resposta para a questão: O que é isometria para Farmer (1999)? O autor não fala em isometria, mas estuda os movimentos rígidos que coincidem com o conceito de isometria de Lima (2007) e Melo (2010).

Farmer (1999) ainda define (Quadro 12) quatro isometrias como basilares, das seis isometrias vistas em Lima (2007) e Melo (2010).

Quadro 11: Classificação dos movimentos rígidos em Farmer (1999)

Movimento Rígido	Definição / Explicação
Translação	"Numa translação, tudo é movido pela mesma distância e na mesma direção." (FARMER, 1999, p. 28).
Rotação	"A rotação fixa um ponto e tudo roda a mesma quantidade em torno desse ponto. Para especificar uma rotação define-se qual o ponto que é fixado e a quantidade pela qual o todo roda em torno desse ponto. O ponto fixo chamado CENTRO DE ROTAÇÃO, actua como um eixo e as duas linhas desenhadas indicam a rotação como se fosse os raios de uma roda." (FARMER, 1999, p. 28).

Reflexão em/de espelho	“A reflexão é determinada por uma linha de espelho (…) Os dois lados são realmente «imagens de espelho» um do outro (…) Duas outras observações úteis: Pontos do espelho não se movem por efeito da reflexão. A distância de um ponto ao espelho é igual à distância da imagem desse ponto ao espelho.” (FARMER, 1999, p. 33).
Reflexão deslizante	“Uma REFLEXÃO DESLIZANTE é uma reflexão de espelho, seguida de uma translação paralela ao espelho.” (FARMER, 1999, p. 36).

Fonte: Adaptado de Farmer (1999)

Os quatro movimentos rígidos de Farmer (1999) coincidem com a translação, rotação, reflexão em torno de uma reta, e reflexão com deslizamento, propostas por Lima (2007) e Melo (2010), que são as quatro isometrias basilares. A reflexão em torno de uma reta, denominada por Lima (2007), e que em Melo (2010) recebe o nome de reflexão em reta e simetria axial, em Farmer (1999) recebe o nome: Reflexão em espelho.

Desse modo, qual a resposta à questão: Como Farmer classifica os movimentos rígidos (isometria)? O autor classifica em translação, rotação, reflexão em espelho e reflexão deslizante.

7.2.3 Simetria em Farmer (1999)

Para Farmer (1999, p. 43): “Uma SIMETRIA, de uma figura é um movimento rígido que deixa a figura exactamente na mesma”. Isso coincide com o conceito de simetria de Pasquini e Bortolossi (2015). Desse modo, já se pode responder duas questões: 1) O que é simetria para Farmer (1999)? É um movimento rígido que deixa a figura na mesma figura (invariante) e 2) Qual a relação entre movimento rígido (isometria) e simetria para Farmer (1999)? A simetria é um caso específico de movimento rígido. Enquanto o movimento rígido não necessariamente deve deixar uma figura invariante, a simetria deixa a figura invariante.

A discussão sobre os tipos de simetria, em Farmer (1999), inicia quando ele procura mostrar que algumas figuras permanecem invariantes por uma translação. Ele inicia com simetria de translação, pois depende disso para definir figura finita, “Uma FIGURA FINITA é uma figura que não tem nenhuma simetria de translação não trivial” (FARMER, 1999, p. 45, grifo do autor). A translação trivial é aquela feita pelo vetor nulo, que é um tipo de identidade e desse modo, figuras finitas são aquelas que não têm nenhuma simetria de translação, exceto a trivial. Vale destacar ainda que as figuras finitas nem sempre são finitas no sentido coloquial da palavra. Algumas se estendem indefinidamente, e, portanto, a figura finita é simplesmente a figura que não tem translação diferente da trivial. A partir de então, ele inicia os estudos sobre os tipos de figuras finitas. Farmer (1999) destaca que algumas figuras finitas possuem um número finito de simetrias, isto é, existe um número finito de isometrias que tornam a figura invariante e dados uma figura F e S o conjunto de isometrias que deixam F invariante, isto é, o conjunto de simetrias de F e dada a operação de composição de isometrias, então S munido da operação de composição de isometrias é um grupo. Desse modo, Farmer (1999) faz um estudo das simetrias das figuras, fundamentando-se na estrutura algébrica de grupo.

Farmer (1999) mostra, com exemplos, que uma figura finita só pode ter simetria de espelho e simetria de rotação, isto é, uma figura F finita só pode tornar-se invariante por reflexão em espelho ou por rotação. Além disso, ele diz que as figuras finitas têm "ou apenas simetria de rotação, ou um número igual de simetrias de rotação e reflexão em espelho" (FARMER, 1999, p. 54). Por exemplo, se uma figura tem sete simetrias de rotação, então ela não tem nenhuma simetria de espelho ou tem sete simetrias de espelho. Generalizando, se uma figura tem n simetrias de rotação, então ela tem 0 simetrias de espelho ou n simetrias de espelho. Vale lembrar que entre as n simetrias de rotação, está inclusa a simetria de rotação trivial, isto é, a identidade, a rotação com amplitude de $z \cdot 360º$ com $z \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, Farmer (1999) afirma que, se uma figura tem n eixos de simetria de espelho, implica que tem n simetrias de rotação, incluindo a trivial (identidade). Desse modo, a figura que tem 1 eixo de simetria, tem somente a rotação trivial, esse tipo de simetria é chamado de simetria bilateral. Assim, há dois tipos de simetria de figuras finitas: as que tem n rotações e n simetrias de espelho e as que têm n rotações e 0 simetria de espelho e é a partir disso que ele classifica as figuras finitas.

Farmer (1999) classifica as figuras finitas em dois tipos: 1) "Se uma figura finita tem exatamente N simetrias de rotação e nenhuma simetria de reflexão de espelho, diz-se que a figura tem simetria de tipo C_N" (FARMER, 1999, p. 55) e 2) "Se uma figura finita tem exatamente N simetrias de rotação e N de reflexão de espelho, diz-se que a figura tem simetria do tipo D_N" (FARMER, 1999, p. 56). As notações C_N e D_N remetem a grupo cíclico e grupo diedral, estudados no capítulo seis. Na próxima subseção esses grupos serão relacionados com as figuras, em linguagem figural. Desse modo, uma figura que tem 5 simetrias de rotação e nenhuma simetria de espelho é do tipo C_5, se uma figura tem 8 simetrias de rotação e 8 simetrias de espelho, então ela é uma figura do tipo D_8. Vale destacar ainda, que toda a figura finita é do tipo C_N ou D_N, isso porque, se uma figura não tem nenhuma simetria além da trivial, ela é do tipo C_1, ou seja, é invariante por uma rotação de 360^o.

As figuras não-finitas, a qual Farmer (1999) não atribui um nome específico, são classificadas em padrões de faixa e papel de parede, esses dois tipos de figuras, por definição, possuem simetria de translação. Os padrões de faixas são figuras limitadas por duas retas paralelas, que contêm figuras discretas e tem tamanho indefinido em uma direção. Outra característica dos padrões de faixa é que além de terem simetria de translação, podem ter também simetria de espelho, de rotação e de reflexão com deslizamento e algumas combinações dessas. Farmer (1999) não detalha sobre os tipos de padrões de faixa, mas deixa a cargo do leitor descobrir. No entanto, diz que existem oito tipos de padrões de faixa: “O matemático John Conway, da Universidade de Pinceton, deu nome divertidos aos diferentes tipos de simetria dos padrões de faixas. Os seus nomes eram: *pulo, passo, salto, patinagem, pular à roda, andar à roda, saltar à roda e patinar à roda*” (FARMER, 1999, p. 63, grifo do autor). Essa é a única informação que tem em Farmer (1999) sobre a classificação dos padrões de faixa. O seu objetivo parece ter sido, explicar o que são os padrões de faixa e algumas de suas características, e não entrar em muitos detalhes sobre as classificações deles, embora deixe a cargo do leitor descobrir quais são os oito tipos de padrões de faixa.

Enquanto os padrões de faixa se prolongam indefinidamente em uma direção, os papéis de paredes se prolongam indefinidamente em duas direções. Assim como os padrões de faixa, os papéis de parede também são compostos por figuras discretas, têm simetria de translação por definição e podem ter simetria de rotação, reflexão em reta e reflexão com deslizamento e combinações dessas. Existem 17 tipos de papel de parede, isto é, existem 17 tipos de simetrias em papel de parede. De acordo com Farmer (1999), o matemático russo E. S. Fedorov, publicou em 1891 um artigo em russo, que demonstrava que existem somente 17 tipos de simetria em padrões de faixa, no entanto, esse conhecimento só se tornou conhecido no ocidente a partir de 1924 quando George Pólya publicou artigos na língua alemã, contendo esses resultados.

Desse modo, Farmer (1999) destaca as figuras que têm simetria de translação e as que não têm. As que não têm simetria de translação são classificadas em dois tipos, as C_N e as D_N. Farmer (1999) distingue dois tipos de figuras que têm simetria de translação: os padrões de faixas, onde são possíveis 8 tipos de simetria; e os papéis de parede que existem 17 tipos de simetria. Desse modo, para a questão: Qual a classificação de simetria para Farmer (1999)? Tem-se como resposta: As figuras finitas e as não finitas. As finitas podem ter simetria de reflexão de espelho e simetria de rotação, sendo que há dois tipos, aquelas que têm n simetrias de rotação e 0 simetrias de reflexão de espelho, essas são chamadas de C_N em referência ao grupo cíclico; e as que têm n simetrias de rotação e n simetrias de reflexão de espelho, chamadas de D_N em referência ao grupo diedral. Entre as figuras que não são finitas, existem os padrões de faixa e os papéis de parede, essas figuras podem ter simetria de rotação, simetria de reflexão de espelho, simetria de reflexão deslizante e algumas combinações dessas. Existem oito tipo de padrões de faixas e 17 tipos de papéis de parede.

Destaca-se ainda, que Farmer (1999) procura diferenciar simetria e figura simétrica. A simetria, como já visto é um movimento rígido que deixa uma figura invariante, já a figura simétrica é aquela que possui pelo menos uma simetria diferente da trivial. A figura que só tem a simetria trivial é dita assimétrica. Desse modo, para Farmer (1999) todas as figuras têm simetria, mas nem todas são simétricas. Todas as figuras têm simetria, pois todas as figuras ficam invariante pela identidade, que é um movimento rígido, mas nem todas as figuras tem alguma simetria além da identidade, essas, são as figuras simétricas.

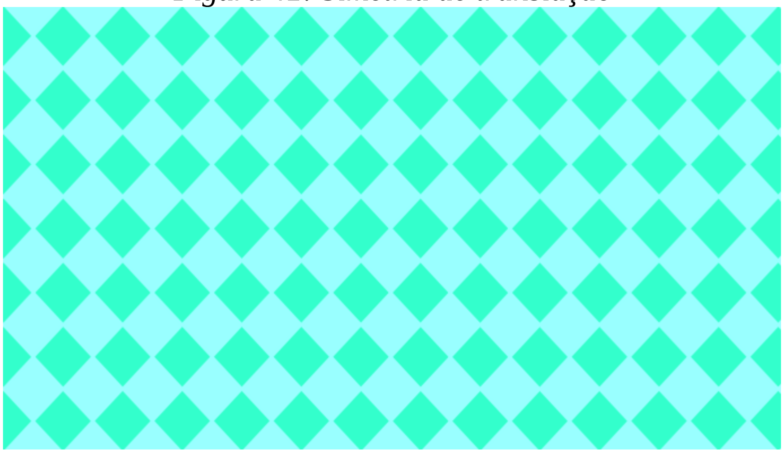
7.2.4 Simetrias em Farmer (1999) em linguagem figural

NEsta subseção, alguns conceitos abordados por Farmer (1999) são explorados a partir de representações no registro das figuras:

(a) Invariância por translação

Como foi visto anteriormente, as figuras são classificadas pelo critério da simetria de translação. Não é possível fazer uma representação causal de uma figura com simetria de translação, isso porque essas figuras se estendem indefinidamente em uma ou duas direções. Desse modo, considere que a Figura 41 se prolongue indefinidamente na horizontal e na vertical.

Figura 41: Simetria de translação



Fonte: Os Autores

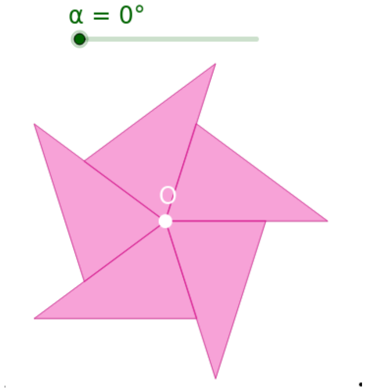
Essa figura é composta por quadrados com duas cores. Considere dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, de modo que o vetor $\vec{u}$ seja paralelo e congruente a uma das diagonais dos quadrados, e o vetor $\vec{v}$, paralelo e congruente a um dos lados dos quadrados. Considere ainda os vetores $\vec{w}$ e $\vec{z}$, tal que $\vec{w} \perp \vec{u}$ e $\vec{w} \equiv \vec{u}$ além disso $\vec{z} \perp \vec{v}$ e $\vec{z} \equiv \vec{v}$. Ao fazer uma translação da figura de um quadrado contido na Figura 41, por qualquer um dos seguintes vetores, $a \cdot \vec{u}$, $a \cdot \vec{w}$, $2a \cdot \vec{v}$ e $2a \cdot \vec{z}$ com $a \in \mathbb{Z}$, a figura ficará exatamente a mesma. Neste caso, diz-se que a Figura 41 tem simetria de translação, pois existe pelo menos uma forma de torná-la invariante por uma translação. As figuras que não têm esse tipo de simetria, são chamadas de figuras finitas.

No entanto, uma figura finita, nem sempre é finita no sentido coloquial. Por exemplo, considere uma figura Ɣ que é a união de duas retas perpendiculares. A figura Ɣ é infinita no sentido coloquial pois se prolonga indefinidamente. Porém de acordo com Farmer (1999) a figura Ɣ é finita pois não tem simetria de translação, além disso, ela é uma figura D_4 pois terá 4 simetrias de rotação e 4 simetrias de reflexão em reta.

(b) Invariância por rotação

Farmer (1999) diz que há figuras que se tornam invariantes por rotação. Para exemplificar isso, são utilizadas algumas imagens de uma animação feita no GeoGebra. Considere a Figura 42 que será rotacionada em torno do ponto O, com amplitude α de rotação, no modo controle deslizante. Na Figura 42, a rotação é de 0^o, portanto a figura fica invariante.

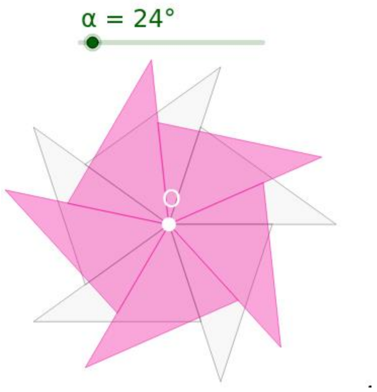
Figura 42: Figura invariante por rotação



Fonte: Os Autores

Ao mover o ponto do controle deslizante para a direita, o ângulo α vai alterando. A Figura 43 mostra o controle deslizante indicando 24^o, em que a figura não ficou invariante.

Figura 43: Com uma rotação de 24º, a figura não fica invariante

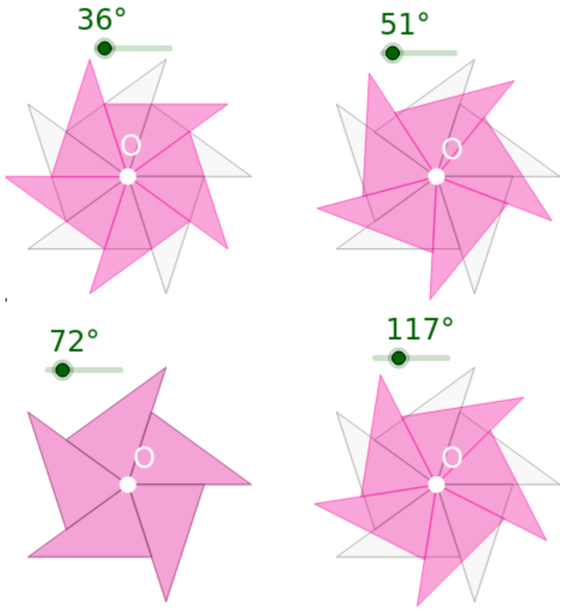


Fonte: Os Autores

Observando a Figura 43, a figura cinza que aparece no fundo indica a posição inicial da figura rosa. Percebe-se que a figura rosa não coincide com a figura cinza.

A Figura 44 mostra mais quatro rotações, com amplitudes diferentes, da mesma animação.

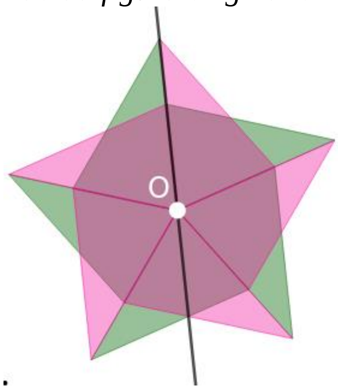
Figura 44 : Quatro rotações com amplitudes diferentes



Fonte: Os Autores

De todas as rotações contidas na Figura 44, somente a rotação de 72^o deixou a figura invariante, isto é, a figura rosa coincidiu com a cinza. Em suma, a figura rosa, torna-se invariante a partir de rotações em torno de O com qualquer amplitude múltipla de 72^o. Outra característica da figura rosa é que ela não tem eixo de simetria. A Figura 45 mostra a figura rosa com sua imagem resultado de uma reflexão em torno de um eixo que passa pelo centro da figura e coincide com um dos lados dos triângulos que compõem a figura rosa.

Figura 45 : Reflexão da figura original em torno de uma reta

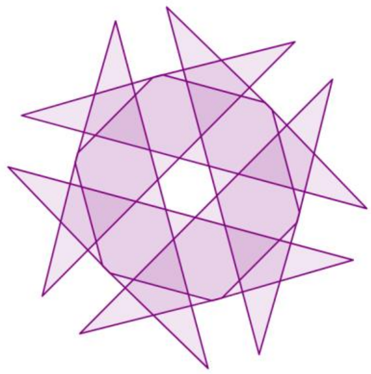


Fonte: Os Autores

A figura verde é a imagem da figura rosa, por uma reflexão em torno da reta que aparece na Figura 45. Se essa reflexão deixasse a figura original invariante, as cores rosa e verde iriam coincidir em toda a superfície da figura original, no entanto, em algumas superfícies as duas cores não coincidiram, indicando que não deixou a figura original invariante. Portanto, a figura original é mais um exemplo de figura que se torna invariante por uma rotação, mas que não tem eixo de simetria. Na classificação de Farmer (1999) essa figura é do tipo C_5 pois possui 5 rotações e nenhum eixo de simetria.

Já a Figura 46 é invariante por seis rotações e tem seis eixos de simetria, sendo classificada como D_6.

Figura 46: Exemplo de figura com seis simetrias de rotação e seis simetria de espelho



Fonte: Os Autores

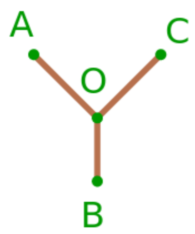
Além destas figuras que representam o conceito de invariância por rotação, o Anexo V traz outros exemplos de figuras que têm simetria dos tipos C_n e D_n, criadas pelos autores usando a ferramenta GeoGebra.

(c) Relação entre as figuras finitas e os grupos C_n e D_n

As próximas imagens procuram exemplificar a relação entre figuras e os tipos C_n e D_n, que são os grupos cíclicos e diedrais, respectivamente. Para esse exemplo, é tomada uma figura que Conte (2008) denomina Y pitagórico (Figura 47). De acordo com esse autor a figura tinha um valor muito grande na escola pitagórica, pois representava uma estrada que inicialmente é única e que na metade, bifurca-se em dois caminhos divergentes. A estrada única significa as primeiras décadas de vida e a bifurcação representa a vida adulta, quando a pessoa deve decidir qual caminho tomará, se à direita ou à esquerda.

O Y pitagórico é composto por três segmentos congruentes com origem no ponto O e os ângulos $A\hat{O}B \equiv B\hat{O}C \equiv C\hat{O}A$, conforme Figura 47.

Figura 47: Y pitagórico

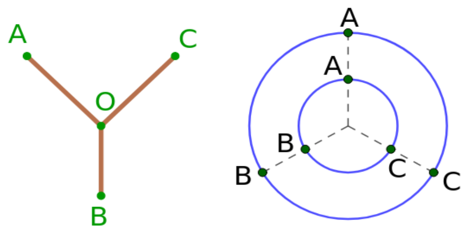


Fonte: Adaptado de Conte (2008)

Para relacionar com o grupo diedral, é retomado o esquema dos círculos concêntricos, criado pelos autores no Capítulo 6. Serão relacionadas as isometrias que deixam o Y pitagórico invariante com as funções geradas pelos círculos concêntricos, considerando os casos:

- **Caso 1:** $S_1 : Y \to Y$, função identidade. Rotação de 0^o em torno do ponto O. Conforme mostra a Figura 48. Considerando somente os vértices A,B,C do Y pitagórico, tem-se que $S_1(A) = A$, $S_1(B) = B$ e $S_1(C) = C$.

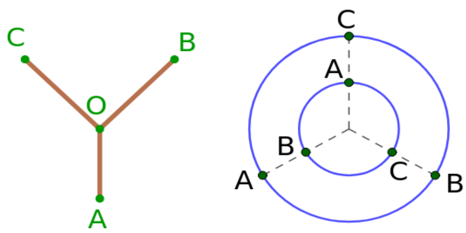
Figura 48 : Esquema inicial. Função S_1



Fonte: Os Autores

- **Caso 2:** $S_2 : Y \to Y$. Rotação em torno do ponto O com amplitude de 120^o em sentido anti-horário, conforme a Figura 49. Neste caso tem-se, $S_2(A) = C$, $S_2(B) = A$ e $S_2(C) = B$.

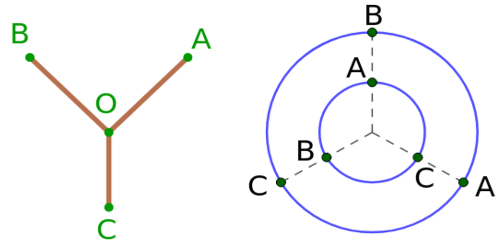
Figura 49 : Função S_2



Fonte: Os Autores

➢ **Caso 3:** $S_3 : Y \to Y$. Rotação em torno do ponto O com amplitude de 240^o, em sentido anti-horário:

Figura 50 : Função S_3



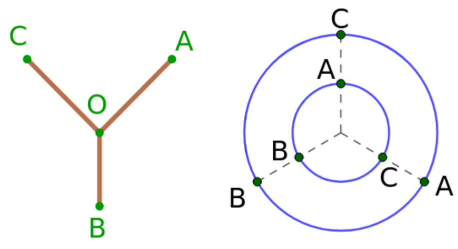
Fonte: Os Autores

No esquema dos círculos concêntricos, no sentido anti-horário, os pontos estão organizados na forma A, B, C, assim como estes pontos aparecem no Y pitagórico. Os três casos apresentados esgotam todas as opções de simetria de rotação, ou seja, o Y pitagórico tem somente três simetrias de rotação.

O Y pitagórico ainda tem três simetrias de espelho, respectivamente nas retas $r \supset \overline{OA}$, $s \supset \overline{OB}$ e $t \supset \overline{OC}$ e no esquema dos círculos concêntricos é válido inverter a ordem dos pontos de trás para frente. Desse modo, é invertido para C, B, A. A reflexão do Y pitagórico em torno da reta s coincide com a inversão dos pontos do círculo maior dos concêntricos, conforme mostra a Figura 51. Desse modo, tem-se os casos:

➢ **Caso 4:** $S_4 : Y \to Y$, simetria de espelho em torno da reta $s \supset \overline{OB}$ (Figura 51).

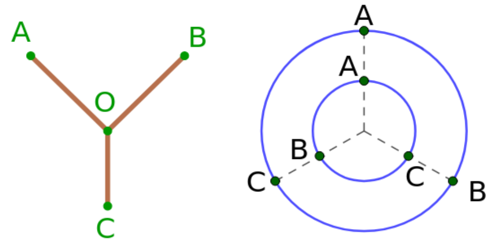
Figura 51: Função S_4



Fonte: Os Autores

➢ **Caso 5:** $S_5 : Y \to Y$, simetria de espelho em torno da reta $r \supset \overline{OA}$ (Figura 52).

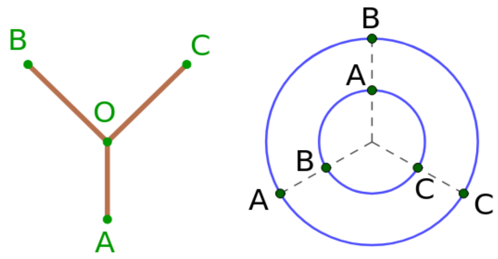
Figura 52 : Função S_5



Fonte: Os Autores

➢ **Caso 6:** $S_6 : Y \rightarrow Y$, simetria de espelho em torno da reta $t \supset \overline{OC}$ (Figura 53).

Figura 53 : Função S_6

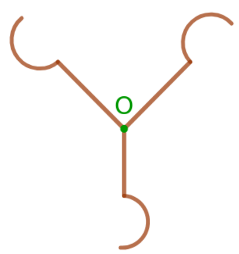


Fonte: Os Autores

Essas são todas as simetrias do Y pitagórico, qualquer tentativa de compor duas ou mais dessas simetrias coincidirá com uma das seis definidas. Portanto, seja o conjunto $S = \{S_1,\ S_2,$ $S_3,\ S_4,\ S_5,\ S_6\ \}$ e a operação $\circ$ que é a composição de simetrias, então $\langle S, \circ \rangle$ é um grupo diedral.

Com uma pequena alteração Y no pitagórico (Figura 54), ele não terá mais simetria de espelho.

Figura 54 : Y pitagórico modificado



Fonte: Os Autores

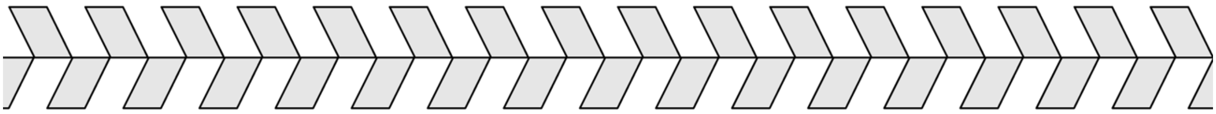
A Figura 54 tem somente simetria de rotação. Considere S_1 a simetria de rotação dessa figura, com uma amplitude de 120^o. S_1^2 é a composição de S_1 com ela mesmo, isto é, duas rotações de 120^o , ela permanecerá invariante, por isso, é também uma simetria. Considere também S_1^3, isto é, a composição de S_1 com ela mesma, três vezes, ou seja, $S_1^3 = S_1 \circ S_1 \circ S_1$, isso é o mesmo que, três rotações de 120^o , que resulta numa rotação de 360^o e, portanto, a função identidade. Essas são, as três simetrias da figura, geradas a partir de potências de S_1, desse modo o conjunto $S = \{S_1 , S_1^2, S_1^3\}$, munido da operação, composição de funções é um grupo cíclico, como foi visto no Capítulo 6. Neste caso, onde o conjunto tem 3 elementos, é o grupo cíclico C_3.

Voltando ao exemplo da figura rosa (Figuras 42, 43, 44 e 45), ela se torna invariante somente por rotações em torno do seu centro, com amplitudes múltiplas de 72^o. Cinco composições de rotações de 72^o determinam todas as funções que deixam a figura rosa invariante. Desse modo, o conjunto das cinco rotações que deixam a figura rosa invariante, munido da operação de composição de isometrias é um grupo cíclico.

(d) Simetrias em faixa

Farmer (1999) classifica as figuras que têm simetria de translação em faixas e papel de parede. A Figura 55 mostra um exemplo de faixa.

Figura 55 : Exemplo de faixa



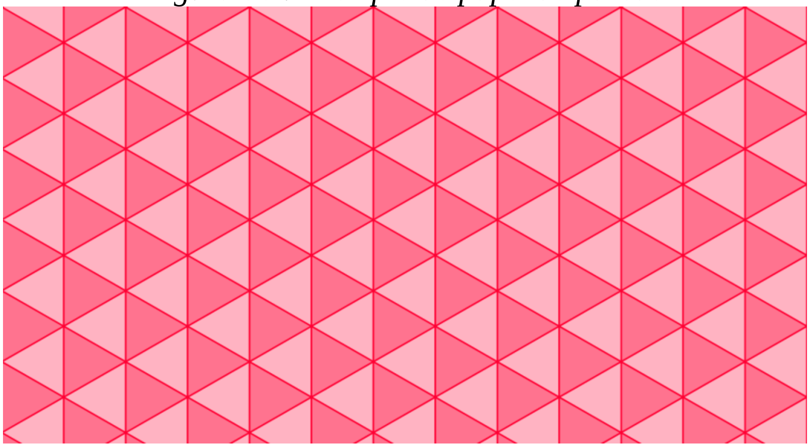
Fonte: Autores

Nas faixas, as figuras ficam limitadas entre duas retas paralelas e se prolongam em uma direção. No caso da Figura 55, ela se prolonga na direção horizontal, indefinidamente para a direita e para a esquerda. As faixas, além da simetria de translação podem ter simetria de rotação, reflexão, reflexão deslizante e combinações destas. No caso da Figura 55, ela tem reflexão deslizante.

(e) Simetrias em papel de parede

A Figura 56 é um exemplo de papel de parede, pois se prolonga indefinidamente em duas direções, horizontal (direita e esquerda) e vertical (para cima e para baixo), e tem simetria de translação. Outro exemplo de papel de parede é a Figura 41, já vista no início dessa subseção, em que era composta por quadrados.

Figura 56 : Exemplo de papel de parede



Fonte: Os Autores

A Figura 56 é composta por triângulos equiláteros. Considere que a figura, se prolongue indefinidamente em duas direções. Considere também os vetores $\vec{u}$,$\vec{v}$ e $\vec{w}$, paralelos e congruentes a cada um dos lados dos triângulos e o vetor $\vec{h}$ paralelo e congruente a altura deles. Qualquer translação pelos vetores $a \cdot \vec{u}$,$a \cdot \vec{v}$, $a \cdot \vec{w}$ e $2a \cdot \vec{h}$ com $a \in \mathbb{Z}$ deixará a figura invariante.

7.2.5 Simetria em Weyl (1997)

A ênfase da obra Weyl (1997) é fazer uma discussão filosófica da simetria e envolve principalmente teoria da relatividade, biologia, química e física, sendo que a simetria em questão é principalmente de objetos tridimensionais. O autor não procura enunciar axiomas e postulados, nem demonstrar teoremas e proposições em geral ou fazer o leitor descobrir padrões, como em Farmer (1999). Weyl (1997) faz uma discussão filosófica em nível avançado. Embora o foco seja simetrias tridimensionais e sua relação com diversas áreas das ciências, alguns textos da obra referem-se a figuras planas. O Quadro 13 mostra algumas citações que podem ser relacionadas à simetria de figuras planas. Embora as duas primeiras citações sejam de corpos, ou seja, de objetos tridimensionais, a ideia de simetria está ligada com o conceito de invariância, concordando assim com Farmer (1999) e Pasquini e Bortolossi (2015).

Quadro 12 : Simetria para Weyl (1997)

Conceito	Citação na íntegra
Simetria Bilateral	"a simetria bilateral é um conceito absolutamente preciso e estritamente geométrico. Um corpo ou uma configuração espacial é simétrica com relação a um dado plano E, se possuir em si também sua própria reflexão E". (WEYL, 1997, p. 16).
Simetria Rotacional	"Uma figura tem simetria rotacional em torno do eixo l se trouxer em si mesma todas as rotações em torno de l". (WEYL, 1997, p. 17).
C_n e D_n	"temos duas possibilidades para os grupos finitos de rotações em torno do centro O na geometria plana (…) (1) o grupo que consiste em repetições de uma rotação simples própria por uma parte alíquota $\alpha = 360^o/n$ de 360^o; (2) o grupo dessas rotações combinada com as reflexões em$n$eixos que formam ângulos de $1/2\ \alpha$. O primeiro grupo é chamado de grupo cíclico C_n e o segundo grupo diedral D_n. Assim, essas são as únicas possíveis simetrias centrais em duas dimensões". (WEYL, 1997, p. 75).

Fonte: Adaptado Weyl (1997)

Ainda no quadro acima, observa-se a referência dos grupos de simetria C_n e D_n, indo ao encontro das simetrias vistas em Farmer (1999). Weyl (1997) também fala de simetrias translacionais e menciona os 17 tipos de papel de parede citados por Farmer (1999). Contudo, Weyl (1997) chama dos papéis de parede de ornamento bidimensional, como pode ser visto em "… existem dezessete espécies diferentes de simetria possível para um ornamento bidimensional" (WEYL, 1997, p. 111). O autor ainda cita obras de George Pólya para verificar as demonstrações desses 17 tipos e diz ainda, que embora essas demonstrações apareceram somente com Pólya no século XIX, os artesãos egípcios já tinham esse conhecimento.

Respondendo as questões: O que é simetria para Weyl (1997)? A simetria é uma transformação geométrica que deixa a figura invariante. Quais os tipos de simetria em Weyl (1997)? As únicas simetrias centrais em duas direções são as C_n, que são aquelas que têm n rotações em torno do seu centro, e as D_n que além de ter n rotações em torno do seu centro, têm também, n eixos de reflexão. Em relação aos ornamentos bidimensionais, há 17 tipos, os quais podem ser verificadas nas obras de George Pólya.

7.2.5 Simetria em SMSG (1969)

O estudo de simetria em SMSG (1969) é breve, são dedicadas apenas quatro páginas. Inicialmente os autores propõem duas atividades experimentais para explicar o que é eixo de simetria e posteriormente há diversas atividades para encontrar eixos de simetria em figuras planas. Depois há a definição de figura simétrica, que aparece na íntegra na Figura 57, seguida de alguns exercícios que encerram o assunto sobre simetria.

Figura 57 : Definição de figura simétrica em SMSG (1969)

Definição: Uma figura é simétrica em relação a uma reta ℓ, se para cada ponto A da figura existe um ponto B na figura para o qual ℓ é bissector de $\overline{AB}$ e é perpendicular a $\overline{AB}$. (ℓ é mediatriz de $\overline{AB}$)

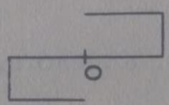
Fonte: SMSG (1969, p. 163)

De acordo com a definição de SMSG (1969), uma figura é simétrica se permanecer invariante por uma reflexão em torno de uma reta. É invariante, pois os autores dizem que a transformada de cada ponto A de uma figura é o ponto B que também está na figura. Essa invariância ocorre por reflexão em torno de uma reta pois há uma reta l que é o 'bissector' e perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, ou seja, divide o segmento $\overline{AB}$ em duas partes congruentes e forma com a reta, ângulos de 90^o.

Apesar da teoria em SMSG (1969) conter somente esse tipo de simetria, dentre os oito exercícios que os autores propõem após essa definição, alguns apontam para um outro tipo de simetria, como pode ser visto na Figura 58 que traz os Exercícios 7 e 8.

Figura 58 : Exercícios 7 e 8 da seção de simetria em SMSG (1969)

Dizemos que um círculo é simétrico em relação a um ponto, o seu centro, e que uma elipse é simétrica em relação a um ponto, seu centro (o ponto onde seus eixos maior e menor se interceptam). Nós dizemos também que a figura abaixo é simétrica em relação ao ponto 0. Diga com suas próprias palavras o que você pensa significar a simetria em relação a um ponto.



Quais as figuras no Problema 4 que possuem simetria em relação a um ponto?

Quando uma laranja é cortada por seu centro de modo que cada seção da laranja possa ser considerada uma metade, podemos pensar nas superfícies feitas pelo corte como simétricas. Uma simetria desta espécie é simetria em relação a um plano. Dê o nome de outros objetos que sejam simétricos em relação a um plano.

Fonte: SMSG (1969, p. 172)

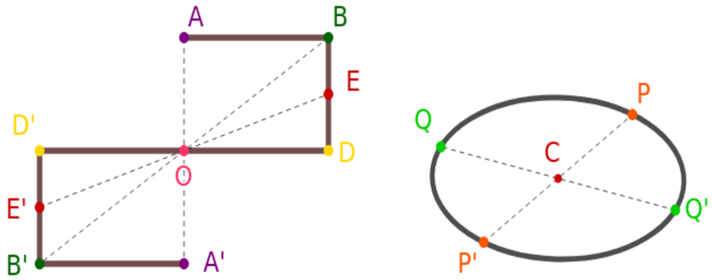
O primeiro exercício da Figura 58 é o Exercício 7. Nele, os autores procuram desenvolver a noção de simetria em torno de um ponto, dando exemplos de figuras que são simétricas em relação a um ponto: o círculo, a elipse e a figura composta por segmentos de reta. Estas figuras permanecem invariantes após todos os seus pontos serem transformados por uma simetria em torno de um ponto. No Exercício 8, os autores procuram desenvolver a noção de simetria em torno de um plano.

Em suma, SMSG (1969) não diz o que é simetria, apenas define o que é uma figura simétrica em relação a uma reta l, que é a invariância por uma reflexão em torno de l. Além disso, apontam que há a simetria em torno de um ponto, sem maiores explicações, e pedem para o próprio leitor explicar o que entendeu, a partir de alguns exemplos.

7.2.7 Simetria de SMSG (1969) em linguagem figural

A simetria central em SMSG (1969) é analisada a partir do Exercício 7 da Figura 58. De acordo com o enunciado do exercício, há uma elipse cujo centro será o ponto C e quatro outros pontos sobre ela, $P,\ P', Q,\ Q'$, conforme Figura 59. Como C é o ponto médio dos segmentos $\overline{PP'}$ e QQ', então P e P', bem como Q e Q' são simétricos em relação a C.

Figura 59 : Invariância por uma simetria em torno de um ponto

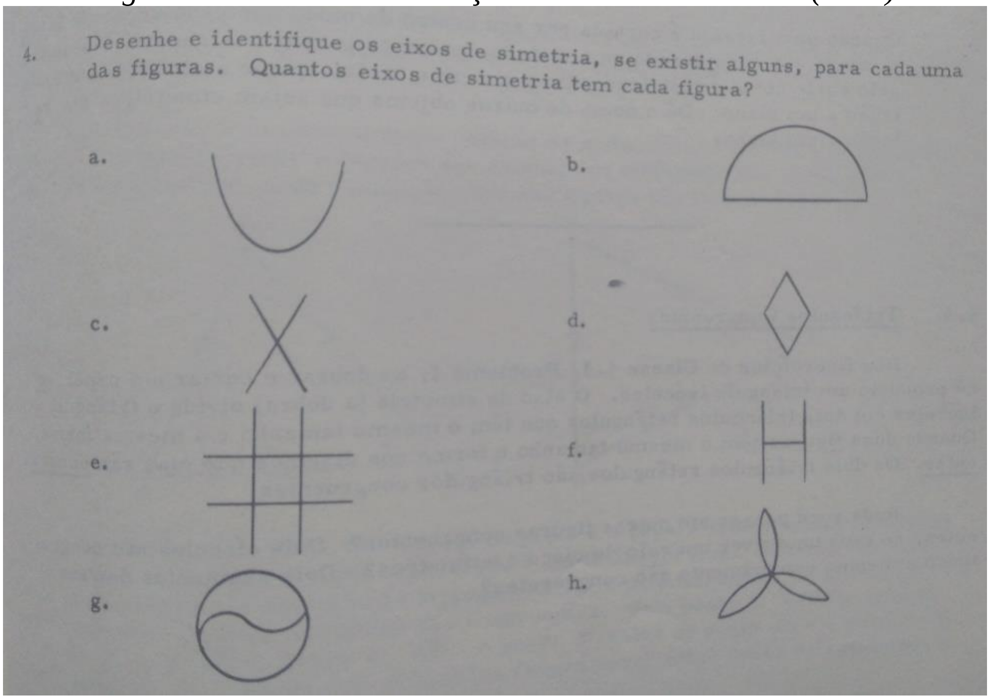


Fonte: Os Autores

A figura ao lado da elipse é a mesma figura do Exercício 7. Nesse caso, o ponto O é o centro da figura e os pares de pontos $(A, A'), (B, B'), (D, D'), (E, E')$ são simétricos em relação a O. Assim, o ponto O é o ponto médio dos segmentos $\overline{AA'},\ \overline{BB'},\ \overline{DD'},\ \overline{EE'}$. Em suma, para cada ponto dessa figura, o simétrico do ponto em relação a O, está também nessa figura. Desse modo, a função que transforma a figura nela mesma, é o que Lima (2007) e Melo (2010) chamaram de simetria em torno de um ponto, o mesmo nome atribuído em SMSG (1969). Lima (2007) e Melo (2010) também apontaram que esse tipo de isometria coincide com uma rotação de 180^o. A rotação em torno de um ponto, que deixa uma figura invariante não foi contemplada em nenhum dos autores já analisados.

Apesar dos autores procurarem desenvolver a noção de invariância de uma figura, através de uma simetria em torno de um ponto, o estudo sobre simetria se desenrola em torno das figuras que têm eixos de simetria, como é o caso do Exercício 4 mostrado a seguir.

Figura 60 : Exercício 4 da seção de simetria em SMSG (1969)



4. Desenhe e identifique os eixos de simetria, se existir alguns, para cada uma das figuras. Quantos eixos de simetria tem cada figura?

a.

b.

c.

d.

e.

f.

g.

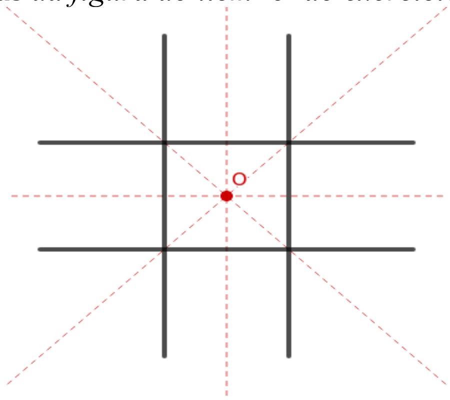
h.

Fonte: SMSG (1969, p. 170)

O Exercício 4 pede para desenhar e identificar quantos eixos de simetria em cada figura. Além disso, o exercício 7 pede quais figuras do exercício 4 possuem simetria em relação a um ponto. Desse modo, as figuras dos itens a e b apresentam um eixo de simetria. As figuras dos itens c, d, f, têm dois eixos de simetria. A figura do item h tem três eixos de simetria. A figura do item e, tem quatro eixos de simetria enquanto a figura do item g, se for semelhante à Figura 3 já discutida no Capítulo 2, não tem nenhum eixo de simetria. As figuras que possuem simetria em relação a um ponto, são as figuras dos itens c, d, e, f, g, h.

Para mostrar que a figura do item e possui quatro eixos de simetria, considere a Figura 61.

Figura 61 : Simetrias da figura do item 'e' do exercício 4 de SMSG (1969)



Fonte: Os Autores

A Figura 61 mostra os quatro eixos de simetria da figura do item e, do Exercício 4. Além disso, a figura é simétrica em relação ao ponto O que é a intersecção dos quatro eixos de simetria.

7.3 OBRAS COM ÊNFASE EM ISOMETRIA E SIMETRIA

7.3.1 Introdução

As obras que têm uma ênfase em isometria e simetria são: Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano, de Erika Brigitta Ledergerber-Ruoff (LEDERGERBER – RUOFF, 1982); Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares, de Sérgio Alves e Maria Elisa Esteves Lopes Galvão (ALVES e GALVÃO, 1996); e Simetria e Transformações Geométricas, de Eduardo Veloso (VELOSO, 2012).

Érika Brigitta Ledergerber-Ruoff nasceu na Suíça, concluiu seu doutorado em matemática pura em 1973 em Zurique. Veio para o Brasil ainda na década de 1970 e atuou como professora na USP e depois mudou para a PUC-SP. Como foi visto no Capítulo 3, durante o MMM, uma disciplina de transformações geométricas foi inserida nos cursos de licenciatura em matemática na USP e na PUC – SP e Érika ministrou essas disciplinas. Ela diz, no prefácio da sua obra, que também lecionou sobre esse tema na Suíça.

Quando Érika publicou sua obra em 1982, praticamente não havia obras que tratavam o tema isometrias a nível universitário, em português brasileiro. Aliás, mesmo Elon Lages Lima quando publicou sua primeira edição do livro Isometrias, em 1996, comenta que obras com esse foco eram muito raras. Érika faz uma construção axiomática das isometrias e simetrias, citando axiomas, dando definições e demonstrando teoremas, corolários e outras proposições. No primeiro capítulo faz um breve estudo sobre teoria dos conjuntos, operações e grupos, sempre relacionando a geometria, o segundo capítulo trata sobre isometrias, e no terceiro faz um estudo de alguns tipos específicos de simetrias de figuras.

Sérgio Alves e Maria Elisa E. L. Galvão, são brasileiros, doutores em matemática e professores na Universidade de São Paulo – USP. Eles ministraram a disciplina de transformações geométricas, depois da mudança de Érika Ledergerber-Ruoff da USP para a PUC - SP. A obra foi produzida a partir de notas de aulas dessa disciplina na USP. A obra de Alves e Galvão (1996) é uma construção axiomática das isometrias e possui bastante exercícios. As simetrias são estudadas brevemente no apêndice.

Eduardo Veloso é português, destacado matemático em Portugal. Em 2010 foi atribuído a ele, pelo presidente daquele país, o título de Grande-Oficial da Ordem de Mérito e em 2014 recebeu o Prêmio Ciência Viva Montepio Media, também de órgãos do governo federal de Portugal[21]. Escritor de diversos livros voltados ao ensino de matemática, dentre eles está o livro Simetria e Transformações Geométricas (VELOSO, 2012).

O livro Simetria e Transformações Geométricas, de acordo com o autor no prefácio da obra, surgiu em resposta a uma renovação curricular da Educação Básica, que ocorreu na década de 1990 em Portugal. Segundo Veloso (2012), nessa reforma, os conteúdos de transformações geométricas foram ampliados, mas não houve formação para os professores sobre essa ampliação. Por esta razão, o foco da obra é, principalmente, oferecer aos professores de matemática de Portugal um material que possa complementar a formação a respeito de transformações geométricas, especialmente sobre isometrias e simetrias.

7.3.2 O que é isometria e simetria para esses três autores?

Os três autores dão a mesma definição para isometria, mudam apenas as notações e a forma de definir, como pode ser visto no Quadro 14.

[21]Mais detalhes sobre esses prêmios, pode ser encontrado em <https://observador.pt/especiais/eduardo-veloso-de-navegador-da-tap-ao-ensino-da-matematica/> acesso em 14 jan. 2022.

Quadro 13: Definição de isometria nas três obras com ênfase em isometria e simetria

Referência	Definição na íntegra
Ledergerber – Ruoff (1982, p. 58)	"Uma aplicação de P_E em P_E, que conserva distâncias, chama-se isometria, isto é, se Ω é uma isometria, e P e Qdois pontos arbitrários e se $\bar{P} = (P)\Omega$ e $\bar{Q} = (Q)\Omega$, então $\lvert PQ \rvert = \lvert \bar{P}\bar{Q} \rvert$"
Alves e Galvão (1996, p. 20)	"Uma transformação do plano F é chamada uma **isometria do plano**, ou ainda, uma **congruência do plano**, se $P'Q' = PQ$ para todo o par de pontos distintos P e Q do plano, onde $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$" (grifo do autor).
Veloso (2012, p. 21)	"*Diz-se que a transformação geométrica* T *é uma isometria se, para quaisquer dois pontos* P *e* Q, *se tem* $dist(P, Q) = dist(P, Q)$ *em que* $P' = T(P)$ *e* $Q' = T(Q)$." (grifo do autor).

Fonte: Adaptado de Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012)

Ledergerber-Ruoff (1982) diz que a isometria é uma aplicação no plano, que conserva distâncias. Já Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012) dizem que a isometria é uma transformação geométrica que preserva distâncias. No entanto, é possível afirmar que tanto o termo 'aplicação' quanto 'transformação geométrica' referem-se a funções, uma vez que na definição de isometria, há um domínio e uma imagem, que são o plano euclidiano, e há uma lei que diz como associar os elementos do domínio. Esses são os três elementos que caracterizam uma função, conforme foi visto no Capítulo 6. Já o conceito e a definição de preservar distâncias é o mesmo visto no Capítulo 2, exemplificado na Figura 1, o qual apareceu novamente na seção 7.1, quando foi analisado Lima (2007) e Melo (2010).

Desse modo, diante da questão: O que é isometria para Ledergerber-Ruoff (1982), para Alves e Galvão (1996) e para Veloso (2012)? a resposta é: Uma função $f: \Pi \rightarrow \Pi$, sendo Π o plano euclidiano, de modo que para qualquer $P, Q \in \Pi$ tem-se que $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$.

Em relação à simetria, os três autores concordam entre si, pois para eles a simetria é uma isometria que deixa uma figura invariante, conforme Quadro 15.

Quadro 14 : : Definição de simetria nas três obras com ênfase em isometria e simetria

Referência	Definição na íntegra
	"Seja F uma figura no Plano Euclidiano, isto é, um conjunto não vazio de pontos de P_E. Considerando o conjunto das isometrias que aplicam F sobre si, isto é, que deixam F fixa (…) o conjunto dessas isometrias forma um subgrupo do grupo de todas as isometrias. Definimos então:

Ledergerber – Ruoff (1982, p. 146)	**1.1. Grupo simétrico de uma figura**. O grupo G de todas as isometrias que deixam fixa uma figura F no Plano Euclidiano chama-se grupo simétrico de F . Se o grupo simétrico de uma figura contém somente a identidade a figura é chamada assimétrica.” (grifo do autor).
Alves e Galvão (1996, p. 147)	“**Definição**: Uma isometria F do plano é uma **simetria** de uma figura geométrica A do plano, se A é invariante por F, isto é, $F(A) = A$” (grifo do autor).
Veloso (2012, p. 56)	*“Dada uma figura plana F, chama-se simetria de F toda a isometria S do plano que deixe F (globalmente) invariante, isto é $S(F) = F$.* É importante salientar que esta definição não implica que todos os pontos de F fiquem invariantes para a isometria S mas sim que a imagem de F por meio de S coincide com F (daí a palavra globalmente)” (grifo do autor).

Fonte: Adaptado de Ledergeber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012)

A obra de Ledergerber-Ruoff (1982) está tão atrelada ao estudo de grupos, que a autora não fala explicitamente o que é simetria ou o que é uma figura simétrica, apenas fala o que é um grupo simétrico de uma figura. Para Ledergerber-Ruoff (1982) o grupo simétrico de uma figura é o conjunto de todas as isometrias de uma figura F que deixam F fixa. O termo ‘fixa’ é o mesmo que invariante, que foi visto no Capítulo 2 e na seção 7.2 quando foi analisada a obra de Farmer (1999).

Desse modo, ao definir o grupo simétrico de uma figura, Ledergerber-Ruoff diz implicitamente que há isometrias que deixam uma figura invariante e que o conjunto dessas isometrias compõem o grupo simétrico da figura. Além disso, afirma que se uma figura só se torna invariante pela identidade, então essa figura é assimétrica. Tudo isso leva ao conceito de que a simetria é a isometria que deixa a figura invariante, e as figuras simétricas são aquelas que permanecem invariantes após uma simetria.

Já Alves e Galvão (1996) dão uma definição direta sobre simetria: É uma isometria que deixa a figura invariante.

Veloso (2012) acrescenta ainda na definição, o conceito de globalmente invariante. Esse conceito é acrescentado, devido à preocupação do autor em não reduzir a definição de simetria na função identidade. Essa mesma preocupação foi visa em Pasquini e Bortolossi (2015) no capítulo 2. Por isso, Veloso (2012) diz que, deixar uma figura invariante, não é o mesmo que deixar invariante todos os pontos da figura, mas deixar a figura, de um modo global, invariante.

Em suma, os três autores concordam que a simetria é uma isometria que deixa uma figura invariante. Além disso, uma figura simétrica é aquela que tem pelo menos uma simetria, ou seja, uma figura simétrica é aquela que se torna invariante por, pelo menos uma isometria

Para responder à questão: O que é simetria para Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012)? é apresentada a seguinte resposta: Simetria é uma isometria que deixa uma figura invariante. Com os dados levantados, também pode ser respondida a questão: Qual a relação entre isometria e simetria para Ledergerber-Ruoff (1982), para Alves e Galvão (1996) e para Veloso (2012)? A resposta é: A simetria é um tipo específico de isometria, mais especificamente, a simetria é uma isometria que deixa uma figura invariante.

7.3.3 Classificação das isometrias para os três autores

Os três autores supracitados, além de trazerem conceitos que se equivalem para isometria e simetria, também classificam as isometrias da mesma maneira, modificando somente o nome das isometrias e os termos usados para defini-las. O Quadro 16 mostra a definição de reflexão numa reta, para os três autores.

Quadro 15 : Definição de reflexão em reta nas três obras com ênfase em isometria e simetria

Reflexão Numa Reta	
Referência	Definição na íntegra
Ledergerber-Ruoff (1982, p. 64)	"Seja g uma reta. A aplicação que leva cada ponto P ao ponto $\bar{P}$, simétrico em relação à reta g, chama-se reflexão na reta g e indica-se por Σ_g"
Alves e Galvão (1996, p. 97)	"**Definição**: Dada uma reta m do plano, **a reflexão em relação a** m é a aplicação que fixa todos os pontos de m e associa a cada ponto P do plano,P não pertencente a m, o ponto P' tal que m é a reta mediatriz do segmento$\overline{PP'}$." (grifo do autor)
Veloso (2012, p. 8)	"Dada uma recta e, diz-se reflexão E de eixo e a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano $P' = E(P)$ que verifica as seguintes condições: • Se P pertence a e,$P = P'$ • Se P não pertence a e, a mediatriz do segmento PP' é a recta e."

Fonte: Adaptado de Lederger-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012)

Ledergeber-Ruoff (1982) define a reflexão numa reta, praticamente da mesma forma que Lima (2007), usando a noção de simétrico de um ponto em relação a uma reta, para simplificar a definição. Ou seja, o simétrico de um ponto P em relação a uma reta g é o ponto P' tal que g é a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Logo, a reflexão em torno da reta g é a função $R_r\colon \Pi \rightarrow \Pi$ que associa cada ponto P ao seu simétrico em relação a g. Já Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012) não usam a noção de ponto simétrico a uma reta, mas explicitam esse conceito na definição, quando falam que a reta r é a mediatriz de $\overline{PP'}$. Esses dois autores também chamam a atenção, que, se $P \in r$ então $f(P) = P$, o ponto fixo que Alves e Galvão (1996) se referem, é quando$f(P) = P$. Ou seja, quando os pontos do domínio pertencem a reta de reflexão, a imagem será o próprio ponto.

Destaca-se ainda um comentário que Veloso (2012) faz em relação a simetria e a reflexão, que vai ao encontro da discussão feita no Capítulo 2, onde foram apresentadas algumas divergências sobre os conceitos de reflexão e simetria:

> A reflexão tem sido tradicionalmente designada em português, por simetria axial. E por isso o ponto $P' = E(P)$ costuma chamar-se o ponto simétrico de P em relação ao eixo e. Tendo em atenção que a palavra simetria está reservada, em matemática, para um conceito diferente – que é, de resto, um dos temas principais desse livro -, devemos fazer esforços para perder o hábito de chamar de simetria axial ou bilateral à transformação reflexão. Esta <mera> questão de nomes tem-se revelado como o maior fator de confusões na introdução deste novo tema no ensino básico. (VELOSO, 2012, p. 9).

Desse modo, Veloso (2012) sugere não usar os termos simetria, para designar tipos específicos de isometria, pois isso pode gerar confusão. Uma discussão semelhante a essa foi vista em Ribeiro, Gibim e Alves (2021) que dizem que a BNCC considera a reflexão e a simetria como sinônimos, o que não deveria acontecer. Também foi visto no capítulo dois que os PCNs usam simetria axial como sinônimo de reflexão em reta e simetria central como sinônimo de reflexão em ponto. Na subseção 7.1.3 também foi visto que Lima (2007) usa o termo simetria em torno de um ponto para designar a reflexão de um ponto e Melo (2010) também usa o termo simetria pontual. Essa discussão será retomada no capítulo 9, que são as considerações finais.

Ledergeber-Ruoff (1982) e Alves e Galvão (1996) demonstram que a reflexão numa reta é uma isometria, de modo similar a demonstração que foi feita na seção 7.1. Em suma, o conceito de reflexão numa reta é o mesmo para os três autores.

Os três autores também trazem equivalentes representações no registro das línguas, acerca do conceito de translação, como mostra o Quadro 17.

Quadro 16: Definição de translação nas três obras com ênfase em isometria e simetria

Translação	
Referência	Definição na íntegra
Ledergerber-Ruoff (1982, p. 88)	"O produto $\Sigma_j\Sigma_g$ de duas reflexões em retas paralelas, f e g, é a translação $\tau(2\vec{d})$, cujo vetor é o dobro do vetor da distância da reta f a reta g."
Alves e Galvão (1996, p. 30)	"A soma de ponto com vetor permite definir a aplicação chamada translação na direção do vetor $\vec{v}$, ou translação de vetor $\vec{v}$, ou simplesmente translação no plano por: $T_{\vec{v}} = (P) = P + \vec{v}$, para todo ponto P do plano"
Veloso (2012, p. 7)	"*Dado um segmento orientado MN, diz-se* translação *definida por MN a transformação geométrica T que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto P' que é extremidade do segmento orientado PP' equipolente a MN e tendo P como origem*" (grifo do autor).

Fonte: Adaptado de Lederger-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012)

Ledergerber-Ruoff (1982) define a translação em termos de reflexão. Para ela, a translação é a composição de duas reflexões. Alves e Galvão (1996) usam a noção de soma de ponto com vetor e Veloso (2012) usa a noção de segmentos equipolentes.

As noções que Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012) usam para definir a translação são equivalentes, pois somar um ponto P com um vetor $\vec{v}$, leva P à $P' = P + \vec{v}$, ou seja, é o mesmo que levar o ponto P até a extremidade do segmento $\overline{PP'}$, de modo que $\overline{PP'}$ seja equipolente a $\overline{MN}$ sendo $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$. Já na definição de Ledergerber-Ruoff (1982), o ponto P é levado até P_1 pela reflexão na reta r, de modo que $\overrightarrow{PP_1} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$, depois P_1 é levado a P_2 pela reflexão na reta s, de modo que, $r \parallel s$ e $\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}$. Desse modo, como $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \vec{v}$, implica que $P_2 = P + \vec{v}$, e, portanto, $P_2 = P'$. Assim, a definição de Ledergerber-Ruoff (1982) refere-se ao mesmo tipo de função definida em Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012), ou seja, os três autores usam o signo translação para referir-se ao mesmo objeto.

Ledergerber-Ruoff (1982, p. 67) afirma e demonstra que "Todo produto finito de reflexões em retas é uma isometria". O produto de reflexões é o mesmo que composição de reflexões, e desse modo, como a translação é a composição de duas reflexões, então a translação é uma isometria. Já Alves e Galvão (1996) demonstram que a translação é uma isometria. Os três autores também concordam com o conceito de rotação, como pode ser visto no Quadro 18.

Quadro 17: Definição de rotação nas três obras com ênfase em isometria e simetria

Rotação	
Referência	Definição na íntegra
Ledergerber-Ruoff (1982, p. 106)	“Seja F um ponto e $\vec{\vartheta}$ um ângulo orientado. A aplicação que tem Fcomo ponto fixo e aplica todo o ponto $P \neq F$ no ponto $\bar{P}$, tal que $(PF\bar{P}) = \vec{\vartheta}$ e $\|FP\| = \|F\bar{P}\|$, chama-se rotação de centro F e ângulo $\vec{\vartheta}$”
Alves e Galvão (1996, p. 61)	“**Definição**: Dados um ponto O do plano e um número real α satisfazendo $-\pi < \alpha \leq \pi$, a rotação de centro O e ângulo α é a aplicação que fixa o ponto O e associa a cada ponto P do plano, P distinto de O, o ponto P' pertencente a circunferência de centro O e raio OP e tal que a medida do ângulo orientado POP' é igual a α.” (grifo do autor).
Veloso (2012, p. 7)	“Sejam dados um ponto C e um ângulo φ. Diz-se rotação R de centro C e ângulo φ a transformação geométrica que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto $P' = R(P)$ nas seguintes condições: 1) $R(C) = C$, isto é, o ponto C é fixo para a rotação R. 2) Se $P \neq C$: o ângulo PCP' igual a φ; os segmentos CP e CP' são iguais.”

Fonte: Adaptado de Lederger-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012)

Nas três definições que constam no Quadro 18, há um ponto fixo: ponto F para Ledergerber-Ruoff (1982), O para Alves e Galvão (1996) e C para Veloso (2012); e uma amplitude fixa: $\vec{\vartheta}$ para Ledergerber-Ruoff (1982), α para Alves e Galvão (1996) e φ para Veloso (2012). Ou seja, só mudam as notações. A imagem P' de um ponto P, por uma rotação em torno do ponto fixo e com a amplitude fixa, é tal que, o ponto fixo é a extremidade comum de dois segmentos, um deles com a outra extremidade em P e o outro segmento com extremidade em P', de modo que esses segmentos formem um ângulo, com a amplitude fixada. Desse modo, os três autores apresentam a definição de rotação de forma equivalente, mas com termos diferentes.

Ledergerber-Ruoff (1982) demonstra que a rotação é a composição de duas reflexões em retas, assim como é também a translação. Como a composição de reflexões em retas é uma isometria, a rotação é uma isometria. Alves e Galvão (1996) demonstram que a rotação é uma isometria.

Os três autores também estão em consonância quanto ao conceito de reflexão deslizante, como se observa no Quadro 19.

Quadro 18: Definição de reflexão deslizante nas três obras com ênfase em isometria e simetria

Reflexão deslizante	
Referência	Definição na íntegra
Ledergerber-Ruoff (1982, p. 134)	"A isometria $\rho = \tau(\vec{v})\Sigma_g$, com $g \parallel \vec{v}$ chama-se translação refletida de eixo g e vetor $\vec{v}$".
Alves e Galvão (1996, p. 111)	"Definição: Sejam r e s retas distintas do plano, ambas perpendiculares a uma reta t. A isometria $R_t \circ R_s \circ R_r$ é chamada uma **reflexão transladada de eixo**t, ou ainda, uma **translação refletida de eixo** t" (grifo do autor).
Veloso (2012, p. 9)	"Dados um segmento orientado KL e uma recta g paralela ao segmento KL, sejam T a translação definida pelo segmento KL e G a reflexão definida pelo eixo g. Diz-se reflexão deslizante definida pela recta g e pelo segmento orientado KL a transformação geométrica $T.G$."

Fonte: Adaptado de Lederger-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012)

Para Ledergerber-Ruoff (1982), a reflexão deslizante é a composição de uma translação com uma reflexão. Sabendo que translação é a composição de duas reflexões, a reflexão deslizante é a composição de três reflexões. Como a autora demonstrou que a composição de reflexões é uma isometria, então a reflexão deslizante é uma isometria. Já Alves e Galvão (1996) definem a reflexão deslizante como a composição de três reflexões, isso vai ao encontro da definição de Ledergerber-Ruoff (1982). E para Veloso (2012), a reflexão deslizante é também a composição de uma translação e uma reflexão. Em suma, os três autores referem-se ao mesmo objeto, ao definir reflexão deslizante.

Os três autores mencionam a identidade como um caso de isometria. Em relação a simetria em torno de um ponto, Ledergerber-Ruoff (1982) e Alves e Galvão (1996), definem e discorrem sobre ela, a definição é semelhante em ambos os autores, se diferem somente no nome, enquanto Ledergerber-Ruoff (1982) nomeia como simétrico de um ponto, Alves e Galvão (1996) nomeia como reflexão em relação a um ponto. Alves e Galvão (1996) ainda destacam que a reflexão em relação a um ponto é um caso particular de rotação. Veloso (2012) não menciona esse tipo de isometria.

Alves e Galvão (1996) demonstram que qualquer composição de isometria, coincidirá com uma dessas: translação, rotação, reflexão em reta ou reflexão deslizante. Veloso (2012) não demonstra, mas destaca esse resultado como um dos principais no estudo de isometrias. Isso vai ao encontro de Lima (2007) e Melo (2010) que também demonstram ou destacam esse resultado, conforme foi visto na subseção 7.1.3. Já Ledergeber-Ruoff (1982) coloca a reflexão em reta com destaque maior as outras isometrias, como foi visto nessa subseção, ela define a translação a partir da definição de reflexão. Além disso, ela demonstra que qualquer isometria pode ser obtida através de reflexões em retas. Alves e Galvão (1996) além de demonstrarem as quatro isometrias basilares, também demonstram que todas as isometrias podem ser obtidas a partir de reflexão e Veloso (2012) embora não demonstre isso, destaca esse resultado. Ledergerber-Ruoff (1982) ainda demonstra que as isometrias que podem ser obtidas por duas reflexões não mudam a orientação da figura, conceito visto na seção 7.1. Essas isometrias são as translações e rotações, que podem ser obtidas pela composição de duas reflexões em retas. Já as isometrias que podem ser obtidas por uma ou três reflexões em retas, que são a reflexão em reta e a reflexão transladada, mudam a orientação da figura.

7.3.4 Classificação das simetrias para os três autores

Como foi visto na subseção 7.3.2, para Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012), a simetria é um tipo específico de isometria, que deixa a figura invariante.

Ao tratar sobre simetrias, Ledergerber-Ruoff (1982) faz um estudo atrelado aos grupos e é no estudo desses grupos que serão analisados quais são os tipos de simetria. A autora distingue inicialmente três grupos simétricos: o grupo roseta, grupo de fita e grupo cristalográfico de dimensão dois. O grupo roseta é o grupo simétrico que não contém translações diferentes da identidade. Esses são divididos em dois subgrupos, o grupo cíclico, onde contém somente rotações, e o grupos diedral que contém o mesmo número de rotações e reflexões em reta, já o grupo de fita possui translações. As fitas são figuras que coincidem com o que Farmer (1999) chamou de padrões de faixa. Ledergerber-Ruoff (1982) divide o grupo de fita em quatro subgrupos: 1) Grupo que possui somente translações; 2) Grupo de fita que possui rotações; 3) Grupo de fita que possui reflexão numa reta; e 4) Grupo de fita que possui translação refletida. Em relação ao grupo cristalográfico de dimensão dois, refere-se aos grupos que contêm translações, mas restringido aos ornamentos de dimensão dois, o que Farmer (1999) chama de papel de parede. Ela não faz um estudo sobre esses grupos, mas adianta que existem 17 tipos de simetrias nesse grupo. Em suma, de acordo com Ledergerber-Ruoff (1982), há translações, rotações, reflexões em retas e reflexões deslizantes que deixam uma figura invariante. No entanto, a autora não atribui um nome específico para as isometrias que deixam as figuras invariantes, ou seja, não fala em simetria de translação, simetria de rotação e assim por diante. Só fala em isometrias que deixam as figuras invariantes e que essas isometrias definem o conjunto dos grupos simétricos.

Alves e Galvão (1996), no apêndice da obra, fazem um estudo relacionando os grupos C_n e D_n com as simetrias, de forma análoga, mas mais aprofundado do que foi feito na seção 7.2. A partir do estudo de Alves e Galvão (1996), pode-se afirmar que existem figuras que permanecem invariantes por rotação e por reflexão em torno de uma reta. Do mesmo modo que Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) não dão um nome específico para as isometrias que deixam uma figura invariante, apenas dizem que tais isometrias pertencem ao grupo simétrico da figura.

Já a classificação das simetrias em Veloso (2012) pode ser vista no Quadro 20.

Quadro 19: Classificação das simetrias em Veloso (2012)

"Seja então F uma figura qualquer. Procurar as simetrias de F é encontrar as isometrias do plano que deixam invariante F (ou que fixam F, como também é habitual dizer). Mas sabemos, pelo $Teo.$ 2.04, que existem apenas quatro tipos de isometrias: as translações, as rotações, as reflexões e as reflexões deslizantes. Sendo assim, a pesquisa das simetrias de F consistem em: • Procurar as translações que deixam F invariante; se T for uma tal translação, então T é uma simetria (de translação) de F; • Procurar as rotações que deixam F invariante; se R for uma tal rotação, então R é uma simetria (de rotação) de F; • Procurar as reflexões que deixam F invariante; se E for uma tal reflexão, então E é uma simetria (de reflexão) de F; • Procurar as reflexões deslizantes que deixam F invariante; se Rd for uma tal reflexão deslizante, então Rd é uma simetria (de reflexão deslizante) de F.

Fonte: Os Autores

Desse modo, pesquisar simetrias de uma figura, para Veloso (2012) é pesquisar quais são as isometrias que deixam essa figura invariante. Se as isometrias que deixam a figura invariante são translação, rotação, reflexão ou reflexão deslizante, então essa isometria é simetria de translação, simetria de rotação, simetria de reflexão e simetria de reflexão deslizante, respectivamente.

Em relação à questão: Qual a classificação das simetrias para Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012)? A resposta é: Para Ledergerber-Ruoff (1982) e Veloso

(2012) há translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes que podem deixar uma figura invariante. Como as simetrias são as isometrias que deixam uma figura invariante, então essas são as classificações das simetrias. Veloso (2012) atribui um nome específico para elas, chama de simetria de translação, simetria de rotação, simetria de reflexão e simetria de reflexão deslizante enquanto Ledergerber-Ruoff (1982) não atribui um nome específico. Alves e Galvão (1996) fazem um breve estudo sobre rotações e reflexões em retas que deixam uma figura invariante. Também não atribuem um nome específico para essas isometrias, mas por definirem as simetrias como as isometrias que deixam as figuras invariantes, as rotações e reflexões que podem deixar uma figura invariante são algumas simetrias abordadas por Alves e Galvão (1996).

7.4 OBRAS COM ÊNFASE EM TIPOS ESPECÍFICOS DE ISOMETRIA OU SIMETRIA

7.4.1 Introdução

As três obras que têm uma ênfase em alguns tipos específicos de isometria e/ou simetria fizeram parte do contexto do MMM. São elas: o terceiro volume da coleção Matemática Curso Moderno, de Osvaldo Sangiorgi (SANGIORGI, 1967); o capítulo de matemática nos Guias Curriculares Propostos para as Matérias do Núcleo Comum do 1º Grau, escrito por Almerindo M. Bastos, Anna Franchi e Lydia C. Lamparelli (BASTOS, LAMPARELLI e FRANCHI, 1975); e o livro As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria, de Martha Dantas, Omar Catunda e colaboradoras (CATUNDA et al., 1988).

Osvaldo Sangiorgi foi apresentado no capítulo como um líder do MMM autor da coleção Matemática Curso Moderno, a qual possivelmente foi a coleção de livros didáticos de matemática para o ginásio mais vendida no Brasil na década de 1960. Um estudo sobre isometrias e simetrias está no apêndice do terceiro volume, direcionado à 3ª série ginasial. Almerindo M. Bastos, que liderou o grupo que escreveu o capítulo de matemática nos Guias Curriculares Propostos para as Matérias do Núcleo Comum do 1º Grau, também esteve à frente do MMM, defendendo os conteúdos de isometria e simetria na Educação Básica. Lydia C. Lamparelli que fez parte da equipe de Bastos, ganhou bolsa para ir aos Estados Unidos participar de eventos relacionados ao MMM. A exemplo dos autores supracitados, Martha Dantas e Omar Catunda também lideraram o MMM no Brasil e se propuseram a escrever a geometria euclidiana plana a partir das transformações geométricas. Martha Dantas e colaboradoras sintetizaram esse projeto com o livro intitulado As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria.

7.4.2 Isometrias e Simetrias em Sangiorgi (1967)

Sangiorgi (1967) divide o estudo das isometrias e simetrias em três partes: 1) Grupo das translações, 2) Grupo das rotações e 3) Simetria.

Na primeira parte, Sangiorgi (1967) explica o que são segmentos equipolentes e depois define translação em termos de segmentos equipolentes. A definição de translação de Sangiorgi (1967) coincide com o conceito de translação de Lima (2007), Melo (2010), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (2006) e Veloso (2012). Como ele usa os segmentos equipolentes para explicar as translações, sua definição é mais próxima de Veloso (2012). Sangiorgi (1967) ainda diz que o conjunto das translações no plano, munido da adição de translações que segundo ele é o mesmo que composição de translações, é um grupo comutativo.

Na segunda parte, que trata dos grupos de rotações, Sangiorgi (1967) explica o que é uma rotação em torno de um ponto. Suas explicações coincidem com o conceito de rotação em Lima (2007), Melo (2010), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (2006) e Veloso (2012). Sangiorgi (1967) ainda diz que o conjunto de rotações do plano, munido da composição de rotações, é um grupo comutativo.

Na terceira parte, o assunto é simetria, Sangiorgi (1967) divide as simetrias em duas, a simetria axial e simetria central. A simetria axial coincide com a reflexão em reta, de Lima (2007), Melo (2010), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (2006) e Veloso (2012), enquanto a simetria central coincide com a simetria em torno de um ponto. No entanto, ele não se refere a invariância de figuras e os exemplos que mostra não são de figuras que permanecem invariantes. Também não se refere a grupos ao discorrer sobre as simetrias.

O termo isometria está ausente em Sangiorgi (1967). As translações, rotações e simetrias que ele explica, são casos específicos de transformações geométricas. Desse modo, em relação à questão: O que é simetria em Sangiorgi (1967)? A resposta é: Uma transformação geométrica. E em relação à questão: Quais os tipos de simetria em Sangiorgi (1967)? A resposta é simetria axial e simetria central, que coincidem com reflexão em reta e simetria em torno de um ponto, de Lima (2007), Melo (2010), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (2006) e Veloso (2012). Como a palavra isometria não está presente nesta obra, não convém perguntar ao autor o que é isometria e nem qual a relação entre isometria e simetria.

7.4.3 Isometrias e simetrias em Bastos, Lamparelli e Franchi (1975)

O capítulo de matemática dos Guias Curriculares Propostos para as Matérias do Núcleo Comum do 1º Grau (SÃO PAULO, 1975), pode ser dividido em duas partes. A primeira parte é constituída pelo índice, introdução, objetivos gerais e vários quadros, esquemas e mapas conceituais, sobre a organização dos conteúdos de matemática. É explicado, na introdução, que o programa proposto é dividido em quatro temas, sendo eles: I Relações e funções, II Campos numéricos, III Equações e Inequações e IV Geometria. Nessa primeira parte não há nenhum comentário sobre isometria e simetria, mas elas aparecem algumas vezes como palavras-chave dentro de algum esquema, ou em uma lista dentro de algum quadro. A segunda parte do capítulo é dividida em quatro seções e em cada seção há um dos quatro temas definidos. Cada seção é dividida ainda em seis subseções. Cada subseção refere-se a um nível de ensino, ou seja, a primeira subseção são conteúdo do nível I, que são a 1ª e a 2ª série do 1º Grau. A segunda subseção, o nível II, referentes a 3ª e 4ª série do 1º Grau, e as próximas quatro subseções, referentes a 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série do 1º Grau, respectivamente. Assim, a seção a ser analisada neste trabalho é a seção quatro, que trata da geometria, onde estão a isometria e a simetria. A primeira subseção da seção quatro inicia trazendo os conteúdos de geometria da 1ª e 2ª série, a segunda subseção os conteúdos de geometria da 3ª e 4ª série, e as quatro subseções seguintes, os conteúdos de geometria da 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série.

As páginas da segunda parte do capítulo são divididas em três colunas, com exceção apenas da primeira página de cada seção e das duas últimas. Na coluna da esquerda constam os conteúdos, na coluna do meio os objetivos referentes a estes conteúdos, na coluna da direita há ‘observações’ que são sugestões de atividades ou orientações sobre o conteúdo (Figuras 62 a 66). Esses quadros são a única fonte de dados sobre isometria e simetria em Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) e por isso são apresentados na íntegra, conforme Figuras 62, 63, 64, 65 e 66.

Figura 62 : Sugestões de conteúdos de transformações geométricas para a 6ª série do 1º Grau

CONTEÚDO	OBJETIVOS	OBSERVAÇÕES
1. NOÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO.	. Relacionar a idéia de função à de transformação do plano nele mesmo. . Saber que a isometria é um tipo de transformação que conserva as distâncias. . Reconhecer figuras congruentes como figuras que se correspondem por uma isometria.	

Fonte: Bastos, Lamparelli e Franchi (1975, p. 223)

A Figura 62 mostra a única subseção que se refere à 6ª série do 1º Grau. Ela trata de noções sobre transformações.

Já as Figuras 63 a 66 tratam de conteúdos da 7ª série do 1º Grau. A Figura 63 trata da simetria axial.

Figura 63 : Conteúdos de simetria axial e outros, para a 7ª série do 1º Grau

CONTEÚDO	OBJETIVOS	OBSERVAÇÕES
1. SIMETRIA AXIAL, RETAS PERPENDICULARES; MEDIATRIZ DE DE UM SEGMENTO.	. Construir os pontos simétricos de pontos dados em relação a uma reta. . Fazer diagramas de "é o simétrico de" em relação a uma reta (vice-versa). . Reconhecer a propriedade simétrica da relação "é o simétrico de". . Reconhecer os eixos de simetria numa figura geométrica. . Determinar a figura simétrica de uma figura relativa a um eixo de simetria. . Determinar os invariantes por uma simetria axial.	Explorar a seguinte situação: Dada uma reta R e um ponto p de um dos semi-planos determinados por R, construir, usando uma distância r, o losango pabp; sendo a, b $\in$ R. Considerar a transformação: $s : p \longrightarrow p'$ Verificar que: — s não depende de r; — s conserva as distâncias. s é a simetria axial determinada por R.

Fonte: Bastos, Lamparelli e Franchi (1975, p. 225)

Em relação à simetria axial, na Figura 63, não há uma definição ou explicação sobre o que ela é. Da mesma forma, não é apresentado o conceito para simetria central, como se observa na Figura 64.

Figura 64: Simetria Central, para a 7ª série do 1º Grau

2. SIMETRIA CENTRAL	. Construir os pontos simétricos de pontos dados em relação a um ponto. . Fazer diagramas de "é o simétrico de" em relação a um ponto (vice-versa). . Reconhecer a propriedade simétrica da relação "é o simétrico de" em relação a um ponto. . Determinar a figura simétrica de uma figura relativa a um ponto. . Determniar os invariantes por uma simetria central. . Relacionar a simetria central com a simetria axial.	Observar que: a) R permanece invariante por s; b) A reta $\overleftrightarrow{pp}$ ' corta R em o, tal que $d(o,p) = d(o,p')$ e $d(o,a) = d(o,b)$ $\overleftrightarrow{pp}$ ' $\perp$ R c) s é uma isometria. Definir mediatriz a partir da observação (b).

Fonte: Bastos, Lamparelli e Franchi (1975, p. 225)

De modo geral, a simetria não é conceituada. As Figura 63 e a Figura 64 mostram as três colunas sobre o primeiro e o segundo conteúdo de geometria para a 7ª série. Os autores chamam a atenção para a existência de uma diferença entre o simétrico de uma figura e uma figura simétrica, aquelas mesmas discussões presentes em alguns Guias dos Livros Didáticos, conforme descritos no Capítulo 2. Isso pode ser visto nos dois últimos objetivos do conteúdo de simetria axial (Figura 63) e no quarto e quinto objetivo do conteúdo de simetria central (Figura 64), pois os autores falam em determinar a figura simétrica de uma figura e distinguem de determinar os invariantes por uma simetria. Desse modo, mesmo que os autores não discorram sobre a relação da invariância e da não-invariância com a isometria e a simetria, eles apontam para essa discussão.

A Figura 65 trata da congruência de triângulos e sua relação com as simetrias axiais:

Figura 65 : Congruência de triângulos para 7ª série do 1º Grau

3. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS; APLICAÇÃO AO ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS.	. Construir triângulos, sendo dados três dos seus elementos. . Identificar os quatro casos de congruência de triângulos. . Utilizar os conhecimentos adquiridos para demonstrar as principais propriedades dos triângulos. . Aplicar os conhecimentos adquiridos para demonstrar as propriedades dos quadriláteros.	Se a classe permitir, mostrar que, se dois triângulos são congruentes, um pode ser obtido do outro, compondo no máximo 3 simetrias axiais.

Fonte: Bastos, Lamparelli e Franchi (1975, p. 225)

Por fim, a Figura 66 aborda as translações.

Figura 66: Conteúdo de translações para a 7ª série do 1º Grau

4. TRANSLAÇÕES.

. Construir os pontos correspondentes por uma translação.

. Fazer diagramas de "é o correspondente de" por uma translação.

. Determinar os invariantes por uma translação.

. Demonstrar as propriedades dos quadriláteros sobre lados opostos, ângulos opostos e diagonais.

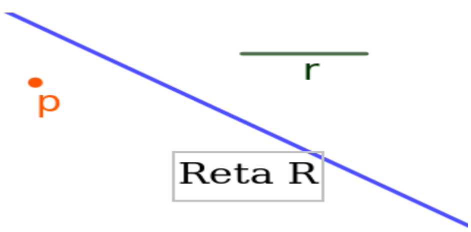
Fonte: Bastos, Lamparelli e Franchi (1975, p. 226)

Ao analisar a sugestão de atividades relacionada à simetria axial (Figuras 63 e 64), pode-se notar que os autores definem uma função s, e dizem que é uma simetria axial (ver última linha da terceira coluna da Figura 63) e depois que s é uma isometria. Desse modo, pode-se inferir que a simetria axial é um tipo de isometria. No entanto, ao analisar as Figuras 62 a 66, os autores não comentam como a simetria central e a translação são classificadas. Como os autores não explicam o que é simetria, sem se referir a simetria axial ou simetria central, então não é adequado compará-la com a isometria.

7.4.4 Linguagem Figural em Bastos, Lamparelli e Franchi (1975)

Esta subseção mostra uma maneira de resolver a atividade proposta na Observação da Figura 63, sobre simetria axial. Os autores iniciam a atividade com uma reta R, um ponto p e uma distância r conforme a figura a seguir:

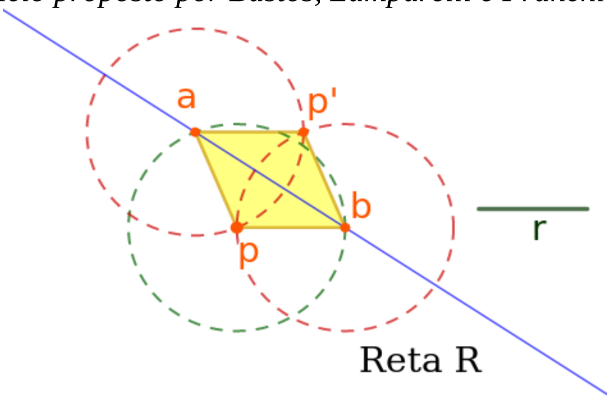
Figura 67 : Elementos iniciais da atividade proposta por Bastos, Lamparelli e Franchi (1975)



Fonte: Os Autores

Pede-se então para construir um losango $pabp'$ sendo $a, b \in R$. Como os autores não mencionam de que forma a figura deverá ser construída, uma opção é utilizar as técnicas do desenho geométrico, com régua e compasso. Se for assim, pode-se inicialmente construir o círculo de cor verde, com centro em p e raio r, mostrado na Figura 68. Em seguida, marcar os pontos de intersecção desse círculo com a reta R, representados pelos pontos a e b. Também, construir dois círculos, de cor vermelha, um com centro em a e outro com centro em b, ambos com raio r. O ponto p' é a intersecção desses círculos.

Figura 68: Exercício proposto por Bastos, Lamparelli e Franchi (1975), resolvido



Fonte: Os Autores

Os autores então, dizem para considerar a transformação $s: p \to p'$ e verificar as seguintes situações:

1) "s não depende de r", ou seja, independente da medida r que for tomada, o vértice oposto do losango, em relação ao ponto p, será o ponto p'.

2) "s conserva distâncias". Aqui os autores não dizem quais distâncias são conservadas. Se eles quiseram dizer que a distância de p até a reta R é a mesma que de p' até R, então esse conceito de preservar distâncias não é o mesmo que foi visto no Capítulo 2 e nos subseções 7.1.2, 7.2.2 e 7.3.2 pois para verificar aquele conceito seria necessário mostrar pelo menos dois pontos sendo transformados pela transformação s.

3) "s é a simetria axial determinada por R". Aqui os autores pressupõem que os leitores conheçam a definição de simetria axial ou que consigam relacionar esse exemplo com o pouco que foi escrito sobre simetria axial.

4) "R permanece invariante por s". O domínio da função s é um dos semiplanos formados por R, conforme os autores definem no enunciado da atividade, eles não dizem, no enunciado, se R pertence também ao domínio. No entanto, quando eles pedem

para verificar que R permanece invariante pela transformação s , fica evidente que R pertence ao domínio. Desse modo, os autores chamam atenção que para todo ponto $Q \in R$, tem-se que $s(Q) = Q$.

5) A distância de p até a reta R é a mesma que de p' até R e a reta que passa por p e p' é perpendicular a reta R.

6) "s é uma isometria". Como os autores falaram que s preserva distâncias e que a isometria é uma transformação que preserva distâncias, acabam por concluir que s é uma isometria.

7.4.5. As transformações geométricas em Catunda et al. (1988)

A obra de Catunda et al. (1988) é organizada em fichas de trabalho, num total de 55. As fichas de trabalhos são os roteiros de aulas. Os roteiros iniciam com atividades que procuram desenvolver os conceitos empiricamente e no final apresentam alguma definição ou explicação mais formal de tais conceitos. Antes de apresentar as fichas de trabalho, há alguns pequenos textos que falam sobre o ensino da geometria no mundo e no Brasil, bem como justificativas do porquê ensinar geometria pelas transformações geométricas. Nesses textos é destacada a importância da teoria de grupos no estudo de simetrias. Contudo, os autores deixam explícito que não defendem o ensino de grupos na Educação Básica, mas que tal conceito está implícito.

O termo isometria é inexistente em Catunda et al. (1988). Ao longo da obra são estudados dois tipos de transformações geométricas, as que transformam uma figura F em uma figura F', e as homotetias que transformam F em uma figura F' semelhante. Os autores não dão um nome específico para as transformações que mantêm a transformada congruente. Desse modo, as perguntas sobre quais os tipos de isometria e simetria, bem como as relações entre elas devem ser reformuladas para: Quais os tipos de transformações geométricas que transformam uma figura em outra figura congruente? Como é abordado (se for abordado) o conceito de invariância? E quais as relações entre tais transformações?

Catunda et al. (1988) abordam três tipos de transformações de figuras que mantêm a congruência: translação, simetria central e simetria axial. Os autores também estudam a rotação de um ponto P em torno de um ponto Q, com um ângulo dado, mas não estudam rotação de figuras.

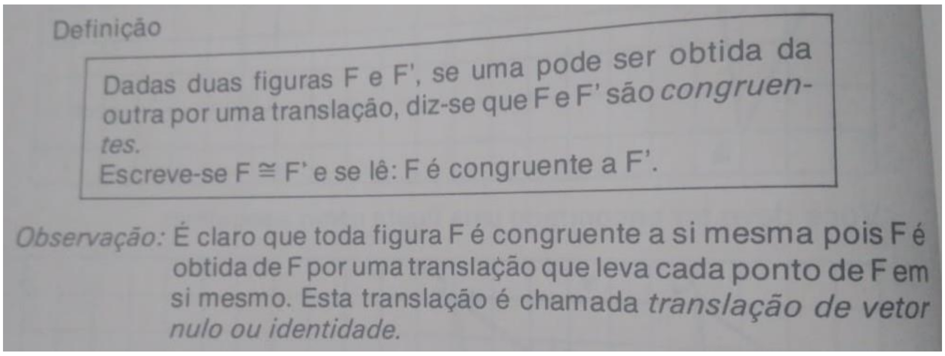
Os vetores são estudados desde a primeira ficha de atividade e com eles, a translação de pontos. Em seguida, o conceito é ampliado para a translação de figuras. Desse modo, a translação de uma figura F por um vetor $\vec{v}$ é a transformação geométrica que leva todos os pontos $P \in F$ aos pontos P' através do vetor $\vec{v}$.

Em relação à simetria central, inicialmente os autores explicam o que são dois pontos simétricos em relação a um ponto C: dois pontos P e P' são simétricos em relação a C, se o ponto C é a origem de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ que têm o mesmo comprimento e direção, mas sentidos opostos, sendo P e P' as extremidades desses vetores. Em seguida, estendem o conceito para simetria central de figuras, ou seja, a simetria de centro C de uma figura F é aquela que corresponde todos os pontos de F ao seu ponto simétrico em relação a C.

Em relação à simetria axial, inicialmente fazem alguns experimentos com dobraduras até chegarem a uma explicação do que é eixo de simetria e simetria axial. Dada uma folha com duas figuras A e B, se existir uma maneira de dobrar essa folha de forma que essas figuras fiquem justapostas, ou seja, que cada ponto de A tenha um correspondente em B, então é possível afirmar que houve uma transformação por simetria axial, e a dobra da folha, por onde passa uma reta, é o eixo de simetria. Diz-se também, que A e B são simétricas.

Catunda et al. (1988) destacam que, se dadas duas figuras F e F', se uma figura pode ser obtida a partir da outra por translação, simetria central ou simetria axial, então elas são congruentes. A Figura 69 mostra a definição de congruência por translação.

Figura 69: Definição de figuras congruentes por translação em Catunda et al. (1988)


Definição

Dadas duas figuras F e F', se uma pode ser obtida da outra por uma translação, diz-se que F e F' são *congruentes*.
Escreve-se F ≅ F' e se lê: F é congruente a F'.

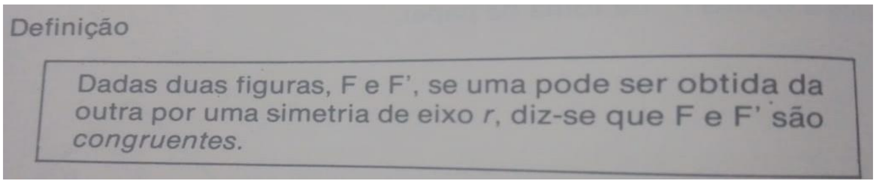
Observação: É claro que toda figura F é congruente a si mesma pois F é obtida de F por uma translação que leva cada ponto de F em si mesmo. Esta translação é chamada *translação de vetor nulo ou identidade*.

Fonte: Catunda et al. (1988, p. 24)

A Figura 69 mostra a definição de figuras congruentes que está na ficha 2 de trabalho, em que relaciona a translação com a congruência. Os autores chamam a atenção para um tipo de transformação identidade, que é a translação por um vetor nulo.

A Figura 70 apresenta a definição de congruência por simetria axial.

Figura 70: Definição de figuras congruentes por Simetria Axial em Catunda et al. (1988)


Definição

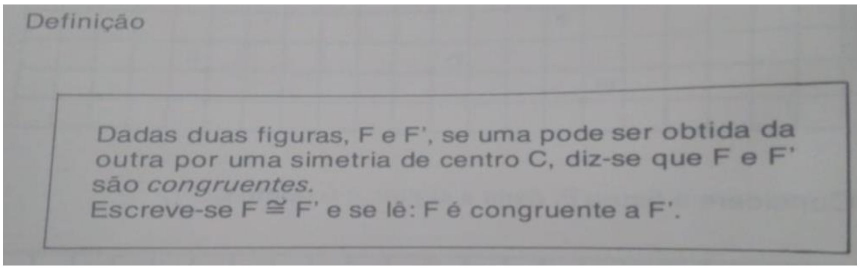
Dadas duas figuras, F e F', se uma pode ser obtida da outra por uma simetria de eixo *r*, diz-se que F e F' são *congruentes*.

Fonte: Catunda et al. (1988, p. 104)

Esta figura mostra uma definição que relaciona a simetria axial com congruência. Ela está localizada na ficha 21 de trabalho.

Já a congruência por simetria central está definida de acordo com a Figura 71.

Figura 71: Definição de congruência por simetria central em Catunda et al. (1988)


Definição

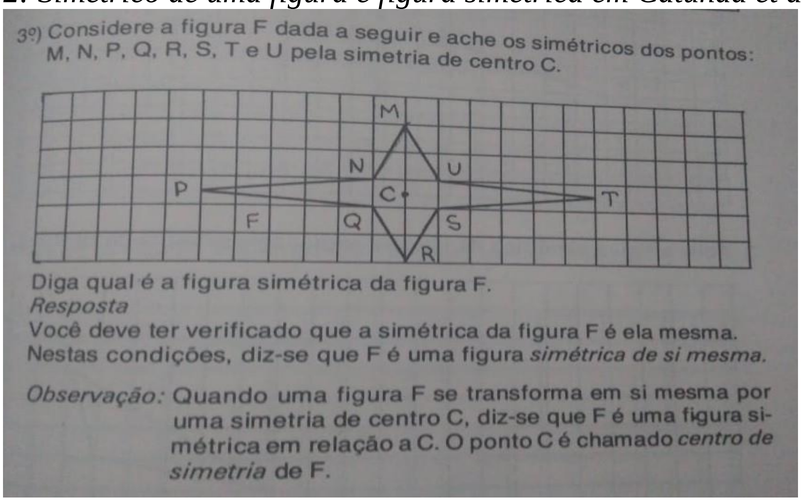
Dadas duas figuras, F e F', se uma pode ser obtida da outra por uma simetria de centro C, diz-se que F e F' são *congruentes*.
Escreve-se F ≅ F' e se lê: F é congruente a F'.

Fonte: Catunda et al. (1988 p. 42)

Por último, na Figura 71, tem-se uma definição que está na ficha 5 de trabalho, relacionando a simetria central com congruência.

Catunda et al. (1988) diferenciam a figura simétrica do simétrico de uma figura, ou seja, chamam a atenção para as figuras que ficam invariantes por uma transformação, mais especificamente pela simetria central e simetria axial.

Figura 72: Simétrico de uma figura e figura simétrica em Catunda et al. (1988)


3º) Considere a figura F dada a seguir e ache os simétricos dos pontos: M, N, P, Q, R, S, T e U pela simetria de centro C.

Diga qual é a figura simétrica da figura F.
Resposta
Você deve ter verificado que a simétrica da figura F é ela mesma.
Nestas condições, diz-se que F é uma figura *simétrica de si mesma.*

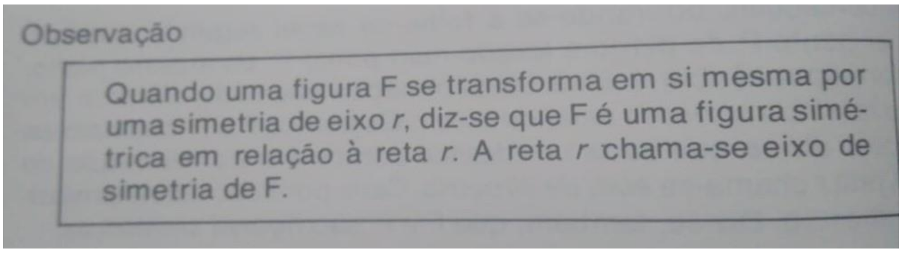
Observação: Quando uma figura F se transforma em si mesma por uma simetria de centro C, diz-se que F é uma figura simétrica em relação a C. O ponto C é chamado *centro de simetria* de F.

Fonte: Catunda et al. (1988, p. 43)

Na Figura 72 pode-se observar que Catunda et al. (1988) apresentam um exemplo de uma figura que fica invariante após uma simetria central em torno de um ponto C. Eles comentam essa figura e em seguida generalizam, dizendo que figura que apresenta essa característica é chamada de "figura simétrica em relação a C".

Mais adiante, Catunda et al. (1988) também destacam a invariância, mas dessa vez com a simetria axial, conforme mostra a Figura 73. As figuras que têm essa característica são chamadas de "figura simétrica em relação à reta r".

Figura 73: Invariância por simetria axial em Catunda et al. (1988)


Observação

Quando uma figura F se transforma em si mesma por uma simetria de eixo *r*, diz-se que F é uma figura simétrica em relação à reta *r*. A reta *r* chama-se eixo de simetria de F.

Fonte: Catunda et al. (1988, p. 104)

Em suma, Catunda et al. (1988) estudam três tipos de transformações geométricas que transformam uma figura F em F', de modo que $F \equiv F'$. Essas transformações são a translação, a simetria central e a simetria axial. Os autores diferenciam uma figura simétrica, do simétrico de uma figura, destacando que existem figuras que permanecem invariantes por uma simetria axial e uma simetria central. Eles não usam o termo invariante, mas usam o termo 'simétrica de si mesma' ou 'uma figura F se transforma em si mesma'. Destaca-se também que a maior parte do estudo é dedicado a figuras que não se mantêm invariante por uma dessas transformações. As Figuras 72 e 73 mostram algumas das poucas vezes que os autores se referem a elas.

Pode-se notar ainda na Figura 69, que os autores chamam a atenção para um tipo de transformação identidade, que é a translação por um vetor nulo. Quando uma figura é transformada por um vetor nulo, ela mantém-se invariante. Sendo assim, Catunda et al. (1988) dão exemplos de invariância nos três tipos de transformações que eles discorreram.

Catunda et al. (1988) explicam o que é a rotação de um ponto, mas não estendem o conceito para rotação de figuras. A partir da rotação de um ponto, eles vão em direção a um estudo de ângulos.

8. CONFRONTO DE DADOS

8.1 O QUE É ISOMETRIA?

Na seção 7.1 foram investigadas as obras que têm ênfase em isometria, que são Lima (2007) e Melo (2010). Foi visto que nessas duas obras a isometria é uma função/transformação que preserva distâncias. Isto é, a isometria é uma função f tal que $f: \Pi \rightarrow \Pi$ sendo Π o plano euclidiano, de modo que para quaisquer $P, Q \in \Pi$, tem-se que $d(P, Q) = d\big(f(P), f(Q)\big)$.

Na seção 7.2 foram investigadas as três obras com ênfase em simetria: SMSG (1969), Weyl (1997) e Farmer (1999). Dentre elas, somente Farmer (1999) discorre sobre isometria, mesmo que indiretamente. Apesar de o título de sua obra abordar o termo simetria, o autor dedicou um capítulo para o estudo dos movimentos rígidos. Foi analisado que o movimento rígido coincide com as isometrias de Lima (2007) e Melo (2010), pois o conceito de movimento rígido está relacionado à função que preserva distâncias. Desse modo, Farmer (1999) se difere de Lima (2007) e de Melo (2010) somente na nomenclatura.

Na seção 7.3 foram investigadas as obras com ênfase em isometria e simetria, que são Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012). Dentro dessa seção, Na subseção 7.3.2 foi analisado o que é isometria nessas três obras. Foi verificado que nas três obras, o conceito de isometria coincide com a isometria de Lima (2007) e Melo (2010) e com os movimentos rígidos de Farmer (1999).

Na seção 7.4, foram investigadas as três obras que têm uma ênfase em tipos específicos de isometria e/ou simetria. Dentre elas, somente em Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) consta o termo isometria. A isometria nessa obra é uma transformação geométrica que preserva distâncias, coincidindo com os autores já mencionados.

De modo geral, em todas as obras que consta o termo isometria, que são: Lima (2007), Melo (2010), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996), Veloso (2012) e Bastos, Lamparelli e Franchi (1975), os autores concordam que a isometria é uma função/transformação/aplicação que preserva distâncias. Até mesmo Farmer (1999), ao usar o conceito de movimento rígido como função que preserva distâncias, sinaliza que tal conceito equivale à isometria, estando em consonância com os autores que abordam explicitamente o termo isometria.

8.2 CLASSIFICAÇÃO DAS ISOMETRIAS

Na seção 7.1 foram abordadas as duas obras com ênfase em isometria: Lima (2007) e Melo (2010). Na subseção 7.1.2 foi constatado que, em cada uma dessas obras, há seis tipos de isometrias, as quais são equivalentes, mas se diferem somente na nomenclatura. O Quadro 7 que está na subseção 7.1.2 mostra a equivalência entre a nomenclatura de Lima (2007) e Melo (2010). Adotando as nomenclaturas dos autores, as seis isometrias são: identidade, translação, rotação, reflexão em um ponto, reflexão em reta e reflexão deslizante.

Na subseção 7.1.3 foi demonstrado que a translação, rotação, reflexão em ponto e reflexão em reta, são isometrias. As demonstrações foram fundamentadas em Lima (2007), sendo usada a linguagem figural articulada com a linguagem natural e formal. Em relação à reflexão deslizante, como os dois autores mostram que a composição de isometrias é uma isometria, e considerando que a reflexão deslizante é uma destas composições, então a reflexão deslizante é uma isometria. Lima (2007) demonstrou que qualquer composição de isometrias coincide com uma dessas quatro isometrias: translação, rotação, reflexão em reta e reflexão deslizante. A reflexão de um ponto, é um caso específico de rotação, e a identidade é um caso específico de rotação ou translação. Lima (2007) ainda chamou a atenção para as isometrias próprias e impróprias, sendo as próprias aquelas que mantêm a orientação da figura e as impróprias, que invertem a orientação das figuras. Esse conceito também foi explicado em linguagem figural. Na subseção 7.1.3 e a Figura 40 procura destacá-lo, Outrossim Lima (2007) provou que a translação e a rotação são isometrias próprias, e a reflexão em reta e a reflexão deslizante são isometrias impróprias.

Na seção 7.2 foram estudadas as obras cujo foco é a simetria. Dentre as três obras analisadas, em 7.2.2 Farmer (1999) distinguiu quatro tipo de isometrias (movimentos rígidos), a saber, translação, rotação, reflexão de espelho, e reflexão deslizante, que coincidem com quatro, das seis isometrias propostas por Lima (2007) e Melo (2010). Contudo, Farmer (1999) usa a nomenclatura reflexão de espelho em vez de reflexão em reta.

Na seção 7.3, as três obras estudadas enfatizam isometria e simetria: Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012). Nessas obras, as seis isometrias indicadas e demonstradas em Lima (2007) e em Melo (2010) também são definidas nas três obras e demonstradas em Ledergerber-Ruoff (1982) e Alves e Galvão (1996). As seis isometrias são equivalentes e diferem-se somente na nomenclatura.

Na seção 7.4 foram investigadas três obras com ênfase em tipos específicos de isometria e/ou simetria. Elas foram classificadas assim, pois os autores não deixam explícito se estudam isometria ou simetria. Todas as obras classificadas nesse grupo trazem, no título, o termo transformações geométricas, e segundo o entendimento destes autores, transformações geométricas são funções, em que o domínio e a imagem são conjuntos de pontos.

Na subseção 7.4.2 está a análise de Sangiorgi (1967). Esse autor estudou quatro transformações geométricas que são: translação, rotação, simetria axial e simetria central. Sangiorgi (1967) inicialmente discorreu sobre as translações e rotações, as quais coincidem com a translação e rotação definidas por Lima (2007), Melo (2010), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (2006) e Veloso (2012). Na segunda parte do apêndice de Sangiorgi (1967), que trata das simetrias, ele distingue duas simetrias: a simetria axial e a simetria central. A simetria axial coincide com a reflexão em reta e a simetria central coincide com a reflexão em um ponto. Desse modo, as quatro transformações geométricas que Sangiorgi (1967) discorreu, são quatro isometrias.

A subseção 7.4.3 contempla o estudo do capítulo de matemática da obra Bastos, Lamparelli e Franchi (1975). A simetria axial e a simetria central usada em Sangiorgi (1967) são encontradas em Bastos, Lamparelli e Franchi (1975), sendo que os conceitos se equivalem. Dentre as quatro isometrias de Sangiorgi (1967), a saber translação, rotação, simetria axial e simetria central, somente a rotação não aparece em Bastos, Lamparelli e Franchi (1975).

Na subseção 7.4.5 foi investigada a obra Catunda et al. (1988), cujo título é Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria. A translação, a simetria central e a simetria axial estudadas nessa obra são transformações geométricas. Além disso, essas três transformações geométricas coincidem com aquelas vistas em Sangiorgi (1967) e Bastos et al (1975).

Em suma, somente as obras Weyl (1997) e SMSG (1969) não classificam as isometrias. As outras nove obras distinguem pelo menos três das seis isometrias: identidade, translação, rotação, reflexão na reta, reflexão de um ponto e reflexão deslizante. O Quadro 21 mostra a equivalência dos conceitos, apesar das diferentes nomenclaturas.

Quadro 20 : Equivalência das nomenclaturas das isometrias

Lima (2007)	Melo (2010)	Ledergerber-Ruoff (1982)	Alves e Galvão (1996)	Veloso (2012)	Farmer (1999)	Sangiorgi (1967) Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) Catunda et al. (1988)
Identidade	Identidade	Identidade	Identidade	Identidade	Identidade	Identidade
Simetria em torno de um ponto	Meia-volta; Reflexão em ponto; Simetria pontual;	Simétrico de um ponto	Reflexão em relação a um ponto	----------	-------	Simetria Central
Translação	Translação	Translação	Translação	Translação	Translação	Translação
Rotação	Rotação	Rotação	Rotação	Rotação	Rotação	Rotação
Reflexão em torno de uma reta	Reflexão em recta; Simetria Axial	Reflexão na reta	Reflexão em relação a reta	Reflexão	Reflexão de espelho	Simetria Axial
Reflexão deslizante	Reflexão com deslizamento	Translação Refletida	Translação Refletida	Reflexão Deslizante	Reflexão Deslizante	------------

Fonte: Autores

Analisando o Quadro 21, pode-se ver que a identidade, a translação e a rotação são nomeadas da mesma forma nas nove obras. Já a reflexão em ponto, recebe sete nomes distintos: Simetria em torno de um ponto, Meia-volta, Reflexão em ponto, Simetria pontual, Simétrico de um ponto, Reflexão em relação a um ponto, e Simetria central. A reflexão na reta também recebe sete nomes distintos: Reflexão em torno de uma reta, Reflexão em reta (Na obra diz recta, lembrando que a obra foi escrita em português Portugal, traduzindo para o português do Brasil, seria reta), Simetria Axial, Reflexão na reta, Reflexão em relação a reta, Reflexão e Reflexão de espelho. Já a reflexão deslizante, recebe três nomes: Reflexão deslizante, Reflexão com deslizamento e Translação refletida.

Há certas similaridades em Sangiorgi (1967), Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) e Catunda et al. (1988). Essas três obras foram escritas no contexto do MMM, chamam de transformações geométricas o estudo das isometrias e chamam de simetria axial e de simetria central a reflexão na reta e reflexão de um ponto, respectivamente (Quadro 21). Nota-se ainda, que Sangiorgi (1967) e Catunda et al. (1988) não mencionam nenhuma vez o termo isometria. As pesquisas sobre a liderança de Sangiorgi no MMM e o sucesso de sua coleção Matemática Curso Moderno, apontam a grande influência desse autor e de suas obras nos materiais referentes ao MMM, segundo Oliveira et al. (2011) e Valente et al. (2012). Essa influência pode ser evidenciada também nos estudos das isometrias, conforme discorrido nos parágrafos anteriores. Outra evidência é que as obras posteriores a Sangiorgi (1967), como Bastos et al (1975) e Catunda et al. (1988), parecem ter sido influenciadas por este autor e não por obras norte-americanas, como a obra SMSG (1969) que foi traduzida de uma coleção norte americana e que teve uma abordagem totalmente diferente de Sangiorgi (1967).

8.3 O QUE É SIMETRIA?

Na subseção 7.1.3 encontra-se a classificação das isometrias em Lima (2007) e Melo (2010). Nessa classificação apareceram os termos simetria em torno de um ponto (LIMA, 2007) e simetria pontual (MELO, 2010), mas apesar de aparecer o termo simetria, são consideradas pelos autores como um tipo específico de isometria. Aliás, os autores demonstram que são isometrias e comentam que esse tipo de isometria (simetria em torno de um ponto ou simetria pontual) é um caso específico de rotação.

Na subseção 7.2.3 foi investigado o que é simetria para Farmer (1999). Nessa obra a simetria foi definida como "um movimento rígido que deixa a figura exactamente na mesma" (FARMER, 1999, p. 43). Isso é o mesmo que dizer que a simetria de uma figura é uma isometria que deixa a figura invariante. Já Na subseção 7.2.5, o conceito de simetria em Weyl (1997) é o mesmo que de Farmer (1999), está relacionado à invariância da figura por um mapeamento (função/transformação/aplicação). Também foi investigado o que é simetria em SMSG (1969) e mais uma vez, a simetria está relacionada à invariância de uma figura. Desse modo, nas três obras que falam especificamente sobre simetria, os autores concordam que a simetria é uma isometria que deixa uma figura invariante.

Na subseção 7.3.2 foi investigado o que são isometria e simetria. Em relação à simetria, os três autores, Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012), concordam que a simetria é uma isometria que deixa uma figura invariante.

Na subseção 7.4.2 foi investigado o que são e quais são as transformações geométricas estudadas por Sangiorgi (1967), Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) e Catunda et al. (1988). Para Sangiorgi (1967), dentre as transformações geométricas está a simetria, que ele classifica em simetria axial e simetria central. As duas simetrias de Sangiorgi (1967) coincidem com a reflexão em reta e reflexão de um ponto de Lima (2007), Melo (2010), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012). Desse modo, as simetrias de Sangiorgi (1967) são casos específicos de isometria e o autor não relaciona a simetria com a invariância, aliás os exemplos e exercícios que ele discorre, não são de figuras que permanecem invariantes por simetria.

Na subseção 7.4.3 foram investigadas as transformações geométricas que constam em Bastos, Lamparelli e Franchi (1975). Entre elas estão a simetria axial e a simetria central, que também coincidem com reflexão em reta e reflexão de um ponto, respectivamente. No entanto, em Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) não fica explícito se elas são tipos de isometria ou simetria.

Na subseção 7.4.5 constam as transformações geométricas para Catunda et al. (1988). Nessa obra os termos, simetria axial e simetria central também aparecem e coincidem com reflexão em reta e reflexão em um ponto, respectivamente. Os autores classificam a simetria axial e a simetria central como transformações geométricas, e como foi visto na seção 8.2, essas transformações geométricas são isometrias. Ainda discorrem sobre a invariância de figuras. Para eles, uma simetria axial e uma central podem ou não, deixar a figura invariante. Desse modo, a invariância não é uma condição para ter simetria axial ou central. Além disso, os autores não atribuem um nome específico para as transformações geométricas que deixam uma figura invariante.

Em suma, Farmer (1999), Weyl (1997), SMSG (1967), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012) concordam que a simetria é uma isometria que deixa uma figura invariante. Já em Sangiorgi (1967) as simetrias são as reflexões, as reflexões em retas e as reflexões em pontos. Embora Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) e Catunda et al. (1988) não deixem explícitos, eles também abordam as simetrias como reflexões em retas e em pontos. Sendo assim, há dois conceitos distintos de simetria. 1) A simetria é uma isometria que deixa uma figura invariante. Os autores que concordam com esse conceito são: Farmer (1999), Weyl (1997), SMSG (1967), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012). 2) A simetria são as reflexões que podem ou não deixar uma figura invariante. Quem concorda com esse conceito é Sangiorgi (1967), e possivelmente Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) e Catunda et al. (1988).

8.4 A CLASSIFICAÇÃO DAS SIMETRIAS

Na seção 7.1 foram investigadas as obras com ênfase em isometria, que são Lima (2007) e Melo (2010). Essas obras não fazem um estudo sobre simetria e não a classificam.

Na seção 7.2 as obras analisadas enfatizam simetria. Na subseção 7.2.3, sobre as simetrias em Farmer (1999), o autor explica que há figuras que têm simetria por translação, isto é, existe pelo menos uma translação que deixa a figura invariante. Desse modo, o autor classifica as figuras simétricas em três grupos: as figuras finitas, que não tem simetria de translação; as faixas, que são figuras limitadas por duas retas paralelas que se estendem indefinidamente em uma direção; e os papéis de parede, que se estendem indefinidamente em duas direções, ambas possuem simetria de translação.

Farmer (1999) diz que as figuras finitas, podem ter simetria de reflexão em reta ou rotação, diz ainda que há dois tipos de figuras finitas, aquelas que têm n simetrias de rotação e 0 simetrias de reflexão em reta, e o outro tipo tem n simetrias de rotação e n simetrias de reflexão em reta. No primeiro caso, o grupo de simetria dessas figuras, ou seja, o conjunto de simetrias dessas figuras munido com a operação de composição de simetrias, formam um grupo cíclico, enquanto no segundo caso, o grupo de simetria forma um grupo diedral. Já em relação às figuras que possuem simetria de translação, elas podem ter, além da simetria de translação, simetria de rotação, simetria de reflexão em reta e simetria de reflexão deslizante e combinações dessas. Isso é válido tanto para as faixas quanto para os papéis de parede. Farmer (1999) ainda diz que há 17 tipos diferentes de simetrias em papéis de parede, que são combinações de rotações, reflexões em retas e reflexões deslizantes.

Na subseção 7.2.5 foram observadas as simetrias em Weyl (1997). Nesta obra, as simetrias de figuras finitas também estão relacionadas aos grupos cíclicos e diedrais. É comentado sobre os 17 tipos de simetrias de papel de parede, que Weyl (1997) chama de ornamento bidimensional.

Na subseção 7.2.6 foram investigadas as simetrias em SMSG (1969). Nessa obra, são apontados dois tipos de simetria, as simetrias de reflexão em reta e a simetria central que coincide com a simetria em torno de um ponto.

A seção 7.3 tratou das obras com ênfase em isometria e simetria, que são Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012). Para esses três autores, há figuras que têm simetria de translação e outras não. As figuras que não têm simetria de translação são classificadas em dois grupos (tanto no sentido coloquial da palavra, quanto no sentido de estruturas algébricas): as figuras C_n, que têm n simetrias de rotação e nenhuma simetria de reflexão em reta; e as figuras D_n que têm n simetrias de rotação e n simetria de reflexão. Ledergerber-Ruoff (1982) e Veloso (2012) ainda apontam para as faixas e papéis de parede, afirmando que esses dois tipos de figura têm simetria de translação, além disso, podem ter simetria de rotação, reflexão em reta, reflexão deslizante e pares dessas.

Na seção 7.4 foram investigadas as obras com ênfase em alguns tipos específicos de isometria e simetria. Na subseção 7.4.2 Sangiorgi (1967) classifica em dois tipos de simetria, a simetria axial, que é a reflexão em reta, e a simetria central que é a reflexão em ponto. No entanto, para Sangiorgi (1967) a simetria não deixa a figura invariante. Na subseção 7.4.3 foi investigado Bastos, Lamparelli e Franchi (1975). Nesta obra, a simetria axial e simetria central também estão presentes, mas os autores não classificam como isometria ou simetrias, apenas como transformação geométrica. Porém, analisando o contexto da obra, possivelmente elas podem ser consideradas tipos de simetria. De modo semelhante acontece em Catunda et al. (1988): há a simetria axial e a simetria central que podem deixar ou não a figura invariante, mas essas são classificadas como transformações geométricas.

De modo geral, há duas classificações de simetrias. A primeira delas, vista em Farmer (1999), SMSG (1969), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012), diz que, as figuras que não têm simetrias de translação são do tipo C_n ou D_n, isto é, aquelas que têm n simetrias de rotação, mas nenhuma simetria de reflexão em reta, e aquelas que têm n simetrias de rotação e reflexão. Além disso, as figuras que têm simetria de translação também podem ter simetrias de rotação, reflexão, reflexão deslizante e combinações dessas. A segunda delas, vista em Sangiorgi (1967) e possivelmente em Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) e Catunda et al. (1988), classifica as simetrias em simetria axial e simetria central, que são duas reflexões, e que podem ou não deixar uma figura invariante.

8.5 A SIMETRIA E A FIGURA SIMÉTRICA

A proposta inicial em relação à simetria, era investigar o que é simetria e quais as classificações dela. Mas no desenrolar desse trabalho surgiu a necessidade de analisar um outro tema, importante para responder à questão norteadora que remete à relação de isometria e simetria. A discussão é sobre a simetria e a figura simétrica. Das onze obras analisadas, somente Farmer (1999) e Catunda et al. (1988) dizem explicitamente o que é uma figura simétrica. Conforme visto Na subseção 7.2.3, para Farmer (1999), uma figura F é simétrica se existir pelo menos um movimento rígido, diferente da identidade, que deixa F invariante. Já Catunda et al. (1988) fala em figura simétrica por simetria axial e central, sendo que nesses casos, uma figura é simétrica quando se transforma em si mesma por uma dessas simetrias.

Já em Ledergerber-Ruoff (1988), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012), o estudo de simetria está atrelado aos grupos, e eles não falam explicitamente o que é uma figura simétrica, mas o dizem de forma indireta. Veloso (2012) fala em procurar as simetrias de F, que consiste em encontrar todas as isometrias que deixam F invariante. O autor ainda define $Sim(F)$, como o conjunto das simetrias de F. Já Ledergerber-Ruoff (1982) fala em grupo de simetria de uma figura F, que é o conjunto de todas as isometrias que deixam F invariante, munido da operação de composição de isometrias. Por sua vez, Alves e Galvão (1996) falam em simetria de uma figura, que são as isometrias que a deixam invariante. No entanto, esses conceitos estão muito próximos, pois simetria é uma função/transformação/aplicação/mapeamento que deixa uma figura F invariante. Desse modo, só se pode falar na transformação geométrica chamada simetria, se falar em alguma figura F, ou seja, a simetria é definida em termos de uma figura F.

Deve-se observar que toda figura tem pelo menos uma simetria, mas nem todas as figuras são simétricas. Toda figura tem ao menos uma simetria, pois toda a figura fica invariante pela identidade e a identidade é uma isometria. Portanto, toda figura fica invariante por uma isometria e consequentemente, toda figura tem ao menos uma simetria. Mas para Farmer (1999), a figura que só tem a identidade como simetria não é considerada uma figura simétrica. Desse modo, o adjetivo simétrico indica uma característica que algumas figuras têm e outras não.

8.6 A RELAÇÃO ENTRE ISOMETRIA E SIMETRIA

Depois dessa discussão, cabe responder: Qual é a relação entre isometria e simetria de figuras planas? Como há dois conceitos distintos de simetria, há duas respostas para essa questão. Para Farmer (1999), SMSG (1969), Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996) e Veloso (2012), a simetria é um caso específico de isometria, ou seja, a simetria é uma isometria que deixa uma figura F invariante. Já para Sangiorgi (1967), e possivelmente para

Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) e Catunda et al. (1988), a simetria é também um tipo específico de isometria: as simetrias são reflexões em torno de uma reta ou em torno de um ponto e que podem ou não deixar a figura invariante.

9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de isometria e simetria de figuras planas exige um cuidado especial com os termos utilizados, pois os conceitos estão muito próximos e podem confundir até mesmo os estudiosos mais experientes. Usar o mesmo termo para conceitos distintos pode afetar a compreensão de conceitos matemáticos, como apontam Veloso (2012), Pasquini e Bortolossi (2015) e Ribeiro, Alves e Gibim (2021).

As isometrias e simetrias são funções em que o domínio e o contradomínio são conjuntos de pontos. Um conjunto de pontos pode ser uma reta, uma figura, o plano, o espaço tridimensional, espaços euclidianos de dimensão n e qualquer outro espaço não-euclidiano. Como o conceito de funções é muito amplo, geralmente usa-se o termo transformações geométricas para referir as funções em que o domínio e o contradomínio são conjuntos de pontos (SANGIORGI, 1967; Bastos, Lamparelli e Franchi, 1975; CATUNDA et al., 1988; ALVES e GALVÃO, 1996; MELO, 2010; VELOSO, 2012; PASQUINI e BORTOLOSSI, 2015; RIBEIRO, GIBIM E ALVES, 2021). Menos frequente, aparece o termo mapeamento (WEYL, 1997), ou o termo aplicação (LEDERGERBER-RUOFF, 1982). Dentre as obras analisadas, somente Lima (2007) usa exclusivamente o termo função.

O estudo direcionado à transformação geométrica é vasto, tanto pelo fato de existirem muitas possibilidades para o domínio e o contradomínio, pois há diversos tipos diferentes de conjuntos de pontos, tanto pelo fato de existirem muitos tipos de transformações geométricas que não são isometrias. A homotetia, por exemplo, que aparece na BNCC, em Bastos, Lamparelli e Franchi (1988), em Catunda et al. (1988) e em Veloso (2012), não preserva distâncias quando a razão da homotetia é diferente de um. Veloso (2012) ainda discorre sobre dilatação rotativa, alongamento e inversão, que também são transformações geométricas, mas que não são isometrias. Desse modo, transformação geométrica é um conceito muito vasto e que se for usado, no lugar de isometria, como é o caso de Sangiorgi (1967) e Catunda et al. (1988), pode gerar confusão. Em Alves e Galvão (1996), Melo (2010) e Veloso (2012), os autores iniciam definindo e explicando o que é uma transformação geométrica e depois iniciam o estudo de isometrias, como um tipo específico de transformação geométrica, dessa maneira, os termos ficam diferenciados.

Conforme visto no Capítulo 8, há dois conceitos distintos para a simetria, são eles: (1) A simetria de uma figura F é qualquer isometria que deixa F invariante e (2) A simetria é a reflexão em torno de uma reta ou de um ponto. Será chamado, a partir de agora, o conceito do item (1) de conceito da invariância e o conceito do item (2) de conceito da reflexão.

Ao analisar toda a dissertação, incluindo principalmente a história da matemática relacionada às estruturas matemáticas e a análise das onze obras da amostra, fica evidente que o conceito de invariância é o mais apropriado para a simetria. As descobertas das estruturas matemáticas no século XIX, conforme visto no Capítulo 3, geraram grande impacto no avanço da matemática, e dentre tais estruturas estão os grupos que têm um papel de destaque nessas descobertas. Ao relacionar as simetrias com as estruturas matemáticas, principalmente com os grupos, a simetria pode ser explorada em conceitos matemáticos precisos. Mas o conceito de simetria que está atrelado ao estudo de grupos é o conceito da invariância. Omitir ou ignorar a invariância no estudo de simetria é desconsiderar toda a relação que as simetrias têm com os grupos. Além disso, Weyl (1997) mostra que a simetria que está presente em diversas áreas do conhecimento como a física, química, botânica, biologia entre outros, é aquela relacionada à invariância, e Pasquini e Bortolossi (2015) também destacam essa informação.

Vários problemas foram analisados ao longo dessa dissertação, em torno dos termos isometria e simetria. No entanto, os autores dessa dissertação não foram os pioneiros a observá-los. Desde pelo menos o ano de 2006, os Guias dos Livros Didático vêm apontando tais problemas nos livros didáticos. Veloso (2012), Pasquini e Bortolossi (2015) e Ribeiro, Gibim e Alves (2021) também chamam a atenção para essa questão. Nos Guias dos Livros didáticos de 2008 e 2017 (BRASIL, 2007; 2016), os avaliadores indicam que parte desse problema é o não esclarecimento das diferenças entre isometria e simetria. Já Pasquini e Bortolossi (2015) afirmam que parte do problema é a omissão do conceito de invariância, enquanto Ribeiro, Alves e Gibim (2021) apontam a não diferenciação conceitual entre a simetria e a reflexão. Se for considerado que a diferença entre isometria e simetria consiste no conceito da invariância, então Brasil (2007; 2016) e Pasquini e Bortolossi (2015) estão sinalizando para o mesmo problema.

Os outros conceitos de simetria, que não estão relacionados ao conceito de invariância, são produtores de diversas confusões. Se forem consideradas as obras discutidas na problemática (Capítulo 2), outras concepções de simetria podem ser observadas, além do conceito de reflexão. No entanto, todas elas geram confusões. Cada concepção diferente é retomada e discorrida a seguir:

I. Simetria como sinônimo de reflexão.

Nas obras Sangiorgi (1967), Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) e Catunda et al. (1988) a simetria é a reflexão. A simetria axial é a reflexão em torno de uma reta, e a simetria central é a reflexão em torno de um ponto. Nesse caso, o conceito de simetria não tem relação com a invariância, já que a simetria axial e a simetria central podem ou não deixar uma figura invariante. Os problemas desse tipo de concepção são os seguintes:

(a) A simetria ganha um conceito diferente da simetria usada na física, química, biologia entra outras.

(b) Os autores que abordam a simetria com esse conceito, não entram em consenso quanto ao nome que se dá às transformações geométricas que deixam a figura invariante. Sangiorgi (1967) não comenta e não apresenta nenhum exemplo de figura que permanece invariante. Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) apontam para o conceito de invariância, mas não atribuem um nome específico, e Catunda et al. (1988) não atribuem um nome para a transformação geométrica que deixa a figura invariante, mas nomeiam as figuras que se tornam invariantes por alguns tipos específicos de transformações geométricas. Mais precisamente, eles chamam de figuras simétricas em relação a um ponto C, as figuras que ficam invariantes por uma reflexão em ponto, e de figuras simétricas em relação a uma reta r as figuras que ficam invariantes por uma reflexão em reta. No entanto, não apresentam um nome específico para as figuras que permanecem invariantes por translação ou rotação.

(c) Sangiorgi (1967) e Catunda et al. (1988) não citam nenhuma vez o termo isometria, usam o termo genérico transformação geométrica para as simetrias, translações e rotações. Já Bastos, Lamparelli e Franchi (1975) mencionam as isometrias somente uma vez, mesmo assim, classificam as simetrias, translações e rotações, como transformações geométricas. Também, conforme visto no Capítulo 8, a coleção Matemática Curso Moderno, de Osvaldo Sangiorgi, influenciou as produções de materiais didáticos de matemática na época do MMM, e como este autor não comentou sobre o conceito de invariância, parece que os demais autores também seguiram esse caminho.

II. Simetria como sinônimo de isometria.

Se Sangiorgi (1967) considera a simetria como a reflexão em reta e a reflexão em ponto, Barbosa (1993) e Brito e Carvalho (2009), além das reflexões, consideram as rotações, as translações e as reflexões com translações como simetrias. A isometria aparece nessas obras como a característica que as simetrias têm, de preservar distâncias, como visto no Capítulo 2. No entanto, o conceito de invariância também é posto de lado por Brito e Carvalho (2009), que não mencionam e nem dão exemplos de figuras que permanecem invariantes. Barbosa (1993) atribui um nome às figuras que permanecem invariantes por uma isometria, chamando-as de 'figuras que possuem estruturas simétricas' e às figuras que não permanecem invariantes, são denominadas ‘figuras com estruturas assimétricas’. No entanto, essa nomenclatura é somente para as figuras que permanecem invariantes por reflexão em reta, e o autor não apresenta exemplos de invariância por rotação, translação e reflexão deslizante. Os problemas para esse tipo de nomenclatura são os mesmos vistos na simetria como sinônimo de reflexão, pois não evidenciam as invariâncias que consequentemente não ficam atreladas às outras ciências que estudam simetria e nem ao estudo de grupos.

III. Simetria não é uma transformação geométrica?

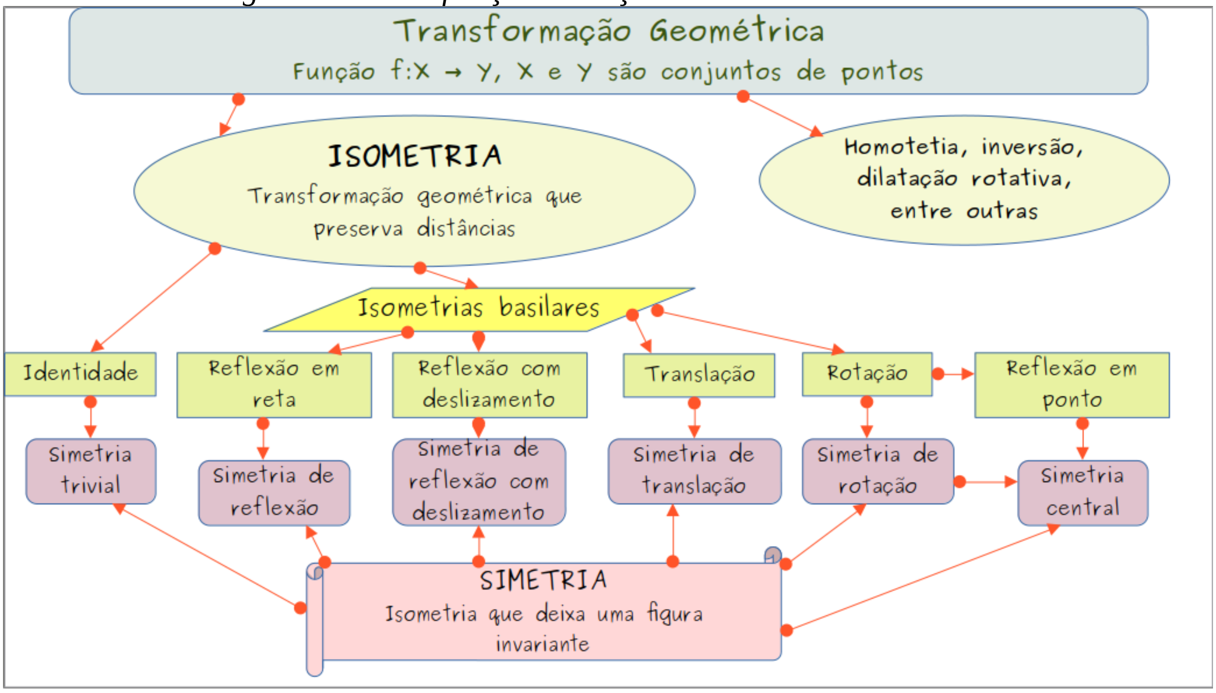
Embora Ribeiro, Gibim e Alves (2021) apontem para os problemas de não diferenciar os conceitos de reflexão e de simetria, acabam criando outro problema ao dizer que as simetrias não são transformações geométricas, mas apenas uma característica das figuras. Analisando todo o estudo desenvolvido nesse trabalho, é um absurdo dizer que a simetria não é uma transformação geométrica. De fato, as figuras simétricas definidas por Ribeiro, Alves e Gibim (2021) ficam invariantes por uma reflexão em reta, e a reflexão em reta é uma isometria, que por sua vez é uma transformação geométrica.

Desse modo, o presente trabalho procurou investigar qual a relação entre isometria e simetria. A resposta é: A simetria é um tipo específico de isometria. A simetria de uma figura F é uma isometria que deixa F invariante. Esse simples esclarecimento está faltando em diversas obras, como nos PCNs, na BNCC, em livros didáticos e em diversos livros destinados principalmente a professores de matemática. A Teoria dos Registros das Representações Semióticas foi importante em dois momentos: 1) Não foram encontrados dois autores que trazem exatamente a mesma definição, ou seja, a mesma representação no registro das línguas. Eles se diferem nas nomenclaturas, na organização das orações e nos conceitos envolvidos. Assim, como a Teoria dos Registros Semióticos destaca que um mesmo objeto pode ser representado por diferentes signos, desse modo, para compreender que diferentes definições se referem ao mesmo objeto, foi necessário realizar tratamentos, no caso em que as definições estavam em um mesmo tipo de registro. 2) A abordagem dos conceitos e a demonstração de algumas proposições, partindo do registro figural para o registro algébrico ou vice-versa, foi importante para esclarecer e exemplificar tais conceitos e proposições, além de mostrar os casos em que determinadas explicações e conceitos, se referiam ao mesmo objeto.

Quanto aos objetivos desse trabalho, um deles é contribuir para a discussão em torno dos conceitos de simetria e isometria no âmbito da Educação Matemática do Brasil, e oferecer a alunos e professores de matemática resultados que possam, possivelmente, preencher as lacunas deixadas pelos documentos orientadores e livros didáticos quanto a esse tema. De fato, uma discussão foi feita em torno desses termos, e para essa discussão foram trazidos sete livros mais citados em uma amostra de 73 dissertações, teses e artigos, 4 obras relacionadas ao MMM, além das obras analisadas na problemática. Os conceitos e definições foram amplamente debatidos e representados em linguagem algébrica e figural. A principal lacuna a ser preenchida é a relação entre a isometria e simetria, a qual pode ser preenchida pela simples explicação de que a simetria é um tipo específico de isometria, a isometria que deixa uma figura invariante.

Outro objetivo é apontar caminhos para uma visão unificada da relação entre isometria e simetria. A Figura 74 apresenta uma classificação das isometrias e simetrias, bem como de relações entre elas, proposta pelos autores da dissertação. Essas classificações e relações são fundamentadas principalmente em Ledergerber-Ruoff (1982), Alves e Galvão (1996), Farmer (1999), Lima (2007), Melo (2010), Veloso (2012) e Pasquini e Bortolossi (2015).

Figura 74: Classificação e relação entre isometria e simetria



Fonte: Os Autores

No topo dessa figura há o termo Transformação Geométrica, definida como uma função onde o domínio e a imagem são conjuntos de pontos. Essa definição pode ser vista em Melo (2010), Veloso (2012) e Pasquini e Bortolossi (2015). A transformação geométrica está conectada a duas elipses, uma delas contém o termo Isometria e a outra contém o termo Homotetia seguido de demais transformações geométricas não-isométricas. Isso procura apontar que as isometrias são um tipo específico de transformação geométrica, mas que existem outras, como a homotetia, as inversões e a dilatações rotativa, essas últimas podem ser vistas em Veloso (2012). A elipse da Isometria está ligada às Isometrias basilares, que são quatro: reflexão em reta, reflexão com deslizamento, translação e rotação. Os autores que demonstram que essas isometrias são basilares são Alves e Galvão (1996) e Lima (2007), enquanto Melo (2010), Veloso (2012) e não fazem as demonstrações, mas mencionam esse fato. A Reflexão em ponto é um caso específico de rotação, conforme mostra Alves e Galvão (1996), Lima (2007), Melo (2010) e Veloso (2012). Por sugestão de Veloso (2012), que afirma, que usar os termos simetria axial e simetria em torno de um ponto para as isometrias pode causar grande confusão na compreensão dos conceitos, foram utilizados neste esquema os termos: reflexão em reta, em vez de simetria axial; e reflexão em ponto, em vez de simetria em torno de um ponto e simetria pontual. Também, a elipse da Isometria está ligada à Identidade, pois essa também preserva distâncias.

Ainda observando a Figura 74, percebe-se que cada uma das seis isometrias está conectada a uma simetria. Isto porque, todos os tipos de isometrias podem deixar alguma figura invariante. De fato, a Identidade deixa qualquer figura invariante e por sugestão de Farmer (1999), a simetria pela identidade foi chamada de Simetria trivial. A Reflexão em reta que deixa uma figura invariante é chamada de Simetria de reflexão. Fundamentando-se em Veloso (2012), a Reflexão com deslizamento que deixa uma figura invariante é chamada de Simetria de reflexão com deslizamento, a translação que deixa uma figura invariante é chamada de Simetria de translação, a Rotação que deixa uma figura invariante é chamada de Simetria de rotação e a Reflexão em ponto, que é um caso particular de rotação, que deixa uma figura invariante é chamada de Simetria central. Na parte inferior da figura, conectando-se às seis simetrias, está a Simetria, definida como a isometria que deixa uma figura invariante.

A finalidade dessa dissertação é esclarecer a relação entre a isometria e simetria. No percurso para esclarecer essa relação, foram envolvidas discussões sobre a definição e o conceito de isometria e simetria e a classificação delas, além de aspectos históricos que contextualizaram a discussão. Foi visto que não há divergências sobre o conceito de isometria, todos os autores concordam direta ou indiretamente que é uma transformação geométrica que preserva distâncias, o mesmo não ocorreu com o conceito de simetria e as classificações das isometrias e simetrias e essas divergências implicaram em uma confusão sobre a relação entre isometria e simetria. No entanto, foi visto que o conceito de invariância é o mais apropriado quando se discute simetria, por ser mais preciso formalmente, estar intrínseco ao estudo de estruturas algébricas e relacionado às demais ciências. Além disso, todas as outras interpretações que omitem ou ignoram o conceito de invariância, acabam por gerar confusões.

Desse modo, o esquema da Figura 74 apresenta uma síntese da dissertação, mostrando as relações e classificações das isometrias e simetrias quando se adota o conceito de simetria de figuras planas, como uma isometria que deixa uma figura invariante. Adotando esse conceito, as relações e classificações das isometrias e simetrias ficam claras e precisas, como pretendiam clarificar os autores da dissertação. Além disso, essas relações e classificações são importantes para estudos mais avançados da matemática e estudo em outras ciências.

Embora a questão norteadora foi respondida, outras questões surgiram ao longo do trabalho. Essas questões os autores deixarão como sugestão para futuras pesquisas. São elas:

Pasquini e Bortolossi (2015) e Weyl (1997) afirmam que a simetria usada em outras ciências, como biologia, física, química, entre outras, fundamenta-se na ideia de invariância. A sugestão de pesquisa é investigar como a simetria está atrelada a essas outras ciências e quais as possibilidades de fazer um trabalho interdisciplinar entre matemática e essas outras ciências, com o tema simetria.

Os autores dessa dissertação usaram os Guias dos Livros Didáticos para comentar como é o conceito de isometria e simetria nos livros didáticos. Foram usados esses guias, para observar, de forma inicial, se existem críticas a cerca de tais conceitos, pois o objetivo não era analisar os livros didáticos. Desse modo, uma sugestão de pesquisa é, investigar os conceitos, as explicações de isometria e simetria nos livros didáticos. Se estão ausentes ou presentes e qual concepção de simetria é abordado. Além disso, verificar se os problemas apontados pelos guias ainda permanecem.

Foi visto durante o trabalho que há várias concepções de simetria. Os autores adotaram uma dessas concepções, pois chegaram à conclusão de que essa é a mais conveniente. No entanto, os que não defendem essa concepção tem o direito de argumentar a favor de outras concepções. Para esses autores são deixadas as seguintes questões: Como ficaria o estudo de estruturas algébricas, como grupos de permutação, grupos diedrais e cíclicos, caso a simetria não fosse uma isometria que deixa a figura invariante? Outra questão que emerge dessa discussão: O que dizer das figuras que não tem eixo de simetria, mas ficam invariantes por rotação ou por translação? Essas figuras são simétricas ou não? Como explicar essa simetria?

Veloso (2012), Pasquini e Bortolossi (2015) e Ribeiro, Alves e Gibim (2021), dizem que usar o mesmo termo para conceitos distintos pode afetar a compreensão de conceitos matemáticos. No entanto, tais autores não detalham e não dão exemplos de como o mesmo termo para conceitos distintos pode afetar a compreensão de conceitos matemáticos. Essa questão poderia ser investigada.

REFERÊNCIAS

ABE, J. M. A noção de estrutura em matemática e física. **Estudos Avançados**. V. 3, n. 6, pp 113 – 125, 1989.

ALVES, S; GALVÃO, M. E. E. L. **Um Estudo Geométrico das Transformações Elementares**. São Paulo: IME-USP, 1996.

ALVES, A. M. M; SILVEIRA, D. N. Uma Leitura Sobre as Origens do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no BRASIL. **Subseções Educacionais**. Recife, n. 2 jul/dez. 2016.

ANPMat – Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica. **Entrevista com o prof. Elon Lages Lima**, s.d. Disponível em <https://anpmat.org.br/cafe-com-a-anpmat/entrevista-com-o-prof-elon-lima> acesso em 24 nov. 2021.

ARISTÓTELES. **Da Alma (De Anima)**. Trad. Edson Bini. São Paulo: Edipro, 2011.

___________ **Metafísica**. Tradução, textos adicionais e notas de Edson Bini. São Paulo: Edipro, 2012.

___________ **Da sensação e dos sentidos**. Trad. Marcos Thomazin. Erudição, livro 5. 2019.

BARBOSA, R. **Descobrindo Padrões em Mosaicos.** São Paulo: Atual: 1993.

BARBOSA, R.; TIGGEMANN, S.; COUTO, K. B.; MARQUES, M. C. B.; ALMEIDA, S. T. **Geoplanos e Redes de Pontos**: Conexões e Educação Matemática. Vol. 4. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. (Série o Professor de Matemática em Ação).

BARRET, L. F. We have more than five senses. A neuroscientist explains the hidden abilites we often overlock. **Science Focus**. 2021. Disponível em <https://www.sciencefocus.com/the-human-body/how-many-senses-do-we-have/> acesso em 22 nov. 2021.

BASTOS, A. M; LAMPARELLI, L. C; FRANCHI, A. Matemática. In SÃO PAULO. **Guias Curriculares Propostos Para as Matérias do Núcleo Comum do Ensino do 1º Grau**. Governo do Estado de São Paulo. CERHUPE: Centro de Recursos Humanos e Pesquisas Educacionais "Prof. Laerte Ramos de Carvalho". São Paulo, 1975, p. 167 – 230.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRAIDA, F. **Tríades do Design. Um Olhar Semiótico Sobre a Forma, o Significado e a Função**. Rio de Janeiro: Rio Books, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

________ Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

________ Secretaria de Educação Básica. **Guia do livro didático 2007**: Matemática: séries/ anos iniciais do ensino fundamental. Brasília: MEC, 2006.

________ Secretaria de Educação Básica. **Guia do livro didático 2008**: Matemática: séries/ anos finais do ensino fundamental. Brasília: MEC, 2007.

________ Secretaria de Educação Básica. **Guia do livro didático 2010**: Matemática: séries/ anos iniciais do ensino fundamental. Brasília: MEC, 2009.

________ Secretaria de Educação Básica. **Guia do livro didático 2017**: Matemática: séries/ anos finais do ensino fundamental. Brasília: MEC, 2016.

________ Ministério da Educação. **Resolução CNE/CP Nº 2, de 22 de dezembro de 2017**. Brasília: MEC, 2017.

________ Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

BRITO, A, J; CARVALHO, D. L. Utilizando a história no ensino da geometria. In. MIGUEL, A; BRITO, A. J; CARVALHO, D. L; MENDES, I. A. **História da Matemática em Atividades Didáticas**. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 13 – 109.

CARDOSO, J. B. F. **A Semiótica do Cenário Televisivo**. São Paulo: Annablume, 2008.

CASTILHO, K; MARTINS, M. M. **Discursos da Moda – Semiótica, Design e Corpo**. 2 ed. São Paulo: Anhembi Morumbi, 2008. (Coleção Moda & Comunicação).

CATUNDA, O; DANTAS, M. M. S; NOGUEIRA, E. C; SOUZA, N. C. P; GUIMARÃES, E. C. **As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria**. Salvador: UFBA, 1988.

CENPEC – Centro de Estudos e Pesquisas em Educação, Cultura e Ação Comunitária. **Currículos para os anos finais do ensino fundamental**: concepções, modos de implantação e usos. São Paulo, 2015.

CONTE, C. B. **Pitágoras: Ciência e Magia na Antiga Grécia**. 3 ed. São Paulo: Madras, 2008.

D'AMBROSIO, U. **Uma História Concisa da Matemática no Brasil**. 2 ed. Petrópolis RJ: Editora Vozes, 2011.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Plana**. v. 9. 8 ed. São Paulo: Atual, 2005.

DOMINGUES, H. H; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4 ed. ref. São Paulo: Atual, 2003.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In. MACHADO, S. D. A. (ORG.) **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-34.

________ **Semiosis y Pensamiento Humano**: Regitros Semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. Myrian Vega Restrepo. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogia: Grupo de Educación Matemática. 2 ed. Santiago de Calo - Colômbia, 2004.

________ **Ver e Ensinar Matemática de outra forma:** Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

________ Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266 – 297, 2012.

________ Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**. Florianópolis SC, v. 11, n. 2, p. 1 – 78, 2016.

ESQUINCALHA, A. C. Nicolas Bourbaki e o Movimento Matemática Moderna. **Revista Educação Ciências e Matemática**, v. 2 n. 3 set/dez, 2012.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Trad. e Intro. Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas, Unicamp, 2011.

FARMER, D. W. **Grupos e Simetria**: Um guia para descobrir a matemática. Lisboa: Gradiva, 1999. (A matemática em construção).

FIGUEIRA, D. G. **História**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2005. Série Novo Ensino Médio.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: Percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. revista. Campinas: Autores Associados, 2012. (Coleção formação de professores).

FREIRE, I. A. A; DIAS, A. L. M. Seção Científica de Matemática do CECIBA: propostas e atividades para renovação do ensino secundário de matemática (1965 – 1969). **Bolema**, Rio Claro (SP) v. 23, nº 35B, p. 363 a 386, abril, 2010.

FREIRE, D. F; QUEIROZ, A. J. M. As contribuições de Maurício Peixoto para a Matemática Brasileira. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 7 n. 20, pp 57 – 66. 2020.

FREITAS, J. L. M; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática – RPEM**. Campo Mourão, v. 2, n. 3, jul-dez. 2013.

GAMA, M. M; ALMEIDA, L. I. M. V. Os Exames de admissão de década de 1931 a 1971. **XVI Seminário Temático Provas e Exames e a Escrita da História da Educação Matemática**. Boa Vista RR, 2018.

GAULT, J. L. O Nascimento da Ciência Moderna: Uma leitura de “A ciência e a verdade”. **Arquivos Brasileiros de Psicologia**. Rio de Janeiro: 67 (2), 156-161, 2015.

GARNICA, A. V. M; SOUZA, L. A. **Elementos de História da Educação Matemática**. São Paulo: UNESP, 2012.

GUIMARÃES, H. M. Por uma matemática nova nas escolas secundárias: perspectivas e orientações curriculares da matemática moderna. In: Matos, J. M. & Valente, W. R. (Eds.) **A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal**: primeiros estudos (pp. 21-45). São Paulo: Grices/Da Vinci, 2007.

HAYDEN, R. W. **A history of the "new math" movement in the United States**. Iowa State University, 1981.

HENRIQUES, A; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfície e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência e Educação**. Bauru, v. 22, n. 2, p. 465 – 487, 2016.

HENSHAW, J. M. How many senses do we have? **JHU Press Blog**. Maryland: Johns Hopkins University Press, 2012.

HOBSBAWM, E. **Era Dos Extremos**: O breve século XX 1914 – 1991. trad. Marcos Santarrita. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

HON, G; GOLDSTEIN, B. R. **From Summetria to Symmetry: The Making of A Revolitionary Scientific Concept**. Archimedes: New Studies in The History of Science and Technology. New York: Springer – Verlag, 2008.

INHELDER, B; PIAGET, J. **Da lógica da criança á lógica do adolescente: ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais**. Trad. Dante Moreira Leite. Título original : De la logique de l'aenfant á logique de l'adolescent: essai sur la construction des structures opératoires formelles. 1955. São Paulo: Pioneira, 1976.

KILPATRICK, J. Fincando Estacas: Uma tentativa de demarcar a EM como campo profissional e científico. **Zetetiké**, Campinas: CEMPEM – FE – Unicamp, v. 4, n. 5, p. 99 – 120, jan. - jun. 1996.

KLINE, M. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

LEDERGERBER-RUOFF, E. B. **Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano**. São Paulo: Atual, 1982.

LIMA, E. B. Omar Catunda: ventura e desventuras de um passado cultural. **Rev. Diálogo Educação**. Curitiba, v. 16, n. 48, p. 445 – 465, mai/ago. 2016.

LIMA, E. L. **Isometrias**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007 (Coleção do Professor de Matemática; 12 Vol.)

________ **Entrevistas com Eméritos II – Elon Lages Lima**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Entrevistador: Cesar Camacho. Rio de Janeiro, 2010. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=LM-YUVBrCKA&t=1960s> aceso em 25 nov. 2021.

________ **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT, 07).

________ **Curso de análise**. Vol. 1. 15 ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2019. (Projeto Euclides).

_________. Membro Titular : Ciências Matemáticas. **Academia Brasileira de Ciências**. s.d. Disponível em <http://www.abc.org.br/membro/elon-lages-lima/> , acesso em 24 nov. 2021.

LUZ, V. A. Um estudo sobre o ensino de transformações geométricas: da reforma da matemática moderna aos dias atuais. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo, PUC/SP, 2007.

MABUCHI, S. T. Transformações Geométricas: A trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. **Dissertação** (Mestre em Educação Matemática). São Paulo: PUC/SP, 2000.

MANGANO, D. **Semiótica e Design**. Roma: Carocci, 2008.

MASSIERE, M. A; LIMA, C. M. Dos escombros a liderança: A reconstrução alemã no pós-guerra e suas bases econômicas para as décadas seguintes. **NEIBA**. Vol. VII, 2018.

MENDES, E. **Arte Moderna**. Educa+Brasil, 2019. Disponível em <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/artes/arte-moderna> acesso em 04 dez. 2021.

MENONCINI, L. O jogo das operações semióticas na aprendizagem da integral definida no cálculo de área. **Tese** (Doutor em Educação Científica e Tecnológica). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, 2018.

MELO, H. F. S. **Isometrias no Plano**: Uma abordagem segundo a geometria analítica. Lisboa: Influir, 2010.

METZ, C. **Film Language: A Semiotics of the Cinema**. New York: Oxford University Press, 1974.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual 1998.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Livro Técnico, 1969.

MOYLE, T. Do we only have five senses? **Science**, 2018. Disponível em <https://insh.world/science/do-we-only-have-five-senses/> acesso em 22 nov. 2021

MUNARI, A. **Jean Piaget**. Trad. Daniele Saheb. Recife: Massangana. Fundação Joaquim Nabuco, 2010.

MURARI, C; BARBOSA, R. M. **Belas Formas em Caleidoscópios, Caleidosciclos e Caleidostrótons**: Conexões e Educação Matemática. v. 03. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. (O professor de matemática em ação).

MURARI, C. Resenha da obra: BARBOSA, R. M. Descobrindo Padrões em Mosaicos. São Paulo: Atual Editora, 1993. **Bolema**, Rio Claro - SP, v. 11, n.12, 1997.

NIEMEYER, L. **Elementos de Semiótica Aplicados ao Design**. Rio de Janeiro: 2AB, 2013.

OLIVEIRA, M. C. A; SILVA, M. C. L; VALENTE, W. R. (Org.) **O Movimento da Matemática Moderna**: História de uma Revolução Curricular. Juiz de Fora MG: UFJF, 2011.

PASQUINI, R. C. G; BORTOLOSSI, H. J. **Simetria – História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar**. v. 9. São Paulo: Livraria da Física, 2015. (Série história da matemática para o ensino).

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria. **Dissertação** (Mestrado em Educação). Campinas SP: Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, 1989.

PAVANELLO, R. M. O Abandono do ensino da geometria: causas e consequências. **Zetetiké**. Campinas, Ano 1 n. 1, 1993.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Trad. José Teixeira C. Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005.

PEIXOTO, M. M. **Curriculum Vitae de Mauricio Matos Peixoto**. Abr. 2001. Disponível em <https://www.ime.usp.br/~sotp/mmp.pdf>, acesso em 24 nov. 2021.

PERRENOUD, P. **Construir Competências Desde a Escola**. Trad. Charles Magne. Porto Alegre: Artmed, 1999.

________ **10 Novas Competências para Ensinar**. Trad. Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

________ **Ensinar: Agir na urgência, decidir na incerteza**. 2 ed. Trad. Cláudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2001.

PIAGET, J. **O estruturalismo**. Trad. Moacir Renato Amorin. Título original: Le Structuralisme. São Paulo: DIFEL, 1979.

PINHEIRO, M. M. L; RIOS, D. F. As redes de Interação Social e a Institucionalização do Movimento da Matemática Moderna na Bahia. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, n 35 B, p. 343 a 361, abril, 2020.

PINHEIRO, P. Linguagem e Conhecimento em Platão: Estudo Sobre a Correção dos Nomes no Crátilo. **Lumina**. Juiz de Fora MG: Facom/UFJF, v.6, n. 1, p. 31 – 56, jan/dez. 2003.

PLATÃO. **Crátilo ou Sobre a Correção dos Nomes**. Trad. Celso de Oliveira Vieira. São Paulo: Paulus, 2014.

QUEIROZ, V. A Lei Nº 5692/71 e o Ensino de 1º Grau: Concepções e Representações. **XI Congresso Nacional de Educação**. EDUCERE, 2013.

RIBEIRO, M; GIBIM, G; ALVES, C. **Reflexão e Simetria**. v. 1 Curitiba: CRV, 2021 (Coleção CIEspMat).

RIOS, D. F. Memória e História da Matemática no Brasil: A saída de Leopoldo Nachbin do IMPA. **Dissertação** (Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências). Feira de Santana BA: Universidade Federal da Bahia – UFBA, 2008.

ROHDE, G. M. **Simetria**: Generalidades sobre simetria, geociências, biociências, ciências exatas, tecnologias e artes e filosofia. São Paulo: Hemus, 1982.

ROQUE, T. Pesquisa matemática e instituições científicas no Brasil do pós-guerra. **Ciência e Cultura**. v. 70 n.1 São Paulo, jan./jun. 2018.

SAES, A. M; SAES, F. A. M. **História Econômica Geral**. Saraiva Educação S.A. 2017

SALANDIM, M. E. M. O acervo pessoal do professor Ruy Madsen Barbosa: divulgação e problematização de suas potencialidades para a pesquisa em Educação Matemática. **XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**. Cuiabá: 14 a 17 de julho de 2019.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Moderno**. 3º Vol. 3 ed. revista. São Paulo: São Paulo Editora, 1967.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. Coleção Primeiros Passos. Vol. 103. São Paulo: Brasiliense, 1983.

SANTAELLA, L; NÖTH, W. **Estratégias Semióticas da Publicidade**. São Paulo. Ed Cengage Learning, 2010.

SANTOS, M. M. Cinema e Semiótica: A Construção Sígnica do Discurso Cinematográfico. **Revista Fronteiras – Estudos Midiáticos**, 13 (1): 11 – 19, janeiro/abril 2011. São Paulo, 2011.

SÃO PAULO. **Guias Curriculares Propostos Para as Matérias do Núcleo Comum do Ensino do 1º Grau**. Governo do Estado de São Paulo. CERHUPE: Centro de Recursos Humanos e Pesquisas Educacionais “Prof. Laerte Ramos de Carvalho”. São Paulo, 1975.

SMSG – School Mathematics Study Group. **Matemática Curso Ginasial**. Vol. III. Trad. Lafayette de Moraes. São Paulo: EDART, 1969.

SIEGMUND-SCHULTZE, R. **Rockefeller and the internationalization of mathematics between the two World Wars**. Birkhauser Verlag, 2001.

SILVA, C. M. S. A construção de um Instituto de Pesquisas Matemáticas nos Trópicos – O IMPA. **Revista de História da Matemática**, v. 4, n. 7, abr./set. 2004.

SILVA, M. C. L; CAMARGO, K. C. Martha Dantas: o ensino da geometria na Bahia. **Revista Diálogo Educação**, Curitiba, v. 8, n. 15, p. 701-714, set./dez. 2008.

SILVA, T. T. P. Os Movimentos da Matemática Moderna: Compreensões e Perspectivas a Partir da Análise da obra “Matemática – Curso Ginasial” do SMSG. **Dissertação** (Mestre em Educação Matemática). Rio Claro (SP): Universidade Estadual Paulista – UNESP, 2013.

SOARES, F. S. Os congressos de ensino da matemática no Brasil nas décadas de 1950 e 1960 e as discussões sobre a Matemática Moderna. In: **Seminário Paulista de História e Educação Matemática**. São Paulo: IME – USP, p. 445 – 452, 2005.

SOUZA, F. O movimento da Matemática Moderna como objeto de pesquisa no 1º seminário paulista de história e educação matemática. **Monografia** (Licenciatura em Matemática). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, 2009.

SOUZA, G. L. D. Educação Matemática na CENP: um estudo histórico sobre condições de produção cultural por parte de uma comunidade de prática. **Tese** (Doutorado). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2005.

SOUZA, L. F. Platão, Crátilo: Estudo e Tradução. **Dissertação** (Mestre em Letras). São Paulo: USP, 2010.

SOUZA, S; SANTARELLI, C. Publicidade Visual: Uma Proposta de Percurso Analítico da Imagem Persuasiva. **Revista Galáxia**, São Paulo, n. 12: 83 – 101, dez. 2006.

SAUSSURE, F. **Curso de Linguística Geral**. Org. Charles Bally e Albert Sechehaye. Trad. Antônio Chelini, José Paulo Paes e Izidoro Blikstein. São Paulo: Cultrix, 2006.

VALENTE, W. R. (Org.) **Osvaldo Sangiorgi Um Professor Moderno**. São Paulo: Annablume; Brasília: CNPq. Osasco: GHEMAT, 2008.

VELOSO, E. **Simetria e Transformações Geométricas**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2012.

VIEIRA, V. L. **Álgebra Abstrata para Licenciatura**. Campina Grande: EDUEPB, 2013.

VOLLI, U. **Semiótica da Publicidade: A Criação do Texto Publicitário**. Lisboa: Edições 70, 2003.

WEYL, H. **Simetria**. Trad. Vitor baranauskas. São Paulo: Edusp, 1997.

YGUA, R. **A Guerra Fria e a Corrida Espacial**: 1945 – 2000. eBook Kindle. 2020.

ANEXO I – AMOSTRA COLETADA NO CATÁLOGO DE TESES E DISSERTAÇÕES

A primeira coluna, apresenta a palavra-chave colocada no sistema de buscas do Catálogo de Teses e Dissertações. A segunda coluna mostra, a quantidade de resultados retornados sendo que esses resultados, incluem todas as áreas de conhecimento. Depois disso, foi selecionado áreas de conhecimento relacionado ao ensino de matemática, a terceira coluna mostra qual área de conhecimento foi selecionada e a quarta coluna, os resultados obtidos. Dentre os resultados obtidos, foram lidos os títulos e alguns foi lido o resumo para ver se o trabalho estava relacionado a geometria plana, pois muitos trabalhos eram no âmbito dos números complexos, fractais, grafos, música, funções, equações diferenciais, jogos e áreas da física. A quinta coluna mostra o número de dissertações e teses, que estavam relacionados a geometria euclidiana. A sexta coluna, mostra o número de dissertações e teses que já faziam parte da amostra, quando foram digitadas outras palavras-chave. A penúltima coluna, as que não foram encontradas, geralmente porque o link não remetia a nenhuma página válida e a última coluna, as dissertações e teses selecionadas para amostra.

Quadro 21: Escolha da amostra no Catálogo de Teses e Dissertações

Termo pesquisado	Resulta totais	Área de conhecimento selecionada	Resultados na área de conhecimento selecionada	Situado na geometria euclidiana	Já faziam parte da amostra	Não encontrados	Selecionados para amostra
simetria	4.129	Matemática	98	30	0	2	28
isometria	167	Matemática	33	12	3	1	8
“transformações geométricas”	130	Ensino de Ciências e Matemática	11	7	0	1	6
		Matemática	48	30	7	4	19
Total							61

Fonte: Os Autores

ANEXO II – AS DEZ REVISTAS SELECIONADAS E O NÚMERO DE ARTIGOS SOBRE ISOMETRIA E SIMETRIA

O quadro mostra as dez revistas selecionadas e o número de artigos que foi selecionado em cada revista. Foram procurados artigos que tivessem os seguintes requisitos: 1) Tivesse no título ou resumo, o termo isometria, simetria ou transformação geométrica e 2) Tivessem na referência, pelo menos um livro de matemática em língua portuguesa.

Quadro 22 : Revistas e quantidade de artigos selecionados para a amostra

ISSN	Nome da revista	Selecionados para a amostra
1517-4492	Acta Scientiae (Ulbra)	0
1982-5153	Alexandria (UFSC)	0
2317-5125	Amazônia - Revista de Educação em ciências e matemática	0
0103-636X	BOLEMA: Boletim de Educação Matemática	5
1983-3156	Educação Matemática e Pesquisa (online)	0
1517-3941	Educação Matemática em Revista (São Paulo)	2
1518-8221	Educação Matemática em Revista (RS)	2
1981-1322	REVEMAT: Revista eletrônica de educação matemática	2
2238-2380	Revista de Educação, ciências e matemática	1
2176-1744	Zetetiké (online)	1
Total		13

Fonte: Os Autores

ANEXO III – AS 74 DISSERTAÇÕES, TESES OU ARTIGOS

Os quadros mostram as dissertações e teses, selecionadas do Catálogo de Teses e Dissertações, bem como, das revistas selecionadas. A numeração da primeira coluna, identifica os trabalhos, que será importante para o anexo IV.

Quadro 23: As 61 dissertações ou teses da amostra

Identificação	Referência (Copiada do catálogo de Teses e Dissertações	Palavra-chave pesquisada
1	ALVES, CLAUDIA MARIA FIUZA. **O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher.**' 17/03/2014 76 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: ASSOCIAÇÃO INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: impa	Simetria
2	ALVES, DANIELE SIMAS PEREIRA. **PAVIMENTAÇÕES E CALEIDOSCÓPIOS UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA** ' 03/05/2019 98 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: COLÉGIO PEDRO II, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Silvia Becker PROPGPEC Colégio Pedro II	Simetria
3	ASSUNCAO, RICARDO GOMES. **Um Estudo das Transformações Geométricas no Plano via Congruência e Semelhança de Figuras Planas**' 27/05/2015 113 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca da Universidade Federal de Goiás	Transformações geométricas
4	AZEVEDO, HERBERT WESLEY. **Transformações geométricas na formação inicial e continuada de professores de Matemática: atividades investigativas envolvendo reflexões por retas e Geogebra**' 23/11/2016 undefined f. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, São Paulo Biblioteca Depositária: undefined	Transformações geométricas
5	BARBOSA, MAURICIO DE OLIVEIRA HORTA. **O USO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM TEMAS DO ENSINO MÉDIO**' 11/04/2013 84 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: biblioteca do centro de ciência e tecnologia CCT - UENF	Transformações geométricas
6	BARROS, FELIPE DE CARVALHO. **PAVIMENTAÇÃO DO PLANO: PROPOSTAS LÚDICAS DE AULA. TRABALHANDO COM ÂNGULOS INTERNOS, SIMETRIA, ISOMETRIAS, OBRAS DE ARTE E MEDIATRIZES**' 22/02/2016 96 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: ASSOCIAÇÃO INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: IMPA	Simetria
7	BILAC, CRISTINA ULIAN. **Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-Géomètre**' 01/10/2008	Transformações

	192 f. Profissionalizante em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, SÃO PAULO Biblioteca Depositária: PUC/SP	geométricas
8	Brito, Luciana Patrocinio de. **Scipione di Pierro Neto e sua proposta para o ensino da geometria na Coleção Curso Colegial Moderno**' 01/09/2008 135 f. Profissionalizante em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, SÃO PAULO Biblioteca Depositária: PUC/SP	Transformações geométricas
9	BULGARELLI, CAMILA DE CASSIA. **Isometrias no ensino básico**' 03/04/2018 259 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Isometria
10	CAMPANHOLO, JULIO CESAR. **Aplicações do conceito de simetria na Matemática**' 21/12/2016 54 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: https://sca.profmat-sbm.org.br/tcc_get.php?cpf=06381061847&d=20170209191533&h=ad5cc381ab04854839f56a2c6e4653a9e0944717	Simetria
11	CARINHA, MARILENE DOS SANTOS. **A OBRA DE M.C.ESCHER COMO SUBSÍDIO AO ENSINO DAS ISOMETRIAS**' 27/02/2018 139 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: UFABC	Isometria
12	CARNEIRO, FRANCISCO DE ASSIS SARAIVA. **Isometrias e Homotetias no Plano**' 30/11/2015 68 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca da Universidade Estadual do Ceará	Isometria
13	CARREIRO, LEANDRO SOPELETTO. **SUBSEÇÃOS DE MATEMÁTICA DISCRETA: UMA PROPOSTA PARA A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS SOB A PERSPECTIVA DA ETNOMATEMÁTICA**' 26/11/2014 86 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca do Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense - Darcy Ribeiro	Simetria
14	CERQUEIRA, LUCIANO DE SOUZA. **ISOMETRIAS NO PLANO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA EDUCAÇÃO BÁSICA COM USO DO GEOGEBRA**' 05/08/2016 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Isometria
15	CHIREIA, JOSE VAGNER. **TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E A SIMETRIA: Uma proposta para o Ensino Médio**' 26/06/2013 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Simetria
16	COSTA, MARCELO DE MOURA. **Uma abordagem introdutória de cônicas para o ensino médio através do Geogebra**' 25/03/2013 61 f.	Simetria

	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da UFJF	
17	EIRAS, MARCO ANTONIO SINHORELLI. **UMA VISÃO ANTECIPADA DO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL NO ENSINO MÉDIO**' 28/11/2014 87 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca do Centro de Ciência e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense - Darcy Ribeiro	Simetria
18	FABRICIO, MARIANA CAPELIN. **A CONFIGURAÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES E SIMETRIA PARA A CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS NO 6o ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**' 31/05/2016 109 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Comunitária da UFSCar	Simetria
19	FILHA, CLAUDIA BRUM DE OLIVEIRA FOGLIARINI. **USO DE APLICATIVOS COMPUTACIONAIS E PRODUTO MATRICIAL: DUAS PROPOSTAS DE APLICAÇÃO**' 14/05/2015 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Transformações geométricas
20	FILHO, EGIDIO COSTA. **Matrizes: uma aplicação no ensino médio a partir de transformações geométricas**' 02/08/2013 102 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/577	Transformações geométricas
21	FRANCA, JOSE BENICIO DOS ANJOS. **Uso de Programação no Ensino das Transformações Geométricas no Plano**' 18/03/2016 181 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes	Transformações geométricas
22	GOMES, ANDRE ARRUDA. **O USO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E DE SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE MATRIZES E SUAS OPERAÇÕES**' 20/08/2013 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Transformações geométricas
23	GUIMARAES, MARCIA CRISTINA LEMOS. **Simetria**' 08/06/2015 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Simetria
24	HOLANDA, KENIA COSTA. **Uma Proposta Didática Utilizando Caleidociclos De Maurits Cornelis Escher**' 29/06/2018 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Simetria
25	INFORSATO, ANA PAULA. **Grupos de friso**' 04/05/2018 66 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino:	Transformações

	UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO (RIO CLARO), Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: IGCE/UNESP/Rio Claro	geométricas
26	JESUS, IVANILTON SALES DE. **Isometrias no Plano: Uma Abordagem Apliável ao Ensino Básico**' 30/03/2017 64 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes	Simetria
27	KWASINSKI, JORGE RICARDO MUNIZ. **"Aplicações das transformações geométricas no Ensino Médio".**' 08/10/2015 90 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca de Pós-Graduação em Matemática da UFF	Transformações geométricas
28	LIMA, CARLOS HENRIQUE. **Grupos de Simetria no Plano Euclidiano**' 25/09/2017 136 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca central UNICAMP	Simetria
29	LIMA, HENRIQUE ALMEIDA. **Ensino de Matrizes com enfoque Geométrico**' 15/01/2016 54 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Transformações geométricas
30	LOPES, MARCOS PAULO BARROS. **Simetrias e transformações isométricas nas resoluções de problemas**' 29/01/2021 115 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA - REDENÇÃO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Simetria
31	MIR, MICHEL. **Uma Abordagem de Isometria em Sala de Aula**' 11/11/2014 88 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE EST.PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO/SJR. PRETO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Isometria
32	MIRANDA, GINA MAGALI HORVATH. **Um sistema baseado em conhecimento com interface em língua natural para o ensino de transformações geométricas**' 01/05/2009 294 f. Mestrado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, SÃO PAULO Biblioteca Depositária: PUC/SP	Transformações geométricas
33	NARDELLI, RENAN EDUARDO. **O estudo de simetrias com frisos e questões da OBMEP**' 21/08/2015 62 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Comunitária da UFSCar	Simetria
34	NASCIMENTO, ELIMAR MOREIRA DO. **Integração entre Álgebra e Geometria no Ensino da Matemática.**' 12/05/2017 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Simetria
35	NERY, DIEGO CUNHA. **CONJUNTOS CONVEXOS E SUAS**	

	APLICACÕES NO ENSINO MÉDIO' 23/03/2013 38 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Matemática, UFC	Simetria
36	OLIVEIRA, MANOELA DO VALE DE. **Congruência: uma experiência com alunos surdos**' 25/08/2014 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Digital do PROFMAT	Isometria
37	OLIVEIRA, MARIA APARECIDA DOMINGUES GARBIN DE. **ESTUDO DIDÁTICO DO GRUPO DE FRISOS**' 28/08/2015 63 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Ufabc	Simetria
38	OLIVEIRA, VLADIERE SOUSA TORRES. **Uso do GeoGebra para Motivar Estudo de Problemas de Mínimos Geométricos Através de Simetrias**' 27/06/2014 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Simetria
39	OLIVEIRA, WELTON FRANCISCO DE. **Uma proposta para ampliar a perspectiva de professores e alunos em relação ao estudo de matrizes.**' 24/02/2017 129 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO (SÃO JOSÉ DO RIO PRETO), Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: UNESP/Campus de São José do Rio Preto	Transformações geométricas
40	PEREIRA, DIOGO PELAES FRANCO. **Transformações Geométricas com Aplicações no GeoGebra para o ensino médio** ' 14/12/2017 88 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca central UNICAMP	Transformações geométricas
41	PIMENTEL, LUIZ FERNANDO GARCIA. **UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA**' 17/09/2016 125 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Comunitária da UFSCar	Transformações geométricas
42	PIZZO, ALAN MACHADO. **O CONCEITO MODERNO DE SIMETRIA: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO.**' 07/02/2017 96 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina	Simetria
43	RAMIRO, LEANDRO. **Situações didáticas no ensino de geometria com o aplicativo GeoGebra**' 19/12/2014 139 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE EST.PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO/ILHA SOLT, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: http://repositorio.unesp.br/handle/11449/127559	Simetria
44	RIBEIRO, MARCO ANTONIO DA SILVA. **Transformações geométricas planas: um estudo experimental e dinâmico**' 28/06/2016 undefined f.	Transformações

	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, São Paulo Biblioteca Depositária: undefined	geométricas
45	Rossi, Gicele da Rocha. **O ENSINO E APRENDIZAGEM DE POLÍGONOS E DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO: RELACIONANDO ARTE E MATEMÁTICA POR MEIO DE FRISOS E DOS LADRILHOS**' 01/06/2009 317 f. Profissionalizante em ENSINO DE FÍSICA E DE MATEMÁTICA Instituição de Ensino: CENTRO UNIVERSITÁRIO FRANCISCANO, SANTA MARIA Biblioteca Depositária: Centro Universitário Franciscano - UNIFRA	Transformações geométricas
46	ROSSI, IZABELA CAROLINE. **Aprendendo Isometria com Mosaicos**' 04/12/2014 68 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE EST.PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO/SJR. PRETO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Isometria
47	SALAZAR, JESUS VICTORIA FLORES. **"Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço"**' 01/06/2009 317 f. Doutorado em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, SÃO PAULO Biblioteca Depositária: PUC/SP	Transformações geométricas
48	SAMPAIO, ELISANDRA REGINA. **Estudo de simetria e seu ensino no nível fundamental e médio**' 06/09/2013 52 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO/SÃO CARLOS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Prof. Dr. Achille Bassi - ICMC-USP	Simetria
49	SANTOS, DREYKO HEMERLY RODRIGUES. **Uma sequência de atividade para o ensino da simetria por meio da arte**' 29/04/2016 46 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: BC - UESC	Simetria
50	SANTOS, NAYRA MILLA DA SILVA. **MOSAICOS: CONSTRUÇÃO ATRAVÉS DO GEOGEBRA E APLICAÇÕES PARA O ENSINO BÁSICO**' 16/10/2017 89 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Central Julieta Carteado UEFS	Simetria
51	SILVA, EWERTON ROOSEWELT BERNARDO DA. **UM CUBO EM SEIS PIRÂMIDES: AULAS DE MATEMÁTICAS**' 27/02/2015 91 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: BIBLIOTECA CENTRAL DA UFAL	Simetria
52	SILVA, PAULO ARAUJO DA. **Transformações Geométricas no Plano**' 21/11/2014 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Transformações geométricas
53	SILVA, REGINALDO ALEXANDRE DA. **Caleidociclos**' 13/01/2017 113 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO (SÃO CARLOS), Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Prof. Achille Bassi	Simetria
54	SILVA, RENAD FERREIRA DA. **Transformações Geométricas no Plano**	

	e no Espaço' 14/08/2013 74 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA/JOÃO PESSOA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da UFPB	Transformações geométricas
55	SILVA, RENATO OLIVEIRA. **ISOMETRIAS**' 16/06/2016 112 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca Central da UFCG	Transformações geométricas
56	SIMONINI, ANDREA RIBEIRO FERNANDES. **Mosaicos geométricos: Estudo de ângulos e simetrias.**' 14/12/2017 100 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca do CCT da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro	Simetria
57	SOUZA, ANDRE LOPES CARMO DE. **Ensino das transformações Geométricas**' 09/05/2014 65 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: Biblioteca de Pós Graduação da UFF	Transformações geométricas
58	SOUZA, CARLA FERNANDES E. **Estudo de quadriláteros, reflexões e rotações no plano, segundo a teoria de van Hiele: uma experiência com alunos do 9º ano do ensino fundamental**' 22/08/2014 undefined f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Isometria
59	SOUZA, DEMETRIUS MELO DE. **Uso de transformações geométricas na revigoração do ensino da geometria plana.**' 15/08/2014 125 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: ASSOCIAÇÃO INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: impa	Transformações geométricas
60	SOUZA, MARCELO TAVARES. **FRACTAIS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: CONSTRUINDO FRACTAIS CLÁSSICOS ATRAVÉS DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS**' 30/10/2018 109 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined	Simetria
61	STORMOWSKI, VANDOIR. **Estudando Matrizes a partir de Transformações Geométricas**' 01/10/2008 110 f. Profissionalizante em ENSINO DE MATEMÁTICA Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, PORTO ALEGRE Biblioteca Depositária: Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Transformações Geométricas

Quadro 24: Os 13 artigos de revistas da amostra

62	Maciel, Aníbal de Menezes, Rêgo, Rogéria Gaudencio do e Carlos, Erenildo JoãoPossibilidades Pedagógicas do Uso da Imagem Fotográfica no Livro Didático de Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática [online]. 2017, v. 31, n. 57
63	Vieira, Gilberto, Paulo, Rosa Monteiro e Allevato, Norma Suely Gomes. Simetria no ensino fundamental através da resolução de problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática [online]. 2013, v. 27, n. 46
64	Santos, Luciana Ferreira dos e Teles, Rosinalda Aurora de MeloPintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino da Simetria e Artes Visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática [online]. 2012, v. 26, n. 42a
65	FAINGUELERNT, E. K. Representação do Conhecimento em Matemática: transformações no plano - Translação e Simetria. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 9, n. ESPECIAL 3, 1994
66	MURARI, C. PEREZ, G.O Uso de Espelhos e Caleidoscópios em Atividades Educacionais de Geometria para 7ª e 8ª séries. ISBN 978-85-89082-23-5 **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, set. 2002
67	SANTOS, L. F. GUIMARÃES. Geometria e Artes Visuais no Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista – SBEM**. n. 35, 2012.
68	BIEMBERGUT, M. S. SILVA, V. C. Ornamentos versus Criatividade: Uma alternativa para ensinar geometria plana e simetria. **A Educação Matemática em Revista -** SBEM. n.4. 1º semestre, 1995
69	SANTOS, L. F. TELES, R. A. M. Oficinas de Geometria e Artes Visuais: Espaço Para o Diálogo, Troca de Experiência e Construção de Conhecimento. **Educação Matemática em Revista RS**. EMR-RS - ANO 21 - 2020 - número 21 - v.2 – p. 17 - 27
70	JELINEK, K. R. A geometria que existe alem do olhar: Levando a geometria da natureza para dentro da escola. Educação Matemática em Revista EMR - RS. Ano 10 - v 1 - pp - 75 a 81. 2009.
71	VISEU, F. MENEZES, L. ALMEIDA, J. Conhecimento de Geometria e perspectivas de professores do 1 ciclo do Ensino Básico sobre o seu ensino. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v. 08, n. 1, p. 156-178, 2013.
72	DETONI, A. R. Compreensões Filosóficas para uma alternativa do pensamento geométrico. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, Ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 232 - 243, 2016.
73	COSTA, W. R. J. SOUZA, F. S. Construindo o conceito de simetria na educação de jovens e adultos. **Revista de Educação, Ciências e Matemática** v.4 n.3 set/dez 2014.
74	KALEFF, A. M. R. Uma aplicação do conceito de simetria axial plana visando um ensino interdisciplinar. **Zetetiké**, Ano 2 n 2, 1994.

Fonte: Os Autores

ANEXO IV – OS 63 LIVROS CITADOS NAS DISSERTAÇÕES, TESES OU ARTIGOS

A seguir há seis quadros, cada quadro, uma lista de livros. São os livros citados nas dissertações, teses e artigos. A primeira coluna classifica os livros, pelos mais citados. A segunda coluna, o título do livro. Na terceira coluna, o autor do livro. O quadro não tem essa coluna, pois todos os livros são de autoria de Elon Lages Lima. A quarta coluna indica, em quais dissertações, teses ou artigos eles foram citados e a última coluna, o número de vezes em que foram citados.

Quadro 25: Livros com ênfase em isometria e/ou simetria mais citados na amostra de dissertações, teses e artigos

Pos.	**Título do livro**	**Autor (es)**	**Referências (teses, dissertações ou artigos)**	**nº**
1	Isometrias	Elon Lages Lima	[3], [9], [11], [12], [14], [20], [26], [28], [30], [31], [34], [42], [44], [45], [47], [50], [53], [55], [57], [61]	20
2	Isometrias e Ornamentos no Plano Euclidiano	Erika Brigitta Ledergerber-Ruoff	[4], [11], [23], [26], [28], [30], [32], [44], [45], [65], [68], [74]	12
3	Simetria	Hermann Weyl	[23], [26], [28], [37], [42], [53], [57], [62]	8
4	Um estudo geométrico das transformações elementares	Sérgio Alves Maria Elisa Esteves Lopes Galvão	[4], [11], [32], [37], [44], [47]	6
5	Simetria: história de um conceito e suas implicações no contexto escolar	Regina C. G. Pasquini Humberto J. Bortolossi	[24], [33], [42]	3
6	Grupos e Simetria	David W. Farmer	[37], [45]	2
	Simetria e Transformações Geométricas	Eduardo Veloso	[10], [47]	2
	Uma história da simetria na matemática	Ian Stewart	[42], [62]	2

Fonte: Os Autores

Quadro 26: Livros de autoria de Elon Lages Lima mais citados na amostra de dissertações, teses e artigos

Pos.	Título do livro	Obras que referenciaram	nº
1	Coordenadas no Plano	[3], [15],[17], [20], [29],[30], [50], [52], [55], [60], [61]	11
2	A matemática do Ensino Médio vol 3	[5], [15], [17], [22], [31], [51], [55], [61]	8
3	Álgebra Linear	[21], [39], [50], [54]	4
4	Medida e Forma em Geometria	[3], [30], [43], [57]	4
5	Matemática e Ensino	[12], [27]	2
6	Geometria Analítica e Álgebra Linear	[60]	1
7	Meu professor de matemática e outras histórias	[12]	1

Fonte: Os Autores

Quadro 27: Livros de geometria euclidiana plana mais citados na amostra de dissertações, teses e artigos

Pos.	Título do livro	Autor (es)	Referencias em	nº
1	Geometria	Antônio C. Muniz Neto	[3], [9], [12], [23], [28], [30], [52], [55]	8
2	Geometria Euclidiana Plana	João Lucas M. Barbosa	[3], [12], [14], [15], [43], [45], [57]	7
3	Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas	Eliane Q. F. Rezende Maria Lúcia B. Queiroz	[18], [26], [31], [45], [46], [55]	6
4	Geometria - Temas Actuais	Eduardo Veloso	[9], [23], [28], [47], [71]	5
5	Os Elementos	Euclides	[3], [21], [57], [72]	4
6	Curso de Geometria	Paulo Ventura Araújo	[4], [55]	2
	Geometria Plana	Osvaldo Dolce José Nicolau Pompeo	[3], [15]	2
	Subseções de Geometria Elementar	Sérgio Lima Neto	[27], [46]	2
7	Geometria Plana e Espacial	João R. Geronimo Valdeni S. Franco	[14]	1
	Geometria: Curso Moderno	Benedito Castrucci	[8]	1
	História da Geometria	Howard Eves	[16]	1
	Um curso básico de geometria	Lílian Nasser Lucia Tinoco	[45]	1

Fonte: Os Autores

Quadro 28: Livros de Álgebra Linear e/ou Geometria Analítica mais citados na amostra de dissertações, teses e artigos

Pos.	**Título do livro**	**Autor (es)**	**Referencias em**	**nº**
1	Álgebra Linear	José Luiz Boldrini	[20], [21], [39], [40], [50], [52], [54]	7
	Geometria Analítica	Jorge Delgado Katia Frensel Lhaylla Crissaff	[16], [21], [22], [52], [55], [58], [60]	7
2	Álgebra de Linear Contemporânea	Howard Anton Robert Busby	[19], [20], [40], [52], [60], [61]	6
	Introdução a Álgebra Linear	Abramo Hefez Cecília S. Fernandez	[19], [21], [40], [48], [50], [60]	6
3	Álgebra Linear e suas aplicações	David C. Lay Steven R. Lay Judi J. McDonald	[20], [39], [54], [61]	4
4	Álgebra Linear	David Poole	[19], [50]	2
	Geometria Analítica Um Tratamento Vetorial	Paulo Boulos Ivan de Camargo	[11], [31]	2
	Introdução a Álgebra Linear com aplicações	Bernard Kolman	[19], [60]	2
5	Álgebra Linear	Seymou Lipschutz	[35], [61]	1
	Álgebra Linear	Ralph Costa Teixeira	[35]	1
	Álgebra Linear e Geometria Analítica	Antônio dos Santos Machado	[17]	1

Fonte: Os Autores

Tabela 29: Livros de Álgebra Moderna mais citados na amostra de dissertações, teses e artigos

Pos.	**Título do livro**	**Autor (es)**	**Referencias em**	**nº**
1	Álgebra Moderna	Hygino H. Domingues Gelson Iezzi	[21], [25], [34], [61]	4
2	Subseçãos de Álgebra	Israel Nathan Herstein	[23], [28]	2
3	Introdução a Álgebra	Adilson Gonçalves	[61]	1
	Introdução a Teoria de Grupos	Alberto Azevedo Renzo Piccinini	[48]	1

Fonte: Os Autores

Quadro 30: Livros que não se encaixam em nenhuma das categorias anteriores, da amostra de dissertações, teses e artigos

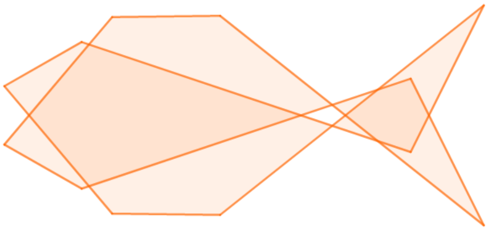
Posição	Título do livro	Autor (es)	Referencias em	nº
1	Descobrindo Padrões em Mosaicos	Ruy Mandsen Barbosa	[6], [24], [34], [45], [46], [49], [50], [66]	8
2	Geometria dos Mosaicos	Luis Márcio Imenes Marcelo Lellis	[45], [46], [56]	3
	O Mundo Mágico De Escher	Pieter Tjabbes	[6], [46], [56]	3
3	Belas formas em caleidocópios, caleidosciclos e caleidostrótons	Claudemir Murari Ruy Madsen Barbosa	[2], [57]	2
	Espaço e Forma	Célia Maria C. Pires Edda Curi Tania Maria M. Campos	[7], [67]	2
	Fazendo Arte com a Matemática	Estela K. Fainguelernt Katia Regina A. Nunes	[64], [69]	2
	Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele	Lilian Nasser Neide P. Sant'Anna	[45], [58]	2
4	A gramática dos ornamentos e a cultura árica	Rodney C. Bassanezi Maria Salett Biembengut	[68]	1
	A ciência dos padrões	Keith Devlin	[21]	1
	A matemática na vida e na arte	Paulo Roberto M. Contador	[64]	1
	Figuras e Formas	Kátia Stocco Smole Maria Ignez Diniz Patrícia Cândido	[70]	1
	Geometria na era da imagem e do movimento	Maria Laura M. L. Lopes Lilian Nasser	[45]	1
	Matemática e Arte	Ubiratan D'ambrósio Dirceu Zaleski Filho	[62]	1
	Matemática no Ensino Fundamental	John A. Van de Walle	[63]	1
	O programa de Erlangen Félix Klein	Félix Klein	[72]	1

Fonte: Os Autores

ANEXO V – FIGURAS SIMÉTRICAS CRIADAS PELO AUTOR

Todas as figuras a seguir foram criadas pelo autor, no GeoGebra. Podem ser usadas em trabalhos acadêmicos e não acadêmicos, desde que cite o autor. Maiores informações podem entrar em contato pelo email: ozeiastr07@gmail.com .

Figura 75: Figura com grupo D1 ou simetria bilateral

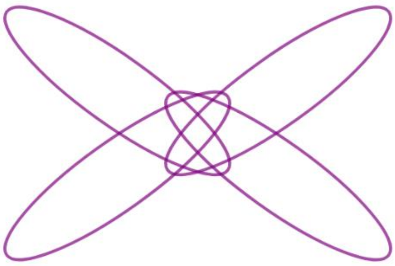


Fonte: Os Autores

Figura 76: Figura com grupo D1 ou simetria bilateral

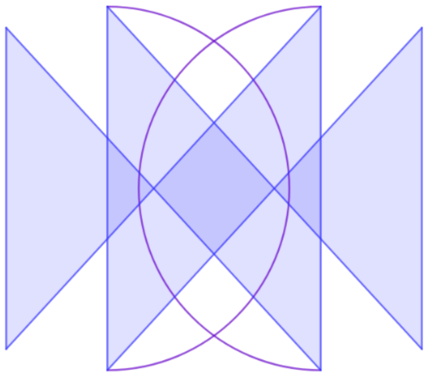
Fonte: Os Autores

Figura 77: Figura com grupo D2



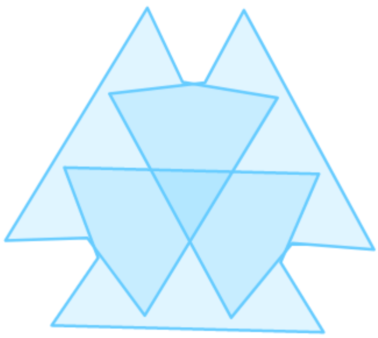
Fonte: Os Autores

Figura 78: Figura com grupo D2



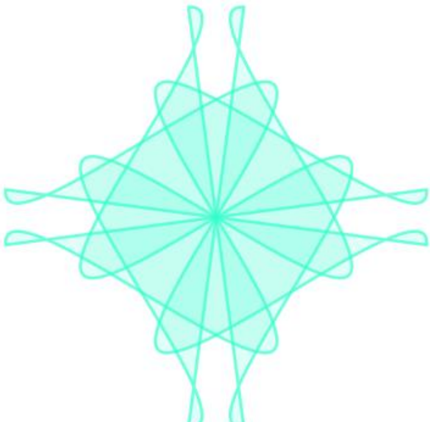
Fonte: Os Autores

Figura 79: Figura com grupo D3



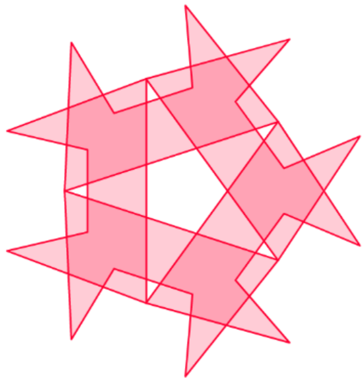
Fonte: Os Autores

Figura 80: Figura com grupo D4



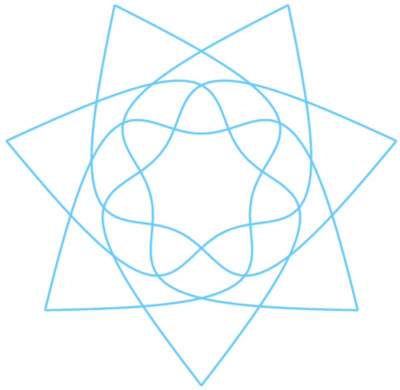
Fonte: Os Autores

Figura 81: Figura com grupo D5



Fonte: Os Autores

Figura 82: Figura com grupo D7



Fonte: Os Autores

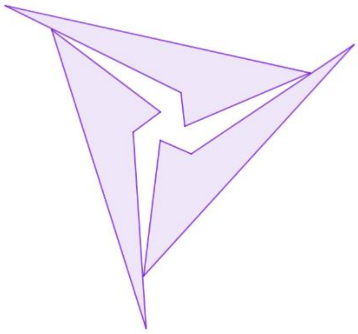
Figura 83: Figura com grupo C2

Fonte: Os Autores

Figura 84: Figura com grupo C3

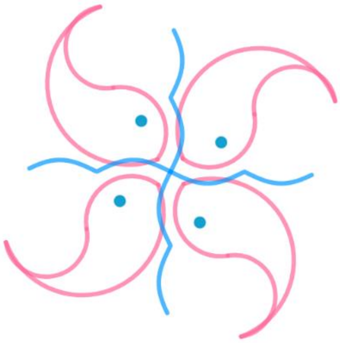
Fonte: Os Autores

Figura 85: Figura com grupo C3



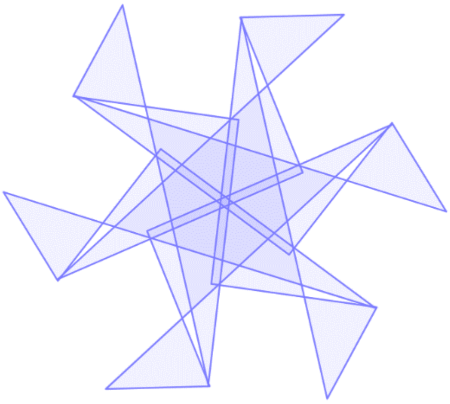
Fonte: Os Autores

Figura 86: Figura com grupo C4



Fonte: Os Autores

Figura 87: Figura com grupo C5

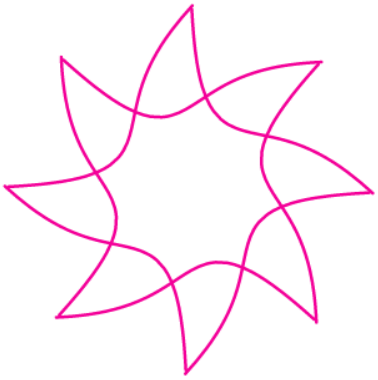


Fonte: Os Autores

Figura 88: Figura com grupo C6

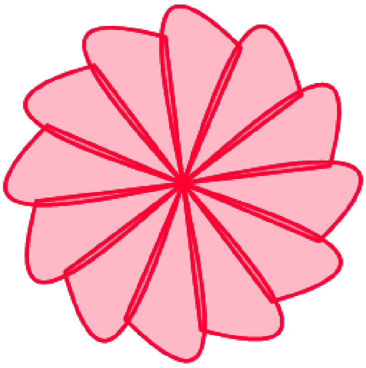
Fonte: Os Autores

Figura 89: Figura com grupo C8



Fonte: Os Autores

Figura 90: Figura com grupo C12



Fonte: Os Autores